وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي **أ. فتحية محمود أبو زور**

أ. حسين علي عبدالله

الطبعة الثالثة

١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ

٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف التاسع

أ. جميلة محمد البيدان (رئيسًا)

أ. حسن نوح المهنا **أ. منى فتحى عاشور**

أ. عبد الرزاق على البغلي **أ. غدير عيسى الشطي**

دار التَّربَويّون House of Education **ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١١**

© **جَميع الحقوق مَحفوظة: لا يَجوز نشْر أيّ جُزء من هذا الكِتاب أو تَصويره أو تَخزينه أو تَسجيله بأيّ وَسيلَة دُون مُوَافقَة خطّيَّة مِنَ النّاشِر.**

الطبعة الأولى ٢٠١١

الطبعة الثانية ٢٠١٣

الطبعة الثالثة ٢٠١٥

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوَحدةُ الأولى: الأعدادُ الحقيقيّةُ ١٢

مشروعُ الوَحدةِ ١٣

الوَحدةُ الأولى (أ): المجموعاتُ ١٥

١ – ١ المجموعاتُ الجزئيّةُ ١٦

١ – ٢ المجموعةُ الشاملةُ ومجموعةُ الفرقِ والمجموعةُ المتمِّمةُ ١٨

الوَحدةُ الأولى (ب): العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ ٢١

١ – ٣ الجذورُ التربيعيّةُ والأعدادُ غيرُ النسبيّةِ ٢٢

١ – ٤ الأعدادُ الحقيقيّةُ (المقارنةُ والترتيبُ) ٢٧

١ – ٥ القيمةُ المطلَقةُ ٣١

١ – ٦ العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ وخواصُّها ٣٣

الوَحدةُ الأولى (جـ): الأسسُ ٣٥

١ – ٧ قوانينُ الأسسِ ٣٦

١ – ٨ الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ الموجَبةِ ٣٩

١ – ٩ الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ السالبةِ ٤٤

الوَحدةُ الثانيةُ: تحليلُ البياناتِ ٥٢

مشروعُ الوَحدةِ ٥٣

الوَحدةُ الثانيةُ (أ): عرضُ البياناتِ ٥٥

٢ – ١ تسجيلُ وتنظيمُ البياناتِ وتمثيلُها ٥٦

٢ – ٢ مقاييسُ النزعةِ المركزيّةِ ٦٢

٢ – ٣ التمثيلُ البيانيُّ بالنقاطِ المجمَّعةِ ومخطَّطاتُ الساقِ والأوراقِ ٦٩

٢ – ٤ مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين ٧٤

الوَحدةُ الثانيةُ (ب): استخدامُ البياناتِ للإجابةِ عن الأسئلةِ ٧٩

٢ – ٥ مخطَّطاتُ الانتشارِ والنزعاتِ ٨٠

المحتويات

الوَحدةُ الثالثةُ: التحليلُ والمعادلاتُ والمتباينات والحدوديّاتُ النسبيّةُ ٨٨

مشروعُ الوَحدةِ ٨٩

الوَحدةُ الثالثةُ (أ): التحليلُ ٩١

٣ – ١ تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين ٩٢

٣ – ٢ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعبّين أو مجموعُهما ٩٥

٣ – ٣ تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ ٩٩

٣ – ٤ تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أ س^{٢} + ب س + جـ، أ ≠ ٠ ..... ١٠٢

الوَحدةُ الثالثةُ (ب): المعادلاتُ والمتباينات ١٠٦

٣ – ٥ حلُّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ ١٠٧

٣ – ٦ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ ١١٢

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ): الحدوديّاتُ النسبيّةُ ١١٧

٣ – ٧ الحدوديّاتُ النسبيّةُ وتبسيطُها ١١٨

٣ – ٨ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ١٢٢

٣ – ٩ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ١٢٧

٣ – ١٠ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها ١٣١

الوَحدةُ الرابعةُ: الجبرُ: المعادلاتُ الخطّيّةُ والمتباينات ١٤٠

مشروعُ الوَحدةِ ١٤١

الوَحدةُ الرابعةُ (أ): المعادلاتُ والعلاقاتُ الخطّيّةُ ١٤٣

٤ – ١ فهمُ العلاقاتِ بين متغيِّرين ١٤٤

٤ – ٢ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين ١٤٩

٤ – ٣ التمثيلُ البيانيُّ لمعادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين ١٥٤

المحتوَياتُ

الوَحدةُ الرابعةُ (ب): المعادلاتُ الخطّيّةُ ١٥٩

٤ – ٤ فهمُ الميلِ ١٦٠

٤ – ٥ أنماطٌ في معادلاتٍ خطّيّةٍ ورسومٍ بيانيّةٍ ١٦٥

٤ – ٦ الخطوطُ المتوازيةُ والعلاقةُ بينَ ميلِها ١٧٠

٤ – ٧ أزواجُ المعادلاتِ الخطّيّةِ ١٧٤

٤ – ٨ المتباينات الخطّيّةُ ١٧٩

الوَحدةُ الخامسةُ: القياسُ وعناصرُ الهندسةِ والمساحاتُ والحجومُ ١٨٨

مشروعُ الوَحدةِ ١٨٩

الوَحدةُ الخامسةُ (أ): عناصرُ الهندسةِ ١٩١

٥ – ١ المستقيماتُ المتوازيةُ والمستقيماتُ المتعامدةُ ١٩٢

٥ – ٢ الواجهاتُ ثلاثيّةُ الأبعادِ ١٩٧

الوَحدةُ الخامسةُ (ب): مساحةُ سطحِ المجسَّمِ وحجمُ المجسَّمِ ٢٠٢

٥ – ٣ المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ والأسطوانةِ ٢٠٣

٥ – ٤ حجمُ المنشورِ والأسطوانةِ ٢٠٨

٥ – ٥ المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ والمخروطِ ٢١٣

٥ – ٦ حجمُ الهرمِ والمخروطِ ٢١٩

الوَحدةُ الأولى

الأعدادُ الحقيقيّةُ
Real Numbers

ثقافةٌ

في العام ٢٠٠٨ قامَ علماءُ الآثارِ في دولةِ الكويتِ بالتنقيبِ عن الآثارِ في منطقةِ مزارِ الخضرِ لكي يُزوِّدونا بالمعلوماتِ المهمّةِ عن الحضاراتِ والثقافاتِ القديمةِ. ولكي يجدوا أبعادَ هذه الآثارِ، استخدموا الجذورَ التربيعيّةَ للأعدادِ الموجَبةِ.

فنونٌ

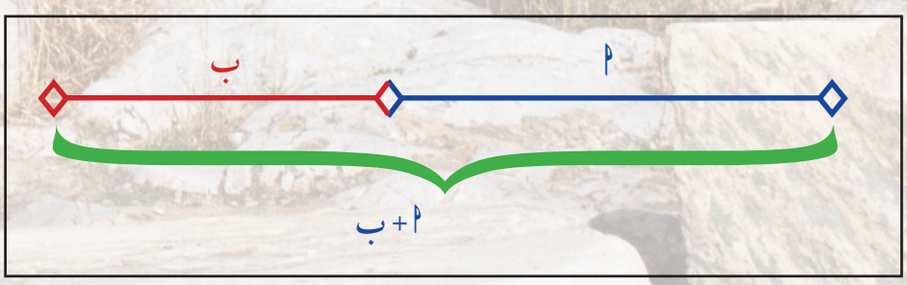
يُستخدَمُ الرقمُ الذهبيُّ لإيجادِ أبعادِ مستطيلاتٍ في العديدِ من اللوحاتِ. أحيانًا، وبشكلٍ تقريبيٍّ، يظهرُ الرقمُ الذهبيُّ في الطبيعةِ، مثلًا في الشكلِ الهندسيِّ لنجمِ البحرِ وفي زهرةِ دوّارِ الشمسِ.

تُحقِّقُ قيمتان عدديّتان أ ، ب النسبةَ الذهبيّةَ إذا كانَ الطولُ الكلّيُّ أ + ب بالنسبةِ إلى طولِ القطعةِ الأطولِ أ مساويًا للنسبةِ بينَ أ إلى القطعةِ الأقصرِ ب.

أي إذا كانَ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

أما القيمةُ العدديّةُ للرقمِ الذهبيِّ فهي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$

أي ١,٦١٨٠٣٣٩٨٨٧ تقريبًا.

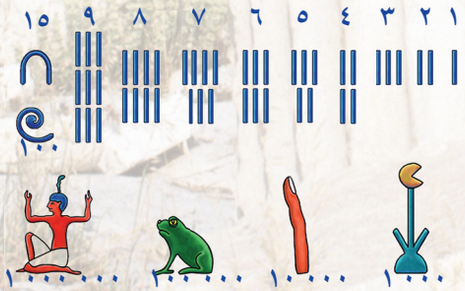


علومٌ

درسَتْ عالمةُ الفضاءِ أيلين أوشوا تأثيراتِ النظامِ الشمسيِّ على النظامِ البيئيِّ في الأرضِ مستخدِمةً أعدادًا نسبيّةً وأعدادًا غيرَ نسبيّةٍ.

تاريخٌ

نشأَ علمُ الأعدادِ الحديثُ من ترسّباتٍ معرفيّةٍ لحضاراتٍ قديمةٍ، مثلِ حضارةِ المصريّين القدماءِ. وتدلُّ الصورةُ على الربطِ اللاحقِ للأعدادِ المصريّةِ القديمةِ، والقيمِ المكانيّةِ في النظامِ العشريِّ.



أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

المجموعةُ الشاملةُ هي المجموعةُ التي تشملُ كلَّ العناصرِ قيدَ الدراسةِ.

المجموعةُ الجزئيّةُ هي جزءٌ من مجموعةٍ.

مجموعةُ التقاطعِ هي مجموعةُ العناصرِ المشترَكةِ بينَ مجموعتين.

مجموعةُ الاتّحادِ هي مجموعةُ العناصرِ الموجودةِ في كلتا المجموعتين.

المجموعةُ المتمِّمةُ إذا كانَتِ المجموعةُ س مجموعةً جزئيّةً من المجموعةِ الشاملةِ ش، فإنّ المجموعةَ $\overline{س}$ تحتوي على عناصرَ تنتمي إلى ش ولا تنتمي إلى س تُسمّى $\overline{س}$ متمِّمةَ المجموعةِ س.

نستطيعُ أن نُعبِّرَ عن الأعدادِ الكبيرةِ والصغيرةِ بالصورةِ العلميّةِ باستخدامِ الأسسِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ

افهمْ خطِّطْ حُلَّ تحقّقْ

في هذا المشروعِ سوف يتعرّفُ الطلّابُ ضمنَ مجموعاتٍ على النسبةِ الذهبيّةِ $\frac{١+\sqrt{٥}}{٢}$ ويرسمون مستطيلاتٍ، أضلاعُها هي في النسبةِ ١ إلى $\frac{١+\sqrt{٥}}{٢}$. سوف يبحثون عن بعضِ اللوحاتِ الفنّيّةِ التي تُراعي هذه النسبةَ. كذلك سوف يُقارِنون نسبةَ طولِ بعضِ الأوراقِ النقديّةِ الكويتيّةِ إلى عرضِها بالنسبةِ الذهبيّةِ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

ذُكِرَتْ إجابةُ كلٍّ من المسائلِ التاليةِ. حدِّدْ ما إذا كانَتِ الإجابةُ قريبةً بما يكفي (صحيحةً) أو أصغرَ بكثيرٍ أو أكبرَ بكثيرٍ من الإجابةِ الفعليّةِ واذكرِ الأسبابَ.

التحقّقُ من معقوليّةِ الإجابةِ

عندما تُراجِعُ إجابتَك عن مسألةٍ للتحقّقِ منها، الجأْ إلى الحسِّ المنطقيِّ.

١ اشترى أحمدُ ٣ لوحاتٍ لمناظرَ طبيعيّةٍ كلُّ واحدةٍ منها على شكلِ مربّعٍ. مساحةُ كلٍّ من اللوحتين الأولى والثانيةِ ١٠٠ سم^{٢} ومساحةُ اللوحةِ الثالثةِ ٤٠٠ سم^{٢}. وضعَ أحمدُ اللوحاتِ الثلاثَ ملاصِقةً لبعضِها بعضًا لتُشكِّلَ مستطيلًا. أوجِدْ طولَ وعرضَ المستطيلِ الذي حصلَ عليه.

إجابةٌ: الطولُ: ٣٠سم، العرضُ: ٢٠سم.

٢ يُثابِرُ ناصرٌ على الألعابِ الرياضيّةِ على الحاسوبِ لتنميةِ قدراتِه الحسابيّةِ، إذ إنّه يُدخِلُ عددًا معيَّنًا «أ» إلى اللعبةِ، فيتحوّلُ إلى عددٍ آخرَ «ب» باستخدامِ التعبيرِ الجبريِّ ٢س^{٢} − ٥، حيث س تُمثِّلُ الأعدادَ.

يُريدُ ناصرٌ أن يحصلَ على العددِ ١٥ كناتجٍ. فأيُّ الأعدادِ عليه أن يُدخِلَها في اللعبةِ ليحصلَ على هذا الناتجِ؟

إجابةٌ: ٢,٣، −٢,٣.

٣ باستخدامِ القانونِ ع = $\frac{١٢٠٠}{ف}$ يُمكِنُ الحصولُ على السرعةِ القصوى للوحِ التزحلقِ، حيث ف: المسافةُ بالمترِ (م)، ع: السرعةُ (م/ ثانيةٍ). أوجِدْ سرعتَه عندَ اجتيازِه مسافةَ ١٠٠ مترٍ؟

إجابةٌ: ١٠٠ كم/ ساعةٍ.

المجموعاتُ
Sets

الانتخاباتُ

تُجرى الانتخاباتُ في الكويتِ لانتخابِ مجلسِ الأمّةِ كلَّ ٤ سنواتٍ. لذا فقد قُسِّمَتِ الكويتُ إلى ٢٥ دائرةً انتخابيّةً. ولكن في عامِ ٢٠٠٦ جرى تقسيمُها إلى ٥ دوائرَ انتخابيّةٍ فقط.

يستطيعُ المنتخِبُ الاقتراعَ لأربعةِ مرشَّحين. وعلى المرشَّحِ إلى مجلسِ الأمّةِ أن يكونَ قد تجاوزَ الثلاثين من العمرِ.

لمجلسِ الأمّةِ الحقُّ في تعيينِ لجانٍ من أعضائِه. من هذه اللجانِ: الداخليّةُ والدفاعُ، الماليّةُ، التشريعيّةُ، التعليميّةُ، الصحّيّةُ، حقوقُ الإنسانِ، وغيرُها.

١ من يستطيعُ الترشّحَ لانتخاباتِ مجلسِ الأمّةِ؟

٢ ممَّ تتألّفُ اللجانُ؟

٣ هل تستطيعُ التفكيرَ في مخطَّطٍ يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ المرشَّحين وأعضاءِ مجلسِ الأمّةِ واللجانِ؟

١-١

المجموعاتُ الجزئيّةُ
Subsets

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ في الصفِّ الثامنِ المجموعاتِ، وعمليّتي التقاطعِ والاتّحادِ على هذه المجموعاتِ. سوف تتعلّمُ في هذا الدرسِ المجموعاتِ الجزئيّةَ. ►

سوف تتعلّمُ
- المجموعاتِ الجزئيّةَ.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ منظِّمو المهرجاناتِ الرياضيّةِ المجموعاتِ الجزئيّةَ لتوزيعِ الرياضيّين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- ◄ مجموعةٌ جزئيّةٌ ⊇ Subset
- ◄ ليسَتْ مجموعةً جزئيّةً ⊉ Not Subset
- ◄ مجموعةٌ خاليةٌ ø Empty Set
- ◄ مجموعاتٌ متساويةٌ Equal Sets

استكشِفْ: المجموعاتُ الجزئيّةُ

البطاقاتُ

شكّلَ طلّابُ الصفِّ التاسعِ ٤ لجانٍ تقومُ ببعضِ الأنشطةِ اللاصفّيّةِ: لجنةِ الرياضةِ، لجنةِ البيئةِ، لجنةِ الثقافةِ الدينيّةِ، لجنةِ المسرحِ.

بفرضِ أنّ الطلّابَ جميعَهم يشتركون في اللجانِ ولا يُشارِكُ أيُّ طالبٍ في أكثرَ من لجنةٍ، صِفِ العلاقةَ بينَ مجموعاتِ اللجانِ ومجموعةِ طلّابِ الصفِّ التاسعِ.

١ أكمِلْ مستخدِمًا أحدَ الرموزِ ⊉، ⊇ :

أ مجموعةُ أعضاءِ لجنةِ الرياضةِ ... مجموعةُ طلّابِ الصفِّ التاسعِ.

ب مجموعةُ أعضاءِ لجنةِ البيئةِ ... مجموعةُ أعضاءِ لجنةِ الثقافةِ الدينيّةِ.

٢ هل يوجَدُ طلّابٌ يُشارِكون في أكثرَ من لجنةٍ؟

٣ هل يوجَدُ طلّابٌ من الصفِّ لا يُشارِكون في أيِّ لجنةٍ؟

تعلَّمْ: المجموعاتُ الجزئيّةُ

يضعُ بعضُ طلّابِ فصلِك نظّاراتٍ طبّيّةً. مجموعةُ الطلّابِ في فصلِك الذين يضعون نظّاراتٍ طبّيّةً هي **مجموعةٌ جزئيّةٌ** من مجموعةِ طلّابِ الفصلِ.

لتكنْ م مجموعةَ طلّابِ الفصلِ الذين يضعون نظّاراتٍ طبّيّةً، ك مجموعةَ طلّابِ الفصلِ.

كلُّ عنصرٍ في م ينتمي إلى ك. لذلك نقولُ إنّ م مجموعةٌ جزئيّةٌ من ك أو م محتواةٌ في ك أو ك تحوي م . نُعبِّرُ عن ذلك بالرموزِ على الصورةِ م ⊇ ك.

مثالٌ (١)

لتكنْ سـ مجموعةَ الأرقامِ في النظامِ العشريِّ، صـ مجموعةَ الأرقامِ المكوِّنةِ للعددِ ٤٥١ ٥٣. اكتبْ كلًّا من سـ؛ صـ بذكرِ العناصرِ، ثمّ بيِّنْ أنّ صـ مجموعةٌ جزئيّةٌ من سـ.

سـ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}، صـ = {١، ٥، ٤، ٣}.

بما أنّ كلَّ عنصرٍ من صـ ينتمي إلى سـ، فإنّ صـ هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من سـ ونكتبُ صـ ⊆ سـ.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أعطِ مجموعتين جزئيّتين من المجموعةِ سـ في المثالِ (١).

يُمكِنُ لمجموعةٍ ما ألّا تكونَ مجموعةً جزئيّةً لمجموعةٍ أخرى.

مثالٌ (٢)

لتكنِ المجموعتان: هـ = {١٢، ١٠، ل، ع، ب}، ن = {١٠، ٠، ل، ع}. بيِّنْ أنّ ن ليسَتْ مجموعةً جزئيّةً من هـ.

لاحِظْ أنّ العنصرَ ٠ ينتمي إلى المجموعةِ ن (٠ ∈ ن)، ولكنّه لا ينتمي إلى المجموعةِ هـ (٠ ∉ هـ). لذلك نستنتجُ أنّ المجموعةَ ن ليسَتْ مجموعةً جزئيّةً من المجموعةِ هـ. نكتبُ ن ⊈ هـ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ لتكنْ م = {جـ، د، س، ٧، ٥}، ك = {٤، ٥، ٦، جـ} بيِّنْ أنّ ك ⊈ م.

تذكَّرْ

١ ك ⊈ ع تعني أنّه يوجَدُ عنصرٌ على الأقلِّ ينتمي إلى ك ولا ينتمي إلى ع

٢ المجموعةُ الخاليةُ ∅ هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من أيِّ مجموعةٍ.

تعريفٌ

تتساوى المجموعتان سـ، صـ إذا كانَتْ كلٌّ منهما مجموعةً جزئيّةً من الأخرى.

أي أنّ: إذا كانَ سـ ⊆ صـ، صـ ⊆ سـ فإنّ سـ = صـ والعكسُ صحيحٌ.

ملاحظةٌ:

كلُّ مجموعةٍ هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من نفسِها.

مثالٌ (٣)

لتكنْ هـ هي مجموعةَ العواملِ الموجبة للعدد ٦، ع هي مجموعةَ أرقامِ العددِ ١٦٦٣٢، اكتبْ كلًّا من هـ، ع بذكرِ العناصرِ ثمّ بيِّنْ أنَّ هـ = ع.

هـ = {١، ٢، ٣، ٦} ع = {٢، ٣، ٦، ١}

بما أنّ كلَّ عنصرٍ في هـ ينتمي إلى ع إذًا هـ ⊆ ع

بما أنّ كلَّ عنصرٍ في ع ينتمي إلى هـ إذًا ع ⊆ هـ

وبالتالي هـ = ع

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ اكتبْ مجموعةَ ج مساويةً للمجموعةِ هـ.

تحقّق من فهمك

١ هل يُمكِنُ أن يتساوى عددُ عناصرِ مجموعةٍ مع عددِ عناصرِ مجموعةٍ جزئيّةٍ منها. فسِّرْ إجابتَك.

٢ اكتبْ مجموعةَ سـ لا تحوي مجموعةَ صـ.

١ـ٢

المجموعةُ الشاملةُ ومجموعةُ الفرقِ والمجموعةُ المتمِّمةُ

Overall Set, Difference Set and Complement of a Set

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ مجموعةِ الفرقِ بينَ مجموعتين، والمجموعةِ المتمِّمةِ لمجموعةٍ جزئيّةٍ في المجموعةِ الشاملةِ.

◄ **صلةُ الدرسِ** في الدرسِ السابقِ، تعرّفْتَ مفهومَ المجموعةِ والمجموعةِ الجزئيّةِ. في هذا الدرسِ، سوف تتعلّمُ مجموعةَ الفرقِ بينَ مجموعتين والمجموعةِ المتمِّمةِ. ►

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ المجموعةُ الشاملةُ
Overall Set

◄ مجموعةُ الفرقِ
Difference Set

◄ المجموعةُ المتمِّمةُ
Complement of a Set

استكشِفْ أنواعُ المجموعاتِ

الشرابُ المفضَّلُ

استطلعَ محمودٌ آراءَ ١٠ من طلّابِ فصلِه حولَ مشروباتِهم المفضَّلةِ وكانَتِ النتائجُ كما يأتي:

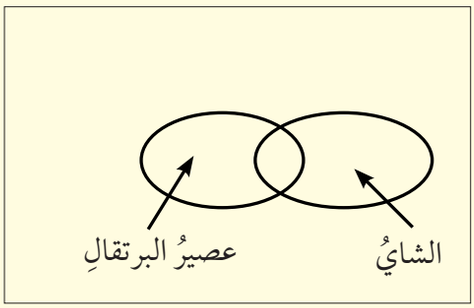
الشرابُ المفضَّلُ / أسماءُ الطلّابِ	حمدٌ	فهدٌ	عمرُ	محمّدٌ	أحمدُ	سامي	خالدٌ	جاسمٌ	يوسفُ	عليٌّ
عصيرُ البرتقالِ	✓	✓		✓	✓		✓			
الشايُ	✓		✓		✓			✓	✓	

استخدِمْ مخطَّط ڤن المقابلَ

أ) اكتبْ أسماءَ الطلّابِ الذين يشربون الشايَ ولا يشربون عصيرَ البرتقالِ.

ب) اكتبْ أسماءَ الطلّابِ الذين يشربون عصيرَ البرتقالِ ولا يشربون الشايَ.

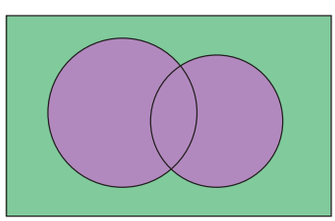
جـ) اكتبْ أسماءَ الطلّابِ الذين يشربون عصيرَ البرتقالِ والشايَ معًا.



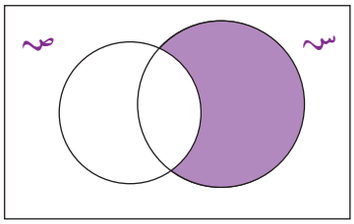
د) أكمِلِ الجملةَ: {فهدٌ، محمّدٌ، خالدٌ} هي مجموعةُ الطلّابِ الذين يشربون ..... ولا يشربون ..... .

هـ) ما الذي يُميِّزُ طلّابَ المجموعةِ {سامي، عليٌّ}.

تعلَّمْ المجموعةُ الشاملةُ ومجموعةُ الفرقِ والمجموعةُ المتمِّمةُ



تُسمّى مجموعةُ طلّابِ الفصلِ **مجموعةً شاملةً**. وغالبًا ما يُرمَزُ إليها بالرمزِ ش ونُمثِّلُها بمستطيلٍ. بينما نُمثِّلُ المجموعاتِ الجزئيّةَ بمنحنياتٍ مغلَقةٍ داخلَ المستطيلِ. تختلفُ المجموعةُ الشاملةُ من مسألةٍ إلى أخرى. قد تكونُ مجموعةَ الأعدادِ الكلّيّةِ أو مجموعةَ أشهرِ السنةِ أو غيرَها ... .



في فقرةِ «استكشِفْ»، لتكنْ سـ مجموعةَ مفضِّلي الشايِ، صـ مجموعةَ مفضِّلي عصيرِ البرتقالِ. مجموعةُ الطلّابِ الذين يُفضِّلون الشايَ فقط دونَ عصيرِ البرتقالِ تُسمّى **مجموعةَ الفرقِ** وتُكتَبُ على الصورةِ سـ − صـ. وهي ممثَّلةٌ بالمنطقةِ المظلَّلةِ.

فتكونُ: سـ − صـ هي مجموعةَ العناصرِ التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى صـ.

مثالٌ (١)

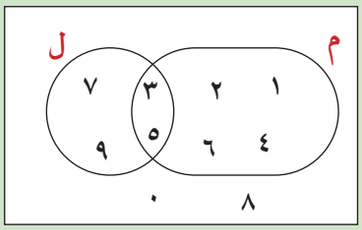
لتكنْ شـ = مجموعةَ الأرقامِ في النظامِ العشريِّ، من الشكلِ أدناه أوجِدْ بذكرِ العناصرِ كلًّا من:

(أ) شـ، ل، م (ب) م − ل (جـ) شـ − ل

(أ) شـ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}، م = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، ل = {٣، ٥، ٧، ٩}

(ب) م − ل = {١، ٢، ٤، ٦}

(جـ) شـ − ل = {٠، ١، ٢، ٤، ٦، ٨}



حاوِلْ أن تحلَّ

١ في المثالِ أعلاه، أوجِدْ (أ) ل − م ، ماذا تُلاحِظُ؟

(ب) م − شـ ، ماذا تُلاحِظُ؟

مثالٌ (٢)

لتكنْ ع = {٣، ٤، ٥} أعطِ مجموعةَ ج بحيث:

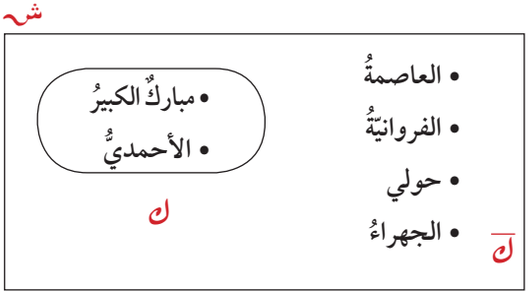
ع − ج = ع.

هناك أكثرُ من حلٍّ. يجبُ ألّا تتضمّنَ المجموعةُ ج عناصرَ تنتمي إلى ع أي ع ∩ ج = ϕ.

إجابةٌ ممكنةٌ: ج = {٧، ٨}

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ في المثالِ (٢)، أوجِدْ كلًّا من: ع − ϕ، ϕ − ع



تُقسَّمُ دولةُ الكويتِ إلى ٦ محافظاتٍ.

شـ = {الأحمديُّ، العاصمةُ، الفروانيّةُ، حولي، الجهراءُ، مباركُ الكبيرُ}.

لتكنْ ك مجموعةَ المحافظاتِ الأكثرِ قربًا من الحدودِ الجنوبيّةِ، إذًا

ك = {الأحمديُّ، مباركُ الكبيرُ}.

المجموعةُ التي تنتمي عناصرُها إلى المجموعةِ شـ ولا تنتمي إلى المجموعةِ ك هي {حولي، الجهراءُ، الفراونيّةُ، العاصمةُ}. تُسمّى هذه المجموعةُ **متمِّمةَ المجموعةِ** ك ونرمزُ إليها بالرمزِ $\overline{ك}$ وتُقرَأُ متمِّمةَ المجموعةِ ك.

متممةُ المجموعةِ ك هي $\overline{ك}$ = مجموعةَ العناصرِ التي تنتمي إلى شـ ولا تنتمي إلى ك.

لاحِظْ أنّ:

١ ك ∩ $\overline{ك}$ = ∅ ٢ ك ∩ شـ = ك ٣ $\overline{ك}$ ∩ شـ = $\overline{ك}$

٤ ك ∪ $\overline{ك}$ = شـ ٥ متممة $\overline{ك}$ = $\overline{\overline{ك}}$ = ك

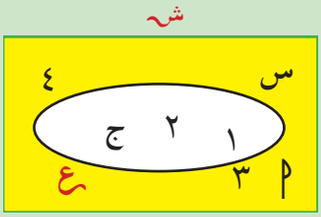
مثالٌ (٣)

لنأخذِ المجموعةَ شـ = {س، ج، أ، ١، ٢، ٣، ٤} والمجموعةَ عـ = {ج، ١، ٢}

(أ) مثِّلْ كلًّا من المجموعتين بمخطَّطِ فن ثمّ بيِّنْ أنّ عـ ⊇ شـ.

(ب) أوجِدْ $\overline{عـ}$ ثمّ ظلِّلِ المنطقةَ التي تُمثِّلُها.

الحلُّ:



(أ) بما أنّ كلَّ عنصرٍ من عـ ينتمي إلى شـ، إذًا عـ ⊇ شـ

(ب) ومتمِّمةُ عـ هي $\overline{عـ}$ = {س، أ، ٣، ٤}

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ إذا كانَتْ شـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}، سـ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}،

أوجِدْ $\overline{سـ}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ هل يُمكِنُ أن تتساوى مجموعةٌ ومتمِّمتُها؟ فسِّرْ.

٢ هل يُمكِنُ أن تكونَ المجموعةُ المتمِّمةُ خاليةً؟ فسِّرْ.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

لتكنْ شـ = مجموعةَ الأرقامِ في النظامِ العشريِّ،

سـ = {٠، ٢، ٤، ٦}، صـ = {١، ٢، ٣، ٤}.

أ أوجِدْ كلًّا من

١ $\overline{سـ}$ ، $\overline{صـ}$.

٢ $\overline{سـ}$ ∩ $\overline{صـ}$، $\overline{سـ}$ ∪ $\overline{صـ}$.

٣ سـ ∪ صـ ثم ($\overline{سـ ∪ صـ}$).

٤ سـ ∩ صـ ثم ($\overline{سـ ∩ صـ}$).

ب قارِنْ بينَ ($\overline{سـ ∪ صـ}$)، $\overline{سـ}$ ∩ $\overline{صـ}$.

جـ قارِنْ بينَ ($\overline{سـ ∩ صـ}$)، $\overline{سـ}$ ∪ $\overline{صـ}$.

ملاحظةٌ: ما توصّلْتَ إليه في ب، جـ يُدعى قانونَ دي مورغان (DE MORGAN).

العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ
Operations With Real Numbers

شاشاتُ التلفزيونِ

تُقاسُ شاشاتُ التلفازِ بأخذِ قياساتِ قطرِها وليسَ كما يُشاعُ بقياسِ ارتفاعِ الشاشةِ أو طولِها أي أنّ شاشةَ التلفازِ ٣٠ بوصةً لا يُمكِنُ أن يكونَ عرضُها (ارتفاعُها) أو طولُها ٣٠ بوصةً.

بالإضافةِ إلى ذلك، نستطيعُ أن نقيسَ قطرَ الشاشةِ باستخدامِ نسبٍ ومعدَّلاتِ الصورةِ المتنوِّعةِ: (٤:٣، ٣:٢، ١٦:٩، ٨٥,١:١، ٣٩,١:٢)

وأنواعُ التلفزةِ الشائعةُ هي ذاتُ النسبِ ٤:٣ و١٦:٩. للتلفازِ التقليديِّ نسبةٌ تُساوي ٣:٤ = ٥ وهذا يعني أنّ نسبةَ ارتفاعِ الشاشةِ إلى قطرِها تُساوي $\frac{٣}{٥}$ ونسبةُ طولِها إلى قطرِها تُساوي $\frac{٤}{٥}$. ومن ناحيةٍ أخرى، إنّ نسبةَ نوعٍ آخرَ من التلفزيوناتِ هي ١٦:٩ = $\sqrt{٣٣٧}$:٧.

هل $\sqrt{٣٣٧}$:٧ هو عددٌ صحيحٌ؟ فالآلةُ الحاسبةُ تُعطيك ١٨,٣٥٧٥٥٩٧٥١ والحاسوبُ يُعطي ١٨,٣٥٧٥٥٩٧٥٠٦٨٥٨١٩٢٩.

في الحقيقةِ الجذرُ التربيعيُّ للعددِ ٣٣٧ ليسَ عددًا صحيحًا لأنّه عددٌ غيرُ نسبيٍّ. لتمثيلِ النسبةِ ١٦:٩ = $\sqrt{٣٣٧}$:٧ نحتاجُ إلى الأعدادِ النسبيّةِ وغيرِ النسبيّةِ أو بشكلٍ عامٍّ إلى الأعدادِ الحقيقيّةِ.

١ هل تستطيعُ إيجادَ طولِ وارتفاعِ شاشةِ تلفازٍ قطرُها ٣٠ بوصةً؟

٢ أوجِدِ الارتفاعَ والطولَ التقريبيَّ لتلفازٍ قطرُ شاشتِه ٣٠ بوصةً ونسبتُه ١٦:٩ = $\sqrt{٣٣٧}$:٧.

١ـ٣

الجذورُ التربيعيّةُ والأعدادُ غيرُ النسبيّةِ

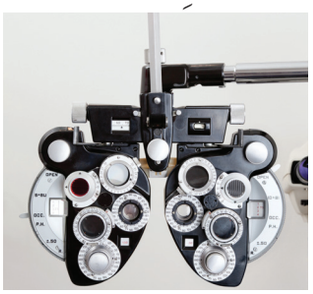
Square Roots and Irrational Numbers

سوف تتعلّمُ

- تحديدَ الجذورِ التربيعيّةِ التي هي أعدادٌ غيرُ نسبيّةٍ.

من الاستخدامات

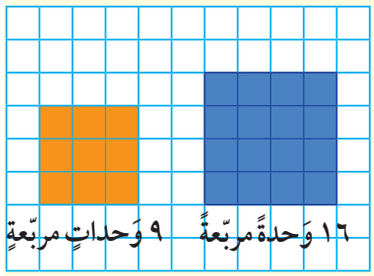
- يُدركُ صانعو الأدوات البصريّةِ الفرقَ بينَ الجذرِ التربيعيِّ غيرِ النسبيِّ والجذرِ التربيعيِّ النسبيِّ، وهم يستخدمون الجذورَ التربيعيّةَ عندَ التعاملِ مع الحالاتِ المعقّدةِ جدًّا.



صلةُ الدرسِ ◄ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ عن المربّعاتِ الكاملةِ وجذورِها التربيعيّةِ. ستتعلّمُ في هذا الدرسِ عن جذورٍ تربيعيّةٍ أخرى وأنواعٍ أخرى من الأعدادِ. ►

استكشِفْ: الجذورُ التربيعيّةُ والأعدادُ غيرُ النسبيّةِ

هل ذلك عددٌ نسبيٌّ؟ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** آلةٌ حاسبةٌ، شبكةُ مربّعاتٍ



تذكَّرْ أنّ العددَ النسبيَّ هو نسبةٌ مثلُ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ حيث أ، ب عددان صحيحان، (ب ≠ ٠).

١ ارسمْ على شبكةِ مربّعاتٍ مربّعًا يكونُ الأقربَ إلى ١٠ وَحداتٍ مربّعةٍ.

٢ ارسمِ المربّعَ الأكبرَ الذي يأتي تاليًا.

٣ أوجِدْ طولَ ضلعِ كلٍّ من المربّعين.

٤ ابحثْ عن عددٍ نسبيٍّ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ بحيث يكونُ $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{٢}$ = ١٠ . استخدِمِ الآلةَ الحاسبةَ. سجِّلِ الأعدادَ التي استخدمْتَها ومربّعَ كلٍّ منها.

٥ هل وجدْتَ عددًا نسبيًّا مربّعُه يُساوي ١٠؟ إذا لم يكنْ كذلك، فما العددُ النسبيُّ الأقربُ الذي وجدْتَه؟

تعلَّمْ: الجذورُ التربيعيّةُ والأعدادُ غيرُ النسبيّةِ

أنت تعلمُ أنّ $(٣)^{٢}$ = ٩؛ $(-٣)^{٢}$ = ٩ وأنّه يوجَدُ جذران تربيعيّان للعددِ ٩ هما $+\sqrt{٩}$ = +٣، $-\sqrt{٩}$ = −٣.

يُعرَفُ الجذرُ التربيعيُّ الموجَبُ **بالجذرِ التربيعيِّ الأساسيِّ**، ويُسمّى الجذرُ التربيعيُّ السالبُ **بالجذرِ التربيعيِّ السالبِ**.

الجذرُ التربيعيُّ الأساسيُّ ($\sqrt{\ }$)	الجذرُ التربيعيُّ السالبُ ($-\sqrt{\ }$)	الجذران التربيعيّان ($\pm\sqrt{\ }$)
$\sqrt{٩}$ = ٣	$-\sqrt{٩}$ = −٣	$\pm\sqrt{٩}$ = ±٣

يجبُ أن تُدرِكَ أن لا معنى لإيجادِ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ سالبٍ.

للجذرين التربيعيّين لعددٍ ما القيمةُ المطلَقةُ نفسُها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ الجذرُ التربيعيُّ الأساسيُّ
Principal Square Root

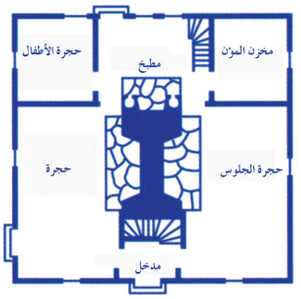
◄ جذرٌ تربيعيٌّ سالبٌ
Negative Square Root

◄ عددٌ غيرُ نسبيٍّ
Irrational Number

تذكَّرْ

الجذرُ التربيعيُّ للعددِ النسبيِّ الموجَبِ س هو العددُ الذي إذا ضُرِبَ في نفسِه كانَ الناتجُ س.

مثالٌ (١)



إليك مخطَّطَ قطعة أرضٍ مربّعةِ الشكلِ مساحتُها ٢٨٩ م^{٢}. ما طولُ ضلعِ هذه الأرضِ؟

نفرضُ أنّ طولَ الأرضِ المربّعةِ ل مترٍ.

مساحةُ الأرضِ = ل × ل = ل^{٢}

أي أنّ ل^{٢} = ٢٨٩

ل^{٢} − ٢٨٩ = ٠

(ل − ١٧)(ل + ١٧) = ٠

ل − ١٧ = ٠ أو ل + ١٧ = ٠

ل = ١٧ أو ل = −١٧

لا يُمكِنُ قبولُ العددِ −١٧ لأنّ الطولَ لا يُمكِنُ أن يكونَ عددًا سالبًا.

∴ طولُ ضلعِ قطعةِ الأرضِ هو ١٧م.

حلٌّ آخرُ

مساحةُ الأرضِ = ل × ل = ل^{٢}

∴ ل^{٢} = ٢٨٩

∴ ل^{٢} = $\pm\sqrt{٢٨٩}$

= ± ١٧

لا يُمكِنُ قبولُ العددِ −١٧ لأنّ الطولَ لا يكونُ عددًا سالبًا.

∴ طولُ ضلعِ قطعةِ الأرضِ = ١٧م

حاوِلْ أن تحلَّ

١ مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ متطابقُ الضلعين مساحتُه ٧٢ وَحدةً مربّعةً. ما طولُ ضلعِ القائمةِ؟

تعلمُ أنّ **مجموعةَ الأعدادِ النسبيّةِ ن = $\{\frac{أ}{ب} : أ ، ب \in صـ ، ب \neq ٠\}$** وأنّ الأعدادَ النسبيّةَ يُمكِنُ كتابتُها في صورةِ أعدادٍ عشريّةٍ (أو كسورٍ عشريّةٍ) منتهيةٍ مثل ٢٥ , ٣، ٠,٤٨٧ أو بصورةِ أعدادٍ عشريّةٍ دوريّةٍ (أو كسورٍ عشريّةٍ دوريّةٍ) مثل $٢,\overline{١٦}$، $٠,\overline{٣}$.

وهناك مجموعةٌ أخرى من الأعدادِ تُسمّى أعدادًا غيرَ نسبيّةٍ وهي أعدادٌ لا يُمكِنُ كتابتُها على الصورةِ $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب عددان صحيحان، ب عددٌ غيرُ صفريٍّ، مثلُ $\sqrt{٥}$، $\sqrt{٢}$، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$. ومثلُ الأعدادِ العشريّةِ التي أرقامُها العشريّةُ لا تنتهي ولا تتكرّرُ مثلُ π = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٩... فالأرقامُ العشريّةُ في π لا تنتهي ولا تتكرّرُ. لذا π عددٌ غيرُ نسبيٍّ.

والأعدادُ غيرُ النسبيّةِ من الممكنِ أن تتضمّنَ كسورًا عشريّةً ذاتَ نمطٍ في كتابةِ أرقامِها مثلًا ٠,٠٢٠٢٢٠٢٢٢٠٢٢٢٢...

مثالٌ (٢)

استخدِمِ الآلةَ الحاسبةَ لتُحدِّدَ ما إذا كانَ كلُّ جذرٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي عددًا نسبيًّا أم غيرَ نسبيٍّ.

(أ) $-\sqrt{٧٢٣}$ (ب) $\sqrt{٢٥٦}$

باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ وعن طريقِ الزرِّ $\sqrt{x}$:

(أ) $-\sqrt{٧٢٣}$ = −٢٦,٨٨٨٦٥٩٣٢ أرقامُ الكسرِ العشريِّ غيرُ منتهيةٍ وغيرُ مكرَّرةٍ، لذا $-\sqrt{٧٢٣}$ عددٌ غيرُ نسبيٍّ.

(ب) $\sqrt{٢٥٦}$ = ١٦ عددٌ نسبيٌّ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ هل $\sqrt{٢}$ هو عددٌ نسبيٌّ؟ هل $\sqrt{٣}$ هو عددٌ نسبيٌّ؟

ما رأيُك؟

من خواصِّ الجذورِ التربيعيّةِ

إذا كانَ أ، ب عددين موجَبين فإنّ

- $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$
- $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

مثالٌ: $\sqrt{٤٩ \times ٩} = \sqrt{٤٩} \times \sqrt{٩} = ٧ \times ٣ = ٢١$

$\sqrt{٠,٣٦} = \sqrt{\frac{٣٦}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$

أوجِدْ $\sqrt{٢٥٠٠}$

حسنٌ يُفكِّرُ...

ربّما يُمكِنُ تحليلُ ٢٥٠٠ إلى عواملَ تكونُ مربّعاتٍ كاملةً.

٢٥٠٠ = ١٠٠ × ٢٥. بالتالي:

$\sqrt{٢٥٠٠} = \sqrt{١٠٠ \times ٢٥}$

$= \sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٢٥}$

$= ١٠ \times ٥ = ٥٠$

أحمدُ يُفكِّرُ...

سأكتفي باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

$\sqrt{٢٥٠٠} = ٥٠$

ما رأيُك؟

١ وضِّحْ كيف استخدمَ حسنٌ حقيقةَ أنّه يُمكِنُ تحليلُ ٢٥٠٠ إلى مربّعاتٍ كاملةٍ.

٢ استخدمَ حسنٌ الخاصّيّةَ التاليةَ $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$. أعطِ مثالًا تُبرهِنُ فيه أنّ هذه الخاصّيّةَ لا تنطبقُ على عمليّةِ الجمعِ: $\sqrt{أ + ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ وضِّحِ الفرقَ بينَ الجذرِ التربيعيِّ الأساسيِّ والجذرِ التربيعيِّ السالبِ.

٢ وضِّحِ الفرقَ بينَ $-\sqrt{٩}$ و $\sqrt{-٩}$. ماذا تُعطي الآلةُ الحاسبةُ عندما تُدخِلُ $\sqrt{-٩}$؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (١-٣)

يُمكِنُك أن توجِدَ عددَ الثواني التي يستغرقُها رقّاصُ الساعةِ ليتأرجحَ جيئةً وإيابًا. أوجِدْ أوّلًا الجذرَ التربيعيَّ لطولِ الرقّاصِ بالأمتارِ، ثمّ ضاعِفِ الناتجَ. كم من الوقتِ يستغرقُ رقّاصُ ساعةٍ طولُه ١,٢ م ليتأرجحَ.

افهمْ

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟ .....

٢ ما طولُ رقّاصِ الساعةِ؟ .....

٣ ضَعْ خطًّا تحتَ الخطواتِ التي استخدمْتَها لإيجادِ عددِ الثواني.

خطِّطْ

٤ كيف يُمكِنُك إيجادُ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ ما باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ؟ .....

٥ كيف يُمكِنُك مضاعَفةُ عددٍ ما؟ .....

حُلَّ

٦ استخدِمِ المصطلحاتِ الأساسيّةَ لإيجادِ الجذرِ التربيعيِّ لـ ١,٢ . قرِّبِ الإجابةَ إلى أقربِ جزءٍ من ألفٍ. .....

٧ ضاعِفِ الجذرَ التربيعيَّ لـ ١,٢ . .....

٨ كم من الوقتِ يستغرقُ رقّاصُ ساعةٍ طولُه ١,٢ م ليتأرجحَ جيئةً وإيابًا؟ .....

تحقَّقْ

٩ لِمَ من المهمِّ اتّباعُ الخطواتِ بترتيبٍ معيَّنٍ؟ ماذا يحدثُ إذا عكسْتَ الترتيبَ؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ كم من الوقتِ يستغرقُ رقّاصُ ساعةٍ طولُه ٩,٦ أمتارٍ ليتأرجحَ جيئةً وإيابًا؟

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **المجلّةُ**: هل الجذرُ التربيعيُّ للعددِ ٢٠٠٠ يُساوي ضعفَ الجذرِ التربيعيِّ للعددِ ١٠٠٠؟ وضِّحْ إجابتَك.

.....

.....

.....

٢ **التقديرُ**: باستخدامِ الصيغةِ م = ٧٫٦ $\sqrt{ع}$، حيث م = المسافةُ بالكيلومتراتِ إلى خطِّ الأفقِ، ع = الارتفاعُ بالأمتارِ لعيني الناظرِ عن الأرضِ، يُمكِنُك إيجادُ إلى أيِّ مسافةٍ يمتدُّ مدى نظرِك إلى خطِّ الأفقِ. إذا تسلّقَ سامي شجرةً بحيث أصبحَتْ عيناه على ارتفاعِ ٩٫٧٥ م فوقَ الأرضِ، فعلى أيِّ مسافةٍ يمتدُّ مدى نظرِه؟ .....

.....

.....

٣ **التواصلُ**: يقعُ المطعمُ عندَ قمّةِ برجِ إيفل Eiffel في باريسَ على ارتفاعِ ٣٠٠ مترٍ. استخدِمِ الصيغةَ الواردةَ في التمرينِ ٢ لتحديدِ المسافةِ التي يمتدُّ عليها مدى نظرِ زبائنِ هذا المطعمِ. وإذا كانَ ارتفاعُ برجِ إيفلِ ضعفَ ذلك، فهل تُصبِحُ المسافةُ التي يمتدُّ عليها مدى نظرِ زبائنِ المطعمِ ضعفَ ما كانَتْ عليه سابقًا؟ وضِّحْ إجابتَك. .....

.....

.....

٤ **التفكيرُ الناقدُ**: اكتبِ المربّعاتِ العشرةَ الأولى الكاملةَ وعواملَ كلٍّ منها. أمعِنِ النظرَ في عددِ عواملِ كلٍّ منها. ماذا يُمكِنُك أن تستنتجَ حولَ عددِ عواملِ كلٍّ من المربّعاتِ الكاملةِ؟ .....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ – ٤

الأعدادُ الحقيقيّةُ (المقارنةُ والترتيبُ)

Real Numbers (Comparing and Ordering)

سوف تتعلّمُ

- مقارنةَ الأعدادِ الحقيقيّةِ وترتيبَها.

من الاستخدامات

- تُستخدَمُ في أمورٍ كثيرةٍ مثلِ عدِّ الفلوسِ والدنانيرِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

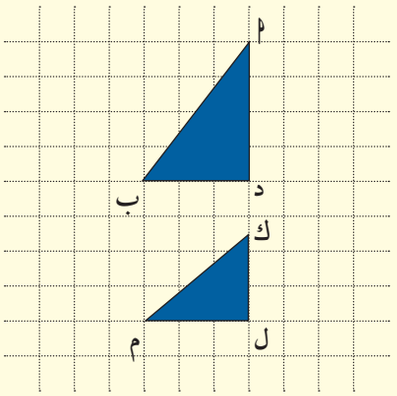
- الأعدادُ الحقيقيّةُ Real Numbers
- الفتراتُ Intervals
- فترةٌ مغلَقةٌ Closed Interval
- فترةٌ مفتوحةٌ Open Interval
- فترةٌ نصفُ مغلَقةٍ Half – Closed Interval
- فترةٌ نصفُ مفتوحةٍ Half – Open Interval

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ في الدرسِ السابقِ الأعدادَ غيرَ النسبيّةِ. في هذا الدرسِ سوف تدرسُ الأعدادَ الحقيقيّةَ.►

استكشِفْ: الأعدادُ الحقيقيّةُ

البطاقاتُ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** آلةٌ حاسبةٌ

١ ا د ب مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ.



أ حدِّدْ أطوالَ أضلاعِ الزاويةِ القائمةِ بوحداتِ الطولِ.

ب أوجِدْ طولَ الوترِ باستخدامِ نظريّةِ فيثاغورث.
هل طولُ الوترِ هو عددٌ نسبيٌّ؟

٢ ك ل م مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ.

أ حدِّدْ أطوالَ أضلاعِ الزاويةِ القائمةِ بوحداتِ الطولِ.

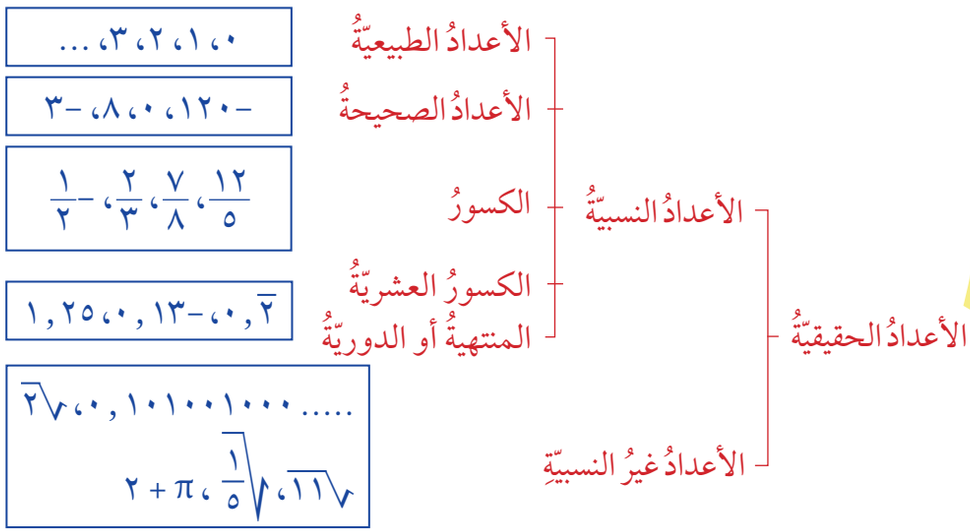
ب أوجِدْ طولَ الوترِ.

جـ استخدِمِ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ طولِه.
هل هذا الطولُ هو عددٌ نسبيٌّ؟

تعلَّمْ: الأعدادُ الحقيقيّةُ: مقارنتُها وترتيبُها

اتّحادُ مجموعتي الأعدادِ النسبيّةِ والأعدادِ غيرِ النسبيّةِ يُشكِّلُ مجموعةً تُسمّى مجموعةَ **الأعدادِ الحقيقيّةِ** أي أنّ ن ∪ نَ = ح.

يُوضِّحُ المخطَّطُ التالي العلاقاتِ بينَ مجموعاتِ الأعدادِ.



مثالٌ (١)

قارِنْ بينَ العددين $\overline{١٤}\,,٣$ ، π

$\overline{١٤}\,,٣ = ٣,١٤١٤١٤....$ $\quad$ $\pi \approx ٣,١٤١٥٩$

إذًا $\pi > \overline{١٤}\,,٣$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ استخدِمِ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sqrt{٣}$ ثمّ قارِنْ بينَ $\sqrt{٣}$ ، ١,٧٣ .

إنّ مقارنةَ الأعدادِ الحقيقيّةِ وترتيبَها مشابهٌ لمقارنةِ الأعدادِ الصحيحةِ وترتيبِها.

مثالٌ (٢)

رتِّبْ تصاعديًّا الأعدادَ التالية: π ، $\sqrt{١٧}$ ، $٣\frac{٥}{٨}$

$\pi \approx ٣,١٤١٥$ $\quad$ $٣\frac{٥}{٨} = ٣,٦٢٥$

إذًا $\pi < ٣\frac{٥}{٨}$

$\sqrt{١٦} < \sqrt{١٧} < \sqrt{٢٥}$ $\quad$ $٤ < \sqrt{١٧} < ٥$

إذًا $٤ < \sqrt{١٧}$ فيكونُ $\sqrt{١٧} < ٣\frac{٥}{٨}$

إذًا الترتيبُ التصاعديُّ π، $٣\frac{٥}{٨}$، $\sqrt{١٧}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ رتِّبْ تنازليًّا الأعدادَ التالية: $\pi٢$، $\sqrt{٢٧}$ ، $\overline{٥}\,,٦$.

الفترةُ هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيّةِ الواقعةِ بينَ عددين مختلفين، ويمكنُ أن تتضمّنَ هذين العددين أو أحدَهما حسب تصنيفِ الفترةِ . حيث يُعبَّرُ عن الفترةِ بقوسين يوضَعُ بداخلِهما عددان، الأصغرُ يُمثِّلُ بدايةَ الفترةِ والأكبرُ يُمثِّلُ نهايةَ الفترةِ مثلًا:

$[-٥\,،١]$، $(-٤\,،٧)$، $(-٦\,،٤]$، $[-٢\,،٣)$

وتُصنَّفُ الفتراتُ إلى ثلاثةِ أنواعٍ:

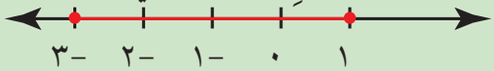
الفتراتُ المغلَقةُ: [أ، ب] هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي تقعُ بينَ أ، ب بما فيها أ، ب؛ أي الأعدادُ الحقيقيّةُ الأكبرُ من أو تُساوي أ وأصغرُ من أو تُساوي ب.

مثالٌ (٣)

اشرحْ معنى الفترةِ $[-٣\,،١]$ ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

$[-٣\,،١]$: هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي تقعُ بينَ -٣، ١ وتضمُّ أيضًا العددين -٣، ١ .

أو $[-٣\,،١]$: هي مجموعةُ الأعدادِ الأكبرِ من أو تُساوي -٣ وأصغرُ من أو تُساوي ١ .



ويُمثِّلُ طرفي الفترةِ المغلقةِ على خطِّ الأعدادِ بدوائرَ مظلَّلةٍ.

معلومةٌ مفيدةٌ

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ بدونِ الصفرِ يُرمَزُ إليها ح* أي أنّ

ح* = ح - {٠}

كذلك ن* = ن - {٠}

ص* = ص - {٠}

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

بما أنّ $٣\frac{٥}{٨} < ٣\frac{١}{٢}$

$٣\frac{١}{٢} > \pi$

إذًا $٣\frac{٥}{٨} > \pi$

استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ

لإيجادِ قيمةِ العددِ $٣\frac{٥}{٨}$ انقرْ بالترتيبِ على: 3 + ▣ واكتبْ ٥ في خانةِ البسطِ، ٨ في خانةِ المقامِ ثمّ انقرْ على = فيظهرَ على الشاشةِ: 3.625.

لإيجادِ قيمةٍ تقريبيّةٍ لِـ $\sqrt{١٧}$ انقرْ على: √ 17 ▶ = فيظهرَ على الشاشةِ: 4.123105626.

لإيجادِ قيمةٍ تقريبيّةٍ لِـ $\pi٢$ انقرْ على: 2 × π = فيظهرَ على الشاشةِ: 6.283185307.

حاوِلْ أن تحلَّ

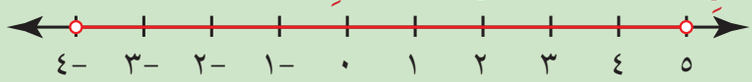
٣ مثِّلِ الفترةَ $[-\sqrt{٤}، \sqrt{١٦}]$ على خطِّ الأعدادِ.

الفتراتُ المفتوحةُ: (أ، ب) هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي تقعُ بينَ أ، ب فقط.

أي الأعدادُ الحقيقيّةُ الأكبرُ من أ، أصغرُ من ب.

مثالٌ (٤)

مثِّلِ الفترةَ (-٤، ٥) على خطِّ الأعدادِ.



ونُمثِّلُ طرفي الفترةِ المفتوحةِ على خطِّ الأعدادِ بدوائرَ غيرِ مظلَّلةٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ اكتبِ الفترةَ التي تُمثِّلُ مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي هي أصغرُ من ٥ وأكبرُ من -١. ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

الفتراتُ نصفُ المفتوحةِ أو نصفُ المغلَقةِ:

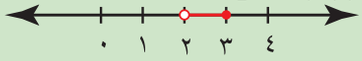
(أ، ب]: هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي تقعُ بينَ أ، ب ومن ضمنِها ب.

[أ، ب): هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ التي تقعُ بينَ أ، ب ومن ضمنِها أ.

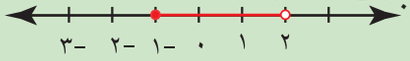
مثالٌ (٥)

مثِّلِ الفتراتِ (٢، ٣]، [-١، ٢) على خطِّ الأعدادِ.

(أ) (٢، ٣]:



(ب) [-١، ٢):



حاوِلْ أن تحلَّ

٥ مثِّلِ الفتراتِ (-٤، ٢]، [-١، ١) على خطِّ الأعدادِ.

فتراتٌ تتضمّنُ ∞، -∞

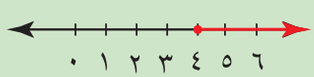
[أ، ∞) هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ الأكبرِ من أ ومن ضمنِها أ

(-∞، أ] هي مجموعةُ كلِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ الأصغرِ من أ ومن ضمنِها أ

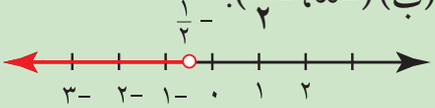
مثالٌ (٦)

مثِّلِ الفتراتِ [٤، ∞)، $(-\infty، -\frac{١}{٢})$ على خطِّ الأعدادِ.

(أ) [٤، ∞):



(ب) $(-\infty، -\frac{١}{٢})$:



حاوِلْ أن تحلَّ

٦ اكتبِ الفترةَ التي تُمثِّلُ كلَّ الأعدادِ الحقيقيّةِ الأصغرِ من ٣.

معلومةٌ مفيدةٌ

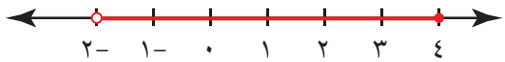
الرمزُ ∞ يُقرَأُ ما لا نهايةَ

تحقَّقْ من فهمِك

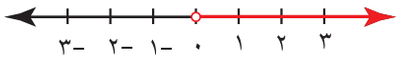
١ المجموعةُ التي أعدادُها أكبرُ من أو تُساوي ١ وأصغرُ من أو تُساوي ٢. حدِّدْ هذه الفترةَ، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

٢ حدِّدِ الفترةَ الممثَّلةَ بخطِّ الأعدادِ أدناه.

(أ)



(ب)



٣ صنِّفْ كلًّا من الأعدادِ التاليةِ إلى أعدادٍ نسبيّةٍ وأعدادٍ غيرِ نسبيّةٍ $\sqrt{٣}$، ٢-، $\overline{١٦}$, ٠، $\pi - ٣$، $\frac{١}{\sqrt{٥}}$، ٤٩٥ , ٧، $\pi ٢ -$، $\sqrt{٤ + ٩}$، صفرٌ

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **الحسُّ العدديُّ**: اكتبْ خمسَ قيمٍ لـ ن بحيث يكونُ $\sqrt{ن}$ عددًا نسبيًّا.

.....

٢ **تحليلُ الخطأِ**: قدّرَ أحدُ الطلّابِ $\sqrt{٩ + ١٦}$ وحصلَ على الإجابةِ ٧.
ما الخطأُ الذي وقعَ فيه الطالبُ؟

.....

.....

٣ إذا كانَتْ ١ ⩽ س ⩽ ٣ اكتبِ الفترةَ.

.....

.....

٤ إذا كانَتْ س ⩽ ٥- اكتبِ الفترةَ.

.....

٥ هل يُمكِنُ أن تكونَ الفترةُ مجموعةً خاليةً؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ – ٥

القيمةُ المطلَقةُ
Absolute Value

سوف تتعلّمُ
- إيجادَ القيمةِ المطلَقة.
- حلَّ معادلةٍ تتضمَّنُ القيمةَ المطلَقةَ.

من الاستخدامات
- تُستخدَمُ القيمُ المطلَقةُ في المعاملاتِ المصرفيّةِ.

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ كيفيّةَ إيجادِ القيمةِ المطلَقةِ لعددٍ نسبيٍّ. في هذا الدرسِ، سوف تقومُ بإيجادِ القيمةِ المطلَقةِ لعددٍ حقيقيٍّ وتحلُّ معادلاتٍ تتضمّنُ القيمةَ المطلَقةَ. ►

استكشِفْ القيمُ المطلَقةُ

أيُّهما أقربُ على خطِّ الأعدادِ؟

١ (أ) يقولُ سالمٌ إنّه يقفُ على بعد ثلاثِ وَحداتٍ إلى يمينِ الصفرِ ويقولُ أحمدُ إنّه يقفُ على بعد وَحدةٍ واحدةٍ إلى يسارِ الصفرِ. أيُّهما أقربُ إلى الصفرِ؟

(ب) يقولُ سالمٌ إنّه يقفُ على بعد ٤ وَحداتٍ إلى يمينِ الصفرِ ويقولُ أحمدُ إنّه يقفُ على بعد ٤ وَحداتٍ إلى يسارِ الصفرِ. أيُّهما أقربُ إلى الصفرِ؟

وبالتالي المسافةُ بينَ ٤، صفرٍ تُساوي المسافةَ بينَ (–٤)، صفرٍ.

تعلَّمْ القيمةُ المطلَقةُ

القيمةُ المطلَقةُ لعددٍ حقيقيٍّ هي المسافةُ على خطِّ الأعدادِ بينَ هذا العددِ والصفرِ. إيجادُ القيمةِ المطلَقةِ للعددِ الحقيقيِّ يتشابهُ مع إيجادِ القيمةِ المطلَقةِ للعددِ النسبيِّ.

فمثلًا $|-٠,\overline{٨١}| = |٠,\overline{٨١}| = |-٠,٥| = |٠,٥| = |-\frac{٢}{٣}| = \frac{٢}{٣}$.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
◄ قيمةٌ مطلَقةٌ
Absolute Value

مثالٌ (١)

أوجِدْ كلًّا من: (أ) $|\pi - ٢|$ (ب) $|\sqrt{١٦ - ٩}|$

(أ) $|\pi - ٢| \approx |٣,١٤ - ٢| \approx |-١,١٤| = ١,١٤$

(ب) $|\sqrt{١٦ - ٩}| = |\sqrt{٧}| = \sqrt{٧}$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ كلًّا من:

(أ) $|-٣١,٢١|$ (ب) $|-٤|-|٣-|$ (جـ) $|\pi - ٤|$

تذكَّرْ
$\pi \approx ٣,١٤$

خواصُّ القيمةِ المطلَقةِ : لكلِّ س، ص ∈ ح

$|س \times ص| = |س| \times |ص|$

$\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ حيث ص ≠ ٠

$|س - ص| = |ص - س|$

مثالٌ (٢)

أوجِدْ قيمةَ |٢س| – ٦، إذا كانَتْ س = ٤.

|٢س| – ٦ = |٢ × (٤)| – ٦ — عوِّضْ عن قيمةِ س بـ ٤

= |٨| – ٦ — بسِّطِ الضربَ

= ٨ – ٦ — أوجِدِ القيمةَ المطلَقةَ ثمّ اطرحْ

= ٢

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ قيمةَ:

|س + ٢| + |–٧| إذا كانَتْ س = –٣.

استخدامُ القيمةِ المطلَقةِ في حلِّ معادلةٍ مع متغيِّرٍ:

نستطيعُ أن نُعرِّفَ أيضًا القيمةَ المطلَقةَ على الشكلِ الآتي:

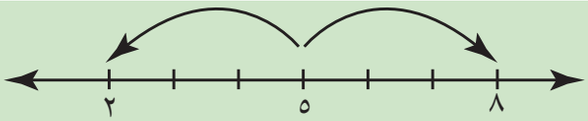
(أ) $|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كانَتْ } س \geqslant ٠ \\ -س & \text{إذا كانَتْ } س < ٠ \end{cases}$

(ب) |س| ≥ ٠ ∀ س ∈ ح

عندما نقولُ |س| = ٣ نعني أنّ المسافةَ بينَ س، صفرٍ تساوي ٣ وَحداتٍ، وعندما نقولُ |س – ٥| = ٣ نعني أنّ المسافةَ بينَ س، ٥ تساوي ٣ وَحداتٍ

أمثلةٌ

٣ حُلَّ المعادلةَ: |س – ٥| = ٣



س – ٥ = ٣ أو س – ٥ = –٣

س = ٨ أو س = ٢

يكونُ لدينا حلَّان لهذه المعادلةِ: س = ٨ أو س = ٢.

٤ حُلَّ المعادلةَ: |س + ١| = ٢

س + ١ = ٢ أو س + ١ = –٢

س = ١ أو س = –٣

يكونُ لدينا حلَّان لهذه المعادلةِ: س = ١ أو س = –٣.

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ |١ – ص| = ٤

٤ |٤ + م| = ٢

انتبِهْ

|٤س – ٣| ≠ ٤س – ٣

|٤س – ٣| ≠ ٤س + ٣

|س – ٢|٢ = |٢ – س|٢ ∀س ∈ ح

تحقَّقْ من فهمِك

١ حُلَّ المعادلةَ الآتيةَ: |٢س – ٥| = –١. ماذا تستنتجُ؟

٢ حُلَّ المعادلةَ الآتيةَ: |٣س + ٧| = صفرًا. ماذا تستنتجُ؟

١ – ٦

العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ وخواصُّها

Operations with Real Numbers and Their Properties

سوف تتعلّمُ

- تنفيذَ عمليّاتٍ على الأعدادِ الحقيقيّةِ.
- استخدامَ خواصِّ الأعدادِ الحقيقيّةِ.

من الاستخدامات

- يستخدمُ علماءُ الفضاءِ خواصَّ الأعدادِ الحقيقيّةِ لتبسيطِ تعابيرَ عدديّةٍ وحلِّ معادلاتٍ متعلّقةٍ بحركةِ الكواكبِ والنجومِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- خاصّيّةُ الإبدالِ The Commutative Law
- خاصّيّةُ التجميعِ The Associative Law
- خاصّيّةُ توزيعِ الضربِ على الجمعِ The Distributive Law of Multiplication Over Addition
- خاصّيّةُ توزيعِ الضربِ على الطرحِ The Distributive Law of Multiplication Over Substraction

صلةُ الدرسِ في الدروسِ السابقةِ رتّبْتَ الأعدادَ الحقيقيّةَ وقارنْتَها، وفي هذا الدرسِ سوف تُنفِّذُ عمليّاتٍ على هذه الأعدادِ وتستخدمُ خواصَّها.

استكشِفْ: العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ

الأدواتُ المستخدَمةُ: آلةٌ حاسبةٌ

١ أدخِلْ ١٢ + ٤ ÷ ٨ على الآلةِ الحاسبةِ. ما هو الناتجُ؟ هل تبدأُ الآلةُ الحاسبةُ بعمليّةِ الجمعِ أو القسمةِ؟

٢ أدخِلْ (١٢ + ٤) ÷ ٨. في رأيكِ، ما هي العمليّةُ التي ستبدأُ بها الآلةُ الحاسبةُ؟

٣ اذكرْ أيَّ العمليّاتِ يجبُ إجراؤُها أوّلًا على كلٍّ من:

(أ) ١ + ٢ × ٣ (ب) ١٥ – ٣ ÷ ٤ (جـ) (٣ – ١) ÷ ٢

تعلَّمْ: العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ وخواصُّها

تُحقِّقُ العمليّاتُ على الأعدادِ الحقيقيّةِ خواصَّ الإبدالِ، التجميعَ، وتوزيعَ الضربِ على الجمعِ، وعلى الطرحِ.

إذا فرضْنا أنّ أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيّةٌ فإنّ:

أ + ب = ب + أ	خاصّيّةُ الإبدالِ لعمليّةِ الجمعِ
أ × ب = ب × أ	خاصّيّةُ الإبدالِ لعمليّةِ الضربِ
أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ	خاصّيّةُ التجميعِ لعمليّةِ الجمعِ
أ × (ب × جـ) = (أ × ب) × جـ	خاصّيّةُ التجميعِ لعمليّةِ الضربِ
أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ	خاصّيّةُ توزيعِ الضربِ على الجمعِ
أ × (ب – جـ) = أ × ب – أ × جـ	خاصّيّةُ توزيعِ الضربِ على الطرحِ

يُمكِنُك تبسيطُ التعابيرِ العدديّةِ باستخدامِ خواصِّ العمليّاتِ: الإبدالِ، التجميعِ، التوزيعِ.

مثالٌ (١)

بسِّطْ $\frac{٥}{٣} \times \left(\frac{٨}{١٥} + \frac{٦}{٥} + \frac{١}{١٥}\right)$

$\frac{٥}{٣} \times \left(\frac{٨}{١٥} + \frac{٦}{٥} + \frac{١}{١٥}\right) = \frac{٥}{٣} \times \left(\frac{١}{١٥} + \frac{٦}{٥} + \frac{٨}{١٥}\right)$ خاصّيّةُ الابدالِ

$= \frac{٥}{٣} \times \left(\frac{٦}{٥} + \frac{٣}{١٥}\right)$ خاصّيّةُ التجميعِ ثمّ تبسيطٌ

$= \frac{٥}{٣} \times \left(\frac{٦}{٥} + \frac{٣}{٥}\right)$ الاختصارُ

$= \left(\frac{٥}{٣} \times \frac{٦}{٥}\right) + \left(\frac{٥}{٣} \times \frac{٣}{٥}\right)$ خاصّيّةُ توزيعِ الضربِ على الجمعِ الاختصارِ

$= ٢ + ١$

$= ٣$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ

(أ) $\frac{٧}{١٥} + \frac{٢ \times ٣}{٥} + \frac{٨}{١٥}$ (ب) $٩ \times (٢ - ٢)$ (جـ) $\frac{٣}{٢} \times \frac{٨}{١٣} \div \frac{٤}{٥٢}$

يُمكِنُك تبسيطُ التعابيرِ العدديّةِ باستخدامِ أولويّاتٍ وهي:

(أ) تبسيطُ العمليّاتِ داخلَ الأقواسِ.

(ب) إجراءُ عمليّاتِ الضربِ والقسمةِ من جهةِ اليمينِ.

(جـ) إجراءُ عمليّاتِ الجمعِ والطرحِ من جهةِ اليمينِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ. $٥ \times \sqrt{١٦} \div ٠,\overline{٣} - ٧ \times ٢$.

بما أنّ: $\sqrt{١٦} = ٤$، $٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$

فيكونُ $٥ \times \sqrt{١٦} \div ٠,\overline{٣} - ٧ \times ٢$

$= ٥ \times ٤ \div \frac{١}{٣} - ٧ \times ٢$ تبسيطُ الضربِ

$= ٢٠ \div \frac{١}{٣} - ١٤$ تحويلُ القسمةِ إلى ضربٍ بالمعكوسِ

$= ٢٠ \times ٣ - ١٤$ تبسيطُ الضربِ

$= ٦٠ - ١٤ = ٤٦$ تبسيطُ الجمعِ

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $٦,٧ - ٠,٦ \times (\sqrt{٠,٢٥} - \frac{١}{٤})$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ متى تبدأُ بإجراءِ العمليّاتِ من اليمينِ إلى اليسارِ؟

٢ هل هناك خاصّيّةُ إبدالٍ لعمليّةِ الطرحِ؟ أعطِ مثالًا.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الناقدُ:** اكتبْ ثلاثةَ تعبيراتٍ عدديّةٍ مختلِفةٍ ناتجُ كلٍّ منها يُساوي واحدًا حيث يحتوي كلُّ تعبيرٍ على العددِ ٤ أربعَ مرّاتٍ، بالإضافةِ إلى بعضِ العمليّاتِ (الجمعِ والطرحِ والضربِ والقسمةِ).

.....

٢ استخدمَ أحمدُ القانونَ التاليَ: مح = ٢ × ل + ٢ × ع لإيجادِ محيطِ المستطيلِ، بينما استخدمَ سالمٌ القانونَ: مح = ٢ × (ل + ع). هل سالمٌ هو على صوابٍ؟ ولماذا؟

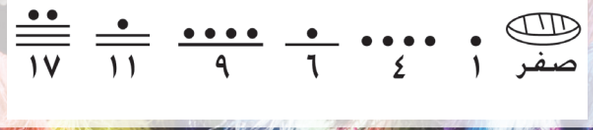
.....

.....

الأسُسُ
Exponents

نظامُ الأعدادِ لدى حضارةِ المايا

يعودُ نظامُ الأعدادِ في حضارةِ المايا إلى القرنِ الرابعِ حيث استخدموا الأساسَ ٢٠ كمبدأٍ أساسيٍّ للعدِّ نسبةً إلى عددِ أصابعِ الأيدي والأرجلِ لدى الإنسانِ. استخدموا أيضًا (•) لتمثيلِ ١ إلى ٤ و(–) لتمثيلِ (٥). نظّموا الأعدادَ بحيث تكونُ أوّلُ خمسِ قيمٍ مكانيّةٍ هي ١ = (٢٠)٠، ٢٠ = (٢٠)١، ٤٠٠ = (٢٠)٢، ٨٠٠٠ = (٢٠)٣ و١٦٠٠٠٠ = (٢٠)٤. وكانوا أوّلَ من رمّزوا الرقمَ صفرًا.



١ كيف تكتبُ ٢ × ٢ × ٢ × ٢ بطريقةٍ أخرى؟

٢ كيف تطوّرَتِ القيمُ المكانيّةُ عندَ شعبِ المايا؟

١ – ٧

قوانينُ الأسسِ
Laws of Exponents

سوف تتعلّمُ
- ضربَ القوى ذاتِ الأساسِ المشترَكِ وقسمتَها.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ علماءُ الفضاءِ ضربَ القوى ذاتِ الأُسسِ الكبيرةِ لحسابِ السرعاتِ في الفضاءِ. ويستخدمُ علماءُ الأحياءِ قسمةَ القوى لقياسِ طولِ خلايا معيَّنةٍ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- ◄ ضربُ القوى
Multiplying Powers
- ◄ قسمةُ القوى
Dividing Powers

انتبِهْ
$-٣^{٢} \neq (-٣)^{٢}$

◄ **صلةُ الدرسِ** سبقَ أن تعرّفْتَ القوى والأسسَ، في هذا الدرسِ سوف تتعلّمُ ضربَ القوى (الأعدادِ الأسّيّةِ) ذاتِ الأساسِ المشترَكِ وقسمتَها.►

استكشِفْ: ضربُ القوى وقسمتُها

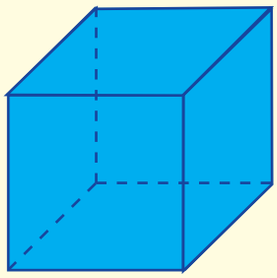
مكعّبٌ من الزجاجِ طولُ ضلعِه ١٠ سنتيمتراتٍ.

(أ) أوجِدْ حجمَ هذا المكعّبِ؟

(ب) أوجِدْ حجمَ ١٠ مكعّباتٍ؟

(جـ) قالَ خالدٌ إنّ: $١٠ \times ١٠^{٣} = ١٠^{٤}$.

هل خالدٌ على صوابٍ؟ فسِّرْ ذلك.



تعلَّمْ: قوانينُ الأسسِ

ضربُ القوى ذاتِ الأساسِ المشترَكِ

تستطيعُ أن تكتبَ تعبيرَ $٣^{٢} \times ٣^{٤}$ باستخدامِ أساسٍ واحدٍ. لذلك

$$٣^{٢} \times ٣^{٤} = (٣ \times ٣) \times (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣)$$

مرّتان ٤ مرّاتٍ

$$= ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{٦}$$

ما العلاقةُ بينَ الأسسِ ٢، ٤، ٦. نُلاحِظُ أنّ: ٢ + ٤ = ٦.

يُمكِنُنا ضربُ عددين أسّيّين لهما الأساسُ نفسُه بجمعِ الأسسِ فنستنتجُ أنّ:

$$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣^{٢+٤} = ٣^{٦}$$

وبصورةٍ عامّةٍ يكونُ القانونُ العامُّ إذا كانَ س عددًا حقيقيًّا غيرَ صفريٍّ، فإنّ

$س^{أ} \times س^{ب} = س^{أ+ب}$، حيث أ، ب عددان صحيحان موجَبان

مثالٌ (١)

بسِّطْ كلًّا من التعابيرِ التالية: (أ) $(-٣)^{٥} \times (-٣)^{٧}$ (ب) $س^{٤} \times س^{٨}$ (جـ) $٥^{٧} \times ٥^{٨}$

(أ) $(-٣)^{٥} \times (-٣)^{٧} = (-٣)^{٥+٧} = (-٣)^{١٢}$

(ب) $س^{٤} \times س^{٨} = س^{٤+٨} = س^{١٢}$

(جـ) $٥^{٧} \times ٥^{٨} = ٥^{٧+٨} = ٥^{١٥}$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ يُمكِنُك استخدامُ ضربِ القوى لتبسيطِ الأعدادِ.

(أ) $(٧)^{٣} \times (٧)^{٤}$ (ب) $\left(\frac{-٢}{٧}\right)^{٣} \times \left(\frac{-٢}{٧}\right)^{٤}$ (جـ) $(٠,٢)^{٢} \times (٠,٢)^{١}$

مثالٌ (٢)

يجتازُ الضوءُ حوالى ٩,٥ × ١٠^{١٢} كم في السنةِ الأرضيّةِ الواحدةِ.

حوِّلْ هذه المسافةَ إلى السنتيمترِ.

٩,٥ × ١٠^{١٢} كم = ٩,٥ × ١٠^{١٢} × ١٠٠٠ مترٍ

= ٩,٥ × ١٠^{١٢} × ١٠٠٠ × ١٠٠ سنتيمترٍ

= ٩,٥ × ١٠^{١٢} × ١٠^{٣} × ١٠^{٢}

= ٩,٥ × ١٠$^{١٢+٣+٢}$

= ٩,٥ × ١٠^{١٧} سنتيمترٍ

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ تُعطى المسافةُ (م) التي يجتازُها الضوءُ بالقانونِ الآتي:

م = ع × ز حيث إنّ السرعةَ (ع) تُساوي ٣ × ١٠^{٥} كم/ ثانيةٍ،

أوجِدِ المسافةَ إذا كانَ الزمنُ (ز) = ٦,٣ × ١٠^{٣} ثانيةٍ.

قسمةُ القوى ذاتِ الأساسِ المشترَكِ: تختلفُ عمليّةُ قسمةِ القوى ذاتِ الأساسِ المشترَكِ عن عمليّةِ الضربِ.

$$\frac{٧^{٥}}{٧^{٣}} = \frac{٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧}{٧ \times ٧ \times ٧} = \frac{٧ \times ٧}{١} = ٧^{٢}$$

ما علاقةُ الأسِّ ٢ بالأسّين ٥ ، ٣ . نُلاحِظُ أنّ: ٥ − ٣ = ٢ . يُمكِنُنا قسمةُ عددٍ أسّيٍّ على آخرَ لهما الأساسُ نفسُه وذلك بطرحِ الأسسِ، لذا نستنتجُ أنّ $\frac{٧^{٥}}{٧^{٣}}$ = ٧$^{٥-٣}$ = ٧^{٢}

وبصورةٍ عامّةٍ يكونُ القانونُ العامُّ:

إذا كانَ س عددًا حقيقيًّا غيرَ صفريٍّ

فإنّ $\frac{\text{س}^{\text{أ}}}{\text{س}^{\text{ب}}}$ = س$^{\text{أ}-\text{ب}}$ ، حيث أ، ب عددان صحيحان موجَبان

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

س$^{\text{صفر}}$ = ١

س$^{-\text{أ}}$ = $\frac{١}{\text{س}^{\text{أ}}}$ حيث أ عددٌ صحيحٌ موجَبٌ

حيث س ≠ صفر

مثالٌ (٣)

أوجِدْ ناتجَ: (أ) $\frac{٢^{٩}}{٢^{٥}}$ (ب) $\frac{(-٣)^{٦}}{(-٣)^{١٠}}$

(أ) $\frac{٢^{٩}}{٢^{٥}}$ = ٢$^{٩-٥}$ = ٢^{٤}

(ب) $\frac{(-٣)^{٦}}{(-٣)^{١٠}}$ = (−٣)$^{٦-١٠}$ = (−٣)$^{-٤}$ = $\frac{١}{(-٣)^{٤}}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدِ الناتجَ.

(أ) $\frac{١٠^{٤}}{١٠^{٣}}$ (ب) $\frac{(-٣)^{٧}}{(-٣)^{٢}}$ (جـ) $\frac{(٠,٤)^{٨}}{(٠,٤)^{٧}}$ (د) $\frac{٤^{٣}}{٤^{٧}}$

مثالٌ (٤)

تبعدُ الشمسُ عن الأرضِ حوالى $١,٥ \times ١٠^{٨}$ كم. إذا كانَتْ سرعةُ الضوءِ حوالى ٢×١٠^{٧} كم في الدقيقةِ، فأوجِدِ الزمنَ اللازمَ لكي يصلَ ضوءُ الشمسِ إلى الأرضِ، مستخدِمًا القانونَ: الزمنُ = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$\text{الزمنُ} = \frac{١,٥ \times ١٠^{٨}}{٢ \times ١٠^{٧}}$$

$$= \frac{١,٥}{٢} \times \frac{١٠^{٨}}{١٠^{٧}}$$

$$= \frac{١,٥}{٢} \times ١٠^{٨-٧}$$

$$= ٠,٧٥ \times ١٠^{١}$$

$$= ٠,٧٥ \times ١٠$$

$$= ٧,٥ \text{ دقائقَ}$$

ويكونُ الزمنُ اللازمُ ليصلَ ضوءُ الشمسِ إلى الأرضِ ٧,٥ دقائقَ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ تبلغُ أقصرُ مسافةٍ بينَ الشمسِ والقمرِ حوالى $٣,٦ \times ١٠^{٥}$ كم. أوجِدِ الزمنَ اللازمَ كي يصلَ ضوءُ الشمسِ إلى القمرِ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(أ) $٣^{٢} + ٧^{١}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times (٣^{٤} + ٢^{٣})$

٢ اذكرِ الحالةَ التي تستخدمُ فيها طرحَ الأسسِ؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ تحتوي القشرةُ الأرضيّةُ على حوالى ١٢×١٠^{١٣} طنٍّ متريٍّ من الذهبِ. تبلغُ قيمةُ الطنِّ المتريِّ من الذهبِ حوالى ٤٠ مليونَ دينارٍ كويتيٍّ (إحصائيّاتُ سنةِ ٢٠٠٠).
ما القيمةُ التقريبيّةُ للذهبِ الموجودِ في القشرةِ الأرضيّةِ بالدينارِ الكويتيِّ؟

.....

.....

٢ يحتوي جسمُ الإنسانِ على حوالى ٧×١٠^{٦} ميكرولترٍ من الدمِ لكلِّ كيلوجرامٍ واحدٍ من وزنِ الجسمِ. وتوجَدُ في كلِّ ميكرولترٍ ٥×١٠^{٦} من الكريّاتِ الحمراءِ. أوجِدِ العددَ التقريبيَّ للكريّاتِ الحمراءِ الموجودةِ في جسمِ إنسانٍ يزنُ ٧٠ كيلوجرامًا.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ – ٨

الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ الموجَبةِ

Scientific Notation Using Positive Integer Exponents

سوف تتعلّمُ

- تحويلَ الأعدادِ الكبيرةِ بينَ الشكلِ النظاميِّ والصورةِ العلميّةِ.

من الاستخدامات

- الصورةُ العلميّةُ تُسهِّلُ على الجيولوجيّين وصفَ معالمِ الأرضِ التي تشملُ أعدادًا كبيرةً.

◄ صلةُ الدرسِ في الدرسِ السابقِ تعاملْتَ مع الأسسِ، وفي هذا الدرسِ سوف تستخدمُ الأسسَ لكتابةِ الأعدادِ الكبيرةِ بصورةٍ مختلِفةٍ. ►

قوى العددِ ١٠ هامّةٌ جدًّا عندَ استخدامِ هذه الصورةِ المختلِفةِ للأعدادِ الكبيرةِ.

$١٠ = ١٠^{١}$، $١٠٠ = ١٠^{٢}$، $١٠٠٠ = ١٠^{٣}$، $١٠٠٠٠ = ١٠^{٤}$، وهكذا.

استكشِفْ الصورةُ العلميّةُ

ابحثْ عن الأنماطِ في الجدولِ الآتي:

أ		ب	جـ
٣٥	=	$٣,٥ \times ١٠$	$٣,٥ \times ١٠^{١}$
٤٥٦	=	$٤,٥٦ \times ١٠٠$	$٤,٥٦ \times ١٠^{٢}$
٥ ٦٧٨	=	..... $\times ٥,٦٧٨$	..... $\times ٥,٦٧٨$
٢٣ ٤٥٦	=	..... $\times ٢,٣٤٥٦$	..... $\times ٢,٣٤٥٦$
٤٣٢ ٩٦٧	=	..... $\times ٤,٣٢٩٦٧$	..... $\times ٤,٣٢٩٦٧$
١ ٦٥٤ ٧٦٣	=	..... $\times ١,٦٥٤٧٦٣$	..... $\times ١,٦٥٤٧٦٣$

١. أكمِلِ العمودَ ب باستخدامِ قوى العددِ ١٠ في الشكلِ النظاميِّ.

٢. أكمِلِ العمودَ جـ باستخدامِ قوى العددِ ١٠ في الصورةِ الأسّيّةِ.

٣. ماذا تُلاحِظُ في كلِّ الأعدادِ العشريّةِ في العمودين ب، جـ؟

٤. ما هي العلاقةُ التي تربطُ عددَ الأصفارِ في قوى ١٠ في العمودِ ب، وفي الأسسِ في العمودِ جـ بالأعدادِ الكلّيّةِ في العمودِ أ؟

٥. كيف يُمكِنُك إعادةُ كتابةِ ١١ ٨٥٤ ٦٢٣ ليُلائِمَ النمطَ في العمودين ب، جـ؟

٦. كيف يُمكِنُك إعادةُ كتابةِ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠،١ ٩٩٩ ٩٩٩ ٩٩٩ ليُلائِمَ النمطَ في العمودِ جـ؟ كيف تتشابهُ هاتان الإعادتان؟

٧. كيف يُمكِنُك إعادةُ كتابةِ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠، ٣٥٧ ٠٠٠ ٠٠٠ ٣٥ ليُلائِمَ النمطَ في العمودِ جـ؟ كيف تتشابهُ هاتان الإعادتان؟

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- ◄ صورةٌ علميّةٌ Scientific Notation
- ◄ أسسٌ موجَبةٌ Positive Exponents

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

كوِّنْ جدولَ القيمةِ المكانيّةِ للأعدادِ الكبيرةِ إذا احتجْتَه.

تعلَّم: الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ الموجَبةِ

غالبًا ما يستخدمُ العلماءُ قوى العددِ ١٠ في وصفِ معالمِ الأرضِ للتعبيرِ عن الأعدادِ الكبيرةِ في **الصورةِ العلميّةِ**. وفي الصورةِ العلميّةِ **يُكتَبُ العددُ كقوًى للعددِ ١٠ مضروبةً في عددٍ قيمتُه المطلَقةُ أصغرُ من ١٠ وأكبرُ من أو تُساوي ١**.

$٤٥٦\ ٠٠٠\ ٠٠٠ = ٤,٥٦ \times ١٠^{٨}$ $\qquad$ $-٢٨٧ = -٢,٨٧ \times ١٠^{٢}$

لكي تكتبَ عددًا كبيرًا في الصورةِ العلميّةِ، بسهولةٍ، حرِّكِ الفاصلةَ العشريّةَ حسبَ التعريفِ، واحسبْ كم منزلةً عشريّةً تحرّكَتْ، واكتبْ هذا كقوًى للعددِ ١٠. السببُ في هذا هو أنّ التحرّكَ إلى اليسارِ منزلةً واحدةً هو نفسُه مثلُ القسمةِ على ١٠.

$٢٠٥٣ = ٢٠٥,٣ \times ١٠^{١}$ تحريكُ الفاصلةِ العشريّةِ منزلةً واحدةً إلى اليسارِ

$= ٢٠,٥٣ \times ١٠^{٢}$ تحريكُ الفاصلةِ العشريّةِ منزلةً أخرى إلى اليسارِ

$= ٢,٠٥٣ \times ١٠^{٣}$ إنّها الآن في الصورةِ العلميّةِ

هل تعلمُ؟

يوجَدُ حوالى ١٠٠٠ لغةٍ مختلفةٍ للتخاطبِ في جنوبِ شرقِ آسيا.

مثالٌ (١)

أوسعُ لغاتِ التخاطبِ انتشارًا في العالمِ هي ماندارين، اللغةُ الأساسيّةُ في الصين، ويُقدَّرُ أنّ ٨٤٤ مليونًا من البشرِ يتخاطبون بها كلغتِهم الأساسيّةِ. اكتبْ هذا العددَ في الشكلِ النظاميِّ وفي الصورةِ العلميّةِ.

في الشكلِ النظاميِّ تكتبُ ٨٤٤ مليونًا كالآتي: ٨٤٤ ٠٠٠ ٠٠٠.

وفي الصورةِ العلميّةِ تكتبُ ٨٤٤ مليونًا كالآتي:

$٨,٤٤ \times ١٠^{٨}$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ اكتبِ الأعدادَ التي تُمثِّلُ الذين يتكلّمون اللغةَ الآتيةَ في الشكلِ النظاميِّ وفي الصورةِ العلميّةِ.

(أ) الإنجليزيّةُ: ٣٢٦ مليونًا من البشرِ.

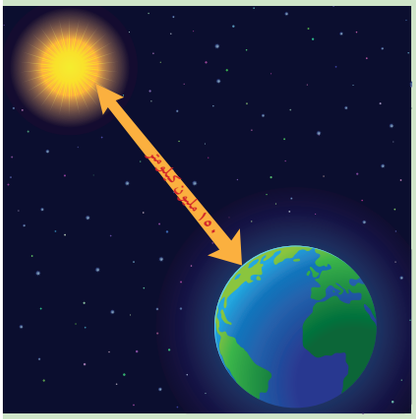
(ب) الألمانيّةُ: ٩٨ مليونًا من البشرِ.

(ج) العربيّةُ: ١٩٥ مليونًا من البشرِ.

بعضُ الأعدادِ أكبرُ من أن تظهرَ بكلِّ أرقامِها على شاشةِ العديدِ من الآلاتِ الحاسبةِ، وبعضُ الآلاتِ الحاسبةِ تُظهِرُ مثلَ تلك الأعدادِ آليًّا في الصورةِ العلميّةِ.

مثالٌ (٢)

تبعدُ الأرضُ حوالى ١٥٠ مليونَ كيلومترٍ عن الشمسِ، ما هي هذه المسافةُ بالأمتارِ؟



أدخِلْ ١٥٠ ٠٠٠ ٠٠٠ بالآلةِ الحاسبةِ ثمّ اضربْ في ١٠٠٠ سيظهرُ على الشاشةِ ١,٥ × ١٠^١١ أو ١,٥ E ١١.

تبعدُ الأرضُ ١,٥ × ١٠^١١ مترٍ عن الشمسِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ قُدِّرَتْ درجةُ حرارةِ باطنِ الشمسِ بـ ١٥ مليونَ درجةٍ مئويّةٍ. أوجِدْ طريقتين على الأقلِّ لإدخالِ هذا العددِ إلى الآلةِ الحاسبةِ.

مثالٌ (٣)

في ما يلي قراءاتُ الآلةِ الحاسبةِ موضَّحةُ الأعدادِ في الصورةِ العلميّةِ. اكتبْ هذه الأعدادَ في الشكلِ النظاميِّ.

(أ) ٨,٧ E ١١ (ب) ٥,٤٥ E ١٠ (جـ) ٤,٥- E ١٥

(أ) ٨,٧ E ١١ تعني ٨,٧ × ١٠^١١ = ٨,٧ × ١٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

= ٨٧٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

(ب) ٥,٤٥ E ١٠ تعني ٥,٤٥ × ١٠^١٠ = ٥,٤٥ × ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

= ٥٤ ٥٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

(جـ) ٤,٥- E ١٥ تعني ٤,٥- × ١٠^١٥ = ٤,٥- × ١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

= ٤ ٥٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠-

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ اكتبِ الأعدادَ الظاهرةَ على الآلةِ الحاسبةِ في الشكلِ النظاميِّ.

(أ) ٩,٦ E ١٠ (ب) ٣,٨١٢- E ١٢ (جـ) ١,٠٢ E ١٣

هل تعلمُ؟

الجوجولُ **googol** هو ١٠^١٠٠، والجوجولُ بليكس هو ١٠ أسّ جوجول.

تحقَّقْ من فهمِك

١ هل يوجَدُ عددٌ لا يُمكِنُ تمثيلُه في الصورةِ العلميّةِ؟

٢ ماذا يعني تحريكُ الفاصلةِ العشريّةِ إلى اليسارِ؟

٣ العددُ المكتوبُ في الصورةِ العلميّةِ له عاملان، صِفْ كلًّا من العاملين.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (١-٨)

قضى رائدُ فضاءٍ روسيٌّ ٤٣٩ يومًا في الفضاءِ، وعادَ إلى الأرضِ في مارسَ عامَ ١٩٩٥.
(أ) كم عددُ الساعاتِ التي قضاها في الفضاءِ؟ اكتبْ إجابتَك في الشكلِ النظاميِّ.
(ب) كم عددُ الدقائقِ التي قضاها في الفضاءِ؟ اكتبْ إجابتَك في الصورةِ العلميّةِ.

افهمْ

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟ .....

خطِّطْ

٢ كيف يُمكِنُك إيجادُ عددِ الساعاتِ في:
(أ) يومين؟ .....
(ب) ٤٣٩ يومًا؟ .....

٣ كيف يُمكِنُك إيجادُ عددِ الدقائقِ في:
(أ) يومين؟ .....
(ب) ٤٣٩ يومًا؟ .....

حُلَّ

٤ كم عددُ الساعاتِ التي قضاها الرائدُ في الفضاءِ؟ .....
٥ كم عددُ الدقائقِ التي قضاها الرائدُ في الفضاءِ؟ .....
٦ اكتبْ عددَ الدقائقِ في الصورةِ العلميّةِ؟ .....

تحقَّقْ

٧ لماذا كتبْتَ عددَ الدقائقِ في الشكلِ النظاميِّ قبلَ كتابتِه في الصورةِ العلميّةِ؟ .....
.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ تاريخُ ميلادِ صالحٍ هو ٢٩ فبرايرَ، وقد وُلِدَ في سنةٍ كبيسةٍ (٣٦٦ يومًا).
(أ) كم يومًا ينتظرُ بينَ تاريخِ الميلادِ والآخرِ؟ اكتبْ إجابتَك في الشكلِ النظاميِّ. .....
.....
(ب) كم دقيقةً تنتظرُ بينَ تاريخِ الميلادِ والآخرِ؟ اكتبْ إجابتَك في الصورةِ العلميّةِ. .....
.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ **التواصلُ**: تُحاوِلُ عائلةُ حمدٍ بيعَ منزلِها. السعرُ المكتوبُ على ورقةِ ملكيّةِ العقارِ هو ١٠٥ ك لنفرضْ ك = ١٠٠٠ دينارٍ.

(أ) بكم سيُباعُ المنزلُ؟ .....

.....

(ب) ما أوجهُ الشبهِ بينَ هذه الصورةِ والصورةِ العلميّةِ؟ وما أوجهُ الاختلافِ؟

.....

.....

٢ **المجلّةُ**: وضِّحْ لماذا لا تُعَدُّ التعبيراتُ العدديّةُ الآتيةُ أمثلةً عن كتابةِ أعدادٍ في الصورةِ العلميّةِ؟

(أ) $٥٢,٦ \times ١٠^{٨}$ (ب) $٣,٧١ + ١٠^{٩}$

(جـ) ١٠×١٠^{١٢} (د) $٠,٤٣ \times ١٠^{٩}$

.....

.....

.....

٩ – ١

الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ السالبةِ

Scientific Notation Using Negative Integer Exponents

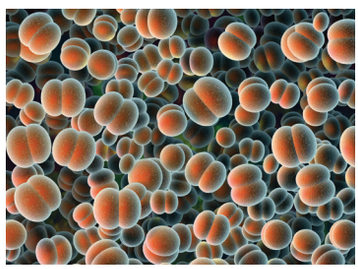
◄ صلةُ الدرسِ في الدرسِ السابقِ كتبْتَ الأعدادَ الكبيرةَ بالصورةِ العلميّةِ مستخدِمًا الأسسَ الصحيحةَ الموجَبةَ، وفي هذا الدرسِ ستتعلّمُ كيفيّةَ كتابةِ الأعدادِ الصغيرةِ جدًّا بالصورةِ العلميّةِ مستخدِمًا الأسسَ الصحيحةَ السالبةَ. ►

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ تحويلِ الأعدادِ الصغيرةِ بينَ الشكلِ النظاميِّ والصورةِ العلميّةِ.

من الاستخداماتِ

- علماءُ الأحياءِ الدقيقةِ (الميكروبيولوجيا) يعملون على أعدادٍ صغيرةٍ جدًّا والصورةُ العلميّةُ تُسهِّلُ عليهم ذلك.



المصطلحاتُ الأساسيّةُ

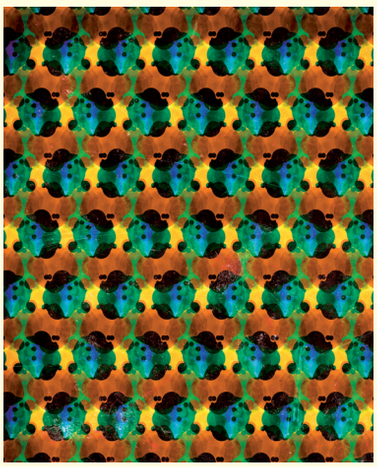
◄ أسسٌ سالبةٌ

Negative Exponents

استكشِفْ: الأسسُ الصحيحةُ السالبةُ

أنماطٌ في كلِّ مكانٍ

الكسورُ الآتيةُ كُتِبَتْ كمسائلِ قسمةٍ عُبِّرَ عنها باستخدامِ الأسسِ ثمّ باستخدامِ الكسورِ العشريّةِ.



العددُ	الصورةُ العشريّةُ	باستخدامِ الأسسِ
١٠٠	١٠٠,٠	$١٠^{٢}$
١٠	١٠,٠	$١٠^{١}$
١	١,٠	$١٠^{٠}$
$\frac{١}{١٠}$	٠,١	
$\frac{١}{١٠٠}$		

١ استمِرَّ في الجدولِ حتّى تصلَ إلى $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$، صِفْ أيَّ أنماطٍ تجدُها.

٢ ما الصلةُ بينَ كلِّ عددٍ والذي قبلَه؟

٣ عندما تتحرّكُ إلى أسفلَ في عمودِ الصورةِ العشريّةِ، ماذا يحدثُ للفاصلةِ العشريّةِ؟

٤ عندما تتحرّكُ إلى أسفلَ في عمودِ استخدامِ الأسسِ، ماذا يحدثُ للأسسِ؟

٥ صِفِ العلاقةَ، إن وُجِدَتْ، بينَ الأسِّ وموضعِ الفاصلةِ العشريّةِ.

تعلَّمْ الصورةُ العلميّةُ باستخدامِ الأسسِ الصحيحةِ السالبةِ

يُمكِنُ استخدامُ الأسسِ الصحيحةِ السالبةِ لكتابةِ الأعدادِ الصغيرةِ جدًّا، وذلك مثلما نستخدمُ الأسسَ الصحيحةَ الموجَبةَ لكتابةِ الأعدادِ الكبيرةِ جدًّا.

لكي نكتبَ ٠,٠٠٣٤٥ في الصورةِ العلميّةِ، حرِّكِ الفاصلةَ العشريّةَ إلى اليمينِ حتّى يتبقّى رقمٌ واحدٌ فقط غيرُ صفريٍّ إلى يسارِ الفاصلةِ العشريّةِ.

٠,٠٠٣٤٥ ⟵ ٠٠٠٣,٤٥

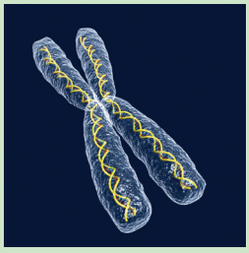
احسبْ عددَ المنزلاتِ التي حرّكْتَ بها الفاصلةَ العشريّةَ. وهذا سوف يكونُ قوّةً للعددِ ١٠، وحيث إنّك تحرّكْتَ نحوَ اليمينِ فسيكونُ الأسُّ سالبًا، (-٣)

٠,٠٠٣٤٥ = ٣,٤٥ × ١٠$^{-٣}$

يُمكِنُ للعديدِ من الآلاتِ الحاسبةِ وضعُ العددِ في الصورةِ العلميّةِ.

أمثلةٌ

١ الحمضُ النوويُّ DNA في كروموسومٍ بكتيريا معيَّنةٍ رفيعٌ جدًّا ومكدَّسٌ بإحكامٍ داخلَ الخليّةِ، يلتوي ويلتفُّ بحيث يصلُ إلى $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ سم طولًا. عبِّرْ عن هذا الطولِ في الصورةِ العلميّةِ.



كروموسومٌ بشريٌّ

اكتبْ ١ جزءٍ من عشرةِ آلافِ جزءٍ في الصورةِ العشريّةِ.

$\frac{١}{١٠٠٠٠}$ = ٠,٠٠٠١

٠,٠٠٠١

٠,٠٠٠١ = ؟ × ١٠

حرِّكِ الفاصلةَ العشريّةَ ٤ منزلاتٍ إلى اليمينِ حتّى تحصلَ على ١,٠.

الفاصلةُ العشريّةُ تحرّكَتْ ٤ منزلاتٍ إلى اليمينِ.

الأسُّ يكونُ -٤.

$\frac{١}{١٠٠٠٠}$ سم = ١,٠ × ١٠$^{-٤}$ سم

الصورةُ العلميّةُ هي ١,٠ × ١٠$^{-٤}$

٢ اكتبْ ٥٢ جزءًا من مليونٍ في الصورةِ العلميّةِ.

٥٢ جزءًا من مليونٍ = ٠,٠٠٠٠٥٢ — اكتبْ في الصورةِ العشريّةِ

= ٥,٢ × ١٠$^{-٥}$ — حرِّكِ الفاصلةَ العشريّةَ ٥ منزلاتٍ إلى اليمينِ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ (أ) اكتبْ ١ جزءٍ من مليونٍ في الصورةِ العلميّةِ.

(ب) اكتبْ ٣ أجزاءٍ من مئةِ ألفٍ في الصورةِ العلميّةِ.

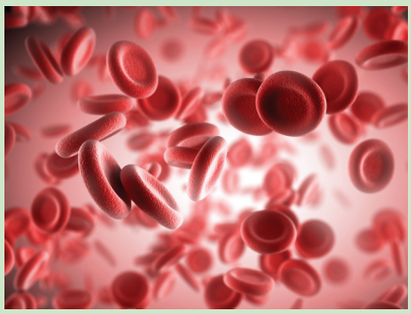
٣ يبلغُ طولُ أقصرِ حشرةٍ (مئةِ أرجلٍ) ٧ أجزاءٍ من مئةِ جزءٍ من السنتيمترِ. اكتبْ هذا في الشكلِ النظاميِّ وفي الصورةِ العلميّةِ.

في الشكلِ النظاميِّ تُكتَبُ ٧ أجزاءٍ من مئةٍ: ٠,٠٧

وحيثُ إنّ ٧ × ٠,٠١ = ٧ × ١٠$^{-٢}$سم

في الصورةِ العلميّةِ تُكتَبُ ٧ أجزاءٍ من مئةٍ: ٧ × ١٠$^{-٢}$

٤ يبلغُ قطرُ خليّةِ الدمِ الحمراءِ حوالى ٧ أجزاءٍ من مئةِ مليونِ جزءٍ من السنتيمترِ. بيِّنْ كيف نُدخِلُ هذا العددَ إلى الآلةِ الحاسبةِ.



هناك طرقٌ عديدةٌ ومختلِفةٌ لإدخالِه

الطريقةُ الأولى

7 ÷ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 =

فيظهرُ على الشاشةِ 0.00000007

الطريقةُ الثانيةُ

يوجَدُ في بعضِ الآلاتِ الحاسبةِ مفتاحٌ x^0 أو ^ أو y^x

7 x 1 0 x^0 (–) 8 =

فيظهرُ على الشاشةِ 0.00000007

أو 7×10^{-8}

الطريقةُ الثالثةُ

يوجَدُ في بعضِ الآلاتِ الحاسبةِ مفتاحٌ $\times 10^x$ أو EE أو Exp

7 $\times 10^x$ (–) 8

فيظهرُ 7×10^{-8}

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) يبلغُ حجمُ بعضِ الڤيروساتِ ٣ أجزاءٍ من المليارِ من السنتيمترِ. اكتبْ هذا العددَ في الشكلِ النظاميِّ وفي الصورةِ العلميّةِ.

(ب) بيِّنْ كيف نُدخِلُ ٨ أجزاءٍ من المليونِ إلى الآلةِ الحاسبةِ.

بعضُ الأعدادِ تكونُ أصغرَ من أن تظهرَ بكلِّ أرقامِها على شاشةِ العديدِ من الآلاتِ الحاسبةِ. إمّا أن تظهرَ رسالةُ خطأٍ Error على الشاشةِ أو تظهرَ الأعدادُ عليها آليًّا في الصورةِ العلميّةِ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ فيمَ تتشابهُ كتابةُ عددٍ صغيرٍ أو عددٍ كبيرٍ بالصورةِ العلميّةِ؟ وفيمَ تختلفُ عنها؟

٢ لماذا يُكافِئُ تحريكُ الفاصلةِ العشريّةِ إلى اليسارِ، الضربَ في قوًى للعددِ ١٠ بأسسٍ سالبةٍ؟ ما العمليّاتُ الأخرى التي تُكافِئُ الضربَ في قوًى للعددِ ١٠ بأسسٍ سالبةٍ؟ اشرحْ ذلك.

٣ لديك عددٌ صغيرٌ مكتوبٌ بالصورةِ العلميّةِ. إذا كُتِبَ كناتجِ ضربِ عاملين؛ فصِفْ كلًّا من العاملين.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (١-٩)

رتِّب كلًّا من الأعدادِ الآتيةِ من الأكبرِ إلى الأصغرِ. فسِّرْ إجابتَك.

$١,٢٤ \times ١٠^{-٣}$ $٢,٢٤ \times ١٠^{-٢}$ $١,٨٩ \times ١٠^{-٤}$ $-٢,٦ \times ١٠^{-٢}$

افهمْ

١ هل هذه الأعدادُ مكتوبةٌ في الصورةِ العلميّةِ أو في الشكلِ النظاميِّ؟ .....

.....

خطِّطْ

٢ كيف يُمكِنُك تحديدُ ما إذا كانَ العددُ المكتوبُ في الصورةِ العلميّةِ سالبًا أم لا؟ .....

.....

٣ قارِنْ بينَ $١٠^{-٤}$، $١٠^{-٣}$. أيٌّ من العددين أكبرُ؟ .....

.....

٤ كيف يُمكِنُك استخدامُ الأسِّ لتُقارِنَ بينَ قوًى لـ ١٠؟ .....

.....

٥ قارِنْ بينَ $١,٦ \times ١٠^{-٢}$ و $٢,٦ \times ١٠^{-٢}$ أيٌّ من العددين أكبرُ؟ .....

.....

٦ عندما تكونُ الأسسُ متساويةً في العددين والعواملُ الأخرى ليسَتْ سالبةً، فكيف يُمكِنُك المقارنةُ بينَ العددين؟

.....

حُلَّ

٧ استخدِمْ فهمَك للبندِ ٢، ٤، ٦ لتُرتِّبَ الأعدادَ. .....

.....

تحقَّقْ

٨ كيف يُمكِنُك الحصولُ على الإجابةِ باستخدامِ طريقةٍ أخرى؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٩ رتِّبِ الأعدادَ من الأصغرِ إلى الأكبرِ. فسِّرْ إجابتَك.

$١,٩ \times ١٠^{-٣}$ $-٢,٥ \times ١٠^{-٤}$ $١,٢ \times ١٠^{-٢}$ $-٢,٨ \times ١٠^{-٤}$

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التواصلُ**: قالَ فهدٌ إنّ العددَ ٤٥ , ٥٤٥ × ١٠$^{-٥}$ مكتوبٌ في الصورةِ العلميّةِ.
هل تُوافِقُه الرأيَ أو لا؟ فسِّرْ إجابتَك.

.....

.....

.....

٢ **اختْ إستراتيجيّةً**: سمكُ شعرةِ الإنسانِ هو ٢ × ١٠$^{-٢}$ سم.
وسمكُ الورقةِ ٦٢ , ٧ × ١٠$^{-٣}$ سم تقريبًا. أيُّهما سمكُه أكبرُ؟ وما الفرقُ بينَ سمكيهما؟
وضِّحْ كيف حصلْتَ على إجابتِك.

.....

.....

.....

٣ **المجلّةُ**: وضِّحْ كيف ستُحدِّدُ أيُّهما أكبرُ ٠ , ٠٠٠٥٦ أم ١ , ٥ × ١٠$^{-٤}$.

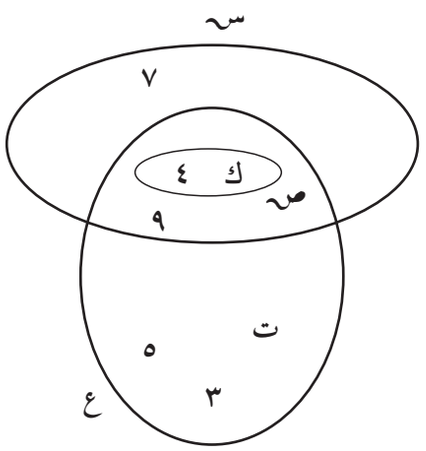
.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الأولى



١ استخدِمِ الشكلَ المقابِلَ وأكمِلْ مستخدِمًا ⊇، ⊉، ∋، ∌

(أ) ص ... س

(ب) س ... ع

(جـ) ٩ ... ع

(د) ٤ ... س

٢ لتكنِ المجموعةُ الشاملةُ ش، مجموعةَ الأعدادِ الطبيعيّةِ الفرديّةِ الأصغرِ من ١٤

س = {٥، ٧، ١٣} ص = {١، ٣، ٥، ٧}

أوجِدْ: (أ) س − ص، ص − س.

(ب) $\overline{س}$، $\overline{ص}$

(جـ) $\overline{س - ص}$

٣ حدِّدْ ما إذا كانَ كلٌّ ممّا يلي صحيحًا أم خطأً.

(أ) ٦ < $\sqrt{٣٨}$ < ٧ (ب) −٧ < − $\sqrt{٥٦}$ < −٦

(جـ) ٣,٣ < $\sqrt{١٠,٢٥}$ < ٣,٤ (د) ٠,١ < $\sqrt{٠,٠٣}$ < ٠,٢

٤ حدِّدْ ما إذا كانَ كلُّ جذرٍ تربيعيٍّ ممّا يلي عددًا نسبيًّا أم غيرَ نسبيٍّ.

(أ) − $\sqrt{٣٦٠٠}$ (ب) $\sqrt{٨}$ (جـ) $\sqrt{٦,٢٥}$ (د) $\sqrt{١٢٩,٦}$

٥ مثِّلِ الفتراتِ التاليةَ على خطِّ الأعدادِ.

(أ) [−٥، ٣) (ب) (٣، ٧) (جـ) (−٥، −٢).

٦ حُلَّ المعادلةَ: (أ) ٣ |س| + ١ = ١٠ (ب) |ت| + ٥ = ٢

٧ حُلَّ المعادلةَ |ن − ٢| = ٤ ثمّ تحقَّقْ من إجابتِك بتمثيلِها على خطِّ الأعدادِ.

٨ حدِّدْ قيمَ ا، ب حتى يكونَ للمعادلةِ |س − ا| = ب حلًّا واحدًا فقط؟

اختبارُ الوَحدةِ الأولى

٩ المعادلةُ م = ٢ ل + ٢ ع تُعطي محيطَ مستطيلٍ بعداه (ل)، (ع).

إذا كانَ المحيطُ ٤٨ , ١٤ سم وأحدُ البعدين ١٦ , ٤ سم، فأيُّ جملةٍ عدديّةٍ ممّا يأتي تستخدمُها لإيجادِ البعدِ الآخرِ؟

(أ) ٢ × ٤٨ , ١٤ + ٢ × ١٦ , ٤ (ب) ٤٨ , ١٤ − ٢ × ١٦ , ٤ ÷ ٢

(جـ) (٤٨ , ١٤ − ٢ × ١٦ , ٤) ÷ ٢ (د) (٢ × ١٦ , ٤ − ٤٨ , ١٤) ÷ ٢

١٠ يُنتِجُ جسمُ الإنسانِ حوالى ٢ × ١٠^{٦} من الكريّاتِ الحمراءِ في الثانيةِ. تبرّعَ أخوك الأكبرُ بنصفِ لترٍ من دمِه يحتوي على ٤ , ٢ × ١٠^{١٢} من الكريّاتِ الحمراءِ.

(أ) ما عددُ الثواني اللازمُ ليُعوِّضَ الجسمُ الكريّاتِ الحمراءَ التي تبرّعَ بها؟

(ب) حوِّلِ الإجابةَ من الثواني إلى أيّامٍ.

١١ أيٌّ من الأعدادِ الآتيةِ غيرُ مكتوبٍ بالصورةِ العلميّةِ؟

(١) ٢٤ , ١١ × ١٠^{٤} (٢) ٠٠٤ , ٢ × ١٠$^{-٢٣}$ (٣) −١٢ × ١٠$^{-٢}$

(أ) (١) و(٢) (ب) (١) و(٣) (جـ) (٢) (د) (١) و(٢) و(٣).

١٢ اكتبْ بالصورةِ العلميّةِ.

(أ) ٧ ٠٤٢ ٠٠٠ ٠٠٠ (ب) ٠ , ٠٠٠٠٠٤٦٩

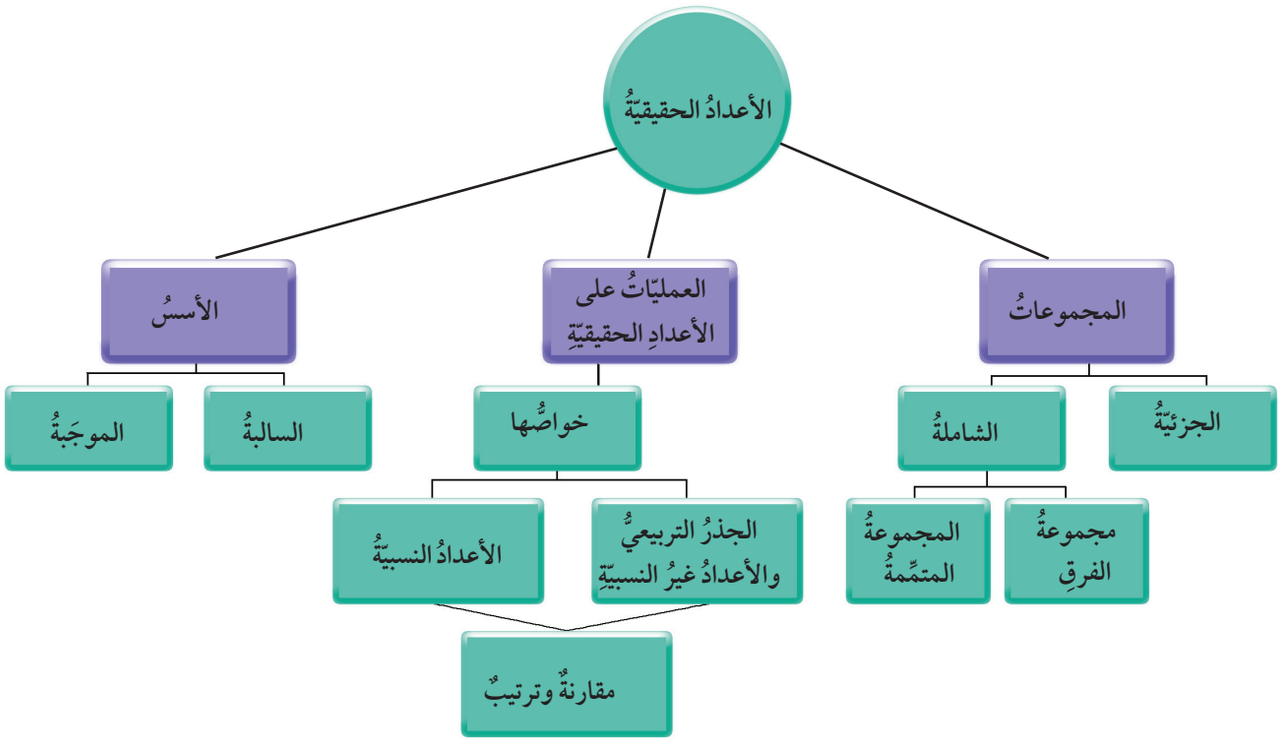
١٣ أوجِدِ الناتجَ.

(أ) ٨ × (٧ × ١٠$^{-٣}$) (ب) (٢١ × ١٠^{٥}) ÷ ٧ (جـ) (٨ × ١٠$^{-٨}$) ÷ ٢

١٤ بسِّطْ:

(أ) $\frac{١٠^{٧} \times ١٠^{٥}}{١٠^{-٢}}$ (ب) $\frac{٢٧ \times ١٠^{٨}}{٠,٩ \times ١٠^{٣}}$

مخطَّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الأولى



الوَحدةُ الأولى (أ)

- مجموعةٌ جزئيّةٌ. لأي مجموعتين س، ص تكونُ ص هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من س إذا كانَ كلُّ عنصرٍ من ص ينتمي إلى س وتُكتَبُ ص ⊆ س.
- المجموعتان متساويتان. تتساوى مجموعتان إذا كانَتْ كلٌّ منهما مجموعةً جزئيّةً من الأخرى.
- المجموعةُ الخاليةُ ∅ هي مجموعةٌ جزئيّةٌ من أيِّ مجموعةٍ.
- مجموعةُ الفرقِ: س − ص هي مجموعةُ العناصرِ التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص.
- المجموعةُ المتمِّمةُ للمجموعةِ س هي مجموعةُ العناصرِ التي تنتمي إلى المجموعةِ الشاملةِ ولا تنتمي إلى المجموعةِ س.

الوَحدةُ الأولى (ب)

- لكلِّ عددٍ موجَبٍ س جذران تربيعيّان أحدُهما موجَبٌ (أساسيٌّ) $\sqrt{س}$ والآخرُ سالبٌ $-\sqrt{س}$
- الأعدادُ غيرُ النسبيّةِ هي الأعدادُ التي لا يُمكِنُ كتابتُها على الصورةِ $\frac{أ}{ب}$.
- خواصُّ الجذورِ التربيعيّةِ: $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ \times ب}$ و $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$، وحيث أ، ب أعدادٌ موجَبةٌ، ب ≠ ٠.
- الفترةُ: تشملُ كلَّ الأعدادِ الحقيقيّةِ الواقعةِ بينَ عددين ويمكنُ أن تشملَ العددين أو أحدَهما على خطِّ الأعدادِ.
- القيمةُ المطلَقةُ لعددٍ حقيقيٍّ هي المسافةُ على خطِّ الأعدادِ بينَ هذا العددِ والصفرِ.
- قوانينُ الأسسِ: $س^{أ} \times س^{ب} = س^{أ+ب}$، $\frac{س^{أ}}{س^{ب}} = س^{أ-ب}$ حيث أ، ب عددان صحيحان موجَبان، س ≠ ٠.
- الصورةُ العلميّةُ: يُكتَبُ العددُ كقوًى للعددِ ١٠ مضروبةٍ في عددٍ قيمتُه المطلَقةُ أصغرُ من ١٠ وأكبرُ من أو تُساوي ١.

الوَحدةُ الثانيةُ

تحليلُ البياناتِ
Data Analysis

شعوبُ العالمِ

اللغةُ السواحليّةُ هي لغةٌ تجاريّةٌ وحكوميّةٌ يتخاطبُ بها سكّانُ منطقةِ الكونغو وشرقِ أفريقيا، في ما يلي الأعدادُ باللغةِ السواحليّةِ:

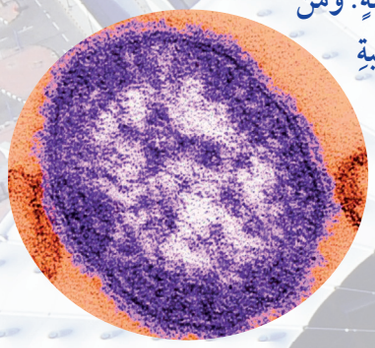
١ موجا
٢ مبيلي
٣ تاتو
٤ نني
٥ تانو
٦ سيتا
٧ سابا
٨ ناني
٩ تيسا
١٠ كيومي

الفنونُ والآدابُ

كانَ «هوراس» شاعرًا رومانيًّا وله العديدُ من المؤلَّفاتِ، التي أثّرَتْ في الحياةِ الأدبيّةِ. وكانَ له مقولةٌ مهمّةٌ في الإحصاءِ وهي: «إنّنا مجرَّدُ أرقامٍ وإحصاءاتٍ، وُلِدْنا لكي نستهلكَ مواردَ الطبيعةِ».

العلومُ

بينَ العام ١٩٨٠ والعام ١٩٩٠ زادَ عددُ المصابين بمرضِ الحصبةِ بـ ١٤٣٠٠ حالةٍ. ومن أعراضِ الإصابةِ بفيروسِ الحصبةِ ظهورُ بقعٍ حمراءَ مستديرةٍ على جلدِ المريضِ.



الدراساتُ الاجتماعيّةُ

استخدمَتْ «شعوبُ المايا» النقاطَ، والخطوطَ للتعبيرِ عن الأعدادِ. فعندما توضَعُ الأشكالُ البيضاويّةُ أسفلَ عددٍ ما تكونُ النتيجةُ أكبرَ بعشرين مرّةً.

مثلًا: • = ١ = ١ × ٢٠ = ٢٠

٠	١	٢	٣	٤
٥	٦	٧	٨	٩
١٠	١١	١٢	١٣	١٤
١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤
٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩

حسبَ الترقيمِ عندَ شعوبِ المايا، فإنّ كلَّ دائرةٍ صغيرةٍ وتحتَها الشكلُ البيضاويُّ تُمَثِّلُ العددَ ٢٠. وهكذا كانَ الترقيمُ للعددِ ٢١ كما يلي: • باعتبارِ الدائرةِ العليا هي ٢٠ والدائرةِ السفلى هي ١ وتوجَدُ مسافةٌ فاصلةٌ بينَهما.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

قد تكونُ **البياناتُ** مفيدةً وذاتَ دلالةٍ عندَ عرضِها على شكلِ تمثيلاتٍ، وجداولَ، ومخطَّطاتٍ، ورسومٍ بيانيّةٍ.

أحيانًا عددٌ واحدٌ مثلُ **المتوسِّطِ الحسابيِّ، الوسيطِ** أو **المنوالِ**، يُساعِدُنا على فهمِ مجموعةٍ من البياناتِ.

تُستخدَمُ استطلاعاتُ الرأيِ لجمعِ المعطَياتِ في مختلِفِ الميادينِ كالانتخاباتِ، والإعلاناتِ، واختباراتِ التذوّقِ.

العيّنةُ هي مجموعةُ الأفرادِ التي تُشارِكُ في استطلاعِ الرأيِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ
افهمْ خطِّطْ حُلَّ تحقَّقْ

في هذا المشروعِ سوف تُنشِئُ سماتٍ لفتًى أو فتاةٍ في الثالثةَ عشرةَ أو الرابعةَ عشرةَ. سوف تُجري استطلاعًا للرأيِ لتجميعِ البياناتِ المطلوبةِ لهذه السماتِ. يُمكِنُ أن تشملَ هذه البياناتُ المادّةَ المفضَّلةَ، المعلِّمَ، الرياضاتِ، الألعابَ، الهواياتِ، النوادي، الموسيقى، الأفلامَ أو الطعامَ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

اقرأْ كلَّ مسألةٍ وأجِبْ عن الأسئلةِ المتعلِّقةِ بها.

١ في منافساتِ رياضةِ لوحِ التزلّجِ، يقومُ ٥ حكّامٍ بوضعِ نقاطٍ من ١٠٠ نقطةٍ ثمّ تُستبعَدُ أعلى وأدنى نتيجتين، ويُؤخَذُ متوسِّطُ الثلاثِ نتائجَ الباقيةِ لتحديدِ ما حصلَ عليه كلُّ متزلِّجٍ في الدورةِ. إذا كانَتْ نتائجُ المتسابقةِ «مها» هي: ٨٢، ٨٥، ٨٧، ٨٥، ٨٤. وكانَتْ نتائجُ «شيماءَ» هي ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٤، ٨٨. فمن الفائزةُ في السباقِ؟

(أ) عمَّ تدورُ المسألةُ؟

(ب) ماذا تتطلّبُ المسألةُ؟

(جـ) ما أعلى نتيجةٍ حصلَتْ عليها مها؟ ما أعلى نتيجةٍ حصلَتْ عليها شيماءُ؟

(د) ما أدنى نتيجةٍ حصلَتْ عليها مها؟ ما أدنى نتيجةٍ حصلَتْ عليها شيماءُ؟

(هـ) ضَعْ سؤالًا من عندِك، ثمّ أجِبْ عليه.

٢ يبيعُ أحدُ محالِّ الأدواتِ الرياضيّةِ كلَّ جزءٍ من ألواحِ التزلّجِ وفقَ الطلبِ منفردًا مقابلَ ١٤ دينارًا، والعجلاتِ الأربعَ مقابلَ ٨ دنانيرَ، ومحملَ العجلاتِ مقابلَ ٤ دنانيرَ، والكاملَ ذا العجلاتِ مقابلَ ١٠ دنانيرَ. كما يُعطي خصمًا قدرُه ٢٠٪ على لوحِ التزلّجِ الذي تُشترى كلُّ من مكوِّناتِه على حدةٍ ثمّ يتمُّ تجميعُها. أمّا لوحُ التزلُّجِ الجاهزُ فيُكلِّفُ ٢٨ دينارًا.

أيُّ لوحي التزلّجِ أدنى سعرًا؟

(أ) عمَّ تدورُ المسألةُ؟

(ب) ماذا تتطلّبُ المسألةُ؟

(جـ) ما التكلفةُ الإجماليّةُ للوحِ التزلّجِ المباعِ أجزاءً قبلَ الخصمِ؟

(د) ما مقدارُ الخصمِ على لوحِ التزلّجِ المباعِ أجزاءً؟

(هـ) ضَعْ سؤالًا من عندِك، ثمّ أجِبْ عليه.

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

قراءةُ المسألةِ

عندما تقرأُ مسألةً ما ربّما تكونُ كمّيّةُ المعلوماتِ الواردةِ فيها كبيرةً. يُمكِنُ أن يُساعِدَك تجزيءُ تلك المعلوماتِ إلى أجزاءٍ صغيرةٍ على فهمِ المسألةِ ككلٍّ. اسألْ نفسَك أسئلةً كي تكونَ واثقًا من فهمِك لكلِّ جزءٍ من المسألةِ.

عرضُ البياناتِ
Data Presentations

كسبُ النقودِ وإنفاقُها

هل تُريدُ أن تجنيَ نقودًا كثيرةً؟

هل تُريدُ عملًا تجاريًّا ناجحًا؟

إذا كنْتَ تُريدُ ذلك فعليك أن تبتكرَ أو تعملَ أو تُنتِجَ منتَجًا يشتريه الشبابُ (بنينٌ وبناتٌ)؛ لماذا؟

لأنّ الشبابَ يُنفِقون كلَّ عامٍ ملايينَ الدنانيرِ.

وهم لا يُنفِقون المالَ الكثيرَ فقط، بل يُؤثِّرون أيضًا على إنفاقِ أصدقائِهم وأسرِهم.

علامَ يُنفِقُ الشبابُ أموالَهم؟ ربّما على أحدثِ الألعابِ الإلكشترونيّةِ أو الأزياءِ أو التكنولوجيا، وهي الأشياءُ التي يعرفُ عنها المراهقون أكثرَ من البالغين. تحديدًا كيف يحصلُ الشبابُ على المالِ؟ إنّهم يحصلون عليه بالطريقةِ التقليديّةِ؛ يجنونه من مصروفِ الوالدين، والهدايا النقديّةِ (عيديّةٍ) في الأعيادِ والمناسباتِ، والعملِ في خلالِ الإجازةِ الصيفيّةِ.

إنّ المدهشَ حقًّا هو أنّ تعدادَ الشبابِ يتزايدُ في بعضِ الدولِ، وبالتالي فإنّ الإنفاقَ سوف يتزايدُ أيضًا ليصلَ في الأعوامِ القليلةِ القادمةِ إلى ملايينِ الدنانيرِ. أي أنّ التزايدَ في أعدادِ الشبابِ سيتبعُه تزايدٌ في الإنفاقِ.

١ كيف تُؤثِّرُ على المشترَياتِ اللازمةِ لمنزلِك؟

٢ من وجهةِ نظرِك كيف توقّعَ الخبراءُ تعدادَ الشبابِ (المراهقين) عامَ ٢٠١٥؟

١-٢ تسجيلُ وتنظيمُ البياناتِ وتمثيلُها

Recording, Organizing and Graphing Data

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ تسجيلِ البياناتِ واختيارِ الطريقةِ المناسبةِ لتنظيمِها وتمثيلِها.

من الاستخداماتِ

- جامعو البياناتِ، هم الأشخاصُ الذين يُجرون الاستطلاعَ ويعرفون الهدفَ من بياناتِهم لكي يُنظِّموها بطريقةٍ مناسبةٍ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- علاماتٌ تكراريّةٌ Tally marks
- تكراراتٌ Frequencies
- جدولٌ تكراريٌّ ذو فئاتٍ Frequency Classes Table
- مدرَّجٌ تكراريٌّ Histogram

صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ طرقًا مختلِفةً لعرضِ البياناتِ، والآن سوف تتعلّمُ كيفيّةَ تنظيمِ البياناتِ المجمَّعةِ.

استكشِفْ تنظيمُ البياناتِ

الرياضةُ للجميعِ

الأدواتُ المستخدَمةُ: أوراقُ رسمٍ بيانيٍّ

١ اطلبْ من كلِّ فردٍ في مجموعتِك أن يُجيبَ عن الأسئلةِ التي إلى اليسارِ.

كم عددُ ساعاتِ الرياضةِ التي تُمارِسُها شهريًّا؟
كم جهازًا رياضيًّا تملكُ؟
ما نوعُ الرياضةِ التي تُفضِّلُها؟
من هو رياضيُّك المفضَّلُ؟

٢ اطلبْ من كلِّ فردٍ في مجموعتِك أن يُسجِّلَ هذه المعلوماتِ.

٣ قارِنْ كيف نظّمَ كلٌّ منكم البياناتِ. لاحِظْ أوجهَ التشابهِ والاختلافِ.

٤ تبادلِ البياناتِ مع مجموعةٍ أخرى بتبادلِ مجموعةِ البياناتِ المسجَّلةِ. الآن صارَتِ العيّنةُ أكبرَ.

٥ استخدِمْ هذه العيّنةَ الكبرى في حسابِ المتوسِّطِ الحسابيِّ والوسيطِ لكلٍّ من:

(أ) عددِ ساعاتِ الرياضةِ التي تُمارِسُها شهريًّا.

(ب) عددِ الأجهزةِ الرياضيّةِ التي لدى الأفرادِ.

٦ اجعلْ فردًا من كلِّ مجموعةٍ يبتكرُ عرضًا للبياناتِ (مثلَ تمثيلٍ بيانيٍّ بالأعمدةِ، تمثيلٍ بيانيٍّ بالنقاطِ المجمَّعةِ، تمثيلٍ بيانيٍّ بالخطوطِ مستخدِمًا البياناتِ في العيّنةِ الكبرى.

٧ كوِّنِ استنتاجًا مبنيًّا على عرضِ بياناتٍ ممثِّلًا كلَّ مجموعةٍ.

٨ هل يُمكِنُك جعلُ الاستنتاجِ ممثِّلًا لفصلِك؟ لمدرستِك؟ لمدينتِك؟ لماذا نعم أو لماذا لا؟

تعلَّمْ — تسجيلُ البياناتِ وتنظيمُها

مهما كانَ موضوعُ البحثِ، فإنّ جمعَ البياناتِ غالبًا ما يتضمّنُ الكثيرَ من الحسابِ. تُستخدَمُ **العلاماتُ التكراريّةُ** كطريقةٍ سريعةٍ لتسجيلِ العدِّ، وتُستخدَمُ أيضًا لتحديدِ **تكرارِ** عددِ مرّاتِ حدوثِ الشيءِ.

يُوضِّحُ **الجدولُ التكراريُّ** أصنافَ الأشياءِ والعلاماتِ التكراريّةَ والتكرارَ الذي حدثَ.

لونُ السيّارةِ	العلاماتُ التكراريّةُ	التكرارُ
أزرقُ	𝍸 𝍸 ||	٧
أصفرُ	𝍸 ||||	٤
أبيضُ	𝍸 𝍸 𝍸	١٠
أحمرُ	𝍸 ||	٧

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المقابلُ ألوانَ السيّاراتِ التي شوهِدَتْ في إحدى ساحاتِ الانتظارِ. وتُستخدَمُ العلاماتُ التكراريّةُ لعدِّ السيّاراتِ.

التمثيلاتُ البيانيّةُ بالنقاطِ المجمَّعةِ أو مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ: يُفيدان في عدِّ قيمِ البياناتِ (مثلًا العمرُ، الصفُّ). ويفيدُ **المدرَّجُ التكراريُّ** عندما تتساوى الفتراتُ (مثلًا عقودٌ من الزمنِ، مجموعاتٌ عمريّةٌ).

تذكَّرْ

١ **الفئةُ ٦٠ – تعني من ٦٠ إلى أصغرَ من ٧٠.**

٢ **بإمكانِك تغييرُ طولِ الفئةِ.**

٣ **بإمكانِك تغييرُ عددِ الفئاتِ.**

مثالٌ (١)

جاءَتِ الدرجاتُ النهائيّةُ لـ ٣٢ طالبًا في أحدِ الاختباراتِ كالتالي: (النهايةُ العظمى ١٠٠).

٨٨، ٩٧، ٦٢، ٧١، ٧٧، ٨٦، ٨٩، ٩٩، ٦٦، ٧٠، ٧٥، ٨٢، ٦٥، ٧٨، ٨٤، ٧٤، ٨٠، ٨٥، ٦٠، ٨٣، ٧٦، ٧٣، ٨٧، ٧٨، ٧٥، ٧٩، ٨١، ٩٢، ٧٩، ٨١، ٧٧، ٧٦.

كوِّنْ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ منتظِمةٍ عددُها مناسِبٌ.

الحلُّ: المدى = أكبرَ قيمةٍ – أصغرَ قيمةٍ

= ٩٩ – ٦٠ = ٣٩

نفرضُ عددَ الفئاتِ ٤

إذًا طولُ الفئةِ = المدى ÷ عددِ الفئاتِ = ٣٩ ÷ ٤ ≈ ١٠

الدرجاتُ النهائيّةُ للطلبةِ في الاختبارِ		
الفئاتُ	العلاماتُ	التكرارُ
٦٠ –	||||	٤
٧٠ –	𝍸 𝍸 ||||	١٤
٨٠ –	𝍸 𝍸 |	١١
٩٠ –	|||	٣
المجموعُ		٣٢

حاوِلْ أن تحلَّ

١ **في مسابقةِ رميِ الرمحِ لفئةِ الناشئين سُجِّلَتِ المسافاتُ بالمترِ لـ ٢٤ متسابقًا وكانَتْ كالتالي: ٦٢، ٤٧، ٦٦، ٦٠، ٥٢، ٦٩، ٤٩، ٦٥، ٥٤، ٦٠، ٦١، ٤٢، ٥٥، ٥٨، ٤٠، ٥٨، ٥٢، ٦٤، ٦٥، ٥٠، ٥٣، ٥٨، ٥٦، ٥٩.**

كوِّنْ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ منتظِمةٍ عددُها مناسِبٌ.

مثالٌ (٢)

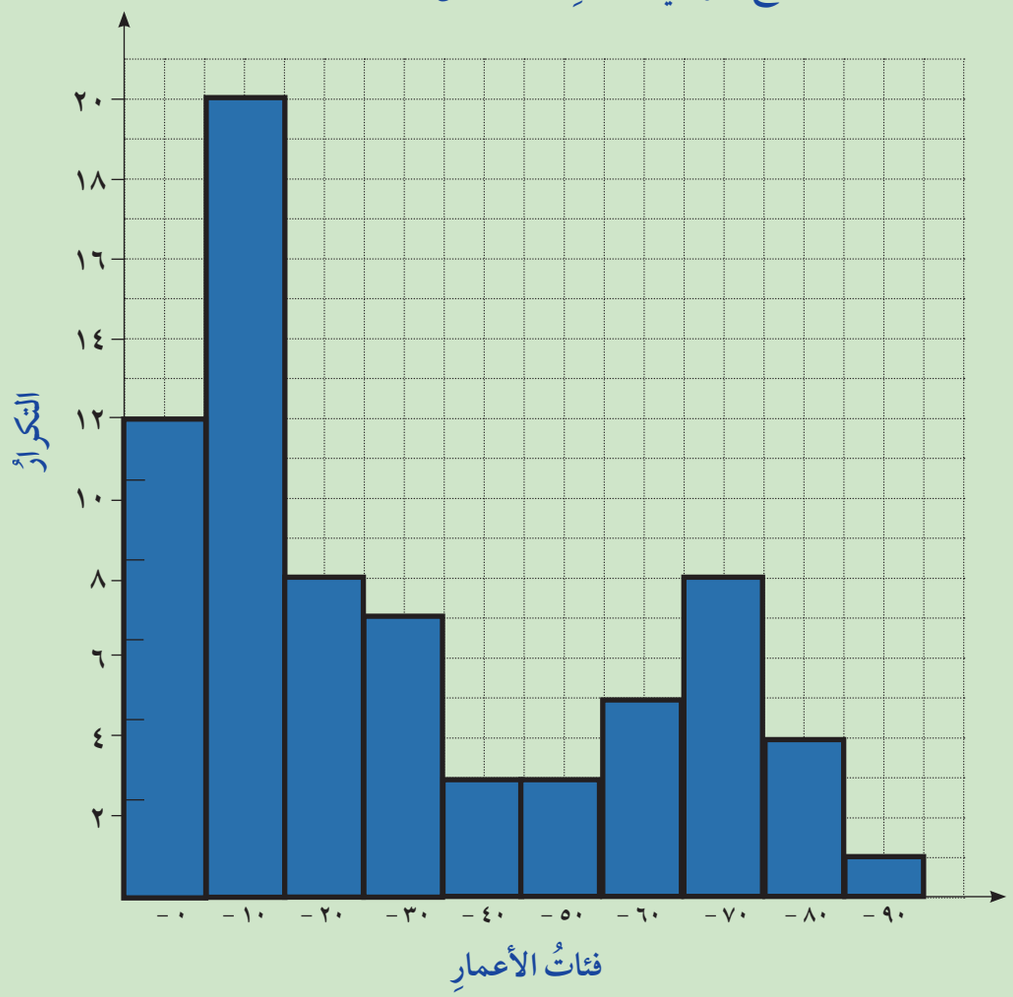
في نهايةِ كلِّ حلقةٍ من برنامجِ حوارٍ تلفزيونيٍّ يُدعى المشاهدون إلى الكتابةِ لمنتِجي البرنامجِ، ويُطلَبُ منهم كتابةُ العمرِ وذِكرُ الموضوعاتِ التي يرغبون في مشاهدتِها بالبرنامجِ.

استخدِمِ الجدولَ التكراريَّ لصنعِ مدرَّجٍ تكراريٍّ ثمّ بيِّنْ أي الفئاتِ العمريّةِ هم مشاهدون متجاوبون جدًّا مع البرنامجِ الحواريِّ.

الفئاتُ (الأعمارُ)	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –
التكرارُ	١٢	٢٠	٨	٧	٣	٣	٥	٨	٤	١

إنّ صنعَ مدرَّجٍ تكراريٍّ يُشبِهُ صنعَ تمثيلٍ بيانيٍّ بالأعمدةِ إلا أنّ الأعمدةَ فيه تكون متلاصقة.

مدرَّجٌ تكراريٌّ لأعمارِ المشاهدين



عندَ النظرِ إلى المدرَّجِ التكراريِّ، يتّضحُ لك أنّ الفئةَ العمريّةَ ١٠ – هم مشاهدون متجاوبون جدًّا مع هذا البرنامجِ الحواريِّ.

معلومةٌ مفيدةٌ

لصنعِ مدرَّجٍ تكراريٍّ، ارسمْ عمودًا لكلِّ فئة شكلٍ مستطيلٍ عرضُه يدلُّ على طولِ الفئةِ. وطولُه يدلُّ على قيمةِ التكرارِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ السرعةُ القصوى في أحدِ الشوارعِ التجاريّةِ في مدينةِ الكويتِ العاصمةِ هي ٤٥ كم/ س.

يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ المخالفاتِ المسجَّلةِ بحقِّ كلِّ سائقٍ لم يلتزمْ بالقانونِ.

فئاتُ السرعةِ	العلاماتُ التكراريّةُ	التكرارُ
٤٥ –	𝍸	٥
٥٠ –	𝍸 |||	٨
٥٥ –	𝍸 𝍸 ||	١٢
٦٠ –	𝍸 |	٦
٦٥ –	|||	٣

اصنعْ مدرَّجًا تكراريًّا باستخدامِ الجدولِ أعلاه.

تحقَّقْ من فهمِك

١ نظِّمْ قائمةً لمواقفَ تكونُ فيها معرفةُ التكرارِ هامّةً.

٢ متى استخدمْتَ علاماتٍ تكراريّةً في الماضي؟ كيف استخدمْتَ العلاماتِ التكراريّةَ؟

٣ لماذا يكونُ تنظيمُ البياناتِ في المثالِ (٢) بمدرَّجٍ تكراريٍّ أفضلَ منه بالتمثيلِ البيانيِّ بالنقاطِ المجمَّعةِ؟

المرشِدُ لحلِّ المسائلِ (٢-١)

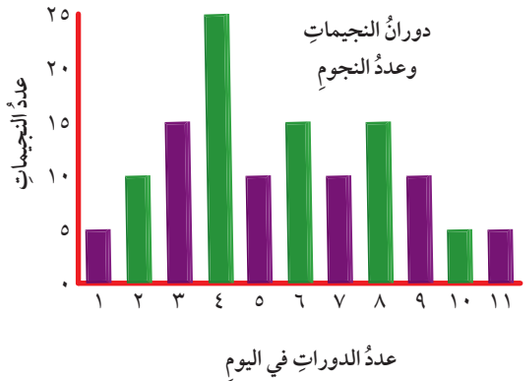
حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

(النجيماتُ) Asteroids هي قطعٌ صخريّةٌ غليظةٌ قصيرةٌ ناجمةٌ من حركةِ دورانِ الشمسِ، يكونُ معظمُها بينَ مداري كوكبِ المرّيخِ وعطاردَ. درسَ الفلكيّون ١٢٥ من هذه النجيماتِ ليتعرّفوا سرعةَ دورانِها. البياناتُ مقرَّبةٌ إلى أقربِ دورانٍ للنجيماتِ، وتمَّ تلخيصُها في التمثيلِ البيانيِّ بالأعمدةِ أدناه.

(أ) كم عددُ النجيماتِ التي تدورُ ٤ دوراتٍ في اليومِ؟

(ب) كوِّنْ جدولًا تكراريًّا لهذا التمثيلِ البيانيِّ.

(جـ) ما المنوالُ؟



افهمْ

١ حوِّطْ ما يُطلَبُ منك عملُه؟

خطِّطْ

٢ سَمِّ الأعمدةَ في الجدولِ التكراريِّ. .....

.....

حُلَّ

٣ كم عددُ النجمياتِ التي تدورُ ٤ دوراتٍ في اليومِ؟ .....

٤ أكمِلِ الجدولَ التكراريَّ.

٥ ما المنوالُ؟ .....

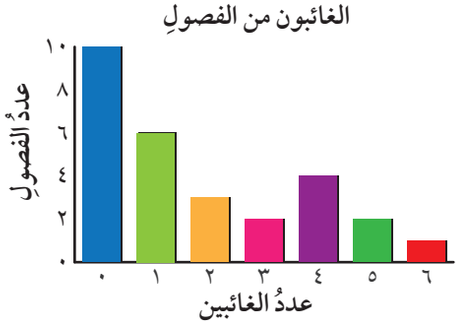
تحقَّقْ

٦ كيف تعرفُ أنّ كلَّ البياناتِ سُجِّلَتْ؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٧ يُوضِّحُ التمثيلُ البيانيُّ المقابلُ عددَ الغائبين في فصولِ إحدى المدارسِ المتوسِّطةِ.



(أ) كم فصلًا فيه ٥ غائبين؟ .....

(ب) اصنعْ جدولًا تكراريًّا لهذه البياناتِ على ورقةٍ أخرى.

(جـ) ما المنوالُ؟ .....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الرياضيُّ**: طُبِّقَ استطلاعٌ صغيرٌ على مجموعةٍ من الأفرادِ تتراوحُ أعمارُهم ما بينَ ١٢، ١٩ سنةً. كانَ السؤالُ «ما الذي يُقلِقُك بالدرجةِ الأولى»؟ أعطى كلُّ شخصٍ إجابةً واحدةً، وقد تمَّ فصلُ إجاباتِ الإناثِ عن الذكورِ. اصنعْ تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدةِ المزدوجةِ، وكوِّنِ استنتاجًا قائمًا على التكراراتِ.

ما يُقلِقُ بالدرجةِ الأولى	إناثٌ	ذكورٌ
التقديراتُ (نتيجةُ الاختبارِ)	٧	٥
الحصولُ على المالِ الكافي	٤	٥
كيف أبدو؟	٨	٣
التخطيطُ المستقبليُّ	٤	٢
الوالدان	٣	٣
أن أكونَ محورَ الحديثِ	٣	٣

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

يُمكِنُ أن يكونَ جدولُ التكراراتِ طريقةً فعّالةً لتنظيمِ المعلوماتِ لبعضِ المسائلِ.

٢ **التواصلُ**: إذا كنْتَ تصنعُ للشبابِ منتَجًا من اختيارِك، فكيف ستستخدمُ بياناتِ «عمّا يُقلِقُهم بالدرجةِ الأولى» كما في التمرينِ السابقِ؛ لتُخطِّطَ لحملةِ دعايةٍ للسنواتِ العشرِ المقبلةِ؟ ما هو منتَجُك؟ وكيف سيُؤثِّرُ على حملتِك الدعائيّةِ؟

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٢-٢

مقاييسُ النزعةِ المركزيّةِ

Measures of Central Tendency

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ تحليلِ وتمثيلِ البياناتِ باستخدامِ المتوسِّطِ الحسابيِّ والوسيطِ والمنوالِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ وسطاءُ العقاراتِ هذه الأعدادَ لتحديدِ كيفيّةِ سيرِ الحركةِ في سوقِ العقاراتِ.

◄ صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ كيفيّةَ عرضِ البياناتِ بالتمثيلِ البيانيِّ بالنقاطِ المجمَّعةِ وبمخطّطاتِ الساقِ والأوراقِ، والآن سوف تتعلّمُ كيفيّةَ تلخيصِ البياناتِ العدديّةِ بعددٍ. ►

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- ◄ مقاييسُ النزعةِ المركزيّةِ Central Tendency
- ◄ متوسِّطٌ حسابيٌّ Mean
- ◄ وسيطٌ Median
- ◄ قيمٌ متطرِّفةٌ Outlier
- ◄ منوالٌ Mode
- ◄ مركزُ الفئةِ Center of an interval

استكشِفْ: المتوسِّطُ الحسابيُّ، الوسيطُ، المنوالُ

ينتخبُ طلّابُ الجامعاتِ مندوبين عنهم لتشكيلِ مجلسِ الطلبةِ. يتوقّفُ عددُ المندوبين على عددِ الطلّابِ المسجَّلين في كلِّ كلّيّةٍ.

اسمُ الكلّيّةِ	عددُ المندوبين	اسمُ الكلّيّةِ	عددُ المندوبين
كلّيّةُ العلومِ	٤	كلّيّةُ العلومِ الاجتماعيّةِ	٢
كلّيّةُ الآدابِ	٣	كلّيّةُ التربيةِ	٢
كلّيّةُ الطبِّ	٢	كلّيّةُ الحقوقِ	٤
كلّيّةُ الهندسةِ	٣	كلّيّةُ الشريعةِ والدراساتِ الإسلاميّةِ	٢
كلّيّةُ العلومِ الإداريّةِ	٥		

١ ما العددُ الكلّيُّ للمندوبين في مجلسِ الطلبةِ لهذه الجامعةِ؟

٢ أيُّ كلّيّةٍ لها أكبرُ عددٍ من المندوبين؟ كم مندوبًا لها؟

٣ ما المتوسِّطُ الحسابيُّ لمندوبي الكلّيّاتِ؟

٤ افترضْ أنّ لهذه الكلّيّاتِ التسعِ ٥٤ مندوبًا في مجلسِ الطلبةِ وهي تتمثّلُ بالتساوي. فكم مندوبًا لكلِّ كلّيّةٍ؟

تعلَّمْ: مقاييسُ النزعةِ المركزيّةِ

مقياسُ النزعةِ المركزيّةِ هو قيمةٌ مفردةٌ تُلخِّصُ مجموعةً من البياناتِ العدديّةِ.

المتوسِّطُ الحسابيُّ هو مجموعُ القيمِ مقسومًا على عددِها.

مثالٌ (١)

في دوريِّ كرةِ القدمِ لفرقِ الدرجةِ الأولى ٢٠٠٦-٢٠٠٧ جاءَتْ نقاطُ الفرقِ المشارِكةِ كما يأتي: كاظمةُ (٣٢)، الكويتُ (٣٢)، السالميَّةُ (٣١)، القادسيَّةُ (٢٥)، الساحلُ (١٢)، العربيُّ (٩)، التضامنُ (٩)، الفحيحيلُ (٨).

(أ) كوِّنْ جدولًا تكراريًّا للبياناتِ.

(ب) أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ للنقاطِ.

الحلُّ: (أ)

النقاطُ	٣٢	٣١	٢٥	١٢	٩	٨
العلاماتُ التكراريّةُ	//	/	/	/	//	/
التكرارُ	٢	١	١	١	٢	١

(ب)

المتوسِّطُ الحسابيُّ =

$$\frac{(٢ \times ٣٢) + (١ \times ٣١) + (١ \times ٢٥) + (١ \times ١٢) + (٢ \times ٩) + (١ \times ٨)}{٨} = \frac{١٥٨}{٨} = ١٩,٧٥$$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ كوِّنْ جدولًا مشابِهًا للجدولِ أعلاه لتجدَ المتوسِّطَ الحسابيَّ للبياناتِ التالية:

٧، ٨، ٦، ٧، ٥، ٨، ٦، ٦، ٩، ٧، ٤، ٩، ٩.

مثالٌ (٢)

بلغَتْ أطوالُ قاماتِ تلاميذِ أحدِ الصفوفِ بالسنتيمترِ كالتالي: ١٨٠، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٠، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٢، ١٦٥، ١٦٨، ١٦٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٦٩، ١٧٦، ١٨٤، ١٦٦، ١٧٤، ١٦٨، ١٦٩، ١٧١.

الجدولُ

الفئاتُ	علاماتُ العدِّ	التكرارُ
١٦٥ –	𝍸 |	٦
١٦٩ –	𝍸 ||	٧
١٧٣ –	|||	٣
١٧٧ –	|||	٣
١٨١ –	|	١

(أ) أوجِدِ المدى لهذه البياناتِ.

(ب) كوِّنْ جدولًا تكراريًّا مستخدِمًا فئاتٍ مناسِبةً ومنتظِمةً.

(جـ) أكمِلِ الجدولَ بإيجادِ مركزِ كلِّ فئةٍ.

(د) أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ لهذه البياناتِ مستخدِمًا مراكزَ الفئاتِ.

معلومةٌ مفيدةٌ

$$\text{مركزُ الفئةِ} = \frac{\text{الحدُّ الأدنى} + \text{الحدَّ الأعلى}}{٢}$$

تذكَّرْ

المدى = أكبرَ قيمةٍ – أصغرَ قيمةٍ

الحلُّ: (أ) المدى = أكبرَ قيمةٍ – أصغرَ قيمةٍ = ١٨٤ – ١٦٥ = ١٩

(ب) نفرضُ عددَ الفئاتِ ٥، فيكونُ طولُ الفئةِ $\frac{١٩}{٥} \approx ٤$

(جـ) مركزُ الفئةِ هو المتوسِّطُ الحسابيُّ لطرفيها وبالتالي:

الفئاتُ	علاماتُ العدِّ	التكرارُ	مركزُ الفئات
١٦٥ –	𝍸 |	٦	١٦٧
١٦٩ –	𝍸 ||	٧	١٧١
١٧٣ –	|||	٣	١٧٥
١٧٧ –	|||	٣	١٧٩
١٨١ –	|	١	١٨٣

مركزُ الفئةِ ١٦٥ – $= \frac{١٦٥ + ١٦٩}{٢}$

$= ١٦٧$

مركزُ الفئةِ ١٦٩ – $= \frac{١٦٩ + ١٧٣}{٢}$

$= ١٧١$

مركزُ الفئةِ ١٧٣ – $= \frac{١٧٣ + ١٧٧}{٢}$

$= ١٧٥$

مركزُ الفئةِ ١٧٧ – $= \frac{١٧٧ + ١٨١}{٢}$

$= ١٧٩$

مركزُ الفئةِ ١٨١ – $= \frac{١٨١ + ١٨٥}{٢}$

$= ١٨٣$

(د) المتوسِّطُ الحسابيُّ $= \frac{\text{مركزُ الفئةِ الأولى} \times \text{تكرارِها} + \text{مركزَ الفئةِ الثانيةِ} \times \text{تكرارِها} + \ldots\ldots}{\text{مجموعِ التكراراتِ}}$

المتوسِّطُ الحسابيُّ $= \frac{(٦ \times ١٦٧) + (٧ \times ١٧١) + (٣ \times ١٧٥) + (٣ \times ١٧٩) + (١ \times ١٨٣)}{٢٠}$

$= \frac{٣٤٤٤}{٢٠} = ١٧٢,٢$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ كوِّنْ جدولًا تكراريًّا آخرَ لأطوالِ قاماتِ الطلّابِ في المثالِ (٢)، ثمّ أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ. ماذا تُلاحِظُ بالمقارنةِ مع الإجابةِ في المثالِ؟

الوسيطُ: هناك مقياسٌ آخرُ للنزعةِ المركزيّةِ هو «الوسيطُ» ومعناه القيمةُ الوسطى لمجموعةِ بياناتٍ. ويُحدَّدُ الوسيطُ عندما تُرتَّبُ البياناتُ حسبَ قيمتِها العدديّةِ تصاعديًّا أو تنازليًّا، فإذا كانَ عددُ قيمِ تلك البياناتِ زوجيًّا يكونُ الوسيطُ هو متوسِّطَ القيمتين الوسيطتين. وإذا كانَ عددُ قيمِ تلكَ البياناتِ فرديًّا يكون الوسيطُ هو القيمةَ الوسطى.

ويُمكِنُ أن يكونَ الوسيطُ مقياسًا أفضلَ للنزعةِ المركزيّةِ من المتوسِّطِ الحسابيِّ وذلك عندما تحتوي مجموعةُ البياناتِ على **قيمٍ متطرِّفةٍ**، أي قيمٍ بعيدةٍ عن معظمِ مجموعةِ البياناتِ.

المنوالُ: هو أكثرُ القيمِ تكرارًا، فإذا لم تتكرّرْ أيُّ قيمةٍ أكثرَ من مرّةٍ، إذًا لا يوجَدُ منوالٌ، ويُمكِنُ أن يوجَدَ أكثرُ من منوالٍ لمجموعةٍ من القيمِ.

أمثلةٌ

٣ نالَ أحدُ التلاميذِ في عشرةِ امتحاناتٍ الدرجاتِ التاليةَ:
٦٩، ٧٠، ٥٩، ٦١، ٦٦، ٦٧، ٧٠، ٧٣، ٦٦، ٩٣.
أوجِدِ الوسيطَ والمنوالَ لهذه الدرجاتِ.

٥٩، ٦١، ٦٦، ٦٦، ٦٧، ٦٩، ٧٠، ٧٠، ٧٣، ٩٣ — رتِّبِ القيمَ ترتيبًا عدديًّا (تصاعديًّا)

٥٩، ٦١، ٦٦، ٦٦، ٦٧، ٦٩، ٧٠، ٧٠، ٧٣، ٩٣ — عددُ القيمِ (١٠) زوجيٌّ، توجَدُ قيمتان وسيطتان

أوجِدْ متوسِّطَ القيمتين الوسيطتين

$$\frac{٦٧ + ٦٩}{٢} = ٦٨$$

٦٨ هو الوسيطُ لهذه الدرجاتِ.

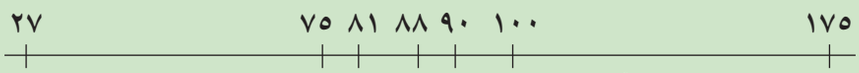
يوجَدُ منوالان هما ٦٦، ٧٠

٤ يرغبُ محلٌّ لبيعِ الإلكترونيّاتِ في زيادةِ عملائِه الشبابِ، فيبيعُ مشغِّلاتِ الأسطواناتِ المدمَجةِ بالأسعارِ التاليةِ: ٩٠ دينارًا، ٧٥ دينارًا، ١٧٥ دينارًا، ٨٨ دينارًا، ٢٧ دينارًا، ١٠٠ دينارٍ، ٨١ دينارًا. فما هو السعرُ الوسيطُ؟

هل توجَدُ قيمٌ متطرِّفةٌ في هذه الأسعارِ؟

نكتبُ القيمَ بترتيبٍ تصاعديٍّ.

أسعارُ مشغِّلاتِ الأسطواناتِ المدمَجةِ



فيكونُ السعرُ الوسيطُ ٨٨ دينارًا، ويكونُ ٢٧ دينارًا و١٧٥ دينارًا قيمًا متطرِّفةً.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

يُمكِنُ رؤيةُ القيمِ المتطرّفةِ بطريقةٍ أسهلَ إذا مثّلْتَ البياناتِ على خطِّ الأعدادِ المرسومِ بمقياسٍ دقيقٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ سُئِلَ عشرةُ أشخاصٍ أعمارُهم بينَ ١٢ و١٥ عامًا: «كم دينارًا تُنفِقُه كلَّ أسبوعٍ؟» كانَتِ الإجاباتُ: ٢، ١٠، ٥، ١٥، ٣، ٥، ٥، ١٥، ١٠، ٤٠.

(أ) أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ للدنانيرِ المنفَقةِ كلَّ أسبوعٍ لهذه المجموعةِ؟

(ب) أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ للدنانيرِ المنفَقةِ كلَّ أسبوعٍ لهذه المجموعةِ دونَ اعتبارِ القيمِ المتطرِّفةِ، ماذا تُلاحِظُ؟

ما رأيُك؟

سُجِّلَتْ أعدادُ الدجاجِ التي ربّاها ماجدٌ في المنزلِ سنويًّا من عامِ ٢٠٠٥ إلى عامِ ٢٠١٣ في الجدولِ التالي. استخدِمْ أحدَ مقاييسِ النزعةِ المركزيّةِ لإيجادِ ملخَّصٍ لإنتاجِه خلالَ التسعِ سنواتٍ المذكورةِ.

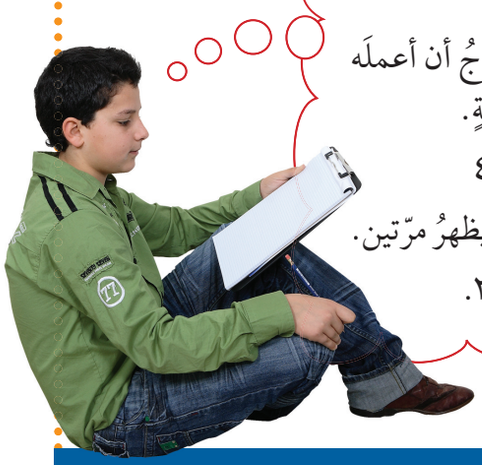
السنةُ	٠٥	٠٦	٠٧	٠٨	٠٩	١٠	١١	١٢	١٣
العددُ	٢٥	٢٤	١٩	٣٣	٢٥	٣٤	٤٦	٣٧	٣٣

ماجدٌ يُفكِّرُ...

سوف أوجِدُ المتوسِّطَ الحسابيَّ. سأجمعُ أوّلًا عددَ الدجاجِ ثمّ أقسمُ على ٩ لأنّني جمعْتُ ٩ أعدادٍ.

$$\frac{٢٥ + ٢٤ + ١٩ + ٣٣ + ٢٥ + ٣٤ + ٤٦ + ٣٧ + ٣٣}{٩} \approx ٣٠,٦٧$$

فإذا قرّبْتُ الإجابةَ يكونُ المتوسِّطُ ٣١ دجاجةً سنويًّا.



سالمٌ يُفكِّرُ...

سوف أوجِدُ الوسيطَ والمنوالَ. كلُّ ما أحتاجُ أن أعملَه هو أن أُرتِّبَ أعدادَ الدجاجِ بطريقةٍ تصاعديّةٍ.

١٩، ٢٤، ٢٥، ٢٥، ٣٣، ٣٣، ٣٤، ٣٧، ٤٦

يبدو أنّه يوجَدُ منوالان: ٢٥، ٣٣، كلٌّ منهما يظهرُ مرّتين.

العددُ الأوسطُ هو ٣٣، لذا فالوسيطُ هو ٣٣.

ما رأيُك؟

١ أيُّ منوالٍ هو الأقربُ إلى وسيطِ البياناتِ؟ وضِّحْ إجابتَك.

٢ من وجهةِ نظرِك، لماذا كانَ للمتوسِّطِ الحسابيِّ والوسيطِ القيمةُ نفسُها تقريبًا؟

تحقَّقْ من فهمِك

١ ما تأثيرُ القيمِ المتطرِّفةِ على المتوسِّطِ الحسابيِّ والوسيطِ لمجموعةٍ من البياناتِ؟

٢ صِفْ كيف يُمكِنُ إيجادُ وسيطِ مجموعةٍ من البياناتِ لها عددٌ زوجيٌّ من القيمِ.

أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ:

منذُ عامِ ١٩٨٢ إلى عامِ ١٩٩٠، كانَ عددُ ناقلاتِ البترولِ التي تنتشرُ في العالمِ سنويًّا هو:
٩، ١٧، ١٥، ٩، ٨، ١٢، ١٣، ٨٩، ٨. عيِّنِ القيمةَ المتطرِّفةَ واحسبِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لمجموعةِ البياناتِ دونَ القيمةِ المتطرِّفةِ.

افهمْ

١ حوِّطْ مجموعةَ البياناتِ.

٢ حوِّطْ على المطلوبِ إيجادُه. .....

خطِّطْ

٣ رتِّبِ البياناتِ من الأصغرِ إلى الأكبرِ. .....

٤ كم عددُ قيمِ البياناتِ في مجموعةِ البياناتِ؟ .....

حُلَّ

٥ راجِعْ مجموعةَ بياناتِ ناقلاتِ البترولِ من ١٩٨٢ - ١٩٩٠ أوجِدْ:

(أ) المتوسِّطُ الحسابيُّ (ب) الوسيطُ (جـ) المنوالُ

.....

.....

.....

٦ ما القيمةُ المتطرِّفةُ لهذه البياناتِ؟ .....

٧ ما المتوسِّطُ الحسابيُّ دونَ اعتبارِ القيمةِ المتطرِّفةِ كجزءٍ من البياناتِ؟ .....

٨ ما الوسيطُ دونَ اعتبارِ القيمةِ المتطرِّفةِ كجزءٍ من البياناتِ؟ .....

تحقَّقْ

٩ كيف تغيّرَ المتوسِّطُ الحسابيُّ والوسيطُ عندما قمْتَ بحسابِهما دونَ القيمةِ المتطرِّفةِ؟ ولماذا؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لمجموعةِ البياناتِ حولَ عددِ الدقائقِ التي قضاها بعضُ الطلّابِ في عملِ الواجبِ المنزليِّ لمادّةِ الرياضيّاتِ ٥، ٢٤، ٣١، ٢١، ٢٩. عيِّنِ القيمةَ المتطرِّفةَ، واحسبِ المتوسِّطَ الحسابيَّ والوسيطَ لمجموعةِ البياناتِ دونَ القيمةِ المتطرِّفةِ. .....

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **اخترِ الإستراتيجيّةَ**: باعَ محلٌّ مجموعةً من الهدايا التذكاريّةِ لزيادةِ دخلِه: ٦١ صحنًا للحلوى ثمنُ الصحنِ الواحدِ ٢٠٠ فلسٍ، و٥٧ قلمَ حبرٍ ثمنُ القلمِ الواحدِ ٣٠٠ فلسٍ، و١٩ فنجانًا ثمنُ الفنجانِ الواحدِ ٥٠٠ فلسٍ، و٤٥ سلسلةَ مفاتيحَ ثمنُ السلسلةِ الواحدةِ ٨٠٠ فلسٍ، و٣ قمصانٍ ثمنُ الواحدةِ ١٥ دينارًا. أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ لسعرِ الهديّةِ التذكاريّةِ.

.....

.....

٢ **التفكيرُ الناقدُ**: كوِّنْ مجموعاتٍ من البياناتِ تحوي كلٌّ منها على الأقلِّ ثلاثَ قيمٍ بحيث تجعلُ كلَّ جملةٍ من الجملِ التاليةِ صحيحةً.

(أ) المنوالُ أكبرُ من المتوسِّطِ الحسابيِّ. .....

(ب) المتوسِّطُ الحسابيُّ أكبرُ من الوسيطِ. .....

(جـ) الوسيطُ أكبرُ من المتوسِّطِ الحسابيِّ. .....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٢-٣

التمثيلُ البيانيُّ بالنقاطِ المجمَّعةِ ومخطَّطاتُ الساقِ والأوراقِ

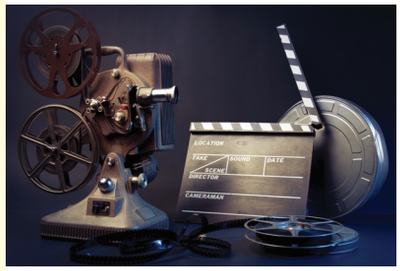
Line plots and Stem-and-Leaf Diagrams

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ فهمِ التمثيلِ البيانيِّ بالنقاطِ المجمّعةِ ومخطَّطاتِ الساقِ والأوراقِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مديرو دورِ العرضِ السينمائيِّ مخطَّطاتِ الساقِ والأوراقِ لتحليلِ أسعارِ التذاكرِ.



المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مدًى Range
- تمثيلٌ بيانيٌّ بالنقاطِ المجمَّعةِ Line Plot
- مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ Steam and Leaf Diagram
- مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ المزدوجُ Double Steam and Leaf Diagram

صلةُ الدرسِ سبقَ أن رأيْتَ كيفيّةَ استخدامِ البياناتِ في الصحفِ والمجلّاتِ. وفي هذا الدرسِ ستتعلّمُ طرقَ استخدامِ ومقارنةِ البياناتِ.

استكشِفْ: التمثيلُ البيانيُّ بالنقاطِ المجمَّعةِ

مفاجآتُ الصيفِ

يأتي فصلُ الصيفِ بنشاطاتٍ متنوِّعةٍ، ففضلًا عن السباحةِ هناك مشاهدةُ الأفلامِ. تربحُ دورُ العرضِ السينمائيِّ ومحلّاتُ أفلامِ الڤيديو الكثيرَ من المالِ في فصلِ الصيفِ. تُرى كم عددُ الأفلامِ التي شاهدْتَها هذا الصيفَ؟

الأفلامُ في دارِ العرضِ

نادرٌ	مباركٌ
×	
×	×
×	×

شاهدَ مباركٌ ٣ أفلامٍ في دارِ عرضِ الأفلامِ

١ كم عددُ الأفلامِ التي شاهدَها كلُّ شخصٍ من مجموعتِك في دارِ العرضِ السينمائيِّ؟ ارسمِ البياناتِ كما هو موضَّحٌ في الشكلِ إلى اليسارِ وضَعْ علامةَ (×) واحدةً لكلِّ فيلمٍ.

٢ كم عددُ أفلامِ الڤيديو التي شاهدَها كلُّ شخصٍ؟ ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا بالنقاطِ المجمَّعةِ مشابهًا لهذا التمثيلِ.

٣ ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا بالنقاطِ المجمَّعةِ يُوضِّحُ العددَ الكلّيَّ للأفلامِ التي شاهدَها كلُّ شخصٍ في مجموعتِك.

٤ كم طالبًا في مجموعتِك شاهدَ أقلَّ من خمسةِ أفلامٍ؟ وكم طالبًا شاهدَ بينَ خمسةِ وعشرةِ أفلامٍ؟ وكم طالبًا شاهدَ أكثرَ من عشرةِ أفلامٍ؟

٥ من دونِ عدٍّ، صِفْ كيف تُحدِّدُ، بالنظرِ إلى التمثيلِ البيانيِّ بالنقاطِ المجمَّعةِ الذي رسمْتَه، من شاهدَ أقلَّ عددٍ من الأفلامِ؟ ومن شاهدَ أكثرَ عددٍ منها؟

٦ ما التقريرُ الذي يُمكِنُك تقديمُه إذا نظرْتَ إلى التمثيلِ البيانيِّ بالنقاطِ المجمَّعةِ؟

تعلَّمْ: التمثيلُ البيانيُّ بالنقاطِ المجمَّعةِ ومخطَّطاتُ الساقِ والأوراقِ

عندَ تداولِ البياناتِ يكونُ من المفيدِ معرفةُ مدى المجموعةِ. **مدى** مجموعةِ بياناتٍ هو الفرقُ بينَ أكبرِ القيمِ وأصغرِها.

ما بينَ عامي ١٩٥٠ و١٩٩٠، ارتفعَ عددُ العواصفِ المداريّةِ سنويًّا حتّى وصلَ في عامِ ١٩٦٩ إلى ١٢ عاصفةً، ثمّ أخذَ المعدَّلُ ينخفضُ حتّى بلغَ عاصفتين عامَ ١٩٨٢.

وبذلك يكونُ مدى العواصفِ المداريّةِ سنويًّا هو ٢ إلى ١٢ أو المدى = ١٢-٢ = ١٠.

إنّ **التمثيلَ البيانيَّ بالنقاطِ المجمَّعةِ** هو عرضٌ للبياناتِ يُوضِّحُ عددَ مرّاتِ حدوثِ قيمةِ كلِّ بيانٍ، وكلّما حدثَتْ قيمةٌ لبيانٍ وُضِعَتْ علامةٌ فوقَ تلك القيمةِ على خطٍّ للأعدادِ أو البياناتِ.

هل تعلمُ؟

يُشاهِدُ الشبابُ القناةَ الثالثةَ الرياضيّةَ أكثرَ من أيِّ قناةٍ تليفزيونيّةٍ أخرى.

مثالٌ (١)

أجرَتْ قناةُ العربيِّ الثقافيّةُ مسابقةً بالسؤالِ التالي: «كم عددُ شبكاتِ التلفزيونِ العربيّةِ التي يُمكِنُك ذكرُها؟» وكانَتِ النتائجُ ممثَّلةً بالنقاطِ المجمَّعةِ في الشكلِ المقابِلِ.

أوجِدْ كلًّا من المدى، المتوسِّطِ الحسابيِّ، الوسيطِ، المنوالِ.

الحلُّ:

القيمةُ الصغرى ٦ والقيمةُ الكبرى ١٧

∴ المدى = ١٧ − ٦ = ١١

$$\text{المتوسِّطُ الحسابيُّ} = \frac{\text{مجموعُ القيمِ}}{\text{عددِها}} = \frac{٦ + ٦ + ٨ + ١٢ + ١٢ + ١٣ + ١٤ + ١٦ + ١٧}{٩}$$

$$= \frac{١٠٤}{٩} \approx ١١,٦$$

الوسيطُ = ١٢

للبياناتِ منوالان هما ٦، ١٢

يستخدمُ **مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ** أرقامَ البياناتِ العدديّةِ لتوضيحِ شكلِ مجموعةِ البياناتِ وتوزيعِها، وكلُّ عددٍ في البياناتِ يُجزَّأُ إلى ساقٍ وورقةٍ.

مثالٌ (٢)

تكلفةُ حفلِ تكريمِ المتفوّقين في إحدى المدارسِ للسنواتِ التسعِ السابقةِ ممثَّلةٌ بمخطَّطِ الساقِ والأوراقِ التالي:

الساقُ	الأوراقُ
٦	١ ٢
٧	٣ ٠ ٧ ٨ ٩
٨	٢ ١ ١ ٥ ٩

أوجِدْ كلًّا من الوسيطِ، والمنوالِ.

الحلُّ: الوسيطُ = ٧٣٩.

المنوالُ = ٨٢١.

نُلاحِظُ في مخطَّطِ الساقِ والأوراقِ أنّ البياناتِ مرتَّبةٌ تصاعديًّا وعددُها ٩.

القيمةُ الصغرى ٦١٢ والقيمةُ الكبرى ٨٢٩

∴ المدى = ٨٢٩ − ٦١٢ = ٢١٧

يُقارِنُ **مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ المزدوجُ** مجموعتين من البياناتِ بذاتِ الصلةِ في مخطَّطٍ واحدٍ.

مثالٌ (٣)

في دوريِّ كرةِ السلّةِ، سجّلَ الفريقُ الذي حلَّ في المرتبةِ الأولى النقاطَ التاليةَ من المبارياتِ التي لعبَها: ٨٥، ٨١، ٨١، ٧٩، ٧٨، ٧٧، ٦٢، ٧٠، ٨٩، وسجّلَ الفريقُ الذي حلَّ في المرتبةِ الثانيةِ النقاطَ التاليةَ في المبارياتِ التي لعبَها: ٨٤، ٧٥، ٧٦، ٨٠، ٨٠، ٨١، ٦٠، ٦١، ٨٧.

استخدِمْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ المزدوجَ لمقارنةِ نتائجِ الفريقين.

الأوراقُ	الساقُ	الأوراقُ
٢	٦	١٠
٠٧٨٩	٧	٦٥
١١٥٩	٨	٧٤١٠٠

يُوضِّحُ مخطَّطُ الساقِ والأوراقِ المزدوجُ أنّ معظمَ نتائجِ الفريقين الأوّلِ والثاني أعلى من سبعين.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ قارِنْ بينَ النقاطِ الكلّيّةِ التي حقّقَها نجما الفريقِ الأوّلِ والفريقِ الثاني خلالَ ٦ مبارياتٍ. استخدِمْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ المزدوجَ.

المباراةُ	١	٢	٣	٤	٥	٦
نجمُ الفريقِ الأوّلِ	٢٨	٢٩	٣٦	٢٣	٢٦	٢٢
نجمُ الفريقِ الثاني	٢١	٢١	١٢	٩	١٤	١٧

يفوزُ فريقٌ في لعبةِ كرةِ السلّةِ إذا انتهى وقتُ المباراةِ وكان متقدِّمًا على الفريقِ المنافسِ بنقطةٍ واحدةٍ على الأقلِّ، أمّا إذا كانَ الفريقان متعادلين يتمُّ تمديدُ وقتِ المباراةِ خمسَ دقائقَ إضافيّةٍ حتّى ينتهيَ الوقتُ بتقدّمِ أحدِ الفريقين.

تحقَّقْ من فهمِك

١ متى تستخدمُ التمثيلَ البيانيَّ بالنقاطِ المجمَّعةِ؟ ومتى تستخدمُ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ؟

٢ كيف يُمكِنُك تحديدُ مدى مجموعةٍ من البياناتِ؟ اذكرْ طريقتين للتعبيرِ عن المدى.

المرشِدُ لحلِّ المسائلِ (٢-٣)

يُمنَحُ الطلّابُ تحتَ سنِّ الـ ١٨ خصمًا للدخولِ إلى المركزِ العلميِّ طوالَ أيّامِ الأسبوعِ خلالَ العامِ الدراسيِّ. اصنعْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ باستخدامِ الجدولِ التالي الذي يُوضِّحُ عددَ الطلّابِ الذين مُنحوا هذا الخصمَ يوميًّا. أوجِدِ الوسيطَ والمنوالَ.

الاثنينُ	الثلاثاءُ	الأربعاءُ	الخميسُ	الجمعةُ	السبتُ	الأحدُ	الاثنينُ	الثلاثاءُ	الأربعاءُ
١٥٤	١٥٢	١٥٧	٢٥١	٣٤٢	٣٤٤	٩٣	٢٥١	٢٥٢	٢٥٥

افهمْ

١ ضَعْ دائرةً حولَ الطريقةِ المطلوبةِ لعرضِ البياناتِ.

٢ ضَعْ خطًّا تحتَ المطلوبِ إيجادُه في المسألةِ.

خطِّطْ

٣ رتِّبِ البياناتِ من الأصغرِ إلى الأكبرِ. .....

٤ ما مدى البياناتِ؟ .....

.....

حُلَّ

٥ رتِّبِ السيقانَ ترتيبًا عدديًّا. .....

٦ ضَعِ الأرقامَ في منزلةِ الآحادِ لكلِّ ساقٍ في ترتيبٍ تصاعديٍّ. .....

٧ ما الوسيطُ لهذه البياناتِ؟ ما المنوالُ لهذه البياناتِ؟ .....

٨ سَمِّ الأيّامَ التي مُثِّلَتْ بساقٍ لها أعلى عددٍ من الأوراقِ. .....

تحقَّقْ

٩ كيف يُمكِنُك التأكّدُ من أنّك قد سجّلْتَ كلَّ البياناتِ؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ اصنعْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ لدرجاتِ الامتحاناتِ الموضَّحةِ في الجدولِ التالي. أوجِدِ الوسيطَ والمنوالَ.

الامتحانُ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الدرجةُ	٩٥	٧٥	٦٣	٧٧	٨٩	٩٩	٧٥	٨٤	٨١	٨١

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الناقدُ**: افرضْ أنّك وضعْتَ الأعدادَ ٢، ٣، ٤، ٥ في عمودِ الساقِ من مخطَّطِ الساقِ والأوراقِ، ماذا تستنتجُ إذا لم يكنْ هناك شيءٌ في صفِّ الأوراقِ المناظِرِ للعددِ ٤؟

.....

.....

٢ **التواصلُ**: اصنعْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ المزدوجَ لعددِ مدارسِ المرحلةِ المتوسِّطةِ في المناطقِ التعليميّةِ والتي يُوضِّحُها الجدولُ الآتي:

.....

.....

	بنينٌ	بناتٌ
منطقةُ العاصمةِ التعليميّةُ	١٥	١٥
منطقةُ حولي التعليميّةُ	١٥	١٦
منطقةُ الفراونيّةِ التعليميّةُ	١٧	١٨
منطقةُ الأحمديِّ التعليميّةُ	٢٣	٢٤
منطقةُ الجهراءِ التعليميّةُ	١٧	١٧
منطقةُ مباركٍ الكبيرِ التعليميّةُ	١١	١٢

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

وضعُ البياناتِ في ترتيبٍ عدديٍّ بسيطٍ يُمكِنُ أن يمنحَك بدايةً جيّدةً.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٤-٢

مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين

Box-and-Whisker Plots

سوف تتعلّمُ

- كيف تُحلِّلُ وتُمثِّلُ انتشارَ وتوزيعَ البياناتِ مستخدِمًا مخطَّطَ الصندوقِ ذي العارضتين.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ المعلّمون مخطَّطَ الصندوقِ ذي العارضتين لفهمِ أداءِ الطلّابِ في الامتحاناتِ الإقليميّةِ مثلِ شهادةِ التعليمِ الأساسيِّ.

◄ **صلةُ الدرسِ** سوف تستخدمُ الآن معلوماتِك عن الوسيطِ والأرباعيّاتِ لعرضِ البياناتِ بيانيًّا. ►

استكشِفْ الأرباعيّاتُ

مجموعُ العددين الظاهرين عندَ رميِ حجري نردٍ

الأدواتُ المستخدَمةُ: حجرا نردٍ (مكعّبان مرقّمان)

١ دحرِجْ حجري نردٍ ٢٠ مرّةً، ثمّ سجِّلْ مجموعَ كلِّ دحرجةٍ.

٢ أوجِدِ الوسيطَ بترتيبِ البياناتِ ترتيبًا عدديًّا. ارسمْ خطًّا حيث يوجَدُ الوسيطُ. ينبغي أن تقعَ أصغرُ عشرِ قيمٍ على يسارِ ذلك الخطِّ.

٣ أوجِدِ الوسيطَ للعشرِ قيمِ الصغرى. بيِّنْ موقعَ الوسيطِ للقيمِ العشرِ الصغرى، وافعلْ كما سبقَ مع العشرِ قيمِ الكبرى التي تقعُ على اليمينِ.

٤ لقد رُسِمَتْ ثلاثةُ خطوطٍ قسّمَتِ البياناتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ. ناقِشْ مميِّزاتِ هذه الأجزاءِ الأربعةِ.

تعلَّمْ مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين

مخطّطُ الصندوقِ ذي العارضتين هو طريقةٌ بصريّةٌ لتوضيحِ قيمِ الوسيطِ لمجموعةٍ من البياناتِ.

الأرباعيّاتُ هي ثلاثةُ أعدادٍ تقسمُ مجموعةَ البياناتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ متساويةٍ من عددِ البياناتِ.

الوسيطُ هو الأرباعيُّ الأوسطُ. خُذِ الوسيطَ للنصفين الأعلى والأسفلِ من البياناتِ لكي توجَدَ الأرباعيّين الآخرين.

الأرباعيُّ الأدنى هو الوسيطُ للنصفِ الأدنى من مجموعةِ بياناتٍ.

الأرباعيُّ الأعلى هو الوسيطُ للنصفِ الأعلى من مجموعةِ بياناتٍ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين
Box and Wisker plot

◄ الأرباعيّاتُ
Quartils

◄ الأرباعيُّ الأدنى
Lower Quartil

◄ الأرباعيُّ الأعلى
Upper Quartil

افترِضْ أنّ طالبًا قد حصلَ على درجاتِ ٩٧، ٨٠، ٨٥، ٧٢، ٦٥، ٩٤، ٧٦ في سبعِ مسابقاتٍ.

رتِّبِ البياناتِ تصاعديًّا

٦٥ ٧٢ ٧٦ | ٨٠ | ٨٥ ٩٤ ٩٧

↓ ↓ ↓

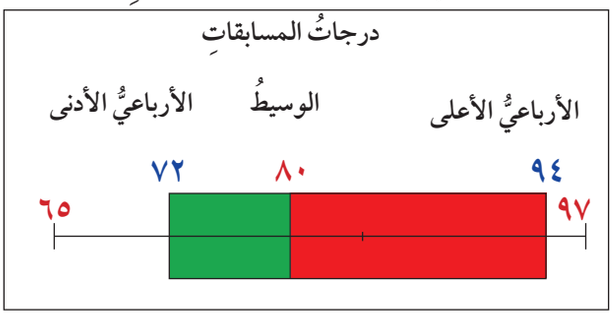
النصفُ الأدنى للبياناتِ | **الوسيطُ** | النصفُ الأعلى للبياناتِ

الوسيطُ = ٨٠

الوسيطُ للنصفِ الأدنى للبياناتِ = ٧٢ — **أي أنّ الأرباعيَّ الأدنى** = ٧٢

الوسيطُ للنصفِ الأعلى للبياناتِ = ٩٤ — **أي أنّ الأرباعيَّ الأعلى** = ٩٤

عيِّنِ البياناتِ السابقةَ حسبَ ترتيبِها على خطِّ الأعدادِ وارسمِ الصندوقَ ذا العارضتين.



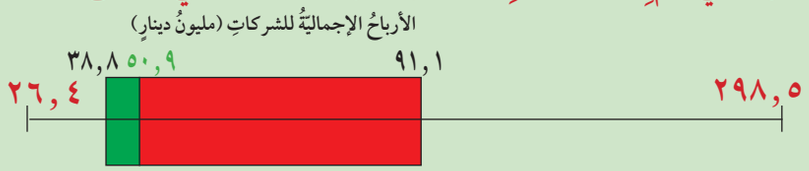
هل تعلمُ؟

لماذا يُسمّى مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين؟

لأنّه يُشبِهُ الصندوقَ مع عارضتين.

مثالٌ (١)

الشكلُ التالي هو مخطَّطُ الصندوقِ ذي العارضتين لتوضيحِ الأرباحِ الإجماليّةِ لأفضلِ ٥٠ شركةً في عامِ ١٩٩٤. أوجِدِ المدى والوسيطَ والأرباعيَّ الأعلى والأرباعيَّ الأدنى.



القيمةُ الصغرى للبياناتِ ٢٦,٤ مليونَ دينارٍ — انظرْ إلى العارضتين.

والقيمةُ الكبرى للبياناتِ ٢٩٨,٥ مليونَ دينارٍ.

∴ المدى = ٢٩٨,٥ − ٢٦,٤ = ٢٧٢,١

الوسيطُ هو ٥٠,٩ مليونَ دينارٍ. — انظرْ إلى الخطِّ الأوسطِ في الصندوقِ.

الأرباعيُّ الأعلى = ٩١,١ مليون دولار — انظر الطرفَ الأعلى من الصندوقِ.

الأرباعيُّ الأدنى = ٣٨,٨ مليون دولار — انظر الطرفَ الأدنى من الصندوقِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ سُئِلَ مئةٌ من الأولادِ بينَ عمرِ ١٢ إلى ١٥ عامًا عن عددِ مرّاتِ زياراتِهم محلّاتِ بيعِ الملابسِ الرياضيّةِ خلالَ الثلاثين يومًا السابقةِ. النتائجُ موضَّحةٌ في مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين.

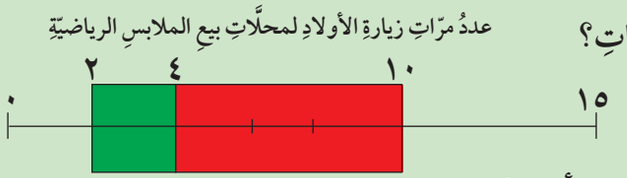
(أ) ما أكبرُ قيمةٍ في البياناتِ؟

(ب) ما أصغرُ قيمةٍ في البياناتِ؟

(جـ) ما مدى البياناتِ؟

(د) ما هو الوسيطُ؟

(هـ) ما هما الأرباعيّان الأدنى والأعلى؟



مثالٌ (٢)

عندما يبحثُ أصحابُ الأعمالِ عن موظَّفين، فإنّهم غالبًا ما ينشرون إعلانًا مبوَّبًا في صحيفةٍ كبرى. ويُمكِنُ أن يتغيّرَ سعرُ الإعلانِ من يومٍ إلى آخرَ وفقَ عددِ الأسطرِ ومساحةِ الإعلانِ. إليك بعضَ الأسعارِ الممكنةِ بالدينارِ: ٥، ٤، ٣، ١٥، ٦، ٧، ١٢، ٨، ٢٥، ٩، ١٠، ١٤، ٢٧، ١٦. اصنعْ مخطَّطًا لصندوقٍ ذي عارضتين لهذه الأسعارِ. بينَ أيِّ قيمٍ يقعُ النصفُ الأوسطُ للأسعارِ؟

الحلُّ: رتِّبِ القيمَ تصاعديًّا

٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ٢٥، ٢٧

القيمةُ الصغرى للبياناتِ هي ٣ — نوجِدُ المدى

القيمةُ الكبرى للبياناتِ هي ٢٧

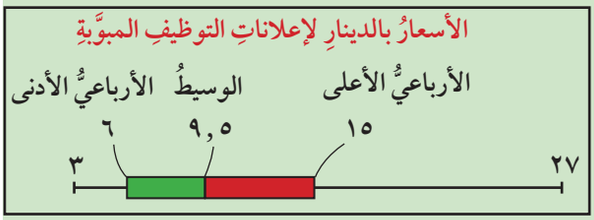
الوسيطُ = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥ دنانيرَ — نوجِدُ الوسيطَ

٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ — نُحدِّدُ النصفَ الأدنى للبياناتِ

الأرباعيُّ الأدنى = ٦ — نوجِدُ وسيطَ النصفِ الأدنى للبياناتِ

١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ٢٥، ٢٧ — نُحدِّدُ النصفَ الأعلى للبياناتِ

الأرباعيُّ الأعلى = ١٥ — نوجِدُ وسيطَ النصفِ الأعلى للبياناتِ



- ارسمْ خطًّا موضِّحًا القيمةَ الصغرى والقيمةَ الكبرى.
- عيِّنْ موقعَ الوسيطِ على هذا الخطِّ.
- عيِّنْ موقعَ الأرباعيِّ الأدنى والأرباعيِّ الأعلى على هذا الخطِّ.

ارسمْ صندوقًا بينَ الأرباعيّاتِ.

اكتبْ عنوانًا.

- يقع النصف الأوسط للأسعار بين ٦، ١٥

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ سُئِلَ عشرةُ أفرادٍ ممّن تتراوحُ أعمارُهم بينَ ١٢ إلى ١٥ عامًا «في أيِّ عمرٍ تُفضِّلُ أن تكونَ؟» وكانَتِ الإجاباتُ ١٧، ١٨، ١٦، ٢٠، ١٥، ١٨، ١٧، ١٦، ١٧، ١٦.

اصنعْ مخطَّطًا للصندوقِ ذي العارضتين لهذه الأعمارِ المرغوبةِ. بينَ أيِّ القيمِ يقعُ الأرباعيُّ الأوسطُ لهذه البياناتِ؟

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

لاحِظْ أنّ ٩,٥ أكثرُ قربًا للعددِ ٣ منها للعددِ ٢٧

التقديرُ

عندما تُحدِّدُ الوسيطَ والأرباعيّاتِ في مخطَّطٍ للصندوقِ ذي العارضتين، قرِّبِ الأعدادَ بحيث يسهلُ تمثيلُها بيانيًّا.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تُؤثِّرُ القيمُ المتطرِّفةُ على طولِ العارضتين في مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين؟

٢ في مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين، كم من البياناتِ يقعُ في الصندوقِ؟ وكم يقعُ في كلِّ عارضةٍ؟ اشرحْ ذلك؟

المرشِدُ لحلِّ المسائلِ (٢-٤)

مثِّلْ مجموعةَ البياناتِ بمخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين. بينَ أيِّ قيمتين من البياناتِ يقعُ الأرباعيُّ الأوسطُ؟
تمَّ تسجيلُ قوّةِ الزلازلِ الكبيرةِ التي حدثَتْ في العالمِ منذ عامِ ١٩٨٠ بمقياسِ ريختر وكانَتْ كالآتي:
٧,٣، ٧,٢، ٧,٧، ٧,١، ٧,٨، ٨,١، ٧,٣، ٦,٥، ٧,٣، ٦,٨، ٦,٩.

افهمْ

١ حوِّطِ المعلوماتِ التي تحتاجُها لصنعِ مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين.

خطِّطْ

٢ رتِّبِ البياناتِ من الأصغرِ إلى الأكبرِ. .....

٣ ما المدى؟ .....

٤ ما الوسيطُ؟ .....

٥ ما الوسيطُ للنصفِ الأدنى من البياناتِ؟ .....

٦ ما الوسيطُ للنصفِ الأعلى من البياناتِ؟ .....

حُلَّ

٧ ارسمْ مخطَّطَ الصندوقِ ذي العارضتين مستخدِمًا المدى، الوسيطَ وكلًّا من الأرباعيِّ الأدنى والأعلى للبياناتِ. اكتبْ عنوانًا للمخطَّطِ.

٨ بينَ أيِّ قيمتين يقعُ النصفُ الأوسطُ؟ .....

تحقَّقْ

٩ ما الطرقُ الأخرى التي يُمكِنُك بها عرضُ البياناتِ؟ .....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ مثِّلْ مجموعةَ البياناتِ التاليةِ والتي تُوضِّحُ الأيّامَ التي تَمَّ قضاؤُها في معملِ المشروعاتِ بمخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين:
٣٤، ٣٢، ٥٠، ١٦، ٢٩، ٣٧، ٤٤، ٢٩، ١٨، ٢٢، ٤٠، ٣٢. بينَ أيِّ قيمتين يقعُ النصفُ الأوسطُ من البياناتِ؟

.....

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

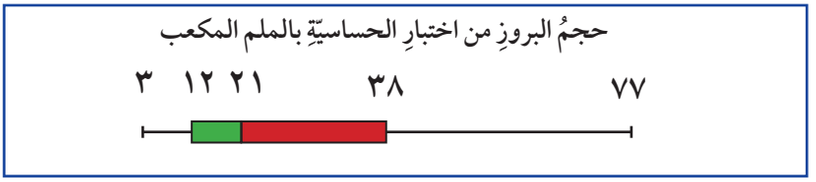
١ **التواصلُ**: أيُّ صندوقٍ ذي عارضتين سوف يُمثَّلُ بعارضتين أطولَ: الصندوقِ ذي العارضتين الذي يُمثِّلُ مجموعةَ البياناتِ التي فيها قيمٌ متطرِّفةٌ أم الذي يُمثِّلُ مجموعةَ البياناتِ من دونِ قيمٍ متطرِّفةٍ؟ فسِّرْ إجابتَك. .....

.....

.....

٢ **طبٌّ**: غالبًا ما يقومُ الأطبّاءُ باختبارِ الحساسيّةِ عن طريقِ خدشِ جلدِ المريضِ ووضعِ قليلٍ من المادّةِ المرادِ اختبارُها على هذه الخدوشِ ثمّ ملاحظةِ وقياسِ حجمِ الالتهابِ أو البروزِ الناتجِ في الجلدِ. وفي إحدى الدراساتِ، أظهرَتِ المادّةُ أحجامًا مختلِفةً من البروزاتِ في أجسامٍ مختلِفةٍ، وقد تمَّ تلخيصُ البياناتِ باستخدامِ مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين التالي:

حجمُ البروزِ من اختبارِ الحساسيّةِ بالملم المكعب



ما الذي يُوضِّحُه هذا المخطَّطُ؟ أعطِ أكثرَ من تفسيرٍ للبياناتِ.

.....

.....

.....

٣ **المجلّةُ**: في مخطَّطِ الصندوقِ ذي العارضتين، صِفْ بأسلوبِك المعلوماتِ التي يُمكِنُك الحصولُ عليها من الصندوقِ، والمعلوماتِ التي يُمكِنُك الحصولُ عليها من العارضتين.

.....

.....

.....

٤ **الحسُّ العدديُّ**: افترِضْ أنّ مخطَّطَ الصندوقِ ذي العارضتين يعرضُ مجموعةَ بياناتٍ تتضمّنُ ٤٨ قيمةً؛ فكم قيمةً تمَّ تمثيلُها في الصندوقِ؟

.....

.....

.....

استخدامُ البياناتِ للإجابةِ عن الأسئلةِ
Using Data to Answer Questions

من قامَ بسؤالِكَ؟ وعلى أيِّ حالٍ؟

نعم	كلّا
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

أنت الوحيدُ في مركزِ التسوّقِ التجاريِّ، تتفرّجُ على واجهاتِ المحالِّ مفكّرًا في طلبِك الشخصيِّ، وفي واجهةِ أحدِ المحالِّ شاهدْتَ طيفَ شخصٍ غريبٍ مقتربًا منك وبيدِه شيءٌ ما يُربِّتُ على كتفِك، تدورُ حولَ نفسِك وتستقرُّ عيناك على الشيءِ الذي بيدِه فتجدُه لوحةَ الكتابةِ. إنّ الشخصَ الغريبَ يُجري استطلاعًا للرأيِ ويُريدُ أن يعرفَ رأيَك.

سوف تكونُ إجاباتُك وإجاباتُ الآخرين على استطلاعِ الرأيِ «بياناتٍ» وستُتّخذُ قراراتٌ مبنيّةٌ على تلك البياناتِ. من يتّخذُ تلك القراراتِ؟ وماذا يُريدون أن يعرفوا؟

أحدُ أنواعِ الاستطلاعاتِ يُسمّى اختبارَ منتَجٍ حيث تقومُ بتجربةِ منتَجٍ جديدٍ ويُرسَلُ تقريرٌ عن رأيِك فيه. واختبارُ التذوّقِ هو أحدُ أنواعِ اختبارِ المنتَجاتِ حيث تُجرِّبُ عيّناتٍ مختلِفةً لأغذيةٍ ثمّ تُسأَلُ عن رأيِك فيها، وأحيانًا قد تُمنَحُ نقودًا مقابلَ اشتراكاتٍ في اختبارِ منتَجٍ ما.

يتطلّبُ استطلاعُ الرأيِ الجيّدِ تخطيطًا متقنًا مسبقًا. وأحيانًا توجَدُ أسئلةٌ لا يستطيعُ البحثُ الإجابةَ عنها، وفي تلك الحالاتِ يتوجّبُ على القائمين بإجراءِ استطلاعِ الرأيِ أن يستخدموا أفضلَ تحليلاتٍ لديهم.

١ ما الصعوباتُ التي يُمكِنُ أن تُواجِهَك عند إجراءِ استطلاعٍ للرأيِ؟

٢ ما الأغراضُ الأخرى من وجهةِ نظرِك التي يُمكِنُ استخدامُ استطلاعٍ للرأيِ فيها؟

٣ إذا كنْتَ جزءًا من استطلاعٍ للرأيِ، فصِفْ ماذا فعلْتَ، وأيُّ أسئلةٍ قمْتَ بالإجابةِ عنها؟

٢ – ٥

مخطَّطاتُ الانتشارِ والنزعاتُ
Scatterplots and Trends

سوف تتعلّمُ

- صنعَ مخطَّطاتِ الانتشارِ وتحديدَ النزعاتِ الموضَّحةِ على مخطَّطاتِ الانتشارِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ أطبّاءُ الأطفالِ مخطَّطاتِ الانتشارِ وخطوطَ النزعاتِ لتحديدِ ما إذا كانَ نموُّ الطفلِ في المعدَّلاتِ الطبيعيّةِ أم لا.

◄ صلةُ الدرسِ سبقَ لك استخدامُ ورقةِ مربّعاتٍ لصنعِ تمثيلاتٍ بيانيّةٍ بالخطوطِ، وسوف تتعلّمُ الآن توضيحَ البياناتِ على ورقةِ مربّعاتٍ ومشاهدةَ نزعاتِ البياناتِ. ►

استكشِفْ مخطّطاتُ الانتشارِ والنزعاتُ

قيمةُ الدينارِ الكويتيِّ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** مسطرةٌ شفّافةٌ، ورقةُ رسمٍ بيانيٍّ

ارتفعَتْ قيمةُ الدينارِ الكويتيِّ مقابلَ الدولارِ الأميركيِّ بعد فكِّ ارتباطِه معه والعودةِ إلى سلّةِ عملاتٍ ممّا جعلَ سعرَ صرفِه يتحسّنُ أمامَ معظمِ العملاتِ الخليجيّةِ والعالميّةِ.

يُوضِّحُ الجدولُ التالي قيمةَ الدينارِ الكويتيِّ مقابلَ بعضِ العملاتِ حسبَ جدولِ الأسعارِ في مارسَ ٢٠١١.

العملةُ	الدولارُ الأميركيُّ	اليورو الأوروبّيُّ	الريالُ السعوديُّ	الدرهمُ الإماراتيُّ	الجنيهُ الإسترلينيُّ	الريالُ العمانيُّ	الدينارُ الأردنيُّ
دينارٌ كويتيٌّ	٠,٢٩	٠,٣٦	٠,٠٧٨	٠,٠٨	٠,٤٢	٠,٨	٠,٢١

مثِّلْ هذا الجدولَ على شبكةِ إحداثيّاتٍ.

١ يجبُ أن يشملَ تدريجُ المحورِ الأفقيِّ جميعَ العملاتِ حسبَ الجدولِ.

٢ يجبُ أن يشملَ تدريجُ المحورِ الرأسيِّ الأعدادَ من ٠,٠٧٨ إلى ٠,٣٦.

٣ مثِّلْ كلَّ زوجٍ (عملةً، كمّيّةَ الدينارِ الكويتيِّ) كنقطةٍ.

٤ استخدِمِ المسطرةَ لرسمِ أفضلِ خطٍّ مستقيمٍ يُمكِنُك رسمُه عبرَ أو بأقربَ من جميعِ النقاطِ.

٥ قارِنْ بينَ الخطِّ الذي رسمْتَه وخطوطِ أفرادِ مجموعتِك.

٦ ما نوعُ التمثيلِ البيانيِّ الذي يُمكِنُك رسمُه في الخطوةِ ٤ بدلًا من رسمِ خطٍّ مستقيمٍ.

٧ هل يُمكِنُك توقّعُ نتائجَ معيَّنةٍ في شهرِ أبريلَ من سنةِ ٢٠١١؟

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

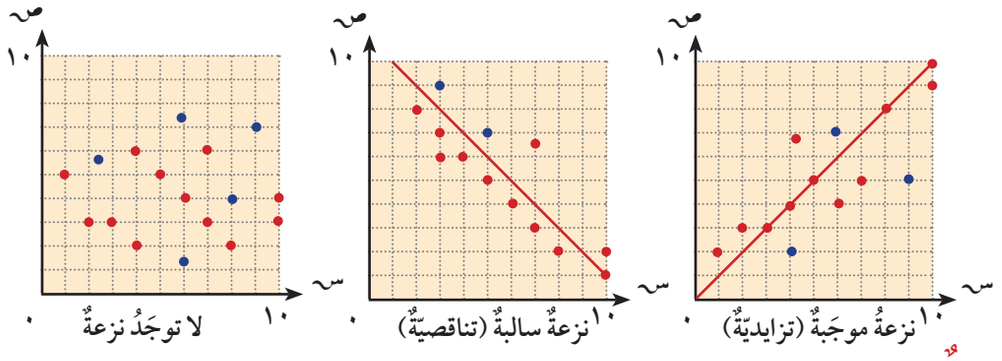
◄ مخطَّطُ انتشارٍ
Scatter Plot

◄ نزعةٌ
Trend

◄ خطُّ النزعةِ
Line Trend

تعلَّمْ مخطَّطاتُ الانتشارِ والنزعاتُ

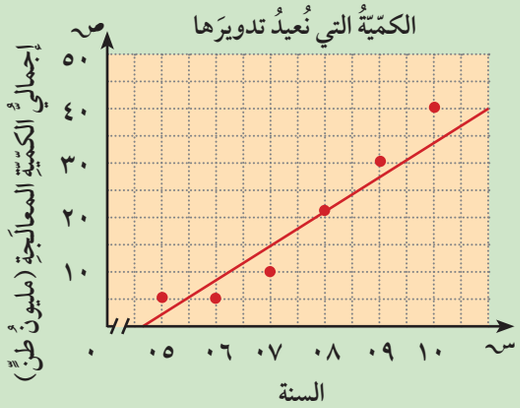
مخطَّطُ الانتشارِ هو مجموعةٌ من النقاطِ التي تُوضِّحُ العلاقةَ بينَ مجموعتين من البياناتِ. أحيانًا، تُكوِّنُ هذه النقاطُ نمطًا، ومثلُ هذا النمطِ يُسمّى **نزعةً**، والخطُّ الذي يُلائِمُ هذه النقاطَ هو خطُّ النزعةِ. ويُمكِنُ استخدامُ **خطِّ النزعةِ** لتوضيحِ المستقبلِ المتوقَّعِ لقيمِ البياناتِ.



مثالٌ (١)

يُوضِّحُ مخطَّطُ الانتشارِ الآتي كمّيّةَ المخلَّفاتِ التي نُعيدُ تدويرَها من سنة ٢٠٠٥ إلى سنة ٢٠١٠ التي تُنتَجُ سنويًّا في أحدِ البلدانِ. استخدِمْ مخطَّطَ الانتشارِ وخطَّ النزعةِ لتحديدِ النزعةِ بينَ هاتين المجموعتين من البياناتِ.

يُوضِّحُ خطُّ النزعةِ نزعةً موجَبةً.



حاوِلْ أن تحلَّ

١ اذكرِ العلاقةَ الموضَّحةَ على مخطَّطِ الانتشارِ السابقِ.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

إذا أوحى مخطَّطُ الانتشارِ بوجودِ نزعةٍ عندَ المرورِ بنقطتين، عندئذٍ يُمكِنُ افتراضُ وجودِ نزعةٍ.

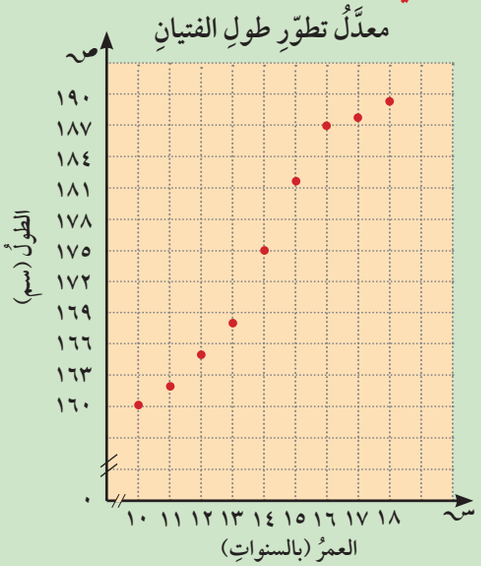
عندَ صنعِ مخطَّطِ الانتشارِ، عليك أوّلًا أن تُقرِّرَ أيَّ مجموعةِ بياناتٍ ستُوضِّحُها على المحورِ الأفقيِّ وأيَّ مجموعةٍ ستُوضِّحُها على المحورِ الرأسيِّ، وعندئذٍ يلزمُك التأكّدُ من تدريجِ كلِّ محورٍ بحيث يشملُ كلَّ القيمِ الواقعةِ في مجموعةِ البياناتِ.

مثالٌ (٢)

يتراوحُ طولُ الطفلِ عندَ الولادةِ بينَ ٤٧ إلى ٥٠ سم ليصلَ في نهايةِ السنةِ الأولى إلى ٧٤ سم وفي نهايةِ السنةِ الثانيةِ إلى ٨٤ سم. ويختلفُ الطولُ باختلافِ عواملِ الوراثةِ والبيئةِ وباختلافِ الفروقِ الجنسيّةِ بينَ الذكورِ والإناثِ.

يُبيِّنُ الجدولُ التالي معدَّلَ تطوّرِ طولِ الفتيانِ مقارنةً بالتقدّمِ بالعمرِ. اصنعْ مخطَّطَ الانتشارِ لهذه البياناتِ، وحدِّدْ خطَّ النزعةِ بينَ العمرِ والطولِ. مثِّلِ العمرَ على المحورِ الأفقيِّ، ومثِّلِ الطولَ على المحورِ الرأسيِّ. حدِّدِ النقاطَ.

العمرُ	الطولُ (سم)
١٠	١٦٠
١١	١٦٢
١٢	١٦٥
١٣	١٦٨
١٤	١٧٥
١٥	١٨٢
١٦	١٨٧
١٧	١٨٨
١٨	١٨٩



يوجَدُ نزعةٌ واضحةٌ بينَ العمرِ وطولِ الإنسانِ وهي تزايديّةٌ إلى عمرٍ معيَّنٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ يُبيِّنُ الجدولُ التالي تطوّرَ طولِ الطفلِ من السنةِ الرابعةِ إلى السنةِ العاشرةِ. اصنعْ مخطَّطَ الانتشارِ للبياناتِ، واذكرْ نوعَ النزعةِ.

العمرُ	الطولُ (سم)
٤	٩٥
٥	٩٧
٦	١٠١
٧	١٠٧
٨	١١١
٩	١٢٠
١٠	١٢٨

تحقَّقْ من فهمِك

١ عرِّفْ بأسلوبِك الخاصِّ مخطَّطَ الانتشارِ. كيف ستُفرِّقُ بينَ مخطَّطِ الانتشارِ والتمثيلِ البيانيِّ بالخطوطِ؟ اشرحْ ذلك.

٢ صِفْ كيف يُمكِنُ لمخطَّطِ الانتشارِ أن يوحِيَ بوجودِ نزعةٍ. متى يكونُ مفيدًا ملاحظةُ وجودِ نزعةٍ؟

٣ إذا أظهرَ جزءٌ من مخطَّطِ الانتشارِ وجودَ نزعةٍ ولم يُظهِرْ جزءٌ آخرُ وجودَها، فهل يكونُ ذلك مفيدًا؟ اشرحْ ذلك؟

المرشِدُ لحلِّ المسائلِ (٢-٥)

كلّما تقدّمَ الناسُ في العمرِ فإنّ عاداتِ نومِهم تتغيّرُ.

في ما يلي جدولٌ يُوضِّحُ عددَ ساعاتِ النومِ يوميًّا والعمرَ (بالسنواتِ). ارسمْ مخطَّطَ الانتشارِ وخطَّ النزعةِ لهذه البياناتِ.

العمرُ	١	٤	٦	١٢	١٠	٢٢	١٨	٦٧	٨٢	٤٣	٥١
مدّةُ النومِ	١٣	١١	١١	١٠,٥	٩	٨	٩	٥,٥	٥	٧,٥	٦

افهمْ

١ ضَعْ خطًّا تحتَ ما هو مطلوبٌ منك عملُه؟

٢ كيف يُمكِنُك تحديدُ ما إذا كانَتْ هناك نزعةٌ؟ .....

.....

خطِّطْ

٣ ما عنوانُ كلِّ تدريجٍ؟

(أ) الأفقيُّ .....

(ب) الرأسيُّ .....

حُلَّ

٤ سَمِّ المحورين وارسمِ النقاطَ. .....

٥ ارسمْ خطَّ النزعةِ للبياناتِ. .....

٦ ما المنوالُ؟ .....

تحقَّقْ

٧ اكتبْ جملةً تصفُ فيها العلاقةَ بينَ العمرِ وعددِ ساعاتِ النومِ. .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ يُوضِّحُ الجدولُ التالي المصروفَ الأسبوعيَّ (بالدينارِ) والعمرَ (بالسنواتِ) لبعضِ الأطفالِ والشبابِ الصغارِ. ارسمْ مخطَّطَ الانتشارِ وخطَّ النزعةِ لهذه البياناتِ.

العمرُ (بالسنواتِ)	٤	٥	٨	١٠	٦	٩	٧	١١	١٣	١٢
المصروفُ الأسبوعيُّ (بالدينارِ)	١	١	٣	٤	٢	٤	٢	٥	٨	٩

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التواصلُ**: متى تختارُ استخدامَ التمثيلِ البيانيِّ بالخطوطِ؟ ومتى تختارُ استخدامَ مخطَّطِ الانتشارِ؟ فسِّرْ إجابتَك.

.....

.....

٢ **المجلّةُ**: أين رأيْتَ أو ممكنٌ أن ترى مخطَّطاتِ الانتشارِ وخطوطَ النزعةِ؟

.....

.....

٣ **التفكيرُ الرياضيُّ**: افرضْ أنّ النقاطَ (٣، ٤)، (٥، ٤)، (٣، ٧)، (٥، ٢)، (٢، ٣) هي جزءٌ من مجموعةِ بياناتٍ، هل مخطَّطُ الانتشارِ سيكونُ أكثرَ ملاءمةً في تمثيلِ هذه البياناتِ عن التمثيلِ البيانيِّ بالخطوطِ؟ فسِّرْ إجابتَك.

.....

.....

٤ **التفكيرُ الناقدُ**: افرضْ أنّ مخطَّطَ الانتشارِ يُوضِّحُ ١٠ نقاطٍ من بياناتِ مجموعةٍ ذاتِ خطِّ نزعةٍ تناقصيٍّ، هل من الممكنِ لنزعةٍ أن تتغيّرَ إذا ما جمعْتَ بياناتٍ أكثرَ؟ أعطِ مثالًا.

.....

.....

٥ **التواصلُ**: إذا صنعْتَ مخطَّطَ انتشارٍ لمجموعةِ بياناتٍ تحتوي على النقطةِ (٥، ٣) أكثرَ من مرّةٍ، كيف ستُوضِّحُ على مخطَّطِ الانتشارِ أنّ هذه النقطةَ حدثَتْ أكثرَ من مرّةٍ؟ كيف ستُوضِّحُ النقطةَ التي تحدثُ أكثرَ من مرّتين على مخطَّطِ الانتشارِ؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- اعملْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الثانيةِ

١ بلغَ وزنُ بعضِ التلاميذِ في أحدِ الصفوفِ بالكيلوجرام كما يأتي: ٦٤، ٥٩، ٦٢، ٦٠، ٦١، ٦٣، ٦٥، ٥٨، ٥٧، ٦٢، ٦٤، ٦٥، ٦٨، ٦٧، ٦٦، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٦٠، ٦٣، ٥٦، ٥٧، ٦٣، ٦٠.

(أ) أكمِلِ الجدولَ التاليَ:

الفئاتُ	العلاماتُ التكراريّةُ	التكرارُ
٥٤ –		
٥٧ –		
٦٠ –		
٦٣ –		
٦٦ –		

(ب) اصنعْ مدرَّجًا تكراريًّا يُمثِّلُ هذه البياناتِ.

(جـ) أكمِلِ الجدولَ السابقَ بإضافةِ عمودٍ يُبيِّنُ مركزَ كلِّ فئةٍ.

(د) استخدِمْ مراكزَ الفئاتِ لتحسبَ قيمةَ المتوسِّطِ الحسابيِّ.

٢

يُبيِّنُ التمثيلُ البيانيُّ بالنقاطِ المجمَّعةِ أطوالَ قاماتِ طلّابِ أحدِ الصفوفِ وذلك بالسنتيمترِ.

(أ) عندَ أيِّ قياس تتجمّعُ أطوالُ هؤلاء الطلّابِ؟

(ب) ما منوالُ هذه البياناتِ؟

(جـ) ما وسيطُ هذه البياناتِ؟

(د) أوجِدِ المتوسِّطَ الحسابيَّ.

اختبارُ الوَحدةِ الثانيةِ

٣

الأوراقُ (أ)	الساقُ	الأوراقُ (ب)
٠٢٢٤	١٦	٣٢
١٣٤٥	١٧	٤٢٢١
٢٢٣	١٨	٦٥٣٣٣
٤٤٤٥	١٩	٤

استخدِمْ مخطَّطَ الساقِ والأوراقِ للإجابةِ عن الأسئلةِ التاليةِ:

(أ) ما منوالُ بياناتِ (أ) ومنوالُ بياناتِ (ب)؟

(ب) أوجِدِ الوسيطَ للبياناتِ (أ) والوسيطَ للبياناتِ (ب).

٤ كانَتْ درجاتُ الطلّابِ في امتحانِ الرياضيّاتِ على ٢٠ كما يلي: ١٦، ١٧، ١٠، ١٢، ١٣، ١١، ١٤، ١٥، ١٦، ١٣، ١٢، ١٥، ١٧، ١٠، ١٤، ١١، ١٥، ١٦، ١٤، ١٦، ١٥، ١٢، ١٦، ١١.

(أ) ارسمْ مخطَّطَ الصندوقِ ذي العارضتين لهذه البياناتِ. وضِّحِ الأرباعيّاتِ الثلاثةَ.

(ب) أوجِدْ عددَ الدرجاتِ الموجودةِ داخلَ الصندوقِ.

٥ يُبيِّنُ الجدولُ التالي تطوّرَ وزنِ الطفلِ بالكيلوجرامِ من الشهرِ الأوّلِ حتّى الشهرِ الثامنِ.

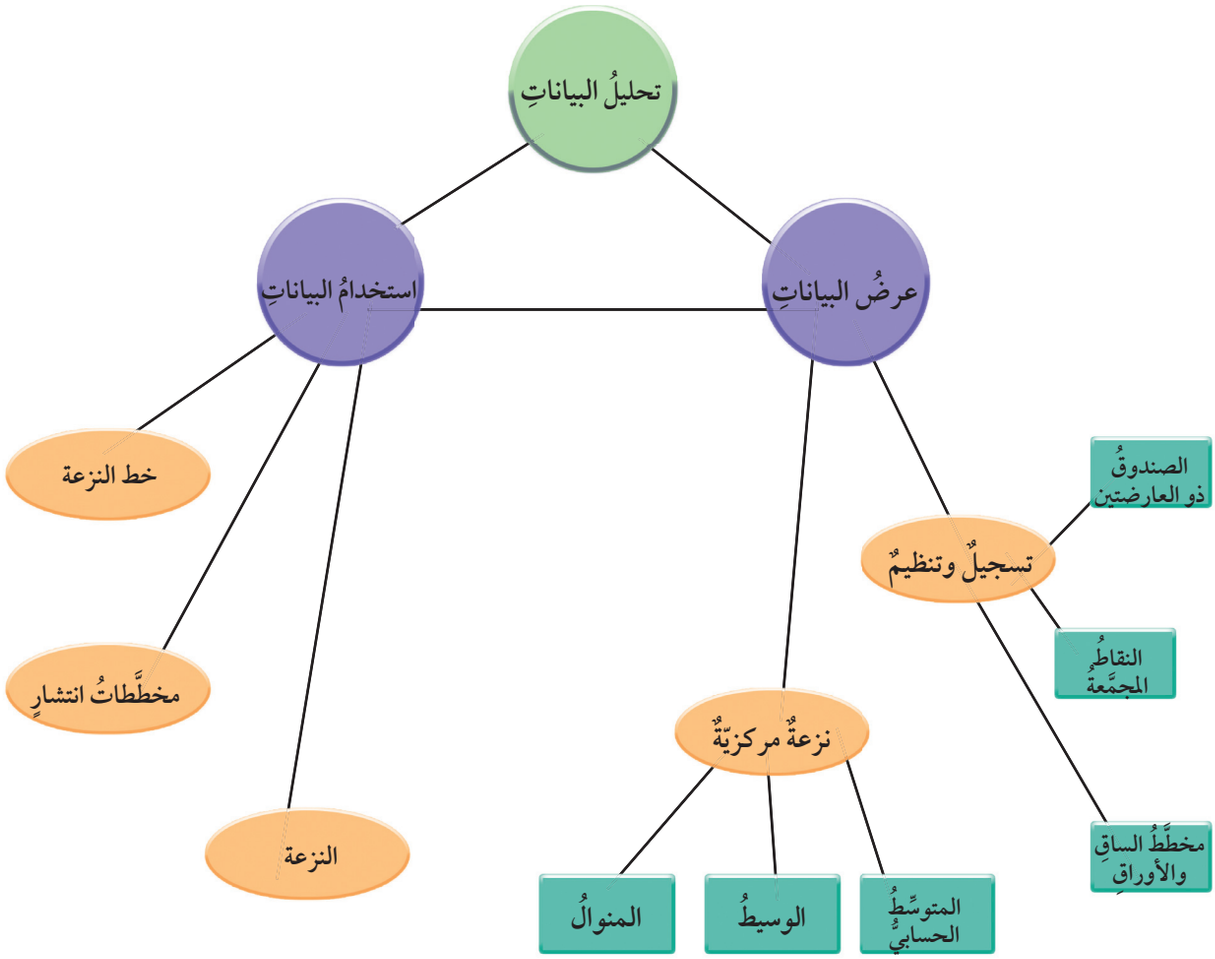
العمرُ (أشهرٌ)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الوزنُ	٣,٢٥٠	٤,١٥٠	٥,٢٥٠	٦,١٥٠	٧,٠٠٠	٧,٨٠٠	٨,٥٠٠	٩,١٥٠

(أ) اصنعْ مخطَّطَ انتشارٍ لهذه البياناتِ.

(ب) ما نزعةُ هذه البياناتِ كما تراها على المخطَّطِ؟

(جـ) هل يُمكِنُ توقّعُ وزنِ هذا الطفلِ في نهايةِ السنةِ الأولى؟

مخطَّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الثانيةِ



الوَحدةُ الثانيةُ (أ):

- تُسجَّلُ البياناتُ في جداولَ تتضمّنُ العلاماتِ التكراريّةَ والتكرارَ المرافِقَ لها.
- تُعرَضُ البياناتُ على تمثيلٍ بيانيٍّ بالنقاطِ المجمَّعةِ حيث يبدو تجميعُها بشكلٍ واضحٍ.
- تُعرَضُ البياناتُ على مخطَّطِ الساقِ والأوراقِ فتُساعِدُ على تنظيمِ فئاتٍ لهذه البياناتِ.
- تُعرَضُ البياناتُ على الصندوقِ ذي العارضتين لتُوضِّحَ من خلالِ الأرباعيّاتِ تشتّتَ البياناتِ مقارنةً بالوسيطِ والأرباعيِّ الأدنى والأرباعيِّ الأعلى.
- يُساهِمُ عرضُ البياناتِ في إيضاحِ أهمّيّةِ مقاييسِ النزعةِ المركزيّةِ.

الوَحدةُ الثانيةُ (ب):

- يُساهِمُ مخطَّطُ الانتشارِ لمجموعةٍ من النقاطِ والتي تُمثِّلُ بياناتٍ من متغيِّرين في دراسةِ اتّجاهِ ونزعةِ هذه البياناتِ.
- يُمكِنُ استخدامُ خطِّ النزعةِ (إذا وُجِدَ) في توقّعِ نتائجَ.

الوَحدةُ الثالثةُ

التحليلُ والمعادلاتُ والمتبايناتُ والحدوديّاتُ النسبيّةُ
Factorising, Equations, Inequalities, and Rational Polynominals

شعوبُ العالمِ

كانَتْ أقدمُ آلةِ تصويرٍ بحجمِ غرفةٍ مع مساحةٍ لشخصٍ واحدٍ أو أكثرَ في الداخلِ. آلةُ التصويرِ الأولى كانَتْ صغيرةً ومحمولةً وعمليّةً للتصويرِ صنعَها يوهان زان عامَ ١٦٨٥ . هل تعلمُ أنّ كلَّ صورةٍ لها الصيغةُ التاليةُ: $\frac{١}{ف} = \frac{١}{د_١} + \frac{١}{د_٢}$ حيث

ف = بؤرةُ عدسةِ آلةِ التصويرِ.

$د_١$ = المسافةُ بينَ العدسةِ والمرادِ تصويرُه.

$د_٢$ = المسافةُ بينَ العدسةِ والشاشةِ حيث تستقرُّ الصورةُ على آلةِ التصويرِ.

الدراساتُ الاجتماعيّةُ

يُمكِنُ خفضُ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ باتّباعِ بعضِ الإرشاداتِ والنصائحِ:

- الإكثارُ من الضوءِ الطبيعيِّ أثناءَ النهارِ.
- إطفاءُ الأنوارِ فورَ مغادرةِ الأمكنةِ المشغولةِ.
- استخدامُ مصابيحَ تُوفِّرُ الطاقةَ.
- فصلُ الكهرباءِ عن السخّانِ إذا لم يكنْ في حالةِ الاستخدامِ.
- إغلاقُ جهازِ التكييفِ عندَ تركِ الغرفةِ لفترةٍ طويلةٍ، أمّا بالنسبةِ إلى خفضِ استهلاكِ المياهِ فيُمكنُ اتّباعُ بعضِ الإرشاداتِ والنصائحِ: تذكَّرْ أنّ أكبرَ كمّيّةٍ لاستهلاكِ المياهِ هي في الحمّاماتِ (حوالى ٤٠٪). لذا حاوِلْ تخفيفَ كمّيّةِ تدفّقِ المياهِ.
- إنّ ثاني أكبرِ كمّيّةٍ لاستهلاكِ المياهِ هي في المطابخِ، لذا يُستحسَنُ تركيبُ تحويلةٍ في طرفِ الصنبورِ لضبطِ تدفّقِ المياهِ.
- استخدِمِ الدشَّ بدلًا من المغطسِ.
- أغلِقْ صنبورَ الماءِ أثناءَ غسلِ الأسنانِ أو الحلاقةِ واستخدِمْ كوبًا يحتوي على الماءِ.

العلومُ

إنّ التكلفةَ د(س)، بملايينِ الدنانيرِ لتلقيحِ س٪ من سكّانِ إحدى الدولِ ضدَّ الأمراضِ الموسميّةِ مثلِ الإنفلونزا التي تنتشرُ في الفصولِ الباردةِ من السنةِ تُعطى بالحدوديّةِ النسبيّةِ:

$$د(س) = \frac{١٣٠ س}{١٠٠ - س}.$$

الهندسةُ

تُستخدَمُ الحدوديّاتُ النسبيّةُ لتقديرِ أو نمذجةِ معادلاتٍ معقّدةٍ في هندسةِ الاتّصالاتِ عبرَ الأقمارِ الصناعيّةِ، بالإضافةِ إلى علمِ البصريّاتِ لتحسينِ نوعيّةِ الصورةِ.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

إذا أردْنا حلَّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ بعدَ تحليلِها إلى عواملَ، فعلينا إيجادُ أصفارِ عامليَها.

نحلُّ المتباينةَ بإيجادِ كلِّ قيمِ المتغيِّراتِ التي تُحقِّقُ المتباينةَ ونُمثِّلُ هذه القيمَ على خطِّ الأعدادِ.

الحدوديّةُ النسبيّةُ هي قسمةُ كثيرةِ الحدودِ على أخرى، مثالٌ: $\frac{س^٢ + ٢}{٢س}$.

لجمعِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ أو لطرحِها يجبُ أن نأخذَ المضاعَفَ المشترَكَ الأصغرَ لمقاماتِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

لضربِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ نضربُ البسطَ في البسطِ والمقامَ في المقامِ.

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، نضربُ الحدوديّةَ الأولى في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ الثانيةِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ

افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

في هذا المشروعِ، سوف يقومُ الطلّابُ بدراسةِ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ والمياهِ في مجمَّعٍ تجاريٍّ وكتابةِ تقريرٍ مفصَّلٍ عن مجالاتِ الهدرِ واقتراحِ الحلولِ الصحيحةِ لترشيدِ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ والمياهِ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

تتضمّنُ هذه المسألةُ معطَياتٍ غيرَ ضروريّةٍ. أشِرْ إليها، وقسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ بسيطةٍ، وأجِبْ عن الأسئلةِ التاليةِ:

يُخطِّطُ أحمدُ لزراعةِ قطعةِ أرضٍ مستطيلةِ الشكلِ في حديقةِ منزلِه ويُريدُ زراعةَ نصفِ مساحتِها بالطماطمِ، والنصفِ الآخرِ منها بالخيارِ لبيعِها في السوقِ بسعرِ دينارٍ لكلِّ كيلوجرامٍ. طولُ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها ضعفُ عرضِها، والذي يُساوي س مترٍ. وسعرُ كلِّ مترٍ مربّعٍ ٤٠٠ دينارٍ. إذا أرادَ أحمدُ أن يُحيطَ قطعةَ الأرضِ بممرٍّ عرضُه مترٌ واحدٌ من الجهاتِ الأربعِ لقطعةِ الأرضِ بحيث يرصفُه بالحصى بمساحةِ ٤٠ مترًا مربّعًا، فأوجِدْ طولَ وعرضَ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها.

١ علامَ تُركِّزُ المسألةُ؟

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

٣ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ مع قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٤ أوجِدْ مساحةَ قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٥ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ بدلالةِ س.

٦ أوجِدْ قيمةَ س.

٧ أوجِدْ طولَ الحديقةِ وعرضَها.

٨ ما المعطَياتُ غيرُ الضروريّةِ في المسألةِ؟

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

قراءةُ المسألةِ

عندَ قراءةِ المسألةِ قد تجدُ صعوبةً في فهمِ المسألةِ. أوّلًا احذفِ المعطَياتِ غيرَ الضروريّةِ، ثمّ قسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ صغيرةٍ. تأكَّدْ من فهمِ كلِّ جزءٍ من المسألةِ.

التحليلُ
Factorising

إنتاجُ المصانعِ

تأخذُ مصانعُ الرقاقاتِ الإلكترونيّةِ بالاعتبارِ ثلاثةَ عواملَ:

الكلفةُ، والعائداتُ، والربحُ. وهي قواعدُ أساسيّةٌ ومهمّةٌ في التحليلِ الماليِّ لإنتاجِ الشركةِ. وبناءً على مقارنتِها يُحدَّدُ نجاحُ الشركةِ. فهناك الكلفةُ الثابتةُ بغضِّ النظرِ عن كمّيّةِ الإنتاجِ مثلِ: فواتيرِ الطاقةِ، والإيجارِ، والتأمينِ، والدعايةِ، وغيرِها. وهناك أيضًا الكلفةُ المرتبطةُ مباشرةً بكمّيّةِ الإنتاجِ أي كلفةُ الموادِّ الأوّليّةِ التي تدخلُ في عمليّةِ تصنيعِ المنتَجِ.

أمّا عائداتُ المصنعِ، فهي المبلغُ الإجماليُّ الذي دخلَ إلى المصنعِ والعائدُ عن بيعِه منتَجًا أو من أيِّ خدماتٍ أخرى. أمّا الربحُ فهو ناتجُ طرحِ الكلفةِ من العائداتِ. يهتمُّ بعضُ المحلِّلين بإيجادِ مستوى الإنتاجِ لتفادي خساراتٍ غيرِ مرغوبٍ فيها، فيلجأون إلى صياغةِ معادلاتٍ رياضيّةٍ للكلفةِ، والعائداتِ، والأرباحِ، في سبيلِ الحصولِ على مستوى الإنتاجِ حيث تتعادلُ الكلفةُ مع العائداتِ، محاولين حلَّ معادلاتٍ رياضيّةٍ عن طريقِ تحليلِها.

في شركاتِ إنتاجِ الرقاقاتِ الإلكترونيّةِ، يقولُ المحلِّلون إنّ الأرباحَ تُمثِّلُها المعادلةُ التاليةُ:

$ر(س) = -س^{٢} + ٨س - ٧$

حيث: ر: الربحُ الأسبوعيُّ بآلافِ الدنانيرِ.

س: الكمّيّةُ المباعةُ بآلافِ الوَحداتِ.

١ هل يربحُ المصنعُ إذا لم يُنتِجْ؟ إذا أنتجَ ألفَ رقاقةٍ؟ ألفين؟ ٤ آلافٍ؟ ٥ آلافٍ؟ ٧ آلافٍ؟

٢ ابحثْ عن طريقةٍ تُمكِّنُك من كتابةِ $-س^{٢} + ٨س - ٧$ على صورةِ ضربِ عاملين.

١-٣

تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

Factorising the Difference betweenTwo Squares

◄ صلةُ الدرسِ تعرّفْتَ في السابقِ على المقاديرَ الجبريّةَ، وتحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين. ►

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الباحثون العلميّون تحليلَ المقاديرِ الجبريّةِ في حلِّ الكثيرِ من المسائلِ الفيزيائيّةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

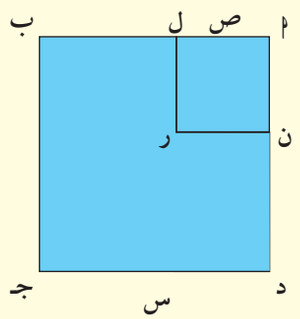
◄ الفرقُ بينَ مربّعين
Difference between Two Squares

استكشِفْ تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

مستلزَماتٌ: مسطرةٌ – مقصٌّ

في الرسمِ: ا ب جـ د مربّعٌ طولُ ضلعِه س، ا ل ر ن مربّعٌ طولُ ضلعِه ص.

شكلُ (١)



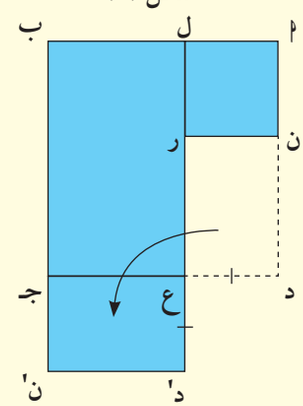
١ (أ) أوجِدْ مساحةَ كلٍّ من المربّعين.

(ب) ما الفرقُ بينَ مساحتي المربّعين؟

٢ في الشكلِ (١)، حدِّدِ المنطقةَ التي تُمثِّلُ الفرقَ بينَ مساحتي المربّعين.

٣ عيِّنِ النقطةَ ع على دجـ حيث د ع = ا ل.

شكلُ (٢)



٤ قُصَّ المستطيلَ ن ر ع د وألصِقْه على الضلعِ ع جـ كما هو مبيَّنٌ في الشكلِ المقابلِ.

(أ) ما أبعادُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟

(ب) ما مساحةُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟

٥ تحقَّقْ من صحّةِ العلاقةِ:

س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص)(س + ص)

تعلَّمْ تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

يُمكِنُك استخدامُ الفرقِ بينَ مربّعين لتحليلِ تعابيرَ جبريّةٍ إلى عواملِها الأوّليّةِ.

س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص)(س + ص)

مثالٌ (١)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: س^{٢} – ١.

الحلُّ: س^{٢} – ١ = س^{٢} – ١^{٢}

= (س – ١)(س + ١)

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ١ – ٤ م^{٢}

مثالٌ (٢)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٤ – ٤٩و^{٢}

الحلُّ: ٤ – ٤٩و^{٢} = (٢)^{٢} – (٧و)^{٢}

= (٢ – ٧و)(٢ + ٧و)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا:

(أ) و^{٢} – ٣٦ (ب) ٦٤س^{٢} – ١٢١ (جـ) ١٦ – ص^{٢}

مثالٌ (٣)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٨ – ٢س^{٢}

الحلُّ: ٨ – ٢س^{٢} = ٢ × ٤ – ٢س^{٢}

= ٢(٤ – س^{٢})

= ٢(٢ – س)(٢ + س).

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٥٠ – ١٨ك^{٢}

مثالٌ (٤)

مربّعان يزيدُ طولُ ضلعِ أحدِهما عن الآخرِ بمقدارِ وَحدةِ طولٍ واحدةٍ، وتزيدُ مساحتُه ٧ وَحداتٍ مربّعةٍ عن مساحةِ الآخرِ. أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

الحلُّ: ليكنْ س طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

المعادلةُ: (س + ١)^{٢} – س^{٢} = ٧

(س + ١ – س)(س + ١ + س) = ٧

(١) (٢س + ١) = ٧

٢س = ٦

س = ٣

يبلغُ طولُ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ ٣ وَحداتٍ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ هل يُمكِنُ تحليلُ مجموعِ المربّعين أ^{٢} + ب^{٢}؟

٢ حلّلَ زميلُك ٤س^{٢} – ١٢١، وحصلَ على (٤س + ١١)(٤س – ١١). ما الخطأُ الذي وقعَ فيه؟

٣ هل يُمكِنُك تحليلُ مجموعِ مربّعين؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أوجِدْ قيمةَ ٢١٧^{٢} – ١٦^{٢} بالتحليلِ.

.....

.....

٢ ع ن د مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ في ن. إذا كانَ ع د = ٢٥سم، ع ن = ٢٠سم، فأوجِدْ طولَ $\overline{\text{دن}}$.

.....

.....

٣ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٤}$ م^{٢} – $\frac{١}{٩}$ ب^{٢}

.....

(ب) ٢٥حـ^{٢} د^{٢} – ١

.....

(جـ) ١٦ص^{٤} – ١

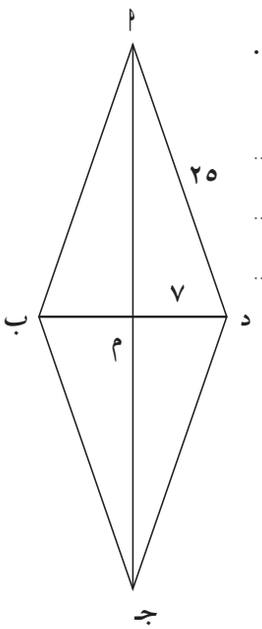
.....

٤ أ ب جـ د معيَّنٌ. م نقطةُ تلاقي قطريه. دم = ٧سم، أ د = ٢٥سم. أوجِدْ طولَ $\overline{\text{أجـ}}$.

.....

.....

.....



إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

معلومةٌ مفيدةٌ

مركزُ المعيَّنِ هو نقطةُ تلاقي قطريه.

٣-٢

تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما

Factorising the Difference between Two Cubes or their Sum

صلةُ الدرسِ حلّلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين. الآن سوف تتعلّمُ تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما.

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين.
- تحليلَ مجموعِ مكعّبين.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مهندسو البناءِ الفرقَ بينَ المكعّبين أو مجموعِهما لمعرفةِ كمّيّةِ الأسمنتِ المستخدَمةِ.

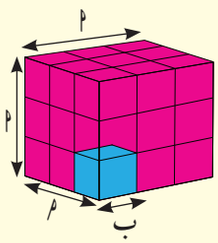
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- فرقُ المكعّبين
  Difference between Two Cubes
- مجموعُ المكعّبين
  Sum of Two Cubes

استكشِفْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين

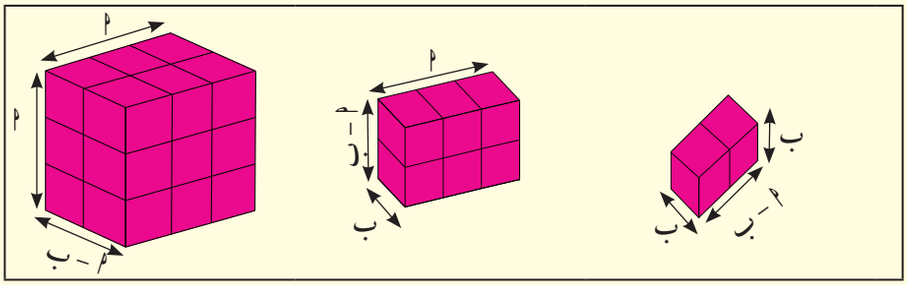
مستلزَماتُ الدرسِ: مقصٌّ

١ (أ) خُذْ مكعّبًا طولُ ضلعِهِ ا وانزعْ من إحدى رؤوسِه مكعّبًا صغيرًا طولُ ضلعِهِ ب.
في الرسمِ: ا = ٣، ب = ١ (شكلُ ١).
(ب) أوجِدْ حجمَ المجسَّمِ الناتجِ بدلالةِ ا، ب.



شكلُ (١)

٢ اقطعِ المجسَّمَ الناتجَ إلى ثلاثةِ مجسَّماتٍ كلٌّ منها على شكلِ شبهِ مكعّبٍ كما في الرسمِ.



٣ اكتبْ حجمَ كلِّ قطعةٍ بدلالةِ ا، ب.

٤ حدِّدِ العاملَ المشترَكَ بينَ الأحجامِ الثلاثةِ.

٥ (أ) أوجِدْ ناتجَ جمعِ أحجامِ المجسَّماتِ الثلاثةِ.
(ب) حلِّلِ الناتجَ مستخدِمًا العاملَ المشترَكَ في ٤.

٦ اكتبِ العلاقةَ بينَ ما حصلْتَ عليه في ١(ب)، ٥(ب).

تعلَّمْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين وتحليلُ الجمعِ بينَ مكعّبين

$ا^٣ - ب^٣$ تُسمّى الفرقَ بينَ مكعّبين.

القانونُ: $ا^٣ - ب^٣ = (ا - ب)(ا^٢ + اب + ب^٢)$

عندَ تحليلِ الفرقِ بينَ مكعّبين يُمكِنُ استخدامُ القانونِ:

الفرقُ بينَ مكعّبي كمّيّتين = (الكمّيّةُ الأولى − الكمّيّةَ الثانيةَ)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى + ناتجَ ضربِ الكمّيّتين + مربّعَ الكمّيّةِ الثانيةِ).

مثالٌ (١)

حلِّلْ: $س^{٣} - ٢٧$.

الحلُّ: $س^{٣} - ٢٧ = س^{٣} - (٣)^{٣}$

$= (س - ٣)(س^{٢} + س \times ٣ + ٣^{٢})$

$= (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: $أ^{٣} - ١٢٥$.

يُمكِنُ استخدامُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين لتحليلِ المقدارِ $أ^{٣} + ب^{٣}$.

يُكتَبُ المقدارُ $أ^{٣} + ب^{٣}$ على الصورةِ $أ^{٣} - (-ب)^{٣}$.

$أ^{٣} + ب^{٣} = أ^{٣} - (-ب)^{٣}$

$= (أ - (-ب))(أ^{٢} + أ(-ب) + (-ب)^{٢})$

$= (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

القانونُ: $أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

مجموعُ مكعّبي كمّيّتين = (الكميّةُ الأولى + الكمّيّةَ الثانيةَ)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى - ناتجَ ضربِ الكمّيّتين + مربّعَ الكمّيّةِ الثانيةِ).

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: $ص^{٣} + ٦٤$.

الحلُّ: $ص^{٣} + ٦٤ = ص^{٣} + (٤)^{٣}$

$= (ص + ٤)(ص^{٢} - ص \times ٤ + ٤^{٢})$

$= (ص + ٤)(ص^{٢} - ٤ص + ١٦)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: (أ) $م^{٣} + ٨$.

(ب) $ع^{٣} + ١$.

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: $٨أ^{٣} - ٣٤٣$.

الحلُّ: $٨أ^{٣} - ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} - (٧)^{٣}$

$= (٢أ - ٧)((٢أ)^{٢} + ٧ \times ٢أ + (٧)^{٢})$

$= (٢أ - ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + ٤٩)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: $٢٧ + ٦٤ك^{٣}$.

مثالٌ (٤)

حلِّلْ: $٣ع^{٣} + ١٩٢$ تحليلًا كاملًا.

الحلُّ: $٣ع^{٣} + ١٩٢ = ٣(ع^{٣} + ٦٤)$

$= ٣(ع^{٣} + ٤^{٣})$

$= ٣(ع + ٤)(ع^{٢} - ٤ع + ١٦)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ $أ^{٣} - ٢٧ب^{٣}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف يُمكِنُك تحويلُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين إلى الجمعِ بينَ مكعّبين؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ لتُحقِّقَ التحليلَ.

(أ) ٢٧س^{٣} + ١ = (... + ١)(٩س^{٢} – .... + ...)

(ب) ل^{٣} – $\frac{١}{٦٤}$ = (ل – ...)(ل^{٢} + ... + ...)

(جـ) ن^{٦} – ١ = (ن^{٢})$^{...}$ – ١$^{...}$ = (ن^{٢} – ..)(... + ... + ١)

= (ن – ...)(ن + ...)(... + ... + ...)

٢ فكِّرْ: حلِّلْ تحليلًا تامًّا.

(أ) س^{٣} – ص^{٣} + س^{٢} – ص^{٢}

.....

.....

.....

(ب) $\frac{١}{١٢٥}$ ﻫ^{٣} – $\frac{٢٧}{٦٤}$ ص^{٣}

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٣-٣

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ: س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomials of the Form: $x^2 + bx + c$

صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ في الدرسِ السابقِ كيفيّةَ التحليلِ باستخدامِ الفرقِ بينَ مربّعين، وتحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبينِ ومجموعُ مكعّبينِ والآن سوف تُحلِّلُ حدوديّةً ثلاثيّةً على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ. ◄

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الحدوديّةِ الثلاثيّةِ على الصورةِ: س^{٢} + ب س + جـ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الفيزيائيّون تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لحلِّ مسائلِ السقوطِ الحرِّ أو القفزِ بالمظلّةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ حدوديّةٌ ثلاثيّةٌ
Trinomial

استكشِفْ: تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ س^{٢} + ٦س + ٨ ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦.

١ أكمِلِ الجدولَ:

العددان	ناتجُ الضربِ	ناتجُ الجمعِ
١، ٨	٨	٩
-١، -٨	٨	
٢، ٤		
-٢، -٤		

٢ ما العددان اللذان يُحقِّقان الشرطين التاليين: ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦؟

٣ بسِّطْ: (س + □)(س + ○) حيث □، ○ تُمثِّلان العددين اللذين اخترْتَهما.

٤ كرِّرِ الخطواتِ من: ١ إلى ٣ مع الحدوديّةِ: س^{٢} - ١٠س - ٢٤. أوجِدْ عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما -٢٤ وناتجُ جمعِهما -١٠.

تعلَّمْ: تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ س^{٢} + ب س + جـ إلى عواملِها، ابحثْ عن عددين م، ن يُحقِّقان:
م × ن = جـ، م + ن = ب، ثمّ اكتبْ س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن).

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ب^{٢} − ٥ب + ٦ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما ٦ وجمعِهما −٥.

−١، −٦: (−١) × (−٦) = ٦ ، (−١) + (−٦) = −٧ كلّا

−٢، −٣: (−٢) × (−٣) = ٦ ، (−٢) + (−٣) = −٥ نعم

إذًا: ب^{٢} − ٥ب + ٦ = (ب − ٢)(ب − ٣)

تحقَّقْ: (ب − ٢)(ب − ٣) = ب^{٢} − ٣ب − ٢ب + ٦

= ب^{٢} − ٥ب + ٦

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: س^{٢} + ٧س + ١٢.

لاحِظْ في مثالِ (١) أنّ ناتجَ الضربِ هو ٦، عددٌ موجَبٌ، وبالتالي العددان لهما الإشارةُ نفسُها. وبما أنّ ناتجَ الجمعِ هو −٥ سالبٌ نستنتجُ أنّ العددين سالبان.

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: س^{٢} − ١٤س − ٣٢ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما −٣٢ وناتجُ جمعِهما −١٤.

العددان +٢، −١٦ يُحقِّقان: ٢ × (−١٦) = −٣٢ ، +٢ − ١٦ = −١٤

إذًا: س^{٢} − ١٤س − ٣٢ = (س + ٢)(س − ١٦)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: م^{٢} + ٢م − ٣٥

لاحِظْ أنّ في المثالِ (٢) ناتجُ الضربِ سالبٌ، إذًا للعددين إشارتان مختلِفتان.

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: س^{٢} − ١٢س + ٣٥ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما ٣٥ وناتجُ جمعِهما −١٢.

العددان −٥، −٧ يُحقِّقان: (−٥) × (−٧) = ٣٥، (−٥) + (−٧) = −١٢

∴ س^{٢} − ١٢س + ٣٥ = (س − ٥)(س − ٧)

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: س^{٢} −٢س − ٣٥ إلى عواملِها.

تحقَّقْ من فهمِك

أيٌّ ممّا يلي هو تحليلٌ للمقدارِ ل^{٢} + ١١ل + ٢٤؟ فسِّرْ.

(١) (ل – ٨)(ل – ٣)　　(٢) (ل – ٨)(ل + ٣)

(٣) (ل + ٢)(ل + ١٢)　　(٤) (ل + ٨)(ل + ٣)

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ، مستبدِلًا ▭ بالعاملِ الناقصِ أو العواملِ الناقصةِ لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ.

(أ) س^{٢} + ٢س – ١٥ = (س + ٥)(　　).

(ب) ل^{٢} + ١٠ل – ٢٤ = (ل – ٢)(　　).

(جـ) ب^{٢} + ▭ ب + ٣٠ = (ب + ٥)(ب + ٦).

٢ هل يُمكِنُ التأكيدُ أنّه لا يُمكِنُ تحليلُ الحدوديّةِ س^{٢} + ٥س + ٨٠ إلى عواملَ؟ فسِّرْ.

.....

.....

.....

٣ في الحدوديّةِ الثلاثيّةِ س^{٢} + ب س + جـ ، ب عددٌ موجَبٌ، م، ن ناتجُ ضربِهما هو جـ وناتجُ جمعِهما هو ب. هل يُمكِنُك التأكيدُ أنّ العددين م، ن هما عددان موجَبان؟ فسِّرْ. أعطِ مثالًا على ذلك.

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٣–٤

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ:
أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

Factorising Trinomials of the Form:
$ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أس^{٢} + ب س + جـ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ سلاحُ المدفعيّةِ تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لدراسةِ موقعِ وزمانِ سقوطِ القذيفةِ.

◄ صلةُ الدرسِ في الدرسِ السابقِ، حلّلْتَ حدوديّاتٍ ثلاثيّةً على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ.
والآن، سوف تُحلِّلُ حدوديّاتٍ على الصورةِ: أس^{٢} + ب س + جـ ►

استكشِفْ: تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ: أس^{٢} + ب س + جـ

١ أوجِدْ ناتجَ ضربِ كلٍّ ممّا يأتي:

(أ) (٢س + ١)(س + ٣) = ...

(ب) (٣س + ٢)(٤س + ١) = ...

(جـ) (٢س – ٣)(س + ١) = ...

٢ ما العلاقةُ بينَ معاملِ س^{٢} وناتجِ ضربِ معاملي س في العواملِ؟

٣ ما العلاقةُ بينَ الحدِّ الثابتِ في الصيغةِ المبسَّطةِ والحدّين الثابتين في الصيغةِ المحلَّلةِ إلى عواملَ؟

٤ كيف تحصلُ على معاملِ س في الصيغةِ المبسَّطةِ؟ على الصورةِ أس^{٢} + ب س + جـ؟

تعلَّمْ: تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أس^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أس^{٢} + ب س + جـ إلى عواملَ، نبدأُ أوّلًا بكتابةِ أزواجِ الأعدادِ م، ن ناتجُ ضربِها يُساوي أ، ونكتبُ بالقربِ منها أزواجَ الأعدادِ ك، ل التي يُساوي ناتجُ ضربِها جـ. نختارُ من بينِ أزواجِ الأعدادِ المتوافقةِ التي مجموعُها ب.

ونُمثِّلُ ذلك بالصورةِ:

أس^{٢} + ب س + جـ = (م س + ك)(ن س + ل) = م ن س^{٢} + (م ل + ك ن)س + ك ل

م × ن = أ (معاملُ س^{٢}) م ل + ك ن = ب (معاملُ س) ك × ل = جـ (الحدُّ الثابتُ)

م س	ك
ن س	ل

م س × ل + ن س × ك = ب س (الحدُّ الأوسطُ)

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

الحدوديّةُ الثلاثيّةُ: أس^{٢} + ب س + جـ

تُكتَبُ: (م س + ك)(ن س + ل) وبالمقارنةِ نجدُ أنّ:

م × ن = ٥؛ ك × ل = −٦، م × ل + ك × ن = ٧

نبحثُ عن عددين م، ن يكونُ ناتجُ ضربِهما ٥ ونبحثُ عن عددين ك، ل

ناتجُ ضربِهما −٦ على أن يكونَ: م × ل + ك × ن = ٧

فنجدُ م = ١، ك = ٢، ن = ٥، ل = −٣

وبالتالي، تكونُ الحدوديّةُ بالتحليلِ تُساوي: (١س + ٢) (٥س − ٣)

أو (س + ٢)(٥س − ٣)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٥	(الحدُّ الثابتُ) = −٦

١ س	٢
٥ س	−٣

حيث إنّ:

١س × (−٣) + ٥س × ٢ = −٣ س + ١٠ س

= ٧س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦ = (س + ٢)(٥س − ٣)

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

(س + أ)(س + أ) = (س + أ)^{٢}

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (م س + ك)(ن س + ل)

= م ن س^{٢} + (م ل + ك ن)س + ك ل

إذًا، نبحثُ عن العددين م، ن ناتجُ ضربِهما ٦ ونبحثُ عن عددين ك، ل ناتجُ ضربِهما ١٠ على أن يكونَ م ل + ك ن = −١٩

فنجدُ: م = ٢، ن = ٣، ك = −٥، ل = −٢.

وبالتحليلِ نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٦	(الحدُّ الثابتُ) = ١٠

٢س	−٥
٣س	−٢

حيث إنّ: ٢س × (−٢) + ٣س × (−٥) = −٤س − ١٥س = −١٩س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

حاوِلْ أن تحلَّ

حلِّلْ:

١ ٣س^{٢} + ٧س − ٦.

٢ ٦س^{٢} − ٥س − ٦.

٣ ١٠س^{٢} + ١٤س − ١٢.

٤ ٤س^{٢} − ١٢س + ٩.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تُحلِّلُ المقدارَ الثلاثيَّ أس^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠؟ فسِّرْ.

٢ ما الفرقُ بينَ طريقةِ تحليلِ كلٍّ من الحدوديّتين الثلاثيّتين: س^{٢} + ب س + جـ، أس^{٢} + ب س + جـ؟

٣ حلِّلِ الحدوديّةَ ٢س^{٢} + ٨س + ٦ بطريقتين مختلِفتين.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ:

(أ) $س^{٢} - ٦س - ٧ = (س + ١)(س - ...)$

(ب) $٢س^{٢} - ١٥س + ٧ = (س - ٧)(.....)$

(جـ) $٦ب^{٢} + ١٣ب - ٥ = (.....)(.....)$

٢ أوجِدِ القيمةَ التي تُكمِلُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ بحيث يُمكِنُ تحليلُه إلى عاملين كلٌّ منهما مكوَّنٌ من حدّين. وضِّحْ كلَّ تحليلٍ.

(أ) $٢س^{٢} - س - ...$

.....

(ب) $٢ب^{٢} - ٧ب + ...$

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

المعادلاتُ والمتباينـاتُ
Equations and Inequalities

ما الفائدةُ؟

فجأةً، انطفأَتِ الأنوارُ وأظلمَتْ شاشاتُ التلفزيونِ والحاسوبِ. فلا يُمكِنُك تذكّرُ آخرِ لحظةٍ رأيْتَ فيها وميضَ ضوءٍ من دونِ تلك الإخفاقاتِ النادرةِ في الطاقةِ حيث كنّا بالتأكيدِ سنعتبرُ الطاقةَ الكهربائيّةَ مضمونةً. في يومي ٩–١٠ نوفمبرَ ١٩٦٥، حصلَ أكبرُ إخفاقٍ في تاريخِ الطاقةِ حيث تأثّرَ ٣٠ مليونَ شخصٍ وتركَ مساحةَ ٢٠٨ ٠٠٠ كم^{٢} في الظلامِ في مدينةِ نيويورك، فقد انقطعَتِ الكهرباءُ الساعةَ ٥:٢٧ ب. ظ ولم تعدْ إلّا بعدَ أكثرَ من ١٣ ساعةً.

هل يُمكِنُك تخيّلُ الفوضى الناتجةِ حيث لا مصاعدَ ولا مصابيحَ شوارعَ ولا حاسوبَ ولا تلفزيونَ! إنّنا ننسى أنّ أشياءَ عديدةً تتوقّفُ عندما تنقطعُ أكبرُ كمّيّةٍ من الكهرباءِ. فالكهرباءُ هي صورةُ طاقةٍ يُمكِنُ تحويلُها إلى طاقةٍ أخرى: الحرارةُ لحفظِ منازلِنا، الضوءُ لمصابيحِنا، طاقةُ الصوتِ في جهازِ التسجيلِ وطاقةٌ ميكانيكيّةٌ لإدارةِ المحرّكاتِ في غسّالاتِ الثيابِ والأطباقِ إلخ.

١. اذكرِ الأجهزةَ الكهربائيّةَ التي تستخدمُها في منزلِك وفي المدرسةِ وتتأثّرُ بانقطاعِ الكهرباءِ.

٢. في رأيِك، ما هي الأجهزةُ التي تستهلكُ طاقةً كهربائيّةً لمدّةِ ساعةٍ؟

٣. في رأيِك، ما الأجهزةُ التي تستهلكُ أكبرَ كمّيّةٍ من الطاقةِ الكهربائيّةِ طيلةَ الوقتِ الذي تعملُ هذه الأجهزةُ خلالَه؟

٥–٣

حلُّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ

Solving Second Degree Equation in One Variable by Factorising

سوف تتعلّمُ

- حلَّ المعادلةِ التربيعيّةِ باستخدامِ التحليلِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ البنّاؤون المعادلاتِ التربيعيّةَ عندَ رصفِ سقوفِ المنازلِ بقطعِ القرميدِ.

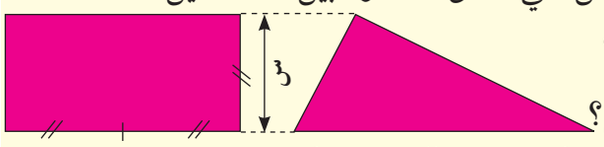
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلةٌ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ
  Second Degree Equation with One Variable
- حلُّ معادلةٍ
  Solving an Equation

◄ صلةُ الدرسِ حلَّلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين وحدوديّاتٍ ثلاثيّةٍ، ومجموعَ مكعّبين، والفرقَ بينَ مكعّبين، والآن في هذا الدرسِ، سوف تحلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ. ►

استكشِفْ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ بالتحليلِ

الهدفُ من هذا النشاطِ إيجادُ قيمِ س التي تُحقِّقُ المساواةَ بينَ المساحتين.



١ ما ارتفاعُ المثلّثِ بدلالةِ س؟

٢ ما طولُ المستطيلِ بدلالةِ س؟

٣ اكتبْ كلًّا من مساحةِ المثلّثِ ومساحةِ المستطيلِ بدلالةِ س.

٤ أيٌّ من قيمِ س تُحقِّقُ المعادلةَ $س^{٢} = ٥س$:

س = ٣، س = ٤، س = ٥، س = ٦ ؟

تعلَّمْ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددين (عاملين) يُساوي صفرًا، فإنّ أحدَهما أو كلاهما يُساوي صفرًا، أي أنّ لكلِّ ا، ب عددين حقيقيّين، إذا كانَ ا ب = صفرًا، فإنّ ا = ٠ أو ب = ٠

مثالٌ (١)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: (س + ٥)(س + ٦) = ٠، ثمّ تحقَّقْ من صحّةِ الحلِّ.

الحلُّ:

(س + ٥)(س + ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س + ٦ = ٠ — استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = −٥ أو س = −٦ — أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {−٥، −٦}

تحقَّقْ: عوِّضْ بـ −٥ بدلًا من س — عوِّضْ بـ −٦ بدلًا من س

(−٥ + ٥)(−٥ + ٦) = صفرًا — (−٦ + ٥)(−٦ + ٦) = صفرًا

٠ × ١ = ٠ (عبارةٌ صحيحةٌ) — (−١) × ٠ = ٠ عبارةٌ صحيحةٌ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) (س + ٧)(س − ٤) = ٠ (ب) (٣ص − ٥)(ص − ٢) = ٠

مثالٌ (٢)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) $س^{٢} - ٥س = ٠$ (ب) $(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

الحلُّ:

(أ) $س^{٢} - ٥س = ٠$

س(س − ٥) = ٠ حلِّلْ

س = ٠ أو س − ٥ = ٠ استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ٠ أو س = ٥ أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {٠، ٥}

الحلُّ:

(ب) $(س + ٢)^{٢} - ١٤٤ = ٠$

(س + ٢ − ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ الفرقُ بينَ مربّعين

(س − ١٠)(س + ١٤) = ٠ بسِّطْ

س − ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = −١٤ أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {١٠، −١٤}

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) $س^{٢} - ١٢س = ٠$ (ب) $٣س^{٢} = ١٢$

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: $٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤$.

الحلُّ:

$٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤$

هل تعلمُ؟

قدّمَ الخوارزميُّ في كتابِه «حسابُ الجبرِ والمقابلةُ» حوالى العامِ ٨٣٠ م، أوّلَ حلٍّ منهجيٍّ للمعادلاتِ التربيعيّةِ.

٦ص^{٢} − ٢ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ − ٤ = ٠ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ إلى كلٍّ من ٢ص^{٢}، +٤

٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠ بسِّطْ

(٢ص + ٣) (٢ص + ٣) = ٠

(٢ص + ٣)^{٢} = ٠ $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}$

٢ص + ٣ = ٠ ∵ $أ^{٢}$ = ٠ ∴ أ = ٠

٢ص = −٣

ص = $-\frac{٣}{٢}$

مجموعةُ الحلِّ = $\{-\frac{٣}{٢}\}$

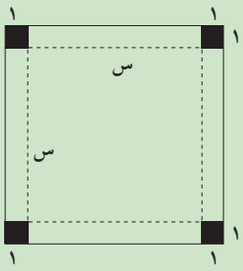
حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: ٣٥س^{٢} + ٤٥س − ١ = ١٠س^{٢} − ٢٥س − ٥٠

مثالٌ (٤)

يُوضِّحُ الرسمُ أدناه مخطَّطَ شبكةِ صندوقٍ مفتوحٍ من الواجهةِ العلويّةِ، المساحةُ الكلّيّةُ للوحةِ الورقِ المقوّى المصنوعِ منه الصندوقُ هي ١٤٤سم^{٢}، وارتفاعُ الصندوقِ ١سم، وقد تمَّ قطعُ ١سم × ١سم من كلِّ ركنٍ من أركانِ لوحةِ الورقِ المقوّى.

أوجِدْ أبعادَ الصندوقِ.



الحلُّ:

الشكلُ المرسومُ هو منطقةٌ مربّعةٌ

طولُ ضلعِها = س + ١ + ١ = س + ٢

مساحةُ المنطقةِ المربّعةِ = طولَ الضلعِ في نفسِه

١٤٤ = (س + ٢)(س + ٢)

أي أنّ (س + ٢)^{٢} = ١٤٤

(س + ٢)^{٢} − (١٢)^{٢} = ٠ ١٤٤ = ١٢^{٢}

(س + ٢ − ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ الفرقُ بينَ مربّعين

(س − ١٠)(س + ١٤) = ٠ بسِّطْ

س − ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = −١٤

وحيث إنّ الطولَ يجبُ أن يكونَ موجَبًا، فالحلُّ هو ١٠ . وعلى ذلك تكونُ أبعادُ الصندوقِ هي ١٠سم، ١٠سم، ١سم.

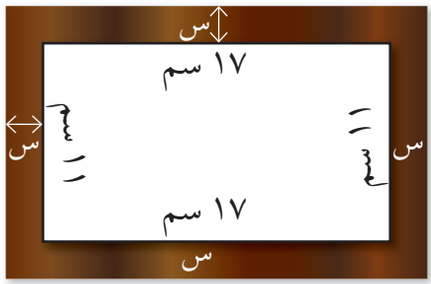
تحقَّقْ من فهمِك

١ ما خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ؟ أعطِ مثالًا على ذلك.

٢ هل يُمكِنُ تطبيقُ هذه الخاصّيّةِ إذا استُبدِلَ الصفرُ بـ ٥؟ فسِّرْ.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-٥)

يُخطِّطُ رامي لصنعِ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أخذَها أثناءَ رحلةٍ قامَ بها مع عائلتِه.
يبلغُ طولُ الصورةِ ١٧ سم وعرضُها ١١ سم.



ويُريدُ رامي أن يكونَ للإطارِ العرضُ نفسَهُ من الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٣١٥ سم^{٢}. كم يجبُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ؟

افهمْ

١ ما هي معطَياتُ المسألةِ؟ .....

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟ .....

خطِّطْ

٣ **فسِّرِ المعادلةَ:** (٢س + ١١) (٢س + ١٧) = ٣١٥. .....

٤ بسِّطِ المعادلةَ في ٣. .....

٥ ما صورةُ المعادلةِ التي حصلْتَ عليها؟ .....

٦ ما طريقةُ الحلِّ التي ستعتمدُها؟ .....

.....

حُلَّ

٧ حلِّلْ: س^{٢} + ١٤س − ٣٢ إلى عواملَ. .....

٨ حُلَّ المعادلةَ س^{٢} + ١٤س − ٣٢ = ٠ .....

٩ لماذا حصلْتَ على إجابتين؟ .....

تحقَّقْ

١٠ هل القيمتان اللتان حصلْتَ عليهما مقبولتان؟ فسِّرْ. .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١١ تُريدُ صنعَ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أبعادُها ٢٠ سم ، ١٤ سم وتُريدُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ هو نفسَه في الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٥٢٠ سم^{٢}. كم عرضُ الإطارِ؟ .....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **حسابٌ ذهنيٌّ**: استخدِمِ الحسابَ الذهنيَّ لحلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:

(أ) (س – ٣)(س – ٢) = ٠

.....

.....

(ب) (س + ٤)(٢س – ٩) = ٠

.....

.....

٢ **الهندسةُ**: إذا زادَ طولُ كلِّ ضلعٍ من أضلاعِ مربّعٍ ٣ سم، فإنّ مساحةَ المربّعِ الجديدِ ستكونُ ٦٤ سم^{٢}، أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصليِّ.

.....

.....

.....

٣ قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ضعفُ عرضِها، ومساحتُها تُساوي ٨٠٠ م^{٢}.

أوجِدْ بعدي قطعةِ الأرضِ.

.....

.....

.....

٤ صندوقٌ على شكلِ شبهِ مكعّبٍ أبعادُه : ٤، س + ٢، س + ٢ من السنتميتراتِ، وحجمُه ٤٠٠ سم^{٣}.

أوجِدْ قيمةَ س.

.....

.....

.....

٥ **التحضيرُ للاختبارِ**: إذا كانَ أ^{٢} + ب^{٢} = ٩، أب = ٦، فما قيمةُ (أ + ب)^{٢}؟

.....

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ٣٠ (هـ) ٣٦

٦ **التحدّي**: حُلَّ المعادلةَ: س^{٣} – ١٦ س = صفرًا.

.....

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٦-٣

حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ

Solving First Degree Inequality in One Variable

سوف تتعلّمُ

- حلَّ متبايناتٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ.

من الاستخداماتِ

- يحلُّ الإخصائيّون في المعاملِ المتباينات كي لا تتخطّى كلفةُ إنتاجِ السلعةِ المبلغَ المقرَّرَ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ متباينةٌ Inequality

◄ صلةُ الدرسِ درسْتَ فيما سبقَ حلَّ المتباينات وتعرّفْتَ القيمةَ المطلَقةَ للعددِ، والآن، سوف نحلُّ مسائلَ متباينات تتضمّنُ القيمةَ المطلَقةَ. ►

استكشِفْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ

في مهرجانِ نهايةِ العامِ، أرادَ نادي الرياضةِ في المدرسةِ تصميمَ رايةٍ مستطيلةِ الشكلِ يُحيطُ بها شريطٌ من قماشٍ ذهبيِّ اللونِ.

١ ما القانونُ الذي يُعطي محيطَ الرايةِ؟

٢ قرّرَتْ لجنةُ النادي أن يكونَ طولُ الرايةِ ٦٨ سم شرطَ ألّا يتعدّى طولُ شريطِ القماشِ ذهبيِّ اللونِ ٢٢٠ سم. اكتبْ متباينةً تُحقِّقُ هذه الشروطَ.

٣ (أ) حُلَّ المتباينةَ التي كتبْتَها.

(ب) ما العرضُ الأقصى للرايةِ؟

تعلَّمْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ

في المعادلاتِ نستخدمُ علاقةَ المساواةِ، بينما في المتباينات نستخدمُ العلاقاتِ (<، ≤، >، ≥).

المتباينات ٢٠س > ٥، ب < −٣، ٢م + ٤ ≤ ٧، هي متباينات من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ، بينما ٣ص^{٢} − ٤ > ٥ هي متباينةٌ من الدرجةِ الثانيةِ لأنّ أسَّ المتغيِّرِ ص يُساوي ٢.

طريقةُ حلِّ المتباينات من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ تُشبِهُ طريقةَ حلِّ المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ.

المتباينةُ ٢م + ٤ > ٧، إذا كانَتْ م = ٣، تُصبِحُ ٢ × ٣ + ٤ > ٧ وهذه عبارةٌ صحيحةٌ. العددُ ٣ يُحقِّقُ المتباينةَ وهو أحدُ حلولِها.

مثالٌ (١)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ ٢م + ٤ > ٧ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

٢م + ٤ > ٧

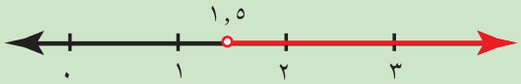
٢م + ٤ − ٤ > ٧ − ٤ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (−٤) إلى الطرفين

٢م > ٣ بسِّطْ

$\frac{١}{٢} \times ٢م > \frac{١}{٢} \times ٣$ اضربِ الطرفين في المعكوسِ الضربيِّ للعددِ ٢

$م > \frac{٣}{٢}$ أي م > ١,٥

مجموعةُ الحلِّ = (١,٥ ، ∞)



يُمكِنُ تمثيلُ مجموعةِ الحلِّ على النحوِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ ٣س − ٥ ≤ ٤ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

تذكَّرْ

ط = مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيّةِ.

ص = مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ.

ن = مجموعةُ الأعدادِ النسبيّةِ.

$\overline{ن}$ = مجموعةُ الأعدادِ غيرِ النسبيّةِ.

ح = مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

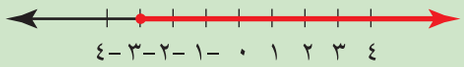
مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ الموجَبةِ يُرمَزُ إليها بالرمزِ ح+

مثالٌ (٢)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ ٥ − س ≥ ٨ في ح، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

٥ − س ≥ ٨



− س ≥ −٥ + ٨

−س ≥ ٣

س ≤ −٣

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ : [−٣، ∞)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حُلَّ: ٤ − ٢س ≤ −٦، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

مساعدةٌ رياضيّةٌ

عندَ ضربِ طرفي المتباينةِ في عددٍ سالبٍ نعكسُ علاقةَ الترتيبِ.

حُلَّ متباينةٍ تتضمّنُ قيمةً مطلَقةً.

علمْنا فيما سبقَ أنّه إذا كانَ |س| = ٢ حيث ٢ ∈ ح+

فإنّ س = −٢ أو س = ٢

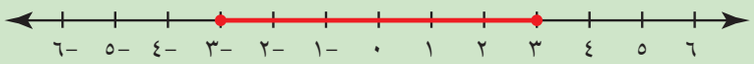
والآن، ماذا نستنتجُ إذا كانَ |س| ≥ ٢ حيث ٢ ∈ ح+

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: |س| ≥ ٣ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

المتباينةُ |س| ≥ ٣ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بعدُه عن الصفرِ أصغرُ من أو يُساوي ٣، أي أنّ:

$-٣ \geq س \geq ٣$



وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي [-٣، ٣].

تعميم:

إذا كانَ |س| ≥ أ فإنّ -أ ≥ س ≥ أ والعكسُ صحيحٌ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

مثالٌ (٤)

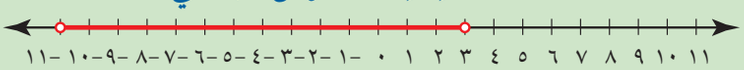
أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س + ٤| < ٧ في ح، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ .

الحلُّ: |س + ٤| < ٧

$-٧ < س + ٤ < ٧$ استخدِمِ التعميمَ

$-٧ - ٤ < س + ٤ - ٤ < ٧ - ٤$ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (-٤)

$-١١ < س < ٣$



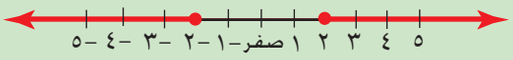
مجموعةُ الحلِّ: (-١١، ٣)

مثالٌ (٥)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س| ≥ ٢ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: المتباينةُ |س| ≥ ٢ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بُعده عن الصفرِ أكبرُ من أو يُساوي ٢

أي أنّ س ≥ ٢ أو س ≤ -٢



وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي:

[٢، ∞) ∪ (-∞، -٢]

تعميم:

إذا كانَ |س| ≥ أ فإن س ≥ أ أو س ≤ -أ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

مثالٌ (٦)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $|٢س - ١| + ٢ > ٥$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ

الحلُّ: $|٢س - ١| + ٢ > ٥$

$|٢س - ١| + ٢ - ٢ > ٥ - ٢$ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (-٢)

$|٢س - ١| > ٣$ استخدِمِ التعميمَ

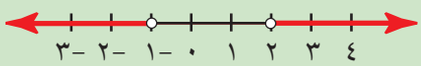
$٢س - ١ > ٣$ أو $٢س - ١ < -٣$

$٢س > ٣ + ١$ $٢س < -٣ + ١$

$٢س > ٤$ $٢س < -٢$

$س > ٢$ $س < -١$

مجموعةُ الحلِّ: $(٢، \infty) \cup (-\infty، -١)$.



حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|س + ٧| > ٥$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٤ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $٢|م + ٨| \geq ٤$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

مثالٌ (٧)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $|٢س + ٥| - ٢ \leq ٣$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: $|٢س + ٥| - ٢ \leq ٣$

$|٢س + ٥| - ٢ + ٢ \leq ٣ + ٢$ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (٢)

$|٢س + ٥| \leq ٥$

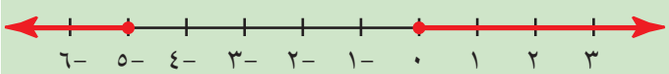
$٢س + ٥ \leq ٥$ أو $٢س + ٥ \geq -٥$ استخدِمِ التعميمَ

$٢س \leq ٠$ $٢س \geq -١٠$

$٢س \leq ٠$ $س \geq -٥$

$س \leq ٠$ $س \geq -٥$

مجموعةُ الحلِّ: $[٠، \infty) \cup (-\infty، -٥]$.



حاوِلْ أن تحلَّ

٥ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|٣س - ٢| + ٤ \leq ٨$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٦ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|٣ص - ١| + ٣ \geq ٤$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ اكتبْ ٤ قيمٍ للمتغيِّرِ تُحقِّقُ كلَّ متباينةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٢}$ س < ٠,٥ (ب) $\frac{س}{٣} \geq -٤$ (جـ) -٦ل > ٦

٢ أعطِ قيمةً لـ س تُحقِّقُ المتباينتين معًا.

٢(س + ٥) ≤ ٤، ٣(س − ١) > ٣

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ قالَ خالدٌ إنّه يستطيعُ حلَّ المتباينةِ س − $\frac{١}{٢}$ ≤ ١٣ بالتعويضِ عن س بـ ١٣، ١٤، ١٥. وعندما عوّضَ عن س = ١٣ كانَتِ العبارةُ الناتجةُ خطأً. وعندما عوّضَ عن س = ١٤، كانَتِ المتباينةُ صحيحةً؛ لذلك قالَ خالدٌ إنّ حلَّ المتباينةِ هو س ≤ ١٤، فهل قولُه صحيحٌ؟ فسِّرْ إجابتَك.

.....

.....

٢ عبِّرْ عن المتباينةِ م − ٢ > ٧ بالكلماتِ.

.....

٣ ليحصلَ طالبٌ على تقديرٍ ممتازٍ في مادّةِ الرياضيّاتِ، فإنّ عليه أن يحصلَ على ما لا يقلُّ عن ٢٧٠ درجةً في ٣ اختباراتٍ لهذه المادّةِ. حصلَ سالمٌ على الدرجاتِ ٩١، ٨٤ في الاختبارين الأوّلِ والثاني. ما الدرجاتُ التي يُمكِنُ أن يحصلَ عليها سالمٌ في الاختبارِ الثالثِ لكي يكونَ تقديرُه ممتازًا؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ)

الحدوديّاتُ النسبيّةُ
Rational Polynomials (Functions)

منذ القدمِ، حاولَ الإنسانُ سبرَ أغوارِ المحيطاتِ، ولكنّ محاولاتِه باءَتْ بالفشلِ بسببِ ضعفِ الإمكاناتِ والمواردِ، بالإضافةِ إلى خطورةِ الغطسِ إلى تلك الأعماقِ السحيقةِ.

أمّا اليومَ، فيكتشفُ العلماءُ قعرَ المحيطاتِ باستخدامِ مختبَراتٍ داخلَ غوّاصاتٍ تستطيعُ الغوصَ إلى عمقٍ حوالى ٧٠٠٠ مترٍ. فيُصبِحُ ضغطُ الماءِ على الغوّاصةِ حوالى ٣٣ كيلوجرامًا/ سم^{٢}. لذا تُؤخَذُ بعينِ الاعتبارِ مساحةُ الغوّاصةِ وحجمُها باستخدامِ العمليّاتِ مع الحدوديّاتِ النسبيّةِ، للتأكّدِ من دقّةِ القياساتِ وتأمينِ سلامةِ الغوّاصةِ وركّابِها.

١ هل التعابيرُ الجبريّةُ حدوديّاتٌ نسبيّةٌ؟

٢ لماذا لا يستطيعُ الإنسانُ تحمّلَ الضغطِ في أعماقِ البحرِ؟

٧-٣

الحدوديّاتُ النسبيّةُ وتبسيطُها

Simplifying Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- الحدوديّاتِ النسبيّةَ.
- تبسيطَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الطهاةُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ لتقديرِ الوقتِ اللازمِ لإنضاجِ العجينِ كي يُصبحَ خبزًا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ حدوديّةٌ نسبيّةٌ
Rational Expression

ملحوظةٌ

المقاماتُ أينما وُجِدَتْ ≠ ٠

◄ **صلةُ الدرسِ** حلّلْتَ في الدرسِ السابقِ بعضَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ. والآن، سوف تتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. ►

استكشِفْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يستخدمُ الغطّاسون في البحارِ غوّاصةً على شكلِ كرةٍ طولُ نصفِ قطرِها $س$، وذلك كمعملٍ اختباريٍّ لدراسةِ البحارِ والمحيطاتِ.

إذا كانَتِ المساحةُ السطحيّةُ للغوّاصةِ = $٤\pi س^{٢}$.

حجمُ الغوّاصةِ = $\frac{٤}{٣}\pi س^{٣}$.

١ اكتبْ نسبةَ المساحةِ السطحيّةِ إلى الحجمِ.

٢ اختصِرْ بالعاملِ المشترَكِ. اشرحِ الإجابةَ.

تعلَّمْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

الكسورُ مثلُ $\frac{٥}{٩}$، $\frac{٧}{١٢}$، $\frac{١}{٢}$، تُدعى أعدادًا نسبيّةً. تُسمّى كلٌّ من المقاديرِ الجبريّةِ التاليةِ:

$\frac{١}{س}$ ، $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ ، $\frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}$ حدوديّاتٍ نسبيّةً (لأنّ كلًّا من البسطِ والمقامِ حدوديّةٌ).

بالتأكيدِ قيمةُ الحدوديّةِ في المقامِ لا يُمكِنُ أن تكونَ صفرًا، لأنّ القسمةَ على صفرٍ غيرُ محدَّدةٍ. في هذا الدرسِ نعتبرُ أنّ قيمَ المتغيِّراتِ التي تُعطي قيمةَ صفرٍ للمقامِ هي قيمٌ غيرُ مقبولةٍ، وعليه فإنّ المقامَ لا يُساوي صفرًا لأيِّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ سواءٌ أذكرْنا ذلك أم لم نذكرْه. وكما في تبسيطِ الكسورِ الاعتياديّةِ، تستطيعُ أيضًا وبالطريقةِ نفسِها تبسيطَ الحدوديّةِ النسبيّةِ أو اختصارَها أو وضعَها في أبسطِ صورةٍ، وذلك بقسمةِ كلٍّ من الحدوديّتين في البسطِ والمقامِ على العاملِ المشترَكِ الأكبرِ (ع. م. ﻫ) لهما.

فمثلًا، $\frac{ر + ٥}{١٠ر}$ هي في أبسطِ صورةٍ.

مثالٌ (١)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢}$

الحلُّ:

$$\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢} = \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$$ تحليلُ البسطِ

$$= \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$$ اقسمْ على العاملِ المشترَكِ (ص + ٢) بشرطِ أنّ ص ≠ −٢

$$= ٦$$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ بسِّطْ كلَّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١٥ب}{٢٥ب^{٢}}$ (ب) $\frac{١٢ع^{٢}}{٣ع + ٦}$ (جـ) $\frac{٤م - ٢}{١ - ٢م}$

قد تحتاجُ إلى تحليلِ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لتبسيطِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

مثالٌ (٢)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦}$

الحلُّ:

$$\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦} = \frac{٢(س - ٦)}{(س - ٦)(س - ١)}$$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٦، س ≠ ١

$$= \frac{٢}{س - ١}$$

مثالٌ (٣)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

الحلُّ:

$$\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٢، س ≠ ٣

$$= \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س - ٣}$$

مثالٌ (٤)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠}$

الحلُّ:

$$\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠} = \frac{(٣س + ٥)(٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥)}{(٣س + ٥)(س - ٢)}$$

حلِّلِ البسطَ والمقامَ بشرطِ أنّ $س \neq -\frac{٥}{٣}$، $س \neq ٢$

$$= \frac{٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥}{س - ٢}$$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ بسِّطْ كلًّا من الحدوديّاتِ النسبيّةِ الآتيةِ:

(أ) $\frac{٣س + ١٢}{س^{٢} - س - ٢٠}$ (ب) $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٣س + ٩}$ (جـ) $\frac{١٦ + ٨أ}{٢ + ٥أ + ٢أ^{٢}}$

يُمكِنُ استخدامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لنمذجةِ بعضِ مسائلِ الحياةِ اليوميّةِ.

مثالٌ (٥)

يرتبطُ الزمنُ الذي نخبزُ خلالَه العجينَ بقياسِ وشكلِ قطعةِ العجينِ. فمثلًا، يُقدَّرُ زمنُ خبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ بالمعادلةِ $ن = \frac{١٢ س \times ع}{س + ع}$ حيث ن: الزمنُ بالدقائقِ، $س$ = طولُ نصفِ القطرِ بالسنتيمترِ، ع: الارتفاعُ بالسنتيمترِ أيضًا. قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ١٢ سم.

$$ن = \frac{١٢ س \times ع}{س + ع} = \frac{١٢ \times (١٠) \times (١٢)}{١٠ + ١٢} = \frac{١٤٤٠}{٢٢} \approx ٦٥$$

زمنُ خبزِ قطعةِ العجينِ هو تقريبًا ٦٥ دقيقةً.

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ باستخدامِ المعادلةِ الواردةِ في مثالِ (٣)، قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ٨سم.

تحقَّقْ من فهمِك

١ أيٌّ ممّا يلي ليسَ حدوديّةً نسبيّةً؟ فسِّرْ.

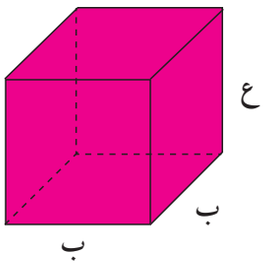
(أ) $\frac{س^{٢} - ٢س + ١٥}{س}$ (ب) $\frac{٣}{م + ١}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣ل + ٤}}{ل + ١}$

٢ اشرحْ كيف تُبسِّطُ حدوديّةً نسبيّةً. دعِّمْ شرحَك بمثالٍ.

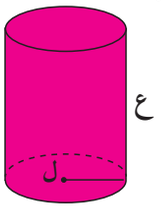
حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **البناءُ:** للتخفيفِ من كلفةِ التبريدِ، يُحاوِلُ المهندسون أن تكونَ نسبةُ مساحةِ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه أصغرَ ما يُمكِنُ. أوجِدِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثِّلُ مساحةَ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه في كلِّ شكلٍ ممّا يلي:

(أ)



(ب)



.....

.....

٢ اشرحْ متى $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$ لا تُساوي س − ٣.

.....

.....

٣ **التفكيرُ المنطقيُّ:** حدِّدْ ما إذا كانَتْ كلُّ عبارةٍ ممّا يلي هي صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو غيرَ صحيحةٍ.

(أ) $\frac{٢ب}{ب} = ٢$ .....

(ب) $\frac{٢ب^{٣}}{ب^{٤}} = \frac{٢}{ب}$ .....

(جـ) $\frac{٢ك + ١٠}{١٢} = \frac{ك + ٥}{٦}$ .....

٤ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُصبِحُ بعدَ تبسيطِها $\frac{٣}{(س - ٢)(س + ٣)}$.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٣-٨

جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Adding Rational Expressions

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. والآن سوف تجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ. ►

سوف تتعلّمُ

- جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الفنّيّون جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ في تقديرِ وقتِ الرحلاتِ الجوّيّةِ بينَ مدينتين أو دولتين.

استكشِفْ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يتألّفُ أحدُ السباقاتِ من ثماني دوراتٍ، تبلغُ مسافةُ كلِّ دورةٍ ١٠ كم. أنهى أحدُ المتسابقين أوّلَ ثلاثِ دوراتٍ خلالَ زمنِ ن دقيقةٍ، أمّا في بقيّةِ الدوراتِ فقد زادَ من سرعتِه وأنهى هذه الدوراتِ في الزمنِ نفسِه ن دقيقةٍ كما في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

١ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثِّلُ متوسِّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

٢ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثِّلُ متوسِّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الخمسِ الباقيةِ.

٣ أوجِدْ متوسِّطَ سرعتِه في مجملِ السباقِ بدلالةِ الزمنِ في أبسطِ صورةٍ.

تعلَّمْ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ.

يُشبِهُ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ، جمعَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ. إذا كانَتْ ﺃ، ب، جـ تُمثِّلُ حدوديّاتِ (جـ ≠ ٠) فإنّ $\frac{\text{ﺃ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ﺃ} + \text{ب}}{\text{جـ}}$

تذكَّرْ

مقامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لا يُساوي صفرًا أينما وُجِدَ

مثالٌ (١)

اجمعْ: $\frac{٢}{س + ٣}$ ، $\frac{٥}{س + ٣}$

الحلُّ: $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٥}{س + ٣} = \frac{٥ + ٢}{س + ٣}$ جمعُ البسوطِ

$= \frac{٧}{س + ٣}$ التبسيطُ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٢}$

(ب) $\frac{ص}{ص - ٥} + \frac{٣ص}{ص - ٥}$

(جـ) $\frac{٥ن}{ن + ١} + \frac{٥}{ن + ١}$

ثانيًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ.

لجمعِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ، يُمكِنُك أن تبدأَ بكتابةِ هذه الحدوديّاتِ مع المقامِ المشترَكِ الأصغرِ، وهو المضاعَفُ المشترَكُ الأصغرُ للمقامين.

م.م.^{2} (الأعدادُ الكلّيّةُ)

٤ = ٢ × ٢

٦ = ٢ × ٣

م.م.^{2} = ٢ × ٢ × ٣ = ١٢

م.م.^{2} [الحدودُ (وحيدةُ الحدِّ)]

٤س = ٢ × ٢ × س

٦س^{٢} = ٢ × ٣ × س × س

م.م.^{2} = ٢ × ٢ × ٣ × س × س = ١٢س^{٢}

جمعُ حدوديّاتٍ نسبيّةٍ مقاماتُها وحيدةُ الحدِّ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.^{2} لـ ٣س، ٦

٣س = ٣ × س

٦ = ٣ × ٢

م.م.^{2} = ٣ × ٢ × س = ٦س

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.^{2}، ثمّ اجمعْ.

$\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦} = \frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٣س} + \frac{١ \times س}{٦ \times س}$ أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.^{2}

$= \frac{٤}{٦س} + \frac{س}{٦س}$ بسِّطْ

$= \frac{٤ + س}{٦س}$ اجمعِ البسوطَ

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{٧ص^{٤}} + \frac{٢}{٣ص^{٢}}$

(ب) $\frac{٣}{١٢ب} + \frac{١٥}{٣٦ب^{٢}}$

يُمكِنُك أيضًا إيجادُ م.م.أ لحدوديّاتٍ من حدّين أو أكثرَ.

مثالٌ (٣)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ: (ل + ٢)، (ل − ٣)

بما أنّه لا توجَدُ عواملُ مشترَكةٌ فإنّ م.م.أ هو (ل + ٢)(ل − ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.أ ثمّ اجمعْ.

$$\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣} = \frac{٥(ل - ٣)}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦(ل + ٢)}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.أ

$$= \frac{٥ل - ١٥}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

اجمعِ البسوطَ

$$= \frac{٥ل - ١٥ + ٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

بسِّطْ، حيث

ل ≠ −٢، ل ≠ ٣

$$= \frac{١١ل - ٣}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٥}{س + ٤} + \frac{٣}{س - ١}$

(ب) $\frac{٢}{ب + ٢} + \frac{٣ب}{٢ب - ١}$

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٢}{٣س + ٤} + \frac{٦}{س + ٢}$

٢ ما المضاعَفُ المشترَكُ الأصغرُ لحدوديّتين لا عواملَ مشترَكةً لهما؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-٨)

تبلغُ المسافةُ بينَ المدينةِ ن والمدينةِ ل حوالى ٤٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ نحوَ ١٥٪ عندَ الطيرانِ من ن إلى ل عنها عندَ الطيرانِ من ل إلى ن، بسببِ وجودِ تيّارٍ هوائيٍّ قويٍّ في طبقاتِ الجوِّ العليا. إذا كانَتْ ع تُمثِّلُ سرعةَ الطائرةِ من المدينةِ ل إلى المدينةِ ن، فاكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها إذا أمكنَ لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

افهمْ

١ ما معطَياتُ المسألةِ؟

.....

.....

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

.....

.....

خطِّطْ

٣ إذا كانَتِ السرعةُ ع من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن، فكم تُصبِحُ السرعةُ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

.....

٤ ما العلاقةُ بينَ المسافةِ والسرعةِ والزمنِ؟

.....

٥ ما الكسرُ الذي يُعطي الزمنَ بدلالةِ السرعةِ والمسافةِ؟

.....

حُلَّ

٦ اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُبيِّنُ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن.

.....

٧ لماذا تُمثِّلُ الحدوديّةُ النسبيّةُ $\frac{٤٠٠٠}{ع\ ١,١٥}$ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

.....

٨ اجمعِ الحدوديّتين النسبيّتين في ٦، ٧ وبسِّطِ الإجابةَ.

.....

تحقَّقْ

٩ عوِّضْ عن ع بـ ٨٠٠ في كلٍّ من ٦، ٧، ٨. هل مجموعُ ناتجي ٦، ٧ يُساوي ناتجَ ٨؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ تبلغُ المسافةُ بينَ المدينتين أ، ب ٢٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ ١٢٪ عندَ الطيرانِ من أ إلى ب عنها من ب إلى أ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ كتبَ سامي: $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٣}{س + ١} = \frac{٥}{٢س + ٤}$. ما الخطأُ الذي ارتكبَه سامي؟

.....

.....

٢ اكتبْ حدوديّتين نسبيّتين ذواتي مقاماتٍ مختلِفةٍ. أوجِدْ م.م.أ ثمّ اجمعِ الحدوديّتين.

.....

.....

٣ **الكتابةُ**: عندَ جمعِ حدوديّتين نسبيّتين، هل تكونُ الإجابةُ في أبسطِ صورةٍ إذا استخدمْتَ م.م.أ؟ فسِّرْ.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٩-٣

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Subtracting Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المتساويةِ.
- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلفةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ المتسابقون في مبارياتِ التجذيفِ، طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لمعرفةِ تأثيرِ مقاومةِ التيّارِ على انسيابِ القواربِ.

صلةُ الدرسِ تعرّفْتَ في الدرسِ السابقِ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وجمعَها، والآن سوف تطرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ.

استكشِفْ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

تقومُ شركةٌ بتصميمِ الملصَقاتِ للدعايةِ. تبلغُ المصاريفُ الثابتةُ عندَ هذه الشركةِ ٥٤ ٠٠٠ دينارٍ شهريًّا، وتكلفةُ الموادِّ الأوّليّةِ عن كلِّ ملصَقٍ ٢٨٠ فلسًا.

١ إذا كانَ الإنتاجُ في الشهرِ الأوّلِ هو س ملصَقٍ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٢ إذا أصبحَ الإنتاجُ في الشهرِ الثاني ضعفَ الشهرِ الأوّلِ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٣ اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثِّلُ الفرقَ في تكلفةِ الإنتاجِ للملصَقِ الواحدِ بينَ الشهرِ الأوّلِ والشهرِ الثاني.

تعلَّمْ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ.

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ** يُماثِلُ طرحَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ**.

فمثلًا إذا كانَتْ ﺃ، ب، جـ تُمثِّلُ حدوديّاتِ (جـ ≠ صفرٍ)،

فإنّ $\frac{\text{ﺃ}}{\text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ﺃ} - \text{ب}}{\text{جـ}}$.

مثالٌ (١)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١}$

الحلُّ:

$$\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١} = \frac{(٢ص + ١) - (ص + ٢)}{ص - ١}$$ المقامُ مشترَكٌ

$$= \frac{٢ص + ١ - ص - ٢}{ص - ١}$$ اطرحْ

$$= \frac{ص - ١}{ص - ١}$$ بسِّطْ شرطَ أنّ ص ≠ ١

$$= ١$$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٧ب - ٢}{٣ب + ٦} - \frac{ب + ٧}{٣ب + ٦}$ (ب) $\frac{٢س + ١}{٥س + ٢} - \frac{٣س - ٤}{٥س + ٢}$

ثانيًا: طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ.

لطرحِ حدوديّاتٍ نسبيّةٍ ذاتِ مقاماتٍ مختلِفةٍ، يُمكِنُك أوّلًا إعادةُ كتابةِ هذه الحدوديّاتِ باستخدامِ المضاعَفِ المشترَكِ الأصغرِ م.م.أ للمقاماتِ. (راجِعْ جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ).

مثالٌ (٢)

اطرحْ: $\frac{٥}{س + ٢}$ من $\frac{٦}{س - ٣}$.

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ (س + ٢)، (س − ٣).

بما أنّه لا يوجَدُ عاملٌ مشترَكٌ، فيكونُ م.م.أ هو (س + ٢)(س − ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّتين مستخدِمًا م.م.أ، ثمّ اطرحْ.

$$\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢} = \frac{٦(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ أعِدْ كتابةَ الحدوديّتين

$$= \frac{٦س + ١٢}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥س - ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{(٦س + ١٢) - (٥س - ١٥)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ اطرحْ

$$= \frac{٦س + ١٢ - ٥س + ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$$= \frac{س + ٢٧}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ بسِّطْ، شرطَ أنّ $س \neq ٣$ ، $س \neq -٢$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٣أ}{١ - ٢أ} - \frac{٢}{أ + ٢}$ (ب) $\frac{٦}{٧ص^{٣}} - \frac{٨}{٣ص}$

مثالٌ (٣)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢ن - ١}{٢ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$.

الحلُّ: $\frac{٢ن - ١}{٢ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$

حلِّلْ كلًّا من المقامين شرطَ أنّ:
$ن \neq \frac{١}{٢}$ ، $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

$= \frac{٢ن - ١}{(٢ن - ١)(ن + ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$

اقسمْ على العاملِ المشترَكِ

$= \frac{١}{ن + ٣} - \frac{١}{ن - ٣}$

استخدِمِ المضاعَفَ المشترَكَ الأصغرَ للمقامين

$= \frac{ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$

اطرحْ

$= \frac{(ن - ٣) - (ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$= \frac{ن - ٣ - ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

بسِّطْ، شرطَ أنّ $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

$= \frac{-٦}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + س - ٢٠} + \frac{-س - ٤}{س^{٢} - س - ٢٠}$

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٦ص - ٧}{ص + ٢} - \frac{٦ص - ١١}{ص + ٢}$.

٢ كيف يتشابهُ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وجمعُها؟ وبمَ يختلفان؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **بسِّطِ الحدوديّةَ:** $\frac{٧د - ٢}{د^{٢} + ٢د - ٨} - \frac{٤}{د + ٤} - \frac{د}{د - ٢}$.

.....

.....

.....

.....

.....

الاختيارُ من متعدِّدٍ:

٢ م.م.أ لمقامي الحدوديّتين: $\frac{س}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{-٢}{س - ١}$ هو: .....

(أ) س + ١ (ب) س − ١ (جـ) $س^{٢} - ١$ (د) $(س^{٢} - ١)(س + ١)$

٣ ناتجُ طرحِ $\frac{٢س}{٣س - ٢}$ من $\frac{٥س}{٣س - ٢}$ هو: .....

(أ) −٢ (ب) $\frac{-٣س}{٣س - ٢}$ (جـ) $\frac{٧س}{٣س - ٢}$ (د) $\frac{٣س}{٣س - ٢}$

٤ **التفكيرُ المنطقيُّ:** يتدرّبُ أعضاءُ نادي الدرّاجاتِ ذهابًا وإيابًا على طريقٍ طولُه ١٥ كم. خلالَ العودةِ، كانَ اتّجاهُ الريحِ مع خطِّ سيرِهم، فازدادَتْ سرعتُهم بمعدَّلِ ٥ كم/ ساعةٍ (على ١٥ كم إيابًا).

(أ) استخدِمْ ع كمعدَّلِ السرعةِ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُبيِّنُ فرقَ الزمنِ بينَ الذهابِ والإيابِ.

.....

.....

.....

(ب) إذا كانَ معدَّلُ سرعتِهم ٢٠كم/ س ذهابًا، فما الزمنُ الذي استغرقَه التدريبُ؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٣-١٠

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

Multiplying and Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.
- قسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ موظّفو المصارفِ ضربَ وقسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لتحديدِ قيمةِ كلِّ دفعةٍ عندَ تسديدِ المبلغِ المقترَضِ من المصرفِ.

◄ صلةُ الدرسِ في الدروسِ السابقةِ تعرّفْتَ جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وطرحَها. في هذا الدرسِ سوف تتعلّمُ ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتَها. ►

استكشِفْ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

اعملْ مع رفاقِك لمراجعةِ تبسيطِ وضربِ وقسمةِ الأعدادِ الكسريّةِ.

١ (أ) بسِّطْ: $\frac{٨}{٢}$، $-\frac{١٥}{٢٤}$، $\frac{١٥}{٣٥}$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (١ – أ) لتبسيطِ الكسورِ.

٢ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$-\frac{٨}{٢١} \times \frac{٧}{٤}$، $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٧}$، $\frac{٣}{٤} \times (-٢)$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٢ – أ).

٣ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$٦ \div \frac{٣}{٨}$، $\frac{٢}{٣} \div \left(\frac{-٤}{٥}\right)$، $\frac{٣}{٤} \div ٢$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٣ – أ).

تعلَّمْ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

أوّلًا: ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ يُشبهُ ضربَ الأعدادِ النسبيّةِ. إذا كانَتْ أ، ب، جـ، د تُمثِّلُ حدوديّاتِ (ب ≠ ٠، د ≠ ٠)، فإنّ: $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أجـ}{ب د}$.

مثالٌ (١)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^٢ - ١}$

الحلُّ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^٢ - ١} = \frac{٦س(٢س + ١)}{٣(٤س^٢ - ١)}$ $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أجـ}{ب د}$

$= \frac{٦س(٢س + ١)}{٣(٢س - ١)(٢س + ١)}$ حلِّلِ المقامَ

$= \frac{٢^{\cancel{٦}} س(\cancel{٢س + ١})}{\cancel{٣}^{١}(٢س - ١)(\cancel{٢س + ١})}$ اقسمْ على العاملين ٣، (٢س + ١) وبسِّطْ

$= \frac{٢س}{٢س - ١}$ شرطَ أنّ س ≠ $\frac{١}{٢}$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{س - ٢}{٨س} \times \frac{-٨س - ١٦}{س^{٢} - ٤}$.

يُمكِنُ أيضًا ضربُ حدوديّةٍ نسبيّةٍ في حدوديّةٍ. يُعطى الناتجُ بالصورةِ التحليليّةِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٣ص + ٢}{٢ص + ٤} \times (ص^{٢} + ٥ص + ٦)$.

الحلُّ: $\frac{٣ص + ٢}{٢ص + ٤} \times (ص^{٢} + ٥ص + ٦)$

حلِّلْ إلى عواملَ

$= \frac{٣ص + ٢}{٢(ص + ٢)} \times \frac{(ص + ٢)(ص + ٣)}{١}$

اقسمْ على العاملِ (ص + ٢)
شرطَ أنّ ص ≠ −٢

$= \frac{٣ص + ٢}{٢(\cancel{ص + ٢}^{١})} \times \frac{(\cancel{ص + ٢}) (ص + ٣)}{١}$

$= \frac{(٣ص + ٢) (ص + ٣)}{٢}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٣}{ص} (ص^{٣} - ص)$

(ب) $\frac{٢ف}{ف + ٣} (ف^{٢} - ٢ف - ١٥)$

(جـ) $\frac{(٤م + ٨)}{م^{٢} - ١} (م - ١)$

تذكَّرْ

المعكوسُ الضربيُّ للحدوديّةِ أ هو $\frac{١}{أ}$ ، أ ≠ ٠

ثانيًا: قسمةُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على حدوديّةٍ، نضربُ الحدوديّةَ النسبيّةَ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ.

تذكَّرْ

$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$ ،

حيث ب ≠ ٠، جـ ≠ ٠، د ≠ ٠.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س}$ على (٥س^{٢} + ٥س) في أبسطِ صورةٍ، س ≠ ٠

الحلُّ: $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \div (٥س^{٢} + ٥س)$

$= \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \times \frac{١}{٥س^{٢} + ٥س}$ اضربْ في المعكوسِ الضربيِّ لـ (٥س^{٢} + ٥س)

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ حلِّلْ

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ اقسِمْ على العاملِ (س + ١)

شرطَ أنّ س ≠ −١، س ≠ ٠

$= \frac{س + ٢}{٢٠س^{٢}}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{ص + ٣}{ص + ٢}$ على (ص + ٢) في أبسطِ صورةٍ.

فكرةٌ مفيدةٌ — لحلِّ المسائلِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، أبدأُ أوّلًا بضربِ الحدوديّةِ النسبيّةِ الأولى في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ النسبيّةِ الثانيةِ.

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، انتبهْ للقيمِ التي يكونُ الناتجُ عندَها غيرَ معرفٍ حتّى تتمكّنَ من وضعِ الشرطِ.

مثالٌ (٤)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \div \frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

الحلُّ: $\frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \div \frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

$= \frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \times \frac{ب^{٢} - ٣٦}{ب + ٥}$ الضربُ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ $\frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{ب - ٦} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{ب + ٥}$ حلِّلْ

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{(ب - ٦)} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{(ب + ٥)}$ بسِّطْ مع العواملِ (ب + ٥)، (ب − ٦)

$= (ب + ٢)(ب + ٦)$ شرطَ أنّ ب ≠ −٥، ب ≠ ٦

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٥م + ١٠}{٢م - ٢٠} \div \frac{٧م + ١٤}{١٤م - ٢٠}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ كلَّ ناتجٍ في أبسطِ صورةٍ:

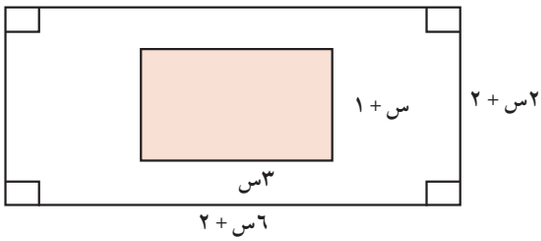
(أ) $\frac{٦س + ٣}{س + ٦} \times \frac{س^٢ + ٩س + ١٨}{٢س + ١}$

(ب) $\frac{٢ص + ٤}{ص^٢ + ١١ص + ١٨} \div \frac{ص + ١}{ص^٢ + ١٤ص + ٤٥}$

٢ اشرحْ كيف تضربُ أو تقسمُ حدوديّتين نسبيّتين.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-١٠)

يُبيِّنُ الشكلُ المقابلُ مستطيلين. اكتبْ نسبةَ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها.



افهمْ

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

.....

٢ ماذا تعني: نسبةُ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ؟

.....

خطِّطْ

٣ ما قانونُ مساحةِ المستطيلِ؟ .....

.....

٤ ما الصورةُ التي ستكتبُ النسبةَ بها (م١، م٢ تُمثِّلان مساحتي المستطيلين)؟ .....

(أ) م١ إلى م٢ (ب) م١ : م٢ (جـ) $\frac{م_١}{م_٢}$

حُلَّ

٥ ما مساحةُ المستطيلِ المظلَّلِ؟ .....

٦ ما مساحةُ المستطيلِ الأكبرِ؟ .....

٧ اكتبِ النسبةَ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ. .....

.....

٨ بسِّطِ الحدوديّةَ التي حصلْتَ عليها. .....

.....

تحقَّقْ

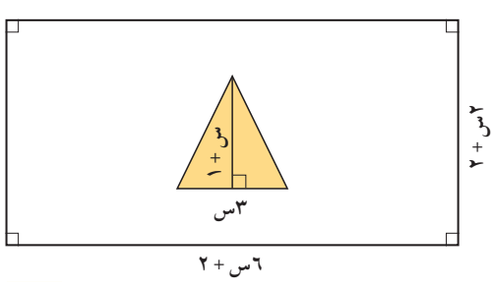
٩ عوِّضْ عن س بـ ١٠ في كلٍّ من ٥، ٦، ٨. هل إجابةُ $\frac{\text{الفقرةِ ٥}}{\text{الفقرةِ ٦}}$ تُساوي إجابةَ الفقرةِ ٨؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ اكتبْ نسبةَ مساحةِ المثلّثِ إلى مساحةِ المستطيلِ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها. .....

.....



حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ لأيِّ قيمٍ للمتغيِّرِ س تكونُ الحدوديّةُ $\frac{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}{٦س} \div \frac{-٣س - ١٢}{س^{٢} - ١٦}$ غيرَ معرَّفةٍ؟

.....

٢ **تحليلُ الخطأِ**: في حلِّ القسمةِ التاليةِ، ما الخطأُ الذي اقترفَه الطالبُ؟

$$\frac{٣س}{س + ٢} \div \frac{(س + ٢)^{٢}}{س - ٤} = ٣س \div \frac{س + ٢}{س - ٤}$$

$$= ٣س \times \frac{س - ٤}{س + ٢}$$

$$= \frac{٣س(س - ٤)}{س + ٢}$$

.....

.....

٣ أيٌّ ممّا يلي لا يُمكِنُ أن يكونَ الخطوةَ الأولى في ضربِ الحدوديّتين:

$$\frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص + ٣} \times \frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$$

.....

(أ) ضربُ البسطين.

(ب) إيجادُ المعكوسِ الضربيِّ لـ $\frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$.

(جـ) تحليلُ كلِّ حدوديّةٍ إلى عواملَ.

(د) ضربُ المقامين.

٤ أيٌّ ممّا يلي مساوٍ لـ: $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \div (٢ر^{٢} - ٢)$:

.....

(أ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢} (ر^{٢} - ١)$

(ب) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{٢}{ر^{٢} - ١}$

(جـ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \left(\frac{١}{٢ر^{٢} - ٢}\right)$

(د) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢ر^{٢} - ١}$

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

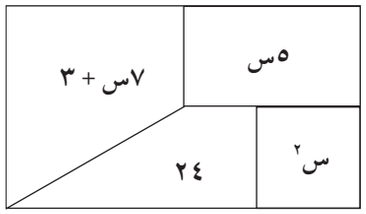
١ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٤س^{٢} − ٢٥ (ب) ١٨ س^{٢} − ٣٢ (جـ) (س + ٤)^{٢} − (٤س + ٧)^{٢}

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) س^{٢} + ٩س + ١٨ (ب) ص^{٢} + ص − ٢٠ (جـ) س^{٢} − ١٤ س − ٣٢

٣ في الشكلِ مستطيلٌ مقسَّمٌ إلى مناطقَ مساحاتُها معلومةٌ.



أوجِدِ المساحةَ الكلّيّةَ للمستطيلِ، ثمّ حلِّلْ هذه المساحةَ إلى عواملَ.

٤ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨ص^{٢} − ١٠ص − ٣ (ب) ٥ك^{٢} − ٢ك − ٧

(جـ) ٢٥س^{٢} − ١٠س − ١٥

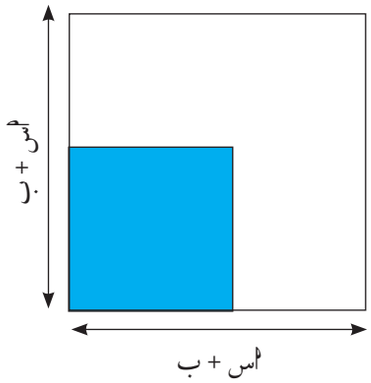
٥ تُبيِّنُ الصورةُ مربّعين، مساحةُ المربّعِ الصغيرِ المظلَّلِ تُساوي: ٤س^{٢} + ١٦س + ١٦ ومساحةُ القسمِ غيرِ المظلَّلِ من المربّعِ الكبيرِ تُساوي: ٥س^{٢} + ١٤س + ٩.

ما قيمُ ا، ب؟ علمًا أنّ ا، ب عددان موجَبان.

٦ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨س^{٣} − ٢٧ (ب) ٢٧ س^{٣} + ٨

(جـ) ٢٥٠ س^{٣} − ١٢٨



(د) لدينا مكعّبان يبلغُ طولُ الضلعِ الأوّلِ ٤س ويبلغُ طولُ الضلعِ الثاني ٥ص.

أوجِدِ الفرقَ بينَ حجمِ المكعّبين بالتحليلِ إلى عواملَ علمًا أنّ ٤س > ٥ص.

٧ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح:

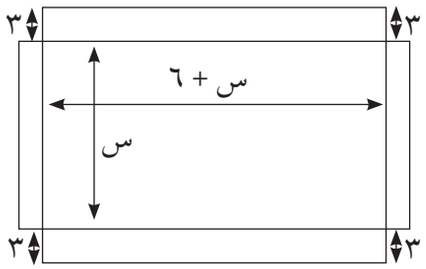
(أ) ٨ س^{٢} − ٥٠ = ٠ (ب) (س + ٤)^{٢} = ٩ (جـ) س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

(د) −س^{٢} + ٧س − ٦ = ٠ (هـ) ٥س^{٢} + ٣س − ٣٦ = ٠ (و) ٤س^{٢} + ٢٠ = ١٠س + ٣س^{٢} − ٤

تابع: اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

٨ لدينا صندوقٌ مفتوحٌ من الأعلى. يزيدُ طولُه عن عرضِه ٦ سم ويبلغُ ارتفاعُه ٣سم. صُنِعَ هذا الصندوقُ من مادّةٍ كرتونيّةٍ مستطيلةِ الشكلِ مساحتُها ٩١سم^{٢}.

بعدَ اقتطاعِ أجزاءٍ مربّعةٍ متطابقةٍ من كلِّ زاويةٍ طولُ ضلعِها ٣سم، ما أبعادُ هذا الصندوقِ؟



٩ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح، ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

(أ) ٣س ≤ ٧

(ب) ٢س − ٥ ≥ ٣

(جـ) ٤ − ٣س ≤ ٥

(د) ٦ + ٢س ≤ ٨

(هـ) |س + ٣| − ٢ ≥ ٥

(و) |٢س − ٧| ≤ ١

(ز) |٢س − ١| < ٤

(حـ) |٥ − س| + ١ < ٣

١٠ ضَعْ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٦س^{٣}}{١٢س - ١٨س^{٢}}$

(ب) $\frac{٤ص^{٢} - ٣٦ص + ٨١}{٤ص^{٢} - ٢ص - ٧٢}$

١١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٢س}{س - ٥} + \frac{٣س}{س + ٢}$

(ب) $\frac{٤ص + ٥}{٢ص + ١} - \frac{٥ص}{٣ص - ٤}$

(جـ) $\frac{٤د - ٥}{٦د} + \frac{٧د + ٢}{٢د - ٣}$

(د) $\frac{٥م + ١}{٤م} - \frac{٣م - ٤}{م + ٢}$

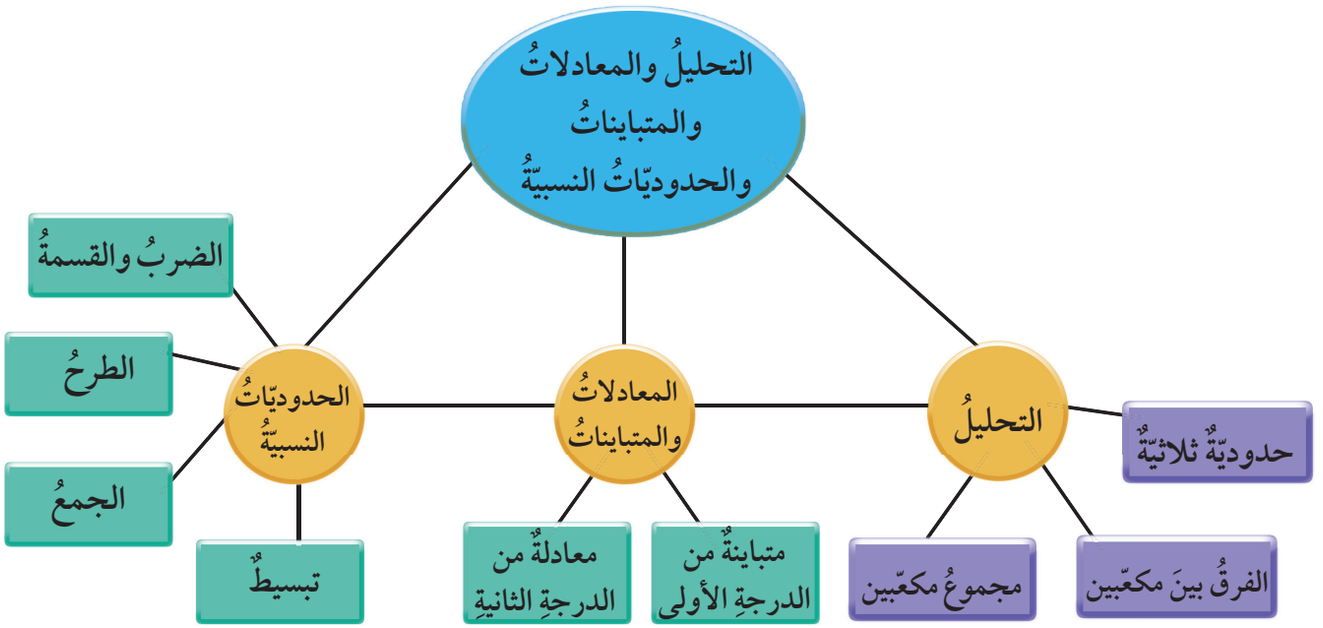
١٢ أوجِدْ حجمَ الصندوقِ التالي علمًا أنّ طولَ قاعدتِه $\frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ٢}$، وعرضَها $\frac{س^{٣}}{س^{٢} + س - ١٢}$، وارتفاعَ الصندوقِ $\frac{٢س + ٤}{س}$. ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

١٣ اقسمْ ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٣} \div \frac{س + ٢}{س - ٣}$

(ب) $\frac{ص^{٢} + ٥ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص^{٢} + ٣ص + ٢}$

مخطَّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الثالثةِ



الوَحدةُ الثالثةُ (أ): التحليلُ

- يتعرّفُ الطالبُ تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$.
- يتعرّفُ تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $س^{٢} + ب س + جـ$ وتحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $أ^{٢}س^{٢} + ب س + حـ$.
- يُحلِّلُ إلى عواملَ أوّليّةٍ الفرقَ بينَ مكعّبين ومجموعِهما.

$$(أ^{٣} - ب^{٣}) = (أ - ب)(أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})$$

$$(أ^{٣} + ب^{٣}) = (أ + ب)(أ^{٢} - أ ب + ب^{٢})$$

الوَحدةُ الثالثةُ (ب): المعادلاتُ والمتباينات

- يحلُّ معادلةً من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ $(س + أ)(س + ب) = ٠$، مجموعةُ الحلِّ $= \{-أ، -ب\}$

يحلُّ متباينةً من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ، ويجدُ مجموعةَ الحلِّ: $س > أ$ مجموعةُ الحلِّ $(-\infty، أ)$ أو $س \geq أ$ مجموعةُ الحلِّ $[أ، \infty)$.

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ): الحدوديّاتُ النسبيّةُ

- يتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويُبسِّطُها.
- يجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويطرحُها من مقاماتٍ مشترَكةٍ ومقاماتٍ مختلِفةٍ ويُبسِّطُ إذا أمكنَ.
- يضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويقسمُها على مقاماتٍ مشترَكةٍ ومقاماتٍ مختلِفةٍ ويُبسِّطُ إذا أمكنَ.

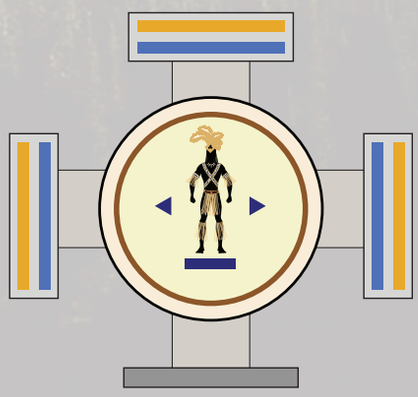
الوَحدةُ الرابعةُ

الجبرُ: المعادلاتُ الخطّيّةُ والمتباينـاتُ

Algebra: Linear Equations and Inequalities

شعوبُ العالمِ

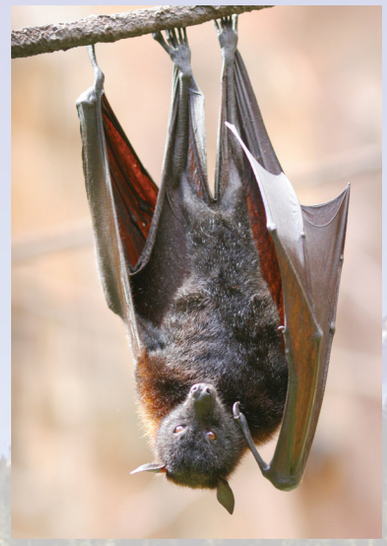
مفهومُ المحاورِ الأفقيّةِ والرأسيّةِ هو جزءٌ هامٌّ من ثقافةِ شعوبِ العالمِ. الأبعادُ السبعةُ هي الشمالُ، والجنوبُ، والشرقُ، والغربُ (أفقيٌّ)، والسماءُ، والأرضُ، والنفسُ البشريّةُ (رأسيٌّ)، هذا هو سببُ اعتبارِ أنّ العددَ ٧ عددٌ مميَّزٌ.



التسليةُ

في عام ١٩١٨، افتُتِحَتْ في السويدِ رياضةُ الجوّالةِ، التي تُنمّي مهاراتِ قراءةِ الخرائطِ وتحديدِ الاتّجاهِ. يستخدمُ المتنافسون الخريطةَ والبوصلةَ للتقدّمِ من نقطةٍ ما إلى أخرى، والفائزُ هو الذي يقطعُهَا في أقصرِ وقتٍ.

العلومُ



يُمكِنُ للخفافيشِ تمييزُ تردّداتِ الصوتِ التي تزيدُ سرعتُها عن ١٠٠ ألفِ اهتزازةٍ في الثانيةِ. لا يستطيعُ معظمُ الناسِ تمييزَ تردّداتِ صوتٍ أعلى من ٢٠ ألفَ اهتزازةٍ في الثانيةِ.

الفنونُ والآدابُ

الهوكي هي لعبةٌ جماعيّةٌ أولمبيّةٌ للرجالِ وللنساءِ. تُقامُ مباراتُها بينَ فريقين ويتكوّنُ كلُّ فريقٍ من ١١ لاعبًا وذلك على ملاعبَ عشبيّةٍ أو رمليّةٍ مع كرةٍ صلبةٍ.

تبلغُ أبعادُ ملعبِ الهوكي ٩١,٤م × ٥٤,٨م. وهذه اللعبةُ من شوطين مدّةُ كلِّ شوطٍ ٣٥ دقيقةً. يوجَدُ قربَ كلِّ مرمًى نصفُ دائرةٍ تُسمّى «دائرةَ التهديفِ».

أمّا عصا الهوكي فهي تُشبِهُ الحرفَ J وطولُها ٩٠ سنتيمترًا ومصنوعةٌ من الخشبِ أو الفيبرجلاس. كما ويضعُ اللاعبون في فمِهم أثناءَ اللعبِ أداةً لحمايةِ أسنانِهم.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

يُوضِّحُ لك الخطُّ المستقيمُ مدى انحدارِه. يُمكِنُ أن يكونَ للخطِّ المستقيمِ ميلٌ سالبٌ أو ميلٌ موجَبٌ.

التقاطعُ السينيُّ للمعادلةِ الخطّيّةِ هو قيمةُ س لنقطةِ تقاطعِ الخطِّ المستقيمِ مع محورِ السيناتِ. والتقاطعُ الصاديُّ هو قيمةُ ص لنقطةِ تقاطعِ الخطِّ المستقيمِ مع محورِ الصاداتِ.

تربطُ المتباينةُ الخطّيّةُ بينَ متغيِّرين باستخدامِ واحدٍ من الرموزِ التاليةِ: >، <، ≤، ≥.

إذا كانَ الرسمُ البيانيُّ لحلولِ معادلةٍ من متغيِّرين خطًّا مستقيمًا تكونُ هذه المعادلةُ خطّيّةً.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ

افهمْ خطِّطْ حُلَّ تحقّقْ

في هذا المشروعِ سوف نُناقِشُ تكاليفَ الخدماتِ التي تشملُ تكلفةً ابتدائيّةً ثابتةً مضافًا إليها تكلفةٌ متغيِّرةٌ (مثالٌ: ٨,٥٠٠ دنانيرَ + ٠,١٠٠ دينارٍ كلَّ دقيقةٍ). يُمكِنُنا مشاهدةُ معدَّلاتِ الهاتفِ، والضرائبِ، والإيجارِ، والخدماتِ الأخرى. وسوف نُناقِشُ النماذجَ والرسمَ البيانيَّ لتكاليفِ خدمةٍ كهذه، ونستخدمُ النموذجَ ليُساعِدَ على توضيحِ الرسمِ البيانيِّ للعلاقةِ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

تفسيرُ العباراتِ الرياضيّةِ

كثيرٌ من المسائلِ المرادِ حلُّها يُمكِنُ تمثيلُها بتعبيرٍ جبريٍّ أو أكثرَ. يجبُ أن تفهمَ أنّه يُمكِنُك استخدامُ أيِّ رمزٍ ليدلَّ على المجهولِ في التعبيرِ الجبريِّ ثمّ يجبُ أن تُحدِّدَ ما هي العمليّاتُ المستخدَمةُ.

اكتبِ التعبيرَ الجبريَّ لكلٍّ من الحالاتِ الآتيةِ:

١ خمسُ سنواتٍ أكبرُ من أحمدَ.

٢ سفنٌ حربيّةٌ قيمتُها ثلاثُ مرّاتٍ قيمةَ السفنِ عامَ ١٩٦٥.

٣ معارضُ السيّاراتِ القديمةِ أكثرُ من السنةِ الماضيةِ بـ ١٢ مرّةً.

٤ ٢٠ دينارًا خصمٌ على سعرِ اللاصقِ.

٥ عشرُ مرّاتٍ عددُ أقسامِ المتاجرِ.

٦ إذا كانَتْ سيّارةُ ريمَ عمرُها ص، وسيّارةُ فارسٍ أقدمُ منها بـ ٦ أعوامٍ، فكم يكونُ عمرُ سيّارةِ فارسٍ؟

٧ إذا كانَ ع هو سرعةَ السيّارةِ بالكيلومترِ في الساعةِ، فكم تكونُ السرعةُ في الدقيقةِ؟

٨ إذا كانَ م هو الوزنَ بالجرامِ، فكم يكونُ الوزنُ بالكيلوجرامِ؟

٩ إذا كانَتِ السيّارةُ تستهلكُ جـ لترٍ من البنزينِ لتسيرَ مسافةَ ٣٢٧,٦ كيلومترًا، فكم كيلومترًا تقطعُها بـ لترٍ واحدٍ؟

متوسِّطُ الأعمارِ

هل سمعْتَ يومًا أنّ كلَّ سنةٍ من عمرِ قطّةٍ تُساوي ٤ سنواتٍ من عمرِ إنسانٍ؟ وإن كانَ كذلك، فهل تساءلْتَ يومًا ماذا يعني هذا، أو هل هذا فعلًا حقيقيٌّ؟

هذه العلاقةُ قد تكونُ نشأَتْ من مقارنةٍ بينَ متوسِّطِ عمرِ قطّةٍ ومتوسِّطِ عمرِ إنسانٍ. يعيشُ البشرُ متوسِّطَ ٧٥ سنةً. تعيشُ القططُ متوسِّطَ ٢٠ سنةً. إذا ضربْتَ هذا العددَ في ٤، ستجدُ أنّه من المفترضِ أن يعيشَ البشرُ متوسِّطَ ٨٠ عامًا وفقًا لهذه القاعدةِ.

كلُّ سنةٍ من عمرِ قطّةٍ في الحقيقةِ لا تُمثِّلُ بالضبطِ ٤ سنواتٍ من عمرِ الإنسانِ.

تنمو قططٌ كثيرةٌ بالكاملِ خلالَ سنةٍ، لكن هل يوجَدُ إنسانٌ ينمو بالكاملِ خلالَ ٤ سنواتٍ؟

١ ما العواملُ، إلى جانبِ العمرِ المتوقَّعِ، التي تأخذُها بالاعتبارِ، عندَ اختيارِكَ لحيوانٍ أليفٍ؟

٢ اكتبْ جدولًا بأسماءِ حيواناتٍ أليفةٍ قد ترغبُ في تربيتِها وقد تبقى على قيدِ الحياةِ عندما تبلغُ الثلاثين من عمرِك. ما هو اختيارُك المفضَّلُ؟ (لا تنسَ أنّه عليك الاعتناءُ بهذا الحيوانِ الأليفِ).

٣ هل تُوافِقُ على أنّه كلّما كبرَ حجمُ الحيوانِ طالَ عمرُه؟

١-٤

فهمُ العلاقاتِ بينَ متغيِّرين

Understanding Two-Variable Relationships

◄ صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ حلَّ معادلةٍ من الدرجةِ الأولى من متغيِّرٍ واحدٍ، والآن سوف تستكشفُ حلَّ معادلةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين. ►

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ وصفِ نماذجَ ناتجةٍ عن علاقاتٍ من متغيِّرين.

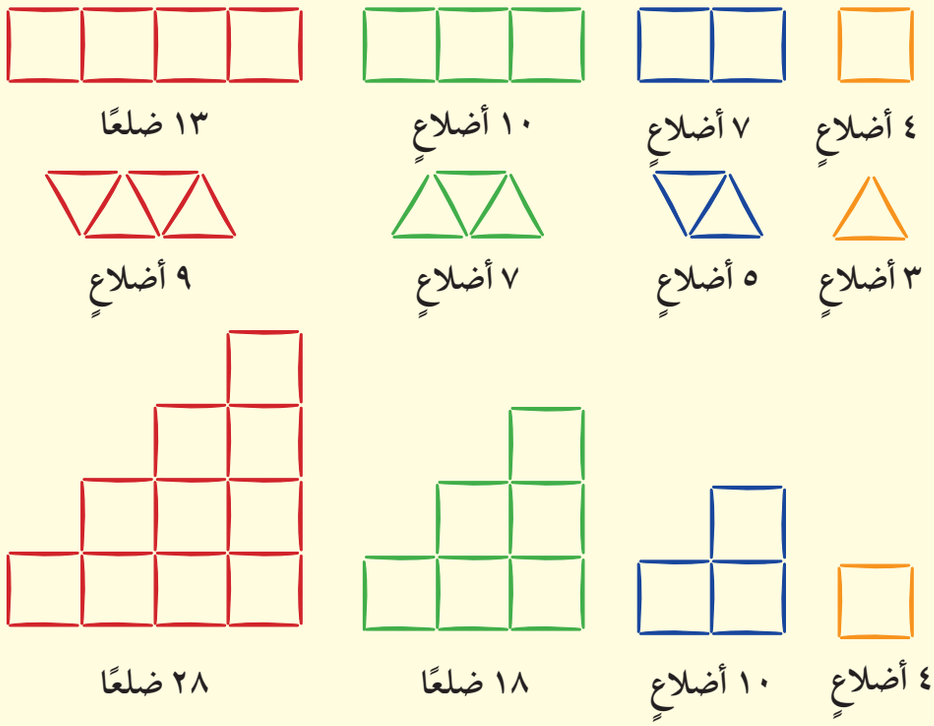
من الاستخداماتِ

- مهندسو الجيناتِ يستخدمون العلاقاتِ بينَ المتغيِّراتِ ونماذجَ الـ DNA لخلقِ طاقاتٍ جديدةٍ في الحياةِ.

استكشِفْ: العلاقاتُ بينَ متغيِّرين

هذه هي القواعدُ!

١ ارسمِ الشكلَ الخامسَ لكلِّ نمطٍ من اليمينِ إلى اليسارِ.



٢ لكلِّ نمطٍ ممّا سبقَ، افرضْ أنّ ن يُمثِّلُ رقمَ الشكلِ وس يُمثِّلُ عددَ الأضلاعِ، صِلْ كلَّ نمطٍ بإحدى القواعدِ الآتيةِ:

س = ن(ن + ٣)، س = ٣ن + ١، س = ٢ن + ١

تعلَّمْ: فهمُ العلاقاتِ بينَ متغيِّرين

تشملُ مواقفَ عديدةً علاقةٌ بينَ كمّيتين تتغيّرُ قيمُهما. يُمكِنُ لهذه العلاقاتِ أن توصَفَ باستخدامِ كلماتٍ أو جداولَ من القيمِ أو بالرسمِ البيانيِّ أو المعادلاتِ.

إذا أمكنَكَ وصفُ العلاقةِ بمعادلةٍ، فيُمكِنُكَ أيضًا وصفُها بجدولٍ.

مثالٌ (١)

تقومُ منالُ برعايةِ القططِ. تتقاضى ٦ دنانيرَ عن كلِّ قطّةٍ. إذا كانَ س هو عددَ القططِ، ص هو كمّيّةَ النقودِ التي تجنيها، فإنّ ص = ٦س تُعبِّرُ عن العلاقةِ بينَ س، ص. كوِّنْ جدولًا يُوضِّحُ قيمةَ ما تربحُه منالُ مقابلَ رعايةِ القططِ.

(افرضْ أنّ ٥ قططٍ هو أقصى عددٍ يُمكِنُ أن ترعاه)

س	ص = ٦س
١	٦
٢	١٢
٣	١٨
٤	٢٤
٥	٣٠

افرضْ أنّ س = ١، نجدُ ص = ٦(١) = ٦

افرضْ أنّ س = ٢، نجدُ ص = ٦(٢) = ١٢

افرضْ أنّ س = ٣، نجدُ ص = ٦(٣) = ١٨

افرضْ أنّ س = ٤، نجدُ ص = ٦(٤) = ٢٤

افرضْ أنّ س = ٥، نجدُ ص = ٦(٥) = ٣٠

من الجدولِ نستنتجُ أنّ منالَ تحصلُ على ٦ دنانيرَ لرعايةِ قطّةٍ واحدةٍ، ١٢ دينارًا لرعايةِ قطّتين، وهكذا تحصلُ على ٣٠ دينارًا لرعايةِ ٥ قططٍ.

مثالٌ (٢)

تزنُ نعجةٌ صغيرةٌ حوالى ٤ كيلوجراماتٍ عندَ الولادةِ. يزيدُ وزنُها بمقدارِ كيلوجرامٍ واحدٍ في الأسبوعِ خلالَ الـ ٥ أسابيعَ الأولى. إذا كانَ أ هو العمرَ بالأسبوعِ، ك الوزنَ بالكيلوجرامِ. فإنّ ك = أ + ٤ تُعبِّرُ عن العلاقةِ بينَ أ، ك. كوِّنْ جدولًا لتُوضِّحَ قيمةَ الوزنِ نهايةَ كلِّ أسبوعٍ حتّى يُصبِحَ عمرُ النعجةِ ٥ أسابيعَ.

أ	ك = أ + ٤
٠	٤
١	٥
٢	٦
٣	٧
٤	٨
٥	٩

افرضْ أنّ أ = ٠، نجدُ ك = ٠ + ٤ = ٤

افرضْ أنّ أ = ١، نجدُ ك = ١ + ٤ = ٥

افرضْ أنّ أ = ٢، نجدُ ك = ٢ + ٤ = ٦

افرضْ أنّ أ = ٣، نجدُ ك = ٣ + ٤ = ٧

افرضْ أنّ أ = ٤، نجدُ ك = ٤ + ٤ = ٨

افرضْ أنّ أ = ٥، نجدُ ك = ٥ + ٤ = ٩

من الجدولِ نُلاحظُ أنّ النعجةَ تزنُ ٤ كيلوجراماتٍ عندَ الولادةِ، ٥ كجم بعد أسبوعٍ واحدٍ وهكذا حتّى يصلَ وزنُها إلى ٩ كجم بعد ٥ أسابيعَ.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ سمحَ أحدُ الخطوطِ الجوّيّةِ بركوبِ عددٍ من القططِ الصغيرةِ مقابلَ ١٥ دينارًا عن كلِّ قطّةٍ. إذا كانَ د هو عددَ القططِ، وأ هو مقدارَ الأجرةِ المحصَّلةِ، فإنّ أ = ١٥ د تُعبِّرُ عن العلاقةِ بينَ د، أ. كوِّنْ جدولًا لتُوضِّحَ الأجرةَ التي يُمكِنُ أن تجنيَها شركةُ الطيرانِ في الرحلةِ الواحدةِ. عوِّضْ عن د بالقيمِ صفرٍ، ١، ٢، ٣.

أحيانًا يُمكِنُك إيجادُ المعادلةِ من الدرجةِ الأولى التي تربطُ بينَ متغيِّرين بالنظرِ إلى الجدولِ الذي يشملُ قيمَهما.

مثالٌ (٣)

يُوضِّحُ الجدولُ التالي مزيجًا من الطمي والرملِ في أسفلِ قفصِ حرباءَ. أوجِدِ القاعدةَ التي تربطُ بينَ كمّيّةِ الرملِ ص وكمّيّةِ الطمي س، ثمّ استخدِمْها لإيجادِ كمّيّةِ الرملِ التي سوف نحتاجُها عندَ وضعِ ١٥ كوبَ طمي.

س	ص
١	٣,٥
٢	٧
٣	١٠,٥
٤	١٤
٥	١٧,٥
٦	٢١
٧	٢٤,٥

عندَ التعويضِ عن س = ١، نجدُ ص = ٣,٥
عندَ التعويضِ عن س = ٢، نجدُ ص = ٧
عندَ التعويضِ عن س = ٣، نجدُ ص = ١٠,٥
عندَ التعويضِ عن س = ٤، نجدُ ص = ١٤
عندَ التعويضِ عن س = ٥، نجدُ ص = ١٧,٥
عندَ التعويضِ عن س = ٦، نجدُ ص = ٢١
عندَ التعويضِ عن س = ٧، نجدُ ص = ٢٤,٥

في كلِّ حالةٍ نجدُ أنّ ص = ٣,٥ س. أوجِدْ قيمةَ ص عندما س = ١٥.

ص = ٣,٥ (١٥) — عوِّضْ عن س = ١٥

ص = ٥٢,٥ — اضربْ لإيجادِ قيمةِ ص

قيمةُ ص عندما س = ١٥ هي ٥٢,٥.

لكلِّ ١٥ كوبَ طميٍ نحتاجُ إلى حوالى ٥٣ كوبَ رملٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ القاعدةَ التي تربطُ بين س، ص في هذا الجدولِ، ثمّ أوجِدْ ص عندما س = ٥٠.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٨٠

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

القيمُ العشريّةُ التي توجَدُ في عمودِ ص في الجدولِ يُمكِنُ أن تُرشِدَنا إلى القاعدةِ التي نبحثُ عنها.

تذكَّرْ

٣,٥ (١٥) تعني ٣,٥ × ١٥

الترابطُ والتداخلُ بالعلومِ

تحتاجُ الحرباءُ أن تتغذّى على أنواعِ أوراقِ الخضراواتِ الخضراءِ نفسِها التي تأكلُها أنت.

تحقَّقْ من فهمِك

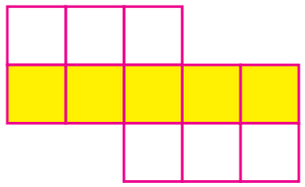
١ كيف تُكوِّنُ جدولًا للمعادلةِ ص = ٧س؟

٢ كيف تُكوِّنُ جدولًا للمعادلةِ ص = س + ٧؟ كم حلًّا يوجَدُ للمعادلةِ؟

٣ يُوضِّحُ جدولٌ أنّه عندما س = ٢ فإنّ ص = ٤. هل هذا يُرشِدُنا إلى أنّ القاعدةَ التي تربطُ بينَ س، ص هي ص = ٢س؟ فسِّرْ ذلك.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٤-١)

(أ) ارسمِ الشكلَ الذي يلي:



شكلُ (١) شكلُ (٢) شكلُ (٣)

(ب) ما القاعدةُ التي تربطُ ن (رقمُ الشكلِ) بـ ع (عددُ البلاطاتِ الصفراءِ)؟

.....

(جـ) ما القاعدةُ التي تربطُ ن بـ ج (عددُ البلاطاتِ البيضاءِ)؟

.....

(د) ما القاعدةُ التي تربطُ ن بـ ت (عددُ جميعِ البلاطاتِ في كلِّ شكلٍ)؟

.....

افهمْ

١ حوِّطْ كلَّ متغيِّرٍ وما يُمثِّلُه.

٢ ادرسِ الأشكالَ الثلاثةَ المعطاةَ، وصِفْ نمطَ البلاطاتِ الصفراءِ ونمطَ البلاطاتِ البيضاءِ، ثمّ اذكرْ كم سيكونُ عددُ كلٍّ منهما في الشكلِ (٤). .....

حُلَّ

٣ ارسمِ الشكلَ (٤).

٤ ما القاعدةُ التي تربطُ رقمَ الشكلِ بالبلاطاتِ الصفراءِ، والبلاطاتِ البيضاءِ، وجميعِ البلاطاتِ؟ .....

(أ) ن بـ ع (ب) ن بـ ج (جـ) ن بـ ت

تحقَّقْ

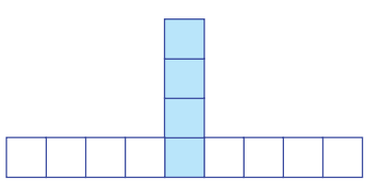
٥ هل شكلُ (٤) يتبعُ الأنماطَ التي وصفْتَها في البندين (٢)، (٣)؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٦ اذكرْ ما القواعدُ التي تربطُ ن بـ ع (رقمُ الشكلِ بعددِ البلاطاتِ الزرقاءِ)، ن بـ ج (رقمُ الشكلِ بعددِ البلاطاتِ البيضاءِ)، ن بـ ت (رقمُ الشكلِ بعددِ جميعِ البلاطاتِ في الشكلِ) في الشكلِ المقابلِ. .....

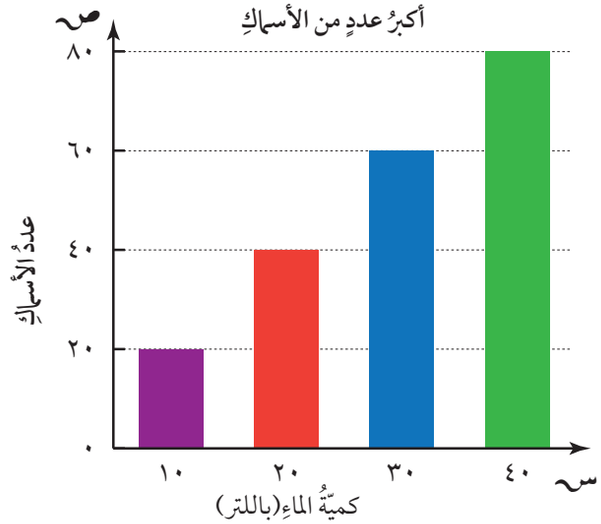
.....



شكلُ (٤)

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

التفكيرُ الرياضيُّ: (أ) كوِّنْ جدولًا مستخدِمًا قيمَ الأزواجِ المرتَّبةِ الأربعةِ الممثَّلةِ في التمثيلِ البيانيِّ أدناه.



(ب) اكتبِ المعادلةَ التي تُوضِّحُ كيف يرتبطُ أكبرُ عددٍ من الأسماكِ بعددِ لتراتِ الماءِ الموجودةِ في حوضِ الأسماكِ.

.....

.....

(جـ) من المعادلةِ، أوجِدْ زوجين آخرين من القيمِ، ثمّ فسِّرْ معناهما.

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٤ـ٢

حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين

Solving First degree equations with Two Variables

سوف تتعلّمُ

- تحديدَ ما إذا كانَ زوجٌ من القيم هو حلًّا لمعادلةٍ من الدرَجةِ الأولى في متغيِّرين.

من الاستخداماتِ

- يحلُّ الخبّازون معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين عندَ زيادةِ طلباتِ الخبزِ لخدمةِ عددٍ كبيرٍ من الأشخاصِ.

فكرةٌ مفيدةٌ

لحلِّ المسائلِ

تأكَّدْ أنّ الحلَّ الرياضيَّ يُؤكِّدُ فهمَ العلاقةِ في المسألةِ المعطاةِ.

◄ صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ أنّ المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين يُمكِنُ أن يكونَ لها حلولٌ عديدةٌ، والآن سوف ترى معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين لها حلولٌ ذاتُ معنًى وحلولٌ ليس لها معنًى. ►

استكشِفْ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين

هل تُريدُ ببّغاءَ أو قطّةً؟

محلٌّ تجاريٌّ لبيعِ قططٍ وببّغاواتٍ فقط لمجرّدِ المرحِ. يقومُ صاحبُ المحلِّ بتعدادِ عددِ القوائمِ. أوجِدِ الإمكاناتِ المختلِفةَ لعددِ القططِ والببّغاواتِ الذي يجعلُ العددَ الكلّيَّ للقوائمِ ١٢.

١ كوِّنْ جدولًا مستخدِمًا س لتُمثِّلَ عددَ الببّغاواتِ وص لتُمثِّلَ عددَ القططِ. (احفظْ في عقلِك عددَ قوائمِ كلٍّ منهما). اكتبْ تعبيرًا لعددِ القوائمِ مستخدِمًا هذه المتغيِّراتِ.

٢ إذا كانَ عددُ القوائمِ ١٢، فهل يُمكِنُ أن يكونَ عددُ الببّغاواتِ أو القططِ عددًا فرديًّا؟ فسِّرْ.

٣ إذا كانَ عددُ القوائمِ ١٢، فهل يُمكِنُ أن يتساوى عددُ القططِ وعددُ الببّغاواتِ؟ وإذا كانَ ذلك صحيحًا، فكم عددُ كلٍّ منهما؟

٤ اكتبْ معادلةً تنصُّ على أنّ عددَ قوائمِ الببّغاواتِ مضافًا إليه عددُ قوائمِ القططِ يُساوي ١٢. استخدِمْ قيمَ المتغيِّراتِ من الجدولِ.

٥ في الزوجِ المرتَّبِ (٢، ٥)، أيٌّ من العددين يُمثِّلُ الإحداثيَّ السينيَّ والإحداثيَّ الصاديَّ؟ هل (٢، ٥) حلٌّ لمعادلتِك؟ كيف عرفْتَ ذلك؟

تعلَّمْ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين

تذكَّرْ
عوِّضْ عن القيمِ المعلومةِ لكلِّ متغيِّرٍ.

نُعوِّضُ بالحلولِ الممكنةِ في المعادلاتِ ذاتِ المتغيِّرِ الواحدِ. إذا كانَتِ النتيجةُ صحيحةً، فتكونُ هذه القيمةُ التي عوَّضْنا بها حلًّا للمعادلةِ. نستخدمُ عمليّاتٍ مشابهةً لحلِّ معادلةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين. يكونُ حلُّ المعادلةِ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين عبارةً عن زوجٍ مرتَّبٍ.

مثالٌ (١)

هل الزوجُ المرتَّبُ (٣، ١٣) حلٌّ للمعادلةِ ص = ٧ + ٢س؟

ص = ٧ + ٢س	اكتبِ المعادلةَ
١٣ $\stackrel{؟}{=}$ ٧ + ٢ (٣)	عوِّضْ بـ ٣، ١٣ في المعادلةِ بدلًا عن س، ص
١٣ $\stackrel{؟}{=}$ ٧ + ٦	اضربْ
١٣ $\stackrel{✓}{=}$ ١٣	اجمعْ

لأنّ هذه العبارةَ صحيحةٌ، (٣، ١٣) هي حلٌّ للمعادلةِ ص = ٧ + ٢س.

يُمكِنُك إيجادُ حلولٍ للمعادلةِ باختيارِ قيمةٍ لأحدِ المتغيِّرين وحلُّها لإيجادِ قيمةِ المتغيِّرِ الآخرِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدْ حلّين للمعادلةِ ص = ٢ − ٥ , ٠ س.

افرضْ س = ٠	اختَرْ قيمةً للمتغيِّرِ س
ص $\stackrel{؟}{=}$ ٢ − ٥ , ٠ (٠)	عوِّضْ بالقيمةِ المختارةِ للمتغيِّرِ س
ص $\stackrel{؟}{=}$ ٢ − ٠	اضربْ
ص = ٢	اطرحْ

(٠، ٢) أحدُ الحلولِ

افرضْ س = ٢	اختَرْ قيمةً أخرى للمتغيِّرِ س
ص = ٢ − ٥ , ٠ (٢)	عوِّضْ بالقيمِ المختارةِ للمتغيِّرِ س
ص = ٢ − ١	اضربْ
ص = ١	اطرحْ

(٢، ١) حلٌّ آخرُ

(٠، ٢) و(٢، ١) هما حلّان للمعادلةِ ص = ٢ − ٥ , ٠ س.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ (أ) حدِّدْ ما إذا كانَ (−١، ٩) حلًّا للمعادلةِ ص = ٧ + ٢س أم لا.

(ب) أوجِدْ حلّين آخرين للمعادلةِ ص = ٢ − ٥ , ٠ س.

مثالٌ (٣)

يُربّي بعضُ الناسِ السلاحفَ كحيواناتٍ أليفة. إذا كانَتِ السلحفاةُ ومستلزماتُها المبدئيّةُ تُكلّفُ ٣ دنانيرَ وطعامُها يُكلِّفُ ٢ دينارٍ كلَّ شهرٍ، فكم يُكلِّفُ الحصولُ على سلحفاةٍ والاحتفاظُ بها لمدّةِ ٤ أشهرٍ؟

افرضْ م = عددَ الأشهرِ.

افرضْ جـ = التكاليفَ الكلّيّةَ. — عرِّفِ المتغيِّراتِ

جـ = ٣ + ٢م — اكتبِ المعادلةَ موضِّحًا كيف ترتبطُ المتغيِّراتُ

افرضْ م = ٤ — اختَرْ قيمةً للمتغيِّرِ تُوافقُ في المسألةِ

جـ = ٣ + ٢(٤) — عوِّضْ قيمَ المتغيِّرِ

جـ = ٣ + ٨ — اضربْ

جـ = ١١ — اجمعْ

سوف تكونُ التكلفةُ ١١ دينارًا للحصولِ على السلحفاةِ والاحتفاظِ بها لمدّةِ أربعةِ أشهرٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) ارجعْ إلى المثالِ (٣). كم ستكونُ التكلفةُ للحصولِ على سلحفاةٍ والاحتفاظِ بها لمدّةِ عامٍ؟

(ب) يُكلِّفُ شراءُ عصفورٍ ٥ دنانيرَ، وتُكلِّفُ العنايةُ به ٧ دنانيرَ كلَّ شهرٍ لطعامِه، ومستلزماتِه، وعلاجِه، ورعايتِه، وتدريبِه. كم ستكونُ تكلفةُ شرائِه والعنايةِ به لمدّةِ عامين؟

في بعضِ الحالاتِ، توجَدُ حلولٌ رياضيّةٌ ليس لها معنًى كما في المثالِ (٣)، إذا كانَ جـ = ٠ نجدُ أنّ: ٠ = ٣ + ٢م ومنه م = $-\frac{٣}{٢}$. لكنّ امتلاكَ سلحفاةٍ لمدّةِ $-\frac{٣}{٢}$ شهرٍ ليسَ له معنًى. كذلك م = ١٠٠٠٠ سيكونُ جوابًا غيرَ منطقيٍّ لهذه الحالةِ لأنّ السلاحفَ تعيشُ حوالى ٤٠ سنةً.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تعرفُ أنّ زوجًا مرتَّبًا معيّنًا هو حلٌّ لمعادلةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين؟

٢ الزوجُ المرتَّبُ (٣، ٢) هو حلٌّ لمعادلةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين. اكتبْ معادلةً يكونُ هذا الزوجُ المرتَّبُ حلًّا لها.

٣ هل كلُّ قاعدةٍ هي معادلةٌ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين؟ فسِّرْ.

هل تعلمُ؟

أعلى سرعةٍ سُجِّلَتْ لأيِّ كائنٍ زاحفٍ في الماءِ هي للسلاحفِ البحريّةِ ذاتِ الظهرِ الجلديِّ في المحيطِ الهادي (pacific leatherback turtle) وبلغَتْ ٢٢ كيلومترًا في الساعةِ.

الترابطُ والتداخلُ بعلمِ الأحياءِ

إنّ السلاحفَ البحريّةَ، وسلاحفَ المياهِ العذبةِ، والسلاحفَ البرّيّةَ من فصيلةِ الشيلونيا (Chelonia). تعيشُ السلاحفُ البرّيّةُ على الأرضِ.

تُمثِّلُ المعادلةُ ص = ٠,٧٥ س + ١,٥ سعرَ البيتزا ذاتِ الحجمِ الكبير (بالدينار)، حيث س يرمزُ إلى عددِ الأصنافِ المضافةِ. كوِّنْ جدولًا يُوضِّحُ عددَ الأصنافِ المضافةِ والسعرَ ليوضعَ على حَائطِ محلِّ البيتزا.(علمًا بأنّ الحدَّ الأقصى للأصنافِ المضافةِ هو ٦).

افهمْ

١ ماذا يُمثِّلُ س؟ .....

٢ ما سعرُ كلِّ صنفٍ مضافٍ؟ .....

٣ ماذا يُمثِّلُ العددُ ١,٥؟ .....

خطِّطْ

٤ ما أصغرُ قيمةٍ يُمكِنُك أن تستخدمَها لـ س إلى جانبِ الصفرِ؟ .....

٥ لماذا لا يكونُ من الممكنِ أن تستخدمَ قيمةً أكبرَ من ٦ لـ س؟ .....

.....

حُلَّ

٦ بالتعويضِ بـ ١ في المعادلةِ لإيجادِ سعرِ البيتزا بإضافةِ صنفٍ واحدٍ، بـ٢ لصنفين، بـ٣ لـ ٣ أصنافٍ وهكذا، ثمّ أكمِلِ الجدولَ مبيِّنًا أسعارَ البيتزا.

عددُ الأصنافِ المضافةِ	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
سعرُ البيتزا بالدينارِ	١,٥	.....	.....	.....	.....	.....	.....

تحقَّقْ

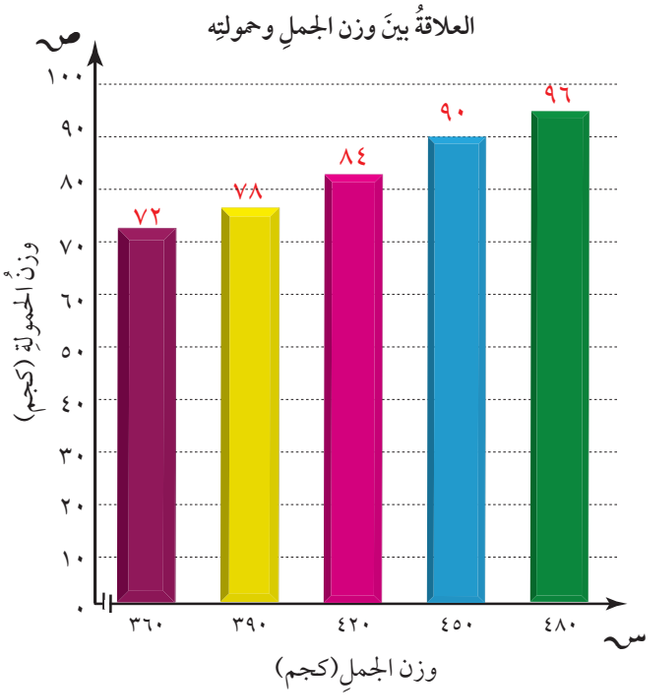
٧ ما النمطُ الذي يُمكِنُ أن تجدَه في أسعارِ البيتزا؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ المعادلةُ ص = ٢,٢٥ س + ١,٥٠ تُمثِّلُ التكلفةَ بالدينارِ للعبةِ البولينج وإيجارَ الحذاءِ في المركزِ المحلّيِّ للبولينج؛ حيث س يُمثِّلُ عددَ مرّاتِ اللعبِ. كوِّنْ جدولًا يوضَعُ على حائطِ مركزِ البولينج ويُوضِّحُ التكلفةَ الكلّيّةَ لإيجارِ الحذاءِ ولعبِ البولينج لـ ٥ مرّاتٍ.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ



١ **التفكيرُ الرياضيُّ**: (أ) استخدِمِ التمثيلَ البيانيَّ المقابلَ لكتابةِ معادلةٍ تربطُ بينَ س (وزنُ الجملِ) وص (وزنُ الحمولةِ التي يستطيعُ الجملُ حملَها).

.....

(ب) استخدِمْ معادلتَك لإيجادِ وزنِ الحمولةِ التي يستطيعُ جملٌ وزنُه ٣٠٠ كجم نقلَها.

.....

(جـ) ما وزنُ الجملِ الذي يستطيعُ نقلَ حمولةٍ وزنُها ١٠٠ كجم؟

.....

(د) إذا كانَ أكبرُ جملٍ معروفٍ وزنُه حوالى ٤٠٠ كجم، كيف ستُفسِّرُ إجابتَك عن السؤالِ رقمِ جـ؟

.....

٢ **التواصلُ**: تُريدُ فاتنُ شراءَ علبةِ طعامٍ للأسماكِ سعرُ العلبةِ ٣ دنانيرَ، وبينما تتسوّقُ وجدَتْ في أحدِ المتاجرِ نوعًا من الأسماكِ عليه تخفيضٌ ليُصبحَ سعرُ السمكةِ الواحدةِ ١,٥٠٠ دينارٍ.

(أ) افرضْ أنّ ص إجماليُّ ما ستُنفِقُه فاتنُ، س عددُ الأسماكِ الذي سوف تشتريه، اكتبْ معادلةً تُوضِّحُ بها كيف ترتبطُ ص مع س. .....

(ب) كم ستُنفِقُ فاتنُ مقابلَ شراءِ ٥ سمكاتٍ وعلبةِ طعامٍ لها؟ .....

(جـ) إذا أنفقَتْ فاتنُ مبلغَ ١٢ دينارًا في الشراءِ، أوجِدْ عددَ الأسماكِ التي اشترَتْها. .....

.....

(د) إذا كانَتِ التكلفةُ الكلّيّةُ للأسماكِ وعلبةِ طعامٍ لها هي ٦,٥ دنانيرَ، مستخدِمًا الحسَّ العدديَّ، هل يُعدُّ ذلك منطقيًّا؟ .....

.....

٣ **التواصلُ**: صِفْ حلولَ المعادلةِ ص = س. .....

٤ **التفكيرُ الناقدُ**: على فوزيّةَ أن تُقرِّرَ: إمّا أن تشتريَ سمكتين ذهبيّتين بمبلغ ٢,٢٥٠ دينارٍ للواحدةِ والتي تُكلِّفُ تغذيةُ الواحدةِ منها دينارًا واحدًا شهريًّا، وإمّا شراءَ سمكتين حمراوين بمبلغ ٨ دنانيرَ للسمكةِ الواحدةِ والتي تتغذّى على البكتيريا الموجودةِ في قاعِ الحوضِ، فإذا كانَتْ تُخطِّطُ للاحتفاظِ بالحوضِ لمدّةِ سنةٍ، فأيًّا منهما تشتري؟ ولماذا؟

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٤–٣

التمثيلُ البيانيُّ لمعادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين

Graphing of First Degree Equations with Two Variables

◄ **صلةُ الدرسِ** تعلّمْتَ في ما سبقَ كيف تكتبُ وتجدُ حلولًا لمعادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين والتمثيلِ البيانيِّ للنقاطِ في مستوي الإحداثيّاتِ، والآن سوف تتعلّمُ كيفيّةَ مزجِ المعادلاتِ من متغيِّرين بالتمثيلِ البيانيِّ ►

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ تمثيلِ العلاقةِ من متغيِّرين بيانيًّا.

من الاستخداماتِ

- غالبًا ما يستخدمُ المصمِّمون مثلَ هذه التمثيلاتِ البيانيّةِ لتُساعِدَهم في اتّخاذِ القراراتِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ معادلةٌ خطّيّةٌ

Linear Equation

استكشِفْ التمثيلُ البيانيُّ للعلاقاتِ بينَ متغيِّرين

البيتُ المملوءُ! **الأدواتُ المستخدَمةُ:** ورقةُ رسمٍ بيانيٍّ

لدى صاحبِ محلٍّ لبيعِ الحيواناتِ ٦ أقفاصٍ حيث يعرضُ إمّا قطّةً صغيرةً أو أرنبًا صغيرًا في كلِّ قفصٍ. يحرصُ صاحبُ المحلِّ على أن تبقى الأقفاصُ دائمًا مملوءةً بأحدِ هذه الحيواناتِ لذا يُمكِنُ أن يوضَعَ أرنبٌ في القفصِ بدلًا من القطّةِ أو عكسَ ذلك.

١ ما المعادلةُ التي تُمثِّلُ العلاقةَ بينَ عددِ الأرانبِ والقططِ المعروضةِ؟

افرضْ جـ = عددَ القططِ وافرضْ د = عددَ الأرانبِ

٢ سَمِّ كلَّ الأزواجِ المرتَّبةِ المكوِّنةِ للزوجِ المرتَّبِ (جـ، د) الذي يُحقِّقُ المعادلةَ التي كتبْتَها في البندِ (١). كمثالٍ لأحدِ الأزواجِ المرتَّبةِ هو (٥، ١) يُمثِّلُ ٥ قططٍ وأرنبًا واحدًا.

٣ على ورقةِ رسمٍ بيانيٍّ، ارسمْ كلَّ زوجٍ مرتَّبٍ من البندِ (٢). ارسمْ قيمَ جـ على المحورِ الأفقيِّ وقيمَ د على المحورِ الرأسيِّ.

٤ ماذا تُلاحِظُ بالنسبةِ إلى النقاطِ التي رسمْتَها في البندِ (٣)؟

٥ افرضْ أنّ عددَ الأقفاصِ زادَ، ويوجَدُ ٦ قططٍ صغيرةٍ و٦ أرانبَ صغيرةٍ. ارسمِ النقطةَ (٦، ٦)، هل هذا الزوجُ المرتَّبُ يُحقِّقُ المعادلةَ التي كتبْتَها في البندِ (١)؟ ماذا تُلاحِظُ في وضعِ النقطةِ بالنسبةِ إلى النقاطِ التي رسمْتَها في البندِ (٣)؟

تعلَّمْ التمثيلُ البيانيُّ للعلاقاتِ بينَ متغيِّرين

تعلَّمْ أنّ حلولَ المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين عبارةٌ عن أزواجٍ مرتَّبةٍ. إذا مثَّلْتَ النقاطَ التي تُمثِّلُ هذه الأزواجَ المرتَّبةَ ووجدْتَ أنّ كلَّ النقاطِ تقعُ على خطٍّ مستقيمٍ، تُسمّى المعادلةُ **معادلةً خطّيّةً**.

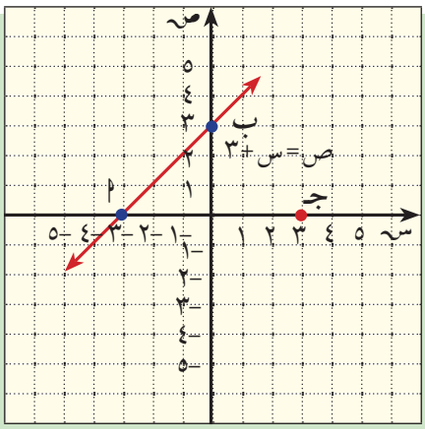
نحصلُ على معادلاتٍ خطّيّةٍ في عدّةِ مواقفَ حياتيّةٍ مثلًا: في معرضٍ للحيواناتِ الأليفةِ كانَ رسمُ الدخولِ الأساسيُّ قدرُه ٣ دنانيرَ ويُضافُ إليه دينارٌ واحدٌ لكلِّ عرضٍ جديدٍ. إذا حُدِّدَتْ ص الأجرةَ الكلّيّةَ، س عددَ العروضِ الجديدةِ، فإنّ ص = س + ٣ تُوضِّحُ العلاقةَ بينَ س، ص.

الترابطُ والتداخلُ باللغةِ

لاحِظْ أنّ أصلَ كلمةِ خطّيٍّ هو خطٌّ.

مثالٌ (١)

الخطُّ الموضَّحُ في الشكلِ هو التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ الخطّيّةِ ص = س + ٣. اكتب الأزواجَ المرتَّبةَ التي تُمثِّلُ النقاطَ أ، ب التي تقعُ على الخطِّ والنقطةِ جـ التي لا تقعُ على الخطِّ. أيٌّ من الأزواجِ المرتَّبةِ يكونُ حلًّا للمعادلةِ الخطّيّةِ؟



نختبرُ كلَّ زوجٍ مرتّبٍ بالتعويضِ في المعادلةِ

بالنسبةِ للنقطةِ أ(−٣، ٠)	بالنسبةِ لـ ب(٠، ٣)	بالنسبةِ لـ جـ(٣، ٠)
ص = س + ٣	ص = س + ٣	ص = س + ٣
٠ ≟ −٣ + ٣	٣ ≟ ٠ + ٣	٠ ≟ ٣ + ٣
٠ = ٠	٣ = ٣	٠ ≠ ٦

الأزواجُ المرتَّبةُ للنقطتينِ أ، ب هي حلٌّ للمعادلةِ الخطّيّةِ، الزوجُ المرتَّبُ للنقطةِ جـ التي لا تقعُ على الخطِّ ليسَتْ حلًّا للمعادلةِ الخطّيّةِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

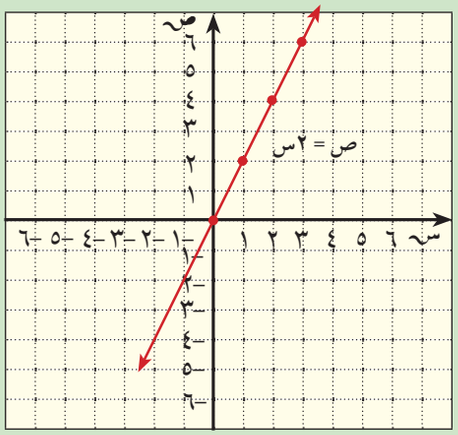
١ استخدِمِ التمثيلَ البيانيَّ السابقَ. اختَرْ نقطتينِ على الخطِّ إلى جانبِ النقطتينِ أ، ب ووضِّحْ أنّ الأزواجَ المرتَّبةَ التي تُمثِّلُهما هي حلٌّ للمعادلةِ ص = س + ٣، ثمّ اختَرْ نقطةً لا تقعُ على الخطِّ ووضِّحْ أنّ الزوجَ المرتَّبَ لها ليسَ حلًّا.

مثالٌ (٢)

مثِّلِ المعادلةَ ص = ٢س بيانيًّا.

كوِّنْ جدولًا بالقيمِ وعيِّنِ الأزواجَ المرتَّبةَ على التمثيلِ البيانيِّ وصِلْ بينَ النقاطِ بخطٍّ مستقيمٍ.

س	٠	١	٢	٣
ص	٠	٢	٤	٦



لاحِظْ أنّه عندما تزيدُ قيمُ س بمقدارٍ واحدٍ في كلِّ مرّةٍ، تزيدُ قيمُ ص بمقدارِ ٢. لأيِّ معادلةٍ خطّيّةٍ، كلّما تزيدُ قيمُ س بمقدارٍ ثابتٍ تزيدُ (أو تنقصُ) قيمُ ص أيضًا بمقدارٍ ثابتٍ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ مثِّلِ المعادلةَ الخطّيّةَ ص = −٣س بيانيًّا.

الترابطُ والتداخلُ بالتكنولوجيا

عندما تستخدمُ العددَ نفسَه عدّةَ مرّاتٍ مثلَ −٣، خزِّنْ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةِ.

ما رأيُك ؟

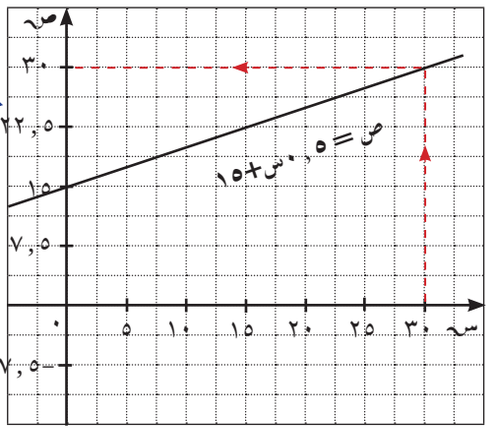
يتقاضى محلٌّ لتأجيرِ السيّارات دفعةً أولى ١٥ دينارًا يُضافُ إليها ٠,٥ دينارٍ تكلفةٌ عن الكيلومترِ الواحدِ. المعادلةُ: ص = ٠,٥ س + ١٥ تُمنذِجُ العلاقةَ بينَ ص (التكلفةِ الكلّيّةِ) وس (عددِ الكيلومترات التي يجتازُها المستأجرُ). كم تكونُ التكلفةُ الكلّيّةُ إذا اجتازَ أحدُ المستأجرين مسافةَ ٣٠ كيلومترًا؟

خالدٌ يُفكِّرُ ...

أنا سأستخدمُ التمثيلَ البيانيَّ للمعادلةِ:

ص = ٠,٥ س + ١٥.

ثمّ سأوجِدُ قيمةَ ص عندما س = ٣٠.



يُبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ أنّه عندَ س = ٣٠،

تكونُ ص = ٣٠

أي أنّ التكلفةَ هي ٣٠ دينارًا .

عمرُ يُفكِّرُ ...

أنا سوف أعوِّضُ عن س بـ ٣٠ في المعادلةِ:

ص = ٠,٥ س + ١٥، ثمّ أُوجِدُ قيمةَ ص.

ص = ٠,٥ س + ١٥

ص = ٠,٥ (٣٠) + ١٥

ص = ١٥ + ١٥ = ٣٠ أي أنّ التكلفةَ هي ٣٠ دينارًا.

إذا استخدمْتَ الآلةَ الحاسبةَ البيانيّةَ لتمثيلِ المعادلةِ الخطّيّةِ يُمكِنُك أن تضغطَ على trace لإيجادِ أزواجٍ مرتّبةٍ ونقطٍ بواسطةِ مفاتيحِ السهمِ اليمينِ واليسارِ.

ما رأيُك؟

باعتقادكِ، أيُّ الطريقتين أسرعُ؟ فسِّرْ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ ماذا تعني كلمةُ خطّيٍّ؟

٢ إذا كانَ الزوجُ المرتَّبُ لنقطةٍ يُحقِّقُ معادلةً خطّيّةً، ماذا تعرفُ عن وضعِ النقطةِ؟

٣ كيف تُمثِّلُ المعادلةَ ص = س + ٥ بيانيًّا؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٤-٣)

لدى عمرَ بطاقةُ خصمٍ بـ ٢ دينارٍ على سعرِ أيِّ منتجٍ. وقرَّرَ أن يشتريَ طعامًا لقطّتِه من النوعِ الذي يُباعُ الكيلو منه بـ ٠,٥٠٠ دينارٍ. استخدِمْ س لعددِ الكيلوجراماتِ التي سوف يشتريها من طعامِ القططِ. مثِّلْ بيانيًّا الثمنَ الذي سيدفعُه.
أيُّ جزءٍ من التمثيلِ البيانيِّ ليس له معنًى في هذا الموقفِ؟ (على أن تكون المشترياتُ بقيمةٍ أكبرَ من ٢ دينارٍ)

افهمْ

١ حوِّطْ قيمةَ بطاقةِ الخصمِ. هل سيُضافُ أم سيُطرَحُ من السعرِ؟ .....

.....

خطِّطْ

٢ افرضْ أنّ س تُمثِّلُ عددَ الكيلوجراماتِ من طعامِ القططِ، اكتبْ تعبيرًا يُوضِّحُ أنّ التكلفةَ هي ٠,٥٠٠ دينارٍ لكلِّ كيلوجرامٍ.

.....

٣ اكتبْ تعبيرًا لتكلفةِ طعامِ القططِ إذا استخدمْتَ بطاقةَ الخصمِ.

.....

٤ كوِّنْ جدولَ قيمٍ للمعادلةِ ص = ٠,٥٠٠ س – ٢.

حُلَّ

٥ على ورقةِ رسمٍ بيانيٍّ، مثِّلِ الأزواجَ المرتَّبةَ الموضَّحةَ في الجدولِ وصِلِ النقاطَ بخطٍّ مستقيمٍ.

٦ أيُّ جزءٍ من التمثيلِ البيانيِّ ليس له معنًى في هذا الموقفِ؟

.....

تحقَّقْ

٧ ماذا تعني عبارةُ «التكلفةُ سالبةٌ»؟ هل هذا منطقيٌّ؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ لدى بدريّةَ بطاقةُ خصمٍ قيمتُها ٣ دنانيرَ، وقرّرَتْ أن تشتريَ طعامًا لقطّتِها، يُباعُ الكيلوجرامُ منه بـ ٠,٧٥٠ دينارٍ. استخدِمْ س لعددِ الكيلوجراماتِ من طعامِ القطّةِ التي ستشتريها بدريّةُ.
مثِّلْ على ورقةِ الرسمِ السابقِ الثمنَ الذي ستدفعُه. أيُّ جزءٍ من التمثيلِ البيانيِّ ليس له معنًى في هذا الموقفِ؟

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الناقدُ**: ينطلقُ صوتُ صرصارِ الليلِ (ن) مرّاتٍ في الدقيقةِ تبعًا لدرجةِ الحرارةِ (ف) المئويّةِ. ينطلقُ صوتُه ١٢٤ مرّةً في الدقيقةِ الواحدةِ عندما تكونُ الحرارةُ ٢٠° مئويّةً، ١٧٢ مرّةً في الدقيقةِ عندما تبلغُ الحرارةُ ٢٨° مئويّةً. افرضْ أنّ العلاقةَ خطّيّةٌ.

(أ) اصنعْ تمثيلًا بيانيًّا لإيجادِ درجةِ الحرارةِ عندما ينطلقُ صوتُ الصرصارِ ١٣٦ مرّةً، ١٤٨ مرّةً، ١٦٠ مرّةً.

.....

(ملحوظةٌ: تذكَّرْ أنّ في العلاقةِ الخطّيّةِ للتغيّراتِ المتساويةِ، ما يحدثُ لأيٍّ من المتغيِّرين يحدثُ للمتغيِّرِ الآخرِ).

(ب) لأيِّ قيمٍ تعتقدُ أنّ هذه العلاقةَ الخطّيّةَ تتحقّقُ؟ ولماذا؟

.....

.....

٢ يتقاضى محلٌّ لتأجيرِ الأقراصِ المدمجةِ دفعةً أولى ٣ دنانيرَ، يضافُ إليها ٠,٧٥٠ دينارٍ تكلفةُ تأجيرِ كلِّ قرصٍ. تنمذجُ المعادلةُ: ص = ٠,٧٥٠ س + ٣ التكلفةَ الإجماليّةَ (ص) لاستئجارِ (س) قرصٍ مدمجٍ.

أوجدْ تكلفةَ استئجارِ ٤٠ قرصًا.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

استعِدَّ لسباقِ الدرّاجاتِ

إن شعرْتَ باندفاعِ الرياحِ، بجهدِ العضلاتِ، بالإيقاعِ المتّصلِ بدقّاتِ قلبِك، بسرعةِ الطريقِ تحتَك، فأنت حتمًا تركبُ درّاجتَك.

كلَّ سنةٍ، ملايينُ البشرِ يسيرون في الطرقِ على درّاجاتٍ سواءٌ أكانوا مع عائلاتِهم أم أعضاءً من نادي رحلاتِ الدرّاجاتِ. إنّهم يتبعون هدفًا واحدًا، ممارسةَ الرياضةِ والاستمتاعَ بجمالِ الطبيعةِ.

هل تتذكّرُ المرّةَ الأولى التي حاولْتَ فيها أن تركبَ درّاجةً؟ ربّما تكونُ قد استخدمْتَ إطاراتِ التدريبِ أو شخصٌ ما جرى بجانبِك ممسِكًا بك.

الدرّاجةُ التي تعلّمْتَ عليها ربّما تكونُ ذاتَ سرعةٍ واحدةٍ، صُمِّمَتْ لتُستخدَمَ مبدئيًّا على أسطحٍ ملساءَ. الدرّاجاتُ الأخرى لها سرعاتٌ عديدةٌ تصلُ إلى الـ ٢١ ممّا يسمحُ لراكبِ هذه الدرّاجاتِ أن يجتازَ الانحداراتِ بسهولةٍ وبسرعةِ البرقِ.

١ صِفْ تجربتَك الأولى في ركوبِ درّاجةٍ.
٢ فكِّرْ في أنّ التلالَ هي المنحنياتُ. لماذا يكونُ ركوبُ درّاجةٍ هوائيّةٍ على التلالِ أصعبَ من ركوبِها على سطحٍ أملسَ؟
٣ كيف تجعلُ آلةُ النقلِ ذاتيّةُ الحركةِ تسلّقَ التلالِ أسهلَ؟

٤–٤

فهمُ الميلِ
Understanding Slope

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ إيجادِ ميلِ الخطِّ المستقيمِ.

من الاستخداماتِ

- عندَ بناءِ القرى الجديدةِ، يدرسُ المخططون الأرضَ، ويحسبون ميلَها لاتّخاذِ القراراتِ المناسبةِ التي تتعلّقُ بجريانِ ماءِ الأمطارِ فوقَ سطحِ الأرضِ.

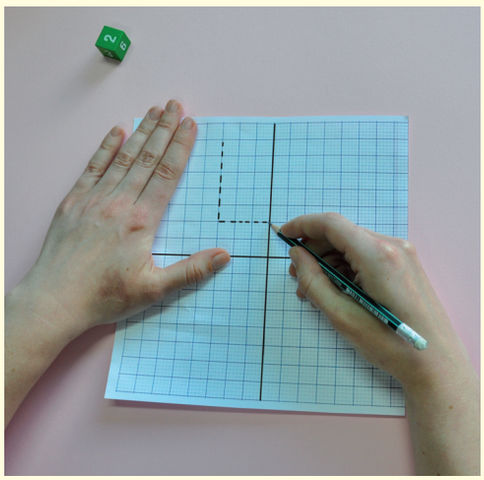
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- ◄ الميلُ Slope
- ◄ ارتفاعٌ رأسيٌّ Rise
- ◄ امتدادٌ أفقيٌّ Run
- ◄ ميلٌ موجَبٌ Positive Slope
- ◄ ميلٌ سالبٌ Negative Slope

◄ **صلةُ الدرسِ** تعلّمْتَ التمثيلَ البيانيَّ لمعادلاتٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرين، وهي عبارةٌ عن خطوطٍ مستقيمةٍ، والآن سوف تتعلّمُ طرقًا يستخدمُها الرياضيّون لوصفِ هذه الخطوطِ. ►

استكشِفْ الميلُ

الارتفاعاتُ والانخفاضاتُ في التمثيلِ البيانيِّ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** ورقةُ رسمٍ بيانيٍّ، حجرُ نردٍ، قطعةُ نقودٍ معدنيّةٍ



١ على ورقةِ رسمٍ بيانيٍّ كبيرةٍ، ارسمْ محوري الإحداثيّاتِ بوضعِ نقطةِ الأصلِ في منتصفِ الصفحةِ وسَمِّ كلًّا من المحورِ السينيِّ والصاديِّ.

٢ ارمِ قطعةَ النقودِ وتحرَّكْ جهةَ اليمينِ إذا ظهرَتِ (الصورةُ)، وتحرَّكْ جهةَ اليسارِ إذا ظهرَتِ (الكتابةُ). ارمِ حجرَ النردِ المرقَّمَ لتُحدِّدَ عددَ الوَحداتِ التي يجبُ أن تتحرّكَها، مثالٌ: تحرَّكْ ٥ وَحداتٍ إلى اليمينِ.

٣ ارمِ قطعةَ النقودِ مرّةً أخرى لترى إذا كانَ يجبُ أن تتحرّكَ لأعلى إذا ظهرَتِ (الصورةُ) أو لأسفلَ إذا ظهرَتِ (الكتابةُ). ارمِ حجرَ النردِ مرّةً أخرى لتُعيِّنَ عددَ الوَحداتِ التي يجبُ أن تتحرّكَها مثلًا لأعلى.

٤ استخدِمِ النتائجَ في الخطوتين ٢، ٣. ابدأْ من نقطةِ الأصلِ وضَعْ نقطةً.

٥ انطلِقْ من النقطةِ التي وضعْتَها وتحرَّكْ عددَ الوَحداتِ نفسَه يمينًا أو يسارًا كالسابقِ ثمّ تحرَّكْ لأعلى أو لأسفلَ كما سبقَ وفعلْتَ ثمّ ضَعْ نقطةً ثانيةً.

٦ تحرَّكْ ثمّ ضَعْ عددًا من النقاطِ. ما الشكلُ الهندسيُّ المكوَّنُ بهذه النقاطِ؟ ارسمْه.

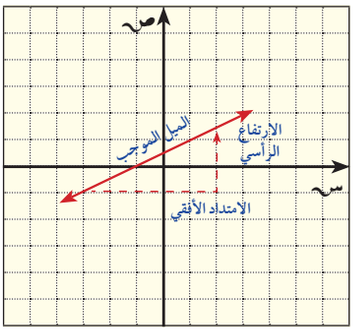
٧ قارِنِ النتائجَ التي حصلْتَ عليها بنتائجِ زملائِك في غرفةِ الفصلِ.

تعلَّمْ — فهمُ الميلِ

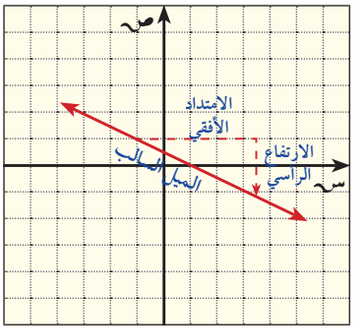
يستخدمُ المبتدئُ في التزحلقِ على الجليدِ ميولَ انحدارٍ غيرِ مماثلةٍ للّتي يستخدمُها الأكثرُ خبرةً في التزحلقِ. بعضُ الخطوطِ في مستوي الإحداثيّاتِ يُمكِنُ أيضًا اعتبارُها «مائلةً أكثرَ» من الأخرى.

يستخدمُ الرياضيّون مصطلحَ **الميلِ** ليصفوا انحدارَ الخطِّ. هذا يربطُ التغيّرَ الرأسيَّ بالتغيّرِ الأفقيِّ. ويُسميّان غالبًا **الارتفاعَ الرأسيَّ** the rise و**الامتدادَ الأفقيَّ** the run.

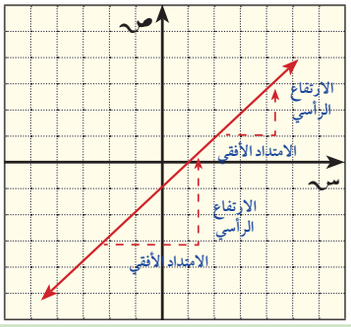
عندَ انحرافِ خطٍّ لأعلى من اليسارِ إلى اليمينِ يُقالُ إنّ له **ميلًا موجَبًا**، وعندَ انحرافِه لأسفلَ من اليسارِ إلى اليمينِ يكونُ له **ميلٌ سالبٌ**.



$$\text{الميلُ} = \frac{\text{الارتفاعَ الرأسيَّ}}{\text{الامتدادِ الأفقيِّ}}$$



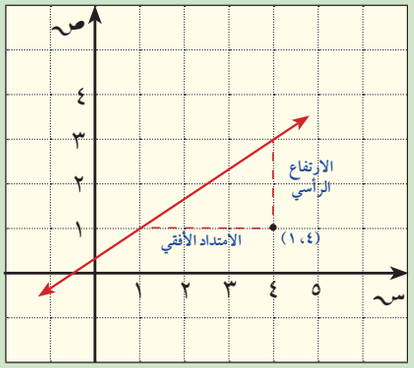
$$\text{الميلُ} = \frac{\text{الارتفاعَ الرأسيَّ}}{\text{الامتدادِ الأفقيِّ}}$$



لأيِّ نقطتين مختلِفتين على خطٍّ مستقيمٍ، يكونُ ناتجُ قسمةِ الارتفاعِ الرأسيِّ على الامتدادِ الأفقيِّ دائمًا نفسَه.

مثالٌ (١)

أوجد ميل المستقيم في الشكل المقابل.



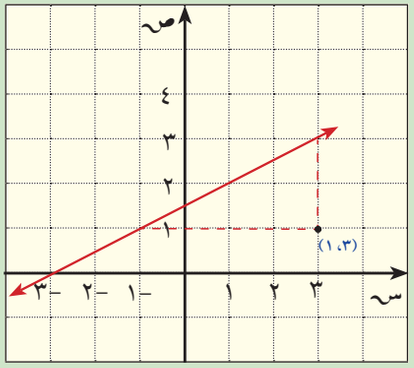
الحلُّ:

$$\text{قانون الميلُ} = \frac{\text{الارتفاعَ الرأسيَّ}}{\text{الامتدادِ الأفقيِّ}}$$

نلاحظ أن الارتفاع الرأسي عند النقطة (٤، ١) هو ٢

والامتداد الأفقي هو ٣ ومنه يكون الميل = $\frac{٢}{٣}$.

حاوِلْ أن تحلَّ



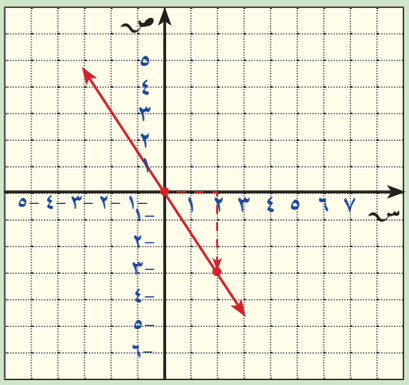
١ استخدم قانون الميلَ لإيجاد ميل المستقيم في الشكل المقابل

مثالٌ (٢)

ارسمْ خطًّا مستقيمًا يمرُّ بنقطةِ الأصلِ وميلُه $\frac{-٣}{٢}$.

ابدأْ عندَ النقطةِ (٠، ٠)، تحرَّكْ وحدتين يمينًا وثلاثَ وَحداتٍ إلى الأسفلِ، الميلُ سالبٌ.

الميلُ هو $\frac{-٣}{٢} = -\frac{٣}{٢}$



حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) ارسمْ خطًّا مستقيمًا يمرُّ بنقطةِ الأصلِ وميلُه $\frac{٢}{٣}$.

(ب) ارسمْ خطًّا مستقيمًا يمرُّ بالنقطةِ (١، ٢) وميلُه −١.

يُعطى ميلُ الخطِّ المستقيمِ بالقانونِ:

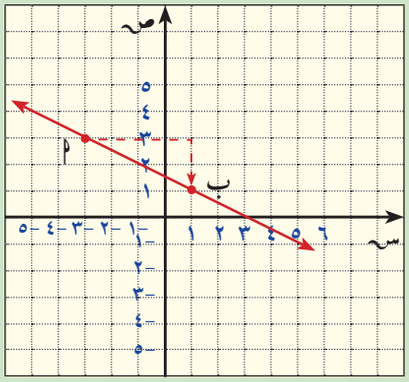
الميلُ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث إنّ (س١، ص١)، (س٢، ص٢) هما نقطتان مختلِفتان على الخطِّ المستقيمِ بشرطِ $س_١ \neq س_٢$.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ ميلَ الخطِّ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب}$ في الشكلِ المقابِلِ باستخدامِ القانونِ.

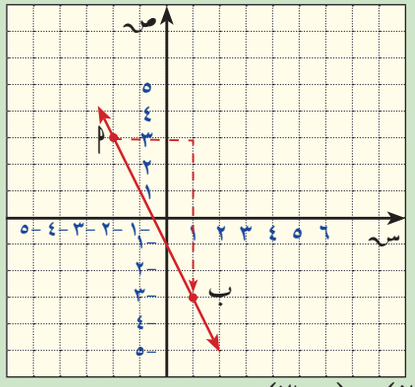
الحلُّ: من النقطةِ أ(−٣، ٣) والنقطةِ ب (١، ١)

ميلُ $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{١ - (-٣)} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$



حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{أب}$ في الشكلِ أدناه.



٤ أوجِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{م ن}$ حيث م(١، ٢)، ن(٠، ٣)

٥ أوجِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{ل ع}$ حيث ل(−١، ٢)، ع(٥، ٢). ماذا تُلاحِظُ؟

فميلُ الخطِّ المستقيمِ الأفقيِّ يُساوي صفرًا، لأنّ الارتفاعَ الرأسيَّ في هذه الحالةِ يُساوي صفرًا، بينما الخطُّ المستقيمُ الرأسيُّ ليس له ميلٌ. مثالٌ على ذلك: المستقيمُ المارُّ بالنقطتين (١، ٠)، (١، −٢) هو مستقيمٌ رأسيٌّ ليس له ميلٌ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ هل للخطِّ المستقيمِ أكثرُ من ميلٍ؟ فسِّرْ.

٢ كيف تُحدِّدُ ما إذا كانَ خطٌّ مستقيمٌ له ميلٌ موجَبٌ أو سالبٌ؟

٣ كيف تُقارِنُ الميلَ $\frac{٢}{٣}$ بالميلِ $\frac{٤}{٦}$؟ لماذا؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٤-٤)

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

رسمَ أحمدُ على شبكةِ الإحداثيّاتِ مواقعَ بعضِ الأماكنِ. فوقعَ منزلُه على النقطةِ (١، ١) ووقعَتْ مدرستُه على النقطةِ (٦، ٢). أوجِدْ ميلَ الخطِّ المستقيمِ الواصلِ بينَ منزلِه ومدرستِه.

افهمْ

١ أوجِدِ الفرقَ بينَ الإحداثيّين الصاديّين. .....

٢ أوجِدِ الفرقَ بينَ الإحداثيّين السينيّين. .....

٣ كيف ستكتبُ الميلَ؟ .....

خطِّطْ

٤ اختر القانونَ الصحيحَ: الميلُ = ...

(أ) $\frac{س_٢ - س_١}{ص_٢ - ص_١}$ (ب) $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ (جـ) $\frac{ص_٢ - س_٢}{ص_١ - س_١}$

٥ هل للميلِ وَحدةُ قياسٍ؟ .....

حُلَّ

٦ أوجِدِ الميلَ. .....

.....

تحقَّقْ

٧ اذكرْ كيف يُمكِنُك إيجادُ الميلِ بطريقةٍ أخرى؟ .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ أوجِدْ ميلَ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتين أ(٢، ٣)، ب(٥، ٢). .....

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الناقدُ**: غالبًا ما تُصمَّمُ الساحاتُ، وطرقُ السيّاراتِ، والشوارعُ بحيث يكونُ ميلُها حوالى $\frac{١}{٨٤}$ في اتّجاهِ الأطرافِ. لماذا تُصمَّمُ بهذه الطريقةِ؟

.....

.....

٢ (أ) أوجِدِ المعلومةَ الناقصةَ لكلِّ منحدرِ تزلّجٍ.

مكانُ التزلّجِ	الارتفاعُ الرأسيُّ	الامتدادُ الأفقيُّ	ميلٌ
المنطقةُ الحمراءُ	١ ٨٠٠	٧ ٢٠٠	
المنطقةُ الصفراءُ	١ ٨٤٠	٣ ٦٨٠	
المنطقةُ الزرقاءُ	١ ٩٠٠	٤ ٧٥٠	
المنطقةُ الخضراءُ	٧٥٠	٣ ٠٠٠	

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

انتبِه

لكي يتزلّجَ المحترفون، يجبُ أن تكونَ القيمةُ المطلقة لميلِ الانحدارِ أكبرَ من ٠,٢٥ وأصغرَ من ٠,٥ كي لا يحدثَ انهيارٌ.

كلّما ازدادَتِ القيمةُ المطلَقةُ لميلِ المنحدرِ، ازدادَتْ سرعةُ المتزلِّجِ.

(ب) **التواصل**: أي من أماكن التزلج السابقة تنصح بها المتزلجين المحترفين؟ فسر إجابتك

٣ **التفكيرُ الناقدُ**: يستخدم المهندسون المعماريون السلالم الدائرية أو السلالم المتعرجة في المباني. ما ميزة البناء بهذه الطريقة؟

.....

.....

.....

٤ **التفكيرُ الناقدُ**: هل الخطُّ الذي يمرُّ بالنقطتين (٢، ٤) و(٤، ٥) أكثرُ انحدارًا من الخطِّ الذي يمرُّ بالنقطتين (١، ٤)، (٤، ٥)؟

.....

.....

.....

٤–٥

أنماطٌ في معادلاتٍ خطّيّةٍ ورسومٍ بيانيّةٍ

Patterns in Linear Equations and Graphs

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ رسمِ معادلةٍ بيانيًّا ثمّ إيجادِ الميلِ والأجزاءِ المقطوعةِ من محوري السيناتِ والصاداتِ.

من الاستخداماتِ

- الأنظمةُ المستخدَمةُ من قبل مراقبي النقلِ الجوّيِّ تُغلِقُ الطائراتِ بواسطةِ دعاماتٍ تنشأُ من معادلاتٍ خطّيّةٍ لذلك تستطيعُ الطائراتُ الهبوطَ على الأرضِ بأمانٍ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جزءٌ مقطوعٌ من محورِ السيناتِ X-Intercept
- جزءٌ مقطوعٌ من محورِ الصاداتِ Y-Intercept
- خطوطٌ مستقيمةٌ متوازيةٌ Parallel Lines

◄ **صلةُ الدرسِ** تعلّمْتَ كيف توجِدُ الميلَ للخطِّ المستقيمِ بالنظرِ إلى الرسمِ البيانيِّ الذي يُمثِّلُه. يُمكِنُك أيضًا أن توجِدَ الميلَ للخطِّ المستقيمِ بالنظرِ إلى معادلتِه. ►

استكشِفْ أنماطٌ في معادلاتٍ خطّيّةٍ ورسومٍ بيانيّةٍ

الرسمُ البيانيُّ لتكلفةِ استئجارِ سيّارةٍ.

تُقدِّمُ شركاتُ إيجارِ السيّاراتِ في إحدى الدولِ العروضَ التاليةَ:

الشركةُ (أ): ٦ دينار كويتي كدفعةٍ أولى ثمّ ٠,٢ دينار كويتي عن كلِّ كيلومترٍ.

الشركةُ (ب): ٤ دينار كويتي كدفعة أولى ثمّ ٠,٦ دينار كويتي عن كلِّ كيلومترٍ.

١ مثِّلْ بيانيًّا ص = ٠,٢ س + ٦، ص = ٠,٦ س + ٤

٢ ماذا تُلاحِظُ بالنسبةِ إلى ميلِ كلِّ مستقيمٍ؟ هل يوجَدُ تقاطعٌ بين هذين المستقيمين؟

٣ مثِّلْ بيانيًّا: ص = س + ٣، ص = س − ٢، ص = س + ١

٤ هل ترى أيَّ علاقةٍ بينَ معاملِ س والميلِ لكلِّ مستقيمٍ؟

تعلَّمْ أنماطٌ في معادلاتٍ خطّيّةٍ ورسومٍ بيانيّةٍ

أنت تعرفُ أنّه يُمكِنُك إيجادُ ميلِ الخطِّ المستقيمِ من خلالِ رؤيةِ الرسمِ البيانيِّ. يُمكِنُك أيضًا تعيينُ الجزءِ المقطوعِ من محورِ السيناتِ والجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ من خلالِ رؤيةِ الرسمِ. سنعتبرُ الجزءَ المقطوعَ من محورِ السيناتِ هو الإحداثيَّ السينيَّ لنقطةِ تقاطعِ الخطِّ مع محورِ السيناتِ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ هو الإحداثيَّ الصاديَّ لنقطةِ تقاطعِ الخطِّ مع محورِ الصاداتِ.

غالبًا ما يكونُ للميلِ والجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ معانٍ في المسائلِ الحياتيّةِ.

تذكَّرْ

لتُكوِّنَ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ نُعوِّضُ بالقيمِ المختلِفةِ لـ س في المعادلةِ ونحلُّ لإيجادِ قيمِ ص المناظِرةِ.

أمثلةٌ

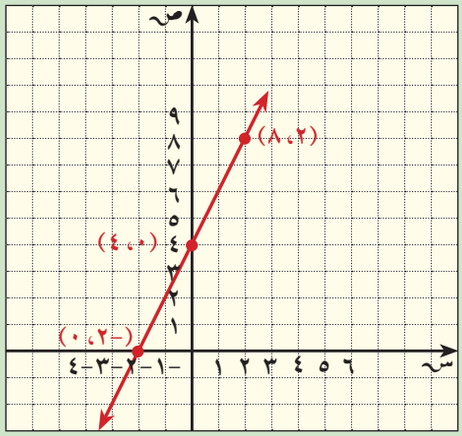
١ لاعبُ الهوكي يحصلُ على دقيقتين في منطقةِ ضربةِ الجزاءِ لكلِّ ضربةِ جزاءٍ صغيرةٍ وهو أساسًا لديه ٤ دقائقَ في ضرباتِ الجزاءِ الصغيرةِ.

ارسمِ المستقيمَ: ص = ٢س + ٤، أوجدِ الميلَ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ.

حيثُ ص يُمثّلُ عددَ الدقائقِ الكلّيّةِ وس يُمثّلُ عددَ ضرباتِ الجزاءِ الصغيرةِ.

كوِّنْ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ بتعيينِ قيمِ لـ س، ثمّ إيجادِ القيمِ المناظِرةِ لـ ص. عيِّنِ النقاطَ وصِلْ بينَها بخطٍّ مستقيمٍ. يُمكِنُك اختيارُ أيِّ قيمٍ لـ س ولتكنْ −٢، ٠، ٢.

س	−٢	٠	٢
ص	٠	٤	٨



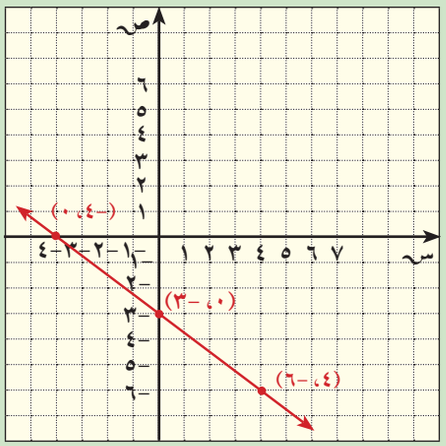
نختارُ أيَّ نقطتين (−٢، ٠)، (٠، ٤)

$$\text{الميلُ} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

الخطُّ يمرُّ بمحورِ الصاداتِ عندَ ٤، الجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ هو ٤.

الميلُ يُكافِئُ الدقيقتين اللتين يحصلُ عليهما لكلِّ ضربةِ جزاءٍ صغيرةٍ إضافيّةٍ.

٢ ارسمِ المستقيمَ: ص = $\frac{-٣}{٤}$ س − ٣، ثمّ أوجِدِ الميلَ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ السيناتِ والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ.



كوِّنْ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ مستخدمًا −٤، ٠، ٤ قيمًا لـ س. حدِّدِ النقاطَ وصِلْ بينَها بخطٍّ مستقيمٍ.

س	−٤	٠	٤
ص	٠	−٣	−٦

نختارُ على المستقيمِ أيَّ نقطتين ولتكنْ (−٤، ٠)، (٠، −٣)

الميلُ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - ٠}{٠ - (-٤)} = \frac{-٣}{٤}$

الخطُّ يمرُّ بمحورِ السيناتِ عندَ (−٤) وبمحورِ الصاداتِ عند (−٣)، لذلك الجزءُ المقطوعُ من محورِ السيناتِ هو (−٤) والجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ هو (−٣).

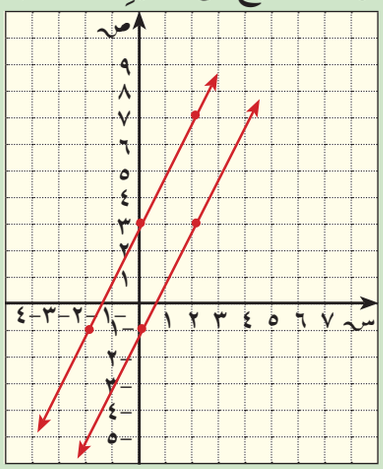
حاوِلْ أن تحلَّ

١ ارسمْ كلًّا من المستقيمِ الذي معادلتُه:

(أ) ص = ٣س − ٦ (ب) ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٤

أوجِدِ الميلَ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ السيناتِ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ.

٣ ارسمِ المستقيمين: ص = ٢س − ١، ص = ٢س + ٣ بيانيًّا على مستوي الإحداثيّاتِ نفسِه، ثمّ أوجِدِ الميلَ لكلِّ خطٍّ مستقيمٍ.



كوِّنْ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ لكلِّ معادلةٍ. حدِّدِ النقاطَ على المستوي وصِلْ بينَها.

للمعادلةِ ص = ٢س − ١

س	−٢	٠	٢
ص	−٥	−١	٣

الميلُ = $\frac{٣ - (-٥)}{٢ - (-٢)} = \frac{٨}{٤} = ٢$

للمعادلةِ ص = ٢س + ٣

س	−٢	٠	٢
ص	−١	٣	٧

الميلُ = $\frac{٧ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$

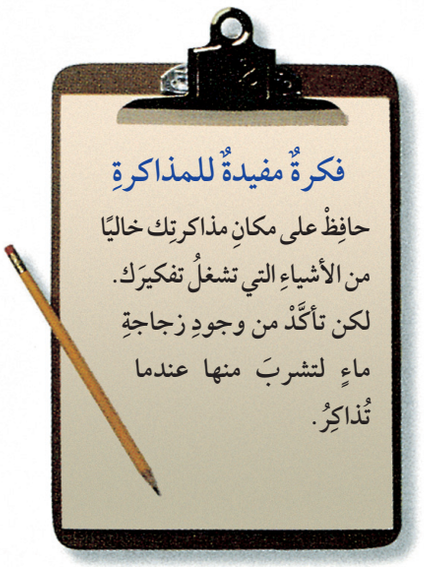
لذلك، الميلُ في كلِّ حالةٍ هو ٢.

لاحِظْ أنّ الخطّين لا يُمكِنُ أن يتقاطعا في نقطةٍ مهما امتدّا. مثلُ هذه الخطوطِ تُسمّى خطوطًا متوازيةً. **الخطوطُ التي لها الميلُ نفسُه متوازيةٌ.**

تحقَّقْ من فهمِك

١ لتمثيلِ المعادلةِ الخطّيّةِ بيانيًّا، كم نقطةً تحتاجُ إليها لتصلَ بينَها وترسمَ الخطَّ؟ لماذا تكونُ فكرةً جيّدةً أن تُضيفَ نقطةً أخرى؟

٢ عندما ترسمُ معادلةً مثلَ ص = $\frac{١}{٤}$س − ٢ بيانيًّا، هل يُمكِنُك تحديدُ أيِّ قيمٍ لـ س؟ هل هناك بعضُ القيمِ يسهلُ استخدامُها أكثرَ من استخدامِ قيمٍ أخرى؟ فسِّرْ.



المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٤-٥)

لدى فاتنَ بطاقةُ عضويّةٍ في نادٍ للسباحةِ، قيمةُ اشتراكِها السنويِّ ٢٠ دينارًا، ويُمكِنُ للأعضاءِ السباحةُ أيَّ عددٍ من المرّاتِ مقابلَ ٢ دينارٍ لكلِّ مرّةٍ. أوجِدْ رسمًا بيانيًّا لتوضيحِ إجماليِّ التكلفةِ للأعدادِ المتغيِّرةِ من عددِ مرّاتِ السباحةِ. وضِّحْ كيف تحصلُ على التكلفةِ بالضبطِ من خلالِ الرسمِ البيانيِّ.

افهمْ

١ ما قيمةُ الاشتراكِ السنويِّ؟

.....

٢ كم تتكلّفُ فاتنُ لكلِّ مرّةِ سباحةٍ؟

.....

خطِّطْ

٣ اكتبْ معادلةً. افرضْ أنّ س = عددَ مرّاتِ السباحةِ لفاتنَ، ص = إجماليَّ التكلفةِ.

.....

٤ كوِّنْ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ لـ س، ص.

.....

.....

.....

حُلَّ

٥ ضَعِ النقاطَ على ورقةِ الرسمِ البيانيِّ.

٦ وضِّحْ كيف توجِدُ التكلفةَ بالضبطِ من خلالِ الرسمِ البيانيِّ.

.....

.....

تحقَّقْ

٧ ما الجزءُ من الرسمِ البيانيِّ الذي ليس له معنًى في هذا الموقفِ؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

٨ يدفعُ فهدٌ كلَّ عامٍ مبلغَ ٣٥ دينارًا لعضويّةِ حديقةِ الحيوانِ، ويدفعُ ٣ دنانيرَ فقط لكلِّ زيارةٍ للحديقةِ نظيرَ ركنِ السيّارةِ بالموقفِ، ارسمْ على ورقةِ الرسمِ البيانيِّ السابقِ الخطَّ الذي يُمثِّلُ التكلفةَ الكلّيّةَ لعددِ الزياراتِ المتغيِّرةِ للحديقةِ.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ **التفكيرُ الناقدُ:** (أ) هل توجَدُ طريقةٌ لتعيينِ الميلِ والجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ للمعادلتين ص = ٢س − ٣، ص = −٣س + ١ بمجرَّدِ النظرِ إلى المعادلتين؟

.....

.....

(ب) خطٌّ مستقيمٌ معادلتُه ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٦. أوجِدْ ميلَه وطولَ الجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ من دونِ رسمِه بيانيًّا.

.....

.....

(جـ) **التواصلُ:** وضِّحْ كيف يُمكِنُك تغييرُ المعادلةِ ص = ٢س − ٣ بحيث يكونُ الخطُّ المستقيمُ الذي يُمثِّلُها له ميلٌ أكبرُ، وطولُ الجزءِ الذي يقطعُه من محورِ الصاداتِ يكونُ أصغرَ. .....

.....

٢ **اختَرْ إستراتيجيّةً:** ارتفاعُ فريقٍ متسلِّقٍ لجبلٍ يُعطى بالصيغةِ ع = ١٣٧ن + ٥٥٠. حيث ن هو عددُ الساعاتِ بعدَ بدايةِ تسلّقِه، ع هو مقدارُ الارتفاعِ عن مستوى سطحِ البحرِ بالمترِ. كم كانَ ارتفاعُه عندَ بدايةِ تسلّقِه؟ كم مترًا يتسلّقُ كلَّ ساعةٍ؟

.....

.....

٣ **التفكيرُ الناقدُ:** يُريدُ أمينٌ العملَ خلالَ إجازتِه في متجرٍ لأدواتِ التزلّجِ على الجليدِ، فوجدَ أمامَه فرصتين: إمّا القيامُ بطلاءِ ٥ أزواجٍ من الزلّاجاتِ مقابلَ ١٢ دينارًا (ص = $\frac{١٢}{٥}$س) أو طلاءِ ٧ ألواحٍ مقابلَ ١٨ دينارًا (ص = $\frac{١٨}{٧}$س)، فأيَّ العملين يختارُ ليربحَ نقودًا أكثرَ؟ فسِّرْ إجابتَك. .....

.....

٤ **المجلّةُ:** وضِّحْ كيف يُمكِنُك تحديدُ ميلِ الخطِّ من خلالِ التدقيقِ في الرسمِ البيانيِّ الذي يُمثِّلُه، ومن خلالِ التدقيقِ في المعادلةِ التي تُمثِّلُه؟ .....

.....

.....

٤-٦

الخطوطُ المتوازيةُ والعلاقةُ بينَ ميلِها

Parallel Lines and their Slopes

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ إيجادِ العلاقةِ بينَ الخطوطِ المتوازيةِ وميلِهم.

من الاستخداماتِ

- تُستخدَمُ هذه العلاقةُ في الانحداراتِ.

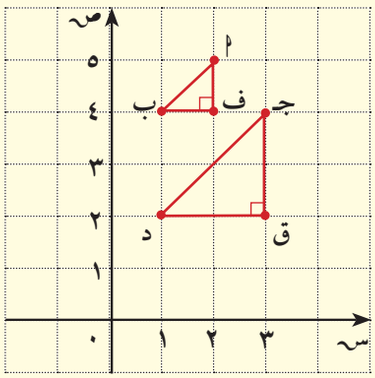
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ الجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ Y-Intercept

◄ **صلةُ الدرسِ** في الدرسِ السابقِ تعرّفْتَ الميلَ، أمّا الآن فسوف تستخدمُ هذا الميلَ لتوضيحِ علاقتِهِ بالخطوطِ المتوازيةِ.►

استكشفْ: الخطوطُ المتوازيةُ والميلُ

ليكنْ $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{جـ د}$ خطّين متوازيين.



١ مستخدِمًا الرسمَ المقابلَ،
أوجِدْ إحداثيّاتِ النقاطِ أ، ب، جـ، د.

٢ أوجِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{أب}$.

٣ أوجِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{جـ د}$.

٤ ماذا تستنتجُ بالنسبةِ إلى ميلِ $\overleftrightarrow{أب}$ وميلِ $\overleftrightarrow{جـ د}$؟

تعلَّمْ: الخطوطُ المتوازيةُ والعلاقةُ بينَ ميلِها

الخطوطُ المتوازيةُ هي خطوطٌ مستقيمةٌ موجودةٌ في مستوٍ واحدٍ ولا تتقاطعُ.

يُمكِنُ تمييزُ الخطوطِ المستقيمةِ المتوازيةِ في المستوي الإحداثيِّ بإيجادِ الميلِ.

إذا كانَ لخطّين مستقيمين الميلُ نفسُه فإنّهما متوازيان.

مثالٌ (١)

يُمكِنُك استخدامُ توازي خطّين لإيجادِ الميلِ.

لتكنْ أ(١، ٢)، ب(−١، ٦).

أوجِدْ ميلَ الخطِّ المستقيمِ جـ د الذي يُوازي الخطَّ المستقيمَ $\overleftrightarrow{أب}$.

$$\text{ميلُ } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٢}{-١ - ١} = \frac{٤}{-٢} = -٢$$

$\because \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـ د}$

$\therefore$ ميلَ $\overleftrightarrow{أب}$ = ميلَ $\overleftrightarrow{جـ د}$ = −٢

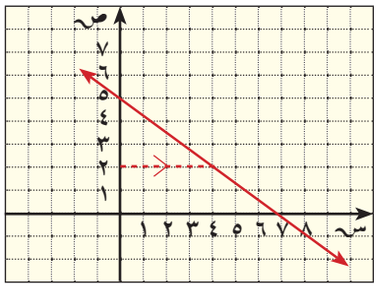
حاوِلْ أن تحلَّ

١ هل الخطّان التاليان متوازيان؟ اشرحْ.

$\overleftrightarrow{أب}$: يمرُّ بالنقطةِ أ(٠، ١) والنقطةِ ب $\left(١، \frac{٢}{٣}\right)$

$\overleftrightarrow{جـ د}$: يمرُّ بالنقطةِ جـ(٠، ٣) والنقطةِ د $\left(١، \frac{٨}{٣}\right)$

الجزءُ المقطوعُ من المحورِ الصاديِّ هو الإحداثيُّ الصاديُّ للنقطةِ التي يقطعُ فيها المستقيمُ المحورَ الصاديَّ.



الرسمُ البيانيُّ المقابلُ يُمثِّلُ المستقيمَ: ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥

لاحِظْ أنّ الجزءَ المقطوعَ من المحورِ الصاديِّ هو ٥، وميلَ المستقيمِ هو $\frac{-٣}{٤}$ وعليه فإنّ المعادلةَ التي على صورةِ:

ص = الميلَ × س + الجزءَ المقطوعَ من المحورِ الصاديِّ.

أي أنّ ص = م س + ب تُسمّى معادلةَ الميلِ والجزءَ المقطوعَ. والتمثيلُ البيانيُّ لها هو خطٌّ مستقيمٌ ميلُه م، والجزءُ المقطوعُ من المحورِ الصاديِّ هو ب.

فكرةٌ مفيدةٌ

لحلِّ المسائلِ

في معادلاتِ الدرجةِ الأولى في متغيِّرين لإيجادِ الجزءِ المقطوعِ من محورِ السيناتِ، ضَعْ ص = ٠

ولإيجادِ الجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ ضَعْ س = ٠

مثالٌ (٢)

ما هو الميلُ والجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ في المعادلةِ التي تُمثِّلُ المستقيمَ ص = س − ٤ ؟

المعادلةُ ص = س − ٤ على صورةِ ص = م س + ب

إذًا الميلُ (م) = ١

الجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ (ب) = −٤ .

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الميلَ والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ مع المستقيمِ: ص = −٢ + ٤ س.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تصفُ الانحدارَ على خطّين متوازيين؟

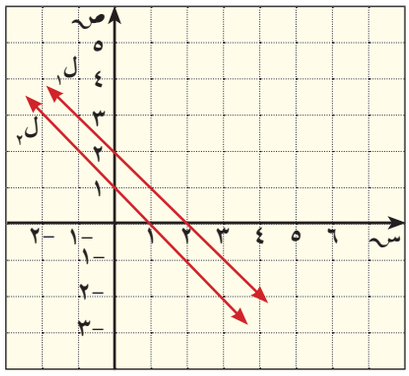
٢ هل من الممكنِ إيجادُ الجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ في المعادلةِ ص = س؟ فسِّرْ.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٤-٦)

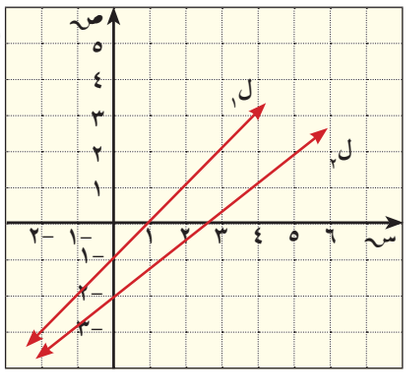
حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

يحتوي كلُّ رسمٍ على زوجٍ من الخطوطِ.
احسبْ ميلَ كلِّ خطٍّ، وسجِّلْه في الجدولِ، ثم سمِّ الخطوطَ المتوازيةَ.

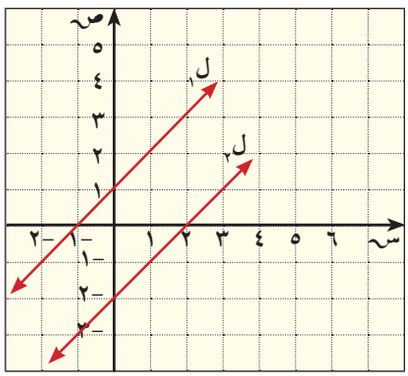
(أ)



(ب)



(جـ)



افهمْ

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

.....

٢ أوجِدْ نقطتين على كلٍّ من المستقيمين ل١ ثمّ ل٢ في كلِّ حالةٍ من الحالاتِ الثلاثِ.

.....

خطِّطْ

٣ ما الخطوةُ التي عليك استخدامُها؟

.....

حُلَّ

٤ أكمِلِ الجدولَ المقابِلَ.

	ميلُ ل١	ميلُ ل٢
(أ)		
(ب)		
(جـ)		

أيُّ زوجٍ من الخطوطِ المستقيمةِ هي متوازيةٌ؟ اشرحْ إجاباتِك.

.....

تحقَّقْ

٥ هل الذي تستنتجُه من الجدولِ متطابقٌ مع الرسوماتِ؟

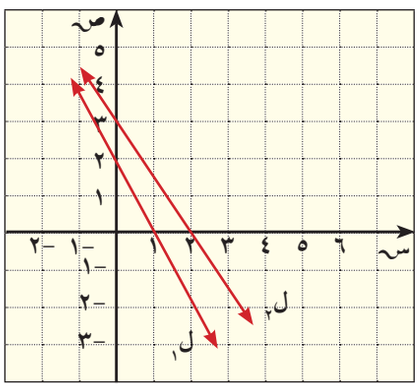
.....

حُلَّ مسألةً أخرى

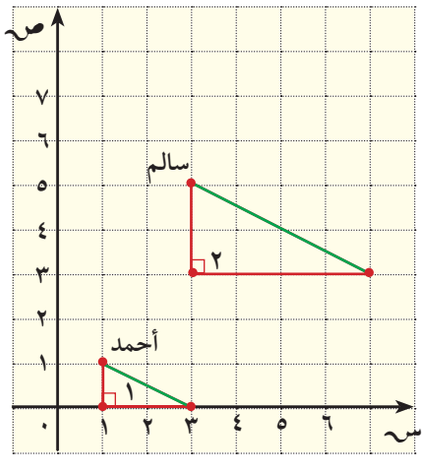
٦ (أ) أوجِدْ ميلَ ل١، ل٢.

.....

(ب) هل الخطّان ل١، ل٢ متوازيان؟ اشرحْ إجابتَك. .....



حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ



١ وقفَ أحمدُ على القمّةِ في الشكلِ «١»،
بينما وقفَ سالمٌ على القمّةِ في الشكلِ «٢».
قارِنْ انحدارَ كلٍّ من القمّتين في الرسمِ المقابِلِ، ثمّ فسِّرْ.

.....

.....

.....

٢ (أ) مثِّلْ بيانيًّا على الشبكةِ الإحداثيّةِ نفسِها المعادلتين س = ٢ص + ١، س = ٢ص − ١.
(ب) ما الذي تُلاحِظُه؟ فسِّرْ لماذا المستقيمان هما متوازيان.

.....

.....

٣ **تحدٍّ**: (أ) أوجِدْ معادلةً للمستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتين أ(١، ٢)، ب(٣، ٤).

.....

.....

(ب) أوجِدْ معادلةَ المستقيمِ الموازي للمستقيمِ أب، والجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ يُساوي −١.

.....

.....

٤ **سؤالٌ مفتوحٌ**: إذا كانَ لمستقيمين الميلُ نفسُه، فهذا يعني أنّ معادلتيهما تُمثِّلان المستقيمَ نفسَه.
ما مدى صحّةِ هذه العبارةِ؟ فسِّرْ.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٤-٧

أزواجُ المعادلاتِ الخطّيّةِ

Pairs of Linear Equations

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ إيجادِ حلٍّ واحدٍ لزوجٍ من المعادلاتِ الخطّيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ رجالُ الإطفاءِ خطوطًا متقاطعةً للتركيزِ على أماكنِ الحريقِ.

◄ صلةُ الدرسِ قد رأيْتَ كيف تُمثِّلُ كلَّ الحلولِ لمعادلةٍ خطّيّةٍ واحدةٍ بيانيًّا، والآن سوف تتعلّمُ كيف تجدُ الحلَّ لزوجٍ من المعادلاتِ الخطّيّةِ. ►

استكشِفْ: زوجُ المعادلاتِ الخطّيّةِ

ركوبُ القواربِ

الأدواتُ المستخدَمةُ: ورقةُ جدولةٍ

إذا ما أردْتَ أن تقومَ برحلةٍ بحريّةٍ في قاربٍ، يُمكِنُك أن تستأجرَ قاربًا من قواربِ فهدٍ وكلفتُه ١٤ دينارًا يُضافُ إليها ٨ دنانيرَ عن كلِّ ساعةٍ، أو تستأجرَ قاربًا من قواربِ جاسمٍ وكلفتُه ١٢ دينارًا يُضافُ إليها ٩ دنانيرَ عن كلِّ ساعةٍ.

١ انسخْ وأكمِلِ الجدولَ التاليَ أو استخدِمْ برنامجًا على الحاسوبِ لإيجادِ التكاليفِ الكلّيّةِ في أوقاتٍ مختلِفةٍ.

عددُ الساعاتِ	كلفةُ قواربِ فهدٍ	كلفةُ قواربِ جاسمٍ
س	٨س + ١٤	٩س + ١٢
١	.....	.....
٢	.....	.....
٣	.....	.....
٤	.....	.....

٢ فسِّرْ لماذا ٨س + ١٤ هي كلفةُ تأجيرِ قاربٍ من قواربِ فهدٍ، و٩س + ١٢ هي كلفةُ تأجيرِ قاربٍ من قواربِ جاسمٍ.

٣ إذا كانَتْ مدّةُ الرحلةِ ساعةً واحدةً، فأيَّ قاربٍ تستأجرُ؟ لماذا؟

٤ كم عددُ الساعاتِ التي يُمكِنُ تأجيرُها بحيث تكونُ كلفةُ التأجيرِ واحدةً؟

٥ بعدَ كم ساعةٍ تكونُ كلفةُ استئجارِ قاربٍ من قواربِ فهدٍ أوفرَ؟

٦ هل تعتقدُ أن استئجارَ قاربٍ من قواربِ جاسمٍ هو دائمًا الخيارُ الأفضلُ؟ لماذا؟

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ نظامُ المعادلاتِ الخطّيّةِ System of Linear Equations

تعلَّمْ أزواجُ المعادلاتِ الخطّيّةِ

عندما تُعتبَرُ معادلتان خطّيّتان معًا فهما تُكوِّنان نظامًا من المعادلاتِ الخطّيّةِ. الزوجُ المرتَّبُ الذي يكونُ حلًّا لكلٍّ من المعادلتين يُسمّى حلًّا للنظامِ.

> **تذكَّرْ**
> الحلُّ لمعادلةٍ من متغيِّرين يكونُ زوجًا مرتَّبًا، وليسَ عددًا واحدًا.

مثالٌ (١)

مع خالد ٤٠ دينارًا ويدّخرُ في الأسبوعِ الواحدِ ٨ دنانيرَ، ومع صالحٍ ١٤٠ دينارًا، ولكنّه يصرفُ منها ١٢ دينارًا في الأسبوعِ الواحدِ.

(أ) يُمثِّلُ المتغيِّرُ س عددَ الأسابيعِ، ويُمثِّلُ المتغيِّرُ ص المبلغَ المدّخرَ أو المصروفَ. اكتبْ معادلةً تُمثِّلُ ادّخارَ خالدٍ ومعادلةً تُمثِّلُ مصاريفَ صالحٍ.

المعادلةُ التي تُمثِّلُ ادّخارَ خالدٍ: ص = ٨س + ٤٠ والمعادلةُ التي تُمثِّلُ مصاريفَ صالحٍ: ص = ١٤٠ − ١٢س

(ب) كوِّنْ جدولًا يُبيِّنُ ادّخارَ خالدٍ ومصاريفَ صالحٍ لعدّةِ أسابيعَ متتاليةٍ.

عددُ الأسابيعِ س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ادّخارُ خالدٍ ص = ٨س + ٤٠	٤٨	٥٦	٦٤	٧٢	٨٠	٨٨	٩٦
الباقي مع صالحٍ ص = ١٤٠ − ١٢س	١٢٨	١١٦	١٠٤	٩٢	٨٠	٦٨	٥٦

(جـ) هل يُمكِنُ أن يتساوى المبلغان؟ ما هو زوجُ الأعدادِ الذي يُمثِّلُ هذه المساواةَ؟

يتساوى المبلغانِ في الأسبوعِ الخامسِ أي عند س = ٥، ص = ٨٠. والزوجُ المرتَّبُ (٥، ٨٠) هو حلٌّ للمعادلتين.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ مع أحمدَ ٢٥ دينارًا ويدّخرُ أسبوعيًّا ٩ دنانيرَ، ومع مروانَ ٣٧ دينارًا ويدّخرُ أسبوعيًّا ٧ دنانيرَ. يُمثِّلُ المتغيِّرُ س عددَ الأسابيعِ ويُمثِّلُ المتغيِّرُ ص القيمةَ المدّخرةَ.

(أ) اكتبْ معادلةً تُمثِّلُ ادّخارَ أحمدَ ومعادلةً تُمثِّلُ ادّخارَ مروانَ.

(ب) كوِّنْ جدولًا يُبيِّنُ ادّخارَ أحمدَ وادّخارَ مروانَ لعدّةِ أسابيعَ متتاليةٍ.

(جـ) هل يُمكِنُ أن يتساوى المبلغان؟ ما هو زوجُ الأعدادِ الذي يُمثِّلُ هذه المساواةَ؟

طريقةٌ أخرى لإيجادِ الحلِّ لنظامٍ من المعادلاتِ الخطّيّةِ هي التمثيلُ البيانيُّ لكلٍّ من المعادلتين، وإيجادُ النقطةِ التي تقعُ على كلٍّ من الخطّين الممثِّلين للمعادلتين، ثمّ تعيينُ قيمةِ الإحداثيِّ السينيِّ وقيمةِ الإحداثيِّ الصاديِّ لتلك النقطةِ.

مثالٌ (٢)

يهوى جاسمٌ رياضةَ الغوصِ في البحرِ وعليه أن يختارَ الحلَّ الأفضلَ. إذا استأجرَ لوازمَ الغطسِ يتوجَّبُ عليه دفعُ ٤ دنانير في كلِّ يومِ غطسٍ. أما إذا اشترى لوازمَ الغطسِ بمبلغِ ١٠ دنانير، فيتوجَّبُ عليه دفعُ دينارين لكلِّ يومِ غطسٍ.

كم هو عددُ أيّامِ الغطسِ في كلٍّ من الاختيارين لتكونَ الكلفةُ واحدةً؟

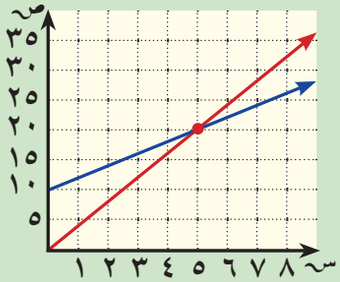
الحلُّ:

افرضْ أنّ س هو عددُ أيّامِ الغطسِ، ك هي الكلفةُ الإجماليّةُ فتكونُ

ك = ٤س الكلفةُ الكلّيّةُ إذا استأجرَ لوازمَ الغطسِ

ك = ٢س + ١٠ الكلفةُ الكلّيّةُ إذا اشترى لوازمَ الغطسِ

مثِّلْ بيانيًّا كلَّ من المعادلتين، ثمّ أوجِدِ النقطةَ التي يتقاطعُ فيها الخطّان.



س	ك = ٤س
٠	٠
٤	١٦
٥	٢٠

س	ك = ٢س + ١٠
٠	١٠
٤	١٨
٥	٢٠

يتقاطعُ الخطّان في النقطةِ (٥، ٢٠). تحقَّقْ من ذلك بالتعويضِ بالإحداثيِّ السينيِّ والصاديِّ لهذه النقطةِ في كلٍّ من المعادلتين.

ك = ٤س

٢٠ ≟ ٤ × ٥

٢٠ = ٢٠

ك = ٢س + ١٠

٢٠ ≟ ٢ × ٥ + ١٠

٢٠ = ٢٠

إذا غطسَ جاسمٌ ٥ أيّامٍ، تكونُ التكلفةُ نفسَها وهي ٢٠ دينارًا.

يُعتبَرُ موقعُ دولةِ الكويتِ على ساحلِ الخليجِ العربيِّ ذا أهمّيّةٍ كبرى، بحيث وفّرَ للسكّانِ الفرصَ للعملِ في الملاحةِ البحريّةِ والغوصِ في الأعماقِ للبحثِ عن اللؤلؤِ الذي اشتهرَتْ به دولُ الخليجِ العربيِّ، والذي كانَ له دورٌ بارزٌ في الاقتصادِ قبلَ اكتشافِ النفطِ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تعرفُ أنّ زوجًا مرتَّبًا معيَّنًا هو حلٌّ للنظامِ ذي المعادلتين؟

٢ كيف يُمكِنُك إيجادُ الحلِّ لنظامٍ من المعادلاتِ من الرسمِ البيانيِّ؟

أيُّهما سيكونُ أقلَّ كلفةً لركوبِ زلّاجةٍ ١٢ مرّةً، شراءُ تصريحِ دخولٍ شهريٍّ قيمتُه ٣٠ دينارًا بالإضافةِ إلى مبلغِ ١,٥٠٠ دينارٍ ثمنًا لتذكرةِ ركوبٍ في كلِّ مرّةٍ، أم شراءُ تذكرةِ ركوبٍ قيمتُها ٤ دنانيرَ عندَ الركوبِ في كلِّ مرّةٍ؟

افهمْ

١ كم عددُ تذاكرِ ركوبِ الزلّاجةِ التي ستشتريها؟

.....

٢ كم عددُ الفرصِ المختلِفةِ المتاحةِ لشراءِ تذاكرِ ركوبِ الزلّاجةِ؟

.....

خطِّطْ

٣ كيف يُمكِنُك أن توجِدَ الكلفةَ لركوبِ الزلّاجةِ ١٢ مرّةً بدفعِ ١,٥٠٠ دينارٍ لكلِّ مرّةٍ مضافًا إليها ٣٠ دينارًا ثمنَ تصريحِ الدخولِ الشهريِّ؟

.....

٤ كيف يُمكِنُك إيجادُ كلفةِ ركوبِ الزلّاجةِ ١٢ مرّةً بشراءِ تذكرةِ ركوبٍ قيمتُها ٤ دنانيرَ عندَ الركوبِ في كلِّ مرّةٍ؟

.....

٥ كيف يُمكِنُك أن تُقرِّرَ أيَّهما أقلُّ كلفةً؟

.....

حُلَّ

٦ أوجِدْ كلفةَ ركوبِ الزلّاجةِ ١٢ مرّةً بـ ١,٥٠٠ دينارٍ لكلِّ مرّةٍ مضافًا إليها ٣٠ دينارًا ثمنَ التصريحِ؟

.....

٧ أوجِدْ كلفةَ ركوبِ الزلّاجةِ ١٢ مرّةً بـ ٤ دنانيرَ لكلِّ مرّةٍ.

.....

٨ أيٌّ من الوسيلتين تكونُ أوفرَ طريقةٍ لشراءِ تذاكرِ ركوبِ الزلّاجةِ ١٢ مرّةً؟

.....

تحقَّقْ

٩ إذا اشتريْتَ تذاكرَ ركوبِ الزلّاجةِ أقلَّ أو أكثرَ من ١٢ مرّةً، فهل كلتا الطريقتين لشراءِ التذاكرِ سوف تُكلِّفُك المبلغَ نفسَه؟ فسِّرْ.

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ أيُّهما سيكونُ أوفرَ عندَ ركوبِ ١٥ لعبةً في مدينةِ الملاهي: شراءُ تصريحِ دخولٍ قيمتُه ٥ دنانيرَ ويُضافُ إليه ١,٥٠٠ دينارٍ لكلِّ لعبةٍ، أم شراءُ تذكرةٍ قيمتُها ٢ دينارٍ عندَ ركوبِ كلِّ لعبةٍ؟

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١ **التواصلُ**: من المحتملِ أن يُمارِسَ جاسمٌ رياضةَ التزلّجِ على الجليدِ خمسَ أو ستَّ مرّاتٍ هذا العامَ، لذلك فهو يُفكِّرُ في الاشتراكِ في نادٍ للتزلّجِ، قيمةُ الاشتراكِ فيه هي ٢٥ دينارًا في السنةِ بالإضافةِ إلى ٥ دنانيرَ لكلِّ مرّةٍ يُسمَحُ له فيها بالتزلّجِ، ويُمكِنُه أيضًا التزلّجُ من دونِ اشتراكٍ مقابلَ دفعِ ١٠ دنانيرَ لكلِّ مرّةٍ. هل من الأفضلِ أن يشتركَ في نادي التزلّجِ؟ استخدِمِ الرسمَ البيانيَّ لتُوضِّحَ إجابتَك.

٢ **التفكيرُ الناقدُ**: إذا كانَ هناك خطّان لهما الميلُ نفسُه والجزءُ المقطوعُ من محورِ الصاداتِ نفسِه؛ فما النقاطُ التي يشتركُ فيها الخطّان؟

.....

.....

.....

٣ **المجلّةُ**: اكتبْ مسألةً حياتيّةً تستطيعُ حلَّها باستخدامِ الرسمِ البيانيِّ للمستقيمين: ص = س + ٥، ص = ٢س.

.....

.....

.....

٤–٨

المتباينات الخطّيّة

Linear Inequalities

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ التعبيرِ عن المتباينات من متغيِّرين بيانيًّا.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مختبرو المياهِ المتباينات لوصفِ معدَّلاتِ الشوائبِ المسموحِ بها في عيّناتِ مياهِ الشربِ.

صلةُ الدرسِ في دروسٍ سابقةٍ قُمْتَ بحلِّ المتباينات في متغيِّرٍ واحدٍ وتمثيلِها على خطِّ الأعدادِ، والآن، يُمكِنُك حلُّ المعادلاتِ من متغيِّرين، ويُمكِنُ أن ترى كيف تحلُّ بيانيًّا المتباينات من متغيِّرين وتُمثِّلُها.

استكشِفْ: المتباينات الخطّيّة

إلى أيِّ جانبٍ سيكونُ؟

الأدواتُ المستخدَمةُ: ورقةُ رسمٍ بيانيٍّ (مسطرةٌ)، ملحقاتُ الرسمِ البيانيِّ

تخيَّلْ نفسَك فوقَ شجرةٍ جميلةٍ إلى جانبِ النهرِ. عندما تقتربُ من الشلّالاتِ تكتشفُ حبلًا مدعَّمًا بعوّاماتٍ تقسمُ النهرَ، ولوحةً مسجَّلًا عليها

ص = س – ٤ عليك أن تختارَ مباشرةً جانبًا واحدًا من النهرِ.

١ ارسمِ المستقيمَ: ص = س – ٤ الذي يُمثِّلُ الحبلَ الذي يقسمُ النهرَ.

٢ اخترْ أيَّ نقطةٍ فوقَ الخطِّ الذي رسمْتَه. قرِّرْ ما إذا كانَتِ النقطةُ التي اخترْتَها تجعلُ ص = س – ٤ أم ص > س – ٤ أو ص < س – ٤ صحيحةً. دعِّم استنتاجَك.

٣ اخترْ أيَّ نقطةٍ أسفلَ الخطِّ. قرِّرْ ما إذا كانَتِ النقطةُ التي اخترْتَها تجعلُ ص = س – ٤ أم ص > س – ٤ أم ص < س – ٤ صحيحةً. دعِّم استنتاجَك.

٤ افرضْ أنّ حلولَ المتباينةِ ص > س – ٤ تُشيرُ إلى جانبِ التحدّي (مياهُ الشلّالاتِ بيضاءُ) وص < س – ٤ تُشيرُ إلى الجانبِ الأسهلِ (طوعُ الأمرِ)، ظلِّلْ بخفّةٍ الجانبَ الذي سوف تختارُه، وارسمْ قاربًا على هذا الجانبِ، وعنونْه بما يُناسِبُه من ص > س – ٤ أو ص < س – ٤.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينةٌ خطّيّةٌ Linear Inequality
- خطٌّ فاصلٌ (خطُّ الحدودِ) Boundary Line

تعلَّمْ: المتباينات الخطّيّة

منطقةُ الحلِّ لمتباينةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيّرين:

لتحديدِ ما إذا كانَتْ قيمةٌ معيَّنةٌ هي حلًّا لمتباينةٍ ذاتِ متغيِّرٍ واحدٍ، يُمكِنُك التعويضُ ورؤيةُ ما إذا كانَتِ المتباينةُ صحيحةً. يُمكِنُك عملُ الشيءِ نفسِه للمتباينات من متغيِّرين.

مثالٌ (١)

هل (١، ٥) أحدُ حلولِ المتباينةِ ص > س + ٢؟

ص > س + ٢	اكتبِ المتباينةَ
٥ > ١ + ٢	عوِّضْ بالزوجِ المرتَّبِ في المتباينةِ
٥ > ٣	ركِّزْ لترى أنّ المتباينةَ الناتجةَ صحيحةٌ

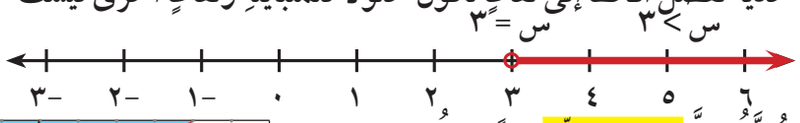
الزوجُ المرتَّبُ (١، ٥) هو أحدُ حلولِ المتباينةِ ص > س + ٢.

تذكَّرْ

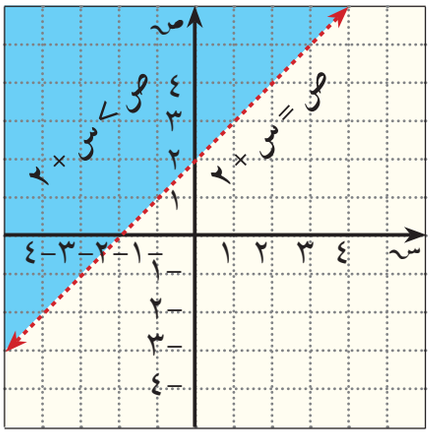
إنّك تعرفُ كيف تُمثِّلُ حلَّ المتباينات بيانيًّا على خطٍّ الأعدادِ.

نستخدمُ دائرةً غيرَ مظلَّلةً لتوضيحِ أنّ النقطةَ (س = ٣) ليسَتْ جزءًا من الحلِّ.

عندما تُمثِّلُ حلَّ متباينةٍ في متغيِّرٍ واحدٍ بيانيًّا، مثلَ س > ٣، النقطةُ (س = ٣) تُسمّى نقطةً حدّيّةً تفصلُ الخطَّ إلى نقاطٍ تكونُ حلولًا للمتباينةِ ونقاطٍ أخرى ليسَتْ حلولًا لها.



عندما تُمثِّلُ حلَّ المتباينةِ الخطّيّةِ بيانيًّا، مثلَ ص > س + ٢ والمستقيمُ الذي معادلتُه (ص = س + ٢) يُسمّى الخطَّ الفاصلَ (خطَّ الحدودِ) وهو يفصلُ مستوي الإحداثيّاتِ إلى نقاطٍ تكونُ حلولًا للمتباينةِ ونقاطٍ لا تكونُ حلولًا لها.



المنطقةُ المظلَّلةُ باللونِ الأزرقِ هي منطقةُ الحلِّ.

بدلًا من دائرةٍ غيرِ مظلَّلةٍ، تَمَّ استخدامُ خطٍّ متقطِّعٍ لتوضيحِ أنّ الخطَّ الفاصلَ ليس جزءًا من الحلِّ.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

إذا كانَتْ علاقةُ التباينِ (الترتيبِ) ≤ أو ≥ فنستخدمُ خطًّا غيرَ متقطِّعٍ في الرسمِ.

إذا كانَتْ علاقةُ التباينِ (الترتيبِ) < أو > فنستخدمُ خطًّا متقطِّعًا في الرسمِ.

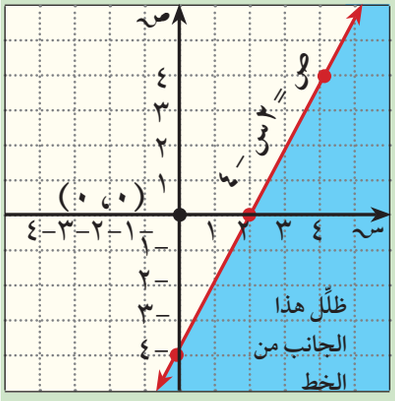
أمثلةٌ

٢ مَثِّلِ منطقةَ حلِّ المتباينةِ ص ≥ ٢س − ٤ بيانيًّا.

أوّلًا: كوِّنْ جدولَ القيمِ للمعادلةِ المناظِرةِ ص = ٢س − ٤.

س	٠	٢	٤
ص	−٤	٠	٤

ارسمْ خطًّا مستقيمًا يُمثِّلُ المعادلةَ المناظرةَ ص = ٢س − ٤ بيانيًّا. اخترْ أيَّ نقطةٍ ليسَتْ على الخطِّ لترى إذا كانَتْ حلًّا للمتباينةِ، نقطةُ الأصلِ (٠، ٠) عادةً هي المتاحةُ، إذا كانَتْ حلًّا فتكونُ كلُّ النقاطِ على هذا الجانبِ الذي يقعُ فيه نقطةُ الأصلِ حلًّا. أمّا إذا لم تكنِ النقطةُ (٠، ٠) حلًّا للمتباينةِ، فإنّ جميعَ النقاطِ التي على الجانبِ الآخرِ من الخطِّ هي حلولٌ للمتباينةِ.



هل ٠ ≥ ٢(٠) − ٤؟

٠ ≥ −٤ عبارةٌ خطأٌ، لذلك ظلِّلِ الجانبَ الآخرَ في الرسمِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ مثِّلْ منطقةَ حلِّ المتباينةِ ص > س − ٢ بيانيًّا.

بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ تُتيحُ لك أن تختبرَ القيمَ في المتباينات فتُعطيك إجابةَ ١ تكونُ صحيحةً و إجابةَ صفرٍ تكونُ غيرَ صحيحةٍ. هذه الشاشةُ تُظهِرُ لك أنّ (٥، ٤) هي حلٌّ لـ ص ≥ ٢س − ٤

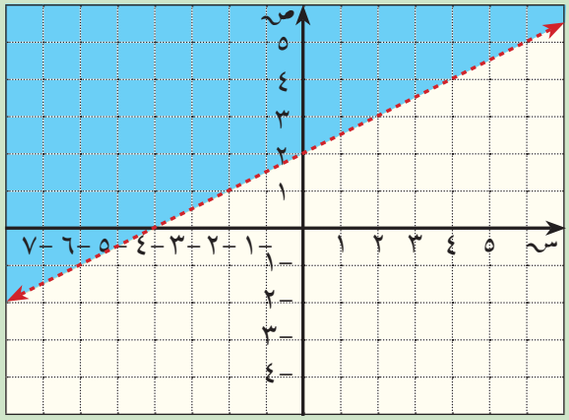
٣ مثِّلْ منطقةَ حلِّ المتباينةِ ص > ٠,٥ س+٢ بيانيًّا.

الحلُّ:

أوّلًا : كوِّنْ جدولَ القيمِ للمعادلةِ المناظِرةِ ص = ٠,٥ س+٢

س	٠	-٤	٢
ص	٢	٠	٣

ارسمْ خطًّا مستقيمًا متقطِّعًا يُمثِّلُ المعادلةَ المناظِرةَ ص = ٠,٥ س+٢



خُذْ نقطةَ الأصلِ.

هل ٠ > ٠,٥ (٠) + ٢

٠ > ٢ عبارةٌ خطأٌ. لذلك ظلِّلِ الجانبَ الآخرَ في الرسمِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ مثِّلْ منطقةَ حلِّ المتباينةِ ص ≤ $\frac{س}{٣}$ بيانيًّا

منطقةُ الحلِّ المشتركِ لمتباينتين من الدرجةِ الأولى في متغيّرين بيانيًّا.

لإيجادِ منطقةِ الحلِّ المشتركِ لمتباينتين، مثِّلْ بيانيًّا منطقةَ الحلِّ لكلِّ متباينةٍ، ثمّ أوجِدْ منطقةَ الحلِّ المشترَكِ والتي تتكوّنُ من جميعِ النقاطِ (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقةِ الحلِّ المشترَكِ للمتباينتين معًا.

مثالٌ (٤)

مثِّلْ بيانيًّا منطقةَ الحلِّ المشتركِ للمتباينتين التاليتين:

$ص \leqslant س + ٣$

$ص > ١ - س$

الحلُّ:

أوّلًا: مثِّلْ منطقةَ حلِّ المتباينةِ $ص \leqslant س + ٣$ بيانيًّا

كوِّنْ جدولَ القيمِ للمعادلةِ المناظرةِ $ص = س + ٣$

س	٠	١	٢
ص	٣	٤	٥

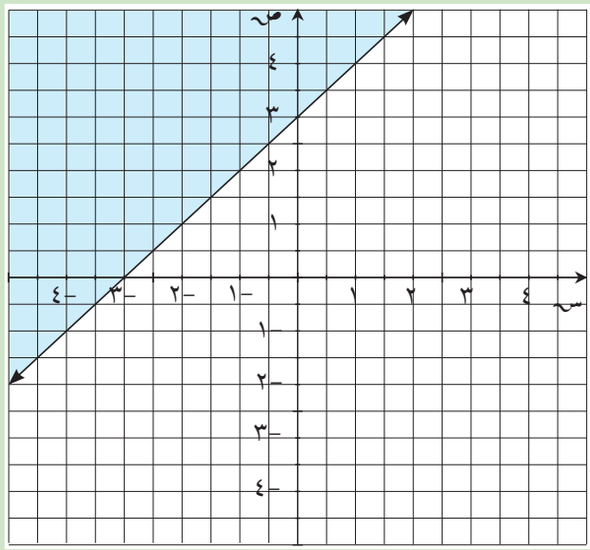
ارسمْ خطًّا مستقيمًا يمثِّلُ المعادلةَ المناظِرةِ

خُذْ نقطةً ولتكن نقطةَ الأصلِ (٠،٠)

$٠ \leqslant ٠ + ٣$

$٠ \leqslant ٣$ عبارةٌ خطأٌ

لذلك، ظلِّلِ الجانبَ الآخرَ من الرسمِ.



ثانيًا: مثِّلْ منطقةَ حلِّ المتباينةِ $ص > ١ - س$ بيانيًّا

كوِّن جدولَ القيمِ للمعادلةِ المناظرةِ $ص = ١ - س$

س	٠	١	٢
ص	١	٠	١-

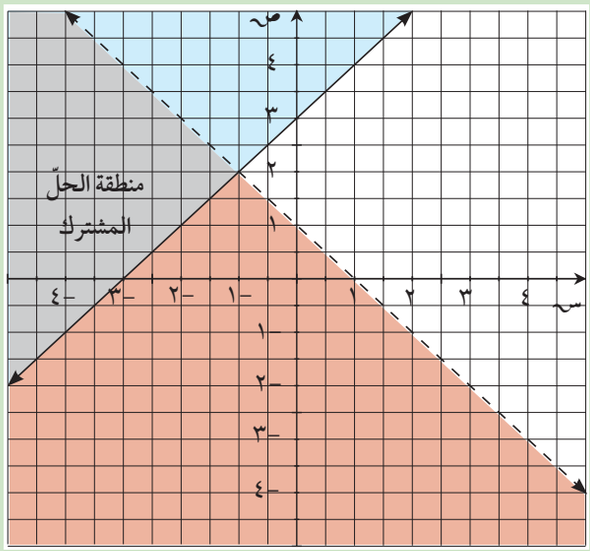
ارسمْ خطًّا مستقيمًا متقطِّعًا يُمثِّلُ المعادلةَ المناظرةَ $ص = ١ - س$

خُذْ نقطةَ الأصلِ (٠ ، ٠)

$٠ > ١ - ٠$

$٠ > ١$ عبارةٌ صحيحةٌ

لذلك، ظلِّلِ الجانبَ الذي يحوي نقطةَ الأصلِ.



حاوِلْ أن تحلَّ

٣ **مثِّلْ بيانيًّا منطقةَ الحلِّ المشتركِ للمتباينتين:**

$ص \geqslant س + ٢$ $\qquad$ $ص > ٣ - س$

على شبكةِ إحداثيّاتٍ واحدةٍ.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف يُمكِنُك تحديدُ ما إذا كانَتْ (٣، ٨) هي أحدَ حلولِ المتباينةِ $ص > ٣س + ٢$ أم لا؟

٢ عندَ رسمِ متباينةٍ خطّيّةٍ من متغيِّرين بيانيًّا، متى ترسمُ الخطَّ الفاصلَ متّصلًا ومتى ترسمُه متقطِّعًا؟

٣ كيف تعرفُ أنّ التظليلَ سيكونُ فوقَ الخطِّ أو أسفلَه عندَ رسمِ حلِّ المتباينةِ الخطّيّةِ بيانيًّا؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التفكيرُ الناقدُ:** مثِّلْ بيانيًّا ص > س + ٣، ص ≤ ٢س على شبكةِ الإحداثيّاتِ نفسِها. لاحِظْ أنّ ورقةَ الرسمِ البيانيِّ قد قُسِّمَتْ إلى أربعِ مناطقَ. اخترْ نقطةً في كلِّ منطقةٍ. عوِّضْ بإحداثيّاتِ كلِّ نقطةٍ في كلٍّ من المتباينتين. ما المَنطقةُ التي تحتوي على النقاطِ التي تُحقِّقُ كلًّا من المتباينتين؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

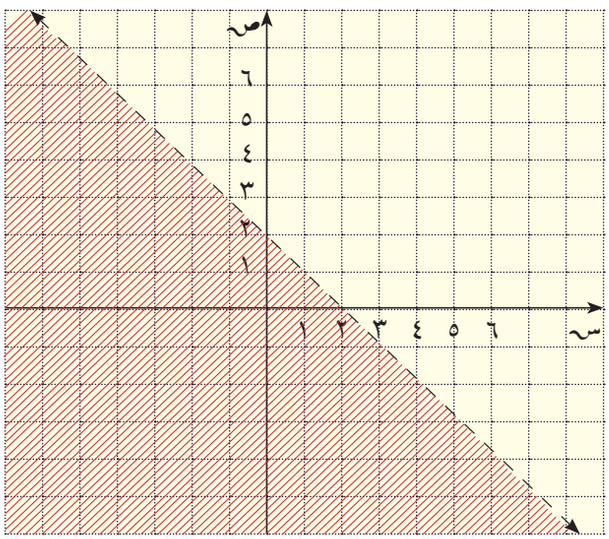
٢ **المنطقةُ المظلَّلةُ في التمثيلِ البيانيِّ أدناه تُمثِّلُ حلَّ المتباينةِ:**

(أ) ص > – س + ٢

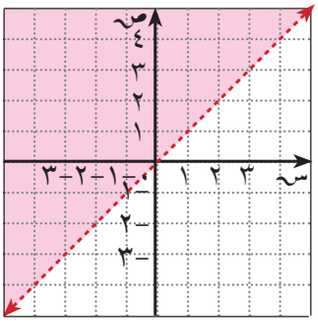
(ب) ص ≤ – س + ٢

(جـ) ص > – س + ٢

(د) ص ≥ – س + ٢



٣ **التفكيرُ الرياضيُّ**: ما المتباينةُ التي يُعبِّرُ عنها الرسمُ البيانيُّ أدناه؟



.....

.....

.....

٤ **المجلّةُ**: قارِنْ ونسِّقِ التمثيلَ البيانيَّ لمتباينةٍ من متغيِّرين مع التمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ المناظِرةِ لها.

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الرابعةِ

١ أوجِدْ قيمةَ ص عندما س = ٢ في المعادلةِ: ص = س + ٧

٢ أوجِدِ القاعدةَ التي تربطُ س مع ص في الجدولِ. ثمّ أوجِدْ قيمةَ ص عندما س = ١٢

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٥-	٤-	٣-	٢-	١-

٣ أعطِ حلّين للمعادلةِ: -س + ٤ص = ٢١

٤ الزوجُ المرتّبُ الذي يُحقِّقُ المعادلةَ: ص = -٢س + ٤ هو

(أ) (٤، ١٢) (ب) (٧، -١٠) (جـ) (٣، ١٠).

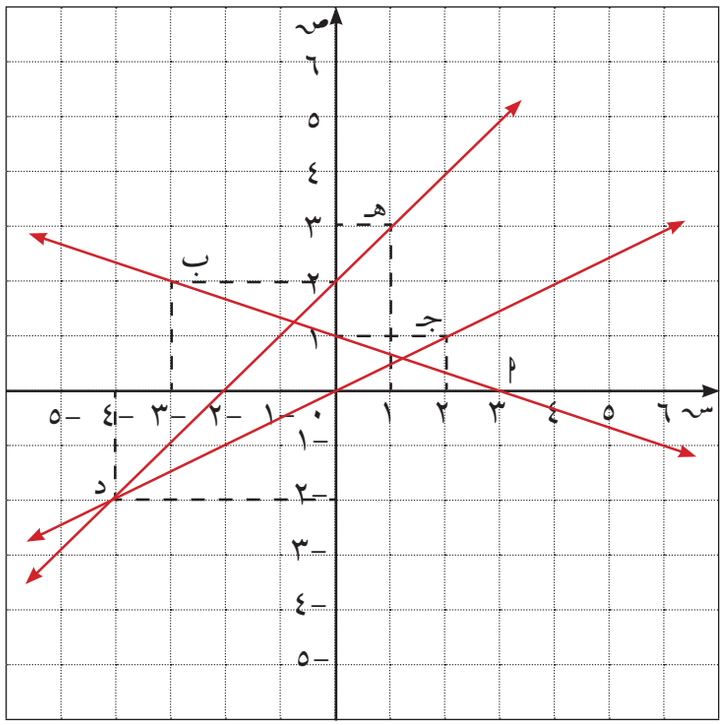
٥ مثِّلْ بيانيًّا المعادلةَ: ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢. استخدِمْ: ٠، ١، ٢، ٣ لقيمِ س.

٦ مثِّلْ بيانيًّا الأزواجَ المرتَّبةَ الواردةَ على الجدولِ أدناه. صِلِ النقاطَ ببعضِها. هل حصلْتَ على خطٍّ مستقيمٍ؟

س	٤-	٢-	٠	٢	٤
ص	٣	٢	١	١-	٢-

٧ في الشكلِ المقابلِ أوجِدْ:

لكلِّ خطٍّ مستقيمٍ على شبكةِ الإحداثيّاتِ: الميلَ، الجزءَ المقطوعَ من محورِ السيناتِ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ.



(أ) المستقيمُ الذي يمرُّ بالنقطتين أ، ب .

(ب) المستقيمُ الذي يمرُّ بالنقطتين جـ، د .

(جـ) المستقيمُ الذي يمرُّ بالنقطتين هـ، د .

اختبارُ الوَحدةِ الرابعةِ

٨ ارسمْ على شبكةِ إحداثيّاتِ المستقيمِ الذي يمرُّ بنقطةِ الأصلِ ويكونُ ميلُه:

(أ) −٥ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) صفراً (د) $-\frac{٢}{٣}$ (هـ) +١

٩ ارسمِ المستقيمَ الذي معادلتُه ص = $-\frac{٣}{٤}$ س − ٣، ثمّ أوجِدِ الميلَ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ السيناتِ، والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ.

١٠ أوجِدِ الحلَّ للمعادلتين: ص = ٢س + ٣، ص = −س − ٣ باستخدامِ التمثيلِ البيانيِّ.

١١ مثِّلْ بيانيًّا المستقيمين حيث لهما المعادلتان: ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢، س − ٣ص = ٠. هل المستقيمان متوازيان؟ اشرحْ إجابتَك.

١٢ مثِّلْ منطقةَ الحلِّ بيانيًّا:

(أ) ص ≤ س − ٤؛

(ب) ص > $-\frac{٢}{٣}$ س + ١.

تقييمُ أداءٍ

١٣ في كلٍّ ممّا يلي:

أوّلًا: كوِّنْ جدولًا للأزواجِ المرتَّبةِ لكلِّ معادلةٍ، ثمّ ارسمِ المستقيمَ الذي يُمثِّلُها.

ثانيًا: أوجِدِ الميلَ والجزءَ المقطوعَ من محورِ الصاداتِ لكلِّ خطٍّ مستقيمٍ.

ثالثًا: أيُّ الخطوطِ متوازيةٌ؟

(أ) ص = س

(ب) ص = س + ٣

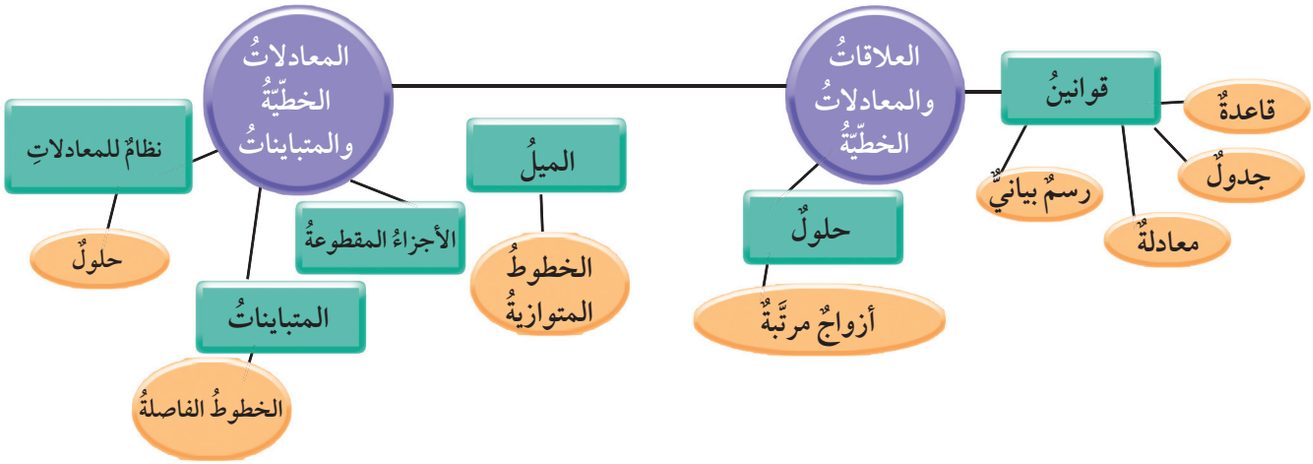
(جـ) ص = $\frac{١}{٤}$ س

(د) ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٣

(هـ) ص = $-\frac{٢}{٣}$ س

(و) ص = $-\frac{٢}{٣}$ س + ٣

مخطَّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الرابعةِ



الوَحدةُ الرابعةُ (أ): معادلاتٌ وعلاقاتٌ خطّيّةٌ

- العلاقاتُ بينَ كمّيّتين يُمكِنُ وصفُها باستخدامِ كلماتٍ أو جداولَ للقيمِ أو رسومٍ بيانيّةٍ أو معادلاتٍ.
- إذا كانَ بإمكانِك وصفُ علاقةٍ بمعادلةٍ، يُمكِنُك أيضًا وصفُها بجدولٍ.
- يُمكِنُك أحيانًا إيجادُ معادلةٍ تربطُ بينَ متغيِّرين بالنظرِ إلى جدولِ قيمِ المتغيِّراتِ.
- الحلولُ لمعادلةٍ من متغيِّرين هي أزواجٌ مرتَّبةٌ. زوجٌ مرتَّبٌ يكونُ حلًّا للمعادلةِ إذا حقّقَها عندَ التعويضِ بقيمةِ الإحداثيِّ السينيِّ والصاديِّ له في المعادلةِ.
- يُمكِنُك إيجادُ حلٍّ لمعادلةٍ باختيارِ قيمةٍ معيَّنةٍ لأحدِ المتغيِّرين والحلِّ لإيجادِ المتغيِّرِ الآخرِ.
- يُمكِنُك رسمُ النقاطِ التي تُمثِّلُ حلولًا لمعادلةٍ من متغيِّرين إذا كانَتِ النقاطُ تقعُ على خطٍّ، المعادلةُ تكونُ معادلةً خطّيّةً.

الوَحدةُ الرابعةُ (ب): معادلاتٌ خطّيّةٌ ومتباينات

- يُخبِرُنا ميلُ الخطِّ كيف يكونُ انحدارُه وهو النسبةُ بينَ الارتفاعِ الرأسيِّ (**rise**) والامتدادِ الأفقيِّ (**run**). الخطُّ المستقيمُ الذي انحرافُه إلى أعلى من اليسارِ إلى اليمينِ له ميلٌ موجَبٌ، والخطُّ المستقيمُ الذي انحرافُه إلى أسفلَ له ميلٌ سالبٌ.
- الخطوطُ المتوازيةُ لها الميلُ نفسُه، ولا تتقاطعُ في نقطةٍ واحدةٍ.
- طولُ الجزءِ المقطوعِ من محورِ السيناتِ لمعادلةٍ خطّيّةٍ هو القيمةُ س للنقطةِ التي عندَها يمرُّ الخطُّ بمحورِ السيناتِ، وطولُ الجزءِ المقطوعِ من محورِ الصاداتِ هو القيمةُ ص للنقطةِ التي عندَها يمرُّ الخطُّ بمحورِ الصاداتِ.
- نظامُ المعادلاتِ الخطّيّةِ هو معادلتان خطّيّتان أو أكثرُ وأزواجُ المعادلاتِ الخطّيّةِ يُمثِّلُها خطّان مستقيمان. وإذا كانَ هذان الخطّان متقاطعين في نقطةٍ فإنّ حلَّ النظامِ هو زوجٌ مرتَّبٌ واحدٌ يُحقِّقُ كلًّا من المعادلتين.
- المتباينةُ الخطّيّةُ تربطُ بينَ متغيِّرين باستخدامِ إحدى العلاقاتِ < أو > أو ⩽ أو ⩾. زوجٌ مرتَّبٌ معيَّنٌ يكونُ حلًّا للمتباينةِ الخطّيّةِ إذا أعطَتْ عبارةً صحيحةً عندَ التعويضِ بقيمةِ كلٍّ من س، ص في المتباينةِ الخطّيّةِ.
- لرسمِ منطقةِ حلِّ المتباينةِ الخطّيّةِ بيانيًّا، أوّلًا مثِّلِ الخطَّ الفاصلَ الذي يقسمُ مستوى الإحداثيّاتِ إلى نقاطٍ تكونُ حلًّا ونقاطٍ لا تكونُ حلًّا. استخدِمْ خطًّا متقطِّعًا للمتباينات التي فيها علاقةُ < أو > . استخدمْ خطًّا متّصلًا (غيرَ متقطِّعٍ) للمتباينات التي فيها علاقةُ ≥ أو ≤. ظلِّلِ المنطقةَ التي تحتوي على الحلولِ.

الوَحدةُ الخامسةُ

القياسُ وعناصرُ الهندسةِ والمساحاتُ والحجومُ

Geometry,Measurement,Areas and volumes

العلومُ

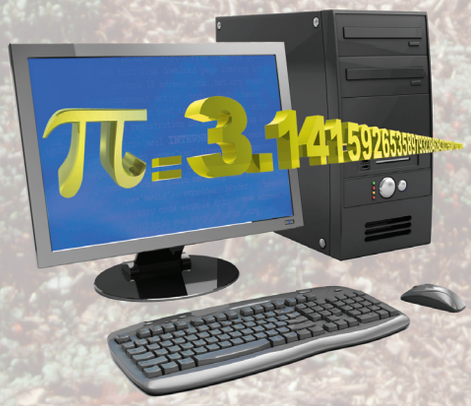
يبلغُ محيطُ الأرضِ ٣٩ ٧٣٠ كيلومترًا. قامَ إراتوسثينز Eratosthenes (٢٧٦ - ١٩٥ ق.م) باستخدامِ وَحدةِ قياسٍ تُسمّى ستاديا بتقديرِ محيطِ الأرضِ فوجدَ أنّه يُساوي ٣٩٧٠٠ كيلومترٍ وقد استندَ في تقديرِه هذا إلى المسافةِ بينَ مدينتين مصريّتين.

الدراساتُ الاجتماعيّةُ

الموقعُ الفلكيُّ هو موقعُ الدولةِ أو المدينةِ بالنسبةِ إلى خطوطِ الطولِ ودوائرِ العرضِ. تُحدِّدُ خطوطُ الطولِ موقعَ الدولةِ على الخريطةِ وتوقيتَها الزمنيَّ مقارنةً بخطِّ غرينتش (خطِّ الصفرِ) وتُحدِّدُ دوائرُ العرضِ مناخَ هذه الدولةِ. فمثلًا تقعُ دولةُ الكويتِ بينَ خطّي طولِ (٤٦-٤٨) شرقًا وبينَ دائرتي عرضِ (٢٨-٣٠) شمالًا. لذا يزيدُ التوقيتُ في دولةِ الكويتِ عن توقيتِ غرينتش ٣ ساعاتٍ.

شعوبُ العالمِ

قامَ عالمُ الرياضيّاتِ الهنديُّ سرينفازا رامانوجان (١٨٨٧ - ١٩٢٠) **Srinivasa ramanujan** بتطويرِ صيغةٍ لحسابِ قيمةِ π إلى أقربِ منزلةٍ عشريّةٍ. وبعدَ سبعةٍ وستّين عامًا على وفاتِه، تمكّنَ الحاسوبُ من حسابِ قيمةِ π مقرَّبةٍ إلى أكثرَ من ١٠٠ مليونِ منزلةٍ عشريّةٍ وباعتمادِ صيغةٍ تُشبِهُ إلى حدٍّ بعيدٍ تلك التي طوّرَها سرينفازا.



الهندسةُ

عندَ قسمةِ محيطِ قاعدةِ هرم خوفو الأكبرِ على ضعفِ ارتفاعِه، نحصلُ على القيمةِ التاليةِ ٣,١٤ وهي قريبةٌ نسبيًّا من قيمةِ π.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

يُمكِنُك قياسُ كمّيّاتٍ مختلِفةٍ، كالطولِ، والمساحةِ، والحجمِ، والسعةِ، والوزنِ، والوقتِ إلى أقربِ وَحدةٍ تستخدمُها.

النظامُ المتريُّ هو نظامٌ قياسيٌّ يُستخدَمُ في معظمِ دولِ العالمِ ومنها دولةُ الكويتُ.

تُستخدَمُ خطوطُ الطولِ والعرضِ لتحديدِ موقعِ بلدانٍ ومدنٍ على الكرةِ الأرضيّةِ.

تُستخدَمُ مساحةُ السطحِ والحجمِ لقياسِ الأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ.

تُعتَبرُ المناشيرُ والأسطواناتُ والأهراماتُ والمخاريطُ أشكالًا ثلاثيّةَ الأبعادِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

ستُصمِّمُ في هذا المشروعِ طردًا مميَّزًا حولَ موضوعٍ معيَّنٍ تختارُه بنفسِك. وستقومُ بتنفيذِه وستقيسُ أبعادَ الطردِ وحجمَه ومساحةَ سطحِه وتُسجِّلُها. وستُعِدُّ ملخَّصًا عن كيفيّةِ اختيارِك هذا الطردَ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

لقد حُلَّتِ المسألةُ التاليةُ باستخدامِ ثلاثِ طرائقَ مختلفةٍ.

اشترى ثلاثةُ أصدقاءَ تفاحًا طازجًا من سوقِ الخضارِ. اشترى حسنٌ ضعفَ ما اشتراه خالدٌ من التفّاحِ. وتزيدُ كمّيّةُ التفّاحِ التي اشتراها خالدٌ ٣ تفّاحاتٍ عن تلك التي اشتراها أحمدُ. إذا كانَ مجموعُ ما اشتراه الأصدقاءُ الثلاثةُ ١٧ تفّاحةً، فكم عددُ التفّاحاتِ التي اشتراها كلٌّ منهم؟

أنت تعلمُ:

- عددُ التفاحات كلِّها ١٧ .
- اشترى حسنٌ ضعفَ ما اشتراه خالدٌ من التفّاحِ.
- لا يستطيعُ خالدٌ أن يشتريَ أكثرَ من ثماني تفّاحاتٍ.
- لدى أحمدَ ثلاثُ تفّاحاتٍ أقلَّ من تلك التي مع خالدٍ.
- اعتبِرْ ا حسنٌ، ب خالدٌ، جـ أحمدُ

خمِّنْ وتحقَّقْ	ارسمْ مخطَّطًا	الاستدلالُ
خمِّنْ: لدى خالدٍ ٦ تفّاحاتٍ. ب = ٦ ا = ٦ × ٢ = ١٢ جـ = ٦ − ٣ = ٣ **تحقَّقْ:** ٦ + ١٢ + ٣ = ٢١ العددُ كبيرٌ جدًّا.	ليكنْ □ = عددَ تفّاحاتِ أحمدَ جـ = □ ب = □ + ٣ ا = (□ + ٣) + (□ + ٣) لدينا ٤ □ و٣ ثلاثاتٍ أي ٤ □ و٩ ١٧ − ٩ = ٨ ٤ □ تُعادِلُ ٨ تفّاحاتٍ ٨ ÷ ٤ = ٢ كلُّ □ = ٢.	■ لا يُمكِنُ أن يكونَ مع أيٍّ منهم أكثرُ من ١٧ . ■ يجبُ أن يكونَ مع حسنٍ أكبرُ عددٍ من التفّاحِ المشترى. ■ يجبُ أن يشتريَ أحمدُ أصغرَ عددٍ من التفّاحِ المشترى. ■ تعتمدُ الكمّيّاتُ الأخرى على الكمّيّةِ التي مع خالدٍ. لذلك نوجِدُ ما اشتراه خالدٌ أوّلًا. ب = ٥ ا = ٥ × ٢ = ١٠ جـ = ٥ − ٣ = ٢
خمِّنْ: لدى خالدٍ ٥ تفّاحاتٍ. ب = ٥ ا = ٥ × ٢ = ١٠ جـ = ٥ − ٣ = ٢ **تحقَّقْ:** ٥ + ٢ + ١٠ = ١٧ التخمينُ صحيحٌ.		

حُلَّ المسألةَ التاليةَ. يُمكِنُك استخدامُ إحدى الطرائقِ الثلاثِ السابقةِ أو طريقةٍ أخرى من عندِك.

١ يتمرّنُ ٤ أصدقاءَ في نادٍ رياضيٍّ. يتمرّنُ سلطانُ على الدرّاجةِ خلالَ فترةٍ تُساوي ٣ مرّاتٍ تلك التي يتمرّنُ فهدٌ خلالَها. ويتمرّنُ حمدٌ خلالَ نصفِ المدّةِ التي يتمرّنُ خلالَها إبراهيمُ. ويتمرّنُ إبراهيمُ خلالَ مدّةٍ تزيدُ بـ ١٥ دقيقةً عن تلك التي يتمرّنُ خلالَها سلطانُ. إذا تمرّنَ الأصدقاءُ جميعُهم لمدّةِ ٢,٥ ساعةٍ، فما المدّةُ التي يتمرّنُ خلالَها كلٌّ منهم على الدرّاجةِ؟

حلُّ المسائلِ

افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

حلُّ المسائلِ:

في معظمِ الأحيانِ يُمكِنُ استخدامُ أكثرَ من طريقةٍ لحلِّ مسألةٍ. يجبُ أن تستخدمَ الإستراتيجيّةَ الأكثرَ ملاءمةً لك. قد يُساعِدُك اعتمادُ إستراتيجيّاتٍ مختلفةٍ على تحديدِ أيٍّ منها تُلائِمُ طريقةَ حلِّك المسألةِ.

الوَحدةُ الخامسةُ (٢)

عناصرُ الهندسةِ
Tools of Geometry

في الحياةِ الواقعيّةِ، إذا نظرْتَ حولَك تجدُ عناصرَ كثيرةً ترتبطُ بالهندسةِ. تقومُ بزيارةٍ إلى محلِّ النجّارِ فتُشاهِدُ بينَ يديه أدواتٍ هندسيّةً. تدخلُ إلى محلِّ حدادةٍ أو ألومنيوم فترى الأدواتِ الهندسيّةَ مبعثرةً هنا وهناكَ يستخدمونها في إبداعاتِهم. تنظرُ في أرجاءِ هذه المحلّاتِ فترى خرائطَ وشبكاتٍ لمجسَّماتٍ سوف يصنعونها. تتأمّلُ الشبابيكَ والأبوابَ حيث تتناسقُ فيها بدقّةٍ القضبانُ المتوازيةُ والمتعامدةُ. تتطلّعُ في الخارجِ إلى الأبنيةِ فتجدُ صفوفَ الحجارةِ تفصلُها الخطوطُ المتوازيةُ والمتعامدةُ.

١ يستخدمُ أصحابُ الحرفِ كثيرًا من الأدواتِ الهندسيّةِ. اذكرْ بعضَها.

٢ ما المقاييسُ الهندسيّةُ الأساسيّةُ التي يستخدمُها البنّاؤون؟

٣ اذكرْ مشاهداتٍ واقعيّةً تُمثِّلُ خطوطًا متوازيةً وخطوطًا متعامدةً.

١ـ٥

المستقيماتُ المتوازيةُ والمستقيماتُ المتعامدةُ

Parallel and Perpendicular Lines

سوف تتعلّمُ

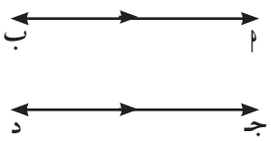
- كيفيّةَ تعرّفِ الخطوطِ المتوازيةِ والخطوطِ المتعامدةِ ورسمِها.

من الاستخدامات

- يبتكرُ صانعو النسيجِ تصاميمَ متوازيةً ومتعامدةً على أنوالِهم.

صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ أنواعًا مختلِفةً من الزوايا. والآن ستُطبِّقُ هذه المعلوماتِ لتحديدِ أنواعٍ إضافيّةٍ من الزوايا ◀

تُسمّى الخطوطُ المستقيمةُ في مستوٍ التي لا تتقاطعُ أبدًا، خطوطًا **متوازيةً**.

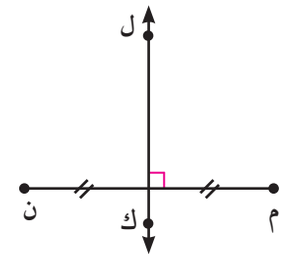


مستقيمان متوازيان

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متوازيان ونكتبُ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـ د}$.

تُسمّى المستقيماتُ التي تُكوِّنُ زاويةً قائمةً مستقيماتٍ **متعامدةً**.

$\overleftrightarrow{ك ل}$ متعامدٌ مع $\overline{م ن}$ ونكتبُ $\overleftrightarrow{ك ل} \perp \overline{م ن}$.



$\overleftrightarrow{ل ك}$ محور $\overline{م ن}$ (متعامدان)

المنصِّفُ العموديُّ (محورُ القطعةِ المستقيمةِ) هو مستقيمٌ متعامدٌ مع قطعةٍ مستقيمةٍ وهو يقسمُ هذه الأخيرةَ إلى جزءين متطابقين. فمثلًا $\overleftrightarrow{ل ك}$ هو منصِّفُ $\overline{م ن}$ العموديُّ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متوازٍ Parallel
- متعامدٌ Perpendicular
- منصِّفٌ متعامدٌ (محورُ قطعةٍ مستقيمةٍ) Perpendicular Bisector
- قاطعٌ Transversal
- زاويةٌ داخليّةٌ Interior Angle
- زاويةٌ خارجيّةٌ exterior angle
- زوايا متبادلةٌ Alternate angle
- زوايا متناظرةٌ Corresponding Angle
- زوايا متقابلةٌ بالرأسِ Vertical Angles

استكشِفْ القواطعُ

القواطعُ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** برنامجُ حاسوبٍ هندسيٌّ

١ ارسمْ مستقيمين متوازيين، ثمّ ارسمْ مستقيمًا ثالثًا يقطعُ المستقيمين المتوازيين بحيث يكونُ مائلًا. سَمِّ الزوايا الثمانيَ المبيَّنةَ في الرسمِ.

٢ قِسِ الزوايا المبيَّنةَ في الرسمِ إلى أن تجدَ زاويتين متطابقتين. اذكرِ الزاويتين المتطابقتين باستخدامِ الرمزِ $\cong$.

٣ تابعْ قياسَ الزوايا كلِّها المبيَّنةِ في الرسمِ. كم قياسًا مختلِفًا وجدْتَ؟

٤ اذكرْ أكبرَ عددٍ ممكنٍ من أزواجِ الزوايا المتطابقةِ.

٥ اذكرْ أكبرَ عددٍ ممكنٍ من أزواجِ الزوايا المتكاملةِ.

٦ هل يوجَدُ زوايا متتامّةٌ؟

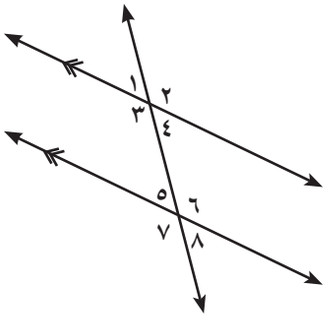
٧ دوِّرِ المستقيمَ الثالثَ بحيث يُشكِّلُ زوايا قائمةً مع المستقيمين المتوازيين. ما عددُ الزوايا القائمةِ كلِّها؟

٨ ارسمْ قطعةً مستقيمةً بحيث يكونُ أحدُ المستقيمين الآخرين في الرسمِ منصِّفًا عموديًّا.

٩ تناقَشْ مع زملائِك حولَ ما لاحظْتَه عن الزوايا المبيَّنةِ في الرسمِ.

تعلَّمْ — المستقيماتُ المتوازيةُ والمستقيماتُ المتعامدةُ

القاطعُ هو مستقيمٌ يتقاطعُ مع مستقيمين (أو أكثرَ). وعندما يقطعُ قاطعٌ مستقيمين منفصِلين تتشكّلُ زوايا.



تُسمّى الزوايا الأربعُ الواقعةُ بينَ المستقيمين **زوايا داخليّةً**.
تُشكِّلُ الزوايا ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ زوايا داخليّةً.

تُسمّى الزوايا الأربعُ الواقعةُ خارجَ المستقيمين **زوايا خارجيّةً**.
تُشكِّلُ الزوايا ١ ، ٢ ، ٧ ، ٨ زوايا خارجيّةً.

الزوايا المتبادلةُ هي الزوايا الواقعةُ على جهتين مختلفتين من القاطعِ، وتكونان إمّا داخليّتين وإمّا خارجيّتين.

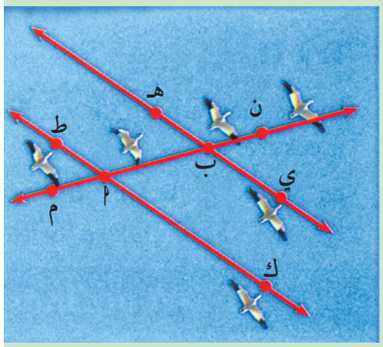
تكونُ الزاويتان المتبادلتان متطابقتين إذا تقاطعَ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين.
تُشكِّلُ الزوايا ١ ، ٨ ثمّ ٢ ، ٧ زوايا متبادلةً خارجيّةً.
تُشكِّلُ الزوايا ٣ ، ٦ ثمّ ٤ ، ٥ زوايا متبادلةً داخليّةً.

الزوايا المتناظرةُ تقعُ في الجهةِ نفسِها من القاطعِ احداهما خارجية والأخرى داخلية وتكونُ متطابقةً إذا تقاطعَ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين.
تُشكِّلُ الزوايا ١ ، ٥ ثمّ ٢ ، ٦ ثمّ ٣ ، ٧ ثمّ ٤ ، ٨ زوايا متناظرةً.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

الزوايا المتكاملةُ مجموعُ قياسها ١٨٠°.
الزوايا المتتامّةُ مجموعُ قياسها ٩٠°.

مثالٌ (١)



في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: $\overleftrightarrow{ط\,ك}$ // $\overleftrightarrow{هـ\,ي}$ ، $\overleftrightarrow{ن\,م}$ قاطعٌ لهما. حدِّدْ أزواجَ الزوايا المتبادلةِ الداخليّةِ والخارجيّةِ.

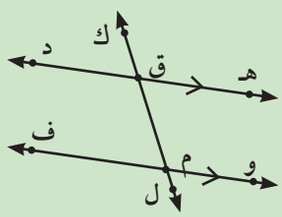
الزاويتان ط $\hat{}$ م مع ن $\hat{}$ ب ي هما زاويتان خارجيّتان متبادلتان.

الزاويتان ك $\hat{}$ م مع ن $\hat{}$ ب هـ هما زاويتان خارجيّتان متبادلتان.

الزاويتان ط $\hat{}$ ن مع ي $\hat{}$ ب م هما زاويتان داخليّتان متبادلتان.

الزاويتان ك $\hat{}$ ن مع هـ $\hat{}$ ب م هما زاويتان داخليّتان متبادلتان.

حاوِلْ أن تحلَّ

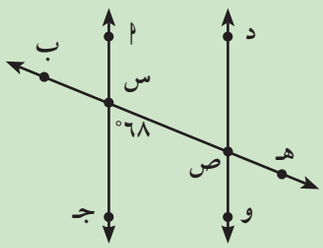


١ في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: $\overleftrightarrow{د\,هـ}$ // $\overleftrightarrow{ف\,و}$ ، $\overleftrightarrow{ك\,ل}$ قاطعٌ لهما.
حدِّدْ أزواجَ الزوايا المتبادلةِ الداخليّةِ والخارجيّةِ كلِّها.

مثالٌ (٢)

في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: $\overleftrightarrow{أجـ} \parallel \overleftrightarrow{دو}$، $\overleftrightarrow{هـب}$ قاطع لهما

أوجِدْ ق(د ص̂ هـ)



أ س̂ هـ مع جـ س̂ هـ زاويتان متكاملتان.

ق(أ س̂ هـ) = ١٨٠° − ق(جـ س̂ هـ)

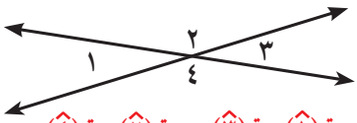
= ١٨٠° − ٦٨° = ١١٢°

أ س̂ هـ مع د ص̂ هـ زاويتان متناظرتان.

بالتالي أ س̂ هـ ≅ د ص̂ هـ. (بالتوازي والتناظرِ)

ق(د ص̂ هـ) = ١١٢°

عندما يتقاطعُ مستقيمان، يُشكِّلان زوجين من **الزوايا المتقابلةِ بالرأسِ** وتكونُ الزاويتان المتقابلتان بالرأسِ متطابقتين.



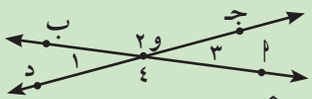
ق(١̂) = ق(٣̂)، ق(٢̂) = ق(٤̂)

الزاويتان ١̂، ٣̂ متقابلتان بالرأسِ، الزاويتان ٢̂، ٤̂ متقابلتان بالرأسِ أيضًا.

مثالٌ (٣)

يتقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{جـد}$ في و.

استخدِمِ الشكلَ المعطى لتجدَ ق(٣̂)، (٢̂).



ق(١̂) = ٢٢°، ق(٤̂) = ١٥٨°

ق(٣̂) = ق(١̂)، بالتقابلِ بالرأسِ

إذًا ق(٣̂) = ٢٢°

الزاويتان (١̂)، (٢̂) متكاملتان.

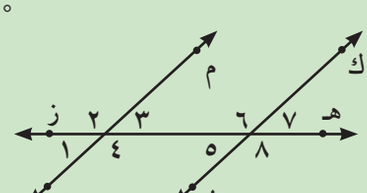
بالتالي ق(٢̂) = ١٨٠° − ٢٢°

= ١٥٨°

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ ك ل $\overleftrightarrow{} \parallel$ م ن $\overleftrightarrow{}$.

هـ ز $\overleftrightarrow{}$ قاطعٌ لهما.



أوجِدْ قياسَ الزوايا التاليةِ إذا كانَ ق(٢̂) = ١٤٦°.

(أ) ق(٤̂) (ب) ق(٦̂) (جـ) ق(٥̂) (د) ق(٨̂)

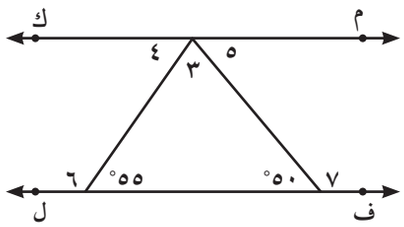
تحقَّقْ من فهمِك

١ صِفْ موقفًا تكونُ فيه الزوايا الداخليّةُ المتبادلةُ الناتجةُ من قاطعٍ غيرَ متطابقةٍ.

٢ ماذا يوحي لك تعبيرُ «متوازٍ» حولَ البعدِ بينَ المستقيماتِ المتوازيةِ؟

٣ لنفترِضْ أنّ قاطعًا متعامدًا مع مستقيمين متوازيين. ما قياساتُ الزوايا الداخليّةِ والخارجيّةِ كلِّها؟ وضِّحْ إجابتَك.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-١)



$\overleftrightarrow{ك م}$ // $\overleftrightarrow{ل ف}$، أوجِدْ قياسَ كلٍّ من الزوايا المرقَّمةِ في الشكلِ.

.....

افهمْ

١ ما نوعُ المضلّعِ الموضَّحِ في الشكلِ؟ .....

٢ يتقاطعُ ضلعان من المضلّعِ مع المستقيمين المتوازيين، عند مدِّ كلٍّ من هذين الضلعين ينتج مستقيمان يسميان: .....

(أ) قاطعان (ب) محوران

خطِّطْ

٣ ما مجموعُ قياسِ زوايا المثلّثِ؟ .....

٤ ما العلاقةُ بينَ قياسِ كلِّ زاويتين داخليّتين متبادلتين؟ .....

٥ اذكرْ زاويةً داخليّةً متبادلةً مع الزاويةِ التي قياسُها ٥٥°، وزاويةً أخرى مع الزاويةِ التي قياسُها ٥٠°. .....

٦ ما العلاقةُ بينَ قياسِ الزاويتين المتكاملتين؟ .....

٧ اكتبْ زاويةً مكمِّلةً للزاويةِ التي قياسُها ٥٥°، وزاويةً مكمِّلةً للزاويةِ التي قياسُها ٥٠°. .....

حُلَّ

٨ اكتبْ كلٍّ من:

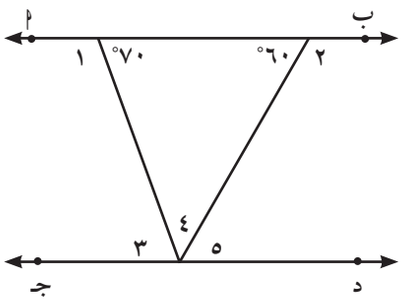
(أ) ∠(٣) ..... (ب) ∠(٤) ..... (جـ) ∠(٥) .....

(د) ∠(٦) ..... (هـ) ∠(٧) .....

تحقَّقْ

٩ ما الطريقةُ الأخرى لإيجادِ قياسِ ٣؟ .....

حُلَّ مسألةً أخرى



١٠ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$، أوجِدْ قياسَ كلٍّ من الزوايا المرقَّمةِ في الشكلِ المقابِلِ.

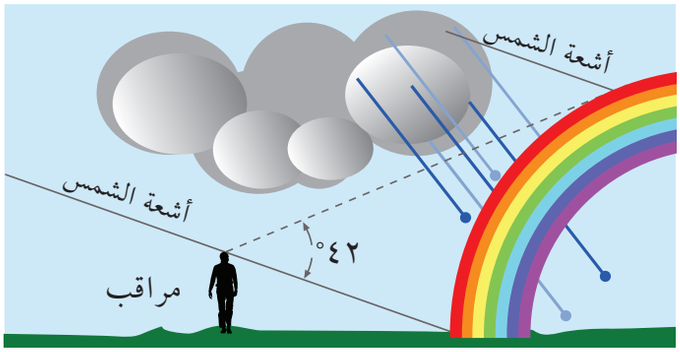
.....

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **المجلّةُ**: عندما ترى قوسَ القزحِ، تكونُ الشمسُ وراءَكَ، والمطرُ أمامَك. تُشكِّلُ النقاطُ على الجزءِ الأحمرِ من قوسِ القزحِ مع أشعّةِ الشمسِ زاويةً قياسُها ٤٢°.

استخدِمْ كلماتٍ مثلَ «متوازيةٌ، قاطعٌ، زوايا داخليّةٌ متبادلةٌ» كي تصفَ الشكلَ.



.....

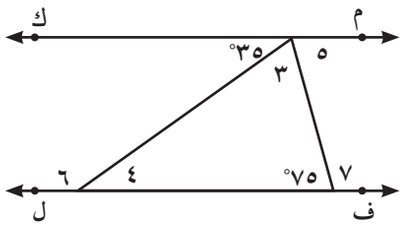
٢ **التواصلُ**: إذا كانَ مستقيمان متعامدين على المستقيمِ نفسِه، فما العلاقةُ بينَ هذين المستقيمين؟ وضِّحْ إجابتَك. .....

.....

.....

٣ **الهندسةُ**: $\overleftrightarrow{كم}$ // $\overleftrightarrow{لف}$، أوجِدْ مجموعَ قياساتِ زوايا المثلّثِ. ما علاقةُ ناتجِ الجمعِ هذا بالزاويةِ المستقيمةِ؟ .....

.....



إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٢–٥

الواجهاتُ ثلاثيّةُ الأبعادِ

3–D Views

◄ صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ عن الأشكالِ ثنائيّةِ الأبعادِ. والآن ستتعلّمُ كيف تُصوِّرُ الأشكالَ ثلاثيّةَ الأبعادِ. ►

سوف تتعلّمُ

- تمثيلَ الأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ في رسمٍ.

من الاستخداماتِ

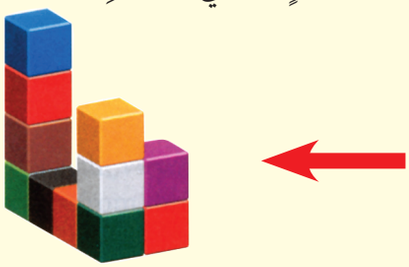
- يستخدمُ النحّاتون مخطَّطاتٍ أوّليّةً لوضعِ تصاميمَ لمنحوتاتِهم ثلاثيّةِ الأبعادِ.

استكشِفْ الواجهاتُ ثلاثيّةُ الأبعادِ

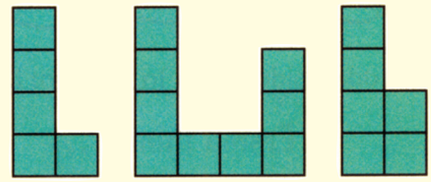
السنتيمترُ المكعّبُ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** ١١ مكعّبًا

تخيَّلْ أنّك فنّانٌ يصنعُ مجسَّماتٍ من المكعّباتِ. قبلَ صنعِ المجسَّماتِ تصنعُ مخطَّطاتٍ أوّليّةً لها. ترجِمْ فكرتَك من خلالِ وضعِ مخطَّطِه وذلك بتشكيلِ

(١) ٣ واجهاتٍ: أماميّةٍ، جانبيّةٍ يمنى، علويّةٍ أو (٢) مخطَّطٍ أحاديٍّ للقاعدةِ.



مجسَّمٌ



واجهةٌ أماميّةٌ — الواجهةُ الجانبيّةُ اليسرى — واجهةٌ علويّةٌ

تُبيِّنُ الرسوماتُ الطريقتين الممكنتين لوضعِ تصميمٍ لمجسَّمٍ وكيفيّةِ صنعِه.

مجسَّمٌ

مخطَّطُ أحادي القاعدةِ

١ ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ مجسَّماتٍ مختلفةٍ يجبُ أن تكونَ المربّعاتُ مرقّمةً بأعدادٍ مجموعُها يُساوي ١١.

٢ باستخدامِ مخطَّطِ القاعدةِ، ارسمْ ٣ واجهاتٍ لمجسَّمِك.

٣ اصنعْ مجسَّمَك استنادًا إلى المخطَّطِ الذي وضعْتَه.

٤ اصنعْ مجسَّمَ أحدِ أعضاءِ مجموعتِك استنادًا إلى المخطَّطِ الذي وضعْتَه.

٥ هل صنعَ زميلُك مجسَّمَك بشكلٍ صحيحٍ؟ هل صنعْتَ أنت مجسَّمَه بشكلٍ صحيحٍ؟

٦ إذا أردْتَ صنعَ مجسَّمٍ ارتفاعُه ٦ أمتارٍ، فلمَ ستُترجِمُ فكرتَك من خلالِ وضعِ تصميمٍ أوّليٍّ للمجسَّمِ بدلًا من صنعِه مباشرةً؟

٧ ناقِشْ بعضَ الطرائقِ الأخرى لوضعِ تصميمٍ لأشياءَ ثلاثيّةِ الأبعادِ من خلالِ استخدامِ المخطَّطاتِ.

تعلَّمْ — الواجهاتُ لمجسماتٍ ثلاثيّةِ الأبعادِ

عندما تُريدُ أن تتصوّرَ مجسَّمًا ثلاثيَّ الأبعادِ، كوِّنْ مخطَّطًا لمساعدتِك. وبالنسبةِ إلى الأشكالِ المؤلَّفةِ من مكعّباتٍ، يُمكِنُك رسمُ مخطَّطِ القاعدةِ لتوضيحِ ارتفاعِ المجموعاتِ المختلِفةِ من المكعّباتِ. ويُمكِنُك تمثيلُ مجسَّمٍ ثلاثيِّ الأبعادِ برسمِ كلٍّ من الواجهاتِ الجانبيّةِ اليمنى، والأماميّةِ، والعلويّةِ.

مثالٌ (١)

ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ.

الواجهةُ الجانبيّةُ اليمنى — الواجهةُ الأماميّةُ

لدينا عمودان ارتفاعُ كلٍّ منهما ٣ مكعّباتٍ

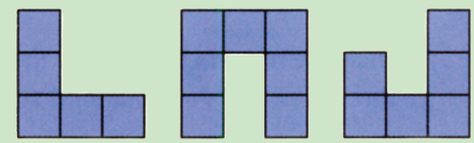
لدينا عمودان ارتفاعُ كلٍّ منهما مكعّبان

لدينا عمودٌ واحدٌ ارتفاعُه مكعّبٌ واحدٌ

يُبيِّنُ مخطَّطُ مجسَّمٍ ثلاثيِّ الأبعادِ من الواجهاتِ الجانبيّةِ اليمنى، والأماميّةِ، والعلويّةِ كيف يبدو المجسَّمُ من واجهاتٍ مختلِفةٍ.

مثالٌ (٢)

ارسمْ كلًّا من الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى، والواجهةِ الأماميّةِ، والواجهةِ العلويّةِ للمجسَّمِ ثلاثيِّ الأبعادِ.



في الواجهةِ الأماميّةِ ٢ مجموعةٍ من ٣ مكعّباتٍ

في الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى مجموعةٌ واحدةٌ من ٣ مكعّباتٍ

لدينا ٤ مجموعاتٍ في كلٍّ منها مكعّبٌ واحدٌ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ استخدِمِ المجسَّمَ المبيَّنَ إلى اليسارِ لتقومَ بما يلي:

(أ) ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ.

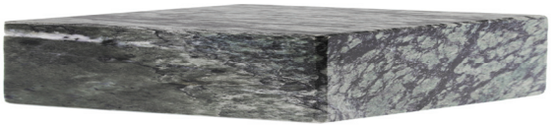
(ب) ارسمِ المجسَّمَ كما يبدو من الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى.

(جـ) ارسمِ المجسَّمَ كما تراه من الواجهةِ الأماميّةِ.

(د) ارسمِ المخطَّطَ كما تراه من الواجهةِ العلويّةِ.

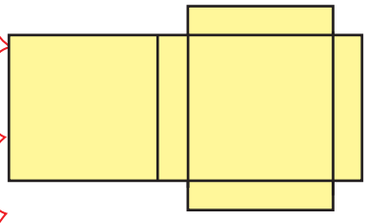
ما رأيُك؟

ارسمْ شبكةً لحجرِ الرخامِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



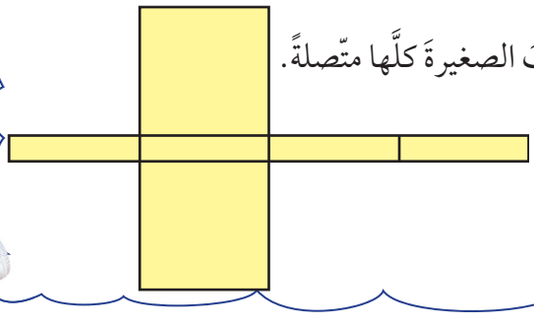
عمرُ يُفكِّرُ...

سأفتحُ تصميمَ الحجرِ مثلَ علبةِ الفطائرِ.



كريمٌ يُفكِّرُ...

سأتركُ الجوانبَ الصغيرةَ كلَّها متّصلةً.



فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

المخطَّطُ الذي يُوضِّحُ صورةَ شكلٍ ثلاثيِّ الأبعادِ كما لو كانَ غيرَ مطويٍّ يُسمَّى شبكةً.

ما رأيُك؟

١ هل يُمكِنُك صنعُ شبكةٍ لأيِّ علبةٍ أوجهُها مستطيلةُ الشكلِ؟ وضِّحْ ذلك.

٢ هل للعلبةِ ذاتِ الأوجهِ المستطيلةِ الشكلِ شبكةٌ وحيدةٌ؟ وضِّحْ ذلك.

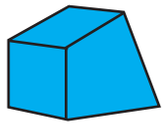
تحقَّقْ من فهمِك

١ إذا كان لديك مخطَّطاتُ الواجهتين الأماميّةِ والعلويّةِ فقط، فهل يُمكِنُك صناعةُ المجسَّمِ المطلوبِ؟

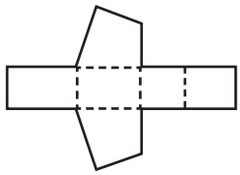
٢ إذا كانَ لديك مخطَّطُ قاعدةٍ غيرُ مرقَّمٍ، فهل يُمكِنُك صنعُ المجسَّمِ المطلوبِ؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٢)

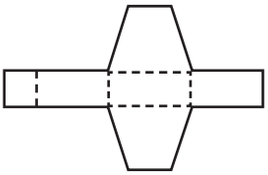
أيُّ شبكةٍ تُمثِّلُ المجسَّمَ ثلاثيَّ الأبعادِ المبيَّنَ أدناه؟



(أ)



(ب)



افهمْ

١ ما عددُ أوجهِ المجسَّمِ ثلاثيِّ الأبعادِ التي تستطيعُ رؤيتَها؟ .....

٢ ما المضلّعاتُ التي تُشكِّلُها تلك الأوجهُ في المجسَّمِ؟ .....

٣ ما عددُ الأوجهِ التي تستطيعُ رؤيتَها في كلِّ شبكةٍ؟ .....

٤ ما المضلّعاتُ التي تُشكِّلُها تلك الأوجهُ في الشبكةِ؟ .....

خطِّطْ

٥ ما أوجهُ الشبهِ بينَ الشبكتينِ الموضَّحتينِ؟ .....

٦ ما أوجهُ الاختلافِ بينَ الشبكتينِ الموضَّحتينِ؟ .....

حُلَّ

٧ اخترْ أحدَ أوجهِ الاختلافِ بينَ الشبكتينِ، وقارِنْ بينَه وبينَ خصائصِ المجسَّمِ. أيُّ الشبكتينِ تُمثِّلُ المجسَّمَ؟ .....

.....

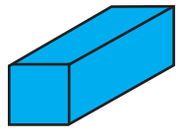
تحقَّقْ

٨ أيُّ الاختلافاتِ بينَ الشبكتينِ هو الأسهلُ في الاستخدامِ والمقارنةِ بالمجسَّمِ؟ وضِّحْ إجابتَك. .....

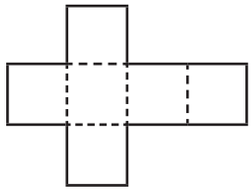
.....

حُلَّ مسألةً أخرى

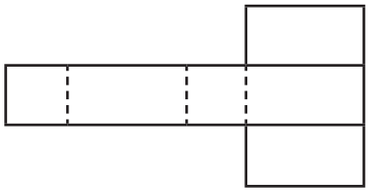
٩ أيُّ الشبكتينِ تُمثِّلُ المجسَّمَ الموضَّحَ أدناه؟ .....



(أ)

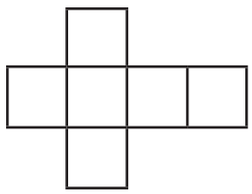


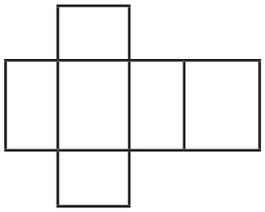
(ب)



حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

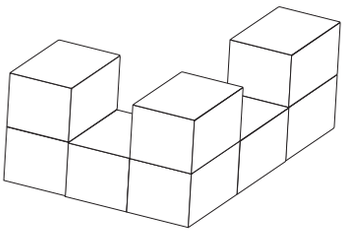
١ **الأنماطُ**: كوِّنْ مجسَّمًا بلصقِ أجزاءِ الشبكةِ الموضَّحةِ أدناه. ما المجسَّمُ الذي حصلْتَ عليه؟





.....

٢ ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ المقابلِ.



.....

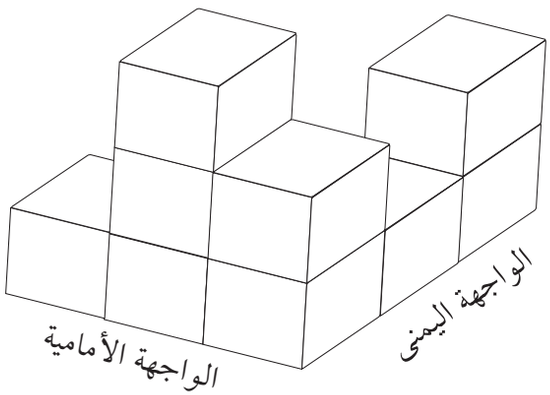
.....

.....

٣ ارسمِ الواجهةَ الجانبيّةَ اليمنى لهذا المجسَّمِ.

.....

.....



إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

الوَحدةُ الخامسةُ (ب)

مساحةُ سطحِ المجسَّمِ وحجمُ المجسَّمِ
Surface area and Volume of Solids

تاريخ خدمة توصيل الطلبات

في عامِ ١٩٠٧ انتعشَتِ الأعمالُ التجاريّةُ في أميركا، وكانَ القليلُ من الناسِ من لديه تلفونٌ أو سيّارةٌ، فكيف كانَتِ الرسائلُ والطرودُ تُسلَّمُ للمرسلِ إليه؟

لمعَتْ فكرةٌ في ذهنِ مغامرٍ شابٍّ يُدعى جيم كاسي jim casey عمرُه ١٩ عامًا من ولايةِ سياتل seattle، فاقترضَ مبلغَ مئةِ دولارٍ، وكوّنَ شركةَ أميريكان مسنجر American messenger Company، واجتذَبَ عددًا من الشبابِ (دونَ العشرين عامًا) للعملِ فيها.

حقّقَتْ شركةُ جيم نجاحًا كبيرًا بسببِ القيمِ التقليديّةِ التي أخذَ بها: إرضاءِ الزبائنِ، والدقّةِ في العملِ، وعدمِ التأخيرِ في التسليم، والرسومِ المنخفضةِ مقابلَ الخدمةِ، وأخذَ جيم بفكرةٍ مبتكرةٍ لتعزيزِ ثقةِ الزبائنِ، فكانَتْ طرودُ العناوينِ المتجاورةِ توضَعُ في مركبةِ تسليمٍ واحدةٍ، ممّا وفّرَ الوقتَ والمالَ.

وخلالَ ثلاثينيّاتِ القرنِ العشرين تغيّرَ اسمُ شركةِ جيم إلى يونيتد بارسل سرفيس United Parcel Service (UPS)، وتقومُ هذه الشركةُ حاليًّا بتسليمِ أكثرَ من ١٢ مليونَ وثيقةٍ وطردٍ، حولَ العالمِ.

١ ما الرياضيّاتُ التي يُمكِنُ أن تستخدمَها شركةُ تسليمِ طرودٍ لجعلِ التسليمِ يتمُّ بدقّةٍ ودونَ أيِّ تأخيرٍ؟

٢ لمَ تضعُ شركاتُ التسليمِ حدودًا قصوى لأبعادِ وأوزانِ الطَرودِ؟

٣-٥

المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ والأسطوانةِ

Surface Area of Prism and Cylinder

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ المساحةِ السطحيّةِ للمنشورِ والأسطوانةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مصمِّمو الديكوراتِ الداخليّةِ المساحةَ السطحيّةَ لتحديدِ كمّيّةِ الموادِّ اللازمةِ لتغطيةِ الأشياءِ المجسَّمةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

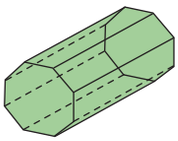
- ◄ مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ Polyhedron
- ◄ وجهٌ Face
- ◄ حرفٌ Edge
- ◄ رأسٌ Vertex
- ◄ مساحةٌ سطحيّةٌ Surface Area
- ◄ منشورٌ Prism
- ◄ قاعدةٌ Base
- ◄ أسطوانةٌ Cylinder

◄ صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ كيف توجدُ مساحةَ الأشكالِ المستويةِ كالمضلّعاتِ والدوائرِ، والآن ستتعلّمُ عن المساحةِ السطحيّةِ للأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ. ►

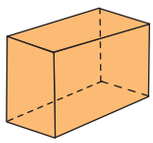
المجسَّمُ متعدِّدُ الأوجهِ هو مجسَّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ يتألّفُ من مضلّعاتٍ. يُسمّى كلُّ سطحٍ في المضلّعِ وجهًا.

حرفٌ متعدِّدُ الأوجهِ هو الحافّةُ التي يلتقي عندها وجهان في المجسَّمِ.

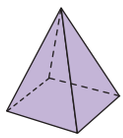
رأسٌ متعدِّدُ الأوجهِ هو النقطةُ التي تتقاطعُ عندَها ٣ أوجهٍ أو أكثرَ من المجسَّمِ.



١٠ أوجهٍ:
٢ ثمانيّان
٨ مستطيلاتٍ



٦ أوجهٍ:
٦ مستطيلاتٍ



٥ أوجهٍ:
٤ مثلّثاتٍ
١ مربّعٍ

المساحةُ السطحيّةُ لمتعدِّدِ الأوجهِ هي مجموعُ مساحاتِ الأوجهِ كلِّها.

استكشِفْ — المناشيرُ

مساحاتٌ مختلِفةٌ

الأدواتُ المستخدَمةُ: أوراقٌ مستطيلةُ الشكلِ أبعادُها ٢٤ سم، ٢٨ سم، شريطٌ لاصقٌ، مقصٌّ

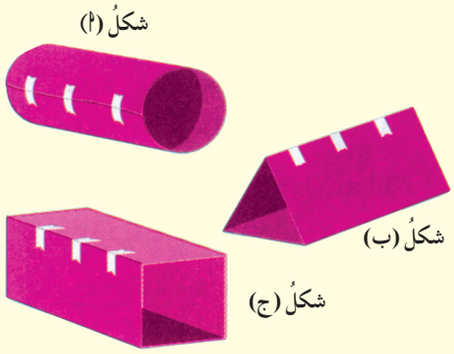
١ أوجِدْ مساحةَ إحدى الأوراقِ.

٢ اصنعْ مجسَّماتٍ (ثلاثيّةَ الأبعادِ) باستخدامِ ورقةٍ لكلٍّ منها.

الشكلُ (أ): لُفَّ الورقةَ بحيث تتمكّنُ من لصقِ الأحرفِ المتقابلةِ.

الشكلُ (ب): اطوِ الورقةَ إلى ٣ أثلاثٍ متطابقةٍ وألصِقِ الأحرفَ.

الشكلُ (ج): اطوِ الورقةَ إلى ٤ أرباعٍ متطابقةٍ وألصقِ الأحرفَ.



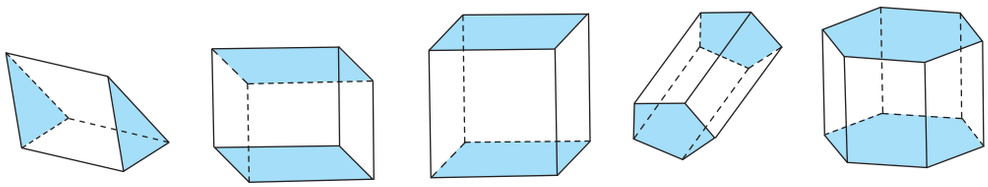
٣ هل المساحةُ السطحيّةُ لكلٍّ من هذه المجسَّماتِ أكبرُ من مساحةِ الورقةِ الأصليّةِ أو أصغرُ منها أو مساويةٌ لها؟ وضِّحْ إجابتَك.

٤ ما الأشكالُ الإضافيّةُ اللازمةُ لإكمالِ أسطحِ كلِّ مجسَّمٍ؟ ارسمْ هذه الأشكالَ، وأوجِدْ مساحاتِها، ثمّ ألصِقْ كلًّا من الأشكالِ على المجسَّمِ الملائمِ لها.

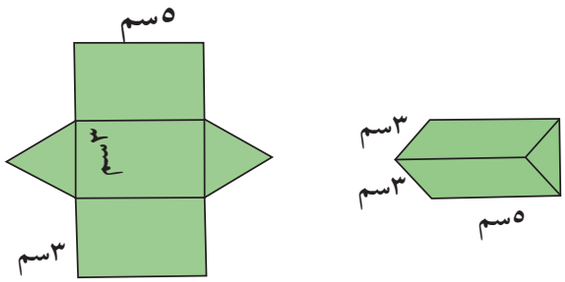
٥ رتِّبِ المجسَّماتِ الثلاثةَ من الأصغرِ إلى الأكبرِ حسبَ مساحاتِها السطحيّةِ الكلّيّةِ. وضِّحْ طريقةَ تفكيرِك.

تعلَّمْ — المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ والأسطوانةِ

المنشورُ: هو مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ له وجهان متطابقان وهما عبارةٌ عن مضلّعين متوازيين، ويُسمّى كلُّ وجهٍ متطابقٍ ومتوازٍ من هذين الوجهين **قاعدةً**.



تُساعِدُ شبكةُ المجسَّمِ على إيجادِ المساحةِ السطحيّةِ لأنّها تُبيِّنُ الأوجهَ كلَّها على شكلِ مضلّعاتٍ مستويةٍ.

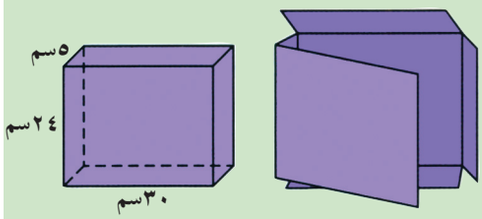


فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

المنشورُ القائمُ هو منشورٌ حروفُه الجانبيّةُ متعامدةٌ مع قاعدتيه.

أمثلةٌ

١ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ القائمِ.



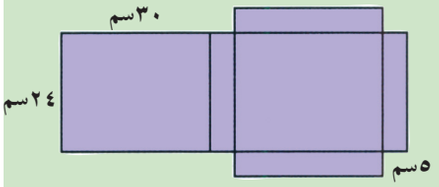
ارسم أولًا شبكة المنشور القائم، ثم اوجد مساحة كل وجه.

في المجسَّمِ ٣ أوجهٍ مستطيلةٍ مختلِفةٍ.

وجهان أبعادُهما ٣٠سم، ٢٤سم.

مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٣٠ × ٢٤

= ٧٢٠ سم^{٢}



وجهان أبعادُهما ٣٠سم، ٥سم.

مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٣٠ × ٥

= ١٥٠سم^{٢}

وجهان أبعادُهما ٢٤سم، ٥سم.

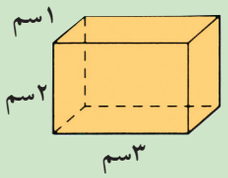
مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٢٤ × ٥ = ١٢٠سم^{٢}

المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ القائمِ = ٢(٧٢٠ + ١٥٠ + ١٢٠)

= ١٩٨٠سم^{٢}.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ القائمِ الذي أبعادُه: ١سم، ٢سم، ٣سم.

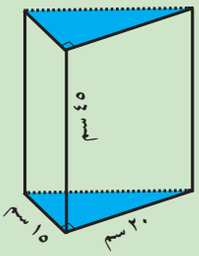


الترابطُ والتداخلُ بالمهنِ

لدى الشركاتِ المعنيّةِ بتنظيمِ المسارحِ الكبرى طاقمٌ من العمّالِ المتخصِّصين في تجهيزِ الديكورِ، وهم يعملون في مجالِ النجارةِ، والكهرباءِ، وغيرِها من الحرفِ الأخرى لتصميمِ التجهيزاتِ اللازمةِ للأداءِ المسرحيِّ.

٢ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لمنشورٍ قاعدتُه مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ، حيث أطوالُ أضلاعِ القائمةِ ٢٠ سم، ١٥ سم، وارتفاعُ هذا المنشورِ ٤٥ سم.

الحلُّ: نبدأُ أوّلًا برسمِ شبكةِ هذا المنشورِ ثمّ مساحةِ كلِّ وجهٍ.

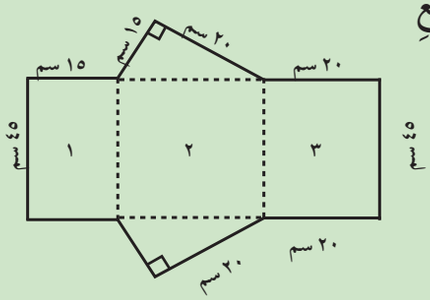


– مساحةُ المثلّثين: $\frac{٢٠ \times ١٥}{٢} \times ٢ = ٣٠٠$ سم^٢.

– مساحةُ الوجهِ ١: $١٥ \times ٤٥ = ٦٧٥$ سم^٢

– مساحةُ الوجهِ ٣: $٢٠ \times ٤٥ = ٩٠٠$ سم^٢

لإيجادِ مساحةِ الوجهِ ٢ نحتاجُ إلى طولِ الضلعِ الناقصِ



فنستخدمُ نظريّةَ فيثاغورث:

$٢٠^٢ + ١٥^٢ = ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥$

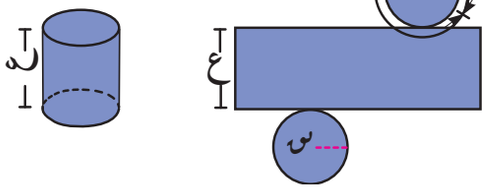
وبالتالي الضلعُ الناقصُ يُساوي ٢٥ سم.

– مساحةُ الوجهِ ٢: $٢٥ \times ٤٥ = ١١٢٥$ سم^٢

المساحةُ السطحيّةُ $= ٣٠٠ + ٦٧٥ + ٩٠٠ + ١١٢٥ = ٣٠٠٠$

المساحةُ السطحيّةُ لهذا المنشورِ ٣٠٠٠ سم^٢

الأسطوانةُ هي مجسَّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ له قاعدتان دائريّتان متطابقتان ومتوازيتان.



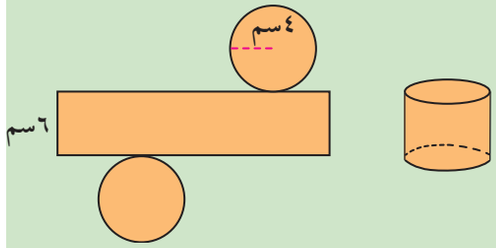
لاحِظْ أنّ طولَ المستطيلِ هو محيطُ الدائرةِ وعرضُ المستطيلِ هو ارتفاعُ الأسطوانةِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) أوجِدْ مساحةَ كلِّ دائرةٍ في الأسطوانةِ المبيَّنةِ إلى اليسارِ.

(ب) أوجِدِ المساحةَ الجانبيّةَ للأسطوانةِ.

(جـ) أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للأسطوانةِ.



تحقَّقْ من فهمِك

١ كم بعدًا طوليًّا يلزمُ لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ للمنشورِ؟ وللأسطوانةِ؟ ارسمْ مخطَّطًا تُوضِّحُ فيه ذلك.

٢ كم عددُ الأوجهِ: في أيِّ منشورٍ خماسيِّ القاعدةِ؟ وفي أيِّ منشورٍ سداسيِّ القاعدةِ؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٣)

تصنعُ شركةُ حبوبٍ غذائيّةٍ علبةً متوسِّطةَ الحجمِ بمضاعَفةِ أبعادِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ أبعادُها ١٢ سم، ٨ سم، ٢ سم. ما مساحةُ الورقِ المقوّى الإضافيِّ اللازمِ لصنعِ علبةٍ متوسِّطةِ الحجمِ؟

افهمْ

١ ما أبعادُ العلبةِ صغيرةِ الحجمِ؟ .....

٢ بكم تزيدُ أبعادُ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ عن أبعادِ العلبةِ صغيرةِ الحجمِ؟ .....

.....

خطِّطْ

٣ ما أبعادُ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ؟ .....

٤ كيف توجِدُ مساحةَ العلبةِ السطحيّةَ؟ .....

٥ ارسمْ شبكةَ كلٍّ من العلبتين، وسَمِّ الأبعادَ. .....

حُلَّ

٦ ما مساحةُ الورقِ المقوّى اللازمِ لصنعِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ؟

.....

٧ ما مساحةُ الورقِ المقوّى اللازمِ لصنعِ علبةٍ متوسِّطةِ الحجمِ؟

.....

٨ كم سنتيمترًا مربّعًا إضافيًّا من الورقِ المقوّى يلزمُ لصنعِ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ؟

.....

تحقَّقْ

٩ كيف تُقارِنُ العلاقةَ بينَ أبعادِ العلبتين ومساحتِهما السطحيّةِ. ما العلاقةُ بينَهما بعدَ تغييرِ الأبعادِ بمقدارِ الضعفِ؟

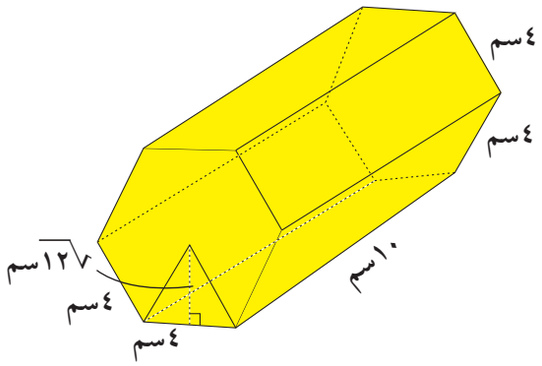
.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ تصنعُ الشركةُ علبةً متوسِّطةَ الحجمِ للبسكويتِ المملَّحِ بحيث يكونُ كلُّ بعدٍ من أبعادِها ٣ أمثالِ أبعادِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ وهي ٤ دسم، ٣ دسم، ١ دسم. ما مساحةُ الورقِ المقوّى الإضافيِّ اللازمِ لصنعِ علبةِ البسكويتِ؟

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ



١ . **الهندسةُ**: أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ سداسيِّ القاعدةِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

.....

.....

.....

٢ **الحسُّ العدديُّ**: أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لأسطوانةٍ ارتفاعُها ٣ أمتارٍ وطولُ نصفِ قطرِها ١ م، وأوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لأسطوانةٍ ارتفاعُها ١ م وطولُ نصفِ قطرِها ٣م. كيف تُؤثِّرُ الصيغةُ π **س**^{٢} على هاتين النتيجتين؟

.....

.....

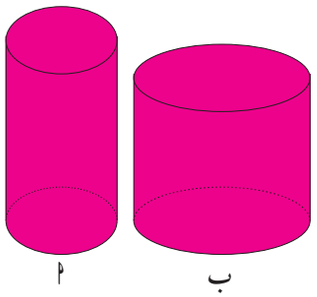
.....

٣ **التفكيرُ الرياضيُّ**: اذكرِ الصيغةَ المختصَرةَ المستخدَمةَ لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ لكلٍّ من:

(أ) المكعّبُ .....

(ب) شبهُ المكعّبِ .....

٤ طولُ قطرِ الأسطوانةِ ﺃ يُساوي نصفَ طولِ قطرِ الأسطوانةِ ب. علمًا بأنّ ارتفاعَ الأسطوانةِ ﺃ ضعفُ ارتفاعِ الأسطوانةِ ب.



.... (أ) **التواصلُ**: خمِّنْ أيَّهما سيكونُ له المساحةُ الكلّيّةُ الأكبرُ: الأسطوانةُ ﺃ أم الأسطوانةُ ب؟ وضِّحْ إجابتَك.

.....

.....

(ب) **التفكيرُ الناقدُ**: في رأيِك، أيُّهما سعتُه أكبرُ: الأسطوانةُ ﺃ أم الأسطوانةُ ب؟ ولماذا؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٤-٥

حجمُ المنشورِ والأسطوانةِ

Volume of Prism and Cylinder

◄ صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ كيف توجِدُ حجمَ المنشورِ القائمِ، والآن ستتعلّمُ كيف توجِدُ حجمَ المنشورِ بوجهٍ عامٍّ والأسطوانةِ. ►

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ حجمِ المنشورِ والأسطوانةِ.

من الاستخدامات

- تكونُ الطرودُ المرسَلةُ أحيانًا على شكلِ منشورٍ أو أسطوانةٍ، ويُحدِّدُ حجمُ الطردِ مقدارَ الحيّزِ اللازمِ لشحنِه.

هل تعلمُ؟

رسمُ ملصَقٍ إعلانيٍّ مساحتُه حوالى ٢٠٠٠ م^٢ في مدينةِ سينداي في اليابانِ عامَ ١٩٩١، وقد دخلَ مجموعةَ غينيس للأرقامِ القياسيّةِ العالميّةِ.

استكشِفْ: حجمُ المنشورِ وحجمُ الأسطوانةِ

المساحةُ السطحيّةُ نفسُها

الأدواتُ المستخدَمةُ: أوراقٌ مستطيلةُ الشكلِ أبعادها ٢٤ سم، ٢٨ سم، شريطٌ لاصقٌ، مقصٌّ.

١ اصنعْ مجسّمين (ثلاثيّي الأبعاد) باستخدامِ ورقةٍ لكلٍّ منهما.

الشكلُ (أ): لُفَّ الورقةَ بحيث تتمكّنُ من لصقِ الحرفين المتقابلين.

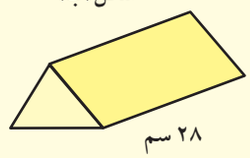
الشكلُ (ب): اطوِ الورقةَ إلى أثلاثٍ متطابقةٍ وألصقِ الحرفين المتقابلين.

٢ الشكلُ (أ): أسطوانةٌ قاعدتُها دائرةٌ، محيطُها ٢٢ سم.

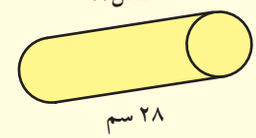
(أ) استخدمِ القانونَ: المحيطُ = $٢ \times \pi \times$ *ن* لإيجادِ طولِ نصفِ قاعدةِ الأسطوانةِ.

(ب) استخدمِ القانونَ: المساحةُ = $\pi \times$ *ن*^{٢} لإيجادِ مساحةِ القاعدةِ.

شكل(ب)



شكل(أ)



٣ الشكلُ (ب): منشورٌ قائمٌ قاعدتُه مثلّثٌ متطابقُ الأضلاعِ طولُ محيطِه ٢٢ سم.

(أ) استخدمِ القانونَ: المساحةُ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^٢ ، لإيجادِ مساحةِ مثلثٍ متطابقِ الأضلاعِ طولُ ضلعِه ل.

(ب) قارِنْ بين مساحتي قاعدتي المجسّمين.

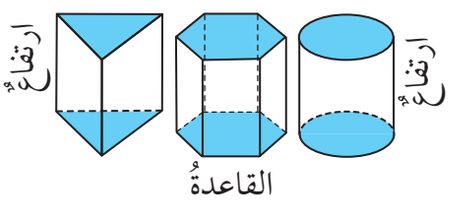
٤ للمجسّمين الارتفاعُ نفسُه (٢٨ سم). إذا أردْنا ملءَ المجسّمين بالرملِ فأيٌّ منهما يتّسعُ لكميةٍ أكبرَ؟

تعلَّمْ — حجمُ المنشورِ والأسطوانةِ

يُمكِنُ إيجادُ حجمِ المنشورِ القائمِ باستخدامِ القانونِ التالي:

حجمُ المنشورِ القائمِ = مساحةَ القاعدةِ (م) × الارتفاعِ (ع)

$$ح = م \times ع$$



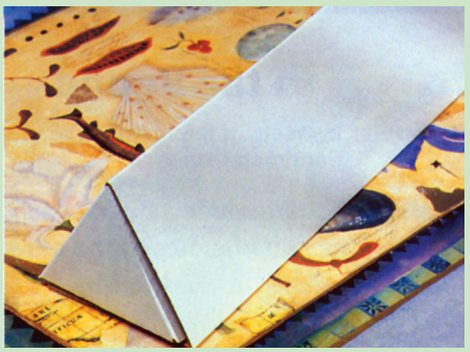
مساحةُ قاعدةِ المنشورِ ثلاثيِّ القاعدةِ = $\frac{١}{٢}$ × (ق × ع) ويُمكِنُك استخدامُ هذه الصيغةِ لإيجادِ مساحةِ مثلّثٍ.

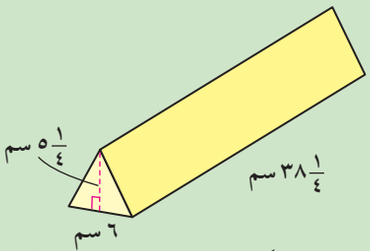
م = مساحةُ قاعدةِ المنشورِ؛ ق = طولَ ضلعِ القاعدةِ المثلّثيّةِ.

كذلك يُؤخَذُ ارتفاعان بعينِ الاعتبارِ: ارتفاعُ المثلّثِ وارتفاعُ المنشورِ.

مثالٌ (١)

يُمكِنُ إرسالُ الملصَقاتِ الإعلانيّةِ بالبريدِ في علبٍ على شكلِ منشورٍ ثلاثيِّ القاعدةِ. أوجِدْ حجمَ العلبةِ المبيَّنةِ أدناه.

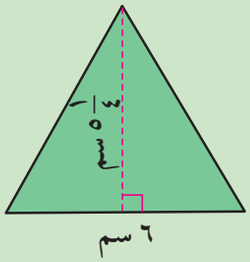




أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ المثلّثيّةِ (ق).

$$م = \frac{١}{٢} \times (ل \times ع)$$

$$م = \frac{١}{٢} \times (٦ \times ٥\frac{١}{٤}) = ١٥\frac{٣}{٤} \text{ سم}^{٢}$$



استخدِمْ ق لإيجادِ الحجمِ.

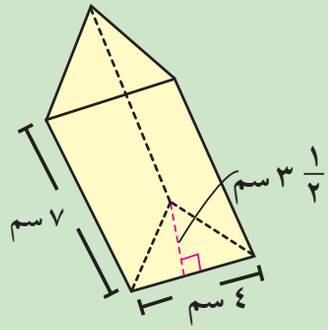
$$ح = م \times ع$$

$$ح = ١٥\frac{٣}{٤} \times ٣٨\frac{١}{٤}$$

$$ح = ١٥,٧٥ \times ٣٨,٢٥$$

$$ح = ٦٠٢,٤٣٧٥ \text{ سم}^{٣}$$

الحجمُ هو ٦٠٢,٤٣٧٥ سم^{٣}.



حاوِلْ أن تحلَّ

١ (أ) ما ارتفاعُ القاعدةِ المثلّثيّةِ؟

(ب) ما مساحةُ القاعدةِ المثلّثيّةِ؟

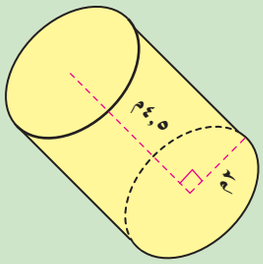
(جـ) ما حجمُ المنشورِ؟

مساحةُ قاعدةِ أيِّ أسطوانةٍ م = π س^{٢}، حيث س = طولَ نصفِ القطرِ.

بالتالي **حجمُ الأسطوانةِ ح = م × ع = (π س^{٢}) × ع.**

مثالٌ (٢)

أوجِدْ حجمَ الأسطوانةِ المبيَّنةِ إلى اليسارِ.



أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ (م).

م = π س^{٢}

م = π (٢)^{٢} ≈ ١٢,٥٦ م^{٢}

استخدِمْ م لإيجادِ الحجمِ.

ح = م × ع

ح ≈ ١٢,٥٦ × ٤,٥

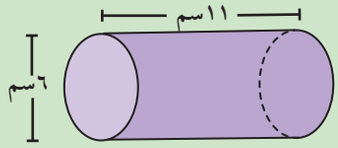
ح ≈ ٥٦,٥٢ م^{٣}

الحجمُ = ٥٦,٥٢ م^{٣} تقريبًا.

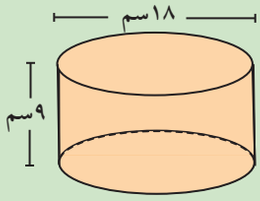
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ حجمَ كلِّ أسطوانةٍ.

(أ)



(ب)



تحقَّقْ من فهمِك

١ ارتفاعُ ٤٠ عملةً معدنيّةً يُساوي ١٠ سم وطولُ قطرِ كلِّ قطعةٍ ٢ سم. كيف توجِدُ حجمَ الرزمةِ؟

٢ ما أوجهُ التشابهِ والاختلافِ بينَ إيجادِ حجمِ منشورٍ وحجمِ أسطوانةٍ؟

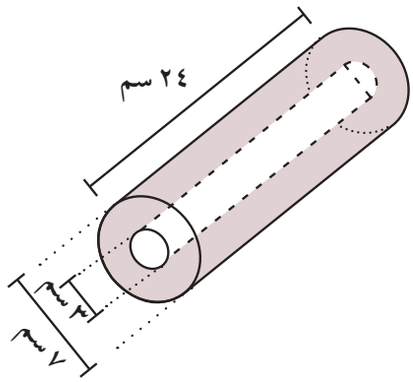
٣ اذكرْ كيف توجِدُ حجمَ منشورٍ أو أسطوانةٍ عندما يُساوي الارتفاعُ صفرًا.

٤ مستخدِمًا ما تعرفُه عن كيفيّةِ إيجادِ حجمِ منشورٍ ثلاثيِّ القاعدةِ، صِفْ كيف يُمكِنُك إيجادُ حجمِ منشورٍ سداسيِّ القاعدةِ.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٤)

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ إلى اليسارِ:



افهمْ

١ ما نوعُ المجسَّماتِ التي يتألّفُ منها الشكلُ؟

.....

٢ ما طولُ قطرِ الشكلِ الداخليِّ؟ وما طولُ قطرِ الشكلِ الخارجيِّ؟ .....

.....

٣ ما ارتفاعُ كلٍّ من الشكلين؟ .....

خطِّطْ

٤ ما طولُ نصفِ قطرِ الشكلِ الداخليِّ؟ وما طولُ نصفِ قطرِ الشكلِ الخارجيِّ؟ .....

.....

٥ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ أسطوانةٍ؟

.....

٦ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ سطحِ أسطوانةٍ؟ .....

٧ كيف يُمكِنُك إيجادُ حجمِ المنطقةِ المظلَّلةِ؟ .....

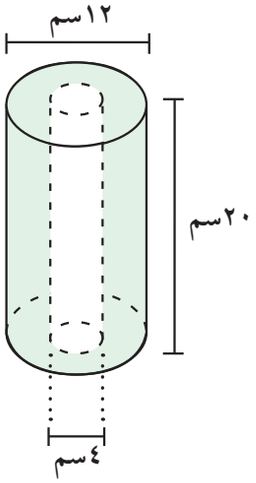
.....

حُلَّ

٨ ما حجمُ الأسطوانةِ الخارجيّةِ؟ .....

٩ ما حجمُ الأسطوانةِ الداخليّةِ؟ .....

١٠ ما حجمُ المنطقةِ المظلَّلةِ؟ .....



تحقَّقْ

١١ ما الطريقةُ الأخرى التي يُمكِنُك استخدامُها لإيجادِ حجمِ المنطقةِ المظلَّلةِ؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

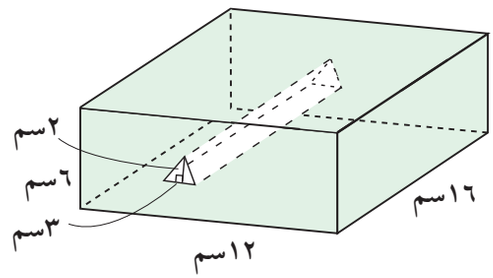
١٢ أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ.

.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

حسُّ إجراءِ العمليّاتِ: أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ أدناه.

١



.....

.....

٢ **الهندسةُ:** في إحدى المدنِ الكبرى فندقٌ أسطوانيُّ الشكلِ طولُ قطرِ قاعدتِه الدائريّةِ ٣٥ مترًا وارتفاعُه ٢٣٠ مترًا.

(أ) ما حجمُ المبنى مقرَّبًا إلى أقربِ مترٍ مكعّبٍ؟

.....

(ب) تمَّت تغطيةُ السطحِ المنحني بالزجاجِ. ما مساحةُ الزجاجِ الذي يُغطّي سطحَ الفندقِ؟

.....

٣ **المجلّةُ:** اختلطَ الأمرُ على أحدِ زملائِك حولَ الفرقِ بينَ ارتفاعِ المثلّثِ في قاعدةِ المنشورِ الثلاثيِّ القاعدةِ وارتفاعِ المنشورِ. اكتبْ توضيحًا وادعمْه بالرسوماتِ لمساعدةِ زميلِك على التمييزِ بينَ الارتفاعين.

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٥–٥

المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ والمخروطِ

Surface Area of Pyramid and Cone

سوف تتعلّمُ

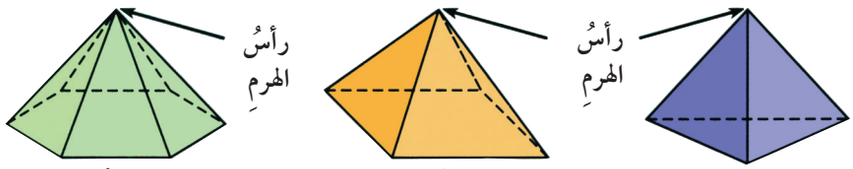
- إيجادَ المساحةِ السطحيّةِ للهرمِ والمخروطِ.

من الاستخداماتِ

- يُدرِكُ مصمِّمو النماذجِ كيف يصنعون المجسَّماتِ متعدِّدةَ الأوجهِ كالهرمِ والمخروطِ.

صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعاملْتَ مع المجسَّماتِ متعدِّدةِ الأوجهِ كالمناشيرِ؛ والآن ستتعاملُ مع نوعٍ آخرَ من المجسَّماتِ متعدِّدةِ الأوجهِ ألا وهي الأهراماتُ ◄

الهرمُ هو مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ له قاعدةٌ واحدةٌ، وأوجهُه الأخرى كلُّها مثلّثاتٌ. ويُسمّى الهرمُ بحسبِ عددِ أضلاعِ قاعدتِه.



هرمٌ ثلاثيُّ القاعدةِ — هرمٌ رباعيُّ القاعدةِ — هرمٌ سداسيُّ القاعدةِ

استكشِفْ — المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ

اصنعْ هرمًا بنفسِك!

الأدواتُ المستخدَمةُ: ورقتان أبعادُهما ٢٢، ٢٨ سم، مقصٌّ، شريطٌ لاصقٌ، مسطرةٌ

١ قُصَّ مربّعًا بعداه ٢٢ سم، ٢٢ سم من ورقةٍ.

٢ اطوِ المربّعَ عندَ كلٍّ من القطرين كلٍّ على حدةٍ.

الخطوةُ ٢

٣ اقطعْ أحدَ المثلّثاتِ التي نتجَتْ، ثمّ ألصِقِ الحوافَّ معًا لصنعِ الهرمِ.

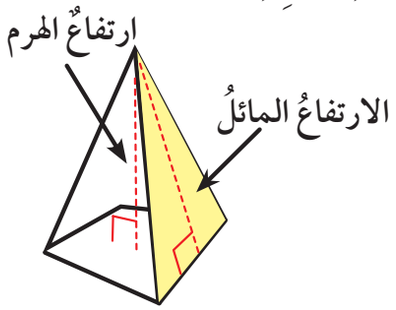
الخطوةُ ٣

٤ اقطعْ شكلًا وألصِقْه على الوجهِ غيرِ المغطّى من الهرمِ. حدِّدِ المساحةَ السطحيّةَ للهرمِ.

تعلَّمْ — المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ والمخروطِ

ارتفاعُ الهرمِ هو البعدُ العموديُّ من رأسِ الهرمِ إلى القاعدةِ المقابلةِ.

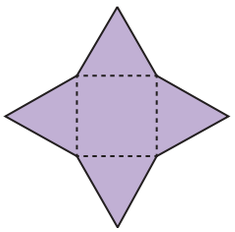
الارتفاعُ المائلُ هو البعدُ العموديُّ من رأسِ الهرمِ إلى أحدِ أحرفِ قاعدةِ الهرمِ المقابلةِ.

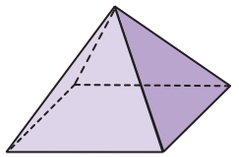


المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- هرمٌ Pyramid
- ارتفاعٌ Height
- ارتفاعٌ مائلٌ Slant Height
- رأسُ الهرمِ Edge of Pyramid

يُمكِنُك إيجادُ المساحةِ السطحيّةِ لهرمٍ باستخدامِ شبكتِه.





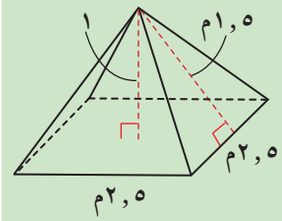
لاحِظْ في الهرمِ رباعيِّ القاعدةِ إلى اليسارِ أنّ الارتفاعَ المائلَ هو ارتفاعُ الوجهِ المثلّثيِّ. تُمثِّلُ قاعدةُ كلِّ وجهٍ مثلّثيٍّ أحدَ أضلاعِ المربّعِ.

قانونُ المساحةِ السطحيّةِ للهرمِ

المساحةُ السطحيّةِ للهرمِ
= مساحةَ القاعدةِ + مساحةَ الأوجهِ المثلثيّةِ الأربعةِ.
= مساحةَ القاعدةِ + ٤ × مساحةُ وجهِ المثلثِ.
= مساحةَ القاعدةِ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ق × ع
= مساحةَ القاعدةِ + ٢ × ق × ع

مثالٌ (١)

يُستخدَمُ في إحدى المسرحيّاتِ التي تدورُ أحداثُ قصّتِها في مصرَ هرمٌ رباعيُّ القاعدةِ. ومساحةُ قاعدتِه ٦,٢٥ م^٢. بما أنّ ارتفاعَه المائلَ ١,٥ م، أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لهذا الهرمِ.



بما أنّ قاعدةَ الهرمِ هي مربّعٌ مساحتُه ٦,٢٥ م^٢.

إذًا طولُ ضلعِ المربّعِ = $\sqrt{٦,٢٥}$ = ٢,٥ م

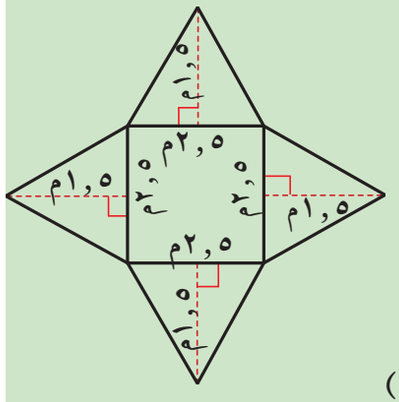
يتضمّنُ الهرمُ ٤ أوجهٍ مثلّثيّةٍ متطابقة.

ع^٢

المساحةُ = $\frac{١}{٢}$ ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × (٢,٥ × ١,٥) = ١,٨٧٥ م^٢

المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ = ٦,٢٥ + ٤ × ١,٨٧٥

= ١٣,٧٥ م^٢



حاوِلْ أن تحلَّ

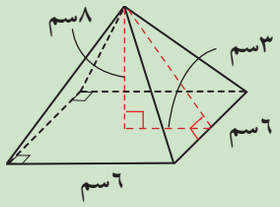
١ (أ) ما نوعُ الهرمِ المبيَّنِ في الشكلِ؟

(ب) ما ارتفاعُ هذا الهرمِ؟

(جـ) استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث (جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢) لإيجادِ الارتفاعِ المائلِ للهرمِ.

(د) ما مساحةُ الوجهِ المثلّثيِّ؟

(هـ) ما المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ؟



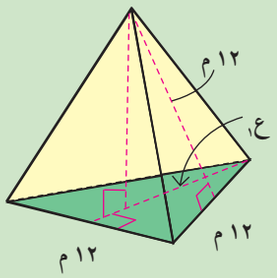
تذكَّرْ

يُمكِنُ استخدامُ نظريّةِ فيثاغورث (جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢) لتحديدِ طولِ ضلعٍ في مثلّثٍ قائمٍ؛ أ، ب هما ضلعا الزاويةِ القائمةِ، جـ هو الوترُ.

للهرمِ ثلاثيِّ القاعدةِ أربعةُ أوجهٍ مثلّثيّةٍ. ويُشكِّلُ أحدُهما قاعدةَ الهرمِ. أمّا الارتفاعُ المائلُ للهرمِ فهُو ارتفاعُ الوجهِ المثلّثيِّ الذي لا يُمثِّلُ قاعدةَ الهرمِ.

مثالٌ (٢)

في الشكلِ هرمٌ ثلاثيُّ القاعدةِ قاعدتُه على شكلِ مثلّثٍ متطابقِ الأضلاعِ طولُ ضلعِه ١٢م والارتفاعُ المائلُ للهرمِ يساوي ١٢م. ما المساحةُ السطحيّةُ لهذا الهرمِ؟



أوّلًا: مساحةَ القاعدةِ.

استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث لإيجادِ ع١.

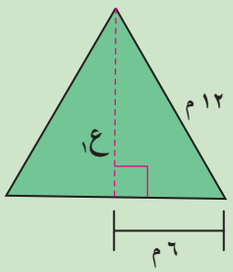
$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$

$ع_{١}^{٢} + ٦^{٢} = ١٢^{٢}$

$ع_{١}^{٢} = ١٢^{٢} - ٦^{٢}$

$ع_{١}^{٢} = ١٠٨$

$ع_{١} \approx ١٠,٤$ م



بالتالي مساحةُ قاعدةِ الهرمِ $(م_{١}) = \frac{١}{٢}$ ق × ع١

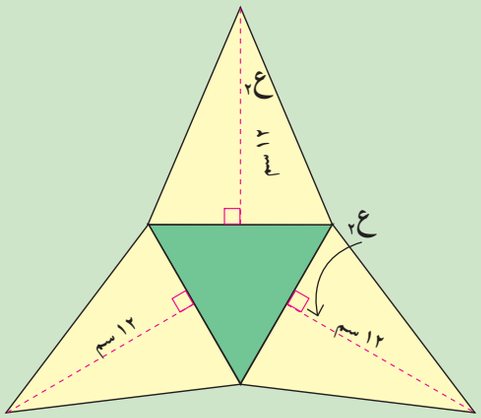
عوِّضْ $(م_{١}) \approx \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٠,٤$

مساحةُ قاعدةِ الهرمِ $(م_{١}) \approx ٦٢,٤$ م^{٢}.

ثانيًا: مساحةَ أحدِ المثلّثاتِ الثلاثةِ المتطابقةِ (أحدُ الأوجهِ الجانبيّةِ). (م٢)

$م_{٢} = \frac{١}{٢}$ ق × ع٢

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٢ = ٧٢$ م^{٢}.



ثالثًا: المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ ثلاثيِّ القاعدةِ (م) = $م_{١} + ٣ \times م_{٢}$

$م \approx ٦٢,٤ + ٣(٧٢) \approx ٢٧٨,٤$ م^{٢}.

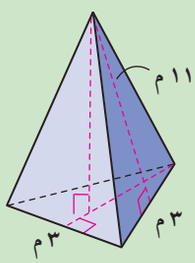
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) ما الارتفاعُ المائلُ للهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ؟

(ب) استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث ($أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$) لإيجادِ ارتفاعِ القاعدةِ المثلّثيّةِ.

(جـ) ما مساحةُ أحدِ الأوجهِ المثلّثيّةِ؟

(د) ما المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ؟



المخروطُ الدائريُّ هو مجسَّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ قاعدتُه دائريّةُ الشكلِ وله رأسٌ واحدٌ.

لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ للمخروطِ، أوجِدْ مساحةَ القاعدةِ ومساحةَ السطحِ المنحني.

مساحةُ السطحِ المنحني $= \frac{١}{٢} \times$ محيطِ القاعدةِ $\times$ طولِ الراسمِ $= \frac{١}{٢} \times ٢\pi \times$ ن $\times$ ج

$= \pi$ ن ج حيث ج = طولَ الراسمِ

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ = مساحةَ السطحِ المنحني + مساحةَ القاعدةِ

$= \frac{١}{٢} \times$ محيطِ القاعدةِ $\times$ ج $+ \pi$ ن^{٢}

$= \pi$ ن ج $+ \pi$ ن^{٢}

$= \pi$ ن (ج + ن)

تذكَّرْ

محيطُ الدائرةِ $= ٢\pi$ ن

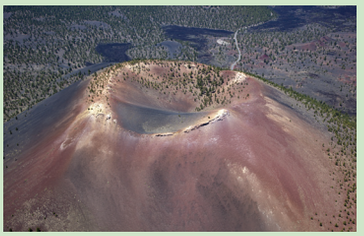
مساحةُ الدائرةِ $= \pi$ ن^{٢}

مثالٌ (٣)

هل تعلمُ؟

الراسمُ هو القطعةُ المستقيمةُ الممتدّةُ من رأسِ المخروطِ إلى أيِّ نقطةٍ على الدائرةِ حيث هي قاعدةُ المخروطِ.

يُريدُ فيصلٌ أن يصنعَ نموذجًا لبركانٍ مخروطيِّ الشكلِ يعرضُه في مسرحيّةِ المدرسةِ. يجبُ أن يُساوِيَ ارتفاعُ المخروطِ ١,٢ مترٍ وطولُ نصفِ قطرِ قاعدتِه ٠,٦ مترٍ وطولُ الراسمِ حوالى ١,٣٤ مترٍ. على فيصلٍ معرفةُ المساحةِ السطحيّةِ للمخروطِ لكي يشتريَ أوراقًا معدنيّةً سيستخدمُها لصنعِ المخروطِ. ما المساحةُ السطحيّةُ لهذا المخروطِ؟



مساحةُ السطحِ المنحني $= \frac{١}{٢}$ محيطِ القاعدةِ $\times$ طولِ الراسمِ

$= \frac{١}{٢} \times (٠,٦ \times ٢\pi) \times ١,٣٤$

$= ٢,٥٢$ م^{٢}

مساحةُ القاعدةِ $= \pi$ ن^{٢}

$= \pi \times (٠,٦)^{٢} = ١,١٣$ م^{٢}

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ

أوجِدِ المجموعَ $\approx ٢,٥٢ + ١,١٣$

$\approx ٣,٦٥$ م^{٢}

يحتاجُ فيصلٌ إلى ٣,٦٥ م^{٢} تقريبًا من الأوراقِ المعدنيّةِ.

حلٌّ آخرُ

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ

$= \pi$ ن (ج + ن)

$= \pi \times ٠,٦ (١,٣٤ + ٠,٦)$

$\approx ٣,٦٥$ م^{٢}

تحقَّقْ من فهمِك

١ ما الفرقُ بينَ الارتفاعِ والراسمِ في المخروطِ الدائريِّ القائمِ؟

٢ من خلالِ إمعانِ النظرِ في شبكةِ مجسَّمٍ، كيف يُمكِنُك تحديدُ ما إذا كانَتِ الشبكةُ تُمثِّلُ هرمًا أو مخروطًا أو أسطوانةً؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٥)

إذا كانَ طولُ قطرِ قاعدةِ خيمةٍ مخروطيّةِ الشكلِ مصنوعةٍ من جلدِ الجاموسِ ٦ أمتارٍ، وطولُ الراسمِ (ج) = ٤ أمتارٍ، فما مساحةُ جلدِ الجاموسِ اللازمةُ لصنعِ سطحِها الخارجيِّ؟

افهمْ

١ ضَعْ خطًّا تحتَ طولِ قطرِ الخيمةِ وارتفاعِها.

٢ ما شكلُ الخيمةِ؟ .....

٣ هل تُغطّى أرضيّةُ الخيمةِ الداخليّةِ بجلدِ الجاموسِ؟ .....

خطِّطْ

٤ ما طولُ نصفِ قطرِ الخيمةِ؟ .....

٥ ما الصيغةُ التي ستستخدمُها لإيجادِ مساحةِ السطحِ المنحني؟ .....

(أ) م = π س ج (ب) م = π س^{٢}

حُلَّ

٦ ما طولُ الراسمِ للمخروطِ؟ .....

٧ اكتبْ معادلةً تُوضِّحُ فيها كيف توجِدُ مساحةَ جلدِ الجاموسِ اللازمةَ.

.....

٨ ما مساحةُ جلدِ الجاموسِ اللازمةُ لصنعِ سطحِ الخيمةِ الخارجيِّ؟

.....

تحقَّقْ

٩ لماذا لا تطرحُ مساحةَ فُتحةِ الخيمةِ، لإيجادِ كمّيّةِ جلدِ الجاموسِ اللازمةِ؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ في أحدِ المعسكراتِ صفٌّ من الخيامِ مخروطيّةِ الشكلِ. إذا كانَ طولُ الراسمِ للخيمةِ ٤ أمتارٍ وطولُ قطرِها ٣,٦ أمتارٍ، فما مساحةُ القماشِ اللازمةُ لصنعِ كلِّ خيمةٍ؟ .....

.....

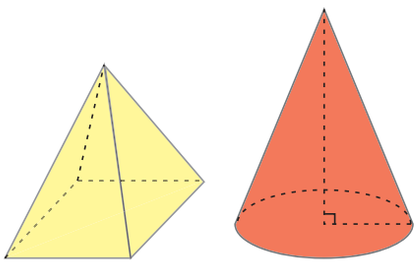
حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التواصلُ**: اختلطَ الأمرُ على كاملٍ وهو لا يستطيعُ التمييزَ بينَ ارتفاعِ الهرمِ وارتفاعِهِ المائلِ، صِفِ الفرقَ بينَ الاثنين.

.....

.....

في التمرينين ٢ و٣ ارجعْ إلى الهرمِ المربّعِ القاعدةِ والمخروطِ الذي له الارتفاعُ نفسُه، على أن يُساوِيَ طولُ قطرِ قاعدةِ المخروطِ طولَ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ المربّعةِ.



٢ **التفكيرُ الرياضيُّ**: أيُّهما أكبرُ: محيطُ القاعدةِ المربّعةِ أم محيطُ القاعدةِ الدائريّةِ؟

.....

٣ **التفكيرُ الناقدُ**: في رأيِك، أيُّهما له المساحةُ السطحيّةُ الأكبرُ؟ وضِّحْ إجابتَك.

.....

٤ **المجلّةُ**: ماذا يحدثُ للمساحةِ السطحيّةِ للهرمِ إذا تضاعفَ ارتفاعُه؟ اذكرْ مثالًا تُوضِّحُ فيه الإجابةُ.

.....

٥ **التواصلُ**: اصنعْ مستطيلًا واذكرْ كيف يتغيّرُ كلٌّ من المحيطِ والمساحةِ إذا تغيّرَ أحدُ بعدي المستطيلِ.

.....

٦ **الحسُّ العدديُّ**: كم وجهًا للهرمِ السداسيِّ؟ وكم وجهًا للهرمِ الثمانيِّ؟ اكتبِ النمطَ العدديَّ.

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٦-٥

حجمُ الهرمِ والمخروطِ

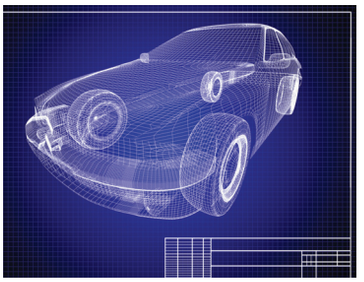
Volume of Pyramid and Cone

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ حجمِ الهرمِ والمخروطِ.

من الاستخداماتِ

- يتكرُ مشغلُ كاد CAD رسوماتٍ ونماذجَ ثلاثيّةَ الأبعادِ لدرّاجاتٍ ناريّةٍ، وسيّاراتٍ، وطائراتٍ، وأشياءَ أخرى تتطلّبُ تصاميمَ ومخطّطاتٍ هندسيّةً مفصّلةً.



صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن أوجدْتَ حجمَ المنشورِ والأسطوانةِ. والآن ستستخدمُ معلوماتِك لإيجادِ حجمِ الهرمِ والمخروطِ.

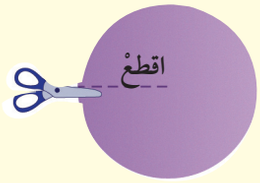
استكشِفْ

من المخروطِ إلى الأسطوانةِ

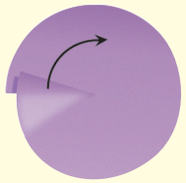
أكوابٌ وأقماعٌ

الأدواتُ المستخدَمةُ: مقصٌّ، شريطٌ لاصقٌ، مسطرةٌ، ورقٌ مقوًّى قياسُ ٢٨ سم × ٤٣ سم، فرجارٌ، رملٌ ملوَّنٌ.

١ استخدِمِ الفرجارَ لترسمَ دائرةً طولُ نصفِ قطرِها ١٢,٧ سم، واستخدِمِ المسطرةَ لترسمَ نصفَ قطرِ هذه الدائرةِ، ثمّ قُصَّ الدائرةَ.



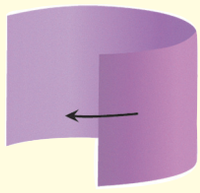
٢ قُصَّ الورقةَ عندَ نصفِ القطرِ الذي رسمْتَه.



٣ أمسِكْ أحدَ طرفي الخطِّ الذي قطعْتَ عندَه ولُفَّه بحيث تصنعُ مخروطًا طولُ قطرِ دائرةِ قاعدتِه ١٥,٢ سم. استخدِمِ الشريطَ اللاصقَ لتثبيتِ المخروطِ.

٤ قِسِ ارتفاعَ هذا المخروطِ وسجِّلْه.

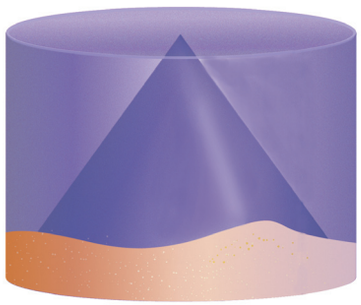
٥ قُصَّ مستطيلًا ارتفاعُه مساوٍ لارتفاعِ المخروطِ، واصنعْ منه أسطوانةً على أن يكونَ قطرُ قاعدتِها مساويًا لقطرِ قاعدةِ المخروطِ.



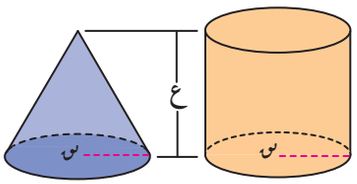
٦ املأِ المخروطَ بالرملِ الملوَّنِ ثمّ اسكبْه في الأسطوانةِ. كرِّرْ هذه العمليّةَ بعدَ ذلك مرّتين.

٧ ماذا تُلاحِظُ عن كمّيّةِ الرملِ في الأسطوانةِ في نهايةِ المرحلةِ الثالثةِ؟ اشرحْ إجابتَك.

٨ ناقِشْ مع زملائِك حولَ العلاقةِ بينَ حجمِ الأسطوانةِ وحجمِ المخروطِ.



تعلَّمْ | حجمُ الهرمِ وحجمُ المخروطِ

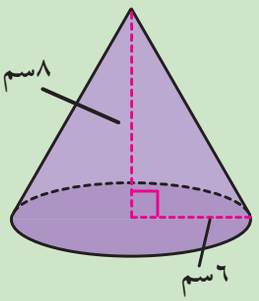


حجمُ المخروطِ هو $\frac{١}{٣}$ حجمِ الأسطوانةِ المشتركةِ معه في القاعدةِ والارتفاعِ.

$ح_{مخروط} = \frac{١}{٣} \times (م \times ع)$، حيث م مساحةُ القاعدةِ، ع الارتفاعُ.

مثالٌ (١)

أوجِدْ حجمَ المخروطِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ الدائريّةِ (م).

$ق = \pi ن^{٢}$

$ق = \pi \times ٦^{٢} \approx ١١٣,٠٤$ سم^{٢}

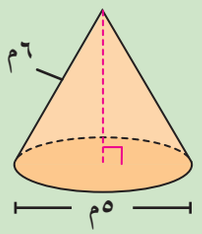
استخدِمْ ق لإيجادِ الحجمِ.

$ح = \frac{١}{٣} \times (م \times ع)$

$ح \approx \frac{١}{٣} \times (١١٣,٠٤ \times ٨)$

$ح \approx ٣٠١,٤٤$ سم^{٣}

يُساوي الحجمُ حوالى ٣٠١,٤٤ سم^{٣}.



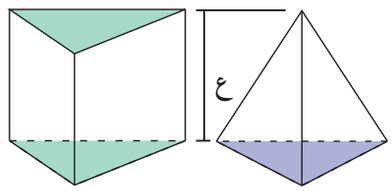
حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ حجمَ المخروطِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

التقديرُ

إذا استخدمْتَ $\pi = ٣,١٤$ في حساباتِك، تختلفُ النتيجةُ التي تحصلُ عليها عن تلك التي تُعطيها الآلةُ الحاسبةُ عندَ استخدامِ مفتاحِ π (٣,١٤١٥٩٢٦٥٤...).

تختلفُ الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ مجسَّمٍ (م) باختلافِ شكلِ القاعدةِ.

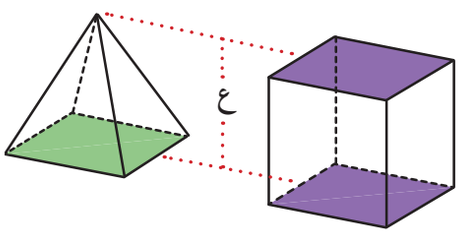


ويختلفُ إيجادُ مساحةِ قاعدةٍ مربّعةِ الشكلِ عن إيجادِ مساحةِ قاعدةٍ مثلّثةِ الشكلِ.

يرتبطُ حجمُ الهرمِ بحجمِ المنشورِ الذي له القاعدةُ والارتفاعُ نفسُهما.

فإذا كانَ حجمُ منشورٍ ح = م × ع،

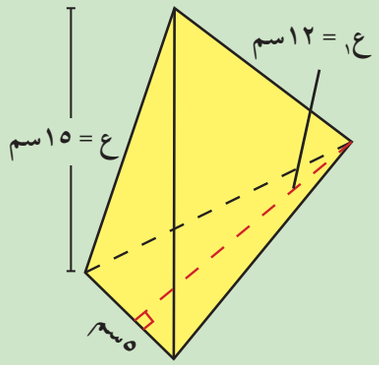
يكونُ حجمُ الهرمِ الذي له القاعدةُ والارتفاعُ نفسُهما ح = $\frac{١}{٣} \times (م \times ع)$.



مثالٌ (٢)

أوجِدْ حجمَ الهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

ليكنْ ع$_{١}$ ارتفاعَ المثلّثِ.



$ح = \frac{١}{٣} \times م \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (\frac{١}{٢} \times ق \times ع_{١}) ع$

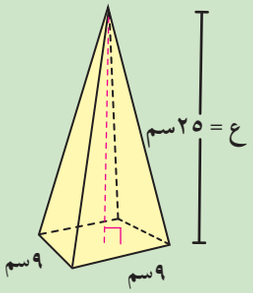
$ح = \frac{١}{٣} \times (\frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢) \times ١٥$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٣٠) \times ١٥ = ١٥٠$سم^{٣}

حجمُ الهرمِ يُساوي ١٥٠سم^{٣}.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ حجمَ الهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



$ح = \frac{١}{٣} \times م \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٢٩)^{٢} \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٨١) \times ٢٥$

$ح = ٦٧٥$سم^{٣}

حجمُ الهرمِ يُساوي ٦٧٥سم^{٣}.

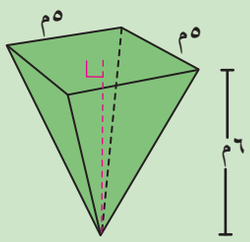
تذكَّرْ

للهرمِ قاعدةٌ واحدةٌ فحسبُ.

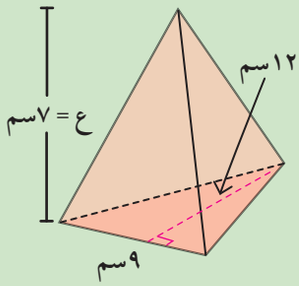
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ حجمَ كلِّ مجسَّمٍ:

(أ)



(ب)



تحقَّقْ من فهمِك

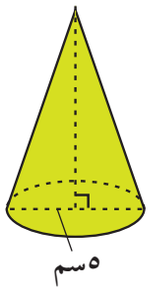
١ ما أوجهُ الشبهِ بينَ حجمِ الهرمِ وحجمِ المخروطِ؟

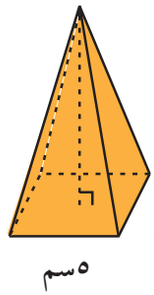
٢ إذا كانَ ارتفاعُ مخروطٍ ١٨ سم وطولُ قطرِ قاعدتِه الدائريّةِ ٨ سم، فصِفِ الأسطوانةَ التي يُساوي حجمُها ٣ مرّاتٍ حجمَ هذا المخروطِ.

٣ عندما يزدادُ ارتفاعُ هرمٍ، هل يزدادُ ارتفاعُه المائلُ؟ وضِّحْ إجابتَك.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٦)

أيُّ المجسَّمين الموضَّحين أكبرُ حجمًا: الهرمُ أم المخروطُ؟
علمًا بأنّ ارتفاعَ كلٍّ منهما ١٢سم





افهمْ

١ ما ارتفاعُ المخروطِ؟

.....

٢ ما ارتفاعُ الهرمِ؟

.....

خطِّطْ

٣ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ المخروطِ؟ .....

٤ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ المخروطِ؟ .....

٥ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ الهرمِ؟ .....

٦ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ الهرمِ؟ .....

حُلَّ

٧ ما حجمُ المخروطِ؟ .....

٨ ما حجمُ الهرمِ؟ .....

٩ ما المجسَّمُ الأكبرُ حجمًا؟ .....

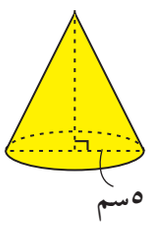
تحقَّقْ

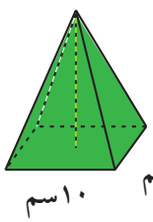
١٠ كيف يُمكِنُك تحديدُ المجسَّمِ الأكبرِ حجمًا من دونِ حسابِ حجمِ كلٍّ من المجسَّمين؟ وضِّحْ إجابتَك.

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١١ أيُّ المجسَّمين الموضَّحين أكبرُ حجمًا: الهرمُ أم المخروطُ؟ علمًا بأنّ ارتفاعَ كلٍّ منهما ١٠سم.





.....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التواصلُ**: لنفترِضْ أنّك تعرفُ أبعادَ مخروطٍ لكنّك نسيتَ الصيغةَ المستخدَمةَ لإيجادِ حجمِه. اذكرْ طريقةً يُمكِنُك استخدامُها لإيجادِ حجمِ المخروطِ.

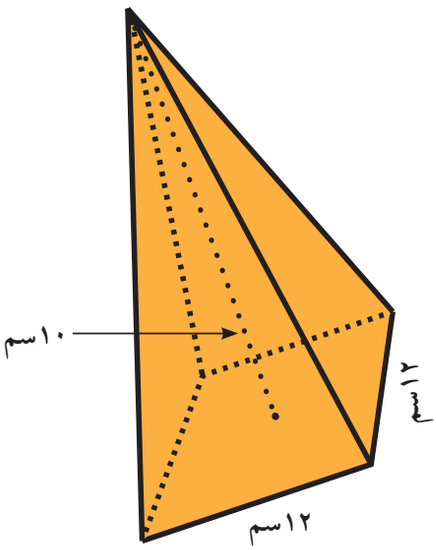
.....

.....

٢ **الجبرُ**: اكتبْ معادلةً واستخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث لإيجادِ ارتفاعِ مخروطٍ، إذا كانَ ارتفاعُه المائلُ يُساوي ١٥ سم وطولُ نصفِ قطرِه ٩ سم.

.....

٣ **التفكيرُ الناقدُ**: تُعبَّأُ الأواني الزجاجيّةُ في أحدِ المصانعِ في صناديقَ هرميّةِ الشكلِ.



(أ) ما مساحةُ الورقِ المقوّى التي يُمكِنُ استخدامُها في التصميمِ الهرميِّ المربّعِ القاعدةِ؟

.....

(ب) ما حجمُ المجسَّمِ الهرميِّ المربّعِ القاعدةِ؟

.....

٤ **اختر إستراتيجيّةً**: يُريدُ صانعُ قبعّاتٍ مخروطيّةِ الشكلِ تعبئةَ كلِّ قبعّةٍ في علبةٍ أسطوانيّةٍ لها القطرُ والارتفاعُ نفسُهما. ما حجمُ المادّةِ العازلةِ اللازمةِ لملءِ كلِّ علبةٍ بالكاملِ؟

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الخامسةِ

١ في الشكلِ إلى اليسارِ.

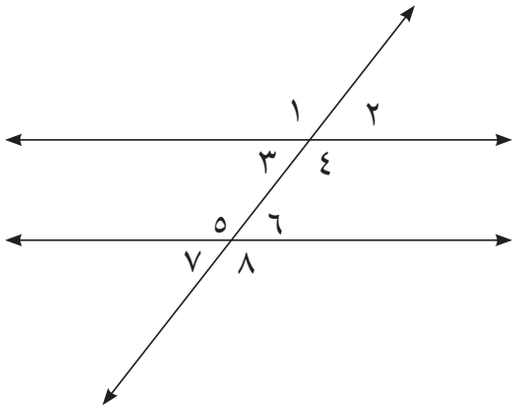
سَمِّ زوجًا من الزوايا:

(أ) متبادلةٌ داخليّةٌ

(ب) متقابلةٌ بالرأسِ

(جـ) متناظرةٌ

(د) متبادلةٌ خارجيّةٌ



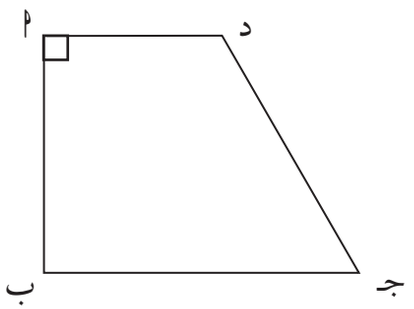
٢ أوجِدْ قياسَ الزاويةِ المتمِّمةِ والزاويةِ المكمِّلةِ للزاويةِ ٥٥°٤

٣ حدِّدْ في الشكلِ إلى اليسارِ:

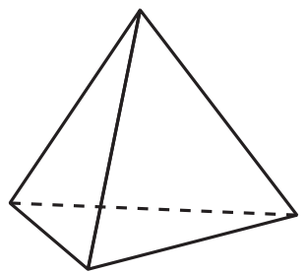
(أ) قطعٌ مستقيمةٌ متوازيةٌ

(ب) قطعٌ مستقيمةٌ متعامدةٌ

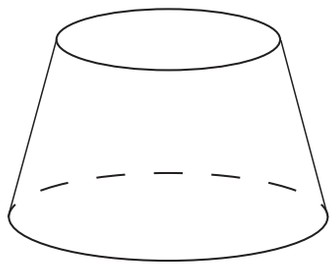
(جـ) زاويةٌ مكمِّلةٌ للزاويةِ جـ



٤ ارسمْ شبكةً لكلِّ مجسَّمٍ ممّا يلي:



جميعُ المثلّثاتِ متطابقةُ الأضلاعِ

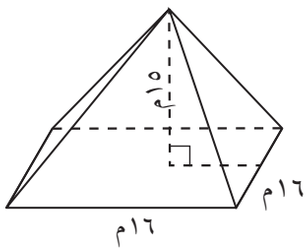


جذعُ مخروطٍ

٥ (أ) ارسمْ شبكةً للهرمِ الموضح بالشكلِ.

(ب) أوجِدْ طولَ الارتفاعِ المائلِ في الهرمِ

(جـ) احسبِ المساحةَ السطحيّةَ للهرمِ

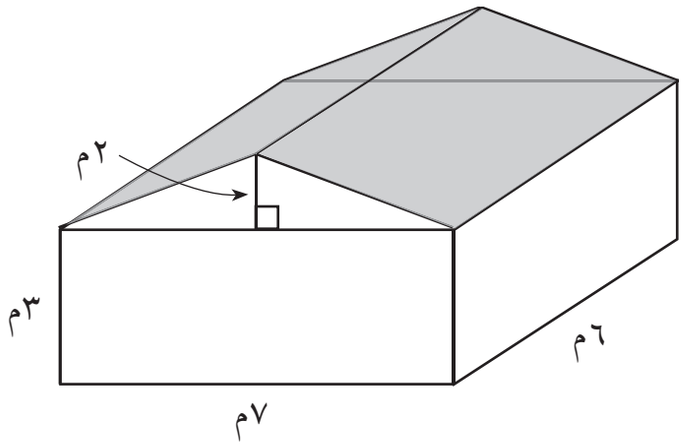


اختبارُ الوَحدةِ الخامسةِ

٦ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ منزلًا يعلوه القرميدُ

(أ) ما حجمُ هذا المنزلِ؟

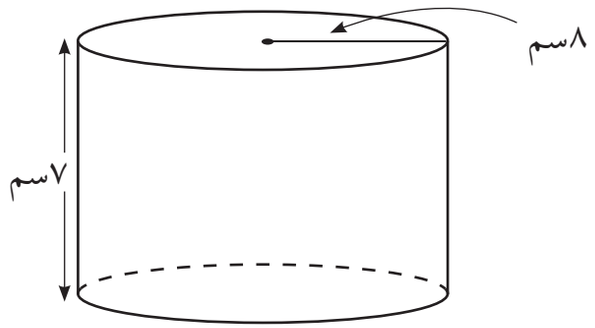
(ب) ما المساحةُ السطحيّةُ من المنزلِ التي يُمكِنُ طلاؤُها؟



٧ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ أسطوانةً مع قياساتٍ أساسيّةٍ

(أ) أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للأسطوانةِ

(ب) أوجِدْ حجمَ الأسطوانةِ

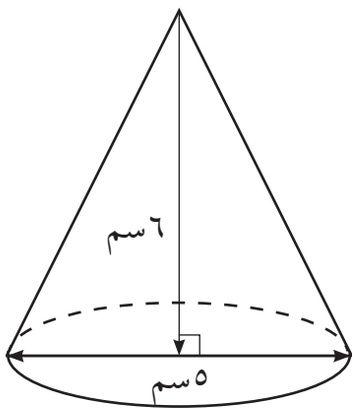


٨ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ مخروطًا

(أ) ما حجمُ هذا المخروطِ؟

(ب) ما مساحةُ السطحِ المنحني للمخروطِ؟

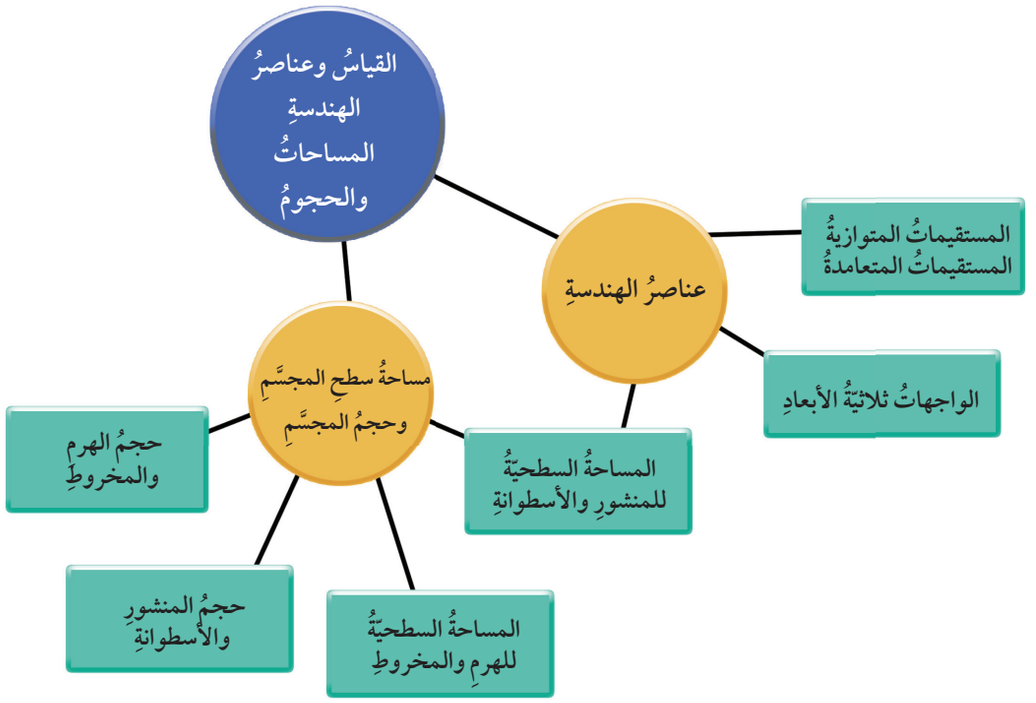
(جـ) ما المساحةُ السطحيَّةُ؟



٩ حوِّلْ: ١٧ مترًا ٢٥ دسّيمترًا إلى سنتيمترٍ.

١٠ قالَ إبراهيمُ لصديقِه بعدَ أن قاسَ قامتَه إنّ طولَك هو ١,٧ م أو ١٧١ سم. في رأيِك، أيُّ قياسٍ هو الأدقُّ؟

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



الوَحدةُ الخامسةُ (أ): عناصرُ الهندسةِ

- يُشكِّلُ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين زوايا داخليّةً وزوايا خارجيّةً وزوايا متبادلةً وزوايا متناظرةً.
- تكونُ الزوايا الداخليّةُ المتبادلةُ متساويةَ القياسِ.
- تكونُ الزوايا المتناظرةُ متساويةَ القياسِ.
- إذا تقاطعَ مستقيمان وشكّلا زاويةً قائمةً يكونُ المستقيمان متعامدين.
- تُساعِدُ الرؤيا للمجسَّماتِ من الأمامِ ومن الجانبِ ومن الأعلى على تكوينِ فكرةٍ عن شكلِ هذه المجسَّماتِ.

الوَحدةُ الخامسةُ (ب): مساحةُ سطحِ المجسَّمِ وحجمُ المجسَّمِ

- المساحةُ السطحيّةُ لأيِّ مجسَّمٍ هي ناتجُ مجموعِ مساحاتِ القواعدِ والجوانبِ.
- حجمُ المجسَّمِ هو الحيّزُ الذي يشغلُه هذا المجسَّمُ.

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٥١) بتاريخ ١٠/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة - الكويت