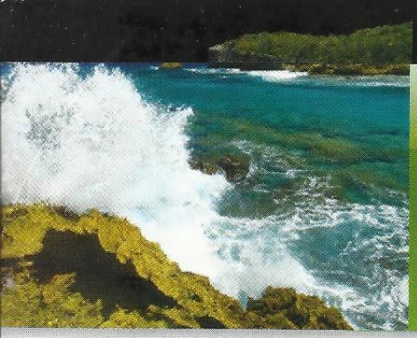


8 الدوال الجذرية والدوال النسبية والهندسة

الاستعداد للوحدة 8 461

8-1 دوال الجذر التربيعي 463

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي 470

8-2 تبسيط التعابير الجذرية 471

التوسع: مختبر الجبر الأعداد النسبية وغير النسبية 477

8-3 العمليات على التعابير الجذرية 478

8-4 المعادلات الجذرية 483

■ اختبار نصف الوحدة 487

8-5 التغير العكسي 488

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني عائلة الدوال النسبية 495

8-6 الدوال النسبية 496

8-7 المعادلات النسبية 502

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات النسبية 509

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 511

■ تمرين على الاختبار 515

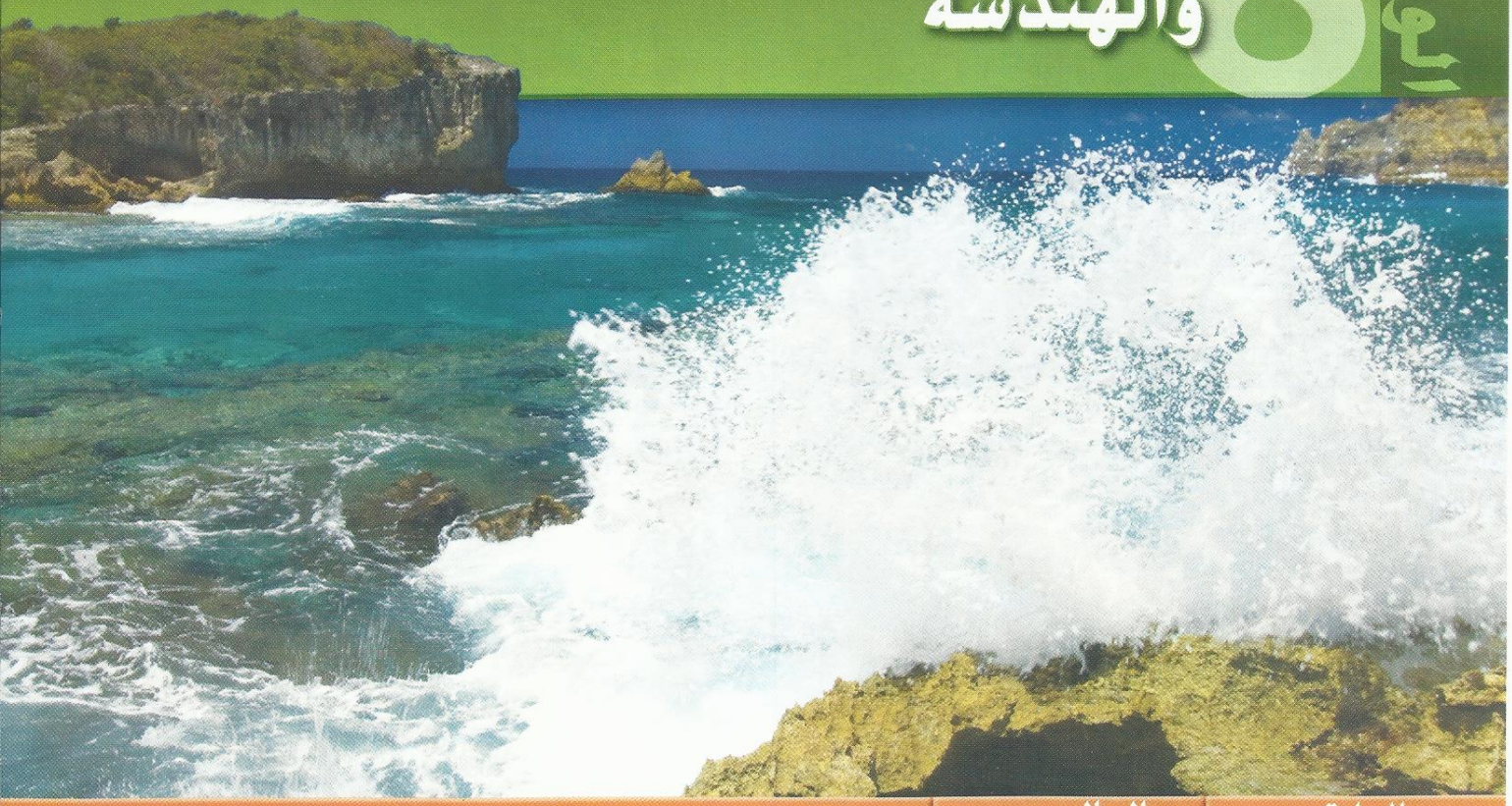
■ التحضير للاختبارات المعيارية 516

■ تمرين على الاختبار المعياري، الوحدات 1 الى 8 518

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 8

الدوال الجذرية والدوال النسبية والهندسة



السابق

- وجدت حل المعادلات التربيعية والأسية.

الحالي

- في هذه الوحدة، سوف تتعلم:
  - تمثيل الدوال الجذرية بيانيًا وتحويلها.
  - تبسيط التعابير الجذرية وجمعها وطرحها وضربها.
  - حل المعادلات الجذرية.
  - استخدام نظرية فيثاغورس.
  - إيجاد النسب المثلثية.

لماذا ▲

- **محيطات** تتولد تسونامي، أو الأمواج الكبرى، من الزلازل الواقعة تحت البحر. ويمكن استخدام المعادلة الجذرية لإيجاد سرعة تسونامي بالأمتار في الثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

أوجد كل جذر تربيعي. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

1. $\sqrt{82}$
2. $\sqrt{26}$
3. $\sqrt{15}$
4. $\sqrt{99}$

5. **صندوق الرمل** يصنع عيسى صندوق رمل مربعًا له مساحة 100 متر مربع. فكم طول الضلع في صندوق الرمل؟

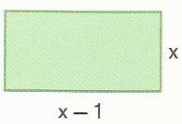
حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $(21x + 15y) - (9x - 4y)$
7. $13x - 5y + 2y$
8. $(10a - 5b) + (6a + 5b)$
9. $6m + 5n + 4 - 3m - 2n + 6$
10. $x + y - 3x - 4y + 2x - 8y$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

11. $2x^2 - 4x = 0$
12. $6x^2 - 5x - 4 = 0$
13. $x^2 - 7x + 10 = 0$
14. $2x^2 + 7x - 5 = -1$

15. **الهندسة** مساحة المستطيل المجاور تساوي 90 مترًا مربعًا. أوجد x.



تدريب سريع

مثال 1

أوجد الجذر التربيعي لـ $\sqrt{50}$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم الآلة الحاسبة. $\sqrt{50} = 7.071067812....$

إلى أقرب جزء من المائة. $\sqrt{50} = 7.07$.

مثال 2

بسّط $3x + 7y - 4x - 8y$.

$3x + 7y - 4x - 8y$

اجمع الحدود المتشابهة. $= (3x - 4x) + (7y - 8y)$

بسّط. $= -x - y$

مثال 3

أوجد حل $x^2 - 5x + 6 = 0$.

المعادلة الأصلية $x^2 - 5x + 6 = 0$

حلل إلى العوامل. $(x - 3)(x - 2) = 0$

خاصية ناتج الضرب الصفري $x - 3 = 0$ أو $x - 2 = 0$

حل كل معادلة. $x = 3$ $x = 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

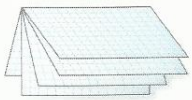
البدء في الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك الوحدة 8.
للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.
قد ترغب بالرجوع إلى الوحدة 0 لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظّم الدراسة

الدوال الجذرية والهندسة اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 8 المتعلقة بالدوال الجذرية والهندسة. ابدأ باستخدام أربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالعرض.



2 **دبّس** بطول الطية.

3 **اقلب** الطية إلى اليمين واكتب عنوان الوحدة في الأمام. في كل صفحة يمنى من المطوية، اكتب عنوان درس من دروس الوحدة.

المفردات الجديدة

دالة الجذر التربيعي square root function
مجذور radicand
دالة جذرية radical function
تعبير جذري radical expression
مرافق conjugate
إنطاق المقام rationalize the denominator
مغلقة closed
معادلات جذرية radical equations
حلول دخيلة extraneous solutions
تغير عكسي inverse variation
قاعدة ناتج الضرب product rule
دالة نسبية rational function
قيم مستبعدة excluded values
خط مقارب asympote
معادلة نسبية rational equation
مسألة عمل work problem
مسألة معدل rate problem

مراجعة المفردات

طريقة فويل لضرب زوج من ثنائيات الحدود. أوجد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين، والحدين الطرفيين، والحدين الوسطيين، والحدين الأخيرين

المربع الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

التناسب هو معادلة لها الصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$ توضح أن النسبتين متكافئتان

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$
$$ad = bc$$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 8-1

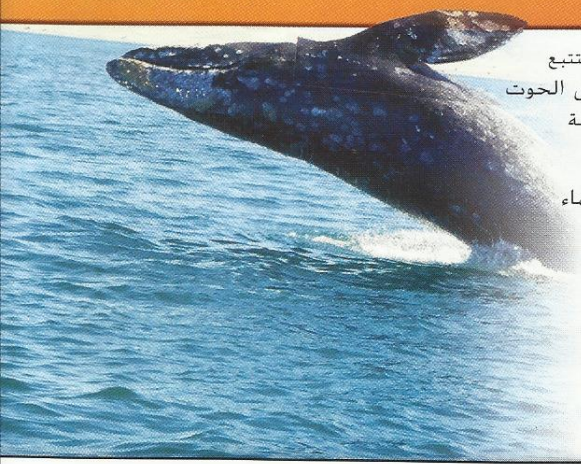
دوال الجذر التربيعي

السابق:
- مثّلت الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانيًا وحللتها.

الحالي:
1 تمثيل تمددات الدوال الجذرية وتحليلها.
2 تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية وتحليلها.

لماذا؟
- يستخدم العلماء أصوات الحيتان لتتبع تحركاتها. ويمكن إيجاد المسافة إلى الحوت عن طريق الربط بين الزمن وسرعة الصوت في الماء.

يمكن وصف سرعة الصوت في الماء بدالة الجذر التربيعي $c = \sqrt{\frac{E}{d}}$، حيث E تمثل مجموعة معامل المرونة للماء و d تمثل كثافة الماء.



المفردات الجديدة

دالة الجذر التربيعي square root function

دالة جذرية radical function

مجذور radicand

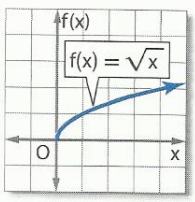
ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

1 تمدد الدوال الجذرية

تشتمل **دالة الجذر التربيعي** على الجذر التربيعي لمتغير. وتعد دوال الجذر التربيعي نوعًا من أنواع **الدالة الجذرية**. ويُطلق على التعبير تحت علامة الجذر: **المجذور**. لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. القيم التي تجعل المجذور سالبًا لا يتم تضمينها في المجال.

المفهوم الأساسي دالة الجذر التربيعي



الدالة الأصلية: $f(x) = \sqrt{x}$

نوع التمثيل البياني: منحنى

المجال: $\{x | x \geq 0\}$

المدى: $\{y | y \geq 0\}$

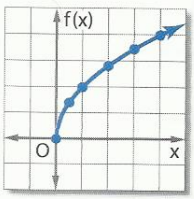
مثال 1 تمدد دالة الجذر التربيعي

مثّل $f(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً.

x	0	0.5	1	2	3	4
f(x)	0	≈1.4	2	≈2.8	≈3.5	4

الخطوة 2 عيّن النقاط. ارسم منحنى منتظمًا.



المجال هو $\{x | x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y | y \geq 0\}$. لاحظ أن التمثيل البياني يتزايد على المجال بالكامل. والقيمة الصغرى هي 0. ولا يوجد تماثل.

تمرين موجّه

1A. $g(x) = 4\sqrt{x}$

1B. $h(x) = 6\sqrt{x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية

تذكر أنه عندما تكون القيمة a سالبة في الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$، يكون التمثيل البياني للدالة الأصلية منعكسًا للأسفل على المحور x.

المفهوم الأساسي التمثيل البياني لـ $y = a\sqrt{x+h} + k$

الخطوة 1 ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = a\sqrt{x}$. يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل ويمر عبر $(1, a)$. إذا كان $a > 0$، فالتمثيل البياني يكون في الربع الأول.
إذا كان $a < 0$، فالتمثيل البياني يكون منعكسًا للاسفل على المحور x ويكون في الربع الرابع.

الخطوة 2 أزح التمثيل البياني k وحدات لأعلى إذا كان $k > 0$ و $|k|$ وحدات لأسفل إذا كان $k < 0$.

الخطوة 3 أزح التمثيل البياني h وحدات يسارًا إذا كان $h > 0$ و $|h|$ وحدات يمينًا إذا كان $h < 0$.

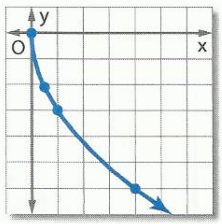
نصيحة دراسية
التمثيل البياني للدوال الجذرية اختر المربعات الكاملة لقيم x التي سوف تنتج عنها إحداثيات سهلة التعيين.

مثال 2 انعكاس دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولًا للقيم. ثم عيّن النقاط على النظام الإحداثي وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.

x	0	0.5	1	4
y	0	≈−2.1	−3	−6



لاحظ أن التمثيل البياني يكون في الربع الرابع. ويتم الحصول عليه عن طريق تمدد التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ رأسيًا ثم انعكاسه على المحور x. المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y \mid y \leq 0\}$.

تمرين موجّه

2A. $y = -2\sqrt{x}$

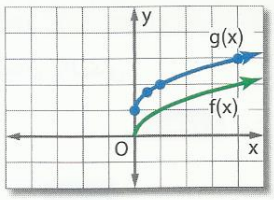
2B. $y = -4\sqrt{x}$

مثال 3 إزاحة دالة الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} + 1$

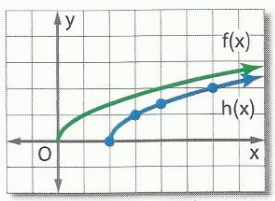
x	0	0.5	1	4	9
y	0	≈1.7	2	3	4



لاحظ أن قيم $g(x)$ أكبر بواحد من قيم $f(x) = \sqrt{x}$.
هذه إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة لأعلى من الدالة الأصلية.
المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.

b. $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2	3	4	6
y	0	1	≈1.4	2



هذه إزاحة أفقية بمقدار وحدتين يمينًا من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$. والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

نصيحة دراسية
إزاحة الدوال الجذرية إذا كان $h > 0$، فإن الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x-h}$ تمثل إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يمينًا.
$f(x) = \sqrt{x+h}$ هي إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يسارًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

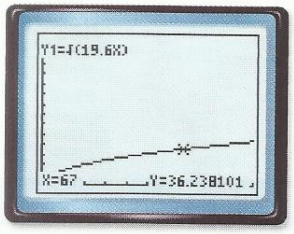
تمرين موجّه

3A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$ **3B.** $h(x) = \sqrt{x} + 3$

يمكن تمثيل ظاهرة فيزيائية مثل الحركة عن طريق الدوال الجذرية. غالبًا ما تكون هذه الدوال تحويلات من دالة الجذر التربيعي الأصلية.

مثال 4 من الحياة اليومية تحليل الدالة الجذرية

الجسور يمتد جسر جولدن جيت لمسافة 67 مترًا تقريبًا فوق سطح الماء. السرعة المتجهة v لجسم ما في سقوط حر من h أمتار تُحددها المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث g هو ثابت مسافة 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة. مثّل الدالة بيانيًا. إذا سقط جسم ما من الجسر، فماذا ستكون سرعته المتجهة عندما يصطدم بالماء؟



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

لإيجاد السرعة المتجهة للجسم. عوّض بـ 67 مترًا عن h.

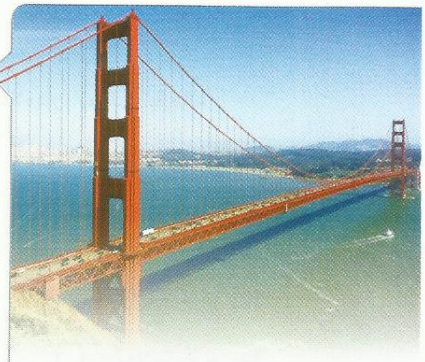
$v = \sqrt{2gh}$ الدالة الأصلية

$= \sqrt{2(9.8)(67)}$ $g = 9.8$ و $h = 67$

$= \sqrt{1313.2}$ بسّط.

≈ 36.2 m/s استخدم الآلة الحاسبة.

السرعة المتجهة للجسم تقدر بحوالي 36.2 مترًا لكل ثانية بعد السقوط من ارتفاع 67 مترًا.



الربط بالحياة اليومية

تعبر 39 مليون سيارة تقريبًا جسر جولدن جيت في سان فرانسيسكو كل عام.

المصدر: مركز سان فرانسيسكو للمؤتمرات والزوار

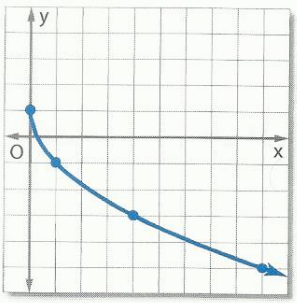
تمرين موجّه

4. استخدم التمثيل البياني أعلاه لتقدير الارتفاع الأولي لجسم ما إذا كان يتحرك بمعدل 20 مترًا لكل ثانية عند اصطدامه بالماء.

ويمكن الجمع بين تحويلات مثل الانعكاسات والإزاحات والتمددات في معادلة واحدة.

مثال 5 تحويلات دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -2\sqrt{x} + 1$ بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.



x	0	1	4	9
y	1	−1	−3	−5

هذا التمثيل البياني نتيجة تمدد رأسي للتمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ يتبعه انعكاس على المحور x. ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة. المجال هو $\{x | x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y | y \leq 1\}$.

تمرين موجّه

5A. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$ **5B.** $y = -2\sqrt{x - 1}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 3\sqrt{x}$
2. $y = -5\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$
4. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{x} + 3$
6. $y = \sqrt{x} - 2$
7. $y = \sqrt{x + 2}$
8. $y = \sqrt{x - 3}$

مثال 4 9. **السقوط الحر** الزمن t، بالثواني، الذي يستغرقه جسم ما للسقوط على مسافة d، بالأمتار، يُعطى بالدالة $t = \frac{5}{11}\sqrt{d}$ (مع افتراض صفرية مقاومة الهواء). مثّل الدالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى.

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

10. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 2$
11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x} - 1$
12. $y = -2\sqrt{x + 1}$
13. $y = 3\sqrt{x - 2}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 5\sqrt{x}$
15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
16. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$
17. $y = 7\sqrt{x}$
18. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$
19. $y = -\sqrt{x}$
20. $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x}$
21. $y = -7\sqrt{x}$
22. $y = \sqrt{x} + 2$
23. $y = \sqrt{x} + 4$
24. $y = \sqrt{x} - 1$
25. $y = \sqrt{x} - 3$
26. $y = \sqrt{x} + 1.5$
27. $y = \sqrt{x} - 2.5$
28. $y = \sqrt{x + 4}$
29. $y = \sqrt{x - 4}$
30. $y = \sqrt{x + 1}$
31. $y = \sqrt{x - 0.5}$
32. $y = \sqrt{x + 5}$
33. $y = \sqrt{x - 1.5}$

مثال 4 34. **الهندسة** محيط المربع يُعطى بالدالة $P = 4\sqrt{A}$ ، حيث A هي مساحة المربع.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. حدد محيط مربع له مساحة $225\ m^2$.

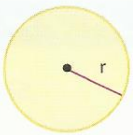
c. متى سيصبح المحيط والمساحة بقيمة واحدة؟

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

35. $y = -2\sqrt{x} + 2$
36. $y = -3\sqrt{x} - 3$
37. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$
38. $y = -\sqrt{x - 1}$
39. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x - 1} + 2$
40. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2} + 1$

41. **الطاقة** يكون لجسم ما طاقة حركية عندما يتحرك. السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية لجسم ما كتلته m كيلوجرامات بطاقة E جول، تُعطى بالدالة $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة التي تعبر عن السرعة المتجهة لكرة سلة كتلتها 0.6 كيلوجرام. بيانيًا

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف



42. **الهندسة** نصف قطر الدائرة يُعطى بالمعادلة $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.
حيث A هي مساحة الدائرة.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحديد نصف قطر دائرة لها المساحة $27\ cm^2$.

43. سرعة الصوت تُحدد سرعة الصوت في الهواء بدرجة حرارة الهواء. السرعة v بالأمتار لكل ثانية تُعطى بالمعادلة $c = 331.5\sqrt{1 + \frac{t}{273.15}}$ حيث t هي درجة حرارة الهواء بالدرجات المئوية.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

b. ما مدى سرعة انتقال الصوت عندما تكون درجة الحرارة 55°C؟

c. كيف ستتأثر سرعة الصوت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى 65°C؟

44. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والقطوع المكافئة.

a. **بيانيًا** مثّل $y = x^2$ بيانيًا على نظام إحداثي.

b. **جبريًا** اكتب دالة متعددة التعريف لوصف التمثيل البياني لـ $y^2 = x$ في كل ربع.

c. **بيانيًا** على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$ بيانيًا.

d. **بيانيًا** على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = x$ بيانيًا. عيّن النقاط (2, 4)، و (4, 2)، و (1, 1).

e. **تحليليًا** قارن بين التمثيل البياني للقطع المكافئ بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التحدي **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. أعطِ مثالًا أو مثالا مضادًا لدعم إجابتك.**

45. الأعداد في مجال الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

46. الأعداد في مدى الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

47. **الكتابة في الرياضيات** لماذا توجد حدود لمجال دوال الجذر التربيعي ومداها؟

48. **الأدوات** اكتب دالة جذرية يكون مجالها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أكبر من أو تساوي 2 ويكون مداها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أقل من أو تساوي 5.

49. **أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟** أوجد المعادلة التي لا تنتمي للمجموعة. اشرح.

$y = 3\sqrt{x}$	$y = 0.7\sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} + 3$	$y = \frac{\sqrt{x}}{6}$

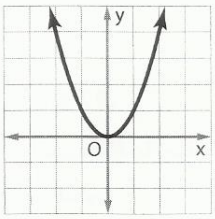
50. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة تكون نتيجة انعكاس وإزاحة وتمدد للتمثيل البياني الأصلي لـ $y = \sqrt{x}$.

51. **الاستنتاج** إذا كان مدى الدالة $y = a\sqrt{x}$ هو $\{y \mid y \leq 0\}$، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن قيمة a؟ اشرح استنتاجك.

52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

53. 

أي دالة تمثل بشكل *أفضل* التمثيل البياني؟

A $y = x^2$ C $y = \sqrt{x}$

B $y = 2^x$ D $y = x$

54. العبارة "$x < 10$ و $3x - 2 \geq 7$" تكون صحيحة عندما x يساوي ماذا؟

F 0 H 8

G 2 J 12

55. أي مما يلي هي معادلة مستقيم موازٍ لـ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ويمر عبر $(-1, -2)$؟

A $y = \frac{1}{2}x$ C $y = -\frac{1}{2}x + 2$

B $y = 2x + 3$ D $y = -\frac{1}{2}x - 2$

56. الإجابة القصيرة إذا كان منسق حدائق يحتاج إلى فرش نشارة خشبية على 6 أحواض زهور مستطيلة وقياسها 8 أمتار في 4 أمتار، و 4 أحواض زهور مستديرة نصف قطر كل منها يبلغ 3 أمتار. وتغطي عبوة النشارة الخشبية الواحدة 25 مترًا مربعًا. فكم عدد عبوات النشارة الخشبية المطلوبة لتغطية الأحواض الزهرية؟

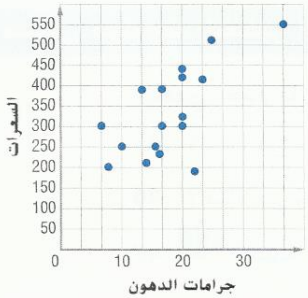
مراجعة شاملة

57. الصحة تتمرن خولة كل يوم بالمشي والجري لمسافة لا تقل عن 3 كيلومترات. وتمشي خولة بمعدل 4 كيلومترات في الساعة، وتجري بمعدل 8 كيلومترات في الساعة. افترض أنه متاح لديها نصف ساعة فقط للتمرن اليوم.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح المدد الزمنية الممكنة التي يمكن أن تقضيها في المشي والجري اليوم.

b. أعط ثلاثة حلول ممكنة.

خيارات وجبات الوجبات السريعة



58. التغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فاشرح دلالته في هذه الحالة.

مراجعة المهارات

حلل كل أحادي الحد إلى عوامل بالكامل.

59. $28n^3$

60. $-33a^2b$

61. $150rt$

62. $-378nq^2r^2$

63. $225a^3b^2c$

64. $-160x^2y^4$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي

لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. عند تمثيل الدالة الجذرية بيانيًا، حدد متى سيكون المجذور سالبًا واستبعد هذه القيم من المجال.

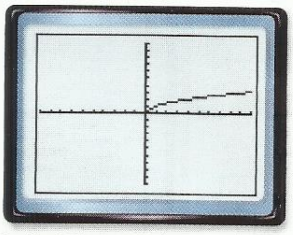
ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd [√] X,T,θ,n) ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

1A. تفحّص التمثيل البياني. ما مجال الدالة؟

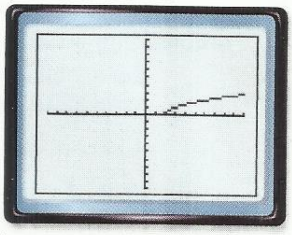
1B. ما مدى الدالة؟

النشاط 2 إزاحة الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x - 2}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd [√] X,T,θ,n − 2) ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

2A. ما مجال الدالة ومداها؟

2B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x - 2}$ والتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$؟

تمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا، وارسم التمثيل البياني على الورقة. واذكر المجال والمدى. واشرح وجه الاختلاف بين التمثيل البياني عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$.

1. $y = \sqrt{x - 1}$
2. $y = \sqrt{x + 3}$
3. $y = \sqrt{x} - 2$
4. $y = \sqrt{-x}$
5. $y = -\sqrt{x}$
6. $y = \sqrt{2x}$
7. $y = \sqrt{2 - x}$
8. $y = \sqrt{x - 3} + 2$

حل كل معادلة مما يلي لإيجاد y. هل تمثل المعادلة دالة؟ اشرح استنتاجك.

9. $x = y^2$
10. $x^2 + y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 = 2$

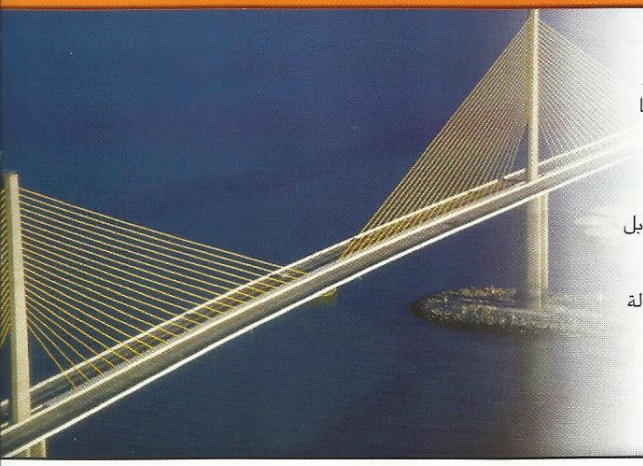
أكتب دالة بتمثيل بياني يزيح $y = \sqrt{x}$ في كل اتجاه مما يلي.

12. إزاحة 4 وحدات يسارًا
13. إزاحة 7 وحدات لأعلى
14. إزاحة 6 وحدات لأسفل
15. إزاحة 5 وحدات يمينًا و 3 وحدات لأعلى

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-2 تبسيط التعابير الجذرية

السابق	الحالي	لماذا
• حوّلت الجذور لأبسط صورة.	1 تحويل التعابير الجذرية لأبسط صورة باستخدام خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية. 2 تحويل التعابير الجذرية لأبسط صورة باستخدام خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية.	• يمتد جسر "صن شاين سكاي واي" عبر خليج تامبا في فلوريدا، وهو مدعوم بكابلات من الصلب عددها 21 كابلًا. ويبلغ قطر الواحد منها 22 سنتيمترًا. لتحديد ما إذا ما كان قطر الكابل الصلب ينبغي أن يدعم وزنًا محددًا، يمكنك استخدام المعادلة $d = \sqrt{\frac{w}{8}}$، حيث d هو قطر الكابل بالسنتيمترات و w هو الوزن بالأطنان.



المفردات الجديدة

تعبير جذري radical expression

إنطاق المقام rationalizing the denominator

مرافق conjugate

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

يشتمل **التعبير الجذري** على جذر ما، مثل الجذر التربيعي. تذكر أن التعبير تحت علامة الجذر يُطلق عليه المجذور. يكون المجذور في أبسط صورة إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- ألا يوجد مجذور به عوامل مربع كامل غير 1.
- ألا يوجد مجذور مشتمل على كسور.
- ألا يظهر مجذور في مقام كسر.

يمكن استخدام الخاصية التالية لتحويل الجذور التربيعية لأبسط صورة.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

الشرح بالنسبة لأي عددين حقيقيين غير سالبين a و b، الجذر التربيعي لـ ab يساوي الجذر التربيعي لـ a مضروبًا في الجذر التربيعي لـ b.

الرموز $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$

أمثلة $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36}$ أو 6 $\quad \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3$ أو 6

مثال 1 تبسيط الجذور التربيعية

بسّط $\sqrt{80}$.

$\sqrt{80} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5}$ تحليل 80 إلى العوامل الأولية

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= 2 \times 2 \times \sqrt{5}$ أو $4\sqrt{5}$ بسّط.

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{54}$

1B. $\sqrt{180}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 2 ضرب الجذور التربيعية

بسّط $\sqrt{2} \times \sqrt{14}$.

$\sqrt{2} \times \sqrt{14} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{7}$ أو $2\sqrt{7}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

تمرين موجّه

2A. $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$ **2B.** $\sqrt{6} \times \sqrt{8}$

باعتبار التعبير $\sqrt{x^2}$. قد يبدو أن $\sqrt{x^2} = x$، ولكن عند إيجاد الجذر التربيعي الأساسي لتعبير يشتمل على متغيرات، يتعين عليك التأكد من ألا تكون الإجابة سالبة. باعتبار $x = -3$.

$\sqrt{x^2} \stackrel{?}{=} x$

$\sqrt{(-3)^2} \stackrel{?}{=} -3$ عوّض عن x بـ -3.

$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} -3$ $(-3)^2 = 9$

$3 \neq -3$ $\sqrt{9} = 3$

لاحظ أنه في تلك الحالة، إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة $|x|$. فستكون المعادلة صحيحة. بالنسبة للتعابير التي يكون فيها أس المتغير داخل الجذر زوجيًا ويكون الأس المبسط فرديًا. يجب عليك استخدام القيمة المطلقة.

$\sqrt{x^2} = |x|$ $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ $\sqrt{x^4} = x^2$ $\sqrt{x^6} = |x^3|$

مثال 3 تبسيط الجذر التربيعي ذي المتغيرات

بسّط $\sqrt{90x^3y^4z^5}$.

$\sqrt{90x^3y^4z^5} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5 \times x^3 \times y^4 \times z^5}$ التحليل إلى العوامل الأولية

$= \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} \times \sqrt{y^4} \times \sqrt{z^4} \times \sqrt{z}$ خاصية ناتج الضرب

$= \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{5} \times x \times \sqrt{x} \times y^2 \times z^2 \times \sqrt{z}$ بسّط.

$= 3y^2z^2x\sqrt{10xz}$ بسّط.

تمرين موجّه

3A. $\sqrt{32r^2k^4t^5}$ **3B.** $\sqrt{56xy^{10}z^5}$

2 خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

لقسمة الجذور التربيعية وتحويل التعابير لأبسط صورة، يمكنك استخدام خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

الشرح بالنسبة لأي عددين حقيقيين a و b، حيث $a \geq 0$ و $b > 0$، الجذر التربيعي لـ $\frac{a}{b}$ يساوي الجذر التربيعي لـ a مقسومًا على الجذر التربيعي لـ b.

الرموز $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

قراءة في الرياضيات

الكسور في المجذور التعبير $\sqrt{\frac{a}{b}}$ يُقرأ *الجذر التربيعي لـ* a *على* b. أو *الجذر التربيعي للكمية* a *على* b.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام خواص الجذور التربيعية **إنطاق مقام** كسر به جذر. يتضمن ذلك ضرب البسط والمقام في عامل من شأنه إزالة الجذور من المقام.

مثال 4 على الاختبار المعياري إنطاق المقام

أي من التعابير التالية هو مكافئ لـ $\sqrt{\frac{35}{15}}$؟

A $\frac{5\sqrt{21}}{15}$ B $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C $\frac{\sqrt{525}}{15}$ D $\frac{\sqrt{35}}{15}$

قراءة فقرة الاختبار مطلوب تحويل التعبير الجذري لأبسط صورة.

حَل فقرة الاختبار

$\sqrt{\frac{35}{15}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ اختصر $\frac{35}{15}$ إلى $\frac{7}{3}$.

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ اضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$= \frac{\sqrt{21}}{3}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

الاختيار الصحيح هو B.

نصيحة عند حل الاختبار

البنية انظر إلى المجذور لرؤية ما إذا كان يمكن تحويله لأبسط صورة أولاً. فقد يُسهل ذلك عليك حساباتك.

تمرين موجّه

4. بسّط $\frac{\sqrt{6y}}{\sqrt{12}}$.

F $\frac{\sqrt{y}}{2}$ G $\frac{\sqrt{y}}{4}$ H $\frac{\sqrt{2y}}{2}$ J $\frac{\sqrt{2y}}{4}$

ثنائيات الحد التي لها الصيغة $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$، حيث a، و b، و c، و d أعداد نسبية، يُطلق عليها اسم **المرافقات**. على سبيل المثال، $\sqrt{7} + 2$ و $\sqrt{7} - 2$ مرافقان.

ناتج ضرب المرافقين يكون عبارة عن عدد نسبي، والذي يمكن إيجاده باستخدام نمط لفرق المربعات.

مثال 5 استخدام المرافقات لإنطاق المقام

بسّط $\frac{3}{5 + \sqrt{2}}$.

$\frac{3}{5 + \sqrt{2}} = \frac{3}{5 + \sqrt{2}} \times \frac{5 - \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$ مقارب $5 + \sqrt{2}$ هو $5 - \sqrt{2}$.

$= \frac{3(5 - \sqrt{2})}{5^2 - (\sqrt{2})^2}$ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$= \frac{15 - 3\sqrt{2}}{25 - 2}$ أو $\frac{15 - 3\sqrt{2}}{23}$ $(\sqrt{2})^2 = 2$

تمرين موجّه **بسّط جميع التعابير التالية.**

5A. $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ **5B.** $\frac{7}{3 - \sqrt{7}}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $\sqrt{24}$
2. $3\sqrt{16}$
3. $2\sqrt{25}$
4. $\sqrt{10} \times \sqrt{14}$
5. $\sqrt{3} \times \sqrt{18}$
6. $3\sqrt{10} \times 4\sqrt{10}$
7. $\sqrt{60x^4y^7}$
8. $\sqrt{88m^3p^2r^5}$
9. $\sqrt{99ab^5c^2}$

مثال 4

10. **اختيار من متعدد** أي من التعبيرات التالية هو مكافئ لـ $\sqrt{\frac{45}{10}}$؟

A $\frac{5\sqrt{2}}{10}$ B $\frac{\sqrt{45}}{10}$ C $\frac{\sqrt{50}}{10}$ D $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

مثال 5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

11. $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$
12. $\frac{5}{2-\sqrt{6}}$
13. $\frac{2}{1-\sqrt{10}}$
14. $\frac{1}{4+\sqrt{12}}$
15. $\frac{4}{6-\sqrt{7}}$
16. $\frac{6}{5+\sqrt{11}}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\sqrt{52}$
18. $\sqrt{56}$
19. $\sqrt{72}$
20. $3\sqrt{18}$
21. $\sqrt{243}$
22. $\sqrt{245}$
23. $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$
24. $\sqrt{10} \times \sqrt{20}$
25. $3\sqrt{8} \times 2\sqrt{7}$
26. $4\sqrt{2} \times 5\sqrt{8}$
27. $3\sqrt{25t^2}$
28. $5\sqrt{81q^5}$
29. $\sqrt{28a^2b^3}$
30. $\sqrt{75qr^3}$
31. $7\sqrt{63m^3p}$
32. $4\sqrt{66g^2h^4}$
33. $\sqrt{2ab^2} \times \sqrt{10a^5b}$
34. $\sqrt{4c^3d^3} \times \sqrt{8c^3d}$

35. **الأفعوانية** بدءًا من الوضع الثابت، يمكن تقريب السرعة المتجهة v للأفعوانية بالأمتار لكل ثانية عند أسفل التل، عن طريق المعادلة $v = \sqrt{19.6h}$، حيث h هو ارتفاع التل بالأمتار.

a. حدد السرعة المتجهة للأفعوانية عند قاع تل يبلغ ارتفاعه 41 مترًا.

36. **الدقة** عند إخماد الحريق، تُمثل السرعة المتجهة v للماء الذي يتم ضخه في الهواء، بالمعادلة $v = \sqrt{2hg}$ حيث h يمثل الارتفاع الأقصى للماء و g يمثل التسارع بفعل الجاذبية ($9.8\ m/s^2$).

a. حل الدالة لإيجاد h.

b. إذا كانت إدارة المدينة لمكافحة الحريق تحتاج إلى مضخة تدفع الماء إلى مسافة 24 مترًا في الهواء. فهل احتياجها ستلبيه مضخة مُعلن أنها تُخرج المياه بسرعة متجهة معدلها 21 m لكل ثانية؟ اشرح.

c. إذا كان يجب على إدارة مكافحة الحريق شراء مضخة تدفع الماء مسافة 27.5 مترًا في الهواء. فهل احتياج إدارة مكافحة الحريق ستلبيه مضخة مُعلن أنها تُخرج المياه بسرعة متجهة معدلها 23 m لكل ثانية؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 5-4 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

37. $\sqrt{\frac{32}{t^4}}$ 38. $\sqrt{\frac{27}{m^5}}$ 39. $\frac{\sqrt{68ac^3}}{\sqrt{27a^2}}$

40. $\frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt{8}}$ 41. $\sqrt{\frac{3}{16}} \times \sqrt{\frac{9}{5}}$ 42. $\sqrt{\frac{7}{2}} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

43. $\frac{7}{5+\sqrt{3}}$ 44. $\frac{9}{6-\sqrt{8}}$ 45. $\frac{3\sqrt{3}}{-2+\sqrt{6}}$

46. $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ 47. $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ 48. $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$

49. **الكهرباء** كمية التيار بالأمبير I التي يستخدمها جهاز ما يمكن حسابها باستخدام الصيغة $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$، حيث P هي القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأوم.

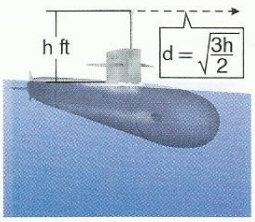
a. حوّل الصيغة لأبسط صورة.

b. ما كمية التيار التي يستخدمها جهاز ما إذا كانت القدرة المستخدمة تساوي 75 واط والمقاومة 5 أوم؟

50. **الطاقة الحركية** سرعة الكرة v يمكن تحديدها بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2k}{m}}$، حيث k هي الطاقة الحركية و m هي كتلة الكرة.

a. حوّل المعادلة لأبسط صورة إذا كانت كتلة الكرة تساوي 3 كيلوجرامات.

b. إذا كانت الكرة تقطع 7 أمتار لكل ثانية، فما الطاقة الحركية للكرة بالجول؟



51. **الغواصات** أكبر مسافة d بالكيلومترات التي يمكن لنقطة المراقبة أن تراها في وضوح النهار يتم تمثيلها بالصيغة المبينة. حدد مدى الارتفاع الذي يجب على الغواصة أن ترفع البريسكوب إليه لرؤية سفينة ما، إذا كانت الغواصة هي مسافات البعد عن السفينة المبينة.
قرّب إجابتك إلى منزلة عشرية واحدة.

المسافة	3	6	9	12	15
الارتفاع					

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. **البنية** اشرح كيفية حل $\frac{\sqrt{3+2}}{x} = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3}}$.

53. **التحدي** حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\sqrt[3]{27}$ **b.** $\sqrt[3]{40}$ **c.** $\sqrt[3]{750}$

54. **التبرير** إذا أخذت آمنة عددًا وطرحت منه 4 وضربته في 4 وأخذت الجذر التربيعي له وأخذت النظير الضربي له وحصلت على $\frac{1}{2}$. فما العدد الذي بدأت به؟ أكتب صيغة تصف هذه العملية.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب زوجًا من ثنائيات الحد بالصيغة $a\sqrt{b} + c\sqrt{f}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{f}$. ثم أوجد ناتج ضربهما.

56. **التحدي** استخدم خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية لاشتقاق الصيغة التربيعية عن طريق حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$. (إرشاد: ابدأ بإكمال المربع.)

57. **الكتابة في الرياضيات** لخّص طريقة كتابة التعبير الجذري في أبسط صورة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

58. إذا كانت فاتورة الكهرباء الخاصة بسالم أقل بنحو AED 23 بالمقارنة بفاتورة الغاز الطبيعي. وكان إجمالي الفاتورتين يساوي AED 109. فأي من المعادلات التالية يمكن استخدامها لإيجاد تكلفة فاتورة الغاز الطبيعي؟

A $g + g = 109$
B $23 + 2g = 109$
C $g - 23 = 109$
D $2g - 23 = 109$

59. حُل $a^2 - 2a + 1 = 25$.

F $-4, -6$
G $4, -6$
H $-4, 6$
J $4, 6$

60. التعبير $\sqrt{160x^2y^5}$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟

A $16|x|y^2\sqrt{10y}$
B $|x|y^2\sqrt{160y}$
C $4|x|y^2\sqrt{10y}$
D $10|x|y^2\sqrt{4y}$

61. الإجابة الشبكية يجني فارس AED 10 في الساعة و 10% عمولة على المبيعات التي يحققها. فإذا عمل فارس 38 ساعة وحقق مبيعات بإجمالي AED 1,275 الأسبوع الماضي، فما المبلغ الذي حصل عليه؟

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني للدالة الأصلية. واذكر المجال والمدى. (الدرس 1-8)

62. $y = 2\sqrt{x} - 1$
63. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
64. $y = 2\sqrt{x + 2}$
65. $y = -\sqrt{x + 1}$
66. $y = -3\sqrt{x - 3}$
67. $y = -2\sqrt{x} + 1$

68. التعداد السكاني يشهد التعداد السكاني في دولة لاتفيا تناقصًا سنويًا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

69. الطماطم يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطماطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبذور تنتج عبوات بذور لـ 200 صنف من الطماطم. فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بذورًا لها؟

مراجعة المهارات

حلل إلى العوامل الأولية كل عدد مما يلي.

70. 24
71. 88
72. 180
73. 31
74. 60
75. 90

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © جميع الحقوق والتأليف

8-2 مختبر الجبر: الأعداد النسبية وغير النسبية

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

تكون المجموعة **مغلقة** تحت إحدى العمليات إذا أُجريت عملية ما على أي من أعداد المجموعة وكانت النتيجة تنتمي كذلك إلى هذه المجموعة. ومن الممكن أن تُغلق المجموعة تحت عملية ولا تُغلق تحت عملية أخرى.

النشاط 1 إغلاق الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية

هل مجموعات الأعداد النسبية وغير النسبية تكون مغلقة تحت الضرب؟ تحت الجمع؟

الخطوة 1 لتحديد ما إذا كانت كل مجموعة مغلقة تحت الضرب، تفحّص عدة نواتج ضرب لاثنين من العوامل النسبية ثم اثنين من العوامل غير النسبية.

النسبية: $5 \times 2 = 10;\ -3 \times 4 = -12;\ 3.7 \times 0.5 = 1.85;\ \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

غير النسبية: $\pi \times \sqrt{2} = \sqrt{2}\pi;\ \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{21};\ \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

ناتج ضرب كل زوج من الأعداد النسبية يكون نسبيًا. لكن، نواتج ضرب أزواج الأعداد غير النسبية تكون كلاً من غير نسبية ونسبية. لذا، يبدو أن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت الضرب ولكن مجموعة الأعداد غير النسبية ليست كذلك.

الخطوة 2 كرر هذه العملية مع الجمع.

النسبية: $3 + 8 = 11;\ -4 + 7 = 3;\ 3.7 + 5.82 = 9.52;\ \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$

غير النسبية: $\sqrt{3} + \pi = \sqrt{3} + \pi;\ 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5};\ \sqrt{12} + \sqrt{50} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

مجموع كل زوج من الأعداد النسبية يكون نسبيًا، ومجموع كل زوج من الأزواج غير النسبية يكون غير نسبي. كلتاهما تكون مغلقة تحت الجمع.

النشاط 2 الأعداد النسبية وغير النسبية

ما نوع الأعداد التي تمثل ناتج ضرب ومجموع عدد نسبي وآخر غير نسبي؟

الخطوة 1 افحص نواتج ضرب عدة أزواج من الأعداد النسبية وغير النسبية.

$3 \times \sqrt{8} = 6\sqrt{2};\ \frac{3}{4} \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4};\ 1 \times \sqrt{7} = \sqrt{7};\ 0 \times \sqrt{5} = 0$

ناتج الضرب لا يكون نسبيًا إلا عندما يكون العامل النسبي هو 0. وناتج ضرب كل عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون غير نسبي.

الخطوة 2 أوجد مجاميع عدة أزواج من الأعداد النسبية وغير النسبية.

$5 + \sqrt{3} = 5 + \sqrt{3};\ \frac{2}{3} + \sqrt{5} = \frac{2 + 3\sqrt{5}}{3};\ -4 + \sqrt{6} = -1(4 - \sqrt{6})$

مجموع كل عدد نسبي وعدد غير نسبي يكون غير نسبي.

تحليل النتائج

1. ما نوع الأعداد التي تمثل فرق عددين نسبيين مختلفين، وعددين غير نسبيين مختلفين، وعدد نسبي وعدد غير نسبي؟
2. هل ناتج قسمة كل عدد نسبي وآخر غير نسبي يكون دائمًا عددًا آخر نسبي أو غير نسبي؟ وإذا لم يكن كذلك، فاضرب مثالًا مضادًا.
3. **التحدي** تذكر أن الأعداد النسبية هي أعداد يمكن كتابتها بالصيغة $\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$. باستخدام $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ بيّن أن مجموع أي عددين نسبيين وناتج ضربهما يجب دائمًا أن يكونا عددًا نسبيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-8 العمليات على التعابير الجذرية

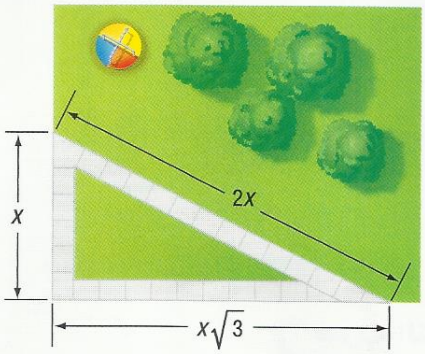
السابق:
- حوّلت التعابير الجذرية لأبسط صورة.

الحالي:
1. جمع التعابير الجذرية وطرحها.
2. ضرب التعابير الجذرية.

لماذا؟
- قرر أنور الجري في حيه استعدادًا لموسم كرة القدم. وخطط لجري المسار الذي حدده ثلاث مرات كل يوم.

ما المسافة التي يجب على أنور جريها لإكمال المسار الذي حدده؟

ما المسافة التي يجب أن يجريها كل يوم؟



ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 جمع أو طرح التعابير الجذرية

لجمع التعابير الجذرية أو طرحها، يجب أن تكون المجذورات متشابهة كما هو الحال مع الحدود أحاديات الحد التي يجب أن تكون متشابهة لإجراء عملية الجمع أو الطرح عليها.

التعابير الجذرية	أحاديات الحد
$4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 + 2)\sqrt{5}$ $= 6\sqrt{5}$	$4a + 2a = (4 + 2)a$ $= 6a$
$9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (9 - 2)\sqrt{3}$ $= 7\sqrt{3}$	$9b - 2b = (9 - 2)b$ $= 7b$

لاحظ أنه عند جمع التعابير الجذرية وطرحها، لا يتغير المجذور. وهو الأمر ذاته عند جمع أحاديات الحدود أو طرحها.

مثال 1 جمع التعابير ذات المجذورات المتشابهة وطرحها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (5 + 7 - 6)\sqrt{2}$ خاصية التوزيع

$= 6\sqrt{2}$ بسّط.

b. $10\sqrt{7} + 5\sqrt{11} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{11}$

$10\sqrt{7} + 5\sqrt{11} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{11} = (10 + 4)\sqrt{7} + (5 - 6)\sqrt{11}$ خاصية التوزيع

$= 14\sqrt{7} - \sqrt{11}$ بسّط.

تمرين موجّه

1A. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

1B. $6\sqrt{11} + 2\sqrt{11} - 9\sqrt{11}$

1C. $15\sqrt{3} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 11\sqrt{3}$

1D. $4\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{7}$

لا تشتمل كل التعابير الجذرية على مجذورات متشابهة. وعن طريق تحويل التعابير لأبسط صورة، يمكن جعلها تشتمل على مجذورات متشابهة بحيث يتسنى جمعها أو طرحها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 جمع التعابير ذات المجذورات غير المتشابهة وطرحها

بسّط $2\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{72}$.

$$2\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{72} = 2(\sqrt{3^2} \times \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4^2} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{6^2} \times \sqrt{2}) \quad \text{خاصية ناتج الضرب}$$
$$= 2(3\sqrt{2}) + 2(4\sqrt{2}) + (6\sqrt{2}) \quad \text{بسّط.}$$
$$= 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \quad \text{اضرب.}$$
$$= 20\sqrt{2} \quad \text{بسّط.}$$

تمرين موجّه

2A. $4\sqrt{54} + 2\sqrt{24}$

2B. $4\sqrt{12} - 6\sqrt{48}$

2C. $3\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

2D. $\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{96}$

نصيحة دراسية

التبسيط أولًا حوّل كل حد جذري لأبسط صورة أولاً. ثم أجر العمليات المطلوبة.

2 ضرب التعابير الجذرية

ضرب التعابير الجذرية يشبه ضرب التعابير أحادية الحدود جبريًا.

ليكن $x \geq 0$.

التعابير الجذرية	أحاديات الحدود
$(2\sqrt{x})(3\sqrt{x}) = 2 \times 3 \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}$	$(2x)(3x) = 2 \times 3 \times x \times x$
$= 6x$	$= 6x^2$

يمكنك استخدام خاصية التوزيع أيضًا مع التعابير الجذرية.

مثال 3 ضرب التعابير الجذرية

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}$

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = (3 \times 2)(\sqrt{2} \times \sqrt{6}) \quad \text{خاصية التجميع}$$
$$= 6(\sqrt{12}) \quad \text{اضرب.}$$
$$= 6(2\sqrt{3}) \quad \text{بسّط.}$$
$$= 12\sqrt{3} \quad \text{اضرب.}$$

b. $3\sqrt{5}(2\sqrt{5} + 5\sqrt{3})$

$$3\sqrt{5}(2\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) = (3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} \times 5\sqrt{3}) \quad \text{خاصية التوزيع}$$
$$= [(3 \times 2)(\sqrt{5} \times \sqrt{5})] + [(3 \times 5)(\sqrt{5} \times \sqrt{3})] \quad \text{خاصية التجميع}$$
$$= [6(\sqrt{25})] + [15(\sqrt{15})] \quad \text{اضرب.}$$
$$= [6(5)] + [15(\sqrt{15})] \quad \text{بسّط.}$$
$$= 30 + 15\sqrt{15} \quad \text{اضرب.}$$

تمرين موجّه

3A. $2\sqrt{6} \times 7\sqrt{3}$

3B. $9\sqrt{5} \times 11\sqrt{15}$

3C. $3\sqrt{2}(4\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$

3D. $5\sqrt{3}(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

انتبه!

ضرب المجذورات

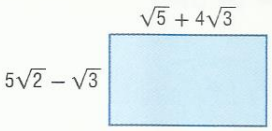
تأكد من ضرب المجذورات عند ضرب التعابير الجذرية. من أحد الأخطاء الشائعة أن يُجرى جمع المجذورات بدلًا من ضربها.

يمكنك كذلك ضرب التعابير الجذرية التي بها أكثر من حد واحد في كل عامل. ويشبه ذلك ضرب زوج من ثنائيات الحد الجبرية ذات المتغيرات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال من الحياة اليومية 4 ضرب التعابير الجذرية

الهندسة أوجد مساحة المستطيل في أبسط صورة.



$A = \ell \cdot w$ $\quad A = (5\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + 4\sqrt{3})$

الحدان الأولان — الحدان الطرفيان — الحدان الوسطيان — الحدان الخارجيان

$= (5\sqrt{2})(\sqrt{5}) + (5\sqrt{2})(4\sqrt{3}) + (-\sqrt{3})(\sqrt{5}) + (\sqrt{3})(4\sqrt{3})$

$= 5\sqrt{10} + 20\sqrt{6} - \sqrt{15} - 4\sqrt{9}$ اضرب.

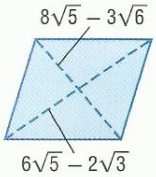
$= 5\sqrt{10} + 20\sqrt{6} - \sqrt{15} - 12$ بسّط.

مراجعة المفردات

طريقة فويل اضرب اثنتين من ثنائيات الحدود عن طريق إيجاد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين. والحدين الطرفيين. والحدين الوسطيين. والحدين الأخيرين.

تمرين موجّه

4. الهندسة يمكن إيجاد مساحة المعين A باستخدام المعادلة $A = \frac{1}{2}d_1d_2$. حيث d_1 و d_2 هما طولا القطرين. ما مساحة المعين على اليسار؟



ملخص المفهوم عمليات على التعابير الجذرية

العملية	الرموز	مثال
جمع. $b \geq 0$	$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b}$ مجذوران متشابهان	$4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = (4 + 6)\sqrt{3}$ $= 10\sqrt{3}$
طرح. $b \geq 0$	$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a - c)\sqrt{b}$ مجذوران متشابهان	$12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (12 - 8)\sqrt{5}$ $= 4\sqrt{5}$
ضرب. $b \geq 0, g \geq 0$	$a\sqrt{b}(f\sqrt{g}) = af\sqrt{bg}$ لا يجب أن تكون الجذور مشتملة على مجذورات متشابهة.	$3\sqrt{2}(5\sqrt{7}) = (3 \times 5)(\sqrt{2} \times 7)$ $= 5\sqrt{14}$

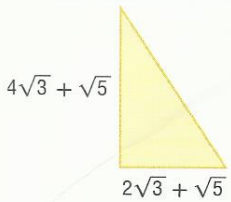
التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
2. $8\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
3. $\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$
4. $10\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$
5. $4\sqrt{5} + 2\sqrt{20}$
6. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
7. $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$
8. $\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{12}$
9. $9\sqrt{2}(4\sqrt{6})$
10. $4\sqrt{3}(8\sqrt{3})$
11. $\sqrt{3}(\sqrt{7} + 3\sqrt{2})$
12. $\sqrt{5}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$

مثال 4

13. الهندسة يمكن إيجاد مساحة A لمثلث ما عن طريق استخدام الصيغة $A = \frac{1}{2}bh$. حيث b تمثل القاعدة و h هو الارتفاع. ما مساحة المثلث على اليسار؟



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

14. $7\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$
15. $2\sqrt{6} + 9\sqrt{6}$
16. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{20}$
17. $3\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$
18. $7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
19. $\sqrt{5}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$
20. $\sqrt{6}(2\sqrt{10} + 3\sqrt{2})$
21. $4\sqrt{5}(3\sqrt{5} + 8\sqrt{2})$
22. $5\sqrt{3}(6\sqrt{10} - 6\sqrt{3})$
23. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{12})$
24. $(3\sqrt{11} + 3\sqrt{15})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
25. $(5\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{10} - 5)$

مثال 4

26. **الهندسة** أوجد محيط المستطيل ومساحته إذا كان عرضه $2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ وطوله $3\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

27. $\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5}$
28. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6}$
29. $2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8}$
30. $8\sqrt{\frac{5}{4}} + 3\sqrt{20} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}$
31. $(3 - \sqrt{5})^2$
32. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

33. **الأفعوانيات** السرعة المتجهة v بالأمتار في الثانية لأفعوانية عند أسفل التل ترتبط بالهبوط العمودي h بالأمتار والسرعة المتجهة v_0 للأفعوانية عند أعلى التل من خلال الصيغة $v_0 = \sqrt{v^2 - 20h}$.

a. ما السرعة التي يجب أن تصل الأفعوانية إليها عند قمة تل طوله 68.8 مترًا لتحقيق سرعة متجهة معدلها 37 مترًا في الثانية عند أسفل التل؟

34. **المعرفة المالية** استثمر إبراهيم AED 225 في حساب مدخرات. وفي عامين، وصل المبلغ في حسابه إلى AED 232 يمكنك استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{v_2}{v_0}} - 1$ لإيجاد متوسط نسبة المرابحة السنوية r التي حققها الحساب. الاستثمار الأولي هو v_0، و v_2 هو المبلغ في عامين. ما متوسط نسبة المرابحة السنوية التي حققها حساب إبراهيم؟

35. **الكهرباء** يستطيع الكهربائيون حساب التيار الكهربائي بالأمبير A باستخدام الصيغة $A = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}$. حيث w هي القدرة بالوات و r هي المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي الذي يمر عبر فرن مايكروويف قدرته 850 وات ومقاومته 5 أوم؟ أكتب عدد الأمبيرات في أبسط صورة جذرية ثم قدّر كمية التيار الكهربائي لأقرب جزء من العشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **التحدي** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. قدّم إثباتًا أو مثالًا مضادًا لدعم إجابتك.

$x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$ عندما يكون $x > 0$ و $y > 0$

37. **الفرضيات** ضع تخمينًا لمجموع عدد نسبي وعدد غير نسبي. هل سيكون المجموع عددًا *نسبيًا* أم غير نسبي؟ هل مجموع عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عددًا نسبيًا أم غير نسبي؟ اشرح استنتاجك.

38. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة توضح مجموع جذرين بمجذورات مختلفة. اشرح كيف يمكنك جمع هذه الحدود.

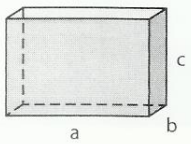
39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوة بخطوة طريقة ضرب تعبيرين جذريين يشتمل كل منهما على حدين. اذكر مثالًا لاستعراض شرحك.

McGraw-Hill Education مؤسسة لحالج محفوظة © والتأليف حقوق الطبع

تمرين على الاختبار المعياري

40. الإجابة القصيرة يبلغ التعداد السكاني في بلدة ما 13,000 ويزداد بحوالي 250 شخصًا في العام. ويمكن تمثيل ذلك بواسطة المعادلة $p = 13{,}000 + 250y$. حيث y هو عدد الأعوام من الآن و p يمثل التعداد السكاني. بعد كم عامًا يصبح نمو التعداد السكاني للبلدة 14,500؟

41. الهندسة أي تعبير مما يلي يمثل مجموع أطوال 12 حافة في هذا المجسم المستطيل؟



A $2(a + b + c)$
B $3(a + b + c)$
C $4(a + b + c)$
D $12(a + b + c)$

42. قدّر قيمة $\sqrt{n - 9}$ و $\sqrt{n} - \sqrt{9}$ حيث $n = 25$.

F 4; 4 **G** 4; 2
H 2; 4 **J** 2; 2

43. التيار الكهربائي I في دائرة كهربائية بسيطة يُعطى بالعلاقة $I = \frac{V}{R}$ ، حيث V هو الجهد الكهربائي و R هي مقاومة الدائرة الكهربائية.
إذا كان الجهد ثابتًا، فكيف ستؤثر مضاعفة مقاومة الدائرة على التيار الكهربائي؟

A سيبقى التيار كما هو.
B سيصل التيار إلى ضعف قيمته السابقة.
C سيصل التيار إلى نصف قيمته السابقة.
D سيزداد التيار بوحدتين عن قيمته السابقة.

مراجعة شاملة

بسّط. (الدرس 8-2)

44. $\sqrt{18}$ **45.** $\sqrt{24}$ **46.** $\sqrt{60}$

47. $\sqrt{50a^3b^5}$ **48.** $\sqrt{169x^4y^7}$ **49.** $\sqrt{63c^3d^4f^5}$

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى. (الدرس 8-1)

50. $y = 2\sqrt{x}$ **51.** $y = -3\sqrt{x}$ **52.** $y = \sqrt{x + 1}$

53. $y = \sqrt{x - 4}$ **54.** $y = \sqrt{x} + 3$ **55.** $y = \sqrt{x} - 2$

56. المعرفة المالية حدّد قيمة الاستثمار إذا تم استثمار AED 400 بنسبة مرابحة قدرها 7.25% تُضاف بمعدل ربع سنوي لمدة 7 أعوام.

مراجعة المهارات

أوجد حل كل من المعادلات التالية. قرّب كل حل إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

57. $-4c - 1.2 = 0.8$ **58.** $-2.6q - 33.7 = 84.1$ **59.** $0.3m + 4 = 9.6$

60. $-10 - \frac{n}{5} = 6$ **61.** $\frac{-4h - (-5)}{-7} = 13$ **62.** $3.6t + 6 - 2.5t = 8$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والنشر © بالطبع

8-4 المعادلات الجذرية

السابق	الحالي	لماذا
• أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.	1 حل المعادلات الجذرية. 2 حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.	• طول خط الماء للقارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنعه حافة المياه عندما يكون القارب ممتلئًا. وسرعة جسم القارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها. يمكنك تقدير سرعة جسم القارب h باستخدام الصيغة $h = 1.34\sqrt{\ell}$. حيث ℓ هو طول خط المياه للقارب الشراعي.

المفردات الجديدة

معادلات جذرية (radical equations)

حلول دخيلة (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

1 معادلات جذرية المعادلات التي تشتمل على متغيرات في صورة مجذور، مثل $h = 1.34\sqrt{\ell}$. تُسمى **معادلات جذرية**. ولإيجاد حلها، يجب أولاً عزل المتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة. ثم يتم تربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

المفهوم الأساسي خاصية التساوي في القوة الأسية

الشرح	إذا قمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضًا.
الرموز	إذا كان $a = b$، فإذًا $a^2 = b^2$.
أمثلة	إذا كان $\sqrt{x} = 4$ ، فإذًا $(\sqrt{x})^2 = 4^2$.

مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار يبحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدا أن سرعة جسم القارب تبلغ 9 كيلومترات في الساعة بعد قياسها. فأوجِد طول خط الماء للقارب الشراعي. قرّب إلى أقرب متر.

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك القارب وأنها ترتبط بالطول.

التخطيط يقطع القارب 9 كيلومترات في الساعة. صيغة سرعة جسم القارب هي $h = 1.34\sqrt{\ell}$.

الحل

$h = 1.34\sqrt{\ell}$	صيغة سرعة جسم القارب
$9 = 1.34\sqrt{\ell}$	عوّض بـ 9 عن h.
$\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$	اقسم كل طرف على 1.34.
$6.72 \approx \sqrt{\ell}$	بسّط.
$(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$	قم بتربيع طرفي المعادلة.
$45.16 \approx \ell$	بسّط.

طول خط الماء للقارب الشراعي يبلغ حوالي 45 مترًا.

التحقق تحقق عن طريق التعويض بالتقدير في الصيغة الأصلية.

$h = 1.34\sqrt{\ell}$	صيغة سرعة جسم القارب
$9 \stackrel{?}{\approx} 1.34\sqrt{45}$	$\ell = 45$ و $h = 9$
$9 \approx 8.98899327$ ✓	اضرب.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين موجّه

1. **القيادة** المعادلة $v = \sqrt{21.4r}$ تمثل السرعة المتجهة القصوى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون حاجز إذا كانت v هي السرعة المتجهة القصوى بالكيلومترات و r هو نصف قطر الانعطاف بالأمتار. إذا صُمم الطريق لسرعة أقصاها 505 كيلومترات في الساعة، فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، اعزل الجذر أولاً. ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

مثال 2 التعبير في صورة مجذور

أوجد حل $\sqrt{a+5} + 7 = 12$.

$\sqrt{a+5} + 7 = 12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5} = 5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2 = 5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a + 5 = 25$	بسّط.
$a = 20$	اطرح 5 من كل طرف.

انتبه!

تربيع كل طرف

تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرف المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

تمرين موجّه

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

2A. $\sqrt{c-3} - 2 = 4$

2B. $4 + \sqrt{h+1} = 14$

2 الحلول الدخيلة

في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلّ لا يُعتد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

مثال 3 المتغير عند كل طرف

أوجد حل $\sqrt{k+1} = k - 1$. تحقق من حلك.

$\sqrt{k+1} = k - 1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2 = (k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k + 1 = k^2 - 2k + 1$	بسّط.
$0 = k^2 - 3k$	اطرح k و 1 من كل طرف.
$0 = k(k-3)$	حلل إلى عوامل.
$k = 0$ or $k - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k = 3$	الحل.

التحقق

المعادلة الأصلية	$\sqrt{k+1} = k - 1$	$\sqrt{k+1} = k - 1$
$k = 0$	$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0 - 1$	$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3 - 1$
بسط	$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$
خطأ	$1 \neq -1$ ✗	$2 = 2$ ✓
		صواب

بما أن 0 لا تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

نصيحة دراسية

الحلول الدخيلة

عند التحقق من الحلول بحثًا عن الحلول الدخيلة، فنحن لا نهتم سوى بالجذور الأساسية.

تمرين موجّه

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

3A. $\sqrt{t+5} = t + 3$

3B. $x - 3 = \sqrt{x-1}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** مساحة سطح كرة سلة هي x سنتيمترات مربعة. فما نصف قطر كرة السلة إذا كانت صيغة مساحة سطح الكرة هي $SA = 4\pi r^2$؟

المثالان 2-3

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

2. $\sqrt{10h} + 1 = 21$
3. $\sqrt{7r + 2} + 3 = 7$
4. $5 + \sqrt{g - 3} = 6$
5. $\sqrt{3x - 5} = x - 5$
6. $\sqrt{2n + 3} = n$
7. $\sqrt{a - 2} + 4 = a$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

8. **التمارين الرياضية** افترض أن الدالة $S = \pi\sqrt{\frac{9.8\ell}{1.6}}$، حيث S تمثل السرعة بالأمتار في الثانية و ℓ هو طول ساق الشخص بالأمتار. يمكنها إيجاد السرعة القصوى التقريبية التي يستطيع الشخص ركضها.
   a. ما سرعة الركض القصوى لشخص طول ساقه 1.1 متر مع التقريب لأقرب جزء من العشرة من المتر؟
   b. ما طول ساق شخص سرعة ركضه 6.7 أمتار في الثانية مع التقريب لأقرب جزء من العشرة من المتر؟
   c. كلما ازداد طول الساق، تزداد السرعة القصوى أم تقل؟ اشرح.

الأمثلة 2-3

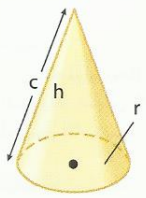
أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

9. $\sqrt{a} + 11 = 21$
10. $\sqrt{t} - 4 = 7$
11. $\sqrt{n - 3} = 6$
12. $\sqrt{c + 10} = 4$
13. $\sqrt{h - 5} = 2\sqrt{3}$
14. $\sqrt{k + 7} = 3\sqrt{2}$
15. $y = \sqrt{12 - y}$
16. $\sqrt{u + 6} = u$
17. $\sqrt{r + 3} = r - 3$
18. $\sqrt{1 - 2t} = 1 + t$
19. $5\sqrt{a - 3} + 4 = 14$
20. $2\sqrt{x - 11} - 8 = 4$

21. **المسافات المقطوعة** المدة الزمنية t، بالثواني، التي يستغرقها بندول بسيط لإكمال تأرجح كامل يُطلق عليها الفترة. وهي تُعطى بالمعادلة $t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ هو طول البندول، بالأمتار.
   a. يكمل بندول الأرجوحة العملاقة الفترة في حوالي 8 ثوانٍ. فكم يبلغ طول ذراع البندول تقريبًا؟ قرّب إلى أقرب متر.
   b. هل ازدياد طول البندول يسبب تزايد الفترة أم تناقصها؟ اشرح.

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

22. $\sqrt{6a - 6} = a + 1$
23. $\sqrt{x^2 + 9x + 15} = x + 5$
24. $6\sqrt{\frac{5k}{4}} - 3 = 0$
25. $\sqrt{\frac{5y}{6}} - 10 = 4$
26. $\sqrt{2a^2 - 121} = a$
27. $\sqrt{5x^2 - 9} = 2x$



28. **التبرير** قانون الارتفاع المائل c للمخروط هو $c = \sqrt{h^2 + r^2}$.
حيث h هو ارتفاع المخروط و r هو نصف قطر قاعدته.
أوجد ارتفاع المخروط إذا كان الارتفاع المائل يساوي 4 وحدات ونصف القطر يساوي وحدتين. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29 **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$.

a. **بيانيًا** امسح القائمة $Y=$. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالآتي $Y1 = \sqrt{2x-7}$. وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $Y2 = x-7$.
اضغط على GRAPH.

b. **بيانيًا** ارسم ما هو مبين على الشاشة.

c. **تحليليًا** استخدم ميزة التقاطع مع المحور على قائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع.

d. **تحليليًا** أوجد حل المعادلة الجذرية جبريًا. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟

30. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة، حجمها 162 سنتيمترًا مكعبًا. يمكن إيجاد نصف قطر r الحاوية عن طريق استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث V هو حجم الحاوية و h هو الارتفاع.

a. إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 سنتيمتر، فأوجد ارتفاعها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

b. إذا كان ارتفاع الحاوية 10 سنتيمترات، فأوجد نصف قطرها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح.

أسماء

$$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$$
$$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$$
$$6-b = b+10$$
$$-2b = 4$$
$$b = -2$$

التحقق

$$\sqrt{6-(-2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-2)+10}$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{8} \checkmark$$

إيمان

$$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$$
$$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$$
$$6-b = b+10$$
$$2b = 4$$
$$b = 2$$

التحقق

$$\sqrt{6-(2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(2)+10}$$
$$\sqrt{4} \neq \sqrt{12} \times$$

لا يوجد حل

32. **التبرير** أي معادلة مما يلي حلها هو $\sqrt{4} = \sqrt{x+2}$؟ اشرح.

A. $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$ B. $4 = x+2$ C. $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$

33. **التبرير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل $\sqrt{x+1} = 5$ وحل $\sqrt{x}+1 = 5$.

34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.

35. **التبرير** هل المعادلة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*؟ اشرح.

$$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$$

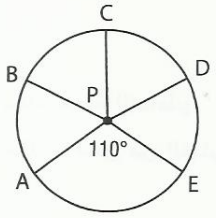
36. **التحدي** أوجد حل $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$.

37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقوب عند A، و B و C و D و E على الدائرة P.



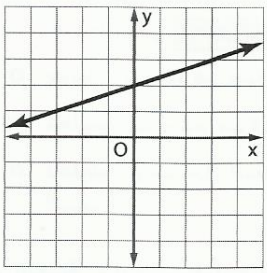
إذا حفر حسن الثقوب بحيث تكون $m\angle APE = 110°$، وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس $m\angle CPD$؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون $w = 3$؟

A $\frac{w-3}{w+1}$ **C** $\frac{w+1}{w^2-3w}$

B $\frac{w^2-3w}{3w}$ **D** $\frac{3w}{3w^2}$

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3 **H** $\frac{1}{3}$

G $-\frac{1}{3}$ **J** 3

41. ما حلول $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$؟

A $1, 6$ **C** 1

B $-1, -6$ **D** 6

مراجعة شاملة

42. الكهرباء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية يُعطى بالمعادلة $V = \sqrt{PR}$، حيث P هو القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأوم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟ (الدرس 3-8)

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-8)

43. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$ **44.** $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$ **45.** $7\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$

46. $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$ **47.** $\sqrt{\frac{5c^5}{4d^5}}$ **48.** $\frac{\sqrt{9x^3y}}{\sqrt{16x^2y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية الحد. أكتب نعم أو لا: اشرح.

49. 12 **50.** $4x^3$ **51.** $a - 2b$ **52.** $4n + 5p$ **53.** $\frac{x}{y^2}$ **54.** $\frac{1}{5}$

مراجعة المهارات

بسّط.

55. 9^2 **56.** 10^6 **57.** 4^5

58. $(8v)^2$ **59.** $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$ **60.** $(10y^2)^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار نصف الوحدة
الدروس من 1-8 إلى 4-8

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى. (الدرس 1-8)

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = -4\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
4. $y = \sqrt{x} - 3$
5. $y = \sqrt{x - 1}$
6. $y = 2\sqrt{x - 2}$

7. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة 121 سنتيمترًا مربعًا؟ (الدرس 1-8)

A 121 سنتيمتر
B 11 سنتيمتر
C 44 سنتيمتر
D 10 سنتيمترات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-8)

8. $2\sqrt{25}$
9. $\sqrt{12} \times \sqrt{8}$
10. $\sqrt{72xy^5z^6}$
11. $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. **الأقمار الصناعية** أُطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 كيلومتر. وتُعطى السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصيغة $v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$ هي v السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و G هو ثابت مُعطى، و m_E هي كتلة الأرض، و r هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدرس 2-8)

a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 متر. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟

b. كتلة الأرض هي 5.97×10^{24} كيلوجرام، والثابت G هو $6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\ \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ حيث N يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.

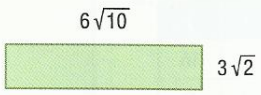
14. **اختيار من متعدد** أي من التعبيرات التالية هو مكافئ لـ $\sqrt{\frac{16}{32}}$؟ (الدرس 2-8)

F $\frac{1}{2}$
G $\frac{\sqrt{2}}{2}$
H 2
J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 3-8)

15. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
16. $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$
17. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$
18. $\sqrt{27} - \sqrt{48}$
19. $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$
20. $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$
21. $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

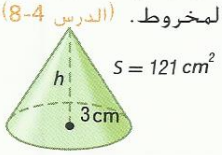
22. **هندسة** أوجد مساحة المستطيل. (الدرس 3-8)



أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك. (الدرس 4-8)

23. $\sqrt{5x} - 1 = 4$
24. $\sqrt{a - 2} = 6$
25. $\sqrt{15 - x} = 4$
26. $\sqrt{3x^2 - 32} = x$
27. $\sqrt{2x - 1} = 2x - 7$
28. $\sqrt{x + 1} + 2 = 4$

29. **الهندسة** مساحة السطح الأفقية S للمخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع المخروط. أوجد ارتفاع المخروط. (الدرس 4-8)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 8-5 التغير العكسي

السابق:
- قمت بحل مسائل مشتملة على التغير الطردي.

الحالي:
1. تحديد التغيرات العكسية واستخدامها.
2. تمثيل التغيرات العكسية بيانيًا.

لماذا:
- الوقت الذي يستغرقه العداء لإنهاء السباق يتناسب عكسيًا مع متوسط وتيرة تقدمه. ويتناقص الوقت الذي يستغرقه العداء كلما ازدادت وتيرة تقدمه. إذًا، تتناسب هاتان *الكميتان* عكسيًا.

المفردات الجديدة
- تغير عكسي
- inverse variation
- قاعدة ناتج الضرب
- product rule

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها

يمكن تمثيل **التغير العكسي** بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

y يتغير عكسيًا مع x إذا وُجد ثابت ما غير صفري k بحيث يكون $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$، حيث $x, y \neq 0$.

في التغير العكسي، يبقى ناتج ضرب القيمتين ثابتًا. تذكر أن العلاقة التي تأتي بالصيغة $y = kx$ عبارة عن تغير طردي. الثابت k يُطلق عليه *ثابت التغير* أو *ثابت التناسب*.

مثال 1 تحديد التغيرات العكسية والطردية

حدد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

a.

x	y
1	16
2	8
4	4

في أي تغير عكسي، xy يساوي الثابت k. أوجد xy لكل زوج مرتب في الجدول المبين.

$1 \times 16 = 16 \quad 2 \times 8 = 16 \quad 4 \times 4 = 16$

ناتج الضرب ثابت، إذًا الجدول يمثل تغيرًا عكسيًا.

b.

x	y
1	3
2	6
3	9

لاحظ أن xy ليس ثابتًا. إذًا، الجدول لا يمثل تغيرًا غير طردي.

$3 = k(1) \quad 6 = k(2) \quad 9 = k(3)$

$3 = k \quad 3 = k \quad 3 = k$

جدول القيم يمثل التغير الطردي $y = 3x$.

c. $x = 2y$

يمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة $y = \frac{1}{2}x$. لذا، فإنها تمثل تغيرًا طرديًا.

d. $2xy = 10$

اكتب المعادلة. $2xy = 10$

اقسم كل طرف على 2. $xy = 5$

تمثل المعادلة تغيرًا عكسيًا.

تمرين موجّه

1A.

x	1	2	5
y	10	5	2

1B. $-2x = y$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام $xy = k$ لكتابة معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

قراءة في الرياضيات

معادلات التغير بالنسبة لمعادلات التغير الطردي، نقول إن y يتغير *طرديًا* مع x. وبالنسبة لمعادلات التغير العكسي، نقول إن y يتغير *عكسيًا* مع x.

مثال 2 كتابة التغير العكسي

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 18$ عندما يكون $x = 2$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

$xy = k$	معادلة تغير عكسي
$2(18) = k$	$y = 18$ و $x = 2$
$36 = k$	بسّط.

ثابت التغير هو 36. إذًا، المعادلة التي تربط بين x و y هي $xy = 36$ أو $y = \frac{36}{x}$.

تمرين موجّه

2. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = -4$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإذًا $x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$	
$x_1y_1 = x_2y_2$	عوّض بـ x_2y_2 عن k.

المعادلة $x_1y_1 = x_2y_2$ تُسمى **قاعدة ناتج الضرب** للتغيرات العكسية.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للتغيرات العكسية

الشرح إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإذًا، يكون ناتجا ضرب x_1y_1 و x_2y_2 متساويين.

الرموز $x_1y_1 = x_2y_2$ أو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

مثال 3 حل لإيجاد x أو y

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 12$، فأوجد x عندما يكون $y = 4$.

$x_1y_1 = x_2y_2$	قاعدة ناتج الضرب للتغيرات العكسية
$12 \times 3 = x_2 \times 4$	$x_1 = 12, y_1 = 3, y_2 = 4$
$36 = x_2 \times 4$	بسّط.
$\frac{36}{4} = x_2$	اقسم كل طرف على 4.
$9 = x_2$	بسّط.

إذًا، عندما يكون $y = 4$، يكون $x = 9$.

تمرين موجّه

3. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 4$ عندما يكون $x = -8$. فأوجد y عندما يكون $x = -4$.

يمكن استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغيرات العكسية لكتابة معادلة بغرض حل مسائل من الحياة اليومية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التغيرات العكسية

الفيزياء **التسارع** a **لقرص الهوكي يتناسب عكسيًا مع كتلته** m. **افترض أن قرص هوكي كتلته 164 جرامًا تم ضربه بحيث يتسارع بمعدل** $122\ m/s^2$. **أوجد تسارع قرص كتلته 158 جرامًا إذا ضُرب بنفس القدر من القوة.**

أنشئ جدولاً لتنظيم المعلومات.

القرص	الكتلة	التسارع
1	164 g	$122\ m/s^2$
2	158 g	a_2

ليكن $m_1 = 164,\ a_1 = 122$، و $m_2 = 164$.

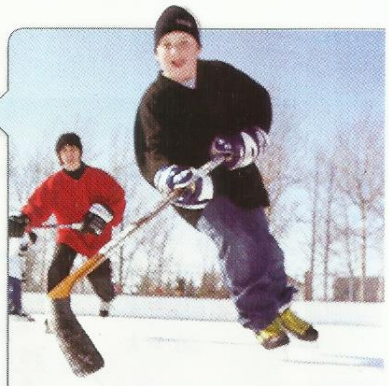
حل لإيجاد a_2.

$m_1a_1 = m_2a_2$	استخدم قاعدة ناتج الضرب لكتابة معادلة.
$164 \times 122 = 158a_2$	$m_1 = 164$، و $a_1 = 122$، و $m_2 = 158$
$20{,}008 = 158a_2$	بسّط.
$126.6 \approx a_2$	قسم كل طرف على 158 وبسّط.

قرص هوكي كتلته 158 جرامًا يكون له تسارع بمعدل $126.6\ m/s^2$.

تمرين موجّه

4. السباق إذا كان عبد العزيز يركض بمتوسط 8 كيلومترات في الساعة، وأنهى السباق في 0.39 ساعة. وأنهى مازن السباق في 0.35 ساعة. فما متوسط وتيرة تقدم مازن؟



الربط بالحياة اليومية

قرص الهوكي القياسي يكون سُمكه 2.5 سنتيمتر وقطره 7.6 سنتيمتر. وتتراوح كتلته بين 156 و 170 جرامًا تقريبًا.

المصدر: *كتاب دوري الهوكي الوطني للقواعد*

2 تمثيل التغيرات العكسية بيانيًا

لا يكون التمثيل البياني للتغير العكسي خطًا مستقيمًا مثل التمثيل البياني للتغير الطردي.

مثال 5 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 8$ **عندما يكون** $x = 3$.

الخطوة 1 اكتب معادلة تغير عكسي.

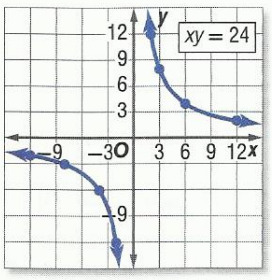
$xy = k$	معادلة تغير عكسي
$3(8) = k$	$x = 3,\ y = 8$
$24 = k$	بسّط.

معادلة التغير العكسي هي $xy = 24$ أو $y = \frac{24}{x}$.

الخطوة 2 اختر قيمة لكل من x و y بحيث يكون ناتج ضربهما 24.

الخطوة 3 عيّن كل نقطة وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.

x	y
−12	−2
−8	−3
−4	−6
−2	−12
0	غير معرف
2	12
3	8
6	4
12	2



لاحظ أنه بما أن y غير معرف عندما يكون $x = 0$، فإنه لن توجد نقطة على التمثيل البياني عندما يكون $x = 0$. ويُسمى تمثيلها البياني قطعًا زائدًا.

تمرين موجّه

5. مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 16$ عندما يكون $x = 4$.

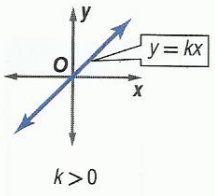
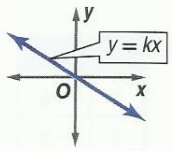
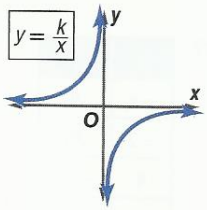
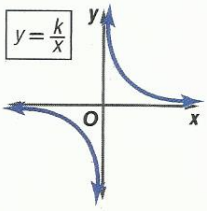
نصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي

أحيانًا يلزم تقسيم المسألة إلى أجزاء، وحل كل جزء على حده، ثم دمج حلول الأجزاء لإيجاد حل المسألة.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

ملخص المفهوم التغيرات الطردية والعكسية

التغير الطردي	التغير العكسي
 $k>0$  $k<0$	 $k>0$  $k<0$
• $y = kx$	• $y = \frac{k}{x}$
• y يتغير طرديًا مع x.	• y يتغير عكسيًا مع x.
• النسبة $\frac{y}{x}$ عبارة عن ثابت.	• ناتج ضرب xy عبارة عن ثابت.

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

1.

x	1	4	8	12
y	2	8	16	24

2.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

3. $xy = 4$

4. $y = \frac{x}{10}$

المثالان 2 و 5

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

5. $y = 8$ عندما يكون $x = 6$

6. $y = 2$ عندما يكون $x = 5$

7. $y = 3$ عندما يكون $x = -10$

8. $y = -1$ عندما يكون $x = -12$

مثال 3

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

9. إذا كان $y = 8$ عندما يكون $x = 4$. فأوجد x عندما يكون $y = 2$.

10. إذا كان $y = 7$ عندما يكون $x = 6$. فأوجد y عندما يكون $x = -21$.

11. إذا كان $y = -5$ عندما يكون $x = 9$. فأوجد y عندما يكون $x = 6$.

مثال 4

12. **السباق** الوقت المستغرق لإكمال مسار سباق العربات الصغيرة يتناسب عكسيًا مع متوسط سرعة العربة الصغيرة. فإذا كان أحد المتسابقين متوسط سرعته 22.3 مترًا في الثانية وأكمل المسار في 30 ثانية. وأكمل متسابق آخر المسار في 25 ثانية. فما متوسط سرعة المتسابق الثاني؟

13. **البصريات** عندما لا تكون الرؤية واضحة لدى الشخص، فإن طبيب العيون يمكنه أن يصف له عدسات لتصحيح الحالة. قوة العدسة P، بوحدات تُسمى ديوبتر، تساوي 1 مقسومًا على البعد البؤري f، بالأمتار، للعدسة.

a. مثّل التغير العكسي $P = \frac{1}{f}$ بيانيًا.

b. أوجد قوى عدسات بعدها البؤري $+0.2$ إلى -0.4 متر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.**

14.

x	y
1	30
2	15
5	6
6	5

15.

x	y
2	−6
3	−9
4	−12
5	−15

16.

x	y
−4	−2
−2	−1
2	1
4	2

17.

x	y
−5	8
−2	20
4	−10
8	−5

18. $5x - y = 0$ **19.** $xy = \frac{1}{4}$ **20.** $x = 14y$ **21.** $\frac{y}{x} = 9$

المثالان 5 و 2 **افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثِّل المعادلة بيانيًا.**

22. $y = 2$ عندما يكون $x = 20$ **23.** $y = 18$ عندما يكون $x = 4$ **24.** $y = -6$ عندما يكون $x = -3$

25. $y = -4$ عندما يكون $x = -3$ **26.** $y = -4$ عندما يكون $x = 16$ **27.** $y = 12$ عندما يكون $x = -9$

مثال 3 **أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.**

28. إذا كان $y = 12$ عندما يكون $x = 3$، فأوجد x عندما يكون $y = 6$.

29. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد x عندما يكون $y = 2$.

30. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 14$، فأوجد x عندما يكون $y = -5$.

31. إذا كان $y = 9$ عندما يكون $x = 9$، فأوجد y عندما يكون $x = -27$.

32. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = -2$، فأوجد y عندما يكون $x = 3$.

33. إذا كان $y = -8$ عندما يكون $x = -12$، فأوجد y عندما يكون $x = 10$.

مثال 4

34. علوم الأرض يتغير مستوى الماء في النهر عكسيًا مع درجة حرارة الجو. عندما تكون درجة حرارة الجو 32° مئوية، يكون مستوى الماء 3.35 أمتار. فإذا كانت درجة حرارة الجو 43°، فما مستوى الماء في النهر؟

35. الموسيقى يتغير تردد الوتر المهتز في البيانو عكسيًا مع طول الوتر عند تطبيق ضغط متساوٍ. فإذا كان يوجد وتر طوله 420 ملليمترًا يهتز بتردد 523 دورة في الثانية، فبأي تردد سيهتز وتر طوله 707 ملليمترات؟

حدد إذا ما كانت كل حالة هي مثال *للتغير العكسي* أو *التغير الطردي*. برر استنتاجك.

36. يمكن أن يشتري نادي المسرح 10 قِطع بسعر AED 2 لكل قِطعة أو 5 قِطع بسعر AED 4 لكل قِطعة.

37. اشترت عائلة ربيع عصائر ليمون بسعر AED 1.50 للعصير الواحد.

38. تجني آمال AED 14 نظير مجالسة الأطفال لمدة ساعتين، و AED 21 نظير مجالسة الأطفال لمدة 3 ساعات.

39. قِطع معدنية للعبة فيديو تم تقسيمها بالتساوي على مجموعة من الأصدقاء.

حدد إذا كان كل جدول أو تمثيل بياني يعبر عن تغير عكسي أم تغير طردي. اشرح.

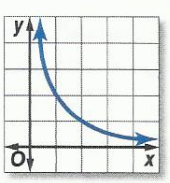
40.

x	y
5	1
8	1.6
11	2.2

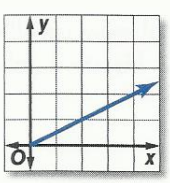
41.

x	y
−3	−7
−2	−10.5
4	5.25

42.



43.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

44. العلوم الفيزيائية عندما يتوازن شخصان على أرجوحة، تكون المسافتان من مركز الأرجوحة متناسبتين عكسيًا مع وزن الشخصين. فإذا كان شخص وزنه 53.5 كيلوجرامًا يجلس على بعد 1.8 متر من مركز الأرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 56.7 كيلوجرامًا أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

45 إذا كان $y = 9.2$ عندما يكون $x = 6$. فأوجد x عندما يكون $y = 3$.

46. إذا كان $y = 3.8$ عندما يكون $x = 1.5$. فأوجد x عندما يكون $y = 0.3$.

47. إذا كان $y = \frac{1}{5}$ عندما يكون $x = -20$. فأوجد y عندما يكون $x = -\frac{8}{5}$.

48. إذا كان $y = -6.3$ عندما يكون $x = \frac{2}{3}$. فأوجد y عندما يكون $x = 8$.

49. السباحة اشترى كلٌ من بدر وخميس عضوية انتفاع بحمام سباحة. وبالنسبة لكليهما، يتناسب متوسط التكلفة في اليوم عكسيًا مع عدد الأيام التي يذهبان فيها إلى حمام السباحة. فإذا ذهب بدر إلى حمام السباحة 25 يومًا بمتوسط تكلفة AED 5.60 في اليوم. وذهب خميس إلى حمام السباحة 35 يومًا. فما متوسط التكلفة في اليوم بالنسبة لخميس؟

50. العلوم الفيزيائية مقدار القوة المطلوبة للقيام بقدر معين من العمل لتحريك جسم ما يتناسب عكسيًا مع المسافة التي يتم تحريك الجسم فيها. افترض أن 90 N من القوة مطلوبة لتحريك جسم ما 10 أمتار. فأوجد القوة المطلوبة لتحريك جسم آخر 15 مترًا إذا كان ينطوي على نفس القدر من العمل.

51. القيادة يجب أن تتمرن بثينة على القيادة 40 ساعة مع أحد والديها أو أولياء أمورها قبل السماح لها بإجراء اختبار للحصول على رخصة القيادة الخاصة بها. وهي تنوي التمرن بنفس عدد الساعات من كل أسبوع.

a. ليكن h ممثلاً لعدد الساعات في الأسبوع التي ستتمرن فيها بثينة. أنشئ جدولاً يبين عدد الأسابيع w التي سوف تحتاجها للتمرن بالنسبة للقيم التالية لـ h: 1, 2, 4, 5, 8, 10.

b. اشرح كيف يتغير عدد الأسابيع كلما ازداد عدد الساعات في الأسبوع.

c. اكتب معادلة توضح العلاقة بين h و w ومثلها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. التفكير النقدي وجد أحمد وأيمن معادلة يتغير فيها x و y عكسيًا، ويكون $y = 10$ عندما يكون $x = 5$. فهل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح.

أحمد

$k = \frac{y}{x}$

$= \frac{10}{2}$ أو 5

$y = 5x$

أيمن

$k = xy$

$= (5)(10)$ أو 50

$y = \frac{50}{x}$

53. التحدي افترض أن f يتغير عكسيًا مع g، و g يتغير عكسيًا مع h. ما العلاقة بين f و h؟

54. التبرير هل $xy = -k$ تمثل تغيرًا عكسيًا عندما يكون $k \neq 0$؟ اشرح.

55. مسألة غير محددة الإجابة اذكر حالة أو ظاهرة من الحياة اليومية يمكن تمثيلها بمعادلة تغير عكسي. استخدم المصطلحات الصحيحة لشرح مثالك وتفسير لماذا تعد هذه الحالة تغيرًا عكسيًا.

56. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين التغير الطردي والتغير العكسي. قم بتضمين وصف للعلاقة بين الميل والتمثيلين البيانيين للتغير الطردي والعكسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

57. باعتبار وجود قوة ثابتة وأن تسارع جسم ما يتغير عكسيًا مع كتلته. افترض أن هذه القوة الثابتة تُطبق على جسم ما كتلته 6 كيلوجرامات ونتج عنها تسارع معدله $10\ m/s^2$. فإذا طُبقت نفس القوة على جسم آخر كتلته 12 كيلوجرامًا. فماذا سيكون معدل التسارع الناتج؟

A $4\ m/s^2$
B $5\ m/s^2$
C $6\ m/s^2$
D $7\ m/s^2$

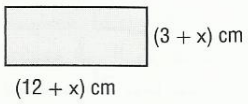
58. إذا حصلت حياة على متوسط 56% في أول سبعة اختبارات لها. فعلام ينبغي أن تحصل في اختبارها الثامن ليكون المتوسط 60% بالنسبة للاختبارات الثمانية؟

F 82%
G 88%
H 98%
J 100%

59. التقط حارب صورة ثعبان طوله متر واحد بجانب جدار من الطوب. عندما قام بتحميض الصور، بلغ طول الثعبان ذي المتر طولاً، سنتيمترين وارتفاع الجدار 4.5 سنتيمترات. فماذا كان الارتفاع الفعلي للجدار الطوبي؟

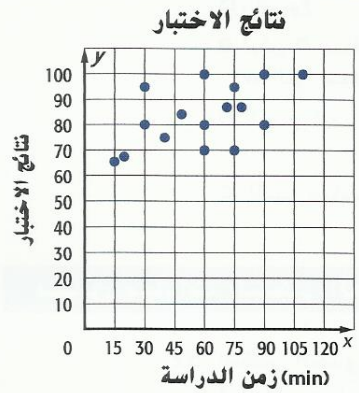
A 2.25 cm
B 22.5 cm
C 225 cm
D 2250 cm

60. الإجابة القصيرة أوجد مساحة المستطيل.



مراجعة شاملة

61. اختبارات حدد إذا ما كان التمثيل البياني على اليسار يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا وُجد ارتباط، فوضح مدلوله.



افترض أن y يتغير طرديًا مع x.

62. إذا كان $y = 2.5$ عندما يكون $x = 0.5$، فأوجد y عندما يكون $x = 20$.

63. إذا كان $y = -6.6$ عندما يكون $x = 9.9$، فأوجد y عندما يكون $x = 6.6$.

64. إذا كان $y = 2.6$ عندما يكون $x = 0.25$، فأوجد y عندما يكون $x = 1.125$.

65. إذا كان $y = 6$ عندما يكون $x = 0.6$، فأوجد x عندما يكون $y = 12$.

66. المعرفة المالية بائع يحصل على AED 32,000 في العام زائد 5% من قيمة المبيعات التي يحققها. فما قيمة المبيعات المطلوبة لكي يحصل على دخل سنوي أكبر من AED 45,000؟

مراجعة المهارات

بسّط. افترض أنّ جميع المقامات لا تساوي الصفر.

67. $\frac{7^8}{7^6}$

68. $\frac{x^8y^{12}}{x^2y^7}$

69. $\frac{5pq^7}{10p^6q^3}$

70. $\left(\frac{2c^3d}{7z^2}\right)^3$

71. $\left(\frac{4a^2b}{2c^3}\right)^2$

72. $y^0(y^5)(y^{-9})$

73. $\frac{(4m^{-3}n^5)^0}{mn}$

74. $\frac{(3x^2y^5)^0}{(21x^5y^2)^0}$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

8-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعة الدوال النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحليل كيف يؤثر تغيير المعاملين a و b في $y=\frac{a}{x-b}+c$ على التمثيلات البيانية لمجموعة الدوال النسبية.

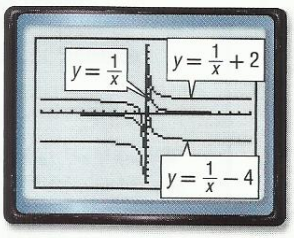
النشاط تغيير المعاملات

مثّل كل مجموعة من المعادلات بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صف أي أوجه تشابه واختلاف بين التمثيلات البيانية.

a. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2, y=\frac{1}{x}-4$

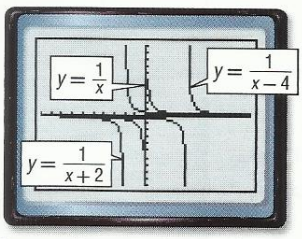
أدخل المعادلات في القائمة $Y=$ ومثّلها بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه. كل تمثيل بياني يقترب من المحور y على كلا الجانبين. ولكن يختلف التمثيلان البيانيان في الموضع الرأسي.



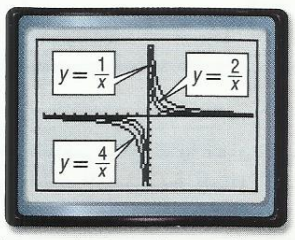
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

b. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+2}, y=\frac{1}{x-4}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

c. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=\frac{4}{x}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الشكل.

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه، وتقترب جميعًا من المحور x من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الموضع الأفقي.

النموذج والتحليل

1. كيف يؤثر a و b و c على التمثيل البياني لـ $y=\frac{a}{x-b}+c$ ؟ اذكر أمثلة.

تفحص كل زوج من المعادلات وتوقع أوجه التشابه والاختلاف من حيث التمثيل البياني لكل منهما. استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من توقعاتك. أكتب جملة واحدة أو جملتين تقارن بهما التمثيلين البيانيين.

2. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2$

3. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+5}$

4. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-6 الدوال النسبية

السابق
- كتبت معادلات التغير العكسي.

الحالي
1. تحديد القيم المستبعدة.
2. تحديد الخطوط المقاربة واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

لماذا
- حليمة تقرأ كتابًا من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرؤها كل يوم y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$، حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.

المفردات الجديدة
- دالة نسبية rational function
- قيمة مستبعدة excluded value
- خط مقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عمّلية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد القيم المستبعدة

الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال **للدالة النسبية**. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح
هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة معادلة لها الصيغة $y = \frac{p}{q}$، حيث p و q كثيرات الحدود و $q \neq 0$.

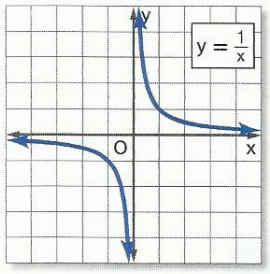
الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{1}{x}$

نوع التمثيل البياني: قطع زائد

المجال: $\{x | x \neq 0\}$

المدى: $\{y | y \neq 0\}$

التمثيل البياني



بما أن القسمة على صفر غير معرّفة، فأي قيمة للمتغير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية، يتم استبعادها من مجال الدالة. وتُسمى هذه القيم **بالقيم المستبعدة** للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = -\frac{2}{x}$

لا يمكن أن يساوي المقام 0. إذًا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x + 1}$

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$.

c. $y = \frac{5}{4x - 8}$

$4x - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$.

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$ **1B.** $y = \frac{x}{x - 7}$ **1C.** $y = \frac{4}{3x + 9}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

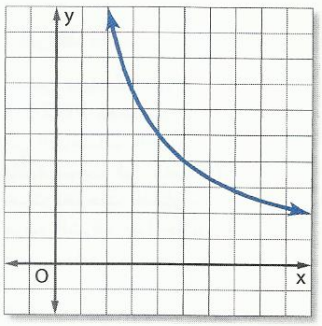
بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا، من مجال الدالة النسبية، قد ينبغي استبعاد قيم إضافية من المجال أيضًا، وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

المناطيد إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمتار المربعة y لكل شخص. مثل هذه الدالة بيانيًا.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفرًا أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.

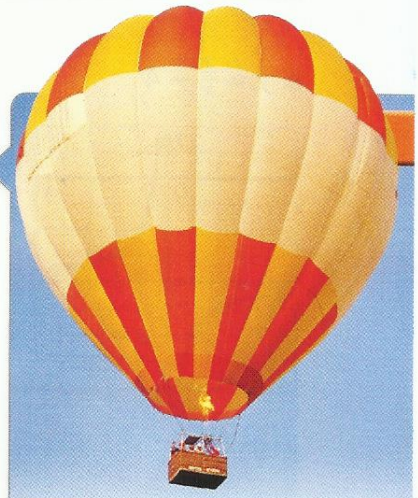
عدد الأشخاص x	10	5	4	2
أمتار مُربعة لكل شخص y	2	4	5	10



لاحظ أنه كلما ازدادت x، اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت المساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. الهندسة مستطيل تبلغ مساحته 18 سنتيمترًا مربعًا. وتوضح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثِّل الدالة بيانيًا.



الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز. ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه.

المصدر: مركز غودارد لرحلات الفضاء

2 تحديد الخطوط المقاربة واستخدامها

لاحظ أن التمثيل البياني في المثال 2، القيمة المستبعدة هي $x = 0$. يقترب التمثيل البياني من المستقيم الرأسي $x = 0$، ولكن لا يمسه أبدًا.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يمسه أبدًا. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما *خطين مقاربين*. **الخط المقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

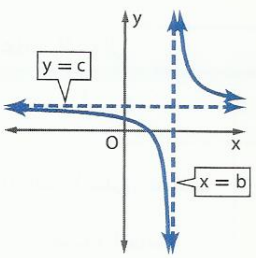
نصيحة دراسية

استخدام الخطوط المقاربة تكون الخطوط المقاربة مفيدة في تمثيل الدوال النسبية بيانيًا. ومع ذلك، فهي لا تعد جزءًا من التمثيل البياني.

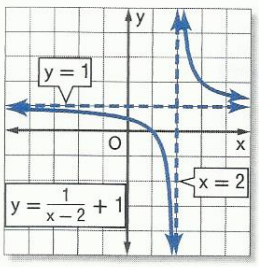
المفهوم الأساسي الخطوط المقاربة

الشرح الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x - b} + c,\ a \neq 0$، يكون لها خط مقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفرًا، $x = b$. ويكون لها خط مقارب أفقي عند $y = c$.

استخدام النماذج



مثال



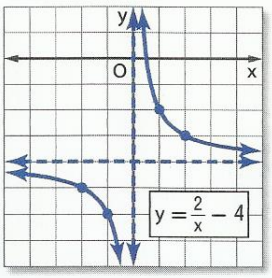
مجال $y = \frac{a}{x - b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. المدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع القلم الرصاص عن الورقة، لذا اختر قيم x على كلا جانبي الخط المقارب الرأسي لتمثيل جزأي الدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تحديد الخطوط المقاربة واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا

حدد الخطوط المقاربة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

a. $y = \frac{2}{x} - 4$



الخطوة 1 حدد الخطوط المقاربة ومثّلها بيانيًا باستخدام الخطوط المتقطعة.

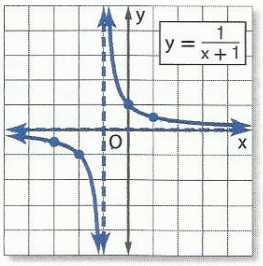
خط مقارب رأسي: $x = 0$

خط مقارب أفقي: $y = -4$

الخطوة 2 أنشئ جدولاً للقيم وعيّن النقاط. ثم صِل بينهما.

x	-2	-1	1	2
y	-5	-6	-2	-3

b. $y = \frac{1}{x + 1}$



الخطوة 1 لإيجاد الخط المقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستبعدة.

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$ اطرح 1 من كل طرف.

خط مقارب رأسي: $x = -1$

خط مقارب أفقي: $y = 0$

الخطوة 2

x	-3	-2	0	1
y	-0.5	-1	1	0.5

تمرين موجّه

3A. $y = -\frac{6}{x}$ 3B. $y = \frac{1}{x - 3}$ 3C. $y = \frac{2}{x + 2} + 1$

الربط بتاريخ الرياضيات

إيفلين بويد غرانفيل (1924–) تخصصت غرانفيل في الرياضيات والفيزياء بكلية سميث في عام 1945، حيث تخرجت بامتياز مع مرتبة الشرف. كما حازت على شهادة الماجستير في الرياضيات والفيزياء ودرجة الدكتوراه في الرياضيات من جامعة ييل. وتركز مشروع الدكتوراه الخاص بها حول التحليل الوظيفي.

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

تربيعية	أسية	جذرية	نسبية
الدالة الأصلية: $y = x^2$ الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$	الدالة الأصلية: تختلف الصيغة العامة: $y = ab^x$	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$ الصيغة العامة: $y = \sqrt{x - b} + c$	الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$ الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x - b} + c$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

1. $y = \frac{5}{x}$
2. $y = \frac{1}{x + 3}$
3. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$
4. $y = \frac{x}{2x - 8}$

مثال 2

5. **التخطيط للحفل** تبلغ تكلفة الزينة من أجل حفل عشاء AED 32. وسيُقسم هذا المبلغ بين مجموعة من الأصدقاء. المبلغ الذي سيدفعه كل شخص y ممثل في $y = \frac{32}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد الخطوط المقاربة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = \frac{2}{x}$
7. $y = \frac{3}{x} - 1$
8. $y = \frac{1}{x - 2}$
9. $y = \frac{-4}{x + 2}$
10. $y = \frac{3}{x - 1} + 2$
11. $y = \frac{1}{x + 2} + 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

12. $y = \frac{-1}{x}$
13. $y = \frac{8}{x - 8}$
14. $y = \frac{x}{x + 2}$
15. $y = \frac{4}{x + 6}$
16. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$
17. $y = \frac{2x + 5}{x + 5}$
18. $y = \frac{7}{5x - 10}$
19. $y = \frac{x}{2x + 14}$

مثال 2

20. **الظباء** تستطيع الظباء من ذوات القرون أن تجري 40 كيلومترًا دون توقف. ويتمثل متوسط السرعة في المعادلة $y = \frac{40}{x}$، حيث x هو الزمن المستغرق لجري هذه المسافة.
    a. مثّل $y = \frac{40}{x}$ بيانيًا.
    b. اذكر الخطوط المقاربة.

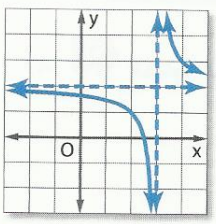
21. **قيادة الدراجات** قائد دراجة يقطع 10 كيلومترات كل صباح. متوسط سرعته y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{10}{x}$، حيث x هو الزمن الذي يستغرقه لقطع مسافة 10 كيلومترات بالدراجة. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد الخطوط المقاربة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

22. $y = \frac{5}{x}$
23. $y = \frac{-3}{x}$
24. $y = \frac{2}{x} + 3$
25. $y = \frac{1}{x} - 2$
26. $y = \frac{1}{x + 3}$
27. $y = \frac{1}{x - 2}$
28. $y = \frac{-2}{x + 1}$
29. $y = \frac{4}{x - 1}$
30. $y = \frac{1}{x - 2} + 1$
31. $y = \frac{3}{x - 1} - 2$
32. $y = \frac{2}{x + 1} - 4$
33. $y = \frac{-1}{x + 4} + 3$

34. **القراءة** راجع التطبيق في بداية الدرس.
    a. مثّل الدالة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.
    b. اختر نقطة على التمثيل البياني، واذكر مدلولها في سياق الحالة.

35. **البنية** يوضح التمثيل البياني إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$.
    a. اذكر الخطوط المقاربة.
    b. أكتب دالة ممكنة للتمثيل البياني.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

36. **الطيور** الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لمسافة 5000 كيلومتر أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة r بواسطة المعادلة $r = \frac{5000}{t}$، حيث t هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 ساعة في الطيران.

37. **رحلة صَنّية** سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيسهم كل شخص أيضًا بمبلغ مالي متساوٍ لتسمية أحد النجوم.

a. أكتب وصفًا لفظيًا لتكلفة الشخص الواحد.

b. أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.

c. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.

d. قدّر عدد الأشخاص المطلوبين ليساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي AED 15.

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد الخطوط المقاربة.

38. $y = \frac{4x + 3}{2x - 4}$

39. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

40. $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

41. **الهندسة** المعادلة $h = \frac{2(64)}{b_1 + 8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 وحدة مربعة. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين مقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة؛ ويبلغ طول أحدهما b_1 وحدات والآخر 8 وحدات.

a. اذكر مجالًا ومدى منطقيين للدالة.

b. مثّل الدالة بيانيًا في الربع الأول.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b_1 = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **التحدي** مثّل $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ بيانيًا. واذكر مجال الدالة ومداها.

43. **التبرير** دون عمل التمثيل البياني، اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x + 5} - 2$.

44. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان المقاربان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

45. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالًا مضادًا.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

46. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة** حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$y = \frac{10}{2x}$ $y = \frac{8}{x} + 1$ $y = \frac{6}{x + 1}$ $y = \frac{4}{x}$

47. **الكتابة في الرياضيات** كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

48. حوّل $\frac{2a^2d}{3bc} \times \frac{9b^2c}{16ad^2}$ لأبسط صورة.

A $\frac{abd}{c}$

B $\frac{ab}{d}$

C $\frac{6a}{4bd}$

D $\frac{3ab}{8d}$

49. الإجابة القصيرة في أحد الأيام، ركضت سها 100 متر في 15 ثانية، و 200 متر في 45 ثانية، و 300 متر فوق حواجز منخفضة في دقيقة ونصف. كم عدد الثواني الإضافية التي استغرقتها لركض 300 متر فوق الحواجز المنخفضة عن ركضها مسافة 200 متر؟

50. بدأ خالد وخلف تجارة طباعة القمصان. وبلغ إجمالي تكاليف بدء العمل AED 450. وتبلغ تكلفة طباعة القميص الواحد AED 5.50. أكتب دالة نسبية $A(x)$ لمتوسط تكلفة إنتاج x قمصان.

F $A(x) = \frac{450 + 5.5x}{x}$

G $A(x) = \frac{450}{x} + 5.5$

H $A(x) = 450x + 5.5$

J $A(x) = 450 + 5.5x$

51. الهندسة أي مما يلي هو عبارة عن شكل رباعي له زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية؟

A متوازي الأضلاع

B المستطيل

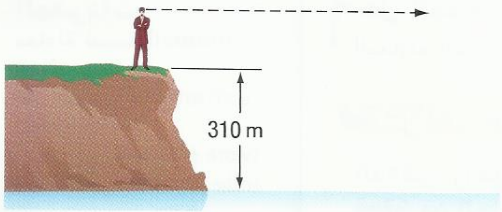
C المربع

D شبه المنحرف

مراجعة شاملة

52. السفر تستطيع أسرة خميس قطع مسافة 352 km إلى الشاطئ بالسيارة في 4 ساعات إذا ساروا بمعدل 88 km في الساعة. وتقول سمية إنه كان يمكن توفير نصف ساعة على الأقل إذا ساروا بمعدل 105 km في الساعة بالسيارة. هل هي على صواب؟ اشرح. (الدرس 5-8)

53. الرؤية الصيغة $d = \sqrt{\frac{3h}{2}}$ تمثل المسافة d بالكيلومتر التي يمكن للشخص رؤيتها من ارتفاع h متراً. تقف شيماء على منحدر يرتفع 310 أمتار فوق مستوى البحر. ما المسافة التي يمكن أن تراها شيماء من المنحدر؟ أكتب تعبيرًا جذريًا مبسطًا وتقريبًا عشريًا. (الدرس 2-8)



مراجعة المهارات

حلّل كل ثلاثية حدود إلى العوامل.

54. $x^2 + 11x + 24$

55. $w^2 + 13w - 48$

56. $p^2 - 2p - 35$

57. $72 + 27a + a^2$

58. $c^2 + 12c + 35$

59. $d^2 - 7d + 10$

60. $g^2 - 19g + 60$

61. $n^2 + 3n - 54$

62. $5x^2 + 27x + 10$

63. $24b^2 - 14b - 3$

64. $12a^2 - 13a - 35$

65. $6x^2 - 14x - 12$

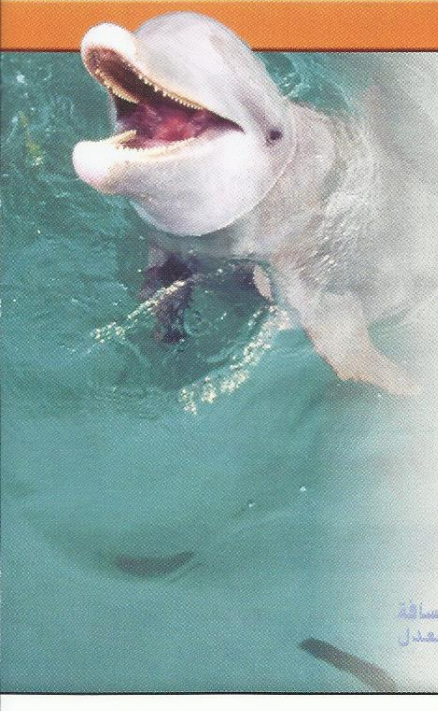
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-7 المعادلات النسبية

السابق
- وجدت حل التناسبات.

الحالي
1 حل المعادلات النسبية.
2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

لماذا؟
- أنواع الدلافين التي تعيش في المحيطات تستطيع السباحة بمعدل 8 كيلومترات في الساعة أسرع من الدلافين التي تعيش في السواحل. يستطيع الدلفين المحيطي السباحة لمسافة 4.8 كيلومترات في الوقت نفسه الذي يستغرقه الدلفين الساحلي للسباحة لمسافة 3.2 كيلومترات.



الدلافين			
النوع	المسافة	المعدل	الزمن
الساحلي		x kmph	t ساعات
المحيطي		$x + 8$ kmph	t ساعات

بما أن الزمن $= \frac{\text{المسافة}}{\text{المعدل}}$، فإن المعادلة التالية تمثل هذه الحالة.

الوقت الذي يسبح فيه الدلفين الساحلي 3.2 كيلومترات يساوي الوقت الذي يسبح فيه الدلفين المحيطي 4.8 كيلومترات

$$\frac{\text{المسافة } 3.2}{\text{المعدل } x} = \frac{\text{المسافة } 4.8}{\text{المعدل } x + 8}$$

المفردات الجديدة
- معادلة نسبية (rational equation)
- حل دخيل (extraneous solution)
- مسألة عمل (work problem)
- مسألة معدل (rate problem)

ممارسات في الرياضيات
- التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
- استخدام نماذج الرياضيات.

1 حل المعادلات النسبية

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. عندما تكون المعادلة النسبية عبارة عن تناسب، يمكنك استخدام الضرب التقاطعي لحلها.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الضرب التقاطعي لحل المعادلات

الدلافين راجع المعلومات المذكورة أعلاه. حل $\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ لإيجاد سرعة الدلفين الساحلي. تحقق من الحل.

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$	المعادلة الأصلية
$4.8x = 3.2x + 25.6$	أوجد ناتج الضرب التقاطعي.
$16x = 25.6$	خاصية التوزيع
$x = 16$	اطرح $2x$ من كل طرف.

إذًا، يستطيع الدلفين الساحلي السباحة بمعدل 16 كيلومترًا في الساعة.

التحقق

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$	المعادلة الأصلية
$\frac{4.8}{16+8} = \frac{3.2}{16}$	عوّض عن x بـ 16.
$\frac{4.8}{24} = \frac{3.2}{16}$	بسّط.
$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ✓	بسّط.

تمرين موجّه

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

1A. $\frac{7}{y-3} = \frac{3}{y+1}$

1B. $\frac{13}{10} = \frac{2f + 0.2}{7}$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

يمكن استخدام طريقة أخرى لحل أي معادلة نسبية وهي بإيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور في المعادلة. ثم بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور.

مثال 2 استخدام المقام المشترك الأصغر لحل المعادلات النسبية

حُل المعادلة: $\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$. تحقق من الحل.

الخطوة 1 أوجد المقام المشترك الأصغر.

المقام المشترك الأصغر لـ $\frac{4}{y}$ و $\frac{5y}{y+1}$ هو $y(y+1)$.

الخطوة 2 اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر.

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$y(y+1)\left(\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1}\right) = y(y+1)(5)$$ اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر، $y(y+1)$.

$$\left(\frac{\cancel{y}^{1}(y+1)}{1} \cdot \frac{4}{\cancel{y}_{1}}\right) + \left(\frac{\cancel{y+1}^{1}}{1} \cdot \frac{5y}{\cancel{y+1}_{1}}\right) = y(y+1)(5)$$ خاصية التوزيع

$$(y+1)4 + y(5y) = y(y+1)(5)$$ بسّط.

$$4y + 4 + 5y^2 = 5y^2 + 5y$$ اضرب.

$$4y + 4 + 5y^2 - 5y^2 = 5y^2 - 5y^2 + 5y$$ اطرح $5y^2$ من كل طرف.

$$4y + 4 = 5y$$ بسّط.

$$4y - 4y + 4 = 5y - 4y$$ اطرح $4y$ من كل طرف.

$$4 = y$$ بسّط.

التحقق

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{4}{4} + \frac{5(4)}{4+1} \stackrel{?}{=} 5$$ عوّض عن y بـ 4.

$$1 + 4 \stackrel{?}{=} 5$$ بسّط.

$$5 = 5 \checkmark$$ بسّط.

نصيحة دراسية

الحلول من الضروري التحقق من حلول المعادلات النسبية للتأكد من أنك حققت المعادلة الأصلية.

تمرين موجّه

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

2A. $\frac{2b-5}{b-2} - 2 = \frac{3}{b+2}$

2B. $1 + \frac{1}{c+2} = \frac{28}{c^2+2c}$

2C. $\frac{y+2}{y-2} - \frac{2}{y+2} = -\frac{7}{3}$

2D. $\frac{n}{3n+6} - \frac{n}{5n+10} = \frac{2}{5}$

الربط بالمفردات

دخيل

الاستخدام اليومي

غير ذي صلة أو غير مهم

حل دخيل

الاستخدام الرياضي ناتج لا يعتبر حلاً للمعادلة الأصلية

تذكر أن أي قيمة للمتغير تجعل مقام التعبير النسبي صفرًا يجب استبعادها من المجال.

وبنفس الطريقة، عندما ينتج عن حل المعادلة النسبية صفر في المقام، فإنه ينبغي استبعاد هذا الحل. وتُسمى مثل هذه الحلول **بالحلول الدخيلة**.

$\frac{4+x}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ 5، و 0، و −1 لا يمكن أن تكون حلولاً.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 الحلول الدخيلة

أوجد حل $\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ واذكر أي حلولٍ دخيلة.

$\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ — المعادلة الأصلية

$(n-5)\left(\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}\right)=(n-5)5$ — اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $n-5$.

$\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{2n}{\cancel{n-5}_{1}}\right)+\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{4n-30}{\cancel{n-5}_{1}}\right)=(n-5)5$ — خاصية التوزيع

$2n+4n-30=5n-25$ — بسّط.

$6n-30=5n-25$ — اجمع الحدود المتشابهة.

$6n-5n-30=5n-5n-25$ — اطرح $5n$ من كل طرف.

$n-30=-25$ — بسّط.

$n-30+30=-25+30$ — اجمع 30 إلى كل طرف.

$n=5$ — بسّط.

بما أن $n=5$ ينتج عنه صفر في مقام المعادلة الأصلية. فهو حل دخيل. إذًا، المعادلة ليس لها حل.

تمرين موجّه

3. حُل المعادلة: $\frac{n^2-3n}{n^2-4}-\frac{10}{n^2-4}=2$. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

نصيحة دراسية

الحلول من الممكن أن تحصل على كلٍ من حل صالح وحل دخيل عند حل معادلة نسبية.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

يمكنك استخدام المعادلات النسبية لحل **مسائل العمل**، أو مسائل تشتمل على معدلات العمل.

مثال 4 من الحياة اليومية مسألة عمل

وظائف في هذه الوظيفة ذات الدوام الجزئي في حديقة الحيوان، يستطيع رشيد تنظيف ساحة الطيور في ساعتين. ويستطيع حسام تنظيف الساحة نفسها في ساعة و 15 دقيقة. كم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

الفهم يستغرق رشيد ساعتين لإكمال العمل ويستغرق حسام $1\frac{1}{4}$ ساعة.

أنت تحتاج إلى إيجاد معدل عمل كل شخص والزمن الإجمالي t المستغرق منهما لإكمال العمل معًا.

التخطيط أوجد الكسر الذي يعبر عن العمل الذي يقوم به كل شخص في ساعة.

معدل رشيد ← $\frac{1 \text{ عمل}}{2 \text{ ساعة}}=\frac{1}{2}$ عمل لكل ساعة

معدل حُسام ← $\frac{1 \text{ عمل}}{1\frac{1}{4} \text{ ساعة}}$ أو $\frac{1 \text{ عمل}}{\frac{5}{4} \text{ ساعة}}=\frac{4}{5}$ عمل لكل ساعة

بما أن المعدل × الزمن = الكسر المعبر عن العمل المنجز، فاضرب كل معدل في الزمن t لتمثيل كمية العمل المنجز لكل شخص.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الحل

عملاً واحدًا — يساوي — الكسر المعبر عن عمل حُسام المنجز — زائد — الكسر المعبر عن عمل رشيد المنجز

$$\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t = 1$$

$$10\left(\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t\right) = 10(1)$$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، 10.

$$10\left(\frac{1}{2}t\right) + 10\left(\frac{4}{5}t\right) = 10$$ خاصية التوزيع

$$5t + 8t = 10$$ بسّط.

$$t = \frac{10}{13}$$ اجمع الحدود المتشابهة واقسم كل طرف على 13.

إذًا، سيستغرقان $\frac{10}{13}$ ساعة أو حوالي 46 دقيقة لإنجاز العمل إذا عملا معًا.

التحقق في $\frac{10}{13}$ ساعة، سوف ينجز رشيد $\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{5}{13}$ من العمل وسوف ينجز حُسام $\frac{4}{5} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{8}{13}$ من العمل. معًا، سينجزان $\frac{5}{13} + \frac{8}{13}$ أو عملاً واحدًا كاملاً. إذًا، الإجابة صحيحة. ✓

نصيحة دراسية

الاستنتاج عند حل مسائل العمل، تذكر أن المصطلح الذي يمثل جزءًا من العمل المنجز، يجب أن يكون بوحدة زمنية واحدة.

تمرين موجّه

4. كنس ورق الشجر تستطيع علياء كنس ورق الشجر في ساعتين. ويستغرق ذلك من أخيها زياد 3 ساعات. كم من الوقت سيستغرقان في كنس ورق الشجر إذا عملا معًا؟

يمكن استخدام المعادلات النسبية أيضًا لحل **مسائل المعدل**.

مثال 5 من الحياة اليومية مسألة المعدل

الطائرات **أقلعت طائرة وكانت تطير بمتوسط 772 كيلومترًا في الساعة. بعد 15 دقيقة، غادرت طائرة أخرى واتجهت نحو المدينة نفسها بمعدل 900 كيلومتر في الساعة. كم من الوقت ستستغرق الطائرة الثانية لاجتياز الطائرة الأولى؟**

دوّن المعلومات التي تعرفها في جدول.

الطائرة	المسافة	المعدل	الزمن
1	d كيلومتراً	772 كيلومترًا	t ساعات
2	d كيلومتراً	900 كيلومتر	$t - \frac{1}{4}$ ساعة

أقلعت الطائرة 2 بعد 15 دقيقة، أو $\frac{1}{4}$ ساعة بعد الطائرة 1

بما أن كلتا الطائرتين ستكون سافرتا المسافة نفسها عندما تجتاز الطائرة 2 الطائرة 1، فإنه يمكنك كتابة المعادلة التالية.

مسافة الطائرة 1 = مسافة الطائرة 2

$$772 \times t = 900 \times \left(t - \frac{1}{4}\right)$$ المسافة = المعدل × الزمن

$$772t = (900 \times t) - \left(900 \times \frac{1}{4}\right)$$ خاصية التوزيع

$$772t = 900t - 225$$ بسّط.

$$-80t = -225$$ اطرح $560t$ من كل طرف.

$$t = 1.75$$ اقسم كل طرف على -80.

إذًا، ستجتاز الطائرة الثانية الطائرة الأولى بعد 1.75 ساعة.

تمرين موجّه

5. غادرت هدى المنزل وسارت بمعدل 3 كيلومترات في الساعة. بعد 10 دقائق، غادرت أمها المنزل وسارت بالدراجة بمعدل 10 كيلومترات في الساعة. فبعد كم دقيقة ستلحق الأم بابنتها؟

الربط بالحياة اليومية

تبلغ أطول رحلة جوية تجارية دون توقف 21,600 كيلومتر من مطار هونج كونج في الصين إلى مطار لندن – هيثرو في المملكة المتحدة. واستغرقت الرحلة 22 ساعة و42 دقيقة.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **أوجد حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

1. $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x}$
2. $\frac{t+3}{5} = \frac{2t+3}{9}$
3. $\frac{a+3}{a} - \frac{6}{5a} = \frac{1}{a}$
4. $4 - \frac{p}{p-1} = \frac{2}{p-1}$
5. $\frac{2t}{t+1} + \frac{4}{t-1} = 2$
6. $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$

مثال 4 7. **إزالة الأعشاب الضارة** يستطيع سلطان إزالة الأعشاب الضارة بالحديقة في 45 دقيقة. وتستطيع أخته عبير القيام بذلك في 50 دقيقة. فكم سيستغرقان من الوقت لإزالة الأعشاب الضارة بالحديقة إذا عملا معًا؟

مثال 5 8. **تنسيق الحدائق** يملأ أمير دلوًا سعته 13.2 لترًا لري النباتات من صنبور يتدفق منه الماء بمعدل 6.6 لترات في الدقيقة. إذا كان سيضيف خرطومًا يتدفق منه الماء بمعدل 5.4 لترات في الدقيقة، فكم عدد الدقائق التي سيستغرقها لملء الدلو؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **أوجد حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

9. $\frac{8}{n} = \frac{3}{n-5}$
10. $\frac{6}{t+2} = \frac{4}{t}$
11. $\frac{3g+2}{12} = \frac{g}{2}$
12. $\frac{5h}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3h}{8}$
13. $\frac{2}{3w} = \frac{2}{15} + \frac{12}{5w}$
14. $\frac{c-4}{c+1} = \frac{c}{c-1}$
15. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = -1$
16. $\frac{y+4}{y-2} + \frac{6}{y-2} = \frac{1}{y+3}$
17. $\frac{a}{a+3} + \frac{a^2}{a+3} = 2$
18. $\frac{12}{a+3} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{8}{a+3}$
19. $\frac{3n}{n-1} + \frac{6n-9}{n-1} = 6$
20. $\frac{n^2-n-6}{n^2-n} - \frac{n-5}{n-1} = \frac{n-3}{n^2-n}$

مثال 4 21. **الطلاء** إذا كان سعيد يستغرق 3 ساعات لطلاء جانب واحد من السياج. ويستغرق ذلك من طارق 5 ساعات. فكم من الوقت سيستغرق ذلك منهما إذا عملا معًا؟

22. **غسل الصحون** إذا كان عبيد يعمل غاسلاً للصحون ويستطيع غسل 500 صحن في ساعتين و 15 دقيقة. ويستطيع عبد الرحمن إنهاء 500 صحن في 3 ساعات. فكم سيستغرقان من الوقت لإنهاء كل الصحون إذا عملا معًا؟

مثال 5 23. **الثلج** إذا كان الفندق به جهازان لصنع الثلج في المطبخ. فكم عدد الساعات التي سيستغرقها الجهازان لصنع 60 kg من الثلج؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

24. **قيادة الدراجات** إذا اتجه قائدا دراجتين كلٌ في اتجاه معاكس للآخر في مسار دائري طوله 5.6 كيلومترات. وبدئا في الوقت نفسه. وأكمل قائد الدراجة الأول المسار في 22 دقيقة وقائد الدراجة الثاني في 28 دقيقة. ففي أي وقت تجاوز كلٌ منهما الآخر؟

حاسبة التمثيل البياني بالنسبة لكل دالة، a) صِف شكل التمثيل البياني، b) استخدم التحليل إلى العوامل لتحويل الدالة لأبسط صورة، c) أوجد أصفار الدالة.

25. $f(x) = \frac{x^2 - x - 30}{x - 6}$
26. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2}$
27. $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x}$

28. **التبرير** إذا كان عبد الكريم يستطيع طلاء منزل مساحته قياسية في حوالي 5 أيام. واستأجر مساعدين اثنين لمهمته الأخيرة. فبأي معدل يجب على هذين المساعدين العمل لصالح عبد الكريم للوفاء بالموعد النهائي البالغ يومين؟

McGraw-Hill Education مؤسسة لحالج والتأليف © محفوظة لحالج والتأليف

29. **الطائرات** إذا كانت الرياح المعاكسة تهب في اتجاه الطائرة وتقلل من سرعتها الإجمالية، في حين تدفع الرياح الخلفية الطائرة وتزيد من سرعتها الإجمالية. ليكن w يساوي سرعة الرياح، و r يساوي السرعة التي حددها الطيار، و s يساوي السرعة الإجمالية.

a. أكتب معادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح المعاكسة ومعادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح الخلفية.

b. استخدم قاعدة المعدل لكتابة معادلة للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح المعاكسة ومعادلة أخرى للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح الخلفية. ثم حل كل معادلة لإيجاد الزمن بدلاً من المسافة.

30. **كوكتيل العصائر** إذا كان بائع عصائر الفاكهة لديه 3 لترات من عصير الأناناس ولتران من عصير البرتقال. وتريد فتحية إضافة المزيد من عصير البرتقال بحيث يكون 60% من كوكتيل عصير الفاكهة من عصير البرتقال. ليكن x يساوي لترات عصير البرتقال التي تريد إضافتها.

a. انسخ الجدول التالي وأكمله.

العصير	لترات عصير البرتقال	إجمالي لترات العصير	النسبة المئوية لعصير البرتقال
الكوكتيل الأصلي		5	
الكوكتيل النهائي	$x + 2$		0.6

b. أكتب معادلة وحلها لإيجاد لترات عصير البرتقال المطلوب إضافتها.

31. **السكن الجماعي** إذا كان عدد الساعات h المستغرقة في تنظيف السكن الجماعي يتغير عكسيًا مع عدد الأشخاص الذين ينظفونه c ويتغير طرديًا مع عدد الأشخاص الذين يعيشون هناك p.

a. فأكتب معادلة توضح الارتباط بين h، و c، و p. (إرشاد: قم بتضمين الثابت k.)

b. إذا كان تنظيف السكن الجماعي يستغرق 8 ساعات من 5 أشخاص عندما يوجد 100 شخص ساكن. فكم سيستغرق تنظيف السكن إذا كان يوجد 10 أشخاص ينظفون ولا زال عدد الأشخاص الذين يعيشون في السكن كما هو؟

أوجد حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

32. $\frac{4b + 2}{b^2 - 3b} + \frac{b + 2}{b} = \frac{b - 1}{b}$

33. $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = 3$

34. $\frac{y^2 + 5y - 6}{y^3 - 2y^2} = \frac{5}{y} - \frac{6}{y^3 - 2y^2}$

35. $\frac{x - \frac{6}{5}}{x} - \frac{x - 10\frac{1}{2}}{x - 5} = \frac{x + 21}{x^2 - 5x}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **التحدي** حُل المعادلة: $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{(x + 1)(x - 2)}$.

37. **التبرير** ما وجه الارتباط بين القيمة المستبعدة من التعبير النسبي والحل الدخيل للمعادلة النسبية المناظرة؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يجب عليك التحقق من حلولك للمعادلات النسبية؟

39. **الفرضيات** أوجد مثالاً مضاداً للعبارة التالية.

حل المعادلة النسبية لا يمكن أبدًا أن يكون صفرًا.

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوات حل معادلة نسبية لا تكون عبارة عن تناسب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

41. يستغرق علي 4 ساعات في بناء سياج. وإذا استأجر عمر ليساعده، فسوف يمكنهما إنجاز العمل في 3 ساعات. فإذا بنى عمر السياج نفسه بمفرده، فكم من الوقت سيستغرق منه ذلك؟

A $1\frac{5}{7}$ ساعة **C** 8 ساعات

B $3\frac{2}{3}$ ساعات **D** 12 ساعة

42. في سباق 1000 متر، أكمل عدنان 35 مترًا قبل منصور و 53 مترًا قبل أيوب. فما المسافة التي سبق منصور بها عدنان؟

F 18 m **G** 35 m **H** 53 m **J** 88 m

43. تم صب عشرين لترًا من عصير الليمون في وعائين لهما حجم مختلف. عبّر عن كمية عصير الليمون التي تم صبها في الوعاء الأصغر بدلالة g، وهي الكمية التي تم صبها في الوعاء الأكبر.

A $g + 20$ **C** $g - 20$

B $20 + g$ **D** $20 - g$

44. الإجابة الشبكية صالة ألعاب رياضية بها أقراص ذات وزن كيلوجرامين و 5 كيلوجرامات. ويوجد أربعون قرصًا بشكل إجمالي. فإذا كان الوزن الإجمالي لأقراص الكيلوجرامين هو نفسه الوزن الإجمالي لأقراص 5 كيلوجرامات. فكم عدد أقراص الكيلوجرامين الموجودة؟

مراجعة شاملة

45. التعداد السكاني يشهد التعداد السكاني في دولة ما تناقصًا سنويًا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

46. الطماطم يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطماطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبذور تنتج عبوات بذور لـ 200 صنف من الطماطم. فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بذورًا لها؟

47. القيادة يجب أن يبقى ضغط الإطارات في حدود رطلين للبوصة المربعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مدى قيم الضغط المقبولة؟

عبّر عن كل عدد بالصيغة العلمية.

48. 12,300 **49.** 0.0000375 **50.** 1,255,000

51. المعرفة المالية إذا كان مع محمد 13 AED لطلب بيتزا. وتبلغ تكلفة البيتزا 7.50 AED زائد 1.25 AED لكل إضافة. وهو يعتزم دفع 15% من التكلفة الإجمالية بقشيشًا. أكتب متباينة وحلها لإيجاد عدد الإضافات التي يمكن أن يطلبها.

أوجد حل كل متباينة. تحقق من حلك.

52. $\frac{b}{10} \leq 5$ **53.** $-7 > -\frac{r}{7}$ **54.** $\frac{5}{8}y \geq -15$

مراجعة المهارات

حدد احتمال وقوع كل حدث إذا قمت باختيار كرة زجاجية من حقيبة تحتوي على 9 كرات زجاجية حمراء، و 6 كرات زجاجية زرقاء، و 5 كرات زجاجية صفراء.

55. P(زرقاء) **56.** P(حمراء) **57.** P(ليست صفراء)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية عن طريق التمثيل البياني، واستخدام الجداول وأحد النظم الجبرية الحاسوبية (CAS).

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

للحل بالتمثيل البياني، مثّل بيانيًا كلا طرفي المعادلة وحدد موقع نقطة (نقاط) التقاطع.

النشاط 1 حل المعادلة النسبية بالتمثيل البياني

حُل المعادلة: $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$ بالتمثيل البياني.

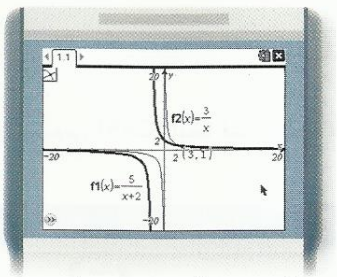
الخطوة 1 أضف صفحة **Graphs** جديدة.

الخطوة 2 استخدام خيار **Window Settings** من قائمة **Window/Zoom** لضبط النافذة إلى 20− إلى 20 بالنسبة لكل من x و y. اضبط المقياسين إلى 2.

الخطوة 3 أدخل $\frac{5}{x+2}$ إلى $f_1(x)$ و $\frac{3}{x}$ إلى $f_2(x)$.

الخطوة 4 غير سُمك التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ عن طريق تحديد التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ وخيار **ctrl menu** **Attributes**.

الخطوة 5 استخدم أداة **Intersection Point(s)** من قائمة **Points & Lines** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. حدد التمثيل البياني لـ **f1(x)** enter ثم التمثيل البياني لـ **f2(x)** enter.



[−20, 20] scl: 2 بمعدل [−20, 20] scl: 2

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند النقطة (3, 1). وهذا يعني أن $\frac{5}{x+2}$ و $\frac{3}{x}$ كليهما يساويان 1 عندما يكون $x = 3$. إذًا، حل $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ هو $x = 3$.

تمارين

استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل كل معادلة.

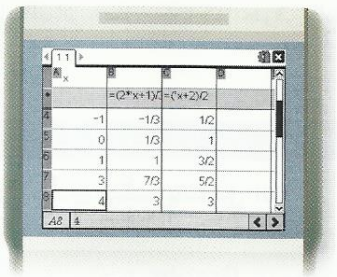
1. $\frac{5}{x} + \frac{4}{x} = 10$
2. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$
3. $\frac{6}{x} + \frac{3}{2x} = 12$
4. $\frac{4}{x} + \frac{3}{4x} = \frac{1}{8}$
5. $\frac{4}{x} + \frac{x-2}{2x} = x$
6. $\frac{3}{3x-2} + \frac{5}{x} = 0$
7. $\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{2}{x}$
8. $\frac{x}{x+2} + x = \frac{5x+8}{x+2}$
9. $\frac{1}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{4x-3}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} = 6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية تابع

النشاط 2 حل المعادلة النسبية باستخدام جدول

حُل المعادلة: $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ باستخدام جدول.



الخطوة 1 أضف صفحة **Lists & Spreadsheet** جديدة.

الخطوة 2 قم بتسمية العمود A بـ x. أدخل القيم من -4 إلى 4 في الخلايا A1 إلى A9.

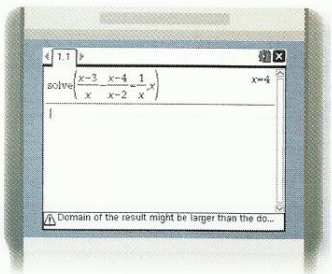
الخطوة 3 في العمود B في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيسر من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. في العمود C في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيمن من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. حدد **Variable Reference** عندما يُطلب منك.

مرّر حتى ترى أين تتساوى القيم في العمودين B و C. يحدث هذا عند $x = 4$.
لذا، حل $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ هو 4.

يمكنك استخدام نظام جبري حاسوبي (CAS) أيضًا لحل المعادلات النسبية.

النشاط 3 حل المعادلة النسبية باستخدام نظام جبري حاسوبي

حُل المعادلة: $\frac{x-3}{x} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{x}$ باستخدام نظام جبري حاسوبي (CAS).



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** جديدة.

الخطوة 2 لحل المعادلة، حدد أداة **Solve** من القائمة **Algebra**. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة مع وضع ثنائيات الحدود بين الأقواس.
أدخل = والطرف الأيمن من المعادلة.
ثم أكتب فاصلة وأتبعها بـ x، ثم اضغط **enter**.

سيظهر الحل، 4.

تمارين

حل كل معادلة مما يلي باستخدام جدول أو نظام جبري حاسوبي.

11. $\frac{2}{x} + \frac{2+x}{2} = \frac{x+3}{2}$
12. $\frac{4}{x-2} = -\frac{1}{x+3}$
13. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 0$
14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 0$
15. $\frac{2}{x+4} + \frac{4}{x-1} = 0$
16. $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{4} = 2x$
17. $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{2} = x$
18. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x}$
19. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = x$

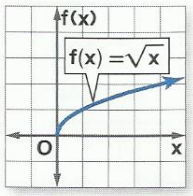
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق

8 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

دوال الجذر التربيعي (الدرس 1-8)



- تشتمل دالة الجذر التربيعي على الجذر التربيعي لمتغير.
- الدالة الأصلية لمجموعة دوال الجذر التربيعي تكون $f(x) = \sqrt{x}$.

تبسيط التعابير الجذرية (الدرس 2-8)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما
- لا يوجد مجذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
- لا يوجد أي مجذور مشتمل على كسور.
- لا يظهر أي مجذور في مقام كسر.

العمليات على التعابير والمعادلات الجذرية (الدرسان 3-8 و 4-8)

- التعابير الجذرية ذات المجذورات المتشابهة يمكن جمعها أو طرحها.
- استخدم طريقة فويل FOIL لضرب التعابير الجذرية.

التغير العكسي (الدرس 5-8)

- يمكنك استخدام $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لحل المسائل المشتملة على تغير عكسي.

الدوال النسبية (الدرس 6-8)

- القيم المستبعدة هي قيم متغير ينتج عنها مقام صفري.
- إذا حدثت خطوط مقاربة رأسية، فسوف تقع عند قيم مستبعدة.

حل المعادلات النسبية (الدرس 7-8)

- استخدم الضرب التقاطعي لحل المعادلات النسبية ذات كسر واحد على كل طرف من طرفي علامة يساوي.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

خط مقارب asymptote	دالة جذرية radical function
مغلقة closed	مجذور radicand
مرافق conjugate	مسألة معدل rate problem
قيمة مستبعدة excluded value	إنطاق المقام rationalize the denominator
حل دخيل extraneous solution	دالة نسبية rational function
تغير عكسي inverse variation	معادلة نسبية rational equation
قاعدة ناتج الضرب product rule	دالة الجذر التربيعي square root function
معادلات جذرية radical equations	مسألة عمل work problem
تعبير جذري radical expression	

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة *صحيحة* أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة أو التعبير أو العدد الذي تحته خط لصياغة جملة صحيحة.

1. التعبيران $12\sqrt{4}$ و $\sqrt{288}$ متكافئان.
2. التعبيران $2 - \sqrt{5}$ و $\sqrt{5} + 2$ مرافقان.
3. في التعبير $-5\sqrt{2}$ ، يكون المجذور هو 2.
4. إذا كان ناتج ضرب متغيرين عبارة عن ثابت غير صفري، فإن العلاقة بينهما تكون تغيرًا عكسيًا.
5. إذا كان المستقيم $x = a$ خطًا مقاربًا رأسيًا لدالة نسبية، فإذًا تكون a قيمة مستبعدة.
6. القيم المستبعدة من التعبير $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ هي -3 و -2.
7. المعادلة $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$ لها حل دخيل، 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-1 دوال الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

8. $y = \sqrt{x} - 3$
9. $y = \sqrt{x} + 2$
10. $y = -5\sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x} - 6$
12. $y = \sqrt{x - 1}$
13. $y = \sqrt{x} + 5$

14. **الهندسة** يمكن استخدام الدالة $s = \sqrt{A}$ لإيجاد طول ضلع المربع المُعطى مساحته. استخدم هذه الدالة لاكتشاف طول ضلع مربع مساحته 90 سنتيمترًا مربعًا. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

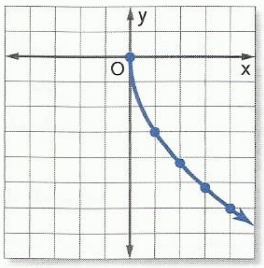
مثال 1

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولاً. اختر قيمًا غير سالبة لـ x.

x	0	1	2	3	4
y	0	−3	≈−4.2	≈−5.2	−6

عيّن النقاط وارسم منحنى منتظمًا.



التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ تمدد رأسيًا وانعكس على المحور x.

المجال هو $\{x | x \geq 0\}$.

المدى هو $\{y | y \leq 0\}$.

8-2 تبسيط التعابير الجذرية

بسّط.

15. $\sqrt{36x^2y^7}$
16. $\sqrt{20ab^3}$
17. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
18. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{12}$
19. $(4 - \sqrt{5})^2$
20. $(1 + \sqrt{2})^2$
21. $\sqrt{\frac{50}{a^2}}$
22. $\sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{3}{4}}$
23. $\frac{3}{2 - \sqrt{5}}$
24. $\frac{5}{\sqrt{7} + 6}$

25. **الطقس** لتقدير كم من الوقت ستستمر العاصفة الرعدية، استخدم المعادلة $t = \sqrt{\frac{d^3}{216}}$، حيث t هو الزمن بالساعات و d هو قطر العاصفة بالأميال. إذا كانت عاصفة قطرها 10 كيلومترات. فكم من الوقت ستستمر؟

مثال 2

بسّط $\frac{2}{4 + \sqrt{3}}$.

$\frac{2}{4 + \sqrt{3}}$ التعبير الأصلي

$= \frac{2}{4 + \sqrt{3}} \times \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$ إنطاق المقام.

$= \frac{2(4) - 2\sqrt{3}}{4^2 - (\sqrt{3})^2}$ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$= \frac{8 - 2\sqrt{3}}{16 - 3}$ $(\sqrt{3})^2 = 3$

$= \frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}$ بسّط.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-3 العمليات على التعابير الجذرية

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

26. $\sqrt{6} - \sqrt{54} + 3\sqrt{12} + 5\sqrt{3}$

27. $2\sqrt{6} - \sqrt{48}$

28. $4\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x}$

29. $\sqrt{50} + \sqrt{75}$

30. $\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{3})$

31. $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + 4\sqrt{6})$

32. $(6\sqrt{5} + 2)(4\sqrt{2} + \sqrt{3})$

33. **الحركة** يمكن إيجاد السرعة المتجهة لجسم ما يسقط عند اصطدامه بالأرض، باستخدام $v = \sqrt{2gd}$. حيث v هي السرعة المتجهة بالأمتار في الثانية، و g هو التسارع بفعل الجاذبية، و d هي المسافة، بالأمتار. استخدم قيمة g تساوي التي يسقطها الجسم. أوجد سرعة فلس عند اصطدامه بالأرض بعد سقوطه من ارتفاع 984 مترًا. استخدم 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة.

مثال 3

بسّط $2\sqrt{6} - \sqrt{24}$.

$2\sqrt{6} - \sqrt{24} = 2\sqrt{6} - \sqrt{4 \times 6}$ خاصية ناتج الضرب

$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$ بسّط.

$= 0$ بسّط.

مثال 4

حوّل لأبسط صورة $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$.

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

$= (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{2})(2\sqrt{2})$

$= 3 + 2\sqrt{6} - \sqrt{6} + 4$

$= 7 + \sqrt{6}$

8-4 المعادلات الجذرية

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

34. $10 + 2\sqrt{x} = 0$

35. $\sqrt{5 - 4x} - 6 = 7$

36. $\sqrt{a + 4} = 6$

37. $\sqrt{3x} = 2$

38. $\sqrt{x + 4} = x - 8$

39. $\sqrt{3x - 14} + x = 6$

40. **السقوط الحر** بافتراض عدم وجود مقاومة للهواء، يمكن إيجاد الزمن t بالثواني الذي يستغرقه جسم ما للسقوط من h أمتار، باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{4}}$. إذا قفز لاعب قفز حر من طائرة وكان في سقوط حر لمدة 10 ثوانٍ قبل فتح المظلة، فكم عدد أمتار السقوط الحر؟

مثال 5

أوجد حل $\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$.

$\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$ المعادلة الأصلية

$\sqrt{7x + 4} = 23$ اجمع 18 إلى كل طرف.

$(\sqrt{7x + 4})^2 = 23^2$ قم بتربيع كل طرف.

$7x + 4 = 529$ بسّط.

$7x = 525$ اطرح 4 من كل طرف.

$x = 75$ اقسم كل طرف على 7.

التحقق

$\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$ المعادلة الأصلية

$\sqrt{7(75) + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$ $x = 75$

$\sqrt{525 + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$ اضرب.

$\sqrt{529} - 18 \stackrel{?}{=} 5$ اجمع.

$23 - 18 \stackrel{?}{=} 5$ بسّط.

$5 = 5$ ✓ صحيح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-5 التغير العكسي

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

41. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 1$، فأوجد x عندما يكون $y = 12$

42. إذا كان $y = -1$ عندما يكون $x = -3$، فأوجد y عندما يكون $x = -9$

43. إذا كان $y = 1.5$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد y عندما يكون $x = -16$

44. الفيزياء إذا كان شخص وزنه 61 كيلوجرامًا يجلس على بعد 1.5 m من مركز أرجوحة. فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 49 كيلوجرامًا أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

مثال 6

إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 28$ عندما يكون $x = 42$، فأوجد y عندما يكون $x = 56$.

ليكن $x_1 = 42$، و $x_2 = 56$، و $y_1 = 28$. حل لإيجاد y_2.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ تناسب للتغير العكسي

$\frac{42}{56} = \frac{y_2}{28}$ التعويض

$1176 = 56y_2$ الضرب التقاطعي.

$21 = y_2$

لذا، $y = 21$ عندما يكون $x = 56$.

8-6 الدوال النسبية

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

45. $y = \frac{1}{x - 3}$

46. $y = \frac{2}{2x - 5}$

47. $y = \frac{3}{3x - 6}$

48. $y = \frac{-1}{2x + 8}$

49. حفل البيتزا طلبت هيام بيتزا ومياهًا غازية للمجموعة الدراسية لديها مقابل 38 AED. التكلفة لكل شخص y تُعطى بالمعادلة $y = \frac{38}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص في المجموعة الدراسية. مثّل الدالة بيانيًا واذكر الخطوط المقاربة.

مثال 7

اذكر القيمة المستبعدة من الدالة $y = \frac{1}{4x + 16}$.

اجعل المقام يساوي الصفر.

$4x + 16 = 0$

$4x + 16 - 16 = 0 - 16$ اطرح 16 من كل طرف.

$4x = -16$ بسّط.

$x = -4$ اقسم كل طرف على 4.

8-7 المعادلات النسبية

أوجد حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

50. $\frac{5n}{6} + \frac{1}{n - 2} = \frac{n + 1}{3(n - 2)}$

51. $\frac{4x}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7x}{12} - 14$

52. $\frac{11}{2x} + \frac{2}{4x} = \frac{1}{4}$

53. $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$

54. $\frac{1}{n - 2} = \frac{n}{8}$

55. الطلاء إذا كانت وفاء تستطيع طلاء غرفة في 6 ساعات. وتستطيع هنا طلاء الغرفة في 4 ساعات. فكم ستستغرقان من الوقت لطلاء الغرفة إذا عملتا معًا؟

مثال 8

أوجد حل $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$.

$\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$x(x + 3)\left(\frac{3}{x(x + 3)}\right) + x(x + 3)\left(\frac{x + 2}{x + 3}\right) = x(x + 3)\left(\frac{1}{x}\right)$

$3 + x(x + 2) = 1(x + 3)$

$3 + x^2 + 2x = x + 3$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ أو $x = -1$

الحل هو -1، ويوجد حل دخيل يساوي 0.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

1. $y = -\sqrt{x}$
2. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$
3. $y = \sqrt{x} + 5$
4. $y = \sqrt{x + 4}$

5. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما محيط دائرة مساحتها 64 سنتيمترًا مربعًا؟

A 64 سنتيمترًا

B 8 سنتيمترات

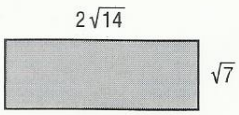
C 32 سنتيمترًا

D 16 سنتيمترًا

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $5\sqrt{36}$
7. $\frac{3}{1 - \sqrt{2}}$
8. $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$
9. $3\sqrt{6}(5\sqrt{2})$

10. **اختيار من متعدد** أوجد مساحة المستطيل.



F $7\sqrt{2}$

G 14

H $14\sqrt{2}$

J $98\sqrt{2}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

11. $\sqrt{10x} = 20$

12. $\sqrt{4x - 3} = 6 - x$

13. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة يبلغ حجمها حوالي $2564.7\ m^3$. يمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. إذا كان الارتفاع 21 سنتيمترًا، فأوجد نصف قطر الحاوية.

حدد ما إذا كان كل جدول يعبر عن تغير عكسي. اشرح.

14.

x	y
2	10
4	12
8	14

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

15. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 9$. فأوجد x عندما يكون $y = 1$

16. إذا كان $y = 2$ عندما يكون $x = 0.5$. فأوجد y عندما يكون $x = 3$.

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. أكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

17. $y = 2$ عندما يكون $n\ x = 8$

18. $y = -3$ عندما يكون $x = 1$

19. **اختيار من متعدد** إذا كان حميد يستطيع إزالة الثلج من الممر في 3 ساعات، ويستطيع حمد القيام بذلك في ساعتين. فكم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

F 6 ساعات

G 5 ساعات

H $\frac{3}{2}$ ساعة

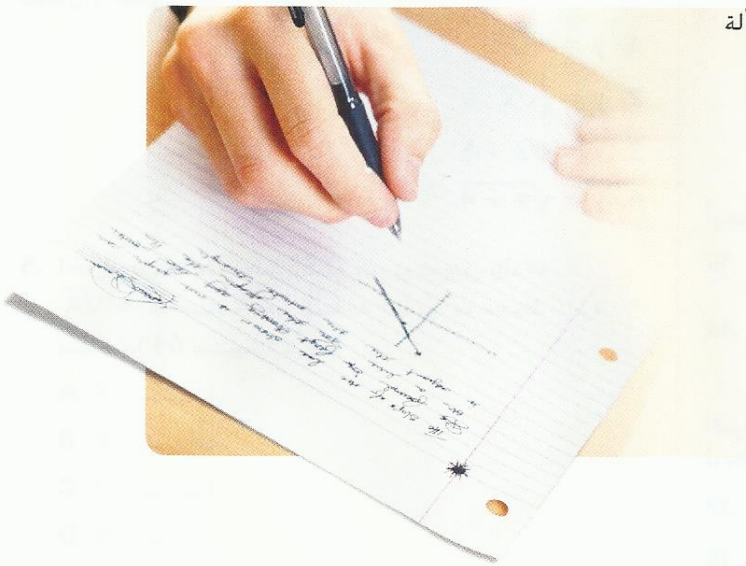
J $\frac{6}{5}$ ساعة

20. **الطلاء** إذا كان مازن يستطيع طلاء جدار قياسه 60 قدمًا مربعًا في 40 دقيقة. وإذا عمل مع صديقه جمال، فإنهما يستطيعان طلاء الجدار في 25 دقيقة. فكم سيستغرق جمال من الوقت لإكمال العمل بمفرده؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 التحضير للاختبارات المعيارية

رسم صورة



في بعض الأحيان يكون من الأسهل تصور كيفية حل المسألة إذا رسمت صورة أولاً. يمكنك رسم الصورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار الخاصة بك (إذا كان مسموحًا بذلك). ولكن انتبه ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما الكمية المجهولة التي يتعيّن عليّ الحلّ لإيجادها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ميّز الصورة بالأسماء بعناية. احرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك في تمثيل حالة المسألة بمعادلة. ثم حل المعادلة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

سلم طوله 5.5 أمتار يستند على بناء. من أجل الثبات، يجب أن تكون قاعدة السلم بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. فما الارتفاع الذي يصل السلم إليه على الجدار؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

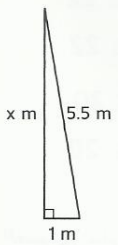
اقرأ نص المسألة بعناية. أنت تعرف ارتفاع السلم المستند على المبنى وتعرف أن قاعدة السلم يجب أن تكون بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. وأنت تحتاج إلى إيجاد الارتفاع الذي يصل إليه السلم على الجدار.

مثال على إجابة من نقطتين:

حوّل جميع القياسات إلى الأقدام أولاً.

100 سنتيمتر = متر واحد

استخدم مثلثًا قائم الزاوية لإيجاد مدى الارتفاع الذي يبلغه السلم.
ارسم مثلثًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.



أنت تعرف قياسي إحدى الساقين والوتر. وتحتاج إلى معرفة طول الساق الأخرى.
إذًا، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس.

$$5.5^2 = 1^2 + b^2$$
$$30.25 = 1 + b^2$$
$$29.25 = b^2$$
$$\pm 5.4 = b$$
$$5.4 \approx b$$

100 سنتيمتر = متر واحد

يصل السلم إلى حوالي 5.4 أمتار.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	الدرجة
الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	0

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

1. بناء يسقط ظلاً طوله 4.6 أمتار، بينما لوحة إعلانات تسقط ظلاً طوله 1.4 متر. فإذا كانت لوحة الإعلانات ارتفاعها 7.9 أمتار، فما ارتفاع البناء؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

2. مركبة فضائية تم توجيهها نحو القمر ولكنها انحرفت بمعدل 1.2° عن مسارها المقصود. وتبعد المسافة من الأرض إلى القمر حوالي 386,200 كيلومتر. فإذا لم يعد القائد بالمركبة الفضائية إلى مسارها، فما المسافة التي ستبعدها في انحرافها عن مكان هبوطها المقصود؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 تمرين على الاختبار المعياري
تراكمي، الوحدات من 1 إلى 8

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم أكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. في كل عام يتولى نادٍ محلي رعاية دورة التنس. ويبدأ اللعب بـ 256 مشاركًا. وخلال كل جولة، يتم إزالة نصف اللاعبين. فكم عدد اللاعبين الذين سيتبقون بعد 6 جولات؟

A 128

B 64

C 16

D 4

2. أوجد قيمة $\frac{5^5 - 5^6}{4}$.

F 5^6

G 5^5

H $\frac{5}{4}$

J $\frac{25}{4}$

3. أي من الأعداد التالية أصغر من الصفر؟

A 1.03×10^{-21}

B 7.5×10^2

C 8.21543×10^{10}

D لا شيء مما سبق

4. أكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع بميل $\frac{9}{10}$ والمقطع مع المحور y عند 3.

F $y = 3x + \frac{9}{10}$

G $y = \frac{9}{10}x + 3$

H $y = \frac{9}{10}x - 3$

J $y = 3x - \frac{9}{10}$

5. إذا كان بلال يلعب الألعاب في مركز ترفيهي للعائلات. وربح 38 بطاقة جائزة حتى الآن. فكم عدد البطاقات الإضافية التي يحتاج إلى الفوز بها ليضع نفسه في فئة الجائزة الذهبية؟

عدد البطاقات	فئة الجائزة
1-20	برونزية
21-40	فضية
41-60	ذهبية
61-80	بلاتينية

F $2 \le t \le 22$

G $3 \le t \le 22$

H $1 \le t \le 20$

J $3 \le t \le 20$

6. أي مما يلي هي معادلة المستقيم العمودي على $4x - 2y = 6$ والمار عبر النقطة $(-4, 4)$؟

F $y = -\frac{3}{4}x + 3$

G $y = -\frac{3}{4}x - 1$

H $y = -\frac{1}{2}x - 4$

J $y = -\frac{1}{2}x - 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

أكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. **الإجابة الشبكية** اشترى أ. عبد الله إجمالي 9 تذاكر إلى حديقة الحيوان. واشترى تذاكر أطفال بسعر AED 6.50 وتذاكر بالغين بسعر AED 9.25 لكل فرد. فإذا أنفق AED 69.50 إجمالاً، فكم عدد تذاكر البالغين التي اشتراها أ. عبد الله؟

8. ما مجال العلاقة التالية؟
$\{(2, -1), (4, 3), (7, 6)\}$

9. أضاف رشيد 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص به. ليصبح إجمالي الأناشيد أكثر من 84 نشيدًا. ارسم خط أعداد يمثل العدد الأصلي للأناشيد التي كانت على مشغل الوسائط الرقمي الخاص برشيد.

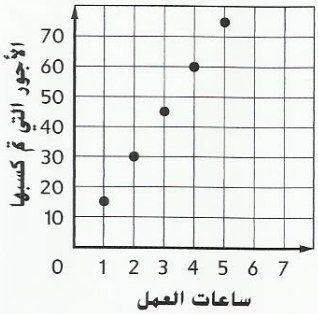
10. اشترى خليفة لوحة نادرة في عام 1995 مقابل AED 14,200. وبحلول 2003، أصبحت قيمة اللوحة AED 17,120. بافتراض وجود علاقة خطية، أكتب دالة في صيغة الميل والتقاطع تمثل قيمة اللوحة V بعد t أعوام.

11. أنفق أحمد AED 24.50 على شراء الفول السوداني والجوز من أجل حفل عشاء. واشترى 1.5 كيلوجرام من الفول السوداني زيادة عن الجوز. فكم عدد كيلوجرامات الفول السوداني والجوز التي اشتراها؟

ناتج الضرب	السعر لكل كيلوجرام
فول سوداني p	AED 3.80
كاجو c	AED 6.90
جوز w	AED 5.60

12. **الإجابة الشبكية** اشترت موزة سيارة منذ عدة أعوام مضت بسعر AED 21,459. وتعرضت السيارة للإهلاك بمعدل 15% سنويًا. فكم بلغت قيمة السيارة بعد 5 أعوام؟ قرّب إجابتك إلى أقرب درهم.

13. **الإجابة الشبكية** المبلغ الذي يجنيه ناصر يتغير طرديًا مع عدد الساعات التي يعمل فيها كما هو مبين في التمثيل البياني. فكم المبلغ الذي سيحققه مقابل عمل 40 ساعة الأسبوع المقبل؟ أكتب الإجابة بالدولارات.



الإجابة الموسعة

أكتب إجاباتك على ورقة. أكتب الحل هنا.

14. الأجرة الثابتة لركوب السيارة الأجرة هي AED 3 زائد AED 0.35 لكل كيلومتر. دفعت ميسون AED 10 مقابل توصيلها لمسافة m كيلومترات.

الجزء A أكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد m. أكتب الحل هنا.

الجزء B استخدم المعادلة المستمدة من الجزء A لاكتشاف عدد الكيلومترات التي ركبت من أجلها ميسون. أكتب الحل هنا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education