

تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية



[com.kwedufiles.www//:https](https://www.kwedufiles.com)

\*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف التاسع اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/9>

\* للحصول على جميع أوراق الصف التاسع في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/9math>

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف التاسع في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/9math1>

\* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للصف التاسع اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/grade9>

\* لتحميل جميع ملفات المدرس عبد الرحمن اليمني اضغط هنا

[bot\\_kwlinks/me.t//:https](https://t.me/bot_kwlinks)

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا

الروابط التالية هي روابط الصف التاسع على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

الاسبوع	المجال	الوحدة التعليمية (التميز)	الابتد	الدرس	عدد الصفحات
الأول	الأساطير والذوايا الجبرية	المقادير الجبرية	(١ - ٩)	قوانين الأسس	١٠٢
			(٣ - ٩)	جمع كثيرات الحدود وطرحها	١١٦
			(٤ - ٩)	ضرب كثيرات الحدود	١٢٢
			(٥ - ٩)	قسمة كثيرات حدود على حد جبري	١٢٨
الأول	الأساطير والذوايا الجبرية	تحليل المقادير الجبرية	(٢ - ١٠)	التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر	١٤٢
			(٣ - ١٠)	تحليل الفرق بين مربعين	١٤٦
الثاني	الهندسة والقياس والخطوط والاحتمال	الهندسة	(١ - ١١)	نظرية فيثاغورث وعكسها	١٨٠
			(٤ - ١١)	حجم الأسطوانة - حجم المخروط الدائري	١٩٨
			(١ - ١٢)	طرائق العد	٢١٠



## قوانين الأسس Laws of Exponents

سوف تتعلم : قوانين الأسس .



نشاط (١) :

قررت إحدى الشركات الكبرى للبناء وضع مخطط على عدة مراحل لبناء إحدى الضواحي السكنية . لاحظ الصور للمراحل الثلاث الأولى ، ثم أكمل :

المرحلة الأولى :  $2 = 2^1$

المرحلة الثانية :  $4 = 2 \times 2 = 2^2$

المرحلة الثالثة :  $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

مكررة ن مرة  

$$n^m = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_m$$
 حيث  $m$  عدد نسبي غير صفري ،  $n \in \mathbb{R}^+$   
 ويقرأ «  $n$  أس  $m$  » أو القوة النونية للعدد  $n$ .

العبارات والمفردات :  
 أس  
 Exponent  
 أساس  
 Base  
 قوى  
 Power

معلومات مفيدة :  
 - تقاس الأبعاد بين الكواكب باستخدام الأسس لبعدها المسافات حيث المسافة بين الأرض وكوكب الزهرة  $10 \times 275$  كيلومتر.

تذكُر أن :  
 - نسمي الصورة  $2^3$  بالصورة الأسية حيث  $2$  يسمى الأساس و  $3$  أس  $2$  وتقرأ  $2$  أس  $3$  أو للقوة  $3$  أو  $2$  تكعيب .

تدرب (١) :

أكمل الجدول التالي :

الناتج	صورة الضرب المتكرر	الأس	الأساس	الصورة الأسية
١٦	$4 \times 4$	٢	٤	$4^2$
٢٤٣	$\dots \times \dots \times \dots \times 3$	٥		$3^5$
	$2 \times 2 \times 2 \times 2$		٢	$2^4$
		٣	٥-	
		١		٣
		٤	س	
$\frac{9}{\dots}$		٢	$\frac{3}{5}$	$(\frac{3}{5})^2$
$\frac{\dots}{\dots}$	$\dots \times \frac{1}{2}$	٤	$\frac{\dots}{\dots}$	$(\frac{1}{2})^4$

نشاط (٢) :



أكمل ما يلي:

$${}^{(٢+٢)}_٢ = \square \quad ٢ = \overbrace{٢ \times ٢ \times ٢}^{} \times \overbrace{٢ \times ٢}^{} = {}^٢_٢ \times {}^٢_٢$$

$${}^{(٤+٢)}_٣ = \square \quad ٣ = \overbrace{\dots \times \dots \times \dots}^{} \times \overbrace{٣ \times ٣ \times ٣}^{} = {}^٤_٣ \times {}^٢_٣$$

ماذا تلاحظ؟

لكل  $n$  عدد نسبي غير صفري ،  $m$  ،  $n$  عدنان صحيحان يكون  ${}^{(٥+٢)}_٣ = {}^٥_٣ \times {}^٢_٣$  .

تدرب (٢) :

اختصر كل ما يلي:

١  $٦ = \dots + \dots + \dots = {}^٦_٦ \times {}^٤_٦$       ب  $٦ = \dots + \dots = {}^٢_٦ \times {}^٤_٦$       ج  $٦ = \dots + \dots + \dots + \dots = {}^٢_٦ \times {}^٤_٦$

د  $\left(\frac{٢}{٣}\right) = \dots + \dots = {}^٢\left(\frac{٢}{٣}\right) \times {}^٤\left(\frac{٢}{٣}\right)$

فكر وناقش

هل العبارة  ${}^٦_٦ = {}^٢_٦ \times {}^٤_٦$  صحيحة؟ فسّر إجابتك.

نشاط (٣) :



أكمل ما يلي:

١  ${}^{٢+٢}_٣ = \dots = \frac{\dots \times \dots \times \dots \times ٣ \times ٣}{٣ \times ٣} = \frac{{}^٢_٣}{٣}$

ب  ${}^{٢+٢}_٧ = \dots = \frac{\dots \times ٧ \times ٧}{٧} = \frac{{}^٢_٧}{٧}$

ماذا تلاحظ؟

لكل  $n$  عدد غير نسبي غير صفري ،  $m$  ،  $n$  عدنان صحيحان يكون  ${}^{(٥+٢)}_٣ = \frac{{}^٥_٣}{٣}$  .

تذكر أن:  
ص = ص

### تدرب (٣)

اختصر كلاً مما يلي :

$\frac{5}{5} =$ $\frac{5}{5} =$	$\frac{8}{28} =$ $=$
$\frac{4}{7} =$ $=$	$\frac{7}{3} =$ $=$

تذكر أن :  
 من - من -  
 من + (- من)

### فكر وناقش

ماذا تلاحظ على **ب** ، **د** في تدرب (٣) ؟ فسر إجابتك .

لكل نسبي عدد غير صفري ، م عدد صحيح يكون :  
 (١)  $1 = \frac{m}{m}$   
 (٢)  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$

### تدرب (٤)

اختصر ما يلي :

$\frac{30}{20} =$ $=$	$7 \times 7 =$ $=$
$3 \times 3 =$ $=$	$8 \times 8 =$ $=$

### نشاط (٤)

أوجد ناتج ما يلي :

$\square = 6 = 2 \times 3$  **أ**  
 $\square = 20 = 4 \times 5$  **ب**  
 $9 \times 4 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 3^2$  **ج**  
 $4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 4^3 \times 5^3$  **د**

ماذا تستنتج بالنسبة لـ **أ** ، **ج** ، **ب** ، **د** معاً ؟



لكل  $a$ ،  $b$  عددان نسبيان غير صفريين،  $m$  عدد صحيح يكون  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ .

### فكر وناقش

يقول عبد الله إن  $2^3 \times 2 = 2^6$  هل توافقه الرأي؟

مثال (١) : اختصر كلاً مما يلي:

١  $2^{10} \times 2^4 = 2^{14}$

ب  $2^2 \times 2^3 = 2^5$

ج  $2^3 \times 2^4 = 2^7$

### نشاط (٥)

أوجد ناتج ما يلي معتمداً على قوانين الأسس:

١  $\frac{2^4}{3^2} = \frac{2^2}{3^3} = \dots \times \frac{2}{3} = 2^{\left(\frac{2}{3}\right)}$

ب  $\frac{2^3}{5^2} = \dots \times \dots \times \frac{3}{5} = 2^{\left(\frac{3}{5}\right)}$

ج  $2^{\dots} = \dots \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2}$

ماذا تستنتج؟

لكل  $a$ ،  $b$  عددان نسبيان غير صفريين،  $m$  عدد صحيح يكون  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ .

ملاحظة:  $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

تدرّب (٥)

أوجد ناتج ما يلي معتمداً على قوانين الأسس:

١  $\frac{2^4}{8} = \frac{2^4}{2^3} = 2^{\dots}$

ب  $\frac{2^3}{4} = 2^{\dots}$

ج  $\frac{2^2}{5} = 2^{\dots}$

## نشاط (٦) ،



أكمل ما يلي :

<p>..... <math>\times</math> <math>{}^2</math> ب <math>{}^3</math> ب = <math>{}^2</math> (ب <math>{}^3</math> ب) <b>ب</b></p> <p>..... <math>\times</math> ..... =</p> <p>..... <math>\times</math> ..... =</p>	<p>..... <math>\times</math> <math>{}^2</math> ٣ <math>\times</math> <math>{}^2</math> ٣ = <math>{}^2</math> (٣ ٣) <b>ا</b></p> <p>..... ٣ =</p> <p>..... <math>\times</math> ..... ٣ =</p>
---	---

ماذا تلاحظ ؟

لكل  $n$  عدد نسبي غير صفري ،  $m$  ،  $n$  عدنان صحيحان يكون :  ${}^m({}^n p) = {}^m p$  .

## تدرب (٦) ،

اختصر ما يلي :

<p>..... = <math>{}^2</math> (٣ ٥) <b>ب</b></p> <p>..... = <math>{}^4</math> (٣ ص ٣) <b>د</b></p>	<p>..... = <math>{}^2</math> (٣ ٣) <b>ا</b></p> <p>..... = <math>{}^2</math> (٥ ٤) <b>ج</b></p>
---	---

## مثال (٢) ،



يبلغ طول قطر الشمس نحو  $1,5 \times 10^6$  كم ، ويبلغ طول قطر الأرض نحو  $1,276 \times 10^4$  كم .  
أوجد نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض .

**الحل :**

$$\frac{{}^{4-6} 1,0 \times 1,25}{1} = \frac{{}^6 1,0 \times 1,5}{{}^4 1,0 \times 1,2} = \text{نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض}$$

$$\frac{{}^6 1,0 \times 1,25}{1} =$$

## تمرّن ،

**ا** أوجد ناتج ما يلي :

<p>..... = <math>{}^2</math> ٢ <b>ب</b></p> <p>..... = <math>{}^2</math> (٣ ٥) <math>\times</math> <math>{}^3</math> (٣ ٥) <b>د</b></p>	<p>..... = <math>\frac{{}^4 9}{{}^4 3}</math> <b>ا</b></p> <p>..... = <math>{}^2</math> <math>\times</math> <math>{}^2</math> (٤ ٢) <b>ج</b></p>
---	--

٢ اختصر لأبسط صورة:

أ ..... =  $s \times s^6$

ب ..... =  $5 \times (5^4)$

ج ..... =  $(2-)^2 \times (2-)^3$

د ..... =  $s^8 \times s^{11}$

ه ..... =  $s^4 \times s \times s^3$

و ..... =  $(s^4 \text{ ص } s^2) \times (s^3 \text{ ص } s^4)$

ز ..... =  $(a^2) \times (a^2) \times (a^3)$

ح ..... =  $(s^3 \text{ ص } s^2) \times (s^4 \text{ ص } s^2)$

ط ..... =  $(a) \times (a^2)$

ي ..... =  $(2- \text{ ص } 2-)^3$



٣ يقدر حجم الأرض بنحو  $10^3$  كم<sup>٣</sup> ،  
ويقدر حجم كوكب المشتري بنحو  $18, 18 \times 10^3$  كم<sup>٣</sup>  
مرة من حجم الأرض ، ما حجم المشتري ؟

## جمع كثيرات الحدود وطرحها Adding and Subtracting Polynomials

٣-٩



سوف تتعلم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

العبارات والمفردات :  
حدود متشابهة  
Like Terms  
مبسطة  
Simplified

نشاط (١) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :

<p>بطاقات مربعات المتغيرات</p>	<p>بطاقات للمتغيرات</p>	<p>بطاقات للأعداد</p>
--------------------------------	-------------------------	-----------------------

سنستخدم هذه البطاقات لنمذجة الحدوديات كما في المثال التالي :

<p>..... + ..... + ٢س² -</p>	<p>٢س² - (س -) + ٣</p>
------------------------------	------------------------

تدرب (١) :

١ اكتب كثيرة الحدود التي تمثل النموذج التالي :

<p>..... + (.....) + (٢س² -)</p>
----------------------------------

٢ نمذج كثيرة الحدود  $٢س² - ٤س + ١$  مستخدماً البطاقات .



## جمع كثيرات الحدود

نشاط (٢) :



سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :

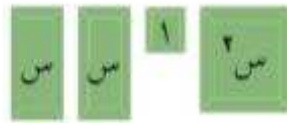


$$\dots + \dots + 2s^2 + \dots + \dots + 3 + (s -) + 2s^2$$

١ بالضم احذف الأزواج الصفرية :



٢ اكتب النمذجة التي حصلت عليها :



٣ رتب النمذجة التي حصلت عليها في الصورة القياسية :



٤ عبّر عن النمذجة بحدودية :  $2s^2 + \dots + \dots$

٥ لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة :

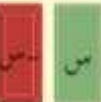
$$[ 2s^2 + (s -) + 3 ] + [ -s + 3 + 2s^2 ]$$

$$\dots =$$

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة معًا .

تذكّر أن :

أزواج صفرية :



### مثال (١) :

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود التالية :

$$٢س٢ + ٤س - ٦ \text{ مع } ٥س٢ + ٢س - ٢س٢$$

الحل :

الطريقة الرأسية :

$$٢س٢ + ٤س - ٦$$

$$٥س٢ + ٢س - ٢س٢$$

$$\hline ٣س٢ + ٢س٢ + ٤س - ٦$$

الطريقة الأفقية :

$$(٢س٢ + ٤س - ٦) + (٥س٢ + ٢س - ٢س٢)$$

$$= (٢س٢ - ٢س٢ + ٥س٢) + (٤س + ٢س) + (-٦) = ٣س٢ + ٦س - ٦$$

$$= ٣س٢ + ٦س - ٦$$

اجمع الحدود  
المتشابهة

### تدرب (٢) :

١ اجمع الحدوديات التالية :

١)  $٣س٢ + ٧س - ١٠س٢$  ،  $٥س٢ + ٢س - ٨س٢$  ،  $١٠س٢ - ٧س$  ،  $٥س٢ + ٢س - ٨س٢$

( أكتب الحدودية بالصورة القياسية ، ثم أجمعها بالطريقة الرأسية ) .

$$\begin{array}{r} ٣س٢ + \dots + \dots \\ - ١٠س٢ - ٧س + \dots \\ \hline ٨س٢ + ٢س - ٨س٢ \end{array}$$

ب)  $٦س٢ - ١$  ،  $٢س٢ - ٤س + ٥$  ،  $٧س٢ - ٥س$

٢) ناتج :  $٣س٢ + ٢س + ٢س٢ + ٧س٢$

١)  $٨س$     ب)  $٨س٢$     ج)  $٥س٢ + ٣س$     د)  $٧س٢ + ٧س$

## طرح كثيرات الحدود

تدرب (٣)

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

م	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	$٣س٣ - ٥س٢ - ٢$	$-(٣س٣ - ٥س٢ - ٢) = ٣س٣ + ٥س٢ + ٢$
٢	$٤س٤ - ٩س٣ + ٥س٢$	$-(٤س٤ - ٩س٣ + ٥س٢) = -٤س٤ + ٩س٣ - ٥س٢$
٣	$١٠س٧ - ٦س٤ - ٣س٣$	$-(١٠س٧ - ٦س٤ - ٣س٣) = -١٠س٧ + ٦س٤ + ٣س٣$

تذكر أن :

- المعكوس الجمعي للمعدد ٣ هو -٣
- المعكوس الجمعي لـ ٥س هو -٥س
- المعكوس الجمعي لـ ٣س٣ هو ٣س٣
- $٣س٣ - ٥س٢ + ٢ = ٣س٣ - ٥س٢ + ٢$

لطرح كثيرات الحدود نضيف المعكوس الجمعي للمطروح .

مثال (٢) :

أوجد ناتج ما يلي :

$$(٦س٣ - ٢س٢ + ٤) - (٣س٣ - ٥س٢ - ٣)$$

الحل :

الطريقة الأفقية :

• نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

$$-(٣س٣ - ٥س٢ - ٣) = -٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

• نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

$$(٦س٣ - ٢س٢ + ٤) + (-٣س٣ + ٥س٢ + ٣)$$

$$= (٦س٣ - ٣س٣) + (-٢س٢ + ٥س٢) + (٤ + ٣)$$

$$= ٣س٣ + ٣س٢ + ٧$$

نرتب الحدود المتشابهة ثم نجعلها .

الطريقة الرأسية :

• نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

$$-(٣س٣ - ٥س٢ - ٣) = -٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

• نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

$$٦س٣ - ٢س٢ + ٤$$

$$-٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

$$\hline ٣س٣ + ٣س٢ + ٧$$

نرتب الحدود تنازلياً (أو تصاعدياً) نضع الحدود المتشابهة أسفل بعض رأسياً .

نجمع الحدود المتشابهة .

تدرب (٤) :

١ اطرح ٣ ص<sup>١</sup> - ٢ ص<sup>٢</sup> - ٥ ص من ١٢ ص<sup>٢</sup> - ص<sup>١</sup> + ٢ ص<sup>١</sup>

المعكوس الجمعي (.....)

- ص<sup>١</sup> + ١٢ ص<sup>٢</sup> + ٢ ص<sup>١</sup>

..... + ٢ ص<sup>٢</sup> + .....

.....

ب من ٢ ص<sup>١</sup> - ص<sup>١</sup> + ١ اطرح - ص<sup>١</sup> + ٣ ص<sup>١</sup> - ٢

المعكوس الجمعي (.....)

.....

.....

.....

.....

تمرّن :

١ اجمع كثيرات الحدود التالية :

١ ص<sup>٢</sup> + ٥ ص<sup>٢</sup> - ٢ ، - ٣ ص<sup>٢</sup> - ٢ ص<sup>١</sup> + ١٠

.....

.....

ب - ٤ ص<sup>١</sup> + ٢ ص<sup>٢</sup> + ٦ ، - ص<sup>٢</sup> + ٤ ص<sup>١</sup> - ٧

.....

.....

ج - ص<sup>٢</sup> + ٦ ص<sup>١</sup> - ٥ ، ٧ ص<sup>١</sup> - ص<sup>٢</sup> - ٣ ، ص<sup>١</sup> + ٨

.....

.....

د ٤ ص<sup>١</sup> - ٢ ص<sup>١</sup> +  $\frac{1}{4}$  ص<sup>٢</sup> ، ٣ ص<sup>١</sup> + ٥ ص<sup>١</sup> - ص<sup>٢</sup> ، ص<sup>١</sup> -  $\frac{1}{4}$

.....

.....

٢ اكتب المعكوس الجمعي لكثيرات الحدود التالية :

المعكوس الجمعي	كثيرة الحدود
..... = (.....) -	$\frac{1}{2}س^2 - 3س^2 - 2$
..... = (.....) -	$3س^0 - 4س^2 + \frac{2}{3}$
..... = (.....) -	$5س^2 + 1$
..... = (.....) -	$7س^2 + 6س + 4$

٣ أوجد ناتج ما يلي :

١  $3س^3 - 2س^2 + 7س - (2س^3 - 4س^2 + 5س)$

.....  
 .....

ب  $6س^2 - 5س + 10س^3 - (5س^2 - 15)$

.....  
 .....

٤ اطرح :

أ  $5س^2 + 6س^4 - 1$  من  $4س^4 - 14س^2 + 5س$

.....  
 .....

ب  $3س^3 - 9س^2 + 4س^3$  من  $2س^2 + 9س^3 - 9س^2 + 9$

.....  
 .....



## ضرب كثيرات الحدود Multiplying Polynomials

٤-٩



سوف تتعلم: ضرب كثيرات الحدود.



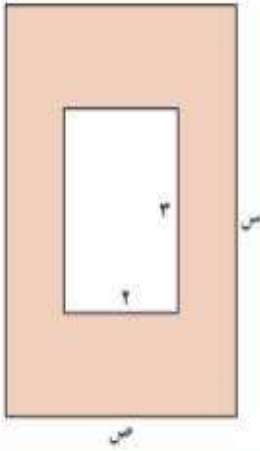
نشاط (١):

١ أراد أحمد أن يشتري سجادة ليضعها في صالة المنزل ،  
ففكر بعدة أبعاد للسجادة وإيجاد مساحتها كما في الجدول .  
أكمل الجدول التالي :

مساحة الشكل	الطول × العرض	العرض	الطول
٢ س	٢ × س	٢	س
٢ س	٢ س × س	س	٢ س
.....	.....	٢ س	٦ س

ملاحظة:

ضرب قوى لأساسات  
متشابهة :  
عند ضرب قوى  
لأساسات متشابهة  
نجمع الأسس .  
 $5^2 \times 5^3 = 5^5$   
حيث  $2 + 3 = 5$



ب باب على شكل مستطيل طوله س قدم ، وعرضه  
ص قدم ، وفي منتصفه نافذة زجاجية مستطيلة الشكل ،  
طولها ٣ أقدام وعرضها قدمان ، أي العبارات التالية  
يبين المساحة المدهونة من الباب بوحدة  
القدم المربعة ؟

- ١ س + ص - ٦      ب س ص + ٦  
ج س ص - ٦      د س + ص + ٦

تدرب (١):

أوجد ناتج ما يلي :

١  $٥ س^٢ \times ٧ س^٢ = (٧ \times ٥) \times (س^٢ \times س^٢) = ٣٥ =$  .....

٢  $٣ س^٤ - ٥ س^٥ =$  .....

تذكر أن:

الخاصية التوزيعية  
للضرب على الجمع  
 $٢ \times (س + ص) =$   
 $(٢ \times س) + (٢ \times ص)$

يمكنك أن تضرب وحيدة حدّ في وحيدة حدّ ، قد تساعد خاصية التوزيع في أن  
تضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود .

### تدرب (٢)

أكمل:

$$(2 \text{ سن}^2) \times (8 \text{ سن} + 3 \text{ سن})$$

$$= (2 \text{ سن}^2 \times \dots) + (\dots \times 2 \text{ سن}^2) = \dots + \dots$$

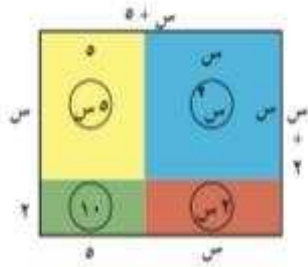
والآن، يمكنك أيضًا إيجاد ناتج ضرب كثيرة حدود في أخرى حيث توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب: الطريقة الرأسية والطريقة الأفقية. يمكنك استخدام أي منهما في الحل.

### تدرب (٣)

بسط المقدار التالي:

$$4(2 + \text{سن}) - 3\text{سن} + 5(1 - \text{سن})$$

### مثال (١):



في الشكل المقابل مستطيل بعده (٥ + ٣) ،  
(٢ + ٢) أوجد مساحة المستطيل:

**الحل:**

نقسم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابل.  
مساحة الشكل = الطول × العرض

• الطريقة الثانية: الرأسية

$$\begin{array}{r} 5 + 3 \\ \times 2 + 2 \\ \hline 10 + 6 \\ 4 + 6 \\ \hline 14 + 12 \end{array}$$

• الطريقة الأولى: الأفقية

$$(5 + 3)(2 + 2)$$

$$= (5 + 3)2 + (5 + 3)2 =$$

$$= (5 \times 2) + (3 \times 2) + (5 \times 2) + (3 \times 2) =$$

$$= 10 + 6 + 10 + 6 =$$

$$= 14 + 12 =$$

تذكر أن:

مربع سن = سن<sup>٢</sup>  
ضعف سن = ٢ سن

### تدرب (٤)

$$\text{أوجد ناتج } (4 + \text{سن})(3 + \text{سن}) = (3 + \text{سن})4 + (3 + \text{سن})\text{سن}$$

$$= 12 + \dots + \dots + \text{سن}^2 =$$

$$= 12 + \text{سن} + \dots + \text{سن}^2 =$$

تدرب (٥) :

أكمل لإيجاد ناتج ما يلي :

١ (ص + ٥) (ص - ٥)

= ص (ص - ٥) + ٥ (ص - ٥)

= ص<sup>٢</sup> - ٥ص + ٥ص - ٢٥

= ص<sup>٢</sup> - ٢٥

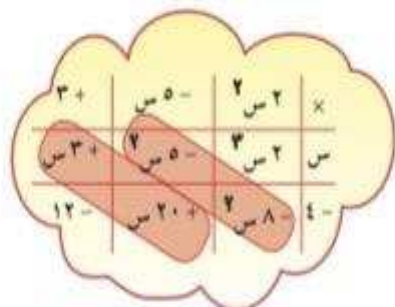
٢ ٢ ص - ٥ ص + ٣

× ص - ٤

٢ ص<sup>٢</sup> - ٥ ص<sup>٢</sup> + ٣ ص

+ ٢ ص - ٤ ص + ١٢

٢ ص<sup>٢</sup> - ٢ ص + ١٢



$2s^2 - 8s + 20 = (2s - 5)(s - 4)$

مثال (٢) :

أوجد مربع (٣ + ص) = (٣ + ص)<sup>٢</sup>

الحل :

(٣ + ص) (٣ + ص)

= ٣<sup>٢</sup> + ٣ص + ٣ص + ٩

= ٩ + ٦ص + ٣ص<sup>٢</sup>

لاحظ في مثال (٢) السابق :

(٣ + ص)<sup>٢</sup> هي مربع الحدانية (٣ + ص) حيث :


ص هي الحد الأول ، ٣ هي الحد الثاني ،

٣<sup>٢</sup> هي مربع الحد الأول ،

٩ هي مربع الحد الثاني ،

٦ص هي ضعف الحد الأول × الحد الثاني .

الصورة القياسية  $(س ± ص)^2 = (س ± ص)^2$   
 $س^2 ± ٢سص + ص^2 =$  حدودية ثلاثية على صورة مربع كامل  
 $=$  مربع الحد الأول  $±$  ضعف الحد الأول  $×$  الحد الثاني  
 $+$  مربع الحد الثاني

تدرب (٦) 

١ أوجد  $(٧ - ص)^2$  :

$$\left| \begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الثاني} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{ضعف الحد} \\ \text{الأول} \\ \times \\ \text{الحد الثاني} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الأول} \end{array} \right| =$$

$$ص^2 + ص \times \dots \times \dots - ص^2 =$$

$$٤٩ + \dots - \dots =$$

ب  $(٢ + ٥ب)^2$






$$\left| \begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الثاني} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{ضعف الحد} \\ \text{الأول} \\ \times \\ \text{الحد الثاني} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الأول} \end{array} \right| =$$

$$\dots + \dots + \dots =$$

$$\dots + \dots + ٤ =$$

فكر وناقش 

ما التشابه والاختلاف بين ناتج  $(س + ٥)^2$  و  $(س - ٥)^2$  ؟

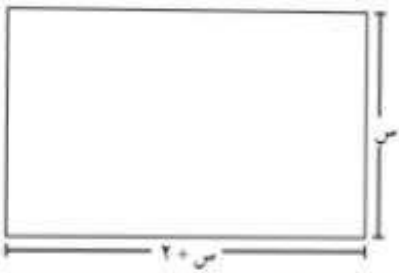
@alqadhi220  90000228  alqadhi220   
 alqadhi2220  أستاذ/ عبدالرحمن اليمني 



**مثال ( ٣ ) :**  
شبه مكعب أبعاده هي :  $(س + ٥)$  ،  $(س - ٢)$  ،  $(س)$  وحدة طول .  
أوجد حجمه .

**الحل :**

$$\begin{aligned} \text{حجم شبه المكعب} &= \text{حاصل ضرب أبعاده} \\ &= (س + ٥) \times (س - ٢) \times (س) \\ &= س \times [(س - ٢) \times ٥ + (س - ٢) \times س] \\ &= س \times [٥س - ١٠ + س٢ - ٢س] \\ &= س \times [٥س - ١٠ + \underbrace{س٢ - ٢س}_{س٢ - ٢س + ٢س - ٢س} + ٢س] \\ &= س \times [٥س - ١٠ + س٢ + ٢س] \\ &= س٣ + ٧س٢ - ١٠س \end{aligned}$$



**تمرّن :**

١ مساحة المستطيل المجاور هي :

- أ  $س٢ + ٢$        ب  $س٢ + ٢س$   
 ج  $٢س + ٢$        د  $٤س + ٤$

٢ أوجد ناتج كل مما يلي :

ب  $\frac{١}{٢} س \times \left( \frac{٢}{٣} س - ٤س + \frac{٢}{٣} س \right)$

١  $٢س \times ٣س٣$

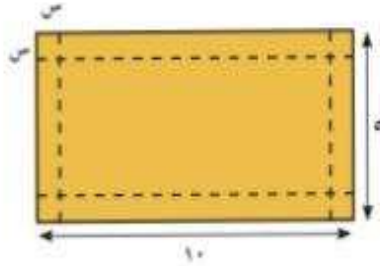
د  $(٢س + ٣ع) = (٢ - ص) \times (٢ + ٣ص)$

١  $(٢ - ب)(ب + ٢) = (٧ + س)(س - ٥)$



٣ أوجد مربع كل حدانية في ما يلي :

١ س - ٤ ..... ٢ ٣ - ٢ ج ٤



٤ أرادت شيماء صنع علبة من دون غطاء مستخدمة قطعة من الورق المقوى بعدها ١٠ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، وذلك بنزع مربع طول ضلعه س وحدة طول من كل زاوية من زوايا القطعة . ما حجم علبة شيماء ؟

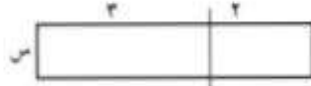
٥ أي مما يلي يمثل التعبير ٢ س + ٣ س ؟



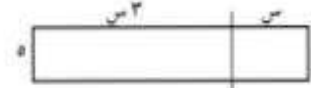
أ طول القطعة المستقيمة



ب طول القطعة المستقيمة



ج مساحة الشكل



د مساحة الشكل

٦ إذا كانت  $s^2 = 16$  ،  $s = 4$  ، فإن أكبر قيمة للمقدار  $(s - 4)^2 =$

أ ٤      ب ١٢      ج ١٦      د ٣٦

٧ أي مما يلي يساوي  $2(s + e) - (2s - e)$  ؟

أ ٣ ع      ب ع      ج ٤ س + ٣ ع      د ٤ س + ٢ ع

## قسمة كثيرة حدود على حد جبري Dividing a Polynomial by a Monomial

٥-٩



سوف تتعلم : قسمة حد جبري على حد جبري آخر ، قسمة كثيرة حدود على حد جبري

نشاط (١) :



باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلمته من ضرب و قسمة الأسس ، أكمل الجدول .

الحد الأول ÷ الحد الثاني ( الحد الثاني ≠ ٠ )	الحد الثاني	الحد الأول
	٥	١٥
	س <sup>٢</sup>	س <sup>٤</sup>
	٦	س <sup>٥</sup>
	ص <sup>٣</sup>	س <sup>٢</sup>
	٣س <sup>٢</sup>	١٥س <sup>٤</sup>
	٢ص <sup>٢</sup>	٤س <sup>٢</sup>

العبارات والمفردات :

قسمة حد جبري

Dividing a Monomial

قسمة كثيرة حدود

Dividing a Polynomial

معلومات مفيدة :

تستخدم قسمة كثيرات

الحدود عند الكيميائيين

في صناعة الأدوية .



تدريب (١) :

١ أوجد ناتج قسمة ٨س<sup>٤</sup>ص<sup>٣</sup> على ٤ص<sup>٢</sup>س<sup>٣</sup> .

$$\frac{8س^4ص^3}{4ص^2س^3} = \dots\dots\dots$$

٢ أوجد ناتج قسمة ٥ع<sup>٢</sup>ل<sup>٢</sup> على ١٥ع<sup>١</sup>ل<sup>١</sup> .

$$\frac{5ع^2ل^2}{15ع^1ل^1} = \dots\dots\dots$$

ملاحظة :  
المقام في جميع الحلول لا يساوي صفرًا .

تذكر أن :

$$\frac{٢١}{٥} = \frac{٢١}{٥} = ٤ \frac{١}{٥}$$

حيث ١ ≠ ٠

إذا أردنا أن نقسم كثيرة حدود على حد جبري ، نقسم كل حد من كثيرة الحدود على هذا الحد الجبري .

مثال (١) : اقسم (٦س<sup>٦</sup> + ٣س<sup>٣</sup> - ١٢س<sup>٢</sup>) على ٣س<sup>٣</sup> .

الحل :

$$\frac{٦س^6 + ٣س^3 - ١٢س^2}{٣س^3} = \frac{٦س^6}{٣س^3} - \frac{٣س^3}{٣س^3} + \frac{١٢س^2}{٣س^3} = ٢س^3 - ١ + \frac{٤}{س}$$

اقسم كل حد على المقسوم عليه

بسط

## تدرّب (٢)

أقسم (٦ س<sup>٠</sup> + ٨ س<sup>١</sup> - ٢ س<sup>٢</sup>) على س<sup>١</sup>

$$\frac{6 \text{ س}^0 + 8 \text{ س}^1 - 2 \text{ س}^2}{\text{س}^1} = \frac{\text{س}^0}{\text{س}^1} + \frac{8 \text{ س}^1}{\text{س}^1} - \frac{2 \text{ س}^2}{\text{س}^1}$$

## تمرّن

١ اختصر ما يلي:

$\frac{6 \text{ س}^6}{2 \text{ س}^2} = \text{ب}$	$\frac{\text{س}^0}{\text{س}^3} = \text{ا}$
$\frac{10 \text{ س}^4}{25 \text{ س}^0} = \text{د}$	$\frac{8 \text{ س}^2}{8 \text{ س}^1} = \text{ج}$

٢ اقسم: ٦ س<sup>١</sup> ص<sup>٢</sup> + ١٢ س<sup>١</sup> ص<sup>١</sup> - ١٨ س<sup>٠</sup> ص<sup>١</sup> على ٦ س<sup>١</sup> ص<sup>١</sup>

$$\frac{6 \text{ س}^1 \text{ ص}^2 + 12 \text{ س}^1 \text{ ص}^1 - 18 \text{ س}^0 \text{ ص}^1}{6 \text{ س}^1 \text{ ص}^1} =$$

$$=$$

$$=$$

٣ أوجد ناتج  $\frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^3 + 3 \text{ س}^2 \text{ ص}^2 - 5 \text{ س}^2 \text{ ص}^1}{15 \text{ س}}$

$$\frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^3 + 3 \text{ س}^2 \text{ ص}^2 - 5 \text{ س}^2 \text{ ص}^1}{15 \text{ س}} =$$

$$=$$

$$=$$

٤ مساحة مستطيل هي (٣ س<sup>٢</sup> - ٢ س) مترًا مربعًا، عرض هذا المستطيل ٥ مترًا، أوجد طول هذا المستطيل.

$$=$$

$$=$$

$$=$$

## التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر Factorise Using The GCF

٢-١٠

سوف تتعلم : التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر للتعبيرات الجبرية .

العبارات والمفردات :

Factor عامل

عامل أولي

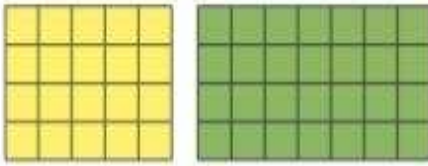
Prime Factor

تحليل إلى عوامل أولية

Prime

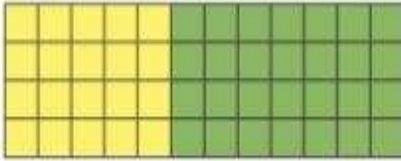
Factorisation

نشاط :



قال خالد لصديقه جاسم إنه يستطيع إيجاد مساحة المستطيلين المرسومين بطريقتين مختلفتين هما :

الطريقة الثانية :

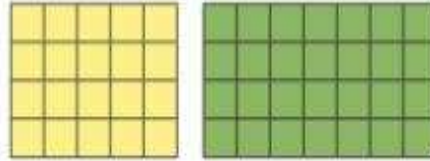


مساحة المستطيلين =  $(5 + 4) \times 4$

.....  $\times 4 =$

..... =

الطريقة الأولى :



مساحة المستطيلين =  $(5 \times 4) + (4 \times 4)$

..... + ..... =

..... =

معلومات مفيدة :

يستخدم التجارون التحليل في كثير من الأمور ، كتصميمهم للخزائن الخشبية المقترعة من الداخل ، وغيرها الكثير من الاستخدامات .



نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} & (5 + 4) \times 4 \\ & \underbrace{(5 \times 4) + (4 \times 4)} = \end{aligned}$$

توزيع عملية الضرب على الجمع

$$(5 + 4) \times 4 = (5 \times 4) + (4 \times 4)$$

تحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر

يسمى  $4$  ،  $(5 + 4)$  عاملي المقدار  $(5 + 4) \times 4$  ،

حيث  $4$  هو العامل المشترك الأكبر للمقدار :  $(5 \times 4)$  ،  $(4 \times 4)$  .

تذكر أن :

الخاصية التوزيعية :

$(a + b) \times c =$

$a \times c + b \times c$

بصورة عامة :

$$a(b + c) = ab + ac \quad , \quad a(b - c) = ab - ac$$

ملاحظة : إن المقدار بين القوسين ينتج من قسمة كل حد على (ع.م.أ) .



### مثال :

حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر للمقدار :  $٤ + ٦ب - ٨ج$

### الحل :

(١) (ع. م. أ.) للحدود هو ٢ نوجد (ع. م. أ.) بين حدود المقدار الجبري

$$(٢) \frac{٤}{٢} - \frac{٦ب}{٢} + \frac{٨ج}{٢}$$

$$= ٢ - ٣ب + ٤ج$$

(٣)  $٢(٢ - ٣ب + ٤ج)$  نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين

### تدريب (١)

حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

١  $٤س - ٨ص$

$$(١) (ع. م. أ.) للحددين = \frac{٤س - ٨ص}{٤} (٢)$$

$$(٣) ٤(س - ٢ص)$$

ب  $٣ب^٢ + ٦ب$

$$(١) (ع. م. أ.) للحددين = \frac{٣ب^٢ + ٦ب}{٣ب} (٢)$$

$$(٣) ٣ب(ب + ٢)$$

ج  $٤س + ٦ص - ٨س^٢$

$$(١) (ع. م. أ.) للحدود =$$

$$(٢) \left( \frac{٤س}{٢} - \frac{٦ص}{٢} + \frac{٨س^٢}{٢} \right)$$

$$(٣) ٢س(٢ - ٣ص + ٤س)$$

### تدريب (٢)

حلل المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

١  $٩ص - ٣ص^٢$

$$(١) (ع. م. أ.) للحددين =$$

$$(٢) ٣ص(٣ - ص)$$


$$(٣) ٣ص(٣ - ص)$$



$$٤ (س + ٣) + ص (س + ٣)$$

(ع. م. أ.) للحدود =  $س + ٣$

$$٤ (س + ٣) + ص (س + ٣) = (س + ٣) (..... + .....$$

تدريب (٣) 

١ حلل المقدار  $س^٢س + ٣س ص + ص^٢$  بإخراج العامل المشترك الأكبر.

(ع. م. أ.) للحددين = .....

$$س^٢س + ٣س ص + ص^٢ = (..... + .....) (.....)$$

ب اكتب في أبسط صورة:  $\frac{س^٢س + ٣س ص + ص^٢}{س ص}$  حيث  $س \neq ٠$  ،  $ص \neq ٠$

$$\frac{س^٢س + ٣س ص + ص^٢}{س ص} = \frac{(..... + .....) (.....)}{.....}$$

بالتبسيط

### فكر وناقش

التحدي:



الشكل المقابل مربع ، رُسمت دائرة نصف قطرها (نق) تماس أضلاع المربع من الداخل . أراد سعود أن يُعبّن مساحة المنطقة الحمراء بدلالة (نق) ثم أن يقوم بتحليل مقدار الناتج . ساعد سعود على حلها .

مثال :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$س^٣ - س^٢س + ٢س - ٢$$

الحل :

$$س^٣ - س^٢س + ٢س - ٢$$

$$= (س^٣ - س^٢س) + (٢س - ٢)$$

$$= س^٢(س - س) + ٢(س - ١)$$

$$= (س - ١)(س^٢ + ٢)$$

## تمرّن :

١ حلل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ):

ب  $٩س١ + ٣س٣$

أ  $٧ + ٧ص$

د  $٦س٣ + ٨ص١$

ج  $س١ص + س٣ك$

و  $٨س١ص٣ - ١٢س٣ص$

هـ  $٢ص٢س١ - ٢س٣$

ح  $٣ل٣ع١ - ٩ع١ل٣ + ٦ع٢ل١$

ز  $٢٧س٣ص١ + ٩س٢ص٢$

ي  $٨س١ص١ - ١٠ص١س٣ + ١٥ص٣س١$

ط  $١٤ك١ص١س٣ + ٧كص٣س١ + ٢١كس٣$

ل  $١ص٣ - ١س٣ + ب٣ص - ب٣س$

ك  $س٣(٢-١) - ص٣(٢-١)$

٢ اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

ب  $\frac{٣س٣ - ٦س٣ص}{س٣}$

أ  $\frac{س٣ - ٢س٣}{س٣}$

٣ إذا كان :  $١ + ب = ١٥$  ، فما هي قيمة  $٢ + ب + ٨$  ؟



## تحليل الفرق بين مُربعين Factorising the Difference of Two Squares

١٠-٣

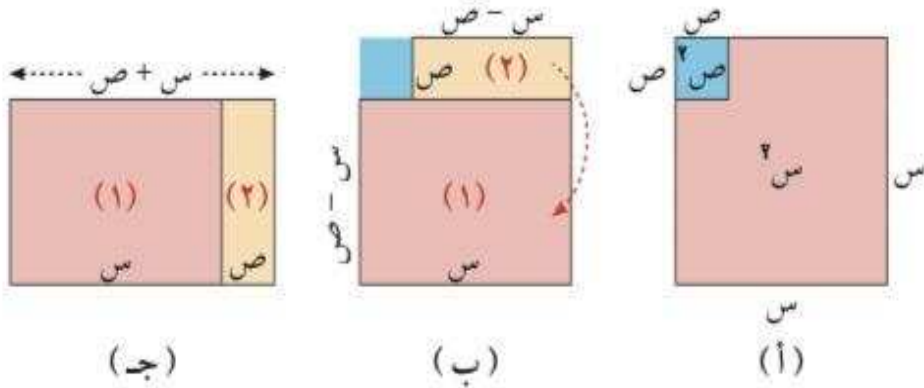


سوف تتعلّم : تحليل ثنائية الحدّ في صورة فرق بين مُربعين .

نشاط :



أرض مصنع مربعة الشكل مساحتها  $s^2$  وحدة مربعة يراد أخذ غرفة منها مربعة الشكل مساحتها  $v^2$  وحدة مربعة لاستخدامها كمخزن .  
احسب المساحة المتبقية من أرض المصنع .



من التمثيل السابق نجد أنّ :

في الشكل (أ) : يمثل قطعة الأرض التي مساحتها  $s^2$  وموضع الغرفة المراد أخذها والتي مساحتها  $v^2$  .

في الشكل (ب) : يمثل مساحة قطعة الأرض المتبقية من المصنع  $(s^2 - v^2)$  ومقسمة إلى منطقتين :

(١) منطقة مستطيلة بعدها  $s$  ،  $(s - v)$  وحدة طول .

(٢) منطقة مستطيلة بعدها  $v$  ،  $(s - v)$  وحدة طول .

$$\text{مساحة قطعة الأرض المتبقية} = \text{مساحة القطعة (١)} + \text{مساحة القطعة (٢)}$$

$$= s(s - v) + v(s - v)$$

$$(s^2 - v^2) = (s - v)(s + v) \text{ وحدة مربعة}$$

عمومًا :

الفرق بين مُربعين كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما .  
أي أنّ :  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  .

العبارات والمفردات :

فرق بين مُربعين

Difference of Two Squares .

تحليل الفرق بين مُربعين

Factorising The Difference of Two Squares

تذكّر أنّ :

- مساحة المستطيل =

الطول × العرض

- مساحة المربع =

طول الضلع × نفسه

معلومات مفيدة :

يستعمل مُصممو

الأثاث التحليل إلى

العوامل في تحديد أبعاد

مساحة الغرف كي

يستطيعوا تنظيم عملية

توزيع الأثاث .



مثال (١) :

حلل  $s^2 - 4$  ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

الحل :

لاحظ أن :  $s^2$  مربع  $s$  ، كذلك  $4$  مربع  $2$

$$s^2 - 4 = (s - 2) - (2) =$$

$$= (s - 2)(s + 2)$$

التحقق : اضرب  $(s - 2)(s + 2)$

$$(s - 2)(s + 2) = s^2 - 2s + 2s - 4 = s^2 - 4$$

$$= s^2 - 4$$



تدرب (١) :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

١ ص  $16 - v^2$

$$16 - v^2 = (4 - v) - (v) =$$

$$= (4 - v)(4 + v)$$

ب س  $25 - e^2$

$$25 - e^2 = (5 - e) - (e) =$$

$$= (5 - e)(5 + e)$$

د ل  $36 - k^2$

.....  
 .....  
 .....

ج هـ  $81 - h^2$

$$81 - h^2 = (9 - h) - (h) =$$

$$= (9 - h)(9 + h)$$

تدرب (٢) :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

١ س  $s^3 - s$

$$s^3 - s = s(s^2 - 1) =$$

$$= s(s - 1)(s + 1)$$

ب ل  $18 - l^2$

$$18 - l^2 = (3 - l) - (l) =$$

$$= (3 - l)(3 + l)$$



## فكر وناقش

برى يوسف أنّ  $س^2 + ص^2$  يمكن تحليلها إلى  $(س + ص)(س + ص)$ .  
فهل توافقه الرأي؟ فسر ذلك.

تدرب (٣)

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$١٠٠ - (س - ٢)^2$$

$$^2(س - ٢) - ^2(س - ٢) =$$

$$(س - ٢ - ٢)(س - ٢ + ٢) =$$

$$(س - ٤)(س) =$$

$$٢(س - ٢) - ٢(س - ٢) =$$

$$((س - ٢) + (س - ٢))((س - ٢) - (س - ٢)) =$$

$$(س - ٢ - ٢)(س - ٢ + ٢) =$$

تدرب (٤)

أوجد قيمة ما يلي بالتحليل:

$$^2(٧) - ^2(٩٣)$$

$$(س - ٢ - ٢)(س - ٢ + ٢) =$$

$$س \times س =$$

$$=$$

$$^2(٤,٥) - ^2(٢٥,٥)$$

$$(س - ٢ - ٢)(س - ٢ + ٢) =$$

$$س \times س =$$

$$=$$

مثال (٢):

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$ص^2(١ + ص) - ٤(١ + ص)$$

الحل:

$$ص^2(١ + ص) - ٤(١ + ص)$$

$$= (ص^2 - ٤)(١ + ص)$$

$$= (ص + ٢)(ص - ٢)(١ + ص)$$

تدرب (٥)

حلل ما يلي :

$$٢٥س - \frac{١٦}{٢٥}ص$$

$$٢(.....) - ٢(.....) =$$

$$(..... - .....)(..... + .....) =$$

$$\frac{١}{٩}س - \frac{١٦}{٢٥}ص$$

$$..... =$$

$$..... =$$

### فكر وناقش

هل  $(س + ص + ٨)(س - ص + ٨)$  يمثلان عاملين لفرق بين مربعين؟  
فسر ذلك .

تدرب (٦)



يلجأ مُصممو الأثاث إلى مفاهيم الرياضيات في تصميماتهم وذلك للخروج بنتائج دقيقة ، حيث وضع المُصمم عبد المحسن سجادة مستطيلة الشكل بعدها  $س$  ،  $٢س$  ثم وضع فوق هذه السجادة طاولة طعام مستطيلة الشكل بعدها  $ص$  ،  $٢ص$  حيث  $(س < ص)$  .

١ اكتب تعبيرًا جبريًا يبين مساحة القطعة المتبقية من السجادة مستخدمًا  $س$  ،  $ص$  ،  
ثم حلل هذا التعبير .

$$\text{مساحة القطعة المتبقية من السجادة} = \text{مساحة} - \text{مساحة}$$

$$= ٢س \times \text{.....} - \text{.....} \times ص$$

$$= \text{.....} - \text{.....}$$

$$= ٢(..... - .....)$$

$$= ٢(..... - .....)(..... + .....)$$

ب أوجد المساحة المتبقية من السجادة إذا كان  $س = ٣$  وحدات طول ،  $ص = ٢$  وحدة طول

$$\text{المساحة المتبقية} = ٢(..... - .....)(..... + .....)$$

$$= \text{.....}$$

## تمرُّن :

١ أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

١ س<sup>٢</sup> - ..... = ..... (١٠ + .....)(١٠ - س)

٢ ب ٤ ص<sup>٢</sup> - ..... = ..... (٧ + .....)(٧ - .....)

٣ ج ..... - ٢٥ س<sup>٢</sup> = ..... (..... + ٣)(..... - ٣)

٤ د ..... - ١٦ س<sup>٢</sup> = ٩ - ..... (..... - .....)

٢ حلل ما يلي تحليلًا تامًّا ثم تحقق من صحة إجابتك :

١ ب ل<sup>٢</sup> - ١٠٠ هـ<sup>٢</sup>

١ ا س<sup>٢</sup> - ٢٥

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

٣ حلل ما يلي تحليلًا تامًّا :

١ ب ٤ م<sup>٢</sup> - ٣٦

١ ا ١ - ص<sup>٢</sup>

.....	.....
.....	.....

١ د ٤٩ ن<sup>٢</sup> - ٨١ ك<sup>٢</sup>

١ ج ٤ س<sup>٢</sup> - ٩ ص<sup>٢</sup>

.....	.....
.....	.....

١ ر ٣٦ - ٩ ع<sup>٢</sup>

١ هـ ٤ س<sup>٢</sup> - ١٠٠

.....	.....
.....	.....

$$\text{ج} \quad ٢س - ١٨س^٢$$

.....  
.....

$$\text{ز} \quad ٧٥ - ٣م^٢$$

.....  
.....

٤ حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$\text{ب} \quad (٠, ١٦) - (٠, ٤ - ن)$$

.....  
.....

$$\text{ا} \quad ٤٩ - (١ + م)^٢$$

.....  
.....

٥ أوجد قيمة ما يلي بالتحليل:

$$\text{ب} \quad ١ - (٩٩)^٢$$

.....  
.....

$$\text{ا} \quad (١١٤) - (١١٥)^٢$$

.....  
.....

$$\text{د} \quad (٤٢, ٣) - (٥٧, ٧)$$

.....  
.....

$$\text{ج} \quad (٢٠٩) - (٢١٠)^٢$$

.....  
.....

٦ حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$\text{ب} \quad ٤ - \frac{١}{٢٥ص}$$

.....  
.....

$$\text{ا} \quad \frac{٤س}{٩} - \frac{٤س}{٩ب}$$

.....  
.....

$$\text{د} \quad \frac{١}{٤هـ} - ٢٥ع$$

.....  
.....

$$\text{ج} \quad ١٢١ - (٥ - م)$$

.....  
.....

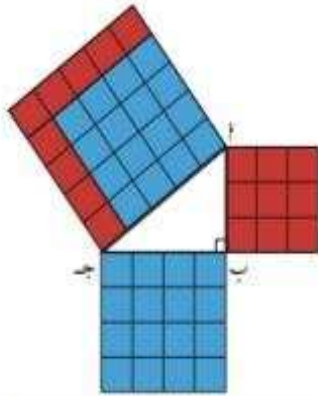


## نظرية فيثاغورث وعكسها Pythagorean Theorem and its Reciprocal

١-١١



سوف تتعلم : نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها .



نشاط (١) :



في الشكل المقابل :  $\Delta$   $\Delta$  قائم الزاوية في ب  
بحيث  $\Delta$  ب = ٣ وحدة طول ، ب ج = ٤ وحدة  
طول ، من الرسم وباستخدام الوحدات المربعة ،  
أكمل الجدول التالي :

المثلث	أطوال الأضلاع	مربعاتها	ماذا تلاحظ؟
$\Delta$ ب ج قائم الزاوية في ب	ضلع القائمة : $\Delta$ ب = .....	$(\Delta$ ب) <sup>٢</sup> = .....	..... + ..... = .....
	ضلع القائمة : ب ج = .....	$(ب ج)٢ = .....$	
	الوتر : $\Delta$ ج = .....	$(\Delta$ ج) <sup>٢</sup> = .....	

الاستنتاج :

$\Delta$   $\Delta$  ب ج قائم الزاوية في ب  $\Leftrightarrow (\Delta$  ج)<sup>٢</sup> = ..... + .....

نظرية فيثاغورث : في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر مساوياً لمجموع  
مربعي طولي الضلعين الآخرين .



$\Delta$   $\Delta$  ب ج قائم الزاوية في  $\Delta$   $\Leftrightarrow$

$$(\Delta$$
 ج)<sup>٢</sup> =  $(\Delta$  ب)<sup>٢</sup> + (ب ج)<sup>٢</sup>

العبارات والمفردات :

نظرية فيثاغورث

Pythagorean  
Theorem

عكس نظرية  
فيثاغورث

Reciprocal of  
Pythagorean  
Theorem

معلومات مفيدة :

يستخدم عاملو البناء  
نظرية فيثاغورث  
لشيد جدران  
مستوية .

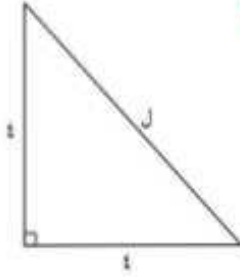


تذكر أن :

في المثلثات قائمة  
الزاوية ضلعا القائمة  
هما الضلعان اللذان  
يشكلان الزاوية  
القائمة ، والوتر هو  
أطول ضلع في المثلث  
وهو الضلع المقابل  
للزاوية القائمة .

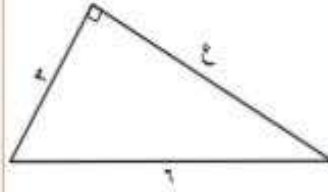
تدرب (١)

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :



$$\sqrt{(\quad)} + \sqrt{(\quad)} = \sqrt{ج}$$

.....  
 .....  
 .....

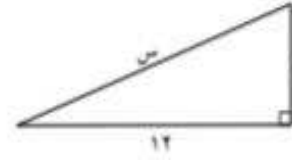


$$\sqrt{3} + \sqrt{ع} = \sqrt{6}$$

( العملية  
 العكسية )  
 $9 + \sqrt{ع} = 36$

$$\sqrt{ع} = 36 - 9 = 27$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{ع}$$



$$\sqrt{12} + \sqrt{5} = \sqrt{س}$$

$169 = 144 + 25 = \sqrt{س}$   
 بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

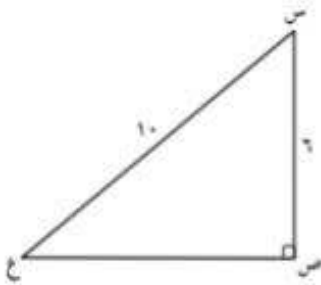
$$\sqrt{169} = \sqrt{س}$$

$$13 = \sqrt{س}$$

تدرب (٢)

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = 6 وحدة طول ، س ع = 10 وحدة طول .  
 أوجد ص ع .



المعطيات : .....

المطلوب : .....

البرهان :  $\Delta$  س ص ع قائم الزاوية في ص

$$\sqrt{(\quad)} + \sqrt{(\quad)} = \sqrt{(\quad)} \therefore$$

( باستخدام العملية العكسية )

$$\sqrt{(\quad)} + \dots = \dots$$

$$\dots = \sqrt{\dots} = \sqrt{ص ع} \therefore$$



### تدرب (٣)

إذا كانت المدينة (ب) تقع شرق المدينة (أ) بمسافة ١٥ كم وكانت المدينة (ج) تقع في شمال المدينة (أ) بحيث تبعد عن المدينة (ب) مسافة ٢٥ كم . أوجد المسافة بين المدينتين (أ) ، (ج) .



المعطيات :

المطلوب :

البرهان :  $\Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في —

$$\therefore \angle(\text{—}) + \angle(\text{ج أ ب}) = \angle(\text{—})$$

$$\text{—} + \angle(\text{ج أ ب}) = \text{—}$$

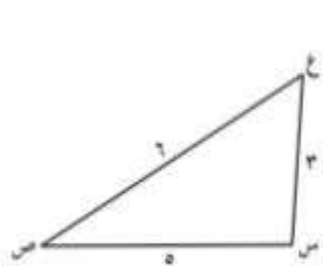
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين  $\text{—} = \text{—} - \text{—} = \angle(\text{ج أ ب})$

$$\therefore \text{—} = \sqrt{\text{—}} = \text{ج أ ب}$$

$\therefore$  المسافة بين المدينتين (أ) ، (ج) هي — كم

### نشاط (٢)

في ما يلي عدة مثلثات معلوم أطوال أضلاعها . قارن بين مربع أكبر الأضلاع طولاً ، ومجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين . في كل من المثلثات التالية باستخدام المنقلة حاول التعرف على قياس الزاوية المقابلة لأكبر الأضلاع طولاً ( بالقياس ) .

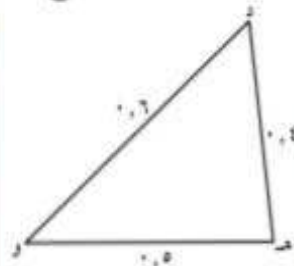


$$\text{—} = \angle(\text{ع ص س})$$

$$\angle(\text{ع س س}) + \angle(\text{س س ص}) =$$

ماذا تلاحظ ؟

$$\angle(\text{س}) \neq \text{—}$$

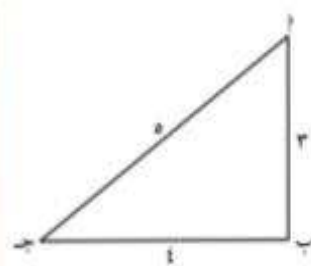


$$\text{—} = \angle(\text{د و ه})$$

$$\angle(\text{د ه و}) + \angle(\text{ه و د}) =$$

ماذا تلاحظ ؟

$$\angle(\text{ه}) \neq \text{—}$$



$$\text{—} = \angle(\text{أ ج ب})$$

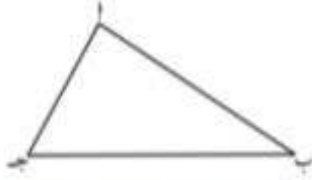
$$\angle(\text{أ ب ب}) + \angle(\text{ب ج ب}) =$$

ماذا تلاحظ ؟

$$\angle(\text{ب}) = \text{—}$$

مما سبق نصل إلى ما نسميه عكس نظرية فيثاغورث :

**عكس نظرية فيثاغورث :** إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساوياً لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين ، فإنّ هذا المثلث قائم الزاوية .



إذا كان  $(ب ج) = (أ ب) + (أ ج)$  ، فإنّ :  
 $\Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في أ .

**ملاحظة :**

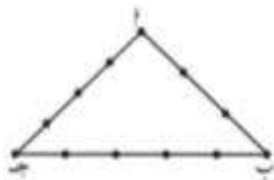
$(ب ج) = (أ ب) + (أ ج) \iff \Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في أ .

**تدرب (٤)**

في الحالات التالية : ابحث في ما إذا كانت الأطوال المعطاة يمكن أن تمثل أطوالاً لمثلث قائم الزاوية .

<p>١ ٥ وحدة طول ، ١٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة طول</p> <p>..... = <math>\sqrt{(13)}</math></p> <p><math>\sqrt{.....} + \sqrt{.....} = \sqrt{.....}</math></p> <p>ماذا تلاحظ ؟</p>	<p>٢ ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول ، ٥ وحدة طول</p> <p>..... = <math>\sqrt{(7)}</math></p> <p><math>\sqrt{.....} + \sqrt{.....} = \sqrt{.....}</math></p> <p>ماذا تلاحظ ؟</p>	<p>٣ ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول ، ٩ وحدة طول</p> <p>..... = <math>\sqrt{(9)}</math></p> <p><math>\sqrt{.....} + \sqrt{.....} = \sqrt{.....}</math></p> <p>ماذا تلاحظ ؟</p>
--	---	---

**تدرب (٥)**



استخدم المصربون القدامى أحياناً ذات عقد تكون مثلثاً تبلغ أطوال أضلاعه بوحدات الطول ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي لمساعدتهم على تشكيل الزوايا القائمة أثناء بناء الأهرامات . وضح كيف يعمل هذا النظام .

مربع طول الضلع الأطول ( ب ج ) =  $\sqrt{.....} = \sqrt{.....} + \sqrt{.....}$   
 مربعاً طولي الضلعين الآخرين ( أ ب ) + ( أ ج ) =  $\sqrt{.....} + \sqrt{.....} = \sqrt{.....}$   
 نلاحظ أنّ : .....

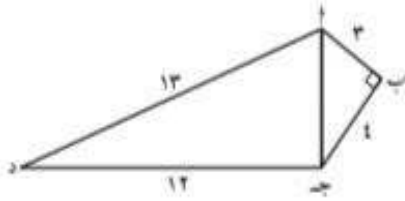
∴ ( ب ج ) =  $\sqrt{.....} + \sqrt{.....}$

∴ النظام يكون زاوية .....





### مثال :



في الشكل المقابل :  $\angle B = 90^\circ$  ،  
  $AB = 3$  وحدة طول ،  $BC = 4$  وحدة طول ،  
  $AC = 5$  وحدة طول ،  $AD = 13$  وحدة طول .  
 احسب طول  $CD$  ، ثم أثبت أن  $\triangle ADC$  قائم الزاوية .

### الحل :

المعطيات : (1)  $\angle B = 90^\circ$  ،  $AB = 3$  وحدة طول ،  $BC = 4$  وحدة طول ،  
  $AC = 5$  وحدة طول ،  $AD = 13$  وحدة طول .

المطلوب : (1) إيجاد طول  $CD$  .

(2) إثبات أن  $\triangle ADC$  قائم الزاوية .

البرهان :  $\triangle ABC$  قائم الزاوية في  $B$

$$\therefore (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2 \quad (\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين})$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

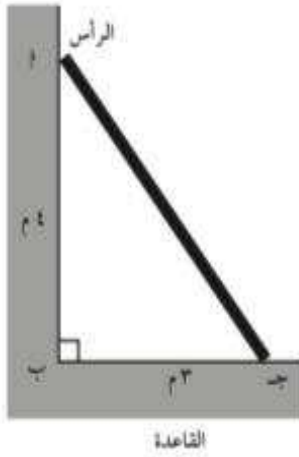
$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$\therefore$  مربع طول الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين .

$\therefore$  المثلث  $ADC$  قائم الزاوية في  $C$  .



### تدرّب (٦)

سلم يرتكز على حائط رأسي بحيث تبعد قمته عن سطح الأرض بمقدار ٤ أمتار ، وتبعد قاعدة السلم عن الحائط ٣ أمتار . أوجد طول السلم .

المعطيات :

المطلوب :

البرهان :  $\Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في .....

$$\therefore \sqrt{(\text{ب ج})^2} = \sqrt{(\dots)^2} + \sqrt{(\text{ب ج})^2}$$

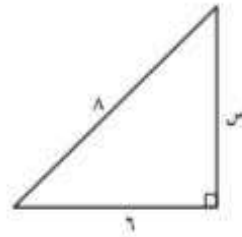
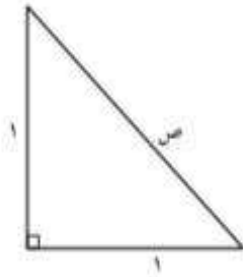
(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)  $\dots = \dots + \dots = \sqrt{(\text{ب ج})^2}$

$$\therefore \dots = \sqrt{\dots} = \text{ب ج}$$

$\therefore$  طول السلم = .....

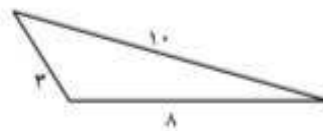
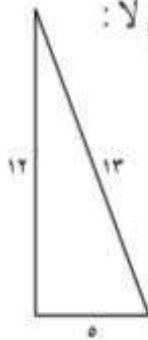
### تمرّن :

١ أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

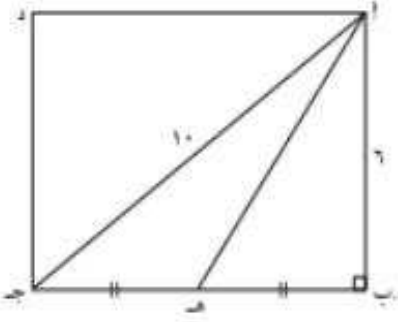


.....  
.....

ب في كلّ ممّا يلي ، حدّد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا :



.....  
.....



٢ ا ب ج د مستطيل فيه :  
 ا ج = ١٠ وحدة طول ، ا ب = ٦ وحدة طول ،  
 هـ منتصف ب ج . أوجد بالبرهان طول كل  
 من : ب ج ، ب هـ ، ا هـ .

---



---



---



---



---



٣ ساعة حائط طول مؤشر الساعات فيها ٦ وحدة طول ، بينما  
 طول مؤشر الدقائق ٨ وحدة طول . أوجد المسافة بين  
 طرفي المؤشرين عند تمام الساعة الثالثة .

---



---



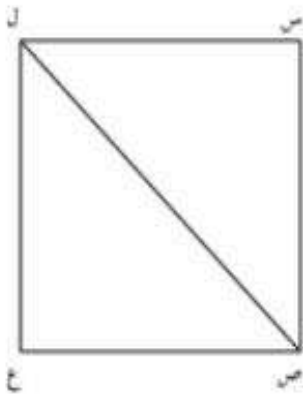
---



---



---



٤ تبلغ مساحة فناء مربع الشكل ٨١ وحدة مربعة  
 ويتضمن ممراً قطرياً .

١ أوجد طول ضلع الفناء .

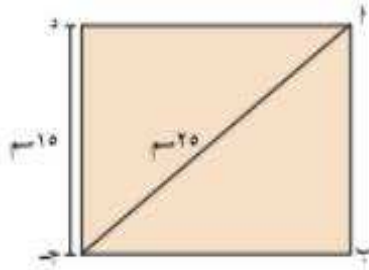
ب أوجد طول الممر القطري .

---

٥ TIMSS تحديد كل مجموعة من الأعداد التالية أطوال أضلاع مثلث .  
حدد المجموعة التي لا تناسب المجموعات الأخرى ؟

- ① ٥، ٤، ٣    ② ٧، ٥، ٣    ③ ٣٧، ٣٥، ١٢    ④ ١٠، ٨، ٦

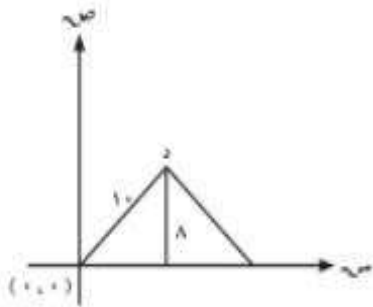
٦ يصنف مغلف البريد الذي على شكل مستطيل بأنه كبير إذا تجاوز طوله ٣٠ سم .  
هل المغلف التالي كبير ؟ وضع إجابتك



.....

.....

٧ TIMSS إحداثي النقطة د هو:



- ① (٦، ٨)    ② (٨، ٦)    ③ (١٠، ٨)    ④ (٨، ١٠)



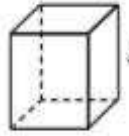
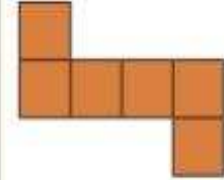
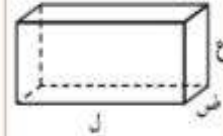
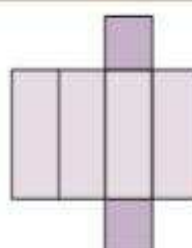
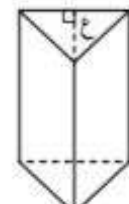
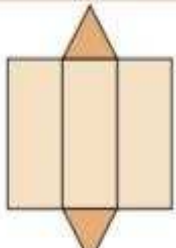
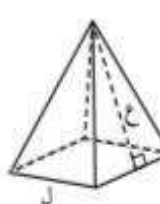
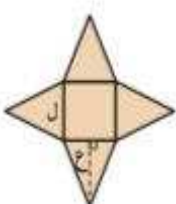
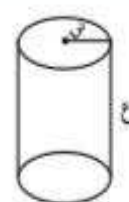
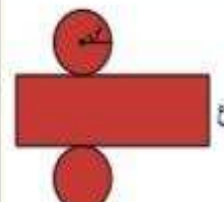
## مساحة السطوح ( ثلاثية الأبعاد ) Surface Area (3 D)

٤-١١

سوف تتعلم : إيجاد مساحة سطح المجسم المتعدد السطوح .

نشاط (١) :

مما سبق دراسته أكمل الجدول التالي :

اسم	المجسم	الشبكة للمجسم	قانون المساحة السطحية
مكعب			$6 \times \text{مساحة المربع}$ =
شبه مكعب			$2 \times (\text{مساحة القاعدة}) + 2 \times (\text{مساحة الوجه ١}) + 2 \times (\text{مساحة الوجه ٢})$ =
منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع			$2 \times \text{مساحة المثلث} + 3 \times \text{مساحة المستطيل}$ =
هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل			$\text{مساحة القاعدة (المربع)} + 4 \times \text{مساحة السطح الجانبي الواحد (المثلث)}$ =
أسطوانة دائرية قائمة			$2 \times \text{مساحة القاعدة (الدائرة)} + \text{مساحة السطح الجانبي (المستطيل)}$ =

العبارات والمفردات :

مجسم متعدد الأوجه  
Polyhedron

Face وجه

Edge حرف

Vertex رأس

مساحة سطحية

Surface Area

Prism منشور

Base قاعدة

Cylinder أسطوانة

معلومات مفيدة :

يستخدم مصممو الديكورات الداخلية المساحة السطحية لتحديد كمية المواد اللازمة لتغطية الأشياء المجسمة .



تذكر أن :

المنشور القائم هو منشور حروفه الجانبية متعامدة مع قاعدته .

## نشاط (٢) :



بالرجوع إلى النشاط (١):

المساحة السطحية للمنشور القائم المرسوم

$$= 2(ل \times ع) + 2(ع \times ض) + 2(ل \times ض)$$

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

$$= 2 \times ع(ل + ض) + 2(ل \times ض)$$

$$= 2(ل + ض) \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

$$= محيط القاعدة \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

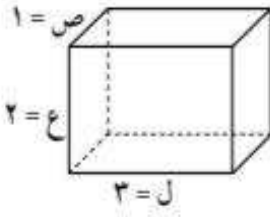
تذكر أن :

- محيط المستطيل =

$$2 \times (ل + ض)$$

- مساحة المستطيل =

$$ل \times ض$$



المساحة الجانبية للمنشور

= الرباعي القائم

محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع

**مثال (١) :**

أوجد المساحة السطحية للمنشور القائم الذي أبعاده : ١ وحدة طول ، ٢ وحدة طول ، ٣ وحدة طول .

**الحل :**

المساحة السطحية للمنشور القائم =

$$= 2(ل \times ع) + 2(ع \times ض) + 2(ل \times ض)$$

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

$$= 2 \times ع(ل + ض) + 2(ل \times ض)$$

$$= 2(ل + ض) \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

$$= محيط القاعدة \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

$$= 2 \times (1 + 3) \times 2 + 2 \times 1 \times 3$$

$$= 2 \times 4 \times 2 + 6$$

$$= 16 + 6$$

$$= 22 \text{ وحدة مربعة}$$

### نشاط (٣) :



بالرجوع إلى النشاط (١):

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

$2 =$  مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحني للأسطوانة  $2\pi r h$ )

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

بأخذ  $2\pi r$  عامل مشترك

$$2\pi r = m (r + h)$$

المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة  $2\pi r = m (r + h)$

تذكر أن:

- محيط الدائرة

$2\pi r =$

- مساحة الدائرة

$\pi r^2 =$



مثال (٢) :

أوجد المساحة السطحية للأسطوانة. (باعتبار  $\pi = 3,14$ )

الحل :

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

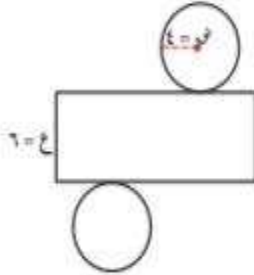
$2 =$  مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحني للأسطوانة  $2\pi r h$ )

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

بأخذ  $2\pi r$  عامل مشترك

$$2\pi r = m (r + h)$$

المساحة السطحية  $2\pi r = m (r + h)$



$$= 2 \times 3,14 \times 4 \times (4 + 6)$$

$$= 251,2 \text{ وحدة مربعة}$$



تدريب (١)

إذا أردنا طلاء خزان الناقله الموضح بالشكل بدهان يتكلف المتر المربع منه ٤ دنانير .

فكم يكلف دهان الخزان؟ ( باعتبار  $\pi = 3,14$  )

مساحة سطح الخزان =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$  (ع + ح)

$$(\dots + \dots) \times \dots \times \dots \times 2 =$$

$$(\dots + \dots) \dots \times 2 =$$

$$\dots \times \dots =$$

$$\dots =$$

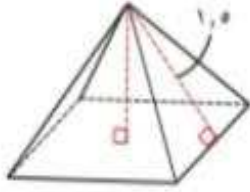
$$\dots = \text{تكلفة دهان الخزان}$$

فكر وناقش

إذا كانت الأسطوانة من غير قاعدتين ، فما المساحة السطحية لها ؟

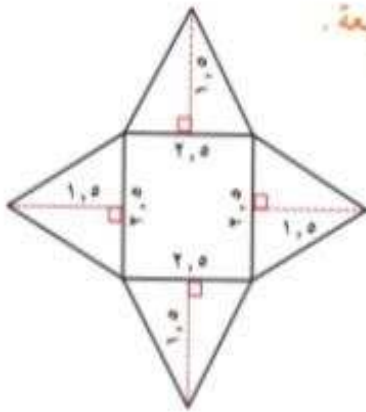


## مثال (٢) :



يُستخدم في إحدى المسرحيات التي تدور أحداث قصتها في مصر نموذج لهرم منتظم رباعي القاعدة . ومساحة قاعدته  $6,25$  وحدة طول مربعة . إذا كان ارتفاع الوجه الجانبي  $1,5$  وحدة طول ، فأوجد المساحة السطحية لهذا الهرم .

## الحل :



بما أن قاعدة الهرم هي مربع مساحته  $6,25$  وحدة طول مربعة .

إذا طول ضلع المربع  $= \sqrt{6,25} = 2,5$  وحدة طول

يتضمن الهرم ٤ أوجه مثلثية متطابقة .

مساحة الوجه الواحد  $= \frac{1}{2} \times 2,5 \times 1,5$

$= \frac{1}{2} \times (1,5 \times 2,5) = 1,875$  وحدة مربعة

∴ المساحة السطحية للهرم  $= 6,25 + 1,875 \times 4$

$= 13,75$  وحدة مربعة .

## تمرّن :

١ ما الفرق بين المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه  $5$  وحدة طول وشبه مكعب أبعاده  $3$  وحدة طول ،  $4$  وحدة طول ،  $7$  وحدة طول .

---

---

---

---

---

---

---

---

- ٢ في إحدى المدن الكبرى فندق أسطوانتي الشكل طول قطره قاعدته الدائرية ٣٥ وحدة طول وارتفاعه ٥٠ وحدة طول . تمت تغطية السطح المنحني بالزجاج . ما مساحة الزجاج الذي يُغطّي السطح الجانبي للفندق ؟ ( اعتبر  $\frac{22}{7} = \pi$  )

---



---



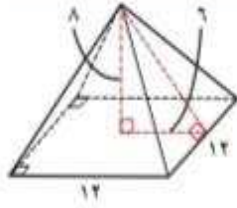
---



---



---



- ٣ ١ ما نوع الهرم المبيّن في الشكل ؟

---



---

- ٢ ما ارتفاع هذا الهرم ؟

---



---

- ٣ ما مساحة الوجه المثلثي ؟

---



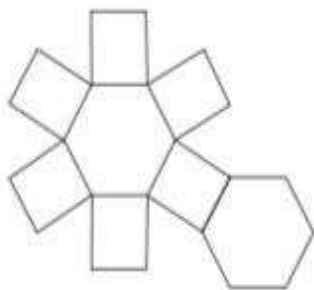
---

- ٤ ما المساحة السطحيّة للهرم ؟

---



---



- ٤ من خلال الشبكة المرسومة أكمل:

- ١ اسم المجسم :

---



---

- ٢ عدد الأسطح الجانبيّة =

---



---

## طرائق العد Counting Methods

١٢-١



سوف تتعلم: مخطط الشجرة البيانية - تنظيم قائمة - مبدأ العد - التباديل - التوافيق .



( ١ ) مبدأ العد

نشاط ( ١ ) :

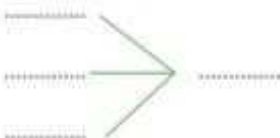
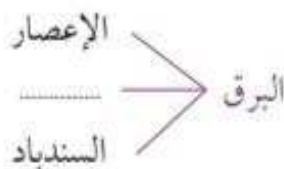
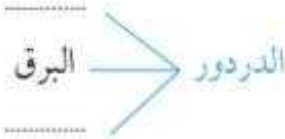
زار خالد المدينة الترفيهية ، وعند دخوله حصل على هدية عبارة عن تذاكر مجانية للعبتين من أصل أربع لعب متاحة ومختلفة .

فإذا كانت اللعب الأربع هي : الإعصار ، الدردور ، البرق ، السندباد .

فبكم طريقة يستطيع خالد اختيار اللعبتين المتاحتين له بشرط عدم تكرار اللعبة ؟

يمكن التوصل إلى عدد طرائق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بعدة طرق منها :

( ب ) مخطط الشجرة البيانية



( أ ) القائمة المنظمة



العبارات والمفردات :

مخطط الشجرة البيانية

Tree Diagram

مبدأ العد

Counting

Principle

تنظيم قائمة

Organizing

a list

ترتيب

Arrangement

تباديل

Permutation

مضروب

Factorial

توافيق

Combination

معلومات مفيدة :

يستخدم علماء الأحياء مخططات الشجرة البيانية لتحليل ما قد يحدث في أجيال مختلفة من الكائنات الحية .

### لاحظ أن :

عدد طرق اختيار خالد للعبة الأولى هو ٤ طرق ، وعدد طرق اختياره للعبة الثانية هو ٣ طرق وبذلك يستطيع اختيار لعبتين بـ ١٢ طريقة مختلفة .

ويمكن أيضًا التوصل لعدد طرق اختيار خالد للعبتين متاحيتين له بطريقة أخرى وهي :  
عدد الطرق = عدد طرق اختيار اللعبة الأولى × عدد طرق اختيار اللعبة الثانية  
..... = ..... × ..... =  
طريقة

هذه الطريقة تسمى « مبدأ العد » ويفضل العمل بها إذا كان التمثيل بالقائمة المنظمة أو بالشجرة البيانية فيه صعوبة لكثرة البيانات المستخدمة وتعددتها .

**مبدأ العد :** هو عملية تتكون من خطوتين مستقلتين ، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى  $n_1$  ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية  $n_2$  ، فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية هو :  
 $n_1 \times n_2$  . ويمكن تعميم المبدأ لأكثر من خطوتين .

### تدرّب (١) :

يقدم مطعم وجبات من طبق رئيسي إما لحم أو سمك أو دجاج ، وكل طبق رئيسي يقدم معه مقبلات من حساء أو سلطة .

١ أكمل مخطط الشجرة البيانية لتبين الوجبات الممكنة تقديمها .



الوجبات	المقبلات	الأطباق
( لحم ، ..... )	.....	لحم
( لحم ، سلطة )	سلطة	
( ..... ، حساء )	حساء	.....
( ..... ، ..... )	.....	
( دجاج ، ..... )	.....	دجاج
( ..... ، ..... )	.....	

٢ كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

عدد الوجبات = ..... × ..... = ..... وجبات



## ( ٢ ) التباديل والترتيبات

٤ ٣ ٢ ١

نشاط (٢) :



أراد خالد التعرف على جميع الأعداد والتي يتكون كل منها من رقمين فقط من مجموعة الأرقام { ٤، ٣، ٢، ١ } على ألا يسمح بتكرار الرقم في العدد ، فهل تستطيع أن تساعده في أكمال مخطط الشجرة التالي ؟

الرقم الأول ( رقم الأحاد )      الرقم الثاني ( رقم العشرات )      الأعداد الممكنة

٢ ١	_____	٢	→	١
٣ ١	_____	٣	→	٢
٤ ١	_____	٤	→	٣
١ ٢	_____	١	→	٤
٣ ٢	_____	٣	→	١
_____	_____	_____	→	٢
١ ٣	_____	١	→	٣
_____	_____	_____	→	٤
_____	_____	_____	→	١
_____	_____	_____	→	٢

توجد ١٢ طريقة ممكنة لاختيار الرقمين المسموح بهما لتكون بهما العدد أي أن عدد الطرائق = عدد طرق اختيار الرقم الأول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني  
 $12 = 3 \times 4 =$

لاحظ أن : عند تبديل الرقمين ١ ، ٢ مثلاً حصلنا على العددين (٢١) ، (١٢) لذلك يكون الترتيب هنا مهم ، وتسمى كلا منهما **ترتيبية** .

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا دون تكرار نسمي هذا الاختيار **تبديلاً** ونرمز له بالرمز (ل) .

معلومات مفيدة :

تستخدم التباديل عند ترتيب مجموعة مختارة من الصور الفوتوغرافية في ألبوم حسب ترتيب الأحداث .





من النشاط السابق :

استطعنا مع خالد أن نحصل على ١٢ طريقة (تبديلة) لنكوّن العدد المطلوب عند اختيار عنصران مختلفان من ٤ عناصر دون تكرار ومراعاة الترتيب فيهما ويمكننا كتابة ذلك على الصورة الرمزية :

$$12 = 3 \times 4 = \overset{4}{\downarrow} \underset{3}{\downarrow} P_3$$

عدد عناصر المجموعة      عدد العناصر التي تم اختيارها

١ ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٣ عناصر من { ٤، ٣، ٢، ١ } لنكوّن بها أعدادًا من ثلاث أرقام؟

مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
٢	٣	٤	عدد طرق الاختيار

عدد التبديلات = ..... × ٣ × ٤ = ..... تبديلة

$$\dots = 2 \times 3 \times 4 = \overset{4}{\downarrow} \underset{3}{\downarrow} P_2$$

عدد عناصر المجموعة      عدد العناصر

ب ما هي عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٤ عناصر من { ٤، ٣، ٢، ١ } لنكون بها أعدادًا من أربعة منازل؟

عدد التبديلات = ..... × ..... × ٣ × ٤ = ..... تبديلة  $P_4$

• هل لاحظت نمطًا معينًا في عمليات الضرب السابقة؟

• عملية الضرب على الصورة  $1 \times 2 \times 3 \times 4$  (العوامل تتناقص بمقدار ١ ، وتنتهي بالعدد ١) يمكن كتابتها على الصور (١٤) وتقرأ (مضروب ٤)

**مضروب العدد:** اختيار (ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بالرمز  $n!$  ويكتب على الصورة :

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (2-1) \times 1 \times 2 \times \dots \times n, n \in \mathbb{N}^+$$

$$\frac{4!}{2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2} = 4! \text{ على الصورة : } P_4$$

$$20 = \frac{5!}{1(2-5)} = \frac{5!}{13} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 5 = 4! \text{ فمثلًا : } P_4$$

قيمة التبديلة      في صورة مضروب      في صورة مفكوك      التبديلة

**التباديل:** عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (  $m \leq n$  ) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له برمز التبديلة (  ${}^n P_m$  ) ويكتب على الصورة :

$$(1) \quad {}^n P_m = n(n-1)(2-n) \dots \text{إلى } m \text{ من العوامل.}$$

$$(2) \quad {}^n P_m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad , \quad n, m \in \mathbb{N}^+$$

تدرب (2) :

أوجد كل من :

أ  $5! = 5 \times \dots \times \dots \times \dots = \dots$

ب  $4! = \dots \times \dots \times \dots = \dots$

ج  $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = \dots$

د  $5! = \dots \times \dots \times 5 = \dots$

هـ  $4! = \dots \times \dots = \dots$

و  $8 \times 7 \times 6 \times 5 = \dots!$

ز  $(10-7)! = \dots$

تدرب (3) :

تستخدم إحدى المدن لوحات ترخيص الدرجات والتي تحتوي على عدد مكون من 3 أرقام مختلفة للوحة ، وباستخدام الأرقام من 1 إلى 9 ( يريد المدير المسؤول عن تنظيم الدرجات أن يعرف عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها .

مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
.....	.....	9	عدد طرق الاختيار

**الحل:** عدد طرق اختيار الرقم الأول (الأحاد) = 9 طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (العشرات) = ..... طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثالث (المئات) = ..... طرق

$$\text{عدد لوحات التراخيص} = \dots \times \dots \times 9 = \dots$$

**حل آخر:** ترتيب العناصر مهم ، وبدون تكرار فإن :

$$\text{عدد لوحات التراخيص} = \dots! = \dots$$

## مثال :

في تدرّب (٣) ، إذا سمح المدير المسؤول بتكرار الرقم ، فكم عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها ؟

**الحل :** ترتيب العناصر مهم ، ومسموح بالتكرار فإن :

$$\text{عدد لوحات التراخيص} = 9 \times 9 \times 9 = 729 \text{ لوحة}$$

## فكر وناقش

عرض المعلم المثال التالي : كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ في حالة السماح بتكرار الأرقام .

وليد يرى أن حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة =  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  طريقة

جاسم يرى أن حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة =  $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$  طريقة

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك .

## لاحظ أن :

$$1 = 1 \cdot 0 \quad (1)$$

$$1 = 1 \cdot 1 \quad (2)$$

$$(3) \quad n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1 \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{فمثلاً: } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \dots \text{ وهكذا ...}$$

## تدرّب (٤) :

اختير ٥ طلاب للجنة الرياضية بفصلك ، على أن يتم اختيار رئيس ونائب رئيس ومقرر لهذه اللجنة من الطلاب الخمس ، فبكم طريقة يتم اختيار المرشّحون للمناصب الثلاث ؟

عدد طرق اختيار المرشّحون للمناصب الثلاث = \_\_\_\_\_

### ( ٣ ) التوافق

#### نشاط ( ٣ )



أراد معلم الرياضة البدنية في مدرستك أن يستعين بك لتصمم معه جدول مباريات لفرق كرة القدم من فصول الصف الثامن من مجموعة الفرق { أ ، ب ، ج ، د } من دور واحد . فهل تستطيع أن تساعد في إكمال مخطط الشجرة التالي لتصميم جدول المباريات ؟

#### معلومات مفيدة :

يختار المدربون التوافق عندما يبدأون في تشكيل فريق .



المباريات الممكنة	الفريق الثاني	الفريق الأول
أ ، ب	ب	أ
أ ، ج	ج	
أ ، د	د	
ب ، ب	أ	ب
ب ، ج	ج	
..... ، .....	.....	ج
ب ، ب	أ	
..... ، .....	.....	
..... ، .....	.....	د
..... ، .....	.....	
..... ، .....	.....	

أكمل ما يلي :

- ١ هل المباراة بين الفريقين أ ، ب هي نفسها المباراة ب ، أ ؟ .....
- ٢ هل الترتيب مهم لإيجاد عدد المباريات ؟ ولماذا ؟ .....
- ٣ أوجد عدد المباريات الممكنة = ..... مباريات

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم نسمي هذا الاختيار **توافق** ونرمز له بالرمز ( ق ) .



• في النشاط السابق ، إن اختيار فريقين من أربعة فرق لا يحتاج إلى ترتيب ، أي أن ترتيب فريقين نعتبره اختياراً واحداً .

لذلك نقسم عدد التباديل  $4!$  على  $2!$  التي تمثل عدد المجموعات الثنائية المكررة أي أن :

$$6 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2!}$$

عدد عناصر المجموعة      عدد الاختيارات

**التوافق:** عند اختيار ( م ) عنصر من بين ( ن ) عنصر مختلف (  $m \leq n$  ) حيث ترتيب العناصر غير مهم سنرمز له برمز التوفيق (  ${}^n C_m$  ) وتكتب على الصورة :

$${}^n C_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad m \leq n$$

$$\text{إذا كان } {}^n C_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ ، فإن } {}^n C_{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

**ملاحظة :**

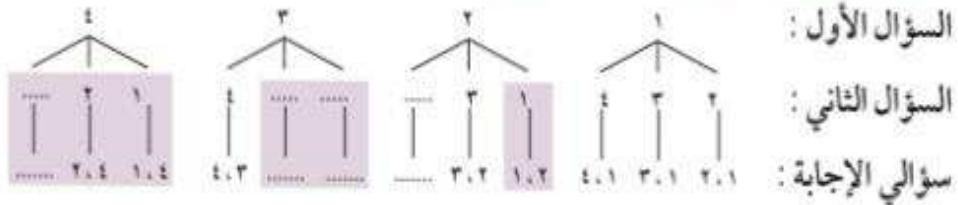
عندما تتحقق من إجابتك عن مسألة ما تتضمن توافق ، تأكد من إلغاء الإمكانات التي هي عبارة عن تكرار لبعضها بعضاً .

تكتب التوافق بصورة أخرى :  ${}^n C_m = \binom{n}{m}$  وتقرأ ن فوق م .  
تدرب ( ٥ )

في إحدى الاختبارات مطلوب الإجابة على سؤالين فقط من أربعة أسئلة متاحة ، فيكم طريقة يمكنك أن تختار سؤالين للإجابة ؟

نفرض أن أرقام الأسئلة هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فتكون طرق اختيار سؤالي الإجابة هي :

• الطريقة الأولى : ( طريقة مخطط الشجرة )



∴ عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ..... طرق



• الطريقة الثانية: (طريقة المجموعات)

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الأول هي:  $\{3, 1\}$ ،  $\{2, 1\}$ ،  $\{1, 1\}$

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثاني (ما عدا السؤال الأول) هي:  $\{3, 2\}$ ،  $\{2, 2\}$ ،  $\{1, 2\}$

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثالث (ما عدا السؤالين الأول والثاني) هي:  $\{3, 3\}$ ،  $\{2, 3\}$ ،  $\{1, 3\}$

عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ..... طرق

• الطريقة الثالثة: (بقانون التوافيق)

$$\frac{!4}{!1 \times !2} = \frac{!4}{!(4-1) \times !2} = \binom{4}{2} \text{ أو } \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{!4}{!2} = 6$$

$$6 = \frac{3 \times 4}{1 \times 2} = \frac{!3 \times 3 \times 4}{!1 \times !2}$$

تدرب (٦)

قرر ما إذا كان الترتيب ضروريًا أم لا في كل من المواقف التالية:

- أ اختيار ٤ اسطوانات مدمجة من ١٠ اسطوانات مدمجة. (.....)
- ب اختيار أرقام لفتح التليفون المحمول. (.....)
- ج جلوس الطلاب في الفصل. (.....)
- د اختيار وترتيب الحروف أ، ب، ج، د من دون تكرار. (.....)

تدرب (٧)

تقدم إحدى المطاعم أنواع من الفطائر حسب الطلب، مما يلزم وضع خمسة أنواع من منكهات الطعام وهي (فلفل، بصل، طماطم، تونة، زيتون). ما عدد الطرائق المختلفة:

- أ لاختيار اثنان من منكهات الطعام؟  
.....  
.....
- ب لاختيار ثلاثة من منكهات الطعام؟  
.....  
.....

اختيار خمسة من منكهات الطعام؟

لعدم اختيار أي نوع من منكهات الطعام؟

### فكر وناقش

في تدرّب (٧)، ماذا تلاحظ في إجابتك على كل من (أ)، (ب) وأيضًا إجابتك على كل من (ج)، (د)؟

### تمرّن :

١ استخدم مبدأ العد لإيجاد عدد النواتج في كل حالة :

أ ما عدد طرائق الاختيار لطلاء : من نوعين من الطلاء ، ٥ ألوان ؟

.....  
.....  
.....

ب ما عدد طرائق الاختيار لدراجة : من ٥ ألوان ، ٣ أحجام ، ٤ موديلات ؟

.....  
.....  
.....

٢ أوجد كل مما يلي :

أ  $6! =$  .....

ب  $!(8-4) =$  .....

ج  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$  ل \_ = \_ !

د ..... =  $8!$

ه ..... =  $10!$

و ..... =  $13 \times 12$

ز ..... =  $13 \times 4$

٣ كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من ١ إلى ٥ إذا كان :

أ يمكن تكرار الأرقام .

ب لا يمكن تكرار الأرقام .

٤ في مزرعة أرانب يلزم وضع ٦ أرانب في ٦ أقفاص . بكم طريقة يمكن عمل ذلك بحيث يكون أرنب واحد في كل قفص؟

.....  
.....  
.....

٥ كم عدد الطرائق التي يمكن أن يتم بواسطتها اختيار طالبين مع مراعاة الترتيب أو أن يكون واحدًا تلو الآخر من ٨ طلاب؟

.....  
.....  
.....

٦ أوجد ما يساويه كل من :

$$\text{.....} = \binom{7}{.}$$

$$\text{.....} = {}^8C^8$$

$$\text{.....} = {}^7C^7$$

$$\text{.....} = {}^8C^8$$

٧ ذهبت مع أصدقائك إلى مطعم صيني يقدم ٦ أطباق . فبكم طريقة يمكنك اختيار ٣ من هذه الأطباق للمشاركة مع أصدقائك؟

٨ في لعبة الكراسي الموسيقية يقوم جاسم و خالد و محمد بالجري للجلوس على مقعدين ، أوجد عدد الطرائق المختلفة للجلوس على المقعدين .

٩ ما هي عدد الطرائق المختلفة لقراءة كتابين من ٥ كتب خلال إجازة نهاية الأسبوع؟

الحسد يقتل الأنفس  
فاحذروا عين الحسود تهدم البيوت  
وتقتل النفوس وتفرق الأحبة  
قال رسول الله صلى الله عليه وسلم  
العين تدخل الرجل القبر  
وتدخل الجمل القدر  
اللهم إني أعوذ بك من شر عيون  
حاسدة وقلوب حاقدة