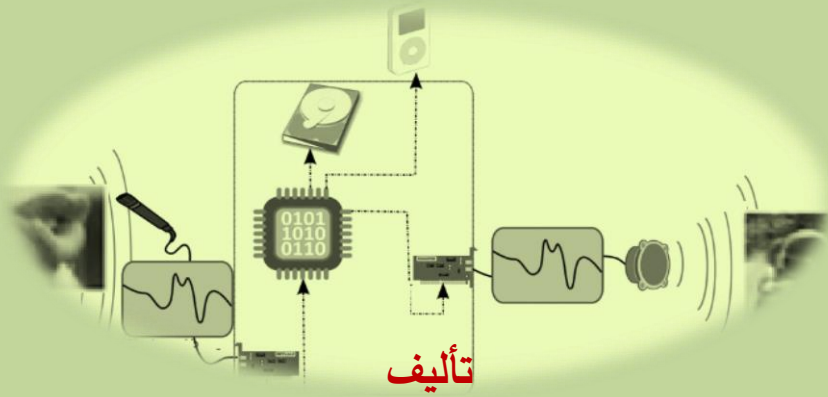


# المعالجة الرقمية للإشارات

## Digital Signal Processing



أ.د. محمد ابراهيم العدوى

أستاذ بقسم الإلكترونيات والاتصالات بكلية الهندسة  
جامعة حلوان

٢٠٠٩

## الإهداء

إلى كل غيور على اللغة العربية.  
إلى كل من استخدم اللغة العربية كلغة تعبير عن علمه.  
إلى كل من بذل مجهودا فى تبسيط علمه باللغة العربية ليصبح فى متناول  
الطالب والقارئ العربى.

## شكر واجب

يتقدم المؤلف بالشكر الجزيل للأستاذ الدكتور حسن فؤاد الأستاذ بقسم الهندسة الطبية بكلية الهندسة، جامعة حلوان، والدكتورة نانسي مصطفى سالم الأستاذ المساعد بنفس القسم على المجهود الذى بذلاه فى مراجعة هذا الكتاب.

### رجاء من قراء هذا الكتاب

الكتاب متاح لجميع القراء دون أى تكلفة وللاستفادة منه على أى وجه. فرجاء إذا رأيت عزيزى القارئ أنك قد استفدت منه فلا أطلب منك سوى الدعاء لمؤلفه إن كنت غير قادر ماديا، أما القارئ القادر ماديا فأطلب منه التبرع بما يستطيع لأى جهة خيرية يريد، وليكن على سبيل المثال مستشفى سرطان الأطفال ٥٧٣٥٧ بالقاهرة، أو مستشفى الكبد بالمنصورة، أو مستشفى القلب ( مجدى يعقوب ) بأسوان، أو هيئة مصر الخير، أو صندوق تحيا مصر، مع نية ثواب التبرع للمتبرع وللمؤلف.

### المؤلف

أ.د. محمد ابراهيم العدوى

## استعراض الكتاب المعالجة الرقمية للإشارات

إننا نعيش بل نسبح في عالم من الإشارات التي نتعامل معها دائما، فهناك إشارات لاسلكية مثل إشارات الراديو والتلفزيون والتليفون المحمول والشبكات اللاسلكية والإشارات المنبعثة من خطوط القدرة، وإشارات سلكية مثل إشارة التليفون وشبكة الحاسب السلكية، وأنواع أخرى كثيرة من الإشارات مثل إشارة راسم القلب الإلكتروني، وراسم المخ، وراسم العضلات، وأجهزة التصوير الطبية المختلفة، وإشارات التراسل مع الأقمار الصناعية خارج نطاق الأرض، وإشارات التحكم عن بعد في الكثير من الأجهزة، كل هذه إشارات تتولد ضعيفة مخلوطة بالكثير من الضوضاء والإشارات الأخرى الغير مرغوب فيها، ولكي تتم الاستفادة من هذه الإشارات ونستطيع التعامل معها لابد من معالجتها وتهيأتها في صورة مناسبة، وهذا هو الدور الأساسي لعلم معالجة الإشارات. أي أن علم معالجة الإشارات هو العلم الذي يقدم لنا الطرق المختلفة لتهيئة أى إشارة وجعلها في الصورة المناسبة للتعامل معها. هذا العلم بدأ مع بدايات القرن الماضي، وبالطبع لم تكن الحاسبات في هذا الوقت قد عرفت ولا كانت في الحسبان، ولذلك كانت الإشارات كلها من النوع التماثلي أو الانسيابي، وكانت طرق المعالجة من النوع التماثلي أو الانسيابي أيضا.

ظل الوضع كذلك إلى أن ظهرت الحاسبات في بداية سبعينيات هذا القرن وحدث ما يشبه الثورة في مجال الحاسبات والمعالجات الدقيقة، وبالطبع فقد تركت هذه الثورة آثارها على شتى العلوم ومنها علم معالجة الإشارات حيث تحولت الإشارات التناظرية إلى إشارات رقمية وتحولت معها طرق المعالجة إلى طرق رقمية يتم إجراؤها إما باستخدام حاسب، أو شريحة إلكترونية، وحدثت ثورة موازية في علم معالجة الإشارات

الرقمية ظهرت معها طرقا وخوارزميات جديدة كانت مجرد خيال، أو حتى نظريات على الورق وكتب لها الظهور بفضل ثورة الحاسبات. هذه الثورة في علم المعالجة الرقمية للإشارات جعلته يدخل بل ويصبح أداة مهمة في شتى تطبيقات ومجالات التعامل مع الإشارات مهما كانت هذه الإشارات، فغالبا لن تجد جهازا يستخدم الآن إلا وبداخله معالج للإشارة. مما يعكس هذه الأهمية لهذا العلم أنه أصبح أساسيا في شتى التخصصات الهندسية سواء كانت تخصصات الإلكترونيات أو الاتصالات أو الآلات الكهربائية أو حتى القوى الكهربائية بل والتخصصات الميكانيكية والجيولوجية وغيرها، أصبحت كلها تهتم بدراسة هذا العلم لما له من أهمية في دراسة الضوضاء التي تسببها أى آلة، ودراسة توازن هذه الآلة واهتزازها عند ظروف التشغيل المختلفة مثلا.

إن علم المعالجة الرقمية للإشارات بدأ تدريسه لطلاب الدراسات العليا فقط في تخصصات الإلكترونيات والاتصالات، وهو الآن من العلوم الأساسية لطلاب البكالوريوس في التخصصات الإلكترونية وطلاب الدراسات العليا بل وربما طلاب البكالوريوس أيضا في باقى التخصصات الهندسية مثل تخصصات الكهرباء والميكانيكا والهندسة الطبية.

هذا المقرر يمكن تدريسه في فصل دراسى واحد ٣ ساعات أسبوعيا للمحاضرة وساعتان للتمارين. ولا بد من دراسة مقرر في الرياضيات خاص بالتفاضل والتكامل وحل المعادلات التفاضلية من الدرجات المختلفة والتعامل مع الكميات التخيلية قبل الدخول في دراسة هذا المقرر. من الضرورى أيضا أن يكون الطالب ملما أو تدرب على برنامج الماتلاب MATLAB كلغة برمجة ولغة تطبيقية في هذا المجال حيث يحتوى الماتلاب على صندوق أدوات tool box خاص بالمعالجة الرقمية للإشارات ويحتوى هذا الصندوق على الكثير من الدوال والأدوات التي تساعد في تصميم الكثير من

الخوارزميات الضرورية في هذا المجال مما جعلنا نعلم هذه اللغة كلغة البرمجة والتطبيق في هذا المقرر.

لقد بدأنا هذا الكتاب **بالفصل الأول** وهو مقدمة عن موضوع المعالجة الرقمية للإشارات حيث عرفنا فيه المقصود بالإشارة وما هي الإشارة الرقمية وما هي فائدة التعامل مع الإشارات الرقمية بالذات حتى أن الإشارة التناظرية يتم تحويلها إلى الصورة الرقمية، ثم معالجتها بطرق رقمية على حاسب أو شريحة، ثم إعادتها مرة ثانية إلى الصورة التناظرية. **الفصل الثاني** يقدم الطرق المختلفة لتحويل الإشارة من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية ويشرح نظرية العيننة أو التقطيع  $\text{sampling theory}$  التي تعتبر من النظريات المهمة التي يجب تحقيقها عند تحويل أى إشارة من النطاق الزمنى إلى النطاق الترددى وقد تم شرح هذه النظرية شرحا مبسطا يمكن القارىء من فهمها. في **الفصل الثالث** تم تعريف الإشارة الرقمية مع عرض أمثلة على بعض هذه الإشارات الشائعة الاستخدام مع عرض لتصنيفات كثيرة لهذه الإشارات من حيث الدورية والتشابه حول نقطة الأصل والطاقة لأى إشارة والعمليات الحسابية المختلفة التي يمكن إجراؤها على الإشارات الرقمية، بعد ذلك تم تعريف الأنظمة الرقمية وخواصها من حيث الخطية والاستقرار وغير ذلك من الخواص، كما تم شرح كيفية الربط بين خرج النظام ودخله والعلاقة بينهما بأكثر من طريقة.

**الفصل الرابع** يشرح بالتفصيل تحويل  $Z$  كتحويل أساسى لنقل الإشارة إلى نطاق آخر يسهل معه التعامل مع الإشارات بطرق أسهل وهو يكافئ تحويل لابلاس في حالة التعامل مع الإشارات التماثلية أو التناظرية. تحويل فوريير كان هو موضوع **الفصل الخامس** وهذا التحويل أساسى في تحويل أى إشارة من النطاق الزمنى إلى النطاق الترددى والعكس وذلك لدراسة الاستجابة الترددية لأى نظام، ولقد تم شرح كل ما

يتعلق بهذا الموضوع من حيث تتابع فورير وتحويل فورير والفرق بينهما وذلك للإشارات التناظرية والرقمية، وختم الفصل بشرح مفصل لخواريزم تحويل فورير السريع. **الفصل السادس** تم فيه شرح المرشحات التناظرية وكان ذلك لأن بعض طرق تصميم المرشحات الرقمية تعتمد على المرشحات التناظرية، لذلك كان من الضروري مراجعة هذا النوع من المرشحات. هناك صنفان من المرشحات الرقمية، إما المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية اللاهائية IIR أو المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية المحدودة FIR. النوع الأول من المرشحات كان هو موضوع **الفصل السابع** حيث تم في هذا الفصل شرح أكثر من طريقة لتصميم هذا النوع من المرشحات. **الفصل الثامن** تناول الطرق المختلفة لتصميم المرشحات من النوع الثاني FIR. لبناء المرشحات التناظرية نستخدم المقاومات والمكثفات، ولبناء المرشحات الرقمية نستخدم دوائر الجمع والإزاحة والتأجيل أو التأخير. **الفصل التاسع** يقدم بعض الطرق لبناء المرشحات الرقمية. في النهاية كان لابد من ذكر بعض التطبيقات التي تستخدم فيها تقنيات المعالجة الرقمية للإشارات وهذه التطبيقات لا حصر لها ولكننا اخترنا المعالجة الرقمية للصوت والذي كان موضوع **الفصل العاشر** حيث تم استعراض بعض التقنيات المستخدمة في ذلك حيث أن هذا الموضوع تفرد له الكتب والمراجع ولكننا استعرضناه هنا سريعا لنقدمه للقارئ فقط ونترك له حرية الاستزادة من هذا الموضوع إن أراد. **الفصل الحادي عشر** استعرض أيضا بطريقة سريعة موضوع المعالجة الرقمية للصور بنفس طريقة الفصل العاشر حيث أن هذا الموضوع أيضا تفرد له الكتب والمراجع العديدة لاستيعابه.

هذا الكتاب يعتبر مقدمة لموضوع المعالجة الرقمية للإشارات ويجب أن يلحقه كتاب آخر يتم فيه شرح بعض التقنيات المتقدمة مثل المرشحات المهيئة adaptive filters



والدخول بعمق أكثر في التحليل الطيفي للإشارات spectrum analysis والإشارات العشوائية random signals وكذلك موضوع معالجة الإشارات الرقمية في الزمن الحقيقي real time digital signal processing.

في النهاية فإن هذه محاولة للكتابة أو التأليف باللغة العربية في موضوع تقني يعتبر من الموضوعات التي تندر فيها المؤلفات باللغة العربية. لذلك نرجوا أن تعم الفائدة من هذا المجهود وأن يحذوا جميع المتخصصين حذونا في ذلك وأن يخوضوا مثل هذه التجربة حتى تمتلئ المكتبة العربية بالمؤلفات العلمية العربية حتى لا تكون اللغة حاجزا بين الناطقين باللغة العربية وبين العلوم الحديثة.

### المؤلف

أ.د. محمد ابراهيم العدوى

أستاذ متفرغ بكلية الهندسة بحلوان - جامعة حلوان - حلوان - القاهرة

98eladawy@gmail.com

[Mohamed\\_salama01@h-eng.helwan.edu.eg](mailto:Mohamed_salama01@h-eng.helwan.edu.eg)

## المحتويات

### الفصل الأول: مقدمة عامة عن المعالجة الرقمية للإشارات ----- ١

- ١-١ مقدمة ١
- ١-١-١ المعالجة التناظرية للإشارات ٢
- ٢-١-١ المعالجة الرقمية للإشارات ٣
- ٢-١ نظرة تاريخية ١٢
- ٣-١ عرض الإشارات ١٤
- ٤-١ أمثلة على بعض الإشارات ١٧
- ١-٤-١ إشارة الصوت ١٧
- ٢-٤-١ إشارة راسم القلب ١٩
- ٣-٤-١ معالجة الصور ٢٠
- ٥-١ تمارين ٢١

### الفصل الثاني: التحويل من رقمي إلى تناظري والعكس ----- ٢٣

- ١-٢ مقدمة ٢٣
- ٢-٢ التحويل من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية ٢٤
- ٣-٢ نظرية أخذ العينات في النطاق الزمني ٢٩
- ٤-٢ نظرية أخذ العينات في النطاق الترددي ٣٥
- ٥-٢ المحول التناظري الرقمي ٤٠
- ١-٥-٢ المحول التناظري الرقمي باستخدام المقارنات ٤١
- ٢-٥-٢ المحول التناظري الرقمي باستخدام العداد الثنائي ٤٣
- ٣-٥-٢ طريقة التقريب المتتالي ٤٥
- ٦-٢ المحول الرقمي التناظري ٤٨
- ١-٦-٢ المحول الرقمي التناظري باستخدام المقاومات

٤٨	المتضاعفة ثنائيا
	٢-٦-٢ المحول الرقمي التناظري باستخدام شبكة المقاومات
٥٠	السلمية
٥٥	٧-٢ تمارين
<b>٥٦</b>	<b>الفصل الثالث: الإشارات والأنظمة الرقمية</b>
٥٦	١-٣ مقدمة
٥٦	١-١-٣ الإشارة التناظرية أو الانسيابية
٥٦	٢-١-٣ النظام التناظري
٥٧	٣-١-٣ الإشارة المتفاصلة زمنيا
٥٨	٤-١-٣ الإشارة الرقمية
٥٩	٥-١-٣ النظام الرقمي
٥٩	٢-٣ بعض الإشارات الرقمية كثيرة الاستخدام
٦٠	١-٢-٣ إشارة دالة العينة الواحدة
٦٠	١-٢-٣ إشارة دالة الدرجة الواحدة
٦١	٣-٢-٣ إشارة دالة المطع
٦٢	٤-٢-٣ التابع الأسى الحقيقي
٦٦	٣-٣ تصنيف الإشارات الرقمية
٦٦	١-٣-٣ الدورية
٦٨	٢-٣-٣ التصنيف على حسب الطول
٦٨	٣-٣-٣ التصنيف على حسب التشابه حول نقطة الأصل
٦٩	٤-٣-٣ التصنيف على حسب مقدار التابع
٦٩	٥-٣-٣ التصنيف على حسب القابلية للجمع
٧٠	٦-٣-٣ طاقة التابع

- ٣-٤ العمليات الأساسية على التتابعات ٧٠
- ٣-٥ التعبير عن التتابعات بدلالة تتابع العينة الواحدة ٧٠
- ٣-٦ الأنظمة الرقمية ٧٥
- ٣-٧ تصنيف الأنظمة الرقمية ٧٨
- ٣-٧-١ الخطية ٧٨
- ٣-٧-٢ خاصية الثبات مع الإزاحة ٧٨
- ٣-٧-٣ خاصية السببية أو المعقولية ٧٩
- ٣-٧-٤ الأنظمة المستقرة ٨٠
- ٣-٧-٥ خاصية الانعكاس ٨١
- ٣-٧-٦ خاصية الخمول ٨١
- ٣-٨ علاقة الخرج بالدخل للأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا ٨٢
- ٣-٨-١ استجابة العينة الواحدة ٨٢
- ٣-٨-٢ استجابة الخطوة ٨٢
- ٣-٨-٣ الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا ٨٢
- ٣-٨-٤ عملية الجمع الالتفافي ٨٤
- ٣-٨-٥ خواص الجمع الالتفافي ٨٧
- ٣-٨-٦ بعض خواص الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا ٩٠
- ٣-٩ تطبيقات على الماتلاب ٩٣
- ٣-١٠ تمارين ٩٧

## الفصل الرابع: تحويل Z ----- ١٠٢

- ٤-١ مقدمة ١٠٢
- ٤-٢ تحويل Z ١٠٣
- ٤-٣ خواص تحويل Z ١٠٩

- ١١١ ٤-٤ تحويل  $Z$  لبعض التتابعات المعروفة
- ١١٢ ٥-٤ تحويل  $Z$  العكسي
- ١١٢ ٤-٥-١ باستخدام تكامل كوشي
- ١١٣ ٤-٥-٢ طريقة الكسور الجزئية
- ١١٧ ٤-٥-٣ طريقة القسمة المطولة
- ١١٨ ٤-٦ أقطاب وأصفار النظام في المستوى  $Z$
- ١٢٠ ٤-٦-١ استقرار النظام الرقمي في المستوى  $Z$
- ١٢١ ٤-٦-٢ تحويل  $Z$  وتحويل فوريير
- ١٢٥ ٤-٦-٣ الأنظمة الرقمية من الدرجات الأولى والثانية
- ١٢٩ ٤-٧ تطبيقات برنامج ماتلاب
- ١٣٦ ٤-٨ الطرق المختلفة للتعبير عن الأنظمة الرقمية
- ١٣٨ ٤-٩ تمارين

## الفصل الخامس: تحويل فوريير ----- ١٤٢

- ١٤٢ ٥-١ مقدمة
- ١٤٦ ٥-٢ تتابع فوريير للإشارات التناظرية الدورية
- ١٤٦ ٥-٣ تحويل فوريير للإشارات التناظرية غير الدورية
- ١٥٣ ٥-٤ تحويل فوريير للإشارات المتفاصلة زمنيا
- ١٥٨ ٥-٥ تحويل فوريير المتفاصل تردديا (عينات في المجال الترددي)
- ١٦٥ ٥-٦ خواريزم تحويل فوريير السريع
- ١٧٦ ٥-٧ حسابات تحويل فوريير السريع باستخدام ماتلاب
- ١٨١ ٥-٨ تمارين

## الفصل السادس: المرشحات الانسيابية (التناظرية) ----- ١٨٢

١٨٢	١-٦ مقدمة
١٨٦	٢-٦ مرشح بتروث
١٩٤	١-٢-٦ تصميم مرشح بتروث منفذ للترددات المنخفضة
١٩٦	٣-٦ مرشحات شيبشيف
١٩٨	٤-٦ مرشحات القطع الناقص
٢٠٠	٥-٦ استخدام ماتلاب في تصميم المرشحات الانسيابية
٢٠٤	٦-٦ تمارين

## الفصل السابع: تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية

### ٢٠٦ -----

٢٠٦	١-٧ مقدمة
٢١٣	٢-٧ تصميم المرشحات الرقمية
٢١٧	٣-٧ مواصفات المرشحات IIR
٢١٩	٤-٧ مواصفات المرشحات FIR
٢٢١	٥-٧ طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR
٢٢١	١-٥-٧ طريقة التحويل الخطى المزدوج
٢٣٠	٢-٥-٧ طريقة تساوى استجابة الصدمة
٢٣٨	٦-٧ تصميم المرشحات IIR في برنامج ماتلاب
٢٤٥	٧-٧ التحويل الطيفي للمرشحات
٢٤٧	٨-٧ تمارين

## الفصل الثامن: تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية المحددة ٢٥١

٢٥١	١-٨ مقدمة
-----	-----------

- ٢٥٥ ٢-٨ المرشحات FIR الخطية الطور باستخدام الاستجابة المتماثلة
- ٢٥٦ ١-٢-٨ المرشح FIR الفردى الطول المتماثل
- ٢٥٨ ٢-٢-٨ المرشح FIR الزوجى الطول المتماثل
- ٢٥٨ ٣-٢-٨ المرشح FIR الفردى الطول عكسى التماثل
- ٢٥٩ ٤-٢-٨ المرشح FIR الزوجى الطول عكسى التماثل
- ٢٦٠ ٣-٨ تحديد الأصفار للمرشحات FIR
- ٢٦٣ ٤-٨ تصميم المرشحات FIR باستخدام النوافذ
- ٢٨١ ٥-٨ تصميم المرشحات FIR بأخذ عينات من الاستجابة الترددية
- ٢٨٩ ٦-٨ تصميم المرشحات FIR مباشرة باستخدام ماتلاب
- ٢٩٨ ٧-٨ تمارين

## الفصل التاسع: بناء المرشحات الرقمية ----- ٢٩٩

- ٢٩٩ ١-٩ مقدمة
- ٣٠٠ ٢-٩ بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللاهائية
- ٣٠١ ١-٢-٩ الطريقة المباشرة
- ٣٠٤ ٢-٢-٩ الطريقة المتوالية أو التتابعية
- ٣٠٦ ٣-٢-٩ الطريقة المتوازية
- ٣٠٧ ٣-٩ بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية المحددة
- ٣٠٨ ١-٣-٩ الطريقة المباشرة
- ٣٠٨ ٢-٣-٩ الطريقة التتابعية
- ٣٠٩ ٣-٣-٩ طريقة الطور الخطى

## الفصل العاشر: معالجة الكلام ----- ٣١٠

- ٣١٠ ١-١٠ مقدمة

- ٣١٢ ٢-١٠ نماذج إنتاج الصوت
- ٣١٦ ٣-١٠ تشفير الصوت
- ٣٢٢ ٤-١٠ تحويل النصوص إلى كلام
- ٣٢٤ ٥-١٠ التعرف على الكلام
- ٣٢٧ ٦-١٠ التعرف على الأشخاص من خلال الصوت والتحقق منهم
- ٣٢٩ ٧-١٠ مرشحات لبعض التأثيرات الصوتية الخاصة

### الفصل الحادى عشر: أساسيات معالجة الصور الرقمية ----- ٣٣١

- ٣٣٢ ١-١١ مقدمة
- ٣٣٧ ٢-١١ تحسين الصورة
- ٣٣٨ ١-٢-١١ طرق التحسين فى نطاق مساحة الصورة
- ٣٥٥ ٢-٢-١١ المرشحات فى النطاق الترددى

### قاموس المصطلحات العلمية ----- ٣٥٩

### نهاية الكتاب ----- ٣٦٦



# الفصل الأول

## مقدمة عامة عن المعالجة الرقمية للإشارات

### ١-١ مقدمة

#### ماذا نعني بمعالجة الإشارات الرقمية ؟

**أولاً:** الإشارة هي متغير أو دالة تعتمد على متغير آخر أو أكثر، مثل الجهد كدالة في الزمن، وشدة إضاءة نقطة على الشاشة ولون هذه النقطة كدالة في المحورين الأفقي والرأسي للشاشة، واتجاه صاروخ في الفضاء كدالة في الأربعة متغيرات الأفقي والرأسي والعمودي والزمن، وهكذا يمكننا أن نرى أننا نتعامل مع عالم من الإشارات المختلفة.

**ثانياً:** كلمة معالجة يقصد بها أنه سيتم إجراء بعض العمليات على هذه الإشارة مثل ترشيحها من الضوضاء، أو تكبيرها إلى مستوى معين أو تحويلها من نطاق الزمن time domain إلى نطاق التردد frequency domain، كل ذلك يكون بغرض إستخلاص بعض الخواص أو المعلومات عن هذه الإشارة. يجب أن تكون هذه العمليات غير مدمرة للإشارة non destructive، أى لا تفقدها خواصها أو شكلها الأساسي نتيجة هذه المعالجة.

**ثالثاً:** كلمة رقمي digital تعنى أن عمليات المعالجة السابقة ستتم بطرق رقمية، فعند ترشيح الإشارة سنستخدم مرشح رقمي digital filter وعند تمثيل الإشارة في النطاق الترددي بإستخدام تحويل فوريير Fourier transform, FT سنستخدم تحويل فوريير المعين أو المتقطع discrete F.T. إن ذلك بالطبع يستلزم وضع الإشارة أو تمثيلها في الشكل الرقمي.

لكي نفهم الفرق بين معالجة الإشارات التناظرية analog ومعالجة الإشارات الرقمية digital سنعرض المثال التالي:

**مثال ١-١** إفترض أن لدينا إشارة  $S(t)$  تعرضت لضوضاء نتيجة لإرسالها على أحد قنوات الإرسال وتم استقبالها كما يلي:

$$X(t)=S(t)+n(t) \quad (١-١)$$

حيث:

$S(t)$  هي الإشارة الأصلية،

$n(t)$  هي الضوضاء المضافة نتيجة قناة الإرسال،

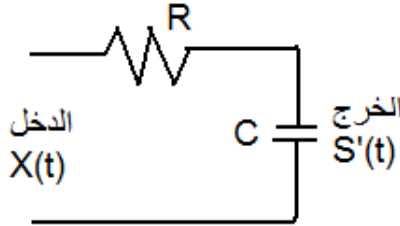
$X(t)$  هي الإشارة التي تم إستقبالها مضافا إليها الضوضاء.

المطلوب هو معالجة الإشارة  $X(t)$  للحصول منها على صورة تقريبية للإشارة الأصلية  $S(t)$  التي تحتوى على أقل كمية من الضوضاء المضافة، لأنه من الصعب أن نحصل على صورة طبق الأصل من  $S(t)$  خالية من الضوضاء تماما. سنقوم بعملية المعالجة باستخدام الطريقة التناظرية أولا، ثم باستخدام الطريقة الرقمية.

### ١-١-١ المعالجة التناظرية للإشارات

من المعطيات السابقة ومعرفة أكبر تردد في الإشارة  $S(t)$  يمكن تصميم مرشح تناظرى له دالة إستجابة ترددية  $H(S)$  وليكن من النوع بتوروث (نسبة لإسم مخترعه) Butterworth أو شيبشيف (نسبة لإسم مخترعه أيضا) Chebyshev والمنفذ للترددات المنخفضة lowpass والذي سندرسه بالتفصيل فيما بعد. من الدالة  $H(S)$  يمكن بناء مرشح حقيقى يقوم بهذه المهمة كالمشرح الموضح في شكل ١-١. هذا المرشح في أبسط صورة يتكون من مقاومة ومكثف كما بالشكل مع العلم أنه سيتم الشرح التفصيلي لهذه المرشحات في الفصول القادمة. مصدر الخطأ الأساسي في هذه الدائرة، وبالتالي كل

المرشحات التناظرية، هو حيود قيم كل من المقاومة والمكثف من القيم القياسية المتاحة، بجانب تأثر هذه المكونات بدرجة الحرارة .



شكل ١-١ مرشح تناظري في أبسط صورة

### ١-١-٢ المعالجة الرقمية للإشارات

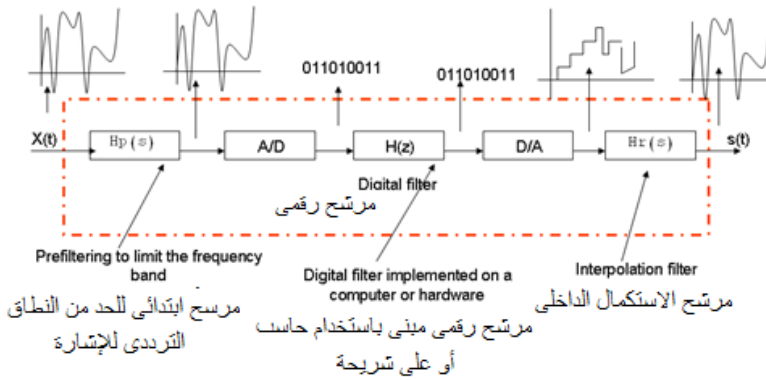
شكل ١-٢ يبين رسماً صندوقياً لمرشح رقمي يمكن استخدامه ليؤدي نفس المهمة التي يقوم بها المرشح الانسيابي الموجود في شكل ١-١. النظام الموجود في شكل ١-٢ يتكون أساساً من البلوكات التالية:

▪ **الصندوق الأول**  $H_p(S)$  وهو عبارة عن مرشح تناظري مهمته الأساسية هي تحديد نطاق تردد الإشارة بحيث لا يسمح بمرور أو نفاذية الترددات التي تزيد عن تردد معين ويطلق عليه المرشح الأولي *prefilter*. عدم وجود هذا المرشح يسبب انعكاس للترددات العالية على الترددات المنخفضة عند تحويل الإشارة من الصورة الإنسيابية إلى الصورة الرقمية وهذه المشكلة تسمى *aliasing* (التزوير) وستكلم عنها بالتفصيل فيما بعد، لذلك يطلق أحياناً على هذا المرشح *antialiasing filter* أو مرشح التخلص من التزوير. لذلك لا بد من وجود هذا المرشح كأول خطوة من خطوات تحويل الإشارة إلى الصورة الرقمية، وهذا المرشح لا بد أن يكون في الصورة التناظرية.

▪ **الصندوق الثاني** هو المحول التناظري الرقمي *Analog to Digital Converter, A/D* الذي يقوم بتحويل الإشارة من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية، حيث سيتم أخذ

عينات samples من الإشارة التناظرية عن طريق دائرة تسمى sample and hold أو دائرة العينة والحفظ. بعد ذلك يتم تحديد قيمة كل عينة بمستوى معين عن طريق المكتم أو محدد المستويات quantizer، بعد ذلك تمر الإشارة في مشفر يعطى شفرة لكل مستوى من مستويات الإشارة. كل ذلك يتم بالطبع عند إعطاء نبضة أو أمر بذلك. هذا المحول سيتم شرحه بشيء من التفصيل فيما بعد.

■ **الصندوق الثالث** في شكل ٢-١ يمثل أو يرمز للمرشح الرقمي حيث تم استخدام الرمز  $H(Z)$  ليرمز لدالة الإستجابة الترددية لهذا المرشح في النطاق  $Z$  كمقابل للنطاق  $S$  في حالة الإشارات التناظرية. هذا المرشح يكون في الغالب برنامج أو خواريزم على الحاسب أو على أحد شرائح المعالجة الرقمية للإشارات. هذه المرشحات هي أحد المواضيع الأساسية في هذا الكتاب.



شكل ٢-١ رسم صندوقى لنظام معالجة رقمى للإشارات.

■ **الصندوق الرابع** هو المحول الرقمي التناظرى Digital to Analog D/A Converter، حيث يتم به تحويل الإشارة من الصورة الرقمية إلى الصورة التناظرية مرة

أخرى. هذه الإشارة تكون في صورة مستويات من الجهد حيث يتم تحويلها إلى الصورة التناظرية النهائية باستخدام مرشح تنعيم كما في المرحلة التالية.

▪ **الصندوق الأخير** هو المرشح  $Hr(S)$  الذى تكون مهمته الأساسية هى تنعيم smoothing إشارة درجات السلم الناتجة من المحول السابق. هذه الصورة الجديدة للإشارة هى  $S'(t)$ ، وهى أقرب ما يكون من الإشارة  $S(t)$  المطلوبة. لاحظ شكل الإشارة عند كل مرحلة للنظام الموجود في شكل ٢-١.

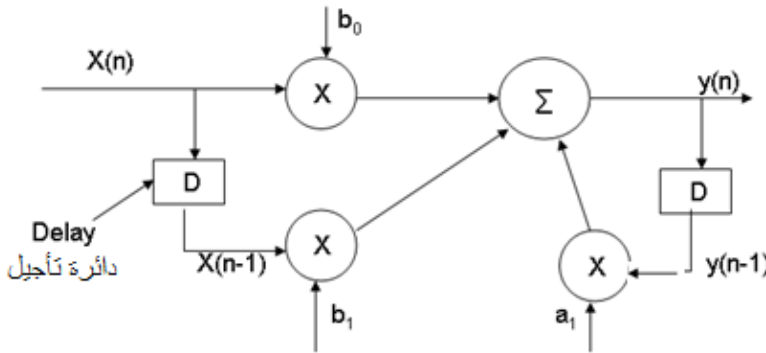
لكي نرى بوضوح الفرق بين المرشح التناظرى والمرشح الرقمي سنقدم هنا فكرة سريعة عن هذا النوع من المرشحات حيث سيتم شرحه بتوسع في الأبواب القادمة من هذا الكتاب. المرشح الرقمي المنفذ للترددات المنخفضة يمكن تمثيله في أبسط صورة بالمعادلة الفرقية difference equation التالية:

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)-a_1y(n-1) \quad (٢-١)$$

▪ كما نرى فإن الخرج الحالي، أو العينة الحالية للخرج ،  $y(n)$  تنتج من حاصل جمع إشارات الدخل السابقة  $x(n-1)$  والحالية  $x(n)$  مضروبة في الثوابت  $b_0$  و  $b_1$  بالإضافة إلى الخرج السابق  $y(n-1)$  مضروباً في الثابت  $a_1$ . سنرى فيما بعد في هذا الكتاب أن المعادلة (٢ - ١) يمكن وضعها في صورة دالة إستجابة في النطاق  $Z$  كما يلي:

$$H (Z) = \frac{b_0 + b_1Z^{-1}}{1 + a_1Z^{-1}} \quad (٣-١)$$

بناء المعادلة (١ - ٢) يتطلب دائرة جمع تقوم بجمع الثلاث مكونات الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة، كذلك تحتاج لدائرة ضرب تقوم بتنفيذ عمليات ضرب الثوابت إما في عينة الدخل أو في عينة الخرج. سنحتاج أيضا لذاكرة لتخزين العينات الحالية والسابقة من إشارة الدخل، كذلك سنحتاج لذاكرة لتخزين العينات الحالية والسابقة من الخرج، وأخيرا سنحتاج لذاكرة لتخزين الثوابت  $a_1$  و  $b_0$  و  $b_1$  فيها. شكل ٣-١ يبين دائرة مفصلة لبناء المرشح الرقمي الموجود في شكل ٢-١. عملية البناء الموضحة في شكل ٣-١ تمت باستخدام مكونات فعلية مثل الضارب والمجمع ووحدات التخزين. مصادر الخطأ في هذه الدائرة تتبع أساسا من عملية التقريب المكتم quantization التي تحدث على الثوابت  $a_1$  و  $b_0$  و  $b_1$  حيث أن هذه الثوابت ستخزن في ذاكرة محددة بعدد معين من البتات (الخانات الثنائية) bits مما يسبب تقريب لقيم هذه الثوابت. كذلك فإن إجراء عمليات الضرب على البتات سينتج عنه أيضا تقريب مكتم آخر. هذا بجانب التقريب المكتم الناتج عن عينة إشارة الدخل  $x(n)$ .



شكل ٣-١ بناء المرشح الرقمي

طريقة أخرى لتمثيل المرشح الرقمي هي باستخدام حاسب آلي في عملية التنفيذ حيث يمثل المرشح في صورة برنامج أو خواريزم يتم تنفيذه على الحاسب. مصادر الخطأ السابق ذكرها

مازالت كلها موجودة في هذا التمثيل أيضا وإن كانت بصورة أخف لأن الخطأ الكمي quantization error يكون أقل نتيجة استخدام عدد أكبر من البتات في تمثيل الثوابت والعمليات الحسابية.

السؤال الآن ما هو المكسب من إستخدام المرشح الرقمي على المرشح التناظري وبالذات أنه كما رأينا فإن المرشح الرقمي كما في شكل ١-٢ تحتوى كل نقطة فيه على مصدر خطأ جديد يضاف على الإشارة؟ كما أن تركيب الدائرة كما رأينا في الشكل نفسه يكون أكثر تعقيدا، فمن يقارن المرشح الموجود في شكل ١-٢ بالمرشح الموجود في شكل ١-١ من حيث البساطة والسهولة؟

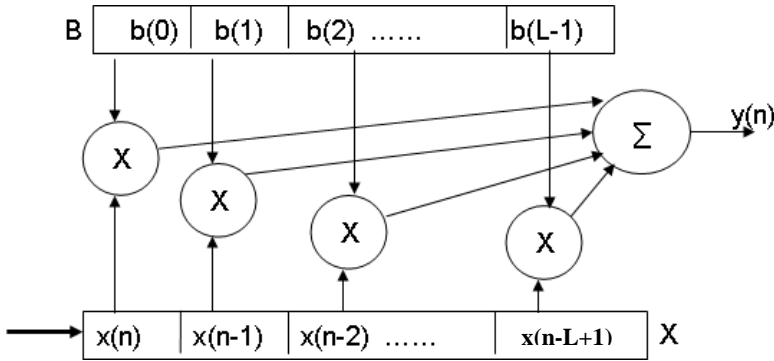
المكسب الأساسي من إستخدام المرشحات الرقمية هو المرونة أو سهولة التكيف أو التطويع تبعاً لمتغيرات التصميم (flexibility). إن تغيير التصميم هنا يتم بتغيير الثوابت  $a_0$  و  $b_0$  و  $b_1$  التي هي ثوابت مخزنة في الذاكرة يمكن تغييرها بسهولة من خلال لوحة المفاتيح، على العكس من تغيير التصميم في المرشحات التناظرية الذي يتطلب تغيير للمكونات نفسها. هذا الموقف أو هذه الميزة تتضح جليا عندما نحتاج مثلا لترشيح عدة إشارات بإستخدام عدة مرشحات معقدة التصميم. في حالة المرشحات التناظرية سنحتاج لمرشح لكل إشارة، بينما في حالة المرشحات الرقمية فإننا سنحتاج لمرشح واحد فقط يمكن تغيير قيمة ثوابته مع تغيير إشارة الدخل دون أى تغيير في هيكل أو تركيب المرشح. لذلك فإن عيوب المرشحات الرقمية يمكن أن تتلاشى بجانب هذه الميزة الخطيرة. التصميمات التالية لبعض المرشحات الرقمية تبين مميزات ومدى مرونة هذه المرشحات والفائدة العظيمة من إستخدامها.

## ١ - تصميم مرشح واحد بدخل واحد Single input single filter

افتراض المرشح الرقمي المعطى بالمعادلة الفرقية التالية:

$$y(n) = \sum_{k=0}^L b(k)x(n-k) \quad (٤-١)$$

حيث يكون الخرج الحالي  $y(n)$  دالة في الدخل الحالي  $x(n)$  وعدد  $L$  من عينات الدخل السابقة. هذه المرشحات ستم دراستها في الفصول التالية من الكتاب. شكل ٤-١ يبين بناء هذا المرشح من مجموعة من وحدات التخزين، ومسجل إزاحي  $B$ ، يحتوي مجموعة المعاملات  $b(k)$  حيث  $k = 0 \dots L$ . هناك أيضا مجموعة أخرى من وحدات التخزين  $X$  التي تحتوي عينة الدخل الحالية  $x(n)$  وعدد  $L$  من العينات السابقة للدخل  $x(n-k)$  حيث  $k=0 \dots L$ . هناك أيضا مجموعة من دوائر الضرب التي ستقوم بضرب كل معامل  $b(k)$  في عينة الدخل المناظرة  $x(k)$ . أخيرا هناك مجمع يقوم بتجميع نواتج عمليات الضرب السابقة لنحصل على عينات الخرج  $y(k)$  المناظرة. لاحظ أنه يمكن إجراء عمليات الضرب السابقة عن طريق إستخدام دائرة ضرب لكل عملية حتى تتم عمليات الضرب كلها على التوازي وفي نفس الوقت كما في شكل ٤-١ وذلك للإسراع في عملية المعالجة الرقمية، كما أنه يمكن إستخدام دائرة ضرب واحدة تقوم بتنفيذ كل عمليات الضرب السابقة على التتابع وفي هذه الحالة ستكون سرعة المعالجة أقل بكثير.



شكل ٤-١ مرشح واحد بدخل واحد



## ٢ - عدة مرشحات بدخل واحد Single input multiple filters

في الكثير من التطبيقات نحتاج لإجراء أكثر من عملية ترشيح لنفس الإشارة. فمثلا قد نحتاج لمعرفة القدرة المتوسطة average power في أكثر من نطاق من النطاقات الترددية لإشارة معينة وهذا ما نسميه بمجموعة المرشحات filter bank. شكل ١-٥ يبين طريقة مقترحة لبناء هذا النظام الرقمي. في هذا النظام تم تخزين مجموعة معاملات كل مرشح في مسجل من المسجلات  $B_1$  و  $B_2$  إلى  $B_N$  حيث  $N$  هي عدد المرشحات المطلوب تصميمها. في طريقة متتابعة متوافقة يتم إدخال مجموعة المعاملات  $B_1$  في المسجل  $B$  حيث يتم إستخدامها مع مجموعة عينات الدخل لحساب العينة الأولى من الخرج الأول  $y_1(1)$ . بعد ذلك يتم إدخال مجموعة المعاملات التالية  $B_2$  في المسجل  $B$  التي تستخدم مع نفس عينات الدخل السابقة لحساب العينة الأولى من الخرج الثاني  $y_2(1)$  وهكذا إلى أن يتم إدخال المعاملات  $B_N$  في المسجل  $B$  التي تستخدم مع نفس عينات الدخل السابقة لحساب العينة الأولى من الخرج رقم  $y_n(1)$ . بعد ذلك يتم إزاحة عينات الدخل  $X$  وتدخل مجموعة المعاملات  $B_1$  مرة أخرى في المسجل  $B$  لحساب العينة الثانية من الخرج الأول  $y_1(2)$  وهكذا.

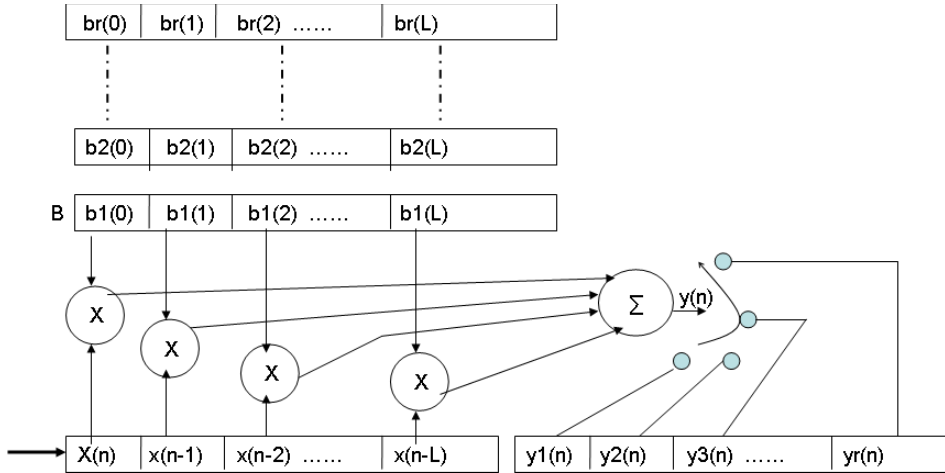
الزمن  $T$  اللازم لحساب عينة الخرج  $y(n)$  لعدد  $N$  من الخرج سيعطى بالعلاقة التالية:

$$T = N(T_m(L + 1) + T_a) \quad (٥-١)$$

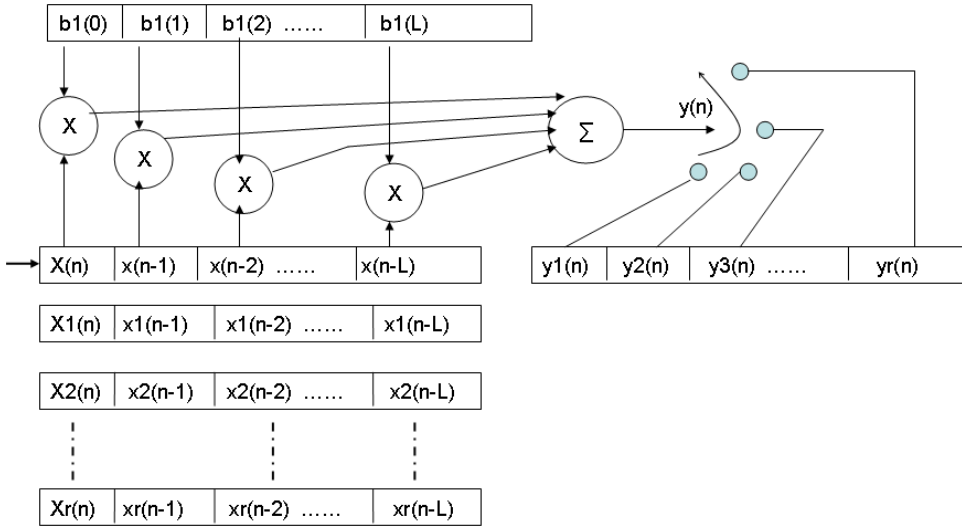
حيث  $T_m$  هي الزمن اللازم لعملية الضرب، وقد افترضنا استخدام دائرة ضرب واحدة في المعادلة (٥ - ١) لتنفيذ عمليات الضرب على التتابع.  $T_a$  هي الزمن اللازم لإجراء عملية الجمع وقد افترضنا هنا دائرة جمع لكل عملية أى أن عمليات الجمع ستتم على التوازي.

### ٣ - ترشيح عدة إشارات بنفس المرشح Single filter multiple input

في الكثير من التطبيقات نحتاج لترشيح أكثر من إشارة بنفس المرشح. في هذه الحالة يتم وضع عدد من الإشارات المقطعة في مصفوفة كالمبينة في شكل ١-٦. في هذا الشكل يتم إدخال مجموعة العينات  $x_1$  (الإشارة الأولى) التي تستخدم مع مجموعة المعاملات  $B$  لحساب العينة الأولى من خرج الإشارة الأولى. بعد ذلك يتم إدخال المجموعة  $x_2$  التي تمثل الإشارة الثانية ومنها يمكن حساب عينة الخرج الأولى من إشارة الخرج الثانية وهكذا إلى أن نصل إلى إشارة الدخل الأخيرة  $x_N$  حيث بعدها نبدأ من جديد مع الإشارة  $x_1$  وهكذا.



شكل ١-٥ عدة مرشحات لنفس الإشارة

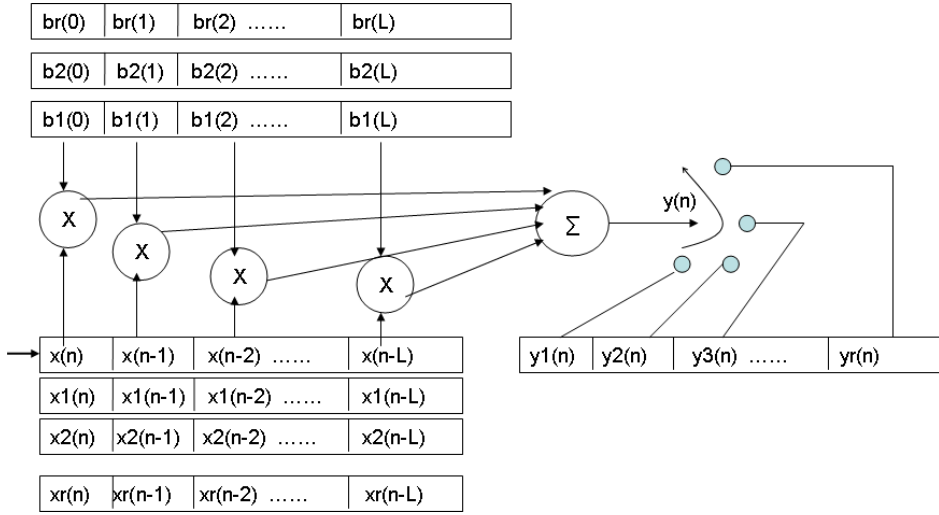


شكل ٦-١ ترشيح عدة إشارات بنفس المرشح.

#### ٤ - ترشيح عدة إشارات باستخدام عدة مرشحات Multiple input multiple filters

يمكن استخدام التصميمين السابقين للحصول على تصميم جديد يرشح عدة إشارات بمرشح لكل إشارة كما هو مبين في شكل ٧-١. هنا يتم إدخال معاملات كل مرشح  $B_1$  إلى  $B_N$  إلى المسجل  $B$  وبالتوافق مع ذلك يتم إدخال عينات الإشارات المقابلة  $x_1$  إلى  $x_N$  حيث يمكن حساب عينات الخرج المناظرة، بعد ذلك يتم إزاحة جميع إشارات الدخل وتكرار ما سبق إلى أن نحصل على كل إشارات الخرج.

بعد دراسة كل التصميمات السابقة نرى مدى مرونة التصميم باستخدام المعالجة الرقمية والتي يصعب الحصول عليها باستخدام المعالجة التناظرية.



شكل ١-٧ عدة مرشحات لعدة إشارات.

## ٢-١ نظرة تاريخية على المعالجة الرقمية للإشارات

كما رأينا من المقدمة السابقة فإن المعالجة الرقمية للإشارة تبدأ بعد أخذ الإشارة من مصدرها (من حساس الحرارة، أو الميكروفون، أو كاميرة الفيديو، أو أى مصدر بيولوجي)، ثم تكبيرها وترشيحها مبدئياً، ثم تحويلها إلى الصورة الرقمية. من هنا يبدأ دور المعالجة الرقمية للإشارة. هذه المعالجة من الممكن أن تكون في صورة خواريزم يتم تنفيذه على الحاسب، أو على أحد الشرائح (المعالجات) المخصصة للمعالجة الرقمية للإشارات، وما أكثرها. هذا الخواريزم قد يكون مرشح رقمي لمنع بعض الترددات والسماح للترددات الأخرى، وقد يكون محول يحول الإشارة من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي مثل تحويل فورير، وقد يكون خواريزم لضغط بيانات هذه الإشارة بحيث تشغل أقل مساحة تخزينية، وهكذا. من ذلك

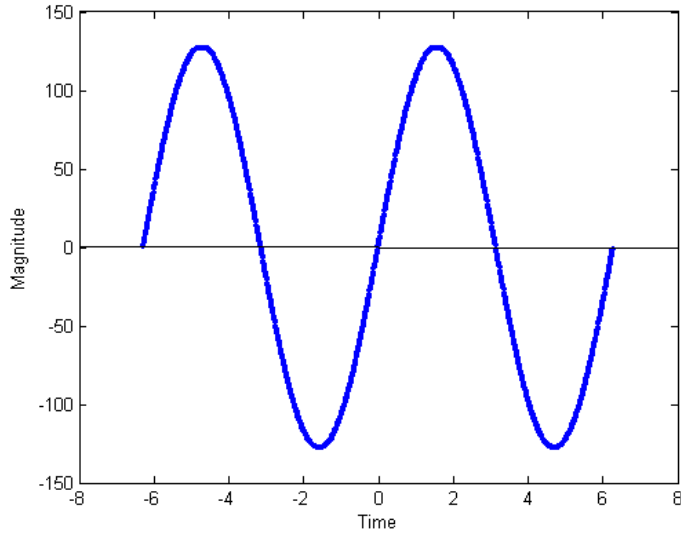
نرى أن الحاسب أو المعالج يلعب دورا مهما جدا في هذا الموضوع. إن الجذور الحقيقية لعلم معالجة الإشارات يمتد في التاريخ إلى ما قبل ظهور الحاسبات منذ بداية الأربعينيات، ولكن بالطبع فإن جذور المعالجة الرقمية للإشارات بالتحديد تبدأ منذ ظهور الحاسبات الرقمية في أواخر الستينيات وبداية السبعينيات ولكن الثورة الحقيقية فيها كانت مع الثورة الحقيقية للحاسبات والتي بدأت في منتصف الثمانينيات. في البداية كانت تطبيقات المعالجة الرقمية للإشارات مقتصرة على التطبيقات العسكرية فقط، ولكن مع ثورة الحاسبات والإلكترونيات امتدت هذه التطبيقات إلى كل نواحي الحياة، في التلفون والتلفزيون والراديو وفي كل أفرع الاتصالات وفي التطبيقات الطبية والفضاء والكشف عن التربة والمعادن وهذا قليل من كثير. عندما بدأ تدريس هذا العلم في بداية السبعينيات كان مقتصرًا على الدراسات العليا فقط، ومع التقدم التكنولوجي واتساع التطبيقات التي تستخدم هذا العلم أصبح يدرس الآن كمقرر أساسي في كل الخطط الدراسية لطلاب الجامعات في مرحلة البكالوريوس في الكثير من التخصصات ومنها تخصصات الإلكترونيات والاتصالات والحاسبات والقوى الكهربائية والميكانيكا وبالذات شعب الميكاترونك.

إن علم المعالجة الرقمية للإشارات يشمل تحته أو يتعامل مع الكثير من العلوم الأخرى مثل: الرياضيات والهندسة الكهربائية والدوائر الإلكترونية ونظرية الدوائر والحاسبات (برمجتها وهيكلتها) ونظرية الاحتمالات والكثير من العلوم الأخرى. في نفس الوقت ومع التقدم في علم المعالجة الرقمية للإشارات خرج من تحت عبائه الكثير من العلوم التي كانت أصلا مجرد موضوعات تدرس تحت مظلة هذا العلم، ومن هذه العلوم علم المعالجة الرقمية للصور الذي أصبح علما قائما بذاته الآن يدرس حتى في مستوى البكالوريوس في الكثير من الجامعات. المعالجة الرقمية للصوت والذي يشمل التعرف على الكلام وعلى المتكلمين وتوليد الصوت وضغطه، أصبح الآن من العلوم الشائعة. علم القياسات البيولوجية الذي يتعرف على الشخص من خلال بعض القياسات البيولوجية مثل صوته أو بصمة أصبعه أو بصمة يده

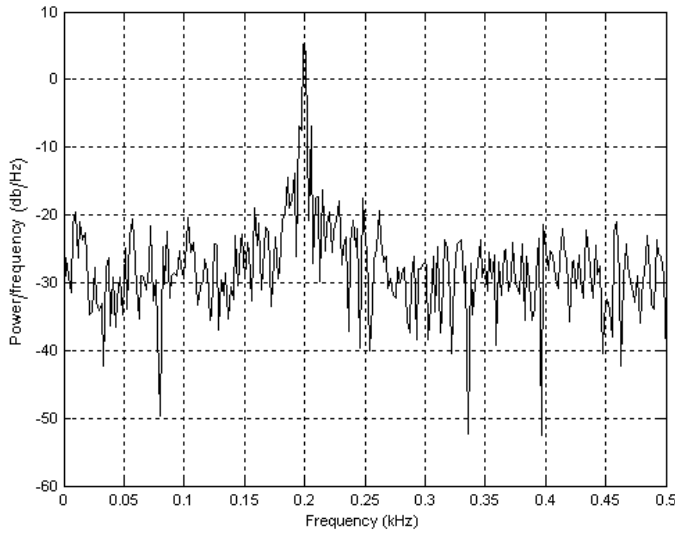
أو القزحية أو القرنية أو صورة وجهه وحتى شكل أذنه يستخدم الآن في التعرف على الأشخاص، ولا ننسى التعرف على الأشخاص من خلال الأحماض النووية DNA.

### ٣-١ عرض الإشارات Displaying signals

محور علم المعالجة الرقمية للإشارات كما نرى هو الإشارة، وقد أشرنا فيما سبق أن الإشارة هي متغير أو دالة تعتمد على متغير آخر أو أكثر. الإشارة من الممكن الحصول عليها من مصدر مخلق synthetic مثل المذبذبات oscillators بأنواعها المختلفة والتي نحصل منها على أشكال مختلفة لهذه الإشارات وبترددات ومقادير مختلفة كما في أجهزة المعامل. هناك الإشارات الطبيعية التي نحصل عليها من مصادر طبيعية مثل إشارة الصوت والصور وإشارة القلب وغيرها الكثير، وسنقدم في هذا الجزء بعضاً من هذه الإشارات مع حديث مختصر عن كل منها. يمكن رؤية أى إشارة أو عرضها في النطاق الزمنى وذلك باستخدام عارض الإشارة oscilloscope الذى يعرض تغير مقدار الإشارة مع الزمن كما في شكل ١-٨ الذى يعرض موجة جيبية في النطاق الزمنى حيث يمكن أن نرى من هذا الشكل كيفية تغير الإشارة مع تغير الزمن. هناك طريقة أخرى لعرض الإشارة وذلك من خلال المحلل الطيفي spectrum analyzer الذى يعرض الإشارة في النطاق الترددي حيث يعرض تغير الإشارة مع تغير التردد لذلك فإن محوره الأفقي يكون التردد ومحوره الرأسى يكون مقدار الإشارة كما في شكل ١-٩. لاحظ في هذا الشكل أن المحور الأفقي هو التردد بالكيلو هرتز والمحور الرأسى هو قدرة الإشارة عند كل تردد. هذا الشكل مرسوم لموجة جيبية ترددها ٢٠٠ هرتز مضافاً إليها ضوضاء white noise لاحظ مقدار الإشارة عند التردد ٢٠٠ هرتز الذى يمثل الإشارة الأصلية مع وجود الضوضاء عند جميع الترددات بنفس القدرة تقريباً مما يبين أهمية عرض الإشارات في هذا النطاق.

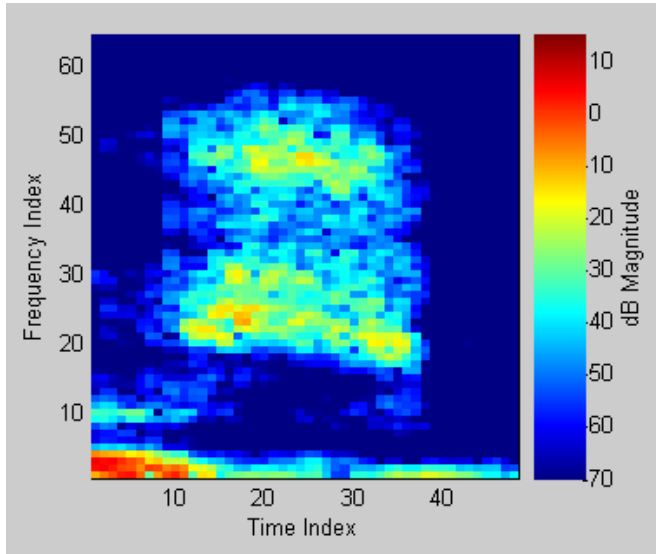


شكل ١-٨ تمثيل موجة جيبية في النطاق الزمني.



شكل ١-٩ النطاق الترددي من خلال محلل طيفي لموجة جيبية ترددها ٢٠٠ هرتز مضافا إليها ضوضاء.

كما رأينا فإن عرض الإشارة في النطاق الزمني يعرض تغير مقدار الإشارة مع الزمن ولكن تردد الإشارة ككمية مباشرة لا تظهر في هذا العرض. أما عرض الإشارة في النطاق الترددي فيعرض تغير قدرة الإشارة مع التردد، أما الزمن كقيمة متغيرة فلا يظهر في هذا العرض. هناك عرض ثالث يظهر فيه المتغيرات الثلاثة (الزمن والتردد ومقدار أو قدرة الإشارة) وهذا العرض هو ما يسمى الأسبيكتروجرام spectrogram والذي يعرض مقدار أو قدرة الإشارة كدالة في الزمن والتردد في نفس العرض. شكل ١-١٠ يبين هذا العرض. في هذا الشكل مقدار الإشارة هو كثافة أو شدة إضاءة أو وضوح النقطة إذا كانت الصورة أبيض وأسود، أما إذا كانت الصورة ألوان كما في شكل ١-١٠ فإن المفتاح الموجود في يمين الصورة يبين علاقة اللون بمقدار الإشارة وذلك بوحدات الديسبل. مثل هذه الأشكال (الاسبيكتروجرام) تستخدم عادة بواسطة أطباء السمع والكلام في تحديد مقدرة الشخص على سماع أو نطق بعض الترددات.



شكل ١-١٠ الأسبيكتروجرام يعرض علاقة المقدار مع التردد والزمن.



## ١-٤ أمثلة على بعض الإشارات

سنعرض هنا بعض الإشارات الشائعة والتي تستخدم معها الطرق المختلفة لمعالجة الإشارات الرقمية إما لتحسين نوعية هذه الإشارات عن طريق تخليصها من الضوضاء المضافة عليها، أو ضغطها لتصغير الحيز التخزيني لها تمهيدا لتخزينها على أى وسط من أوساط التخزين، أو إرسالها على قناة اتصال إلى نقطة أخرى، أو استخلاص بعض الخواص من هذه الإشارة حيث يتم استخدام هذه الخواص في التعرف على هذه الإشارة أو تقسيمها إلى مجموعات متجانسة clustering.

### ١-٤-١ إشارة الصوت Sound signal

إن إشارة الصوت تعتبر من أكثر الإشارات الطبيعية استخداما هذه الأيام ويدل على ذلك العلوم المختلفة التي انتشرت هذه الأيام والخاصة بالصوت فقط ويمكن أن نطلق عليها علوم الصوت والتي يندرج تحتها العلوم التالية:

### التعرف على الكلام Word recognition

وفيه يتم التعرف على الكلمة نفسها بحيث أنه بعد التعرف على الكلمة يتم تنفيذ فعل معين ومن أهم التطبيقات المستخدمة في ذلك تحويل الكلام إلى نصوص مكتوبة. فيمكن مثلا تحت مظلة هذا العلم أن يقوم الشخص الكفيف بالإملاء للحاسب الذى يقوم بطباعة النصوص التي تملى عليه. هناك طرق كثيرة وأبحاث عديدة مازالت نشطة هذه الأيام في طريقة التعرف على الكلام. فمثلا يمكن تقسيم الصوت المنطوق إلى أجزاءه الأساسية الفونيمات phonemes والتي يختلف عددها ونوعها من لغة إلى أخرى. عملية تحديد هذه الفونيمات في الصوت المنطوق يستلزم استخلاص بعض الخواص من هذه الإشارة، وهذه الخواص قد يتم استخلاصها من الإشارة وهى في النطاق الزمنى أو الترددي. عملية التعرف

على الكلام هنا قد تعتمد على المتكلم speaker dependent بمعنى أن الخواريزم يتعرف على الكلام المنطوق من شخص معين وإذا نطق شخص آخر نفس الكلام فإن نسبة التعرف تكون أقل، وقد تكون لا تعتمد على المتكلم speaker independent وهذا هو الشائع والأصعب بمعنى أن الخواريزم يتعرف على الكلام مهما كان الشخص الذى ينطق هذا الكلام.

### التعرف على المتكلم Speaker identification

هنا يتم التعرف على الشخص نفسه من خلال تحليل عينة من صوته بعد استخلاص بعض الخواص منها ومن أهم هذه الخواص التردد الأساسي pitch الذى يلعب دورا أساسيا في تحديد صوت كل شخص. تعتبر بصمة صوت المتكلم من أحد القياسات البيولوجية المهمة biometrics التي تستخدم في التعرف على الشخص مثلها مثل بصمة الإصبع واليد وشكل قزحية العين والشبكية وصورة الوجه.

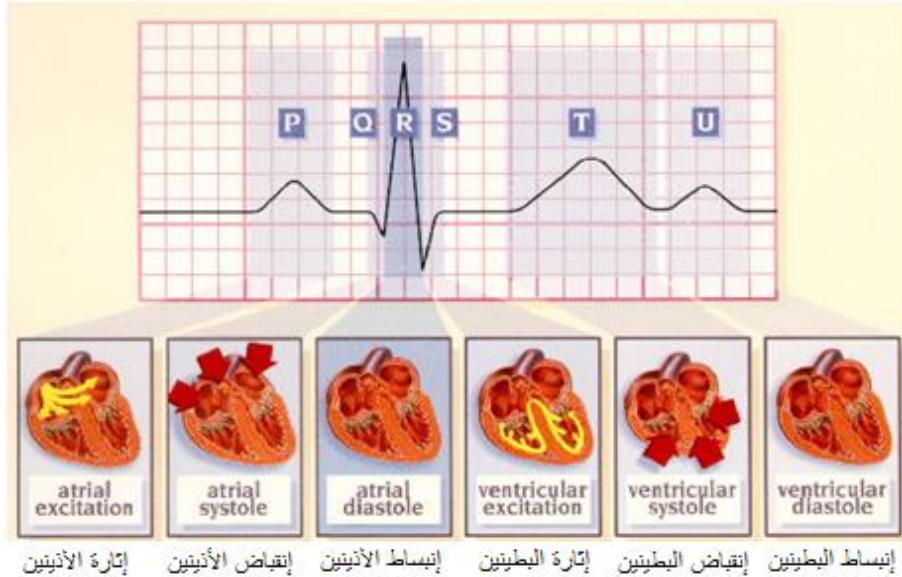
### تخليق الكلام Sound synthesis

يعتبر هذا أحد تطبيقات تحويل النص المكتوب إلى كلام منطوق حيث يتم التعرف على أحرف أو مقاطع النص المكتوب وتحويلها إلى فونيمات مخلقة داخل الحاسب ثم نطقها على حسب اللغة المستخدمة.

في كل التطبيقات السابقة تدخل موضوعات معالجة الإشارة رقميا في أكثر من مكان، فقد تكون خواريزم يستخلص الخواص السابقة، أو خواريزم يستخدم هذه الخواص في المقارنة واتخاذ قرار، أو خواريزم معالجة مبدئية للإشارة بعد تحويلها من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية، أو في صورة مرشح يستخلص الإشارة من الضوضاء noise المضافة إليها، أو في صورة تكبير لهذه الإشارة، أو في صورة خواريزم يحول الإشارة من النطاق الزمنى إلى النطاق الترددي أو العكس.

## ١-٤-٢ إشارة راسم القلب Cardiogram

راسم القلب هو جهاز يخرج منه عدد من الإلكتروودات electrodes التي تثبت على مواضع معينة في جسم الإنسان فيمكنها التقاط إشارات كهربية لها علاقة بحركة عضلة القلب أثناء انقباضه أو انبساطه. هذه الإشارات يتم رسمها مع الزمن بحيث من شكلها وترددتها ومقدارها في النطاق الزمني يستطيع الطبيب أن يستخلص الكثير عن حالة المريض، كما يمكن تحويل هذه الإشارة إلى النطاق الترددي واستخلاص بعض الخواص الأخرى التي يمكن استخدامها في خوارزم يمكنه التعرف على المرض باستخدام الحاسب. شكل ١-١١ يبين إشارة راسم القلب وعلاقة بعض النقاط المميزة فيها بحركة عضلة القلب. راسم القلب هنا نسوقه فقط كمثال على الإشارات الحيوية أو الطبية ولكن هناك إشارات أخرى مثلها مثل راسم القلب تستخدم بكثرة ومنها راسم المخ electroencephalogram وراسم العضلات electromiogram على سبيل المثال.



شكل ١-١١ إشارة راسم القلب وعلاقتها بحركة عضلة القلب.

### ١-٤-٣ معالجة الصور Image processing

هنا يتم أخذ الصورة بكاميرا ثم تحويلها إلى الصورة الرقمية وتخزينها في الحاسب حيث يمكن من هنا التعامل معها بالعديد من الخوارزميات التي تنفذ عليها العديد من طرق المعالجة والتي منها خوارزميات لتحسين هذه الصورة enhancement أو ضغطها compression أو تجزئتها segmentation تمهيدا للتعرف على بعض محتوياتها وغير ذلك الكثير. هذه الصور قد تكون وجه شخص يتم التعرف عليه، أو صورة مرسله من قمر صناعي أو سفينة فضاء ومطلوب التعرف على محتوياتها، أو صورة أشعة فوق صوتية لجزء معين من الجسم البشري لتحديد أو التعرف على مرض معين في هذا الجزء. المهم أن مصادر الصور لا حصر لها ولا حصر للتطبيقات التي تتطلب المعالجة الرقمية لهذه الصور في ظل التقدم الهائل في الحاسبات هذه الأيام. شكل ١-١٢ نسوقه كمثال عن ماذا تفعل خوارزميات المعالجة الرقمية للصورة حيث تبين الصورة اليسرى في هذا الشكل صورة قد حدث فيها اهتزاز blurring أثناء التصوير حيث أمكن معالجتها كما في الصورة اليمنى وإزالة آثار هذا الاهتزاز وقد أصبحت الصورة أكثر وضوحا.



شكل ١-١٢ مثال على أحد خوارزميات تحسين الصورة ، لاحظ الفرق. من أمثلة برنامج

.MATLAB

سنكتفي بهذا القدر من الأمثلة على الإشارات المختلفة والتطبيقات واضعين نصب أعيننا أن موضوع معالجة الإشارات رقمياً يدخل الآن في حياتنا اليومية بدرجة كبيرة والذي ذكرناه هو قليل من كثير فنحن لم نذكر الدور الذي يلعبه هذا العلم في أبسط الأجهزة التي نستخدمها في حياتنا اليومية مثل أجهزة التليفون المحمول mobile وأجهزة تسجيل واسترجاع الأصوات والصورة وإضافة الصدى أو حذفه وغير ذلك الكثير.

## ١-٥ تمارين

كل تمارين هذا الفصل ستكون مراجعة أو مقدمة عن برنامج MATLAB كما يلي:

١- التعرف على برنامج MATLAB وأجزائه المختلفه وإجراء بعض العمليات البسيطة على المصفوفات.

٢- التعرف على الأجزاء المختلفة في صندوق معالجة الإشارات signal processing toolbox وتنفيذ بعض الأمثلة demos الموجودة فيه.

٣- التعرف على الدوال التالية واستخدامها وفهم الفرق بينها:

wavread ( )

wavwrite ( )

wavplay ( )

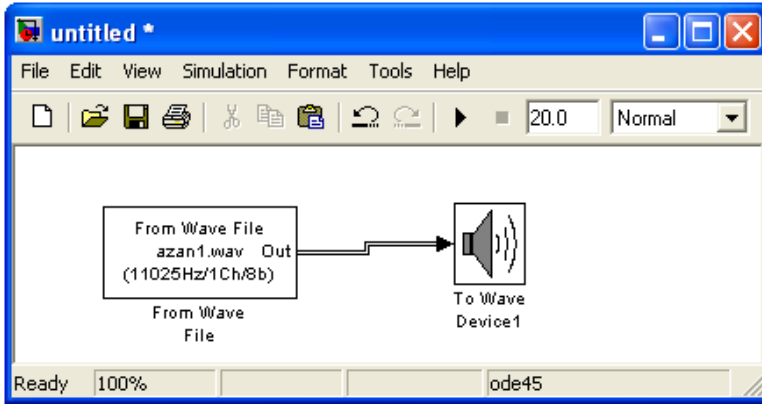
auread ( )

auwrite ( )

auplay ( )

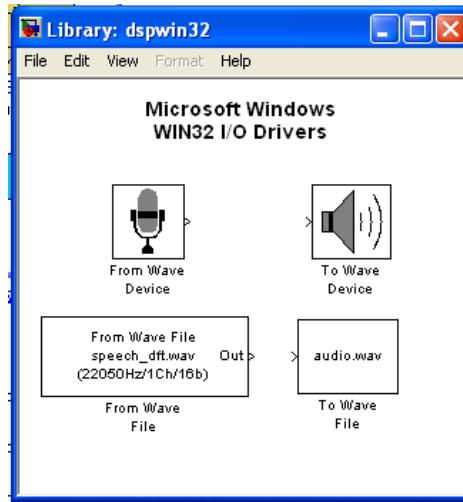
٤- التعرف على بعض بلوكات معالجة الإشارة signal processing block set وإجراء بعض التمارين عليها مثل إدخال إشارة صوت ثم إخراجها على سماعات الحاسب لسماعها.

٥- حاول التعرف على البلوكات الموجودة في نموذج شكل ت ١-٥ وتنفيذه:



شكل ت ١-٥.

٦- حاول التعرف على باقى بلوكات التعامل مع الصوت من مظلة النوافذ windows الموجودة في شكل ت ١-٦ واستخدمها في نماذج مختلفة من عندك وتنفيذها بحيث يمكنك تسجيل أصوات من خلال الميكروفون ثم استرجاعها.



شكل ت ١-٦.

٧- التعرف على بعض أجزاء صندوق معالجة الصور image processing toolbox وتنفيذ بعض الأمثلة demos الموجودة فيه.

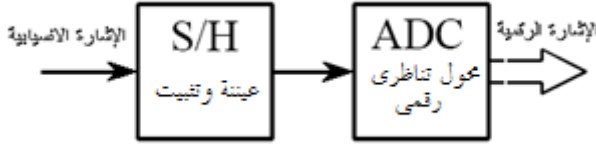
# الفصل الثانى

## التحويل من رقمى إلى تناظرى والعكس Analog to Digital and Digital to Analog Conversion

### ٢-١ مقدمة

إن عصر الإلكترونيا والحاسبات الذى نعيشه الآن قد فرض علينا التشابك بين الإشارات الرقمية digital والتناظرية analog بصورة لم يسبق لها مثيل. فإنه بالرغم من أن معظم الإشارات تكون فى منشأها فى الصورة الانسيابية (مثل تغير درجة الحرارة مع الزمن، تغير التيار مع الجهد، تغير شدة الإضاءة مع الزمن فى موقع معين وغير ذلك الكثير)، إلا أن الحاجة أصبحت ملحة الآن جدا لإيجاد الوسائل التى تقوم بعملية تحويل الإشارات من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية والعكس. الوسائل والطرق التى تقوم بعملية التحويل عديدة ومنها ما هو رخيص وما هو مكلف فأياها نختار؟ ما هو تأثير عملية التحويل على شكل الإشارة، وعلى كمية المعلومات الموجودة بها؟ ما هو شكل ونوع الضوضاء noise التى تضيفها عملية التحويل على الإشارة؟ كل هذه الأسئلة وغيرها سنجيب عليها من خلال هذا الفصل. شكل ١-٢ يبين رسما صندوقيا لنظام معالجة رقمية للإشارات. فى هذا النظام نجد أن أول مرحلة فيه هى مرشح تناظرى analog filter مهمته هى الحد من ترددات الإشارة التناظرية عند قيمة معينة قبل تحويلها إلى الصورة الرقمية حتى نتفادى عيب أو خطأ خطير يمكن أن يحدث فى الإشارة وهو ما يسمى بعيب التزييف aliasing الذى سندرسه بالتفصيل فيما بعد وسنلقى عليه الضوء فى هذا الفصل، وهذا هو الموضوع الوحيد تقريبا الذى نكون فيه مضطرين لاستخدام مرشح انسيابي فى نظام رقمى متكامل وهذا هو السبب أيضا الذى جعلنا نخصص فى هذا الكتاب فصلا خاصا بالمرشحات الانسيابية وطريقة تصميمها. فى نهاية النظام الرقمى

نحتاج دائما لتحويل إشارة الخرج من الصورة الرقمية إلى الصورة التناظرية مرة أخرى وهذه المرحلة يعقبها مرشح تناظري آخر تكون مهمته هي تعميم الإشارة الخارجة من النظام، وهذا هو الموضوع الآخر الذى نحتاج فيه المرشحات التناظرية.



### شكل ٢-١ مراحل تحويل الإشارة الانسائية إلى الصورة الرقمية.

إن الإشارة الرقمية هي تلك الإشارة التي لها مستويان مميزان فقط. المستوى العالي منهما يرمز له بالرمز 1 (واحد أو High) أما المستوى المنخفض فيرمز له بالرمز 0 (صفر أو Low). في حالة إشارة الجهد فإن المستوى العالي قد يكون ٥ فولت تقريبا والمستوى المنخفض صفر فولت تقريبا وهذا هو نظام TTL الأكثر شيوعا وهناك الأنظمة الأخرى التي لا يتسع المجال لذكرها هنا والتي ينفرد كل نظام منها بمستويات الجهد الخاصة به. أما الإشارة التناظرية فهي الإشارة التي من الممكن أن تأخذ مالا نهاية من القيم، أو ينساب شكلها أو مقدارها بين مستوييها الأعلى والأدنى. فمثلا لو أن لدينا إشارة تناظرية يتراوح جهدها ما بين الصفر وثمانية فولتات فإن ذلك يعنى أن جهد هذه الإشارة يمكن أن يأخذ مالا نهاية من القيم ( ٣,١٢ و ٤,٠٠٥ و ٧,٩٩٩.... وهكذا) بين هاتين القيمتين.

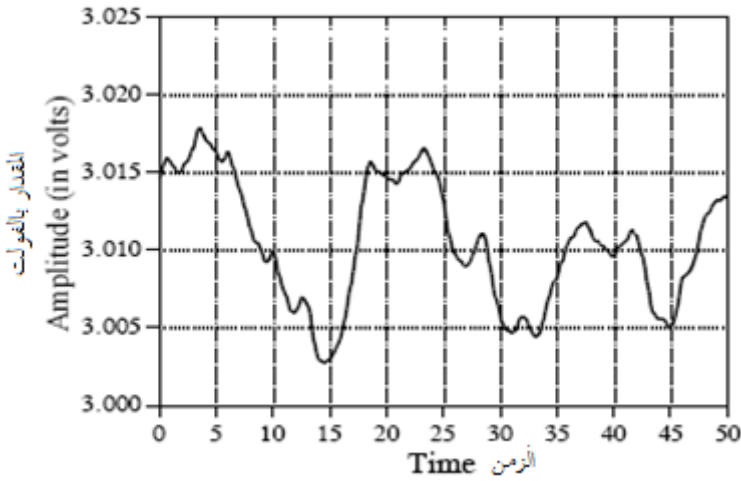
## ٢-٢ التحويل من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية

### Analog to Digital Converter, ADC Process

يتكون المحول التناظري الرقمي من مرحلتين كما في شكل ٢-١. المرحلة الأولى هي مرحلة مسك الإشارة ثم أخذ العينة sample and hold. المرحلة الثانية هي مرحلة تحويل قيمة



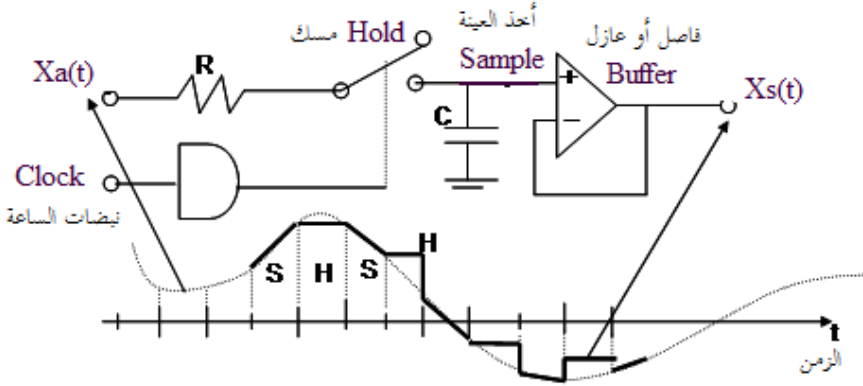
هذه العينة إلى قيمتها الرقمية المقابلة. عملية تحويل قيمة العينة من الصورة التناظرية إلى الصورة الرقمية تأخذ بعض الوقت وهذا الوقت يطول أو يقصر على حسب طريقة التحويل المستخدمة. في أثناء هذا الوقت (وقت التحويل) لا بد أن تكون القيمة التناظرية للإشارة ثابتة ولا تتغير وإلا حدث خطأ في القيمة الرقمية الناتجة. هذه المهمة (مهمة تثبيت إشارة الدخل في أثناء وقت التحويل) هو ما تقوم به دائرة المسك وأخذ العينة. شكل ٢-٢ يبين شكل إشارة جهد انسيابية وكما نلاحظ من هذا الشكل أن الإشارة لها قيمة عند كل لحظة من لحظات الزمن. كما أن قيمة الإشارة يمكنها أن تأخذ أى قيمة من ٣ إلى ٣,٠٢٠ فولت تقريبا (تأخذ مالا نهاية من القيم بين هذين المستويين).



شكل ٢-٢ إشارة جهد تناظرية.

شكل ٢-٣ يبين مكونات دائرة المسك وأخذ العينة حيث نلاحظ أن هذه الدائرة عبارة عن مفتاح إلكتروني ومكثف. يتم غلق المفتاح عن طريق نبضة على طرف الإطلاق trigger فيتم شحن المكثف إلى قيمة جهد الإشارة عند هذه اللحظة وهذه ستكون قيمة العينة التي سيتم تحويلها إلى الصورة الرقمية. بعد أخذ العينة يتم فتح المفتاح وتقف عملية شحن

المكثف ويتم مسك قيمة العينة على المكثف فلا تتغير طوال مدة الفترة الزمنية التي يقوم المحول فيها بعملية التحويل. شكل ٢-٣ يبين أيضا شكل الإشارة التناظرية عند مدخل دائرة المسك وشكل الإشارة التي ستظهر عند خرج هذه الدائرة. نلاحظ أن الخرج عبارة عن عينات من إشارة الدخل عند لحظات زمنية محددة ومتساوية ويتم إهمال قيمة الإشارة أو أى تغير فيها بين هذه اللحظات وهي فترات المسك. أي أن عملية المسك وأخذ العينات تمثل عملية تقطيع أو عينة sampling منتظمة لمتغير الزمن.



شكل ٢-٣ مكونات دائرة المسك وأخذ العينة وشكل الإشارة عند دخلها وخرجها.

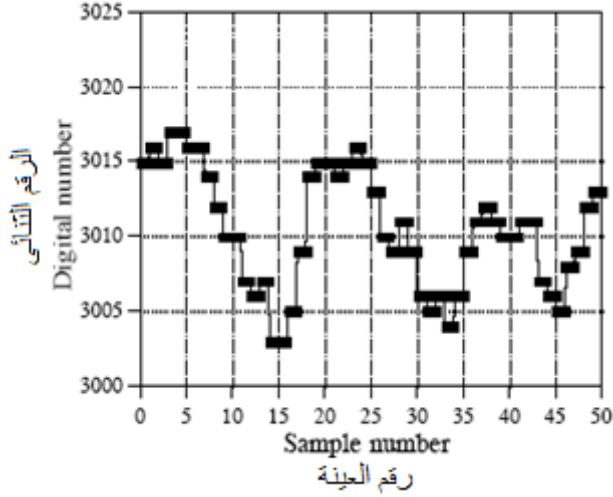
في أثناء مسك الإشارة، تدخل هذه الإشارة على المحول التناظري الرقمي الذي يعطى قيمة رقمية digital مقابلة لقيمة الإشارة التناظرية التي تم مسكها. بفرض أن المحول التناظري الرقمي يعطى خرج على ١٢ بت فإن الخرج سيأخذ قيمة تتراوح من الصفر حتى ٤٠٩٥  $(2^{12})$ . هذه العملية هي ما يطلق عليها التكميم quantization حيث يتم بها وضع العينة في قيمة من ٤٠٩٦ قيمة يتم تقسيم مدى الإشارة التناظرية إليها. أي أن عملية التحويل أو التكميم تقسم مدى الإشارة الانسيابية إلى  $2^n$  من المستويات بحيث تأخذ كل عينة من العينات قيمة هذا المستوى على حسب قيمة هذه العينة. إذا وقعت قيمة العينة بين

مستويين من مستويات التكميم فإنها تأخذ قيمة المستوى الأقرب لقيمتها. بفرض أن الإشارة التناظرية الموجودة في شكل ٢-٢ تتراوح قيمتها من صفر حتى 4.095 فولت، فإنه بتقسيم هذا المدى إلى 4095 مستوى أو قيمة فإن كل قيمة أو مستوى ستكون واحد ميللى فولت. شكل ٢-٤ يبين شكل الإشارة التناظرية الموجودة في شكل ٢-٢ بعد خرجها من المحول التناظرى الرقمي، أو بمعنى آخر بعد عملية التكميم. نلاحظ أن الخرج أصبح عبارة عن مجموعة من الأرقام تتراوح من 3000 حتى 3025 كما في الشكل. يمكن للإشارة التناظرية أن تأخذ القيمة 3.0154 وفى هذه الحالة ستأخذ القيمة أو الكمية 3015 عند خرج المحول. ويمكن أيضا للإشارة التناظرية أن تأخذ القيمة 3.0156 وفى هذه الحالة فإن قيمة الإشارة ستقرب إلى الكمية الرقمية أو المستوى 3016.

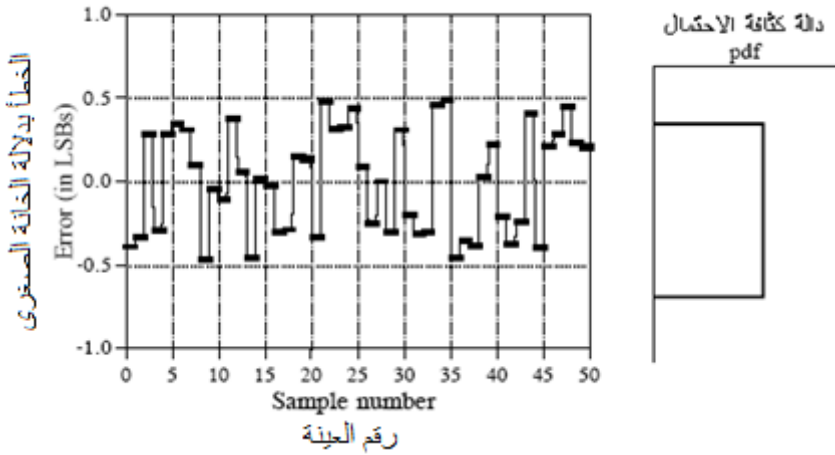
إن عملية التكميم quantization تضيف ضوضاء على الإشارة الأصلية نتيجة التقريب لأقرب مستوى كما ذكرنا سابقا. هذه الضوضاء هى ناتج طرح الإشارة الموجودة في شكل ٢-٤ من الإشارة الأصلية الموجودة في شكل ٢-٢. هذه الضوضاء تكون عشوائية random noise مقدارها يتراوح بين الصفر و0.5LSB حيث LSB هى أقل مقدار للإشارة يمكن تمييزه بهذا المحول وتساوى  $\frac{1}{2^n - 1}$  وكما نلاحظ فإن مقدار هذه الضوضاء يقل مع زيادة عدد بتات المحول n. شكل ٢-٥ يبين شكلا افتراضيا لتغير هذه الضوضاء مع الزمن ويبين أيضا دالة كثافة الاحتمال لهذه الإشارة حيث نلاحظ أن لها توزيعا منتظما uniform distribution.

بعد أن رأينا تأثير عملية التكميم وكيف أنه مع زيادة عدد بتات التحويل فإن الإشارة الرقمية تقارب الإشارة التناظرية بدرجة أكبر من حيث الشكل، ما هو الموقف من حيث المعلومات الموجودة فى الإشارة التناظرية؟ هل كل المعلومات الموجودة فى الإشارة الانسيابية سيتم استرجاعها دون فقد أى جزء منها؟ وما هو الشرط الذى يجب أن نوفره لكى نضمن الحصول على كل هذه المعلومات؟ إن هذا ما تجيب عليه نظرية العيننة أو التقطيع التى

سنقدم شرحا مبسطا لها في الجزء التالي دون الدخول في تفاصيلها حتى ندرس محول فورير الذى سيقدم لنا تعليلا لكل الحقائق التى سنفرضها هنا.



شكل ٢-٤ خرج المحول التناظرى الرقمي.



شكل ٢-٥ مقدار الضوضاء المضافة نتيجة المحول التناظرى الرقمي ودالة كثافة الاحتمال لهذه الإشارة.

## ٢-٣ نظرية أخذ العينات في النطاق الزمني

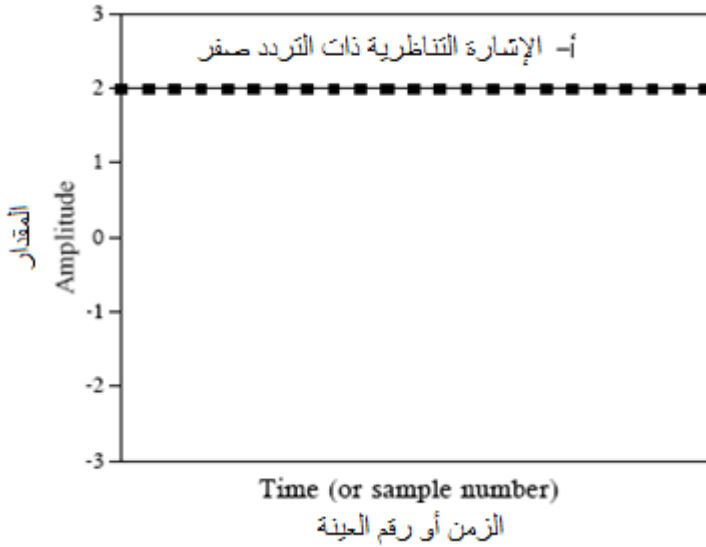
### Sampling Theory in Time Domain

الهدف من دراسة نظرية العيننة أو التقطيع هو تحديد أنسب معدل لتقطيع الإشارة التناظرية عن طريق دائرة المسك في الجزء السابق. المعدل الأنسب بالطبع سيكون هو المعدل الذى يمكن باستخدامه استرجاع جميع المعلومات التى كانت موجودة فى الإشارة التناظرية بعد تحويلها إلى الصورة الرقمية ثم إعادةتها مرة أخرى إلى الصورة التناظرية عن طريق محول رقمى تناظرى Digital to Analog Converter, DAC. هناك مشكلة فعلا فى اختيار هذا المعدل الأنسب optimum. هذا المعدل إذا قل عن كمية معينة فإنه لن يتم استرجاع كل المعلومات، كما أنه سيضاف ضوضاء على الإشارة تسمى ضوضاء التزييف aliasing noise التى ستتعرف عليها بعد قليل. إذا زاد هذا المعدل عن ما يلزم بدرجة كبيرة فإن ذلك سيكلف زيادة كبيرة فى مساحة وسط التخزين اللازم لتخزين هذه الإشارة فى صورتها الرقمية (الذاكرة)، كما أنها ستحتاج لزمان أطول فى إجراء العمليات الحسابية المطلوب إجراؤها على الحاسب، لذلك كان لابد من البحث عن المعدل الأنسب optimum لأخذ عينات الإشارات التناظرية.

نظرية العيننة أو التقطيع يمكن استنتاجها رياضيا بعد دراسة تحويلات فوريير، وهذا ما سنراه فيما بعد بالتفصيل. ولكن يمكن أيضا استنتاج نظرية العيننة دون الخوض فى هذه المعادلات وذلك من خلال شرح مبسط لما يحدث عند أخذ عينات أى إشارة تناظرية وتحويلها إلى الصورة الرقمية، ثم إعادةتها مرة أخرى للصورة التناظرية الأصلية لنرى ماذا حدث لها. لذلك سنفترض هنا أن لدينا إشارة تناظرية بتردد معين وسنأخذ منها عينات أو نعينها بمعدل معين مع تغيير تردد الإشارة التناظرية باستمرار من الصفر إلى أن يساوى معدل العيننة، وسنرى فى كل مرة إن كان من الممكن أن نسترد الإشارة الأصلية دون تغيير أم لا. هذه الطريقة من مرجع " The scientist and engineering guide to digital signal

"processing" وهو متاح على الشبكة الدولية يمكن تحميله من قبل القارئ والاستفادة منه.

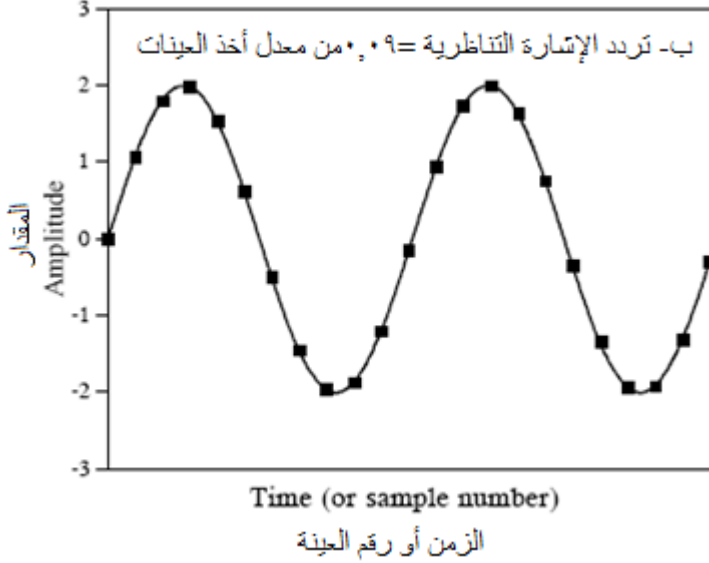
أ- شكل ٦-٢ يبين إشارة انسيابية (تناظرية) ذات تردد صفر (dc) وتم أخذ العينات منها بمعدل معين. في هذه الحالة يتضح أنه مجرد التوصيل بين العينات المختلفة سنحصل على الإشارة التناظرية الأصلية دون أى فقد أو ضوضاء مضافة كما في الشكل.



شكل ٦-٢ استرجاع الإشارة التناظرية ذات التردد صفر بعد أخذ عينات منها بأي معدل.

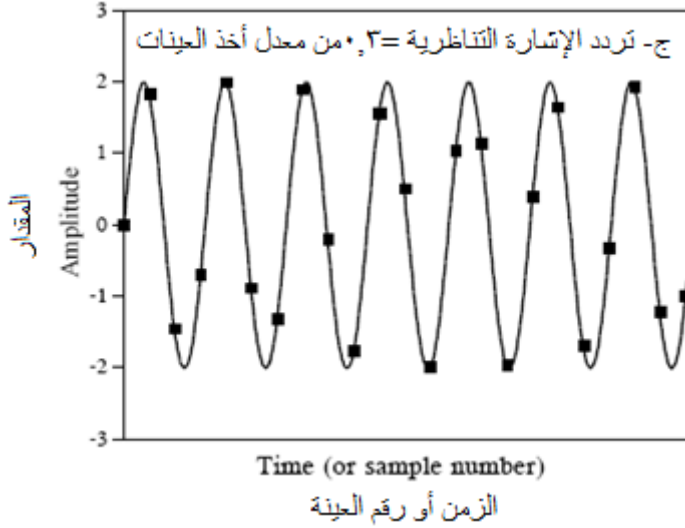
ب- هنا سنرفع من تردد الإشارة التناظرية بحيث يساوى تقريبا ٠,٠٩ من معدل العينة. أي أن كل دورة من دورات الإشارة التناظرية تحتوى تقريبا ١١,١ عينة أو نقطة تعيين كما في شكل ٧-٢. هنا يمكن أن نسأل سؤال، كم موجة جيبية أو موجة مركبة يمكنها أن تمر بجميع نقاط التقطيع الموضحة في شكل ٧-٢؟ الإجابة بسيطة، إنها موجة وحيدة فقط وهي الموضحة في الشكل التي يمكنها أن تمر بجميع نقاط أخذ

العينات، وعلى ذلك فإن هذه النقاط تعبر تماما على الإشارة الانسيابية ويمكن استرجاعها منها.



شكل ٢-٧ استرجاع الإشارة التناظرية ذات التردد 0.09 من معدل التقطيع، دون أى مشكلة. لاحظ وجود ١٠ نقط فقط لأخذ العينات في كل دورة للإشارة التناظرية.

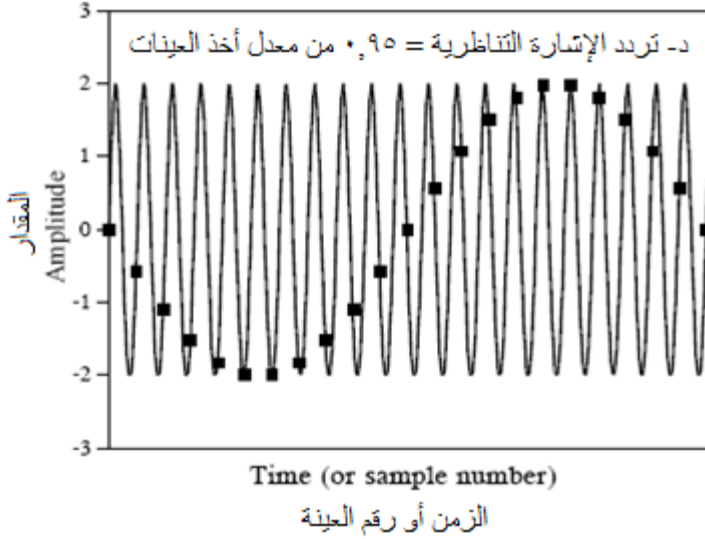
ج- سنستمر في زيادة تردد الإشارة التناظرية إلى أن يصبح 0.3 من معدل أخذ العينات. أي أنه في هذه الحالة يوجد 3,3 عينة أو نقطة عينة في كل دورة من دورات الإشارة التناظرية كما في شكل 2-8. مرة ثانية وبالرغم من أن نقاط العينة موزعة على أزمنة بعيدة على الإشارة التناظرية إلا أن هذه النقاط مازالت تمثل الإشارة التناظرية تمثيلاً فريداً إذ لا يمكن أن يكون هناك موجة جيبية يمكنها أن تمر بنقاط العينة هذه إلا هذه الموجة فقط. لذلك فإنه يمكن استرداد الموجة الأصلية التناظرية من هذه النقاط.



شكل ٢-٨ تردد الإشارة الانسيابية يساوى 0.3 من معدل التقطيع. لاحظ وجود ٣ نقاط تقريبا لأخذ العينات في كل دورة للإشارة التناظرية.

د- الآن سنرفع من تردد الإشارة التناظرية إلى أن يصبح 0.95 من معدل العينة، أي أنه سيكون هناك نقطة عينة واحدة تقريبا في كل دورة من دورات الإشارة التناظرية كما في شكل ٢-٩، فهل هذه النقاط تمثل الإشارة التناظرية تمثيلا فريدا كما في الحالات السابقة؟ الإجابة هي لا، إذ أن هذه النقاط تمثل موجة جيبيية مختلفة تماما عن الموجة التناظرية الأصلية وبالتحديد فإن هذه النقاط تمثل موجة جيبيية ترددها هو ٠,٠٥ من معدل أخذ العينات كما في الشكل، لم تعد الإشارة الرقمية تمثل الإشارة التناظرية تمثيلا فريدا. هذا الخطأ هو ما يطلق عليه خطأ التزييف أو التزوير aliasing، إذ أن الإشارة تظهر بتعدد مزور أو مستعار غير التردد الحقيقي الخاص بالإشارة التناظرية. باختصار فإن عملية العينة هنا تكون عملية فاشلة حيث لا يمكن استرجاع المعلومات الأصلية الموجودة في الإشارة التناظرية كما هي وبأمانة كما رأينا.

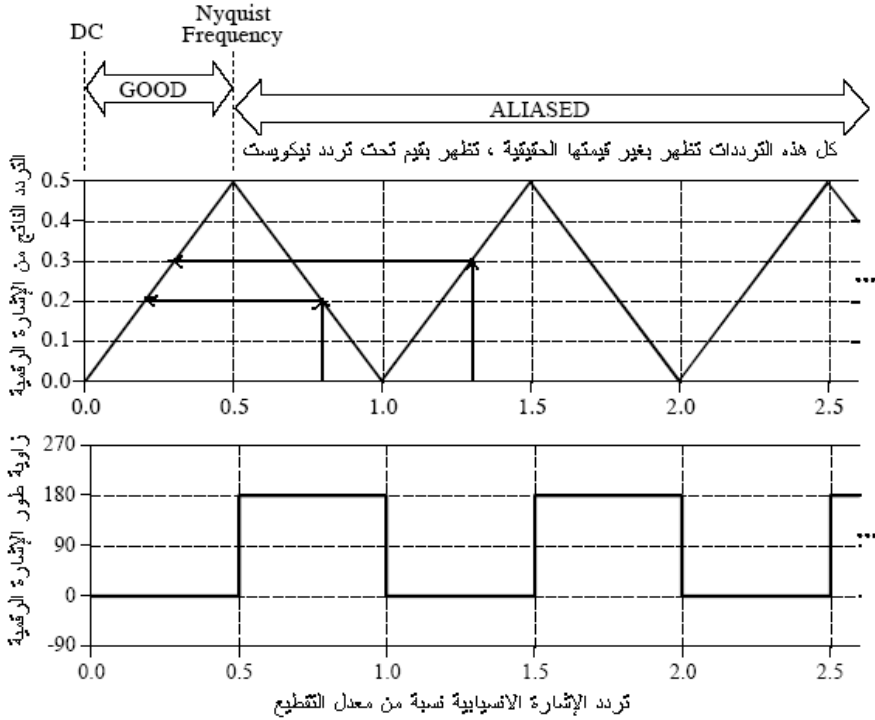




شكل ٢-٩ تردد الإشارة الانسيابية يساوى تقريبا معدل التقطيع فتنتجت موجة جيبيه مختلفة عن الموجة التناظرية الأصلية.

هـ - إن هذا يقودنا إلى وضع نص نظرية أخذ العينات أو نظرية شانون Shannon أو نظرية نيكويست Nyquist نسبة إلى مؤلفى هذه النظرية سنة ١٩٤٠. هذه النظرية تقول "إن أى إشارة تناظرية يمكن عينتها واسترداد كل ما بها من معلومات إذا كان أكبر تردد فيها أقل من نصف معدل أخذ العينات المستخدم" أى أنه إذا كان معدل العينة هو ٢ كيلوهرتز مثلا، فإن الإشارة التناظرية يجب ألا تحتوي ترددات أكثر من ١ كيلوهرتز، وإذا احتوت مثل هذه الترددات (أكبر من ١ كيلوهرتز) فإن هذه الترددات ستظهر بقيم مختلفة عن قيم ترددها الأصلية وستقع هذه الترددات فى المدى من صفر حتى ال ١ كيلوهرتز وستظهر مضافة إلى المكونات الأصلية التى لها نفس الترددات مما يسبب تشويها للإشارة الأصلية. يمكن أن نضع ذلك بصورة أخرى، إذا كان لدينا إشارة تناظرية تحتوى الترددات من صفر حتى ٤ كيلوهرتز (مثل إشارة الصوت)، هذه الإشارة عندما نحولها إلى الصورة الرقمية يجب أن يكون معدل أخذ العينات المستخدم لا يقل عن ٨ كيلوهرتز. ممكن لمعدل العينة أن يزيد

عن ال ٨ كيلوهرتز وهذا يكلف كما قلنا ذاكرة وزمن معالجة أكثر، ولكن يجب ألا يقل معدل العينة عن حد ال ٨ كيلوهرتز (معدل نيكويست)، وإلا سيحدث خطأ التزوير كما رأينا.



شكل ٢-١٠ الترددات الأعلى من نصف معدل العينة تظهر بقيم مختلفة وزاوية طور مختلفة.

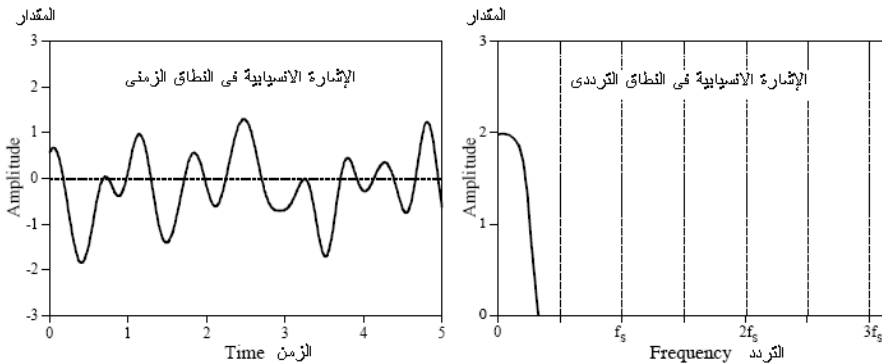
شكل ٢-١٠ يبين تغير تردد الإشارة التناظرية نسبة من معدل أخذ العينات، وتردد الإشارة الرقمية الناتجة، حيث نلاحظ من هذا الشكل أنه طالما أن تردد الإشارة الرقمية أقل من معدل نيكويست فإن عملية أخذ العينات تكون مثالية. جميع الترددات التناظرية الأعلى من

معدل نيكويست تظهر بتردد مغايرة لتردها الحقيقي. في شكل ٢-١٠ الترددات التناظرية ٠,٨ و ١,٢ و ١,٨ و... كلها تظهر بالتردد الرقمي المزيف ٠,٢.

## ٢-٤ نظرية أخذ العينات في النطاق الترددي

### Sampling Theory In Frequency Domain

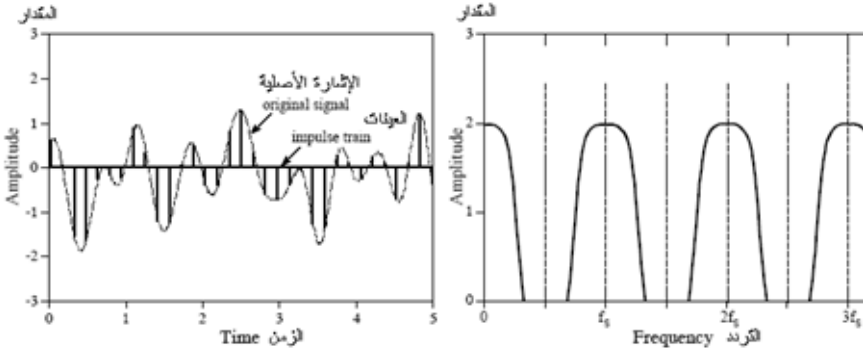
يمكن رؤية حدود واشتراطات نظرية أخذ العينات في النطاق الترددي وهذا يعتبر منظورا جديدا ورؤية جديدة ربما تكون أكثر وضوحا لهذه النظرية. كيفية الدخول أو الانتقال إلى النطاق الترددي سيتم شرحها بالتفصيل في الفصول القادمة وبالتحديد في معرض الحديث عن تحويل فوريير. ولكن مبدئيا سنحدد النطاق الترددي بأنه تعبير عن الإشارة كعلاقة بين مقدارها كدالة في التردد كما أشرنا إلى ذلك في الفصل الأول وذكرنا أن المحلل الطيفي هو الجهاز المستخدم لعرض أى إشارة في هذا النطاق حيث يعرض المحتويات الترددية لهذه الإشارة. شكل ٢-١١ يبين إشارة تناظرية (إشارة صوت مثلا) وقد تم عرضها في كل من النطاقين الزمني والترددي. في النطاق الترددي تم توقيع مواضع تردد العينة  $f_s$  ومضاعفاته  $2f_s$  و  $3f_s$  وهكذا. ولقد راعينا كما في الشكل أن ينتهي المجال الترددي للإشارة التناظرية قبل التردد  $0.5f_s$ ، أي أن الإشارة التناظرية لا تحتوى أى ترددات أعلى من هذا التردد حتى نحافظ على شروط نظرية العينة.



شكل ٢-١١ إشارة تناظرية في النطاق الزمني والنطاق الترددي.

تخيل الآن أننا قمنا بأخذ عينات الإشارة التناظرية وحولناها إلى عينات وذلك بمعدل عينة يساوي  $f_s$  ، فما هو شكل الإشارة المعينة في النطاق الترددي. شكل ٢-١٢ يبين الإشارة الانسيابية في صورتها المعينة الجديدة وفي المقابل شكل هذه الإشارة في النطاق الترددي.

الإشارة التناظرية المعينة في النطاق الترددي الإشارة التناظرية المعينة في النطاق الزمني

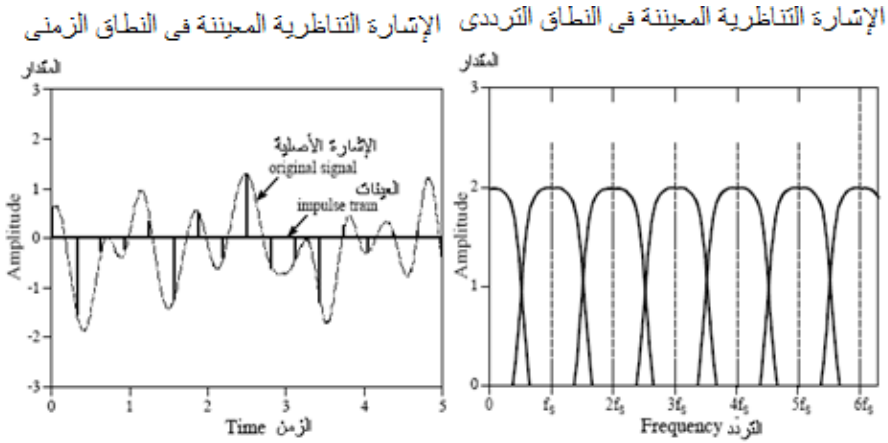


شكل ٢-١٢ الإشارة المعينة التي تحقق شرط نظرية العيننة مثلة في النطاق الزمني والنطاق الترددي.

الجديد هنا والجدير بالملاحظة في شكل ٢-١٢ أن طيف spectrum الإشارة التناظرية قد تم تكراره أو نسخة عند كل قيمة لتعدد التقطيع  $f_s$  و  $2f_s$  و  $3f_s$  وهكذا. في هذا الشكل نلاحظ أن النسخ المختلفة لطيف الإشارة التناظرية منفصلة عن بعضها تماما بحيث أنه يمكن في هذه الحالة باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF أن نسترجع الإشارة الأصلية دون أى مشكلة تزييف aliasing أو ضوضاء. ولذلك فإن عملية العيننة في هذه الحالة تعتبر عملية مثالية إذ أنه يمكننا أن نحصل على الإشارة الأصلية تماما من الإشارة المعينة.

ما هو الموقف لو أن معدل العيننة المستخدم لا يحقق نظرية العيننة، أي أن طيف الإشارة التناظرية يتخطى أو يحتوى مكونات أو ترددات أعلى من نصف تردد العيننة  $0.5f_s$  ؟ هذا الموقف يبينه شكل ٢-١٣ حيث نلاحظ من هذا الشكل أن النصف الأدنى من طيف الإشارة أصبح يتقاطع مع النصف الأعلى من الطيف نفسه بحيث أنه أصبح من المستحيل

استخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF لكي نسترجع الإشارة الأصلية نقيه كما يجب، ولذلك فإن عملية العيننة هنا ليست مثالية ولا يمكن استخدامها. من هنا نلاحظ أن شرط نظرية العيننة وهو أن يكون أعلى تردد في الإشارة الانسيابية أقل من نصف تردد التقطيع يعتبر شرطاً مهماً حتى لا يحدث خطأ التزيف aliasing.



شكل ٢-١٣ إشارة تناظرية معيّنة لا تحقق نظرية العيننة ممثلة في النطاق الزمني والنطاق الترددي.

كما رأينا فإن عملية التقطيع ما هي إلا عملية أخذ عينات من الإشارة التناظرية عند فترات منتظمة ويمكن التعبير عن ذلك كما في المعادلة التالية حيث  $x_a(t)$  تمثل الإشارة التناظرية:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= A \cos(2\pi f t + \varphi) \\ &= A \cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1-2)$$

لكي تتم عملية العيننة سنغوض عن الزمن  $t$  بالقيمة  $nT_s$  حيث  $T_s = 1/f_s$  حيث  $T_s$  هي زمن العيننة و  $f_s$  هي معدل أو تردد العيننة. بالتعويض عن ذلك في المعادلة (٢-١) يمكن كتابة الإشارة التناظرية في صورة تتابع كما يلي:

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(2\pi f n T_s + \varphi) \\ &= A \cos(\Omega n T_s + \varphi) \end{aligned}$$

بوضع  $T_s = 1/f_s$  و  $\Omega_s = 2\pi f_s$  فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(2\pi \Omega n / \Omega_s + \varphi) \\ &= A \cos(\omega n + \varphi) \end{aligned} \quad (2-2)$$

حيث  $\omega$  تمثل السرعة الزاوية الرقمية، وعلاقتها بالسرعة الزاوية الانسيابية  $\Omega$  هي كما يلي:

$$\omega = 2\pi \Omega / \Omega_s = \Omega T_s \quad (3-2)$$

لاحظ من المعادلة (2-1) أن وحدات السرعة الزاوية الانسيابية  $\Omega$  هي radians/second، بينما وحدات السرعة الزاوية الرقمية من المعادلة (2-2) هي radians/sample.

### مثال 2-1

افتراض أن لدينا ثلاث إشارات انسيابية  $x_1(t)$  وترددتها هو 3Hz و  $x_2(t)$  وترددتها هو 7Hz و  $x_3(t)$  وترددتها هو 13Hz. الإشارات الثلاثة تم أخذ عيناتها بمعدل تقطيع  $f_s = 10\text{Hz}$ . يمكن كتابة الإشارات الثلاث السابقة كما يلي:

$$x_1(t) = \cos(6\pi t), \quad x_2(t) = \cos(14\pi t), \quad x_3(t) = \cos(26\pi t)$$

يمكن كتابة النتائج الناتجة عن أخذ عينات هذه الإشارات باستخدام المعادلة (2-3) حيث  $T_s = 1/f_s = 0.1$  كما يلي:

$$x_1[n] = \cos(0.6\pi n) \quad x_2[n] = \cos(1.4\pi n) \quad x_3[n] = \cos(2.6\pi n)$$

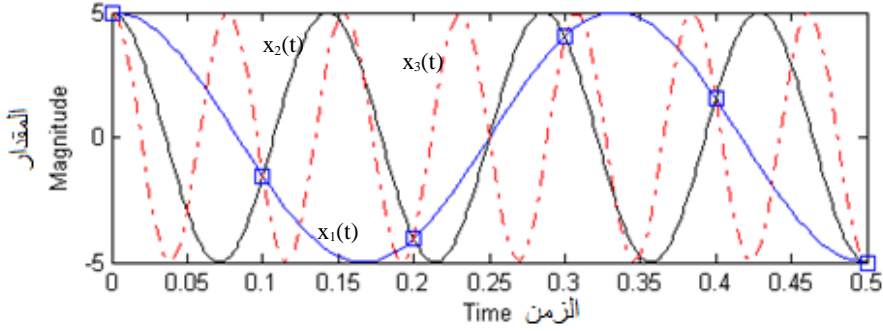
النتائج  $x_2[n]$  يمكن كتابته كما يلي باستخدام حساب المثلثات:

$$x_2[n] = \cos((2\pi - 0.6\pi)n) = \cos(0.6\pi n)$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة التابع  $x_3[n]$  كالتالي:

$$x_3[n] = \cos((2\pi + 0.6\pi)n) = \cos(0.6\pi n)$$

من هذا نرى أن التابع الناتج عن الإشارة التناظرية  $x_1(t)$  وهو  $x_1[n]$  يمثل أيضا الإشارتين التاليتين وهما  $x_2(t)$  و  $x_3(t)$ . أي أن الإشارة التناظرية التي ترددها ٧ هرتز ظهرت بعد أخذ عيناتها كما لو كانت إشارة تناظرية ترددها هو ٣ هرتز ، لاحظ أن هذه الإشارة لا تحقق شرط نيكويست لأخذ العينات. كذلك الإشارة الانسيابية التي ترددها ١٣ هرتز والتي لا تحقق شرط نيكويست هي الأخرى ظهرت بالتردد ٣ هرتز بدلا من ترددها الحقيقي. الإشارة الوحيدة التي ظهرت بترددها الحقيقي هي الإشارة الأولى التي ترددها ٣ هرتز والتي تحقق شرط نيكويست. أي أنه بعد أخذ عينات الثلاث إشارات السابقة ثم استرجاع الإشارات الأصلية مرة أخرى فإننا لن نحصل إلا على الإشارة التي ترددها ٣ هرتز فقط. شكل ٢-١٤ يبين الثلاث إشارات التناظرية السابقة  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  و  $x_3(t)$ ، ثم تم أخذ عينات الإشارة الأولى (٣ هرتز) ونقاط العينة موضحة بالمرعبات كما في الشكل. لاحظ أن كل مربع من المرعبات تمر به الثلاث إشارات مما يعني أن هذه العينات تمثل الثلاث إشارات، وهذا يوضح بجلاء مشكلة التزيف aliasing التي تظهر كما ذكرنا نتيجة أخذ العينات مع عدم تحقيق شرط نيكويست.



شكل ٢-١٤ العينات الممثلة بالنقاط المربعة تمثل أكثر من إشارة لا تحقق شرط نيكويست.

## ٢-٥ المحول التناظري الرقمي A/D أو ADC

يقوم المحول التناظري الرقمي بتحويل الإشارة التناظرية إلى إشارة رقمية وعلى ذلك فإنه سيكون له دخل واحد وهو الإشارة التناظرية وعدد  $n$  من البتات في الخرج وذلك على حسب نوع المحول، والمتاح في السوق والشائع الاستخدام هي المحولات ذات ٨ بتات و ١٠ بتات و ١٢ بت. يجب أن نتذكر هنا أنه معنى أن الخرج ٤ بتات مثلاً فإن ذلك يعنى أن الخرج الرقمي يمكن أن يأخذ  $2^4$  أى ١٦ شفرة مختلفة وكل واحدة من هذه الشفرات تقابل قيمة معينة من جهد الدخل التناظري. أنواع المحولات التناظرية/الرقمية كثيرة ويتوقف سعر (وبالتالى جودة) الواحد منها على عدد بتات الخرج وعلى سرعة تحويل المحول من جهد تناظري إلى جهد رقمي. إنه بالطبع كلما زاد عدد بتات خرج المحول كلما ازداد سعره لأن دائرته تكون أكثر تعقيداً وتكون مقدرته التحليلية resolution أفضل.

تحدد سرعة المحول بالزمن الذى يأخذه لتحويل الإشارة التناظرية إلى الصورة الرقمية وعلى هذه السرعة يتوقف سعر المحول بدرجة كبيرة وعلى حسب هذه السرعة توجد أنواع كثيرة وطرق عديدة للتحويل من الصورة التناظرية إلى الرقمية وسنشرح بعض هذه الطرق فيما يلي.



## ٢-٥-١ المحول التناظري الرقمي باستخدام المقارنات Comparator ADC

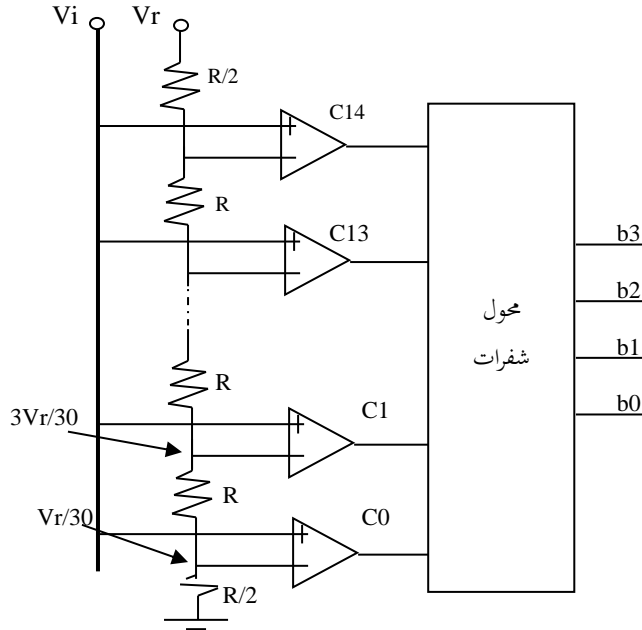
هذه الطريقة تسمى الطريقة الفورية flash method لأنها تعتبر أسرع طرق التحويل من تناظري إلى رقمي. شكل ٢-١٥ يبين دائرة محول تناظري/رقمي ذي ٤ بتات بهذه الطريقة. إن هذا النوع من المحولات يعتمد على تخصيص مقارن لكل مستوى من مستويات الخرج، وكما هو مبين في هذا الشكل فإن هذا المحول سيكون له ٢<sup>٤</sup> أى ١٦ مستوى منها مستوى الصفر. بالنظر لهذا الشكل نجد أن هناك مصدرين للجهد أحدهما هو الجهد  $V_i$  وهو الجهد التناظري المطلوب تحويله إلى الصورة الرقمية والجهد الآخر هو جهد المرجع  $V_r$ . جهد المرجع هذا قد تم تقسيمه إلى ١٦ مستوى باستخدام ١٦ مقاومة كلها لها القيمة  $R$  ما عدا مقاومتي الطرفين فإن كلا منهما قيمتها  $R/2$ . لذلك فإن هذا التوزيع للمقاومات سيجعل جهد المرجع للمقارن  $C_0$  يساوى  $V_r/30$  وللمقارن  $C_1$  يساوى  $3V_r/30$  وللمقارن  $C_3$  يساوى  $5V_r/30$  وهكذا. لاحظ أن أى واحد من هذه المقارنات يكون خرجها واحد (ثنائياً) إذا كان دخله الموجب المتصل بجهد الدخل  $V_i$  أكبر من دخله السالب المتصل بجهد المرجع ويكون خرج هذا المقارن صفراً إذا كان دخله السالب أكبر من دخله الموجب. ولذلك فإننا نستطيع استنتاج خرج جميع المقارنات  $C_0$  إلى  $C_{14}$  كما يلي:

إذا كان $V_r/30 < V_i < 3V_r/30$	$C_0=1$
إذا كان $3V_r/30 < V_i < 5V_r/30$	$C_0=1, C_1=1$
إذا كان $5V_r/30 < V_i < 7V_r/30$	$C_0=1, C_1=1, C_2=1$
إذا كان $7V_r/30 < V_i < 9V_r/30$	$C_0=1, C_1=1, C_2=1, C_3=1$

وهكذا .....

لاحظ أن خرج المقارنات لا يمثل الخرج الثنائي المطلوب، لذلك فقد تم وضع محول شفرات يقوم بتحويل خرج المقارنات الذى يعتبر شفرة ذات ١٥ بت إلى الشفرة الثنائية المعروفة ذات ٤ بتات. جدول ٢-١ يوضح جدول الحقيقة truth table لهذا المشفر. إن المقدرة التحليلية resolution لهذا المحول تساوى  $V_r/15$  وهى أصغر جزء من جهد الدخل يمكن تمييزه،

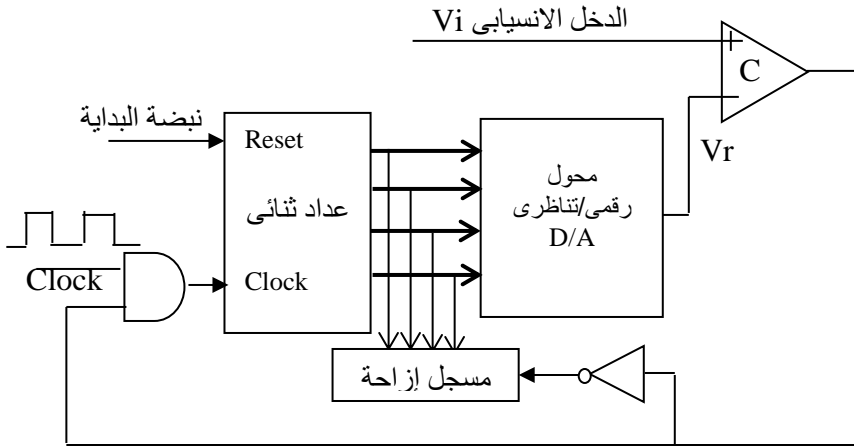
لاحظ أن المقدرة التحليلية تتحسن بزيادة عدد بتات المحول، فمثلا للمحول ذي ٨ بتات ستكون المقدرة التحليلية  $V_r/255$ ، لاحظ أيضا أن عدد المقارنات يزداد جدا بزيادة عدد بتات المحول، فللمحول ذي ٨ بتات مثلا، سنحتاج إلى ٢٥٥ مقارن وهذا يعتبر عددا كبيرا وذلك يعتبر أحد عيوب هذه الطريقة، هذا بخلاف العدد الكبير من المقاومات بالإضافة إلى المشفر. إن أهم ميزة لهذه الطريقة هي السرعة فإن هذه الطريقة تعتبر أسرع الطرق على الإطلاق فإنه بمجرد وضع الدخل الانسيابي  $V_i$  فإنه يحول فورا إلى الصورة الرقمية في زمن يكاد يكون صفرا وهو زمن مرور الإشارة في المقاومات والمقارنات ثم المشفر، لذلك فإن المحولات التي تستخدم هذه الطريقة تكون أعلى الأنواع سعرا.



شكل ٢-١٥ المحول التناظري/الرقمي بطريقة المقارنات.

## ٢-٥-٢ المحول التناظري الرقمي باستخدام العداد الثنائي

شكل ٢-١٦ يبين رسماً صندوقياً لدائرة هذا المحول. الإشارة المطلوب تحويلها إلى الصورة الرقمية هي الجهد  $V_i$  وكما نرى فإنها موصولة على الدخل الموجب للمقارن C. المقارن C مقارن رقمي يعمل بنفس طريقة المقارنات التي شرحت في الطريقة السابقة. عند إعطاء نبضة على الطرف Start (ابداً) فإن خرج العداد يصبح صفراً وبالتالي يكون خرج المحول الرقمي التناظري D/A صفراً أيضاً ويكون  $V_i > V_r$  وعلى ذلك يكون خرج المقارن واحداً. هذا الواحد من المقارن يجعل البوابة AND تسمح بمرور نبضة ساعة Clock وبالتالي يبدأ العداد في العد بنفس سرعة التزامن Clock. في هذه الأثناء يقوم المحول الرقمي التناظري D/A بتحويل خرج العداد من الصورة الرقمية إلى الصورة التناظرية باستمرار ومع كل نبضة من نبضات التزامن Clock.



شكل ٢-١٦ محول انسيابي/رقمي باستخدام العداد الثنائي.

جدول ٢-١ جدول الحقيقة لمحول الشفرات الموجود في شكل ٢-١٥

الدخل														الخروج				
c14	c13	c12	c11	c10	c9	c8	c7	c6	c5	c4	c3	c2	c1	c0	b3	b2	b1	b0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

عندما يصل خرج المحول الرقمي التناظري D/A بحيث يكون أكبر بقليل أو يساوى جهد الدخل  $V_i$  ، عندها يتغير خرج المقارن من واحد إلى صفر مما يتسبب في أن بوابة AND لن تسمح بمرور نبضات التزامن إلى العداد وبالتالي تتوقف عملية العد ويكون في هذه الحالة خرج العداد هو القيمة الرقمية المساوية للدخل التناظري  $V_i$ . لاحظ أنه عندما يكون خرج المقارن يساوى صفرا فإن مسجل الإزاحة يأخذ واحدا وبالتالي يقوم بتخزين خرج العداد لأنه هو الخرج المطلوب. لتحويل قيمة جديدة للدخل فإن نبضة بداية أخرى start تعطى وتكرر نفس العملية السابقة.

كما نرى فإن هذه الطريقة أبسط بكثير من الطريقة السابقة (طريقة المقارنات) وذلك لأنها طريقة متتابعة تعتمد على نبضات تزامن تعطى للعداد ثم إنتظار العداد حتى يصل إلى القيمة المطلوبة. لذلك فإنه كلما كان جهد الدخل  $V_i$  صغيرا كلما كان زمن التحويل من تناظري إلى رقمي أقل لأن العدادات التي سيعدها العداد يكون صغيرا. إن ذلك يعنى أن زمن التحويل

سيتوقف على قيمة الجهد المطلوب تحويله إلى الصورة الرقمية، وهذه أحد العيوب الأخرى لهذه الطريقة بجانب سرعتها القليلة.

إذا كانت إشارة الدخل من النوع المتغير مع الزمن فإن هذه الطريقة يمكن زيادة سرعتها قليلا إذا استخدم عداد تصاعدي/تنازلي بدلا من العداد التصاعدي فقط المستخدم. في هذه الحالة فإن هذا العداد يمكن التحكم في اتجاه العد له عن طريق خرج المقارن بحيث إذا كان خرج المقارن يساوي واحد فإن العداد يعد تصاعديا أما إذا كان خرج المقارن يساوي صفر فإن العداد يعد تنازليا وبذلك يصبح العداد متتبعا لإشارة الدخل سواء بالزيادة أو النقص بدلا من عمل إعادة reset له عند كل تغيير كما رأينا.

## ٢-٥-٣ طريقة التقريب المتتالي

### Successive Approximation A/D Conversion

تعتمد هذه الطريقة على عمل عدة تقريبات متتالية إلى أن يساوي الجهد الرقمي الجهد التماثلي  $V_i$ . شكل ٢-١٧ يبين رسما صندوقيا لهذه الطريقة مفترضا ٤ بتات. في بداية التشغيل يكون جميع ال ٤ بتات غير معلومة القيمة لذلك سنفترضها  $X_3X_2X_1X_0$ . نبدأ عملية التقريب بافتراض أن البت ذات القيمة العظمى  $X_3$  تساوي واحدا وباقي البتات تساوي صفرا كما يلي:

$$1000 = X_3X_2X_1X_0$$

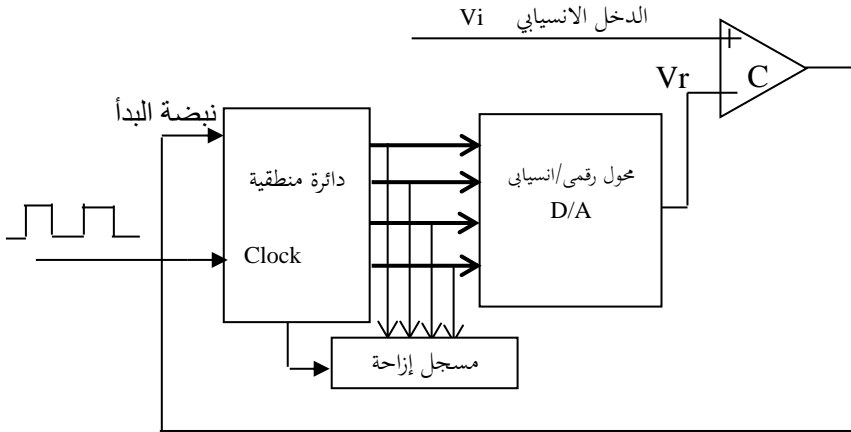
هذه القيمة الرقمية تدخل إلى المحول الرقمي التماثلي D/A ليحولها إلى الصورة التناظرية  $V_r$  حيث يقوم المقارن C بمقارنة الجهد  $V_r$  مع الدخل  $V_i$  فإذا كان  $V_r > V_i$  فإن ذلك يعني أن الرقم 1000 كبيرا وعلى ذلك فإن البت  $X_3$  لا يمكن أن تكون واحدا ولا بد أن تكون صفرا، أما إذا كان  $V_r < V_i$  فإن ذلك يعني أن الرقم 1000 مازال صغيرا وعلى ذلك فإن البت  $X_3$  لا بد وأن تكون واحدا. أي أنه بعد المقارنة الأولى فإن قيمة البت  $X_3$  تتحدد تماما إذا كانت

واحد أو صفر، ولنفترض أنها تحددت بالقيمة  $b_3$  حيث  $b_3$  إما واحد أو صفر، وعلى ذلك فإن الصورة الرقمية تصبح  $b_3X_2X_1X_0$  حيث  $X_2, X_1, X_0$  مازالت غير معروفة. في المحاولة الثانية توضع البت  $X_2=1$  وتبقى البتات  $X_1X_0=00$  والبت  $b_3$  تبقى كما هي في المحاولة السابقة ويتم مقارنة خرج المحول الرقمي التماثلي  $D/A$  وهو  $V_r$  مع الدخل  $V_i$  فإذا كان  $V_r > V_i$  فإن هذا يعني أن الواحد في البت  $X_2$  كان كبيرا ولذلك فإنه يستبدل بصفر، أما إذا كان  $V_r < V_i$  فإن ذلك يعني أن الواحد في هذه البت  $X_2$  مناسب ولذلك يبقى كما هو. وهكذا تستمر عملية التقريب ثم المقارنة مع البتات الباقية وهي  $X_1$  و  $X_0$  أي أنه بعد أربع تقريبات (تساوى عدد البتات في المحول الرقمي التماثلي  $D/A$ ) تكون القيمة الرقمية الصحيحة  $b_3b_2b_1b_0$  قد تم التوصل إليها وتم التحويل المطلوب.

الدائرة المنطقية الموجودة في شكل ٢-١٧ عليها إخراج الإشارة الرقمية الداخلة إلى المحول الرقمي التماثلي  $D/A$  مع كل نبضة تزامن، كما تقوم هذه الدائرة أيضا على ضوء ما إذا كان خرج المقارن يساوى واحد فإن البت المفروضة تبقى كما هي واحد وإذا كان خرج المقارن يساوى صفر فإن البت المفروضة تتغير من واحد إلى صفر قبل أن تبدأ عملية التقريب الجديدة. لاحظ أن عملية التحويل في هذه الطريقة تتم بعد عدد من نبضات التزامن يساوى عدد البتات المستخدمة وهذا ما يجعل هذه الطريقة مناسبة جدا للكثير من التطبيقات حيث أنها ليست بالطيئة جدا كما أنها ليست مرتفعة الثمن مثل طريقة المقارنات ولا يعتمد زمن التحويل فيها على قيمة الدخل التناظري كما رأينا في طريقة العداد الثنائي.

من الملاحظ أن عملية التحويل من تناظري إلى رقمي تحتاج دائما إلى Clock أو إشارة تزامن فيما عدا فقط طريقة المقارنات فإنها لا تحتاج لهذه الإشارة، وذلك بالطبع على العكس من عملية التحويل من رقمي إلى تناظري والتي لا تحتاج لإشارة تزامن في أغلب الأحوال. أيضا فإن أى محول تناظري رقمي لا بد وأن تدخل إليه إشارة بدء التحويل, start conversion, SC والتي على ضوءها يبدأ المحول في عملية التحويل حيث يعطي هو أيضا في نهاية هذه العملية إشارة نهاية تحويل EOC, End of Conversion, تدل على أنه قد إنتهى من

عملية التحويل والتي يستفاد منها في إعطاء القيمة الجديدة للدخل. الكثير من المحولات لا تتيح الخرج الرقمي مباشرة على الأطراف إلا من خلال فاصل buffer لتسهيل عملية مواجهتها مع المعالج حيث يمكن توصيلها على مسار البيانات للمعالج لأن خرجها يكون دائما مفصولا عن مسار البيانات فلا يسبب أى مشاكل مع الإشارات الأخرى ولكن في اللحظة التي يريد فيها المعالج قراءة خرج المحول فإنه يقوم بإعطاء نبضة تنشيط لبوابات الفصل buffer التي في خرج المحول من خلال طرف يسمى عادة بخط تنشيط الخرج Output Enable, OE فتضع خرج المحول على مسار البيانات في اللحظة المناسبة التي حددها المعالج.



شكل ٢-١٧ محول انسيبائي/رقمي باستخدام التقريب المتتالي.

كمثال على ذلك نفترض مثلا أننا نريد تحويل إشارة صوتية كلامية إلى الصورة الرقمية بهدف تخزينها في الذاكرة. من المعروف أن الصوت الآدمي يبلغ أعلى تردد فيه حوالي ٣,٥ كيلوهرتز باعتبار أن هذا هو التردد الذي عنده يتم تمييز الشخص من صوته والذي تكتفى به نظم التليفونات تقريبا. لذلك فإنه عند أخذ عينات sampling هذه الإشارة فإنه لابد وأن تقطع بتردد مقداره ٧ كيلوهرتز على الأقل على حسب النظرية السابقة. من ذلك تكون سرعة

المحول التناظري الرقمي المطلوب استخدامه في هذه الحالة تساوى واحدا مقسوما على ٧ كيلوهرتز وذلك يعطى حوالى ١٤٠ ميكروثانية على الأكثر، وهى تمثل زمن أخذ العينات. وهذا يعنى أن الطرف SC للمحول يجب إدارته من موجات تزامن مقدارها ٧ كيلوهرتز.

## ٢-٦ المحول الرقمي/التناظري D/A أو DAC

تتكون دوائر المحول الرقمي/الانسيابي D/A دائما من شبكة مقاومات ومجمع للتيار. شبكة المقاومات تكون مهمتها هى تحقيق التيار الذى يتناسب مع القيمة العددية للدخل الثنائى، وأما المجمع فيقوم بتجميع التيارات الخارجة من جميع فروع شبكة المقاومات وعادة ما يكون هذا المجمع عبارة عن مكبر تشغيلى Operational Amplifier كما سنرى.

### ٢-٦-١ المحول الرقمي/التناظري باستخدام شبكة المقاومات المتضاعفة ثنائيا

#### Binary Weighted Resistances DAC

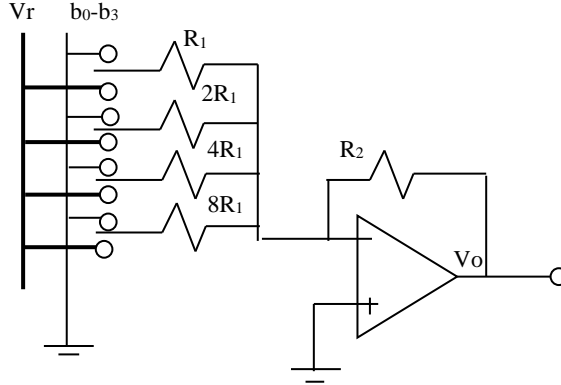
يوضح شكل ٢-١٨ دائرة هذا المحول الرقمي/التناظري حيث المفاتيح  $b_0$  إلى  $b_3$  هى عبارة عن مفاتيح اليكترونية ويمكنك اعتبارها ترانزستورات. عندما يكون أى من هذه المفاتيح يساوى واحدا فإنه يكون متصلا بالجهد  $V_I$  أما عندما يكون هذا المفتاح يساوى صفرا فإنه يكون متصلا بالأرضي. لاحظ أن هذه المفاتيح  $b_0$  إلى  $b_3$  تمثل فى الحقيقة الدخل الرقمة للمحول. التيار  $I$  الداخلى للمكبر التشغيلى يمكن حسابه من المعادلة التالية:

$$I = (V_I/R_1)b_3 + (V_I/2R_1)b_2 + (V_I/4R_1)b_1 + (V_I/8R_1)b_0 \quad (٢-٤)$$

وأما جهد الخرج  $V_O$  فإنه يساوى حاصل ضرب التيار السابق فى  $(-R_2)$  كما نعلم من خواص المكبر التشغيلى. مع بعض الاختصارات للمعادلة (٢-٤) يمكن كتابة الصورة النهائية لمعادلة جهد الخرج  $V_O$  كما يلي:



$$V_o = (-VR_2/8R_1) [8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (٥-٢)$$

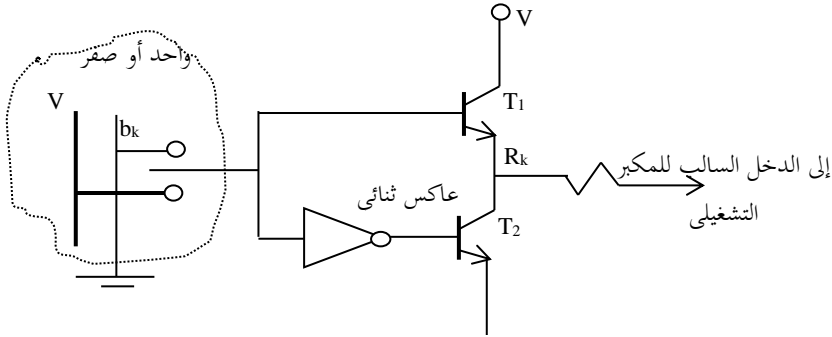


شكل ١٨-٢ المحول الرقمي/الانسيابي باستخدام

شبكة المقاومات المتضاعفة ثنائيا.

لاحظ من المعادلة (٥ - ٢) أنه بالتحكم في قيم كل من  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $V_r$  يمكن التحكم في مستوى أو قيمة جهد الخرج  $V_o$ . فمثلا إذا كانت  $b_3b_2b_1b_0=0000$  فإن الخرج  $V_o$  سيساوى صفر فولت وأما إذا كانت الشفرة  $b_3b_2b_1b_0=1111$  فإن الخرج  $V_o$  في هذه الحالة سيكون  $15(-VR_2/8R_1)$  فولت، وهكذا يمكن حساب جهد الخرج لأي شفرة دخل.

شكل ١٩-٢ يبين تركيب واحد من المفاتيح الإلكترونية  $b_k$  الموجودة في شكل ١٨-٢. عندما يكون  $b_k=1$  فإن الترانزستور  $T_1$  يكون موصلا أي ON وبذلك يتم توصيل الجهد  $V$  على الطرف الأيسر للمقاومة  $R_k$ ، لاحظ أنه في هذه الحالة ونتيجة وجود العاكس فإن الترانزستور  $T_2$  يكون غير موصل أي OFF وبذلك نضمن أن المقاومة  $R_k$  ستكون معزولة من الأرض في حالة كون  $b_k=1$ . أما إذا كانت  $b_k=0$  فإن الترانزستور  $T_1$  يكون OFF بينما أنه نتيجة العاكس فإن الترانزستور  $T_2$  يكون ON وبذلك توصل المقاومة  $R_k$  على الأرض وتغزل عن مصدر الجهد  $V$ .



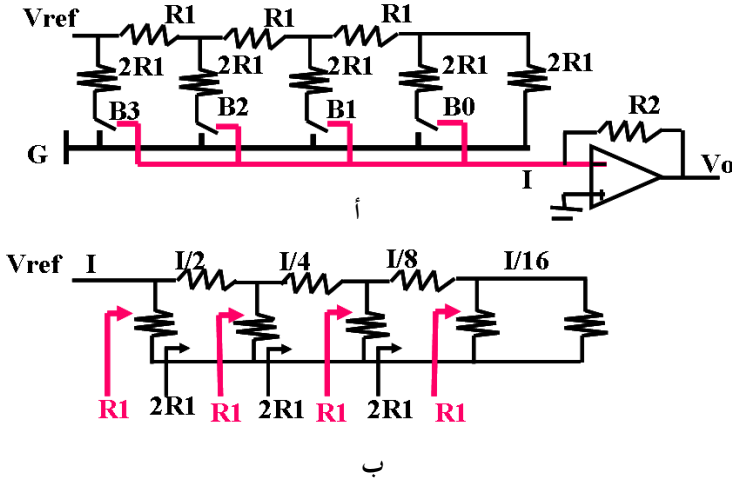
شكل ٢-١٩ التركيب الإلكتروني لأحد المفاتيح في شكل ٢-١٨.

## ٢-٦-٢ المحول الرقمي/التناظري باستخدام شبكة المقاومات السلمية

### Ladder Network

(سلمية نسبة إلى سلم أو سلالم Ladder)

من عيوب دائرة المحول الرقمي/التناظري السابقة أن النسبة بين أصغر مقاومة وأكبر مقاومة كبيرة جدا وهذه النسبة تزداد بزيادة عدد البتات في دخل المحول، فمثلا في حالة المحول ذي الثمانية بتات فإنه لو كانت أصغر مقاومة هي  $R$  فإن أكبر مقاومة ستكون  $128R$ . هذه النسبة الكبيرة سوف تضطر المصنع إلى تصنيع قيم كبيرة للمقاومات وكما نعلم فإن التفاوت في قيمة المقاومة يزداد بزيادة قيمتها مما سيؤدي إلى عدم دقة في خرج المحول الرقمي/التناظري. كذلك فإنه بما أن جميع دوائر المحولات الرقمية/التناظرية تقريبا تصنع على دوائر تكاملية فإن وجود مثل هذه المقاومات الكبيرة يحتاج إلى مساحات كبيرة على الدائرة التكاملية مما يتسبب في تقليل كثافة المكونات على الشريحة وصعوبة في تصنيعها.



شكل ٢-٢٠ المحول الرقمي الانسيابي السلمي.

يبين شكل ٢-٢٠ دائرة المحول الرقمي/التناظري الجديدة، شبكة المقاومات السلمية، والتي تستخدم قيمتين فقط للمقاومات هما  $R_1$  و  $2R_1$ . شكل ٢-٢٠ ب يبين هذه الشبكة على حدة وقد وزعت عليها التيارات في الأفرع المختلفة، وكذلك وضحت على هذا الشكل قيمة المقاومة عند النقاط المختلفة على الشبكة. أهم ملاحظة على هذه الشبكة هي أنها استخدمت قيمتين فقط من المقاومات وهما  $R_1$  و  $2R_1$  وبذلك تم التغلب على التفاوت الكبير في قيم المقاومات الموجود في الطريقة السابقة. بالنظر إلى شكل ٢-٢٠ ب نلاحظ أن التيار في كل فرع من أفرع الشبكة موزع بالطريقة الثنائية المطلوبة، فمثلا في الفرع الأول التيار يساوي  $I_1/2$  وفي الفرع الثاني  $I_1/4$  وفي الفرع الثالث  $I_1/8$  وهكذا بحيث أن مجموع التيارات الداخلة لمكبر العمليات ستكون:

$$I = (I_1/2)b_3 + (I_1/4)b_2 + (I_1/8)b_1 + (I_1/16)b_0 \quad (٦-٢)$$

من هذه المعادلة وبعد بعض الإختصارات البسيطة يمكن حساب قيمة جهد الخرج  $V_o$  في هذه الحالة والذي سيعطى بالمعادلة الآتية:

$$V_o = (-R_2 I_1 / 16) [8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (٧-٢)$$

وهي نفس المعادلة التي حصلنا عليها في الحالة السابقة. لاحظ أن قيمة جهد الخرج  $V_o$  في هذه الحالة يمكن التحكم فيه بالمتغيرات  $R_2, I_1$  حيث التيار  $I_1$  يمكن أن يعطى بالعلاقة:

$$I_1 = (V_{ref} / R_1) \quad (٨-٢)$$

حيث  $R_1$  هي مقاومة دخل الشبكة عند طرفي الجهد  $V_{ref}$ .

## ٧-٢ تمارين

١- إشارة تناظرية  $x_a(t)$  تتكون خطيا من الإشارات الجيبية ذات الترددات التالية: 300Hz و 400Hz و 1.3KHz و 3.6KHz و 4.3KHz. هذه الإشارة تم أخذ عيناتها بمعدل مقداره 2KHz، وتم إدخال الإشارة المعينة على مرشح منفذ للترددات المنخفضة حتى 900Hz (cutoff frequency). خرج المرشح هو  $y_a(t)$ . ما هي المكونات الترددية للإشارة  $y_a(t)$ . ارسم شكلا تخطيطيا يبين هذه الإشارة.

٢- أعد السؤال الأول في عدم وجود المرشح.

٣- أعد نفس السؤال مع اعتبار أن تردد أخذ العينات مرة يساوى 2KHz وأخرى 4KHz.

٤- إشارة انسيابية  $x_a(t)$  تتكون خطيا من الإشارات الجيبية ذات الترددات التالية:  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  و  $f_4$  وهذه الإشارة تم أخذ عينات منها بمعدل مقداره 3KHz وتم إدخال هذه الإشارة المعينة في مرشح منفذ للترددات المنخفضة حتى 1.4KHz ليعطى إشارة الخرج  $y_a(t)$ . الإشارة  $y_a(t)$  وجد أنها تتكون من الترددات التالية 350Hz و 425Hz

و918Hz على التوالي. ما هي القيم الممكنة للترددات  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  و  $f_4$ ؟ وهل هذه القيم قيما وحيدة؟ إذا لم تكن وحيدة فاكتب بعض القيم الأخرى الممكنة لهذه الترددات؟

٥- الإشارة الانسيابية التالية:

$$x_a(t) = 2\cos(600\pi t) + 4\sin(1400\pi t) + 3\cos(4400\pi t) + 7\sin(5400\pi t)$$

تم أخذ عيناتها بالمعدل 3KHz لتعطي التتابع  $x[n]$ . أكتب معادلة هذا التتابع.

٦- الإشارة الانسيابية  $x_a(t) = 2\cos(10\pi t) + 4\sin(20\pi t) + 3\cos(40\pi t)$  تم أخذ عيناتها لتعطي التتابع  $x[n]$ . ارسم هذا التتابع مستخدما معدلات أخذ العينات التالية 43Hz و 40Hz و 25Hz.

٧- ما هو الفرق بين المحول الرقمي/التناظري والمنتخب أو فاكك الشفرة decoder؟

٨- محول رقمي/تناظري ذو ٨ بتات شفرة دخله هي 00101100، ما هي قيمة خرج التناظري بالفولت إذا كانت أعظم قيمة للخروج هي ٥ فولت؟

٩- ارسم جدولاً وبين فيه قيمة الخرج التناظري المقابلة لعشر شفرات ثنائية متتالية على الدخل ابتداء من الشفرة 00000000 لنفس المحول السابق في المسألة ٨.

١٠- اشرح مع الرسم طريقة التحويل من رقمي إلى تناظري باستخدام شبكة المقاومات المتضاعفة ثنائياً.

١١- ارسم دائرة محول رقمي/تناظري ذي ٨ بتات باستخدام شبكة المقاومات المتضاعفة ثنائياً، واكتب قيم جميع المقاومات إذا كانت أصغر مقاومة تساوي ٥٠ كيلوأوم.

١٢- اشرح مع الرسم طريقة التحويل من رقمي إلى تناظري باستخدام شبكة المقاومات السلمية.

١٣- عرف المقدرة التحليلية وأوجد النسبة المئوية لها وذلك لمحول ذي ٦ بتات وآخر ذو ١٢ بتاً.

١٤- لديك محول رقمي/تناظري موصلا على بوابة الإخراج رقم 00، ارسم شكل الخرج مع الزمن لهذا المحول نتيجة تنفيذ البرنامج التالي:

```
MOV A,00
xx: OUT 00
INC A
JMP xx
```

١٥- أعد التمرين السابق إذا كان البرنامج المنفذ كالتالي:

```
MOV A,00
xx: OUT 00
INC A
JNZ xx
MOV A,FF
yy: OUT 00
DCR A
CP 00
JNZ yy
JMP xx
```

- ١٦- اشرح مع الرسم طريقة المقارنات للتحويل من تناظري إلى رقمي.
- ١٧- كم عدد المقارنات اللازمة لبناء محول تناظري/رقمي ذي ٨ بتات.
- ١٨- هل تحتاج طريقة المقارنات إلى نبضات تزامن clock لتشغيلها؟
- ١٩- اشرح مع الرسم طريقة العداد الثنائي للتحويل من تناظري إلى رقمي.
- ٢٠- ارسم الدائرة الكاملة للمحول التناظري/الرقمي باستخدام عداد تصاعدي/تنازلي مع الشرح.

- ٢١- إذا كانت القيمة العظمى لجهد الدخل هي ٢,٥ فولت احسب زمن التحويل لقيم الجهد الآتية: 0.5 , 1 , 1.5 , 2 وذلك باستخدام طريقة العداد التصاعدي فقط ثم باستخدام طريقة العداد التصاعدي/التنازلي وذلك لمحول تماثلي/رقمي ذي ٤ بتات.
- ٢٢- اشرح مع الرسم طريقة التقريب المتتالي للتحويل من تناظري إلى رقمي.
- ٢٣- محول تناظري/رقمي بطريقة التقريب المتتالي يعمل بنبضات تزامن clock مقدارها ٥٠٠ كيلوهرتز، ما هو زمن التحويل الذي يمكن الحصول عليه من هذا المحول.
- ٢٤- استخدم المعالج أو الحاسب بدلا من الدائرة المنطقية الموجودة في الشكل ٢-١٧ ليعطي التقريبات المتتالية ثم يقرأ قيمة المقارن وعلى ضوء هذه القراءة يعطي القيم التقريبية التالية وهكذا، ارسم خريطة تدفق flow chart واكتب برنامجا بلغة الأسمبلى أو لغة C يقوم بهذه المهمة مع رسم الدائرة اللازمة بالكامل.
- ٢٥- لديك محول تناظري/رقمي خرج من خلال بوابات ثلاثية المنطق يتم تنشيطها بخط تنشيط output enable, OE وآخر خرج مباشر، أيهما أفضل للتعامل مع المعالج، اشرح مع الرسم.

# الفصل الثالث

## الإشارات والأنظمة الرقمية Digital Signals and Systems

### ٣-١ مقدمة

سنقدم في هذا الفصل تعريفا بالأشكال المختلفة والشائعة للإشارات الرقمية وكيفية تمثيل كل منها في النطاق الزمني، ثم تعريفا بالأنظمة الرقمية والخواص المرتبطة بها مع بعض الأمثلة لكل منها والدوال المرتبطة بكل ذلك في برنامج ماتلاب MATLAB على أنه من أشهر برمجيات الحاسب المستخدمة في مجال معالجة الإشارات سواء الرقمية أو التناظرية.

### ٣-١-١ الإشارة التناظرية أو الانسيابية Continuous time signal

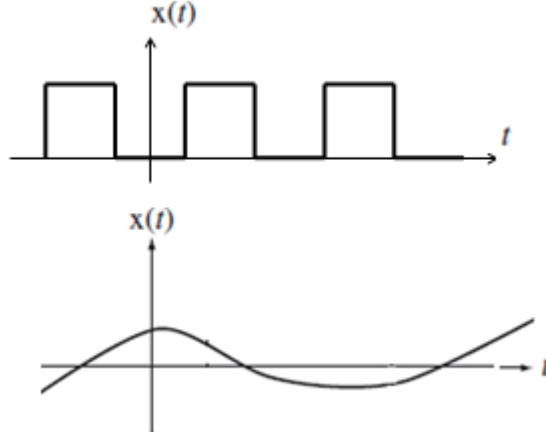
الإشارة التناظرية هي دالة في الزمن ذات قيمة محددة ومعروفة عند كل قيمة محددة للزمن. شكل ٣-١ يبين أمثلة لهذه الإشارات. الإشارات المربعة في شكل ٣-١ تمثل إشارة تناظرية بالرغم من أن لها مستويين فقط، إلا أن لها قيمة محددة عند كل قيمة للزمن.

### ٣-١-٢ النظام التناظري Continuous time system

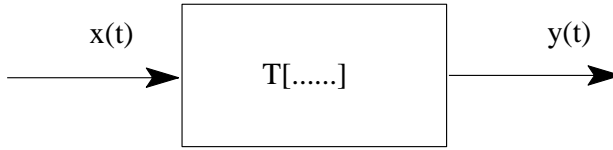
النظام التناظري هو نظام يحدد قيمة تناظرية للخرج  $y(t)$  لكل قيمة انسيابية للدخل  $x(t)$ . شكل ٣-٢ يبين رسما صندوقيا لهذا النظام حيث  $T[.]$  هي العلاقة بين الدخل والخرج. هذه العلاقة قد تكون بين خرج ودخل مرشح، أو مكبر، أو تحويل معين مثل تحويل فورير



أو نظام لضغط الصورة أو تحسينها أو التعرف على متكلم، كل هذه أمثلة على الأنظمة التي قد تكون تناظرية أو رقمية.



شكل ٣-١ نموذجين من أشكال الإشارات التناظرية.

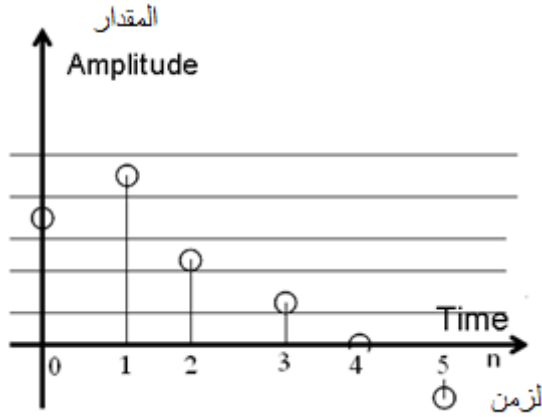


شكل ٣-٢ مثال لنظام تناظري.

### ٣-١-٣ الإشارة المتفاصلة زمنياً Discrete time signal

الإشارة المتفاصلة زمنياً عبارة عن تتابع sequence من القيم المحددة الغير مكتملة not quantized عند أزمنة محددة، هذه القيم سنسميها عينات samples. أي أن الإشارة تكون معرفة فقط عند نقاط محددة من الزمن  $n=1, 2, 3, \dots$ ، ولكن قيمتها غير مكتملة أي أنها تأخذ قيمة الإشارة التناظرية الأصلية عند هذه اللحظة من الزمن. شكل ٣-٣ يبين التتابع  $x(n)$  أو الإشارة المتفاصلة زمنياً  $x(n)$ . في مثل هذه الإشارات (التتابعات) من الخطأ

أن نقول أن  $x(n)$  لها القيمة صفر عند الأزمنة  $t$  الغير صحيحة 2.5 مثلاً. الدالة  $x(n)$  تكون غير محددة عند هذه الأزمنة التي بين العينات. التابع  $x(n)$  من الممكن أن يكون مقداره كمية مركبة أو حقيقية أو تخيلية كما سنرى فيما بعد.

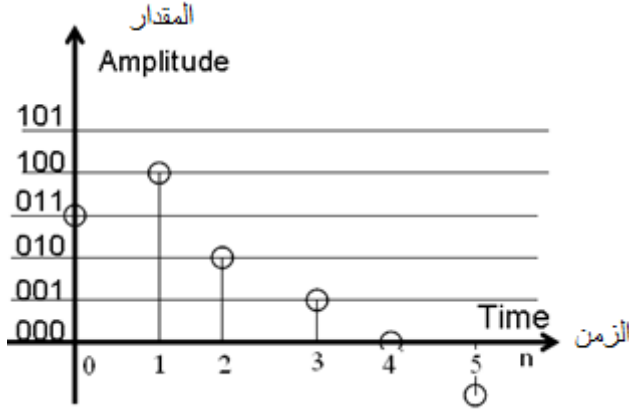


شكل ٣-٣ الإشارة المتفاصلة زمنياً.

### ٣-١-٤ الإشارة الرقمية Digital Signal

بعد تمييز الإشارة عند أزمنة محددة كما في شكل ٣-٣ وتحويلها إلى عينات samples يتم إدخالها على دائرة تكميم quantizer تحدد قيمة كل عينة بكمية محددة على حسب عدد مستويات التكميم المستخدمة، وهذا هو ما يقوم به المحول التناظري/الرقمي A/D كما رأينا في الفصل السابق وبالطبع ينشأ عنه بعض الضوضاء المضافة على الإشارة نتيجة تقريب هذه العينات لأقرب مستوى من مستويات التكميم. شكل ٣-٣ يبين هذه الإشارات الرقمية. لاحظ أن الإشارة أصبحت الآن معرفة عند أزمنة معينة ومقدارها لا يأخذ إلا قيما معينة يعبر عنها بأكواد أو شفرات ثنائية كما في الشكل. أو يمكن أن ننظر إليها على أنها

تتابع sequence من الأرقام أو الشفرات وسنعتبر عن هذه التتابعات بالرموز  $x[n]$  و  $y[n]$  ... وهكذا .



شكل ٣-٤ الإشارة الرقمية.

### ٣-١-٥ النظام الرقمي Digital system

هذا النظام هو علاقة بين تتابع خرج  $y[n]$  وتتابع دخل  $x[n]$  ومن الأمثلة الشهيرة على ذلك المرشح الرقمي كما سنرى في الفصول القادمة.

### ٣-٢ بعض الإشارات الرقمية الكثيرة الاستخدام

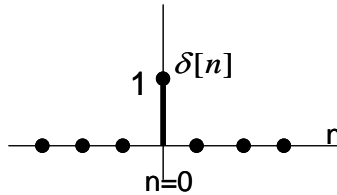
هناك الكثير من الإشارات التي سنستخدمها بكثرة طوال هذا المقرر ولذلك سنقدم هنا تعريف وشكل معظم هذه الإشارات.

### ٣-٢-١ إشارة (دالة) العينة الواحدة Unit sample

هذه الإشارة كما هي موضحة في شكل ٣-٥ عبارة عن عينة sample واحدة موجودة أو معرفة عند الزمن صفر وغير موجودة عند أي قيمة أخرى للزمن، مقدار هذه العينة هو الوحدة. هذه الإشارة يطلق عليها أحيانا (وبالذات في الأنظمة التناظرية) إشارة الاندفاع أو الصدمة impulse لأنها تمثل صدمة للنظام الذي تدخل عليه. هذه الإشارة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (١-٣)$$

هذه الإشارة كما سنرى فيما بعد تلعب نفس الدور الذي تلعبه إشارة الصدمة مع الأنظمة التناظرية.

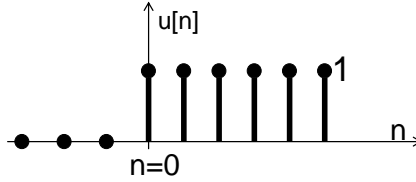


شكل ٣-٥ إشارة العينة الواحدة.

### ٣-٢-٢ إشارة (دالة) الدرجة الواحدة Unit step

هذه الإشارة لها شكل الدرجة كما في شكل ٣-٦ حيث أنها لكل قيم  $n$  السالبة تكون قيمة هذه الدالة صفراً، ثم عندما  $n=0$  ولكل قيم  $n$  الموجبة تصبح قيمة هذه الدالة بواحد ولذلك يمكن كتابة هذه الدالة كما في العلاقة التالية:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2-3)$$



شكل ٦-٣ إشارة الدرجة الواحدة.

يمكن كتابة دالة الدرجة الواحدة أو دالة الخطوة  $U[n]$  كما يطلق عليها غالباً بدلالة دالة العينة الواحدة  $\delta[n]$  كما يلي:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (3-3)$$

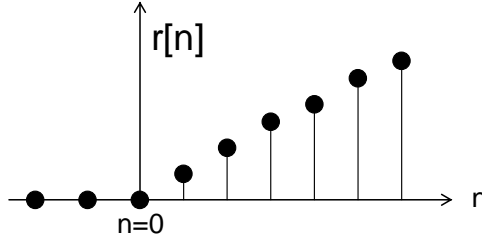
كما يمكن كتابة دالة العينة الواحدة  $\delta[n]$  بدلالة دالة الخطوة  $U[n]$  كما يلي:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (4-3)$$

### ٣-٢-٣ إشارة (دالة) المثلث Ramp

هي إشارة أو دالة خط مستقيم بميل معين يبدأ من نقطة الأصل كما في شكل ٧-٣. هذه الإشارة تعطى بالمعادلة التالية:

$$r[n] = n * u[n] \quad (5-3)$$



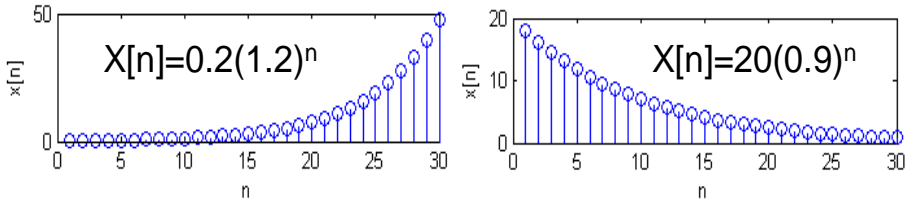
شكل ٣-٧ دالة المطلع.

### ٣-٢-٤ التابع الأسّي الحقيقي Real exponential sequence

يمكن كتابة معادلة هذا التابع كما يلي:

$$x[n] = A\alpha^n \quad (٦-٣)$$

حيث كل من  $A$  و  $\alpha$  يمكن أن تكون كميات حقيقية. في المعادلة (٦-٣) عندما تكون  $\alpha$  أكبر من الواحد فإن مقدار التابع يزيد مع زيادة  $n$ ، بينما إذا كانت  $\alpha$  أقل من الواحد فإن مقدار التابع يقل مع زيادة  $n$  وشكل ٣-٨ يوضح هاتين الحالتين.



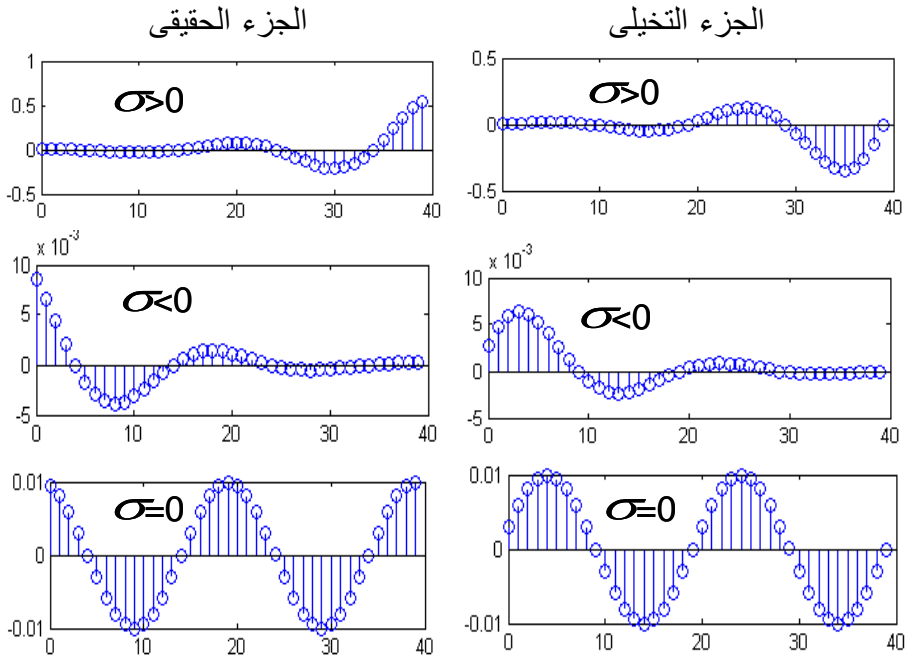
شكل ٣-٨ التابع الأسّي الحقيقي.

أيضا كل من  $A$  و  $\alpha$  يمكن أن تكون كميات مركبة وفي هذه الحالة يمكن إعادة كتابة المعادلة (٦-٣) كما يلي:

$$x[n] = |A|e^{\sigma n} e^{j(\omega n + \phi)} \quad (٧-٣)$$

حيث  $|A|e^{\sigma n}$  تمثل مقدار التتابع بينما  $(\omega n + \phi)$  تمثل زاوية طوره والمعادلة (٧-٣) تمثل الصورة القطبية أو صورة المقدار والزاوية للتابع المركب. المعادلة (٧-٣) يمكن إعادة كتابتها في الصور الجيبية أو في صورة كمتين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي كما يلي:

$$x[n] = |A|e^{\sigma n} \cos(\omega n + \phi) + j|A|e^{\sigma n} \sin(\omega n + \phi) \quad (٨-٣)$$



شكل ٩-٣ الجزء التخيلي والحقيقي عند قيم مختلفة للثابت  $\sigma$  في المعادلة (٨-٣).

حيث  $j = \sqrt{-1}$ ، والمقدار الذي يحتوي الدالة  $\cos()$  هو المقدار الحقيقي، والمقدار الذي يحتوي الدالة  $\sin()$  هو المقدار التخيلي والثابت  $\sigma$  في المعادلة (٨-٣) إذا كان موجبا فإن

مقدار التتابع يتزايد مع زيادة  $n$ ، بينما إذا كانت  $\sigma$  سالبة فإن مقدار التتابع يتناقص مع زيادة  $n$ . أما إذا كانت  $\sigma$  تساوى صفر فإن مقدار التتابع يكون موجة جيبيية مستمرة sustained oscillation. شكل ٩-٣ يبين كل هذه الأحوال للمعادلة (٣-٨).  
العلاقة بين التتابع الأسى المركب ودالة الجيب مهمة جدا وسيتم استخدامها بكثرة لذلك لابد من إعادة كتابة العلاقة بينهما. التتابع الأسى  $x_1[n]$  يمكن كتابته كما يلي:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= A e^{jwn} \\ &= A \cos(wn) + jA \sin(wn) \end{aligned} \quad (٩-٣)$$

كما نلاحظ فإن التتابع الأسى يتكون من مركبتين أحدهما مركبة حقيقية بدلالة الدالة  $\cos()$  والأخرى مركبة تخيلية بدلالة الدالة  $\sin()$ . يمكن كتابة تتابع آخر  $x_2[n]$  كما يلي:

$$\begin{aligned} x_2[n] &= A e^{-jwn} \\ &= A \cos(wn) - jA \sin(wn) \end{aligned} \quad (١٠-٣)$$

بجمع المعادلتين (٩-٣) و (١٠-٣) يمكن كتابة المركبة الحقيقية  $\cos()$  كما يلي:

$$\cos(wn) = 0.5( e^{jwn} + e^{-jwn} ) \quad (١١-٣)$$

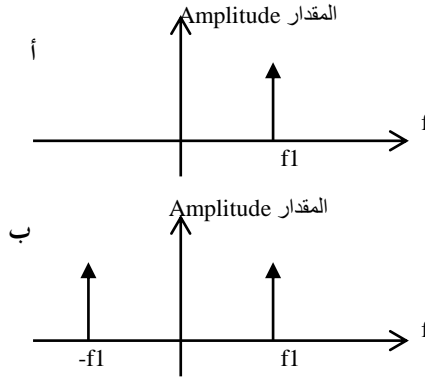
وبطرح المعادلتين (٩-٣) و (١٠-٣) يمكن كتابة المركبة التخيلية  $\sin()$  كما يلي:

$$j\sin(wn) = 0.5( e^{jwn} - e^{-jwn} ) \quad (١٢-٣)$$

المعادلتان (١١-٣) و (١٢-٣) توضحان مدى العلاقة بين أي تتابع أسى مركب والدالتين  $\cos()$  و  $\sin()$  وأن هاتين الدالتين يمكن التعبير عن أي منها بدلالة مركبتين



أسييتين تخيليتين كما في المعادلتين (٣-١١) و (٣-١٢). الدالة الجيبية يمكن كتابتها بدلالة التردد  $f$  على الصورة  $\cos(\omega n) = \cos(2\pi f n)$  وذلك بوضع  $\omega = 2\pi f$ . يمكن رسم طيف spectrum الدالة  $\cos(2\pi f)$  كما في شكل ٣-١٠ حيث نرى أنه عبارة عن كمية واحدة عند التردد  $f$  حيث أنه لا يوجد سوى تردد واحد فقط وهو التردد  $f$ . نفس الدالة الجيبية  $\cos()$  يمكن كتابتها في صورة مركبتين أسييتين كما في المعادلة (٣-١١). ولذلك يمكن أن ننظر إليها في هذه الحالة بأنها تتكون من مركبتين أسييتين أحدهما ذات تردد موجب  $f$  والمركبة الأخرى ذات تردد سالب  $-f$  ويمكن رسم طيف الدالة  $\cos()$  في هذه الحالة كما في شكل ٣-١٠ ب، وهذه هي الصورة العامة لرسم الطيف لأي دالة أو إشارة حيث تكون هناك صورة مقلوبة للطيف ناحية الترددات السالبة وهذا ما سنتبعه في رسم الطيف لأي إشارة فيما بعد وهذا هو ما رأيناه عند شرح نظرية أخذ العينات في النطاق الترددي في الفصل السابق.



شكل ٣-١٠ التعبير عن طيف أي دالة

### ٣-٣ تصنيف الإشارات الرقمية

#### Classification of digital signals

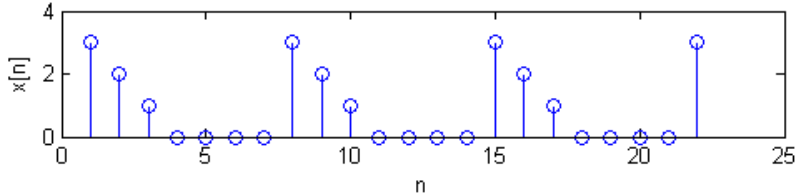
هناك الكثير من الخواص التي يمكن تصنيف الإشارات على أساسها وسنعرف في هذا الجزء كل طريقة على حده.

#### ٣-٣-١ الدورية Periodicity

هل التابع أو الإشارة التي نتعامل معها دورية أم لا؟ هل هذا التابع يكرر نفسه بعد عدد معين من العينات أم لا؟ لذلك يمكن أن نقول هنا أن أي تابع يكون دورى إذا كان يكرر نفسه كل عدد  $N$  من العينات ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$x[n] = x[n + kN] \quad (١٣-٣)$$

حيث  $N$  في هذه الحالة هي الدورة period التي يتكرر بعدها التابع، و  $k$  أي رقم صحيح. شكل (٣-١١) يبين التابع دوري طول دورته  $N=7$ .



شكل ٣-١١ التابع دوري دورته طولها يساوى ٧.

لو أن لدينا إشارة تناظرية جيبية على الصورة  $\cos(\Omega t)$  (سنلتزم في هذا الكتاب مثل الكثير من المراجع بالرمز للسرعة الزاوية بالرمز  $w$  في حالة الإشارات الرقمية والرمز  $\Omega$  في حالة الإشارات الانسيابية)، وهذه الإشارة تم أخذ عيناتها بمعدل معين، فهل التابع الناتج يجب

أن يكون بالضرورة دوري هو الآخر مثل الإشارة التناظرية الجيبية؟ الإجابة هي لا !! .. فمن الممكن أن نقطع إشارة جيبية تناظرية دورية ويكون التابع الناتج عنها غير دوري. وهذا بديهي جدا إذ لكي يكون التابع الناتج دوريا فإن معدل أخذ العينات (أو قل الزمن بين عينتين أو الزمن الدوري للتقطع) يجب أن يرتبط مع الزمن الدوري للموجة الجيبية التناظرية بعلاقة أو نسبة بسيطة . لتوضيح ذلك نفترض التابع الجيبي في صورته الأسية التالية:

$$x[n]= Ae^{jwn} \quad (١٤-٣)$$

بفرض أن التابع السابق دوري فإنه يمكن تطبيق شرط المعادلة (٣- ١٣) عليه وكتابته كما يلي:

$$\begin{aligned} x[n] &= A e^{jw(n+N)} \\ &= A e^{jwn} e^{jwN} \end{aligned} \quad (١٥-٣)$$

في المعادلة (٣- ١٥) لكي يكون التابع  $x[n]$  دوريا فعلا فإن الكمية  $e^{jwN}$  يجب أن تساوى واحد، وهذا يعنى أنه يمكننا أن نضع الشرط التالى لكى يكون أى تابع جيبي  $x[n]$  دوريا:

$$\begin{aligned} wN &= m2\pi \\ w/2\pi &= m/N \end{aligned} \quad (١٦-٣)$$

حيث  $m$  هي ثابت صحيح موجب، وهذا يعنى أن  $w/2\pi$  يجب أن تكون عدد كسرى rational number بسيط (أو بمعنى آخر يجب أن تكون  $2\pi/w$  تساوى رقما صحيحا). فمثلا التابع  $x[n]=A\cos(0.1\pi n)$  فيه  $w=0.1\pi$  وهذا يعنى أن  $w/2\pi=0.1/2=1/20$

والتي تعتبر كسرا بسيطا، إذن هذا التابع دوري. بينما التابع  $x[n] = A\cos(\sqrt{3}\pi n)$  فيه  $w = \sqrt{3}\pi$  وعلى ذلك فإن  $\frac{w}{2\pi} = \sqrt{3}/2$  والذي لا يعتبر رقما كسريا بسيطا وعلى ذلك فهذا التابع ليس تتابعا دوريا.

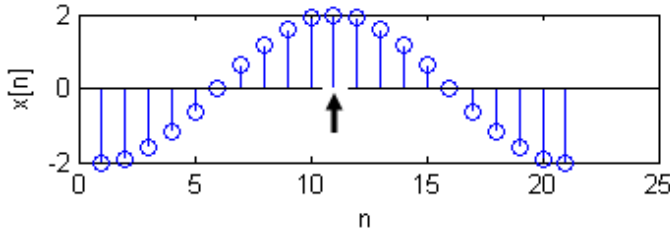
### ٣-٣-٢ تصنيف التتابعات على حسب الطول

أي تتابع يمكن تصنيفه على أنه محدود الطول finite length إذا كان عدد العينات فيه محدودا. بينما إذا كان عدد العينات ممتدا إلى ما لا نهاية في أي من الاتجاهين سواء السالب أو الموجب فإن هذا التابع يصنف على أنه غير محدود الطول أو لانهائي infinite length.

### ٣-٣-٣ تصنيف التتابعات على حسب التشابه حول نقطة الأصل

يمكن تصنيف التتابعات على حسب شكل كل منها عند نقطة الأصل إلى نوعين: **التتابع الزوجي even sequence**: وهو التابع الذي يكون نصفه الموجود على يمين نقطة الأصل مشابه تماما symmetrical (صورة) لنصفه الموجود على يسار نقطة الأصل. شكل ٣-١٢ يبين مثلا لتتابع زوجي حيث يمكن أن نعبر عن التشابه الزوجي بالمعادلة التالية:

$$x[n]=x[-n] \quad (٣-١٧)$$

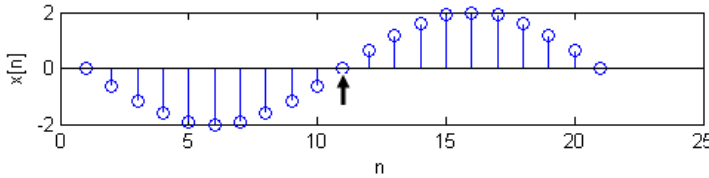


شكل ٣-١٢ مثال لتتابع زوجي.

**التتابع الفردي odd sequence**: وهو التتابع الذي يكون نصفه الموجود على يمين نقطة الأصل صورة معكوسة لنصفه الموجود على يسار نقطة الأصل. شكل ٣-١٣ يبين مثالا لتتابع فردي حيث يمكن أن نعبر عن التشابه الفردي بالمعادلة التالية:

$$x[n] = -x[-n] \quad (٣-١٨)$$

السهم الموجود في شكلي ٣-١٢ و ٣-١٣ يمثل نقطة الأصل التي يوجد التشابه حولها.



شكل ٣-١٣ مثال لتتابع فردي.

### ٣-٣-٤ تصنيف التتابعات على حسب مقدار التتابع

مقدار أي تتابع من الممكن أن يكون محددًا bounded إذا كان مقدار أي عينة في هذا التتابع يؤول إلى قيمة محددة تختلف عن الملائهية، وهذا يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية حيث B أي قيمة موجبة تختلف عن الملائهية:

$$|x[n]| \leq B < \infty \quad (٣-١٩)$$

### ٣-٣-٥ تصنيف التتابعات على حسب القابلية للجمع

أي تتابع نقول عنه أنه قابل للجمع summable إذا كان المجموع الكلي لعيناته أقل من الملائهية، وهذا يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (٢٠-٣)$$

### ٣-٣-٦ طاقة التابع

طاقة التابع energy of a sequence تعرف على أنها مجموع مربعات مقدار جميع العينات الموجودة في التابع، وهذا يمكن التعبير عنه في المعادلة التالية:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (٢١-٣)$$

### ٣-٤ العمليات الأساسية على التتابعات

يمكن إجراء كل العمليات الحسابية المعتادة مثل الجمع والضرب وغيرها على التتابعات، كما أن هناك بعض العمليات الأخرى مثل عملية الالتفاف التي لم نعتد عليها سابقا وسندرسها هنا.

**عملية الضرب multiplication :** عند ضرب تتابعين يتم ضرب مقدار كل عينة في التابع الأول في نظيرتها في التابع الثاني ويتم التعبير عن ذلك حسابيا كما يلي:

$$z[n] = x[n] \cdot y[n] \quad (٢٢-٣)$$

لاحظ أن رمز عملية الضرب هنا هو النقطة وليس النجمة \* كما تعودنا سابقا لأن النجمة ستستخدم كرمز لعملية الالتفاف convolution كما سنرى. عملية الضرب يطلق عليها مهندسوا الاتصالات بأنها عملية التعديل modulation. يمكن رؤية ذلك بفرض التابع  $y[n]$  الذي يساوى حاصل ضرب تتابعين كل منهما جيبي كما يلي:

$$y[n] = 2\cos(w_1n) \cdot \cos(w_2n)$$

حاصل الضرب السابق يمكن باستخدام بعض قوانين حساب المثلثات أن يوضع على الصورة التالية:

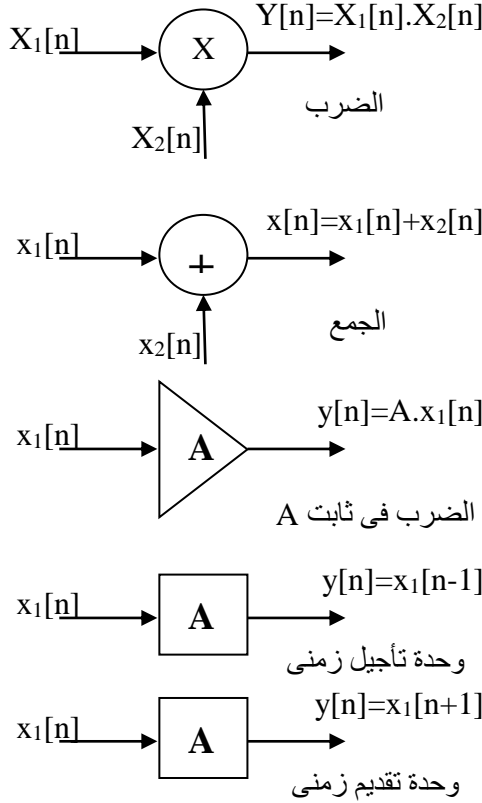
$$y[n] = \cos((w_1+w_2)n) + \cos((w_1-w_2)n)$$

حيث أن التابع الناتج يتكون من مركبتين الأولى ترددها هو مجموع الترددات الداخلين والأخرى ترددها هو مطروح الترددات الداخلين. عملية الضرب سنستخدمها بكثرة عند قطع تتابع محدد الطول من تتابع لانتهائي، وهذه تسمى النافذة windowing حيث أننا نأخذ نافذة من التابع اللانهائي. أنظر لرمز عملية الضرب الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في شكل ٣-١٤

**عملية الجمع addition:** عند جمع تتابعين يتم جمع مقدار كل عينة في التابع الأول مع نظيرتها في التابع الثاني ويتم التعبير عن ذلك حسابيا كما يلي:

$$z[n] = x[n] + y[n] \quad (٣-٢٣)$$

أنظر لرمز عملية الجمع الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في شكل ٣-١٤.



شكل ٣-١٤ العمليات الأساسية على التتابعات.

**عملية الضرب في ثابت (التحجيم) scaling:** حيث يتم ضرب كل عينة من عينات أي متابع في ثابت. أنظر لرمز عملية الضرب في ثابت الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في شكل ٣-١٤.

**عملية التأخير الزمني time delay:** يتم تأخير عينات المتابع بأي عدد من وحدات زمن التأخير حيث وحدة زمن التأخير هنا هي زمن العينة  $\text{sampling time}$ . يمكن التعبير عن ذلك حسابيا كما يلي:



$$y[n] = x[n-N] \quad (٢٤-٣)$$

إذا كانت  $N$  رقما سالبا فإن التأخير الزمني يصبح تقدما زمنيا والمعادلة (٢٤ - ٣) تصبح  $y[n] = x[n+N]$ . أنظر إلى شكل ١٤-٣ لترى الرمز المستخدم لهذه العمليات.

**مثال ٣-١:** افترض التتابعات التالية:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= [3.2 \ 41 \ 36 \ -9.5 \ 0] \\ x_2[n] &= [1.7 \ -0.5 \ 0 \ 0.8 \ 1] \end{aligned}$$

منها يمكن استنتاج التتابعات التالية:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n].x_2[n] = [5.44 \ -20.5 \ 0 \ -7.6 \ 0] \\ y_2[n] &= x_1[n]+x_2[n] = [4.9 \ 40.5 \ 36 \ -8.7 \ 1] \\ y_3[n] &= 0.5.x_1[n] = [1.6 \ -20.5 \ 18 \ -4.75 \ 0] \end{aligned}$$

في أي تتابع من التتابعات السابقة ، وأي تتابع نكتبه بعد ذلك ، تكون العينة رقم صفر فيه هي العينة الأولى ناحية اليسار. فمثلا العينة  $x_1[0]=3.2$  و  $x_2[2]=0$  وهكذا. إذا اختلف الوضع عن ذلك فإنه سيتم تعليم العينة رقم صفر بعلامة معينة وهنا سنضع تحتها خط كما في التتابع التالي:

$$x_3[n] = [2.1 \ 4 \ \underline{-3} \ 5.7 \ 0 \ 6.4]$$

في هذا التتابع  $x_3[0]=-3$  و  $x_3[-1]=4$  و  $x_3[-2]=2.1$  و  $x_3[3]=6.4$ .

في أي واحدة من العمليات السابقة ليس بالضرورة أن يكون التتابعين متساويا الطول. في هذه الحالة يتم إضافة أصفار إلى التتابع الأقصر بحيث يتم التطابق بين التتابعين من ناحيتي اليمين واليسار. فمثلا لو أردنا جمع التتابعين  $x_1[n]$  و  $x_3[n]$  فإن التتابع  $x_1[n]$  سيتم إضافة أصفار له من ناحية اليسار ليتطابق التتابع  $x_3[n]$  من ناحية اليسار ليصبح كالتالي:

$$x_1'[n] = [0 \ 0 \ \underline{3.2} \ 41 \ 36 \ -9.5 \ 0]$$

وسيتم إضافة صفر للتابع  $x_3[n]$  ليطابق التابع  $x_1[n]$  من ناحية اليمين لأن  $x_3[n]$  هو الأقصر من ناحية اليمين، وسيصبح التابع  $x_3[n]$  كالتالي:

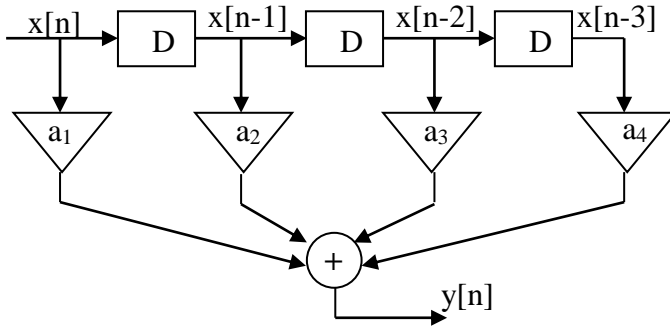
$$x_3'[n] = [2.1 \ 4 \ \underline{-3} \ 5.7 \ 0 \ 6.4 \ 0]$$

بذلك أصبح التابعين  $x_1[n]$  و  $x_3'[n]$  متطابقين ويمكن كتابة حاصل جمعهما كالتالي:

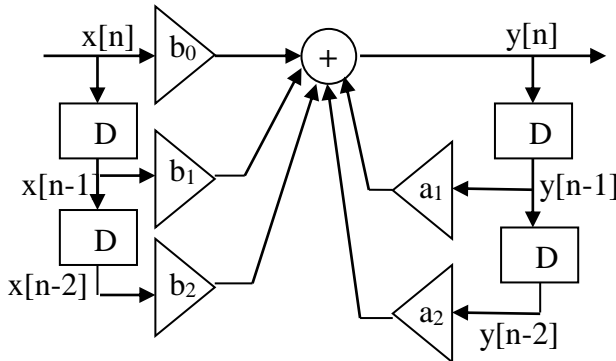
$$y_4[n] = x_1[n] + x_3'[n] = [2.1 \ 4 \ \underline{0.2} \ 46.7 \ 36 \ -3.1 \ 0] \quad (٢٥-٣)$$

**مثال ٢-٣:** التابع  $y[n]$  في شكل ١٥-٣ يمكن كتابته كالتالي:

$$y[n] = a_1x[n] + a_2x[n-1] + a_3x[n-2] + a_4x[n-3]$$



شكل ١٥-٣ مثال ٢-٣.



شكل ١٦-٣ مثال ٣-٣.

**مثال ٣-٣:** التابع  $y[n]$  في شكل ٣-١٦ يمكن كتابته كالتالي:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2]$$

### ٣-٥ التعبير عن التتابعات بدلالة تتابع العينة الواحدة

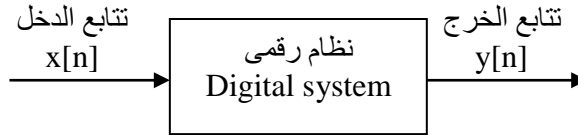
أي تتابع يمكن التعبير عنه في النطاق الزمني كمجموع عدد من الصور المؤخرة زمنيا من إشارة العينة الواحدة unit sample. فمثلا التابع  $y_4[n]$  في المعادلة (٣-٢٥) يمكن إعادة كتابته كدالة في إشارة العينة الواحدة كما يلي:

$$y_4[n] = 2.1\delta[n+2] + 4\delta[n+1] + 0.2\delta[n] + 46.7\delta[n-1] + 36\delta[n-2] - 3.1\delta[n-3] \quad (٣-٢٦)$$

هذه الطريقة في التعبير عن التتابعات سنستخدمها بكثرة عند الحصول على خرج أي نظام بدلالة دخله وهذا سنراه بعد قليل.

### ٣-٦ الأنظمة الرقمية Digital systems

النظام الرقمي هو دالة تعالج تتابع دخل لتعطي تتابع خرج كما في شكل ٣-١٧. يتم حساب تتابع الخرج بدءا من عينة  $n$  معينة ويتتابع خروج العينات من النظام مع تقدم الزمن. شكلي ٣-١٥ و ٣-١٦ تعتبر أمثلة على الأنظمة الرقمية. ونسوق هنا مثال آخر على أحد الأنظمة الرقمية.



شكل ٣-١٧ النظام الرقمي.

**مثال ٣-٤:** من المرشحات الشهيرة، والكثيرة الاستخدام، مرشح نافذة المتوسط المتحركة M point moving average filter التي تتكون من عدد M من النقاط، وتأثيره على الضوضاء. هذا المرشح يأخذ عدد M من نقاط تتابع الدخل ويحسب متوسطها وهذا المتوسط يمثل عينة الخرج عند هذه النقطة، بعد ذلك تراح النافذة بمقدار عينة أخرى من عينات الدخل ويتم حساب المتوسط الجديد، وهكذا حتى نصل إلى آخر عينة من عينات الدخل. يمكن التعبير عن ذلك كما في المعادلة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \quad (٢٧-٣)$$

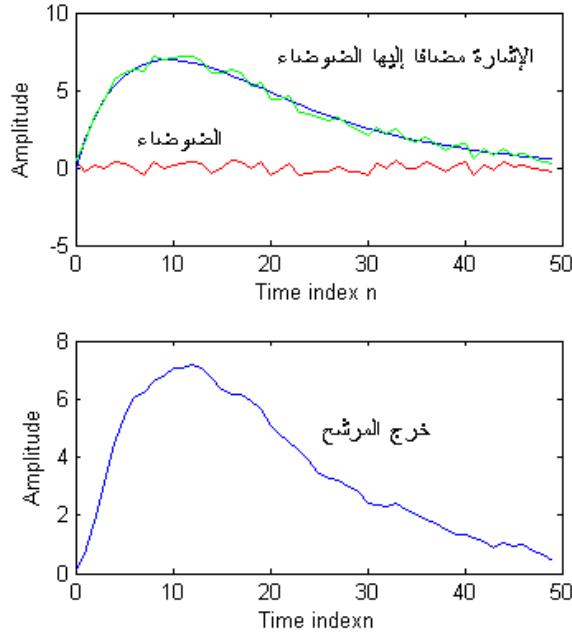
هذا المرشح يمكن استخدامه لتنعيم الضوضاء المضافة على أي إشارة، ويمكن أن نوضح ذلك بفرض أي إشارة  $s[n]=2.n.(0.9)^n$  مثلا، هذه الإشارة سنضيف عليها ضوضاء عشوائية random noise لنحصل على التابع  $x[n]=s[n]+d[n]$  حيث  $x[n]$  ستكون تتابع الدخل للمرشح،  $s[n]$  هي الإشارة قبل إضافة الضوضاء، و  $d[n]$  هي الضوضاء التي سنضيفها باستخدام الدالة rand() في MATLAB. البرنامج التالي يحسب الإشارة  $s[n]$  ويضيف عليها الضوضاء ويحسب الخرج تبعا للمعادلة (٢٧ - ٣) ويرسم هذا الخرج في وجود الضوضاء وفي عدم وجودها لترى الفارق الذي يقدمه مثل هذا المرشح البسيط. شكل ٣-١٨ يوضح كل هذه الإشارات. لن نخوض في شرح أوامر MATLAB لأننا نفترض أن القارئ على دراية بها. حاول تنفيذ هذا البرنامج مستخدما قيما مختلفة للنافذة M لترى تأثير النافذة على عملية تنعيم الضوضاء المضافة.

```
%moving average filter
R=50;
d=rand(1,R)-0.5; الضوضاء
m=0:1:R-1;
s=2*m.*(0.9.^m); الإشارة
x=s+d; تتابع الدخل
```

```

subplot(2,1,1);
plot(m,d,'r',m,s,'b',m,x,'g');
xlabel('Time index n');
ylabel('Amplitude');
M=3;
b=ones(M,1)/M; المرشح
y=filter(b,1,x);
subplot(2,1,2);
plot(m,y,'b')
xlabel('Time index n');
ylabel('Amplitude');

```



شكل ٣-١٨ مرشح نافذة المتوسط وتأثيره على الضوضاء، مثال ٣-٤.

## ٣-٧ تصنيف الأنظمة الرقمية

## Classification of digital systems

هناك الكثير من التصنيفات التي يمكن ذكرها عن الأنظمة الرقمية ومعظم هذه التصنيفات تكون على حسب علاقة خرج النظام بدخله.

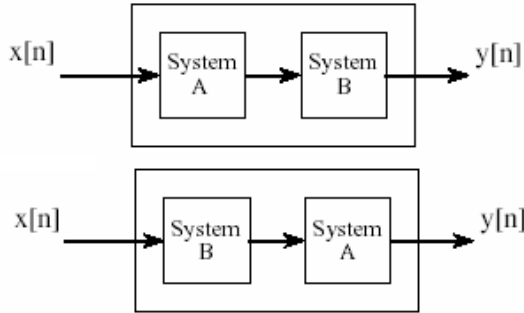
## ٣-٧-١ الخطية Linearity

تقريبا كل الأنظمة الرقمية التي سنتعامل معها في هذا الكتاب عبارة عن أنظمة خطية. بفرض أن  $y_1[n]$  و  $y_2[n]$  تمثل خرج أو استجابة نظام للدخلين  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$ . هذا النظام إذا أدخلنا عليه التتابع  $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$  كدخل، وأعطى الخرج  $y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$ ، فإن هذا النظام يعتبر نظاما خطيا. النظام الخطى يكون دائما متجانس  $homogeneous$ ، وخاصة التجانس تعنى أن أي تغيير في مقدار إشارة الدخل للنظام يقابلها تغيير بنفس المقدار في خرج النظام. أي أنه إذا كان الخرج هو  $y[n]$  عندما يكون الدخل  $x[n]$ ، فإن النظام يكون متجانس إذا كان خرجة هو  $y_1[n]=ay_1[n]$  عندما يكون الدخل هو  $x_1[n]=ax_1[n]$ . من خواص الأنظمة الخطية أيضا أنها تبادلية فإذا كان لدينا نظاما يتكون من أكثر من نظام فرعى فإن ترتيب هذه الأنظمة الفرعية من الدخل إلى الخرج لا يؤثر على الخرج النهائي كما هو موضح في شكل ٣-١٩.

## ٣-٧-٢ خاصية الثبات مع الإزاحة Shift invariant

يوصف النظام بأنه ثابت زمنيا إذا كانت أي إزاحة زمنية في تتابع الدخل يقابلها إزاحة زمنية في الخرج بنفس المقدار. خاصية الثبات الإزاحي ليست شرطا للخطية فيمكن أن يكون هناك نظام ثابت إزاحيا ولكنه غير خطي. يمكن التعبير عن ذلك بأنه إذا كان خرج النظام هو  $y[n]$  عندما يكون الدخل  $x[n]$ ، فإن النظام يكون ثابت إزاحيا إذا كان خرجة

هو  $y[n]=y_1[n-n_0]$  عندما يكون الدخل هو  $x[n]=x_1[n-n_0]$  حيث  $n_0$  تمثل إزاحة تقديم أو تأخير في المتابع. الأنظمة التي تحمل خاصية الخطية مع الثبات الإزاحي من الأنظمة المهمة جدا التي سنتعامل معها في هذا الكتاب حيث أن معظم الأنظمة العملية تكون من هذا النوع ، وهى تكون سهلة التحليل رياضيا وبالتالي سهلة التصميم. هذا النوع من الأنظمة يرمز له بالرمز LTI, Linear Time Invariant.



شكل ٣-١٩ خاصية التبادلية في الأنظمة الخطية.

**مثال ٣-٥ :** النظام  $y[n]=x[n/L]$  حيث  $n=0, \pm L, \pm 2L, \dots$  ليس نظاما ثابتا إزاحيا ويمكن توضيح ذلك بعمل إزاحة في متابع الدخل فيصبح  $x_1[n]=x[(n/L)-n_0]$  والذي يمكن كتابته كما يلي:  $x_1[n]=x[(n-Ln_0)/L]$ . بإجراء إزاحة مقابلة على متابع الخرج نحصل على المتابع التالي:  $y_1[n]=y[n-n_0]=x[(n-n_0)/L]$ ، ومن ذلك نرى أن  $y_1[n] \neq x_1[n]$  وهذا يعنى أن النظام غير ثابت إزاحيا، أى متغير إزاحيا.

### ٣-٧-٣ خاصية السببية أو المعقولية Causality

إذا كانت العينة رقم  $n_0$  من الخرج  $y[n_0]$  مثلا، تعتمد فقط على عينة الدخل  $x[n_0]$  والعينات السابقة لها، أى كل العينات  $x[n]$  حيث  $n < n_0$ ، فإن هذا النظام يسمى نظام

سببياً، أو نظاماً يمكن تحقيقه، أو نظاماً معقولاً، وكل هذه تصلح ترجمات لكلمة causal وربما تكون أفضل من كلمة السببية. باختصار هذه الخاصية تعني أن أي تغيرات في الخرج يجب ألا تسبق زمنياً التغيرات في الدخل، وهذا معقول جداً!! وهذا هو منطق الطبيعة إذ أن لكل سبب أو مؤثر تكون هناك استجابة أو خرج وهذا الخرج يعتمد على قيم المؤثر الحالية والسابقة ولا يمكن أن يعتمد على قيم المؤثر التالية أو القادمة. هذا المنطق من الممكن أن يكون غير محقق وبالذات مع استخدام الحاسبات حيث يمكن أن تكون عينات الدخل مسجلة في الذاكرة وفي هذه الحالة يمكن حساب الخرج اعتماداً على أي عينة من الدخل سواء سابقة أو تالية لعينة الخرج. هذا بالطبع لا يمكن تحقيقه عند التعامل في الأزمنة الحقيقية real time.

**مثال ٣-٦:** النظام  $y[n]=x[n]+0.5\{x[n-1]+x[n+1]\}$  ليس نظاماً سببياً لأن عينات الخرج عند لحظة معينة تعتمد من ضمن ما تعتمد على عينات دخل قادمة، فمثلاً عندما  $n=5$  فإن  $y[5]$  تعتمد على  $x[5]$  و  $x[4]$  و  $x[6]$  وهنا تكمن المشكلة حيث لا يعقل أن تعتمد عينة الخرج الخامسة على عينة الدخل السادسة التي لم تأت بعد.

### ٣-٧-٤ الأنظمة المستقرة Stable systems

النظام المستقر هو النظام الذي يعطى خرجاً محكوماً bounded عندما يكون دخله محكوماً. التابع  $x[n]$  يكون محكوماً إذا كان  $|x[n]| < Bx$  لكل قيم  $n$  حيث  $Bx$  هي كمية أو ثابت محدد، وهذا يعني باختصار أن مقدار أي عينة في التابع يكون محدداً ولا يؤول إلى المالا نهائية. وعلى ذلك يمكننا القول أن للنظام المستقر إذا كان الدخل هو  $|x[n]| < Bx$  فإن خرجة يجب أن يكون  $|y[n]| < By$  حيث  $By$  كمية ثابتة لا تساوى مالا نهائية. مثل هذه الأنظمة نطلق عليها بأنها أنظمة محكومة الدخل محكومة الخرج



(BIBO) Bounded Input, Bounded Output. سيكون هناك حديثا أكثر تفصيلا عن الاستقرار وشروطه عند الحديث عن تحويل  $Z$ .

**مثال ٣-٧:** مرشح نافذة المتوسط المتحركة في مثال ٣-٤ هو نظام مستقر لأنه بوضع تتابع الدخل  $x[n]$  يساوى قيمة ثابتة فإن الخرج يكون أيضا قيمة ثابتة ويمكن توضيح ذلك كالتالي:

$$|y[n]| = \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \right| \leq \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |x[n-k]| \leq \frac{1}{M} (M) Bx \leq Bx$$

### ٣-٧-٥ خاصية الانعكاس Invertibility

إذا أمكن تحديد دخل أي نظام تحديدا وحيدا unique بمجرد معرفة خرجه، فإن هذا النظام يقال عنه أنه قابل للعكس، أي يمكن تحديد دخله بمعرفة خرجه. فمثلا النظام  $y[n] = \{x[n]\}^2$  غير قابل للعكس لأنه بمعرفة الخرج يكون هناك قيمتان للدخل يحققان معادلة هذا النظام.

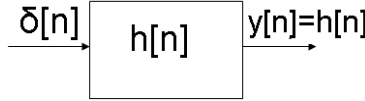
### ٣-٧-٦ خاصية الحمول Passivity

إذا كانت طاقة خرج أي نظام أقل من أو تساوى طاقة دخله فإن هذا النظام يوصف بأنه خامل، ويمكن التعبير عن ذلك كالتالي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

### ٣-٨ علاقة الخرج بالدخل للأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا LTI

عند تحليل أو بناء أي نظام لابد من معرفة أو تحديد علاقة خرج هذا النظام بدخله. هناك طريقتين شائعتين للتعبير عن علاقة خرج النظام بدخله وهما: استجابة النظام للدفعة أو العينة الواحدة unit sample response، واستجابة النظام للخطوة step response.



شكل ٣-٢٠ استجابة العينة الواحدة (الصدمة أو الدفعة).

### ٣-٨-١ استجابة العينة الواحدة Unit sample response

استجابة العينة الواحدة لأي نظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله هو تتابع العينة الواحدة  $\delta[n]$ . عادة يرمز لهذه الاستجابة بالرمز  $h[n]$ ، واختصارا يطلق عليها استجابة الصدمة أو الدفعة impulse response وهي الأكثر استخداما من استجابة الخطوة. بفرض أن لدينا النظام  $y[n]=x[n]+0.5\{x[n-1]+x[n+1]\}$  فإن استجابة الدفعة له يمكن الحصول عليها بوضع  $x[n]=\delta[n]$  وعلى ذلك فإن استجابة الدفعة أو الصدمة لهذا النظام ستكون  $h[n]=\delta[n]+0.5\{\delta[n-1]+\delta[n+1]\}$ .

### ٣-٨-٢ استجابة الخطوة Step response

استجابة الخطوة لأي نظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله هو تتابع الخطوة  $u[n]$ . عادة يرمز لهذه الاستجابة بالرمز  $s[n]$ .

### ٣-٨-٣ علاقة الخرج بالدخل للأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا LTI

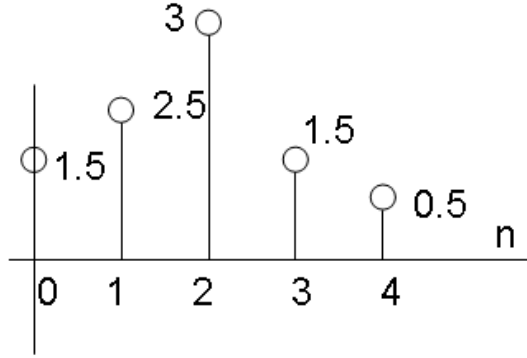
عند تحليل أي نظام أو حتى بناؤه فإن علاقة خرج هذا النظام بدخله تكون مهمة جدا. لقد أشرنا في الجزء ٣-٥ كيف أنه يمكن التعبير عن أي تتابع كمجموع من تتابعات

الصدمة أو وحدة العينة المزاحة زمنيا. شكل ٣-٢١ يبين أحد التتابعات التي يمكن التعبير عنها كمجموع من تتابعات الصدمة كما يلي:

$$x[n]=1.5\delta[n]+2.5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+1.5\delta[n-3]+0.5\delta[n-4] \quad (٢٨-٣)$$

والذي يمكن إعادة كتابته في الحالة العامة كما يلي:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (٢٩-٣)$$



شكل ٢١-٣ تتابع افتراضي.

بفرض أن هذا النظام خطى وثابت إزاحيا LTI فإن خرج هذا النظام سيكون مجموع استجاباته لوحدة العينة  $1.5\delta[n]$  والتي تساوى  $1.5h[n]$ ، ووحدة العينة  $2.5\delta[n-1]$  والتي تساوى  $2.5h[n-1]$  وهكذا لباقي مركبات المعادلة (٣-٢٨). وعلى ذلك يمكن كتابة خرج هذا النظام الخطى الذى دخله هو التتابع  $x[n]$  كما يلي:

$$y[n]=1.5h[n]+2.5h[n-1]+3h[n-2]+1.5h[n-3]+0.5h[n-4] \quad (٣٠-٣)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة الخرج بدلالة الاستجابة الصدمية أو الدفعية لأى نظام كما يلي:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (31-3)$$

وبتغيير بسيط في المتغيرات يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \quad (32-3)$$

المجموع الموجود في المعادلتين (31-3) و (32-3) يسمى المجموع الالتفافي convolutional sum. إن ذلك يعنى أن خرج النظام الخطى الثابت إزاحيا يساوى المجموع الالتفافي لدخل هذا النظام والاستجابة الصدمية له. المجموع الالتفافي يرمز له بالرمز التالي:

$$y[n]=x[n]*h[n] \quad (33-3)$$

بعض المراجع تضع دائرة حول النجمة الموجودة في المعادلة (33-3) ولكننا سنكتفي في هذا الكتاب بالنجمة فقط تبسيطا للأمر .

### 3-8-4 عملية الجمع الالتفافي Convolution

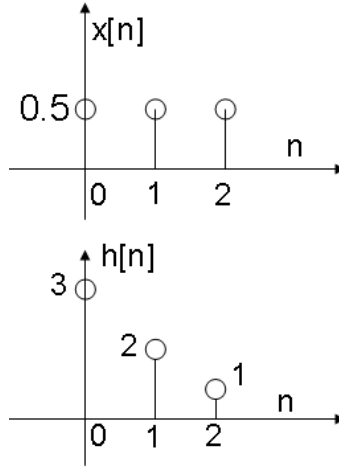
هذه العملية كما رأينا تستخدم في إيجاد العلاقة بين خرج أي نظام خطى ثابت إزاحيا LTI ودخله، والاستجابة الصدمية له. وهذه العملية من العمليات الكثيرة المستخدمة في المعالجة الرقمية للإشارات. وسنرى في هذا الجزء كيفية إجراء أو تنفيذ هذه العملية والخواص الشهيرة لها ، وسنرى ذلك من خلال المثال التالي.

**مثال ٣-٨:** حساب المجموع الالتفافي convolution على المتابعين  $x[n]$  و  $h[n]$  الموضحين في شكل (٣-٢٢).

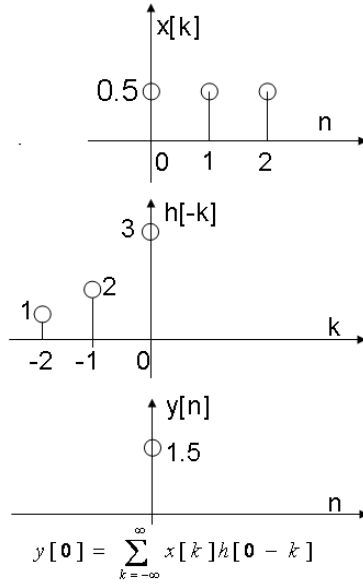
١- بوضع  $n=0$  في المعادلة (٣-٣١) نحصل على معادلة الخرج التالية:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] \quad (٣-٣٤)$$

من هذه المعادلة نرى أن عينة الخرج  $y[0]$  تساوى حاصل ضرب  $x[k]$  في معكوس المتابع  $h[k]$  وهو المتابع  $h[-k]$  لكل قيم  $k$ . شكل ٣-٢٣ يبين هذه الخطوة وعينة الخرج الناتجة  $y[0]$ .



شكل ٣-٢٣ متابعين مطلوب إجراء المجموع الالتفافي عليهما.



شكل ٣-٢٣ الخطوة الأولى وهي حساب  $y[0]$ .

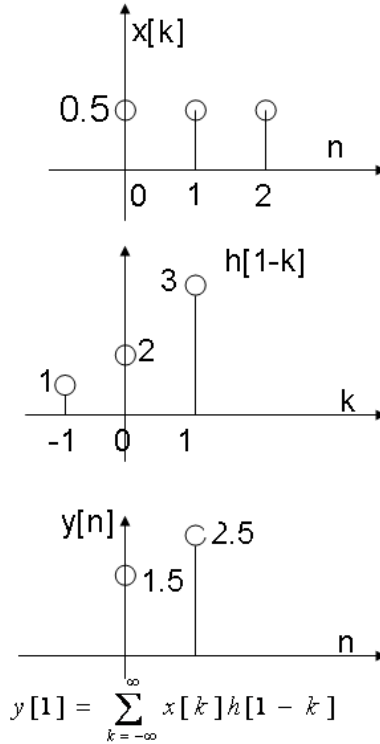
٢- بوضع  $n = 1$  في المعادلة (٣١ - ٣) نحصل على عينة الخرج  $y[1]$  التالية:

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] \quad (35-3)$$

لاحظ أن  $h[1-k]$  هي  $h[-k]$  بعد إزاحتها ناحية اليمين عينة واحدة. شكل ٣-٢٤ يبين خطوة حساب  $y[1]$ .

٣- نضع  $n = 2$  ثم  $n = 3$  وهكذا وفي كل مرة نزيح  $h[-k]$  ناحية اليمين بمقدار عينة واحدة ونحسب في كل مرة حاصل ضرب  $x[k]$  في  $h[n-k]$  لجميع قيم  $k$ .

٤- نستمر في عملية الإزاحة كما في الخطوة ٣ حتى يتم إزاحة  $h[-k]$  خارج نطاق  $x[k]$  تماما حيث عندها يكون حاصل ضرب هذين التتابعين بصفر وبذلك تنتهي عملية حساب المجموع الالتفافي. شكل ٣-٢٥ يبين النتيجة النهائية للمثال السابق حاول تتبعها وحسابها عينة بعد عينة.



شكل ٣-٢٤ الخطوة ٢ وهي حساب  $y[1]$ .

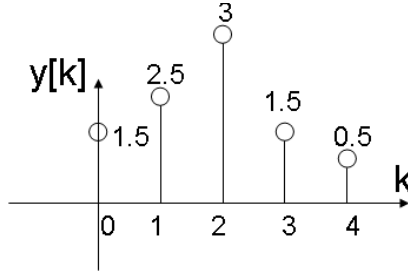
### ٣-٨-٥ خواص عملية الجمع الالتفافي

١- طول كل من التتابعين الذين تجرى عليهما عملية الجمع الالتفافي يجب أن يكونا محددي الطول، وإلا إذا كان أحدهما لا نهائي فلن يمكن حساب نتيجة هذه العملية.

٢- بفرض أن أحد التتابعين كان طوله هو  $M$  والتتابع الثاني طوله هو  $N$  فإن التتابع الناتج عن عملية الجمع الالتفافي سيكون طوله هو  $M+N-1$ . فمثلا في المثال ٣-٨ ، إذا كانت  $M=3$  و  $N=3$ ، فإن طول التتابع الناتج سيساوى 5 كما في شكل ٣-٢٥.

٣- عملية الجمع الالتفافي عملية تبادلية commutative، أي أن ترتيب إجراء العملية لا يهم:

$$x_1[n]*x_2[n]=x_2[n]*x_1[n]$$



شكل ٣-٢٥ النتيجة النهائية للمثال ٤-٨.

٤- عملية الجمع الالتفافي عملية انضمامية associative، أي يمكن إجراؤها على تتابعين منضمين في عملية جمع التفافي أخرى:

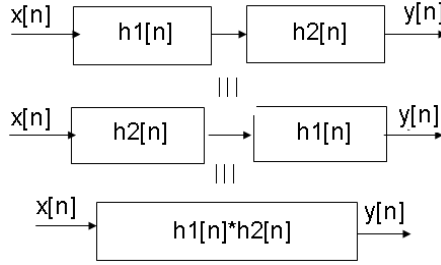
$$(x_1[n]*x_2[n])*x_3[n]=x_1[n]*(x_2[n]*x_3[n])$$

٥- عملية الجمع الالتفافي عملية قابلة للتوزيع distributive، أي أن إجراء عملية الجمع الالتفافي على مجموع تتابعين وتتابع آخر تساوى مجموع عمليتي الجمع الالتفافي على هذا التتابع وكل من التتابعين الآخرين على حده ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$x_1[n]*(x_2[n]+x_3[n])=x_1[n]*x_2[n]+x_1[n]*x_3[n]$$

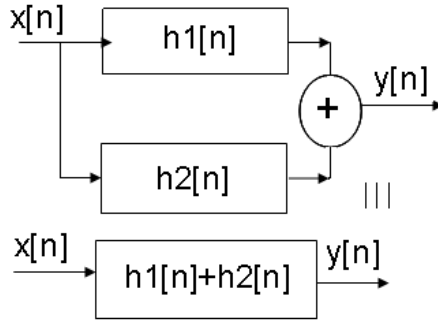


٦- توصيل نظامين خطيين ثابتين إزاحيا LTI على التوالي يكافئ عملية الجمع الالتفافي على استجابة الصدمة لكل منهما. شكل ٣-٢٦ يبين ذلك.



شكل ٣-٢٦ توصيل نظامين خطيين على التوالي.

٧- توصيل نظامين خطيين ثابتين إزاحيا LTI على التوازي يكافئ مجموعهما. شكل ٣-٢٧ يبين هذا النوع من التوصيل.



شكل ٣-٢٧ توصيل نظامين خطيين على التوازي.

**مثال ٣-٩:** احسب المجموع الالتفافي للتتابعين  $h[n]=a^n u[n]$  و  $x[n]=u[n]$  حيث

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad 0 < a < 1$$

وبالتعويض عن كل من التتابعين يمكن كتابة التابع الناتج  $y[n]$  كما يلي:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]u[n-k]$$

التتابع  $u[k]$  يساوى صفر لكل قيم  $k$  السالبة، وذلك من طبيعة تتابع الخطوة، ويساوى واحد لكل قيم  $k$  الموجبة. بنفس الطريقة يمكن القول بأن التتابع  $u[n-k]$  يساوى صفر لكل قيم  $(n-k)$  السالبة ويساوى واحد لكل قيم  $(n-k)$  الموجبة، أي لكل قيم  $k$  التي تحقق  $0 \leq k \leq n$ . وعلى ذلك يمكن كتابة تتابع الخرج  $y[n]$  في المعادلة السابقة بعد تغيير حدود رمز عملية الجمع كما يلي:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

وبما أن هذا التتابع موجود فقط لكل قيم  $n$  الموجبة فإنه يمكن كتابة التتابع السابق كما يلي:

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$$

### ٣-٨-٦ بعض خواص الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا LTI

لقد رأينا فيما سبق الخواص التي نستخدمها لتصنيف الأنظمة عامة وهنا سنطبق بعض هذه الخواص على الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا بالذات:

١- خاصية الاستقرار للأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا. لقد رأينا فيما سبق أن النظام يكون مستقرا إذا كان يعطى خرجا محكوما لكل دخل محكوم، وتطبيق ذلك على هذا النوع من الأنظمة يمكننا كتابة ما يلي:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (٣٦-٣)$$

بفرض أن تتابع الدخل  $x[n]$  كان محكوماً، ولذلك فإن  $|x[k]| \leq Bx$  حيث  $Bx$  هي أي ثابت، فإن المعادلة (٣-٣٦) يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$|y[n]| \leq Bx \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (٣-٣٧)$$

من هذه المعادلة نجد أنه لكي يكون الخرج  $y[n]$  محكوماً فإن تتابع استجابة الصدمة  $h[n]$  يجب أن يكون محكوماً، أي أن  $|h[n]| \leq Sx$  حيث  $Sx$  هي أي ثابت. في هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة (٣-٢٧) كالتالي:

$$|y[n]| \leq BxSx \quad (٣-٣٨)$$

باختصار يمكن القول أن أي نظام خطى ثابت إزاحياً لكي يكون مستقراً فإن استجابة الصدمة لهذا النظام يجب أن تكون محكومة أيضاً.

**٢- خاصية السببية للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً.** لقد عرفنا الأنظمة السببية causal سابقاً على أنها الأنظمة التي لا يعتمد خرجها الحالي على عينات مستقبلية للدخل. سنستنتج هنا هذا الشرط بالنسبة للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً بالذات. افترض التتابعين التاليين:

$$x_1[n] = x_2[n], \quad n \leq n_0 \quad (٣-٣٩)$$

بفرض أن هذين التتابعين استخدمنا كدخل لنظام خطى ثابت إزاحياً، فإن العينة  $y[n_0]$  لخرج هذا النظام بناء على الدخلين  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  يمكن كتابتهما كالتالي:

$$y_1[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x_1[n_0-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_1[n_0-k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_1[n_0-k] \quad (٣-٤٠)$$

$$y_2[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x_2[n_0-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_2[n_0-k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_2[n_0-k] \quad (٣-٤١)$$

لكي يكون الخرج  $y_2[n_0]$  مساويا للخرج  $y_1[n_0]$  فإن الدخل  $x_2[n_0-k]$  يجب أن يساوى  $x_1[n_0-k]$  وهذا محقق من المعادلة (٣ - ٣٩) لكل قيم  $k > 0$ ، وعلى ذلك فإن الشق الأول من المعادلة (٣ - ٤٠) سيساوى الشق الأول من المعادلة (٣ - ٤١). المشكلة هي مع الشق الثاني في كل من المعادلتين السابقتين حيث تكون  $k$  سالبة في هذه الحالة. في هذه الحالة ستخرج الكميتان  $x_1[n_0-k]$  و  $x_2[n_0-k]$  عن حدود المعادلة (٣ - ٣٩) لأن  $n_0-k$  في هذه الحالة سيكون أكبر من  $n_0$  لأن  $k$  سالبة. وعلى ذلك فالحالة الوحيدة التي يمكن عندها أن تتساوى المعادلتين (٣ - ٤٠) و (٣ - ٤١) هي أن يكون  $h[k]=0$  في هذا الشق من المعادلتين. وعلى ذلك يمكننا كتابة شرط السببية للأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا LTI وهو أن يكون  $h[n]$ ، استجابة الصدمة للنظام، تساوى صفر لكل قيم  $n$  السالبة.

### ٣- تصنيف الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا على حسب طول استجابة الصدمة $h[n]$ .

يسمى النظام "ذو استجابة صدمية محدودة الطول" Finite Impulse Response, FIR إذا كانت استجابة الصدمة لهذا النظام محدودة الطول. أما إذا كان طول استجابة الصدمة غير محدود ففي هذه الحالة نطلق على النظام أنه "ذو استجابة صدمية غير محدودة" Infinite Impulse Response, IIR. الأمثلة على كل من هذين النوعين كثيرة وسندرس مرشحات عديدة على كل منهما في الفصول القادمة.

### ٤- تصنيف الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا على حسب طريقة حساب الخرج. إذا كانت

أي عينة من الخرج يمكن حسابها من عينة الدخل الحالية والعينات السابقة للدخل فقط، فإن هذا النظام يسمى نظاما غير تكراري nonrecursive. بينما إذا كانت عينة الخرج يتم حسابها بمعرفة عينة الدخل الحالية والعينات السابقة من الدخل والخرج فإن هذا النظام يسمى نظاما تكراريا recursive. من أمثلة الأنظمة الغير تكرارية النظام التالي:

$$y[n] = \sum_{k=N1}^{N2} h[k]x[n-k] \quad (٤٢-٣)$$

بينما من أمثلة الأنظمة التكرارية النظام التالي:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{p_k}{d_0} x[n-k] \quad (٤٣-٣)$$

### ٣-٩ تطبيقات على برنامج ماتلاب MATLAB

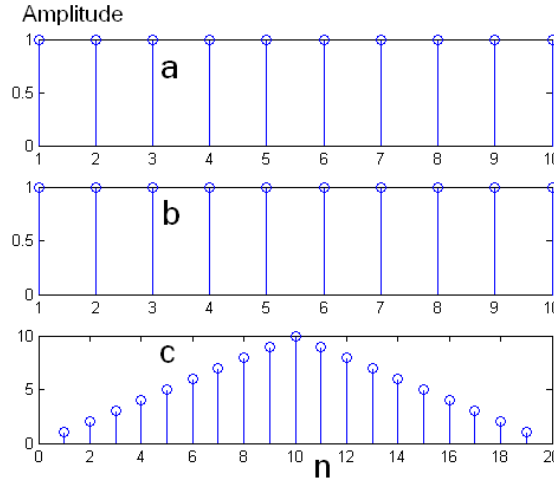
١- استخدام ماتلاب MATLAB في حساب المجموع الالتفائي convolution

الدالة  $C = \text{CONV}(A, B)$  تحسب المجموع الالتفائي بين المتجهين A و B. المتجه الناتج C يكون طوله مساويا لمجموع طولي المتجهين A و B ناقص واحد (طول A + طول B - ١). المتجهات A و B أحادية الأبعاد ويمكن أن تكون لها أكثر من بعد.

**مثال ٣-١٠:** هذا المثال يوضح برنامج يحسب المجموع الالتفائي لمتجهين (إشارتين) كل منهما عبارة عن متجه الخطوة مكون من ١٠ عينات. المتجه الناتج c يحتوي ١٩ عينة كما في شكل ٣-٢٨ الذي يوضح المتجهين a و b والمتجه الناتج c.

```
%convolution of two sequences
a=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
b=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
c=conv(a,b);
subplot(3,1,1);
stem(a);
subplot(3,1,2);
stem(b);
subplot(3,1,3);
stem(c)
```

٢- استخدام MATLAB في حساب استجابة الدفعة أو الصدمة impulse response واستجابة الخطوة step response للنظم الخطية الثابتة إزاحيا. المعادلة (٣-٤٣) تقدم صورة عامة لهذا النوع من الأنظمة. استجابة الصدمة هي خرج النظام عندما يكون دخله هو الصدمة أو تتابع العينة الواحدة. لذلك فإنه بوضع  $x[n]=\delta[n]$  في المعادلة (٣-٤٣) فإن الخرج  $y[n]$  في هذه الحالة سيمثل استجابة الصدمة  $h[n]$  لهذا النظام. الدالة  $y=\text{filter}(p,d,x)$  في MATLAB تحسب خرج أى نظام (مرشح filter) يكون دخله هو التابع  $x$  و  $p$  هي معاملات عينات الدخل  $x[n-k]$  و  $d$  هي معاملات عينات الخرج  $y[n-k]$  كما في المعادلة (٣-٤٣). البرنامج التالي يحسب استجابة الصدمة لمثل هذا النظام:



شكل ٣-٢٨ المجموع الالتفافي لتتابعين.

$$y[n]=-0.7y[n-1]+0.45y[n-2]+0.6y[n-3]+0.8x[n]-0.44x[n-1]+0.36x[n-2]+0.02x[n-3]$$

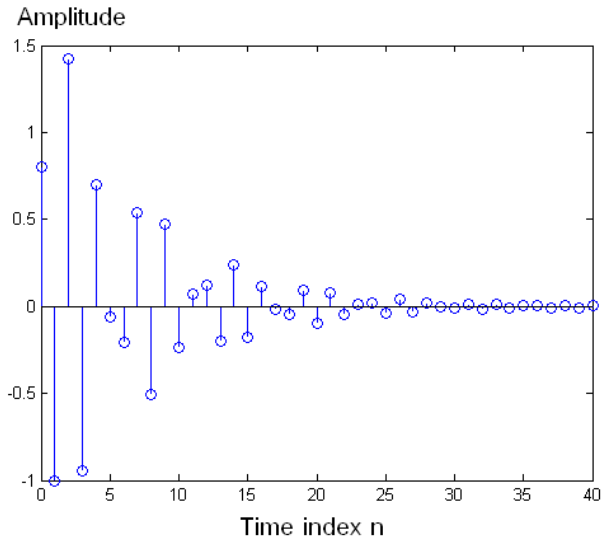
(٣-٤٤)

البرنامج الذي سيحسب استجابة الصدمة باستخدام الدالة filter سيكون كالتالي:

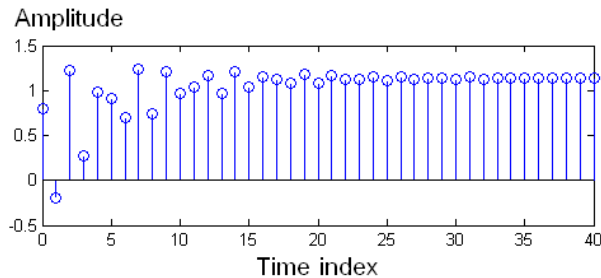
```

%Calculation of impulse response using the filter function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8 -0.44 0.36 0.02];
den=[1 0.7 -0.45 -0.6];
x=[1 zeros(1,L-1)];
y=filter(num, den, x);
n=0:L-1;
stem(n,y);
xlabel('time index n');
ylabel('Amplitude');

```



شكل ٣-٢٩ حساب استجابة الصدمة لنظام المعادلة (٣-٤٤).



شكل ٣-٣٠ حساب استجابة الخطوة لنظام المعادلة (٣-٤٤).

لاحظ في البرنامج السابق كيف تم التعبير عن دالة العينة الواحدة باستخدام الأمر:

$$x=[1 \text{ zeros}(1,L-1)];$$

يمكن حساب استجابة الخطوة للنظام بتغيير هذا الأمر ليمثل دالة الخطوة كما في البرنامج التالي:

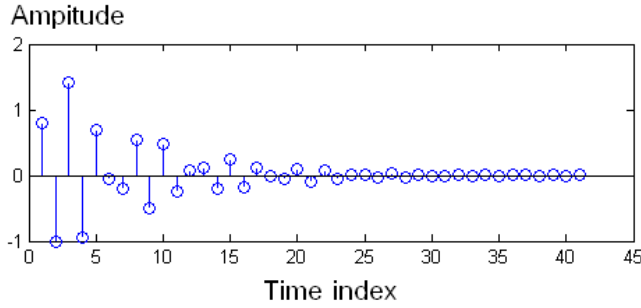
```
%Calculation of step response using the filter function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8 -0.44 0.36 0.02];
den=[1 0.7 -0.45 -0.6];
x=[ones(1,L)];
y=filter(num, den, x);
n=0:1:L-1;
stem(n,y);
xlabel('time index n');
ylabel('Amplitude');
```

هناك أيضا الدالة `impz` التي تحسب استجابة الصدمة لنظام معطى بدلالة دالة العبور أو الانتقال `transfer function` التي تعطى علاقة الخرج بالدخل في النطاق  $z$   $(y(z)/x(z)=A/B)$ . حيث كل من  $A$  و  $B$  عبارة عن كثيرات حدود في المتغير  $z$ . معادلة النظام  $(z^3 - 0.4z^2 - 0.6z^{-3})$  يمكن إعادة كتابتها في صورة دالة عبور كما يلي:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.8 - 0.44Z^{-1} + 0.36Z^{-2} + 0.02Z^{-3}}{1 + 0.7Z^{-1} - 0.45zZ^{-2} - 0.6Z^{-3}} \quad (45-3)$$

البرنامج التالي يحسب استجابة الصدمة للنظام السابق باستخدام الدالة `impz()` بدلا من الدالة `filter()` كما سبق.



شكل ٣-٣١ حساب استجابة الصدمة باستخدام الدالة `impz()`.

```
%Impulse response of a rational function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8 -0.44 0.36 0.02];
den=[1 0.7 -0.45 -0.6];
[y t]=impz(num,den,L);
subplot(2,1,1);
stem(y);
xlabel('time index');
ylabel('Amplitude');
```

### ٣-١٠ تمارين

١- ارسم كل من الدوال التالية:

- a)  $x[n]=2\delta[n-3]-3\delta[n+2]$       b)  $x[n]=3\sin(0.2\pi n)u[n]$       c)  $x[n]=3\sin(2.2\pi n)u[n]$   
d)  $x[n]=3\sin(1.8\pi n)u[n]$       e)  $x[n]=(0.5)^n u[n]$       f)  $x[n]=u[n-2]$   
g)  $x[n]=u[-n+2]$       h)  $x[n]=u[-n-2]$

٢- ارسم التابع  $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0]$ ، لاحظ أن العينة التي تحتها خط تمثل  $x[0]$ . من

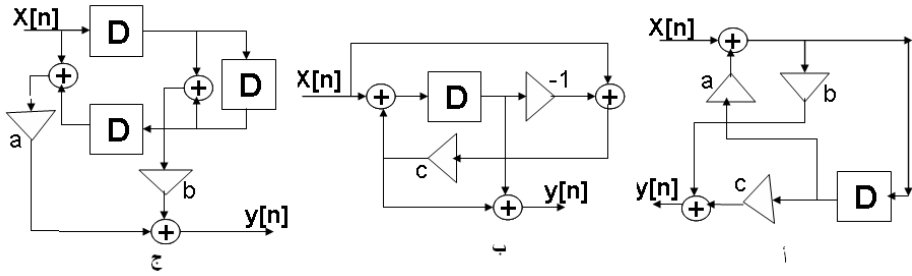
هذا التابع ارسم التتابعات التالية:  $x[n-2]$  و  $x[n+2]$  و  $x[-n-1]$  و  $x[-n]$  و  $x[2n]$ .

٣- إذا كان التابع  $g[n]$  تتابعا زوجيا والتتابع  $h[n]$  تتابعا فرديا، فأى التتابعات التالية

زوجي وأيها فردي:  $x_1[n]=g[n].g[n]$  و  $x_2[n]=g[n].h[n]$  و  $x_3[n]=h[n].h[n]$

٤- أكتب علاقة الخرج  $y[n]$  بالدخل  $x[n]$  في كل من الأنظمة الموضحة في شكل (ت ٣-٣).

(٤).



شكل (ت ٣-٤).

٥- احسب الزمن الدوري لكل من التتابعات التالية وبين أيها دوري وأيها ليس دوري:

- a)  $x[n]=3\sin(0.05\pi n)$       b)  $x[n]=-3\sin(0.055\pi n)$   
 c)  $x[n]=3\sin(0.05\pi n)+3\sin(0.12\pi n)$       d)  $x[n]=5\cos(0.6\pi n)$

٦- التابع  $y[n]$  هو خرج النظام الذي دخله هو التابع  $x[n]$  في كل مما يلي، حدد إذا كان كل من الأنظمة التالية ١- خطي ٢- سببي ٣- مستقر:

- a)  $y[n]=Ax^2[n]$       b)  $y[n]=Ax[n]+B$       c)  $y[n]=Ae^{-\alpha n}$   
 d)  $y[n]=Ax[n+1]+Bx[n-1]$       e)  $y[n]=Ax[n]x[n-1]$   
 f)  $y[n]=\text{median}(x[n], x[n-1], x[n-2])$       g)  $y[n]=\text{minimum}(x[n], x[n-3])$

٧- إذا كان أحد الأنظمة ممثلاً بالمعادلة الفرقية التالية:

$$y[n]=3y_2[n-1]-nx[n]+4x[n-1]-2x[n+1], \quad n \geq 0$$

- أ- هل هذا النظام خطي؟ وضح؟  
 ب- هل النظام ثابت إزاحياً؟ اشرح؟  
 ج- هل النظام سببي؟ اشرح؟  
 د- هل النظام تكراري recursive أم لا؟

٨- في كل مما يأتي  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  تتابعان المجموع الالتفافي لهما هو  $y[n]$ ، احسب  $y[n]$  في كل حالة:

- a)  $x_1[n]=u[n]-u[n-N]$ ,  $x_2[n]=nu[n]$       b)  $x_1[n]=u[n-1]-u[n-3]$ ,  $x_2[n]=u[n+3]-u[n+1]$   
 c)  $x_1[n]=(0.5)^n u[n]$ ,  $x_2[n]=x_1[n]$       d)  $x_1[n]=2^n u[-n-1]$ ,  $x_2[n]=4^n u[-n-1]$

٩- احسب  $y[n]=x_1[n]*x_2[n]$  حيث  $x_1[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]+4\delta[n-3]$  و  $x_2[n]=\delta[n+1]-2\delta[n]+\delta[n-1]$  باستخدام MATLAB.

١٠- وضح أن المجموع الالتفافي لتتابع طوله  $M$  وآخر طوله  $N$  يعطى تتابع طوله  $M+N-1$ .

١١- افترض التتابع  $x[n]$  الذي طوله  $N$  من العينات والمعطى بالعلاقة التالية:

$$x[n]= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

احسب  $y[n]=x[n]*x[n]$  وبين أن هذا التتابع سيكون مثلثاً رأسه عند العينة  $N$ . حدد العينات التي قيمتها  $N/4$  و  $N/2$  و  $N$ .

١٢- افترض التتابع  $x[n]$  كالآتي:

$$x[n]= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 0.5 N-1 \\ -1 & 0.5 N \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حدد رقم ومقدار العينة ذات أكبر قيمة موجبة، ورقم ومقدار العينة ذات أكبر قيمة سالبة في التتابع  $y[n]=x[n]*x[n]$ .

١٣- افترض المعادلة الفرقية التالية التي تمثل أحد الأنظمة:  $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=x[n]$  حيث  $y[n]=0$  لكل قيم  $n$  السالبة:

أ- احسب  $y[n]$  إذا كانت  $x[n]=\delta[n]$ .

ب- احسب  $y[n]$  إذا كانت  $x[n]=u[n]$ .

ج- احسب  $y[n]$  إذا كانت  $x[n]=u[n]-u[n-2]$ .

د- ما هي استجابة الصدمة  $h[n]$  لهذا النظام.

هـ- ما هي استجابة الخطوة  $S[n]$  لهذا النظام.

و- هل تعتقد أن هذا النظام مستقر؟

١٤- استجابة الصدمة لأحد الأنظمة هي:  $h[n]=2^{-n}u[n]$  ، احسب وارسم خرج هذا

النظام  $y[n]$  إذا كان الدخل  $x[n]= 2\delta[n]+ 4\delta[n-1]+ 4\delta[n-2]$ . هل هذا النظام

مستقر؟ هل هذا النظام سببياً؟

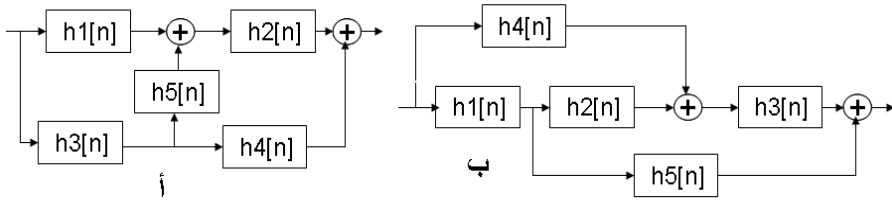
١٥- استجابة الصدمة لأحد الأنظمة هي:  $h[n]=3(0.25)^{-n}u[n-1]$ ، هل هذا النظام

مستقر؟ هل هذا النظام سببياً؟ هل النظام من النوع المحدود الطول أم اللا محدود،

FIR أم IIR ؟

١٦- أكتب معادلة الاستجابة الصدمية الكلية للأنظمة المركبة الموضحة في شكل (ت ٣-١٦-

(١٦).



شكل (ت ٣-١٦).

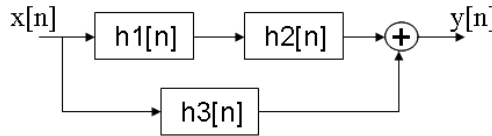
١٧- احسب الاستجابة الصدمية الكلية للنظام الموضح في شكل (ت ٣-١٧) إذا كانت

الاستجابة الصدمية للأنظمة الفرعية تعطى بالعلاقات التالية:

$$h1[n]= \delta[n-1]+ 3\delta[n]$$

$$h2[n]= \delta[n-2]+ 2\delta[n]$$

$$h3[n]= 6\delta[n-6]+ 7\delta[n-4]- 3\delta[n-1]+ \delta[n]$$



شكل (ت ٣-١٧).

- ١٨- اكتب برنامج MATLAB يرسم الدوال:  $\delta[n]$  و  $u[n]$  و  $nu[n]$ . ارسم ١٠٠ عينة من كل تتابع.
- ١٩- اطلب المساعدة help وتعرف على الدوال square و sawtooth وارسم ١٠٠ عينة من كل منها بعد التعرف على معاملات كل دالة.
- ٢٠- استخدم الـ MATLAB لرسم ٥٠ عينة من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة  $1.5e^{(-0.3+j\pi/3)n}$ .

# الفصل الرابع

## تحويل Z Z Transform

### ٤-١ مقدمة

إن عملية تحويل أي إشارة من نطاق إلى نطاق آخر من العمليات المهمة جدا حيث أن عملية الانتقال بالإشارة إلى النطاق الجديد يتيح للمستخدم التعرف على الكثير من خواص الإشارة التي لا يمكن التعرف عليها في النطاق الأول، كما أنه يمكن إجراء الكثير من العمليات على الإشارة وهي في النطاق الجديد وقد كان لا يمكن إجراؤها والإشارة في النطاق الأول. بعد ذلك يمكن إرجاع الإشارة إلى نطاقها الأول. تماما مثل تحويل الماء إلى ثلج، حيث وهو في صورته الثلجية يمكن أن نتعامل معه بالصورة الثلجية ونستفيد من الكثير من خواصه وهو في هذه الصورة، بعد ذلك يمكن إرجاعه إلى صورته السائلة مرة أخرى.

تحويل Z من التحويلات الشهيرة جدا في التعامل مع الإشارات الرقمية. هذا التحويل يمكن النظر إليه على أنه حالة عامة لتحويل فورير الذي سندرسه في الفصل القادم. بتحويل أي إشارة إلى النطاق Z يمكن دراسة مسلكها مع التردد كما هو الحال في تحويل فورير. بتحويل استجابة أي نظام إلى النطاق Z يمكن تحديد أصفار وأقطاب النظام ومن ثم يمكن تحديد هل النظام مستقر أم لا. من دراستنا لهذا النظام سنرى أنه يكفيء تماما تحويل لابلاس في الأنظمة التناظرية، وكما كان تحويل لابلاس يستخدم في حل المعادلات التفاضلية فإن تحويل Z يستخدم في حل المعادلات الفرقية difference equations. باختصار إن تحويل Z أداة مهمة جدا في تحليل وتصميم الأنظمة الرقمية.

## ٢-٤ تحويل Z ، Z transform

تحويل Z لأي تتابع  $x[n]$  يرمز له بالرمز  $X(Z)$  ويعطى بالعلاقة التالية:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n} \quad (١-٤)$$

حيث Z متغير مركب complex يمكن التعبير عنه بأحد الصور التالية:

$$Z = \text{Real}(z) + \text{Imaginary}(z) \quad (٢-٤)$$

$$Z = re^{jw} \quad (٣-٤)$$

$$\text{Real}(z) = r \cos(w), \text{Imaginary}(z) = r \sin(w) \quad (٤-٤)$$

صورة المتغير Z في المعادلة (٢ - ٤) تسمى الصورة الكارتيزية cartesian، وصورته في المعادلة (٣ - ٤) تسمى الصورة القطبية polar، حيث r هي مقدار المتغير و w هي السرعة الزاوية له.

في المعادلة (١ - ٤) يمكن الحصول على تحويل فوريير من تحويل z بالتعويض عن z بصورتها القطبية كما يلي:

$$x(re^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-jwn} \quad (٥-٤)$$

بوضع  $r=1$  في المعادلة السابقة نحصل على تحويل فوريير كما يلي:

$$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \quad (٦-٤)$$

وهذه هي صورة تحويل فورير كما سنرى في الفصل القادم. أي أن تحويل فورير هو نفسه تحويل  $Z$  محسوبا على دائرة الوحدة،  $r=1$ .

تحويل  $Z$  لأي متابع  $x(z)$  يكون له منطقة تقارب region of convergence. منطقة التقارب هي مجموعة قيم  $z$  في المستوى  $z$  التي يتقارب عندها هذا التحويل أو يؤول إلى قيمة محددة. هذا يعنى أن مقدار المجموع الموجود في المعادلة (٤ - ١) يجب أن يؤول إلى كمية محددة، ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]Z^{-n}| < \infty \quad (٧-٤)$$

وهذا هو شرط منطقة التقارب. منطقة التقارب تكون عادة في صورة حلقات دائرية حول نقطة الأصل في المستوى  $z$  المركب، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

وهذا يعنى أن منطقة التقارب تكون حلقة نصف قطرها  $|z|$  يتراوح بين القيمة  $R_{x-}$  التي من الممكن أن تكون صفر، والقيمة  $R_{x+}$  التي من الممكن أن تقارب المالا نهاية ولا تساويها. تحويل  $z$  كمية تحليلية analytical مستمرة معرفة عند جميع النقاط داخل منطقة التقارب.

**مثال ٤-١:** حساب تحويل  $Z$  لتتابع الخطوة  $u[n]$ . تحويل  $Z$  لهذا المتتابع يمكن كتابته كما يلي:

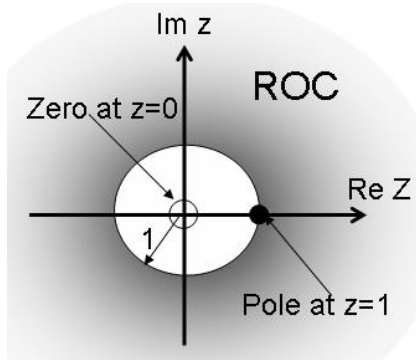
$$Z(u[n]) = u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}}, \quad 1 \leq |z| \leq \infty \quad (٨-٤)$$

في المعادلة (٤ - ٨) عندما  $z=1$  فإن  $1/(1-z)$  تساوى مالا نهاية وهذه القيمة للمتغير  $z$  نقول عليها أنها قطب pole، أي أن القطب في المستوى  $z$  هو قيمة  $z$  التي تصبح عندها الدالة تساوى مالا نهاية. بنفس الطريقة نعرف الصفر zero في المستوى  $z$  على أنه قيمة  $z$  التي



تصبح عندها الدالة تساوى صفر ، وسيكون لنا كلاما كثيرا عن أقطاب وأصفار أي دالة فيما بعد في هذا الفصل.

في المعادلة (٤ - ٨) لو بدأنا بقيمة  $z=0$  (نقطة الأصل في المستوى  $z$ ) كما في شكل ٤-١ فإنه مع زيادة قيمة  $z$  فإن مقدار  $u(z)$  في المعادلة (٤ - ٨) يزداد وذلك لأننا مع زيادة  $z$  نقترب من قطب المعادلة. لذلك فإن المنطقة التي تكون فيها قيمة  $z < 1$  لا تصلح لأن تكون منطقة تقارب أبدا. لو خرجنا خارج دائرة الوحدة ( $z > 1$ ) فإنه مع زيادة  $z$  فإن مقدار  $u(z)$  يقل باستمرار، لذلك فإن المنطقة خارج دائرة الوحدة في المستوى  $z$  تعتبر منطقة تقارب لهذه الدالة كما في شكل ٤-١.



شكل ٤-١ منطقة تقارب المثال ٤-١.

**مثال ٤-٢:** حساب تحويل  $Z$  للتتابع  $x[n]=a^n u[n]$ . تحويل  $Z$  لهذا التتابع يمكن كتابته كما يلي:

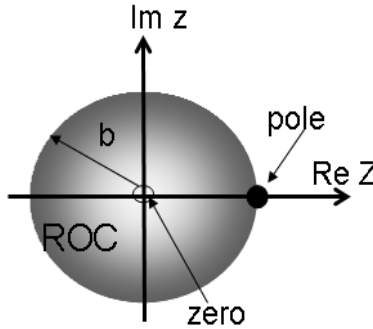
$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}, \quad |a| < |Z| < \infty \quad (٤-٩)$$

بالمقارنة بالمثال ٤-١ فإن هذا التابع سيكون له قطب عند  $z=a$  ومنطقة التقارب له ستكون خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي  $a$ .

**مثال ٤-٣:** حساب تحويل  $Z$  للتتابع  $x[n]=-b^n u[-n-1]$ . هذا التابع تتابع يساري ، أي أنه موجود أو معرف لقيم  $n$  السالبة فقط نتيجة وجود تتابع الخطوة  $u[-n-1]$  فيه. تحويل  $Z$  لهذا التابع يمكن كتابته كما يلي:

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n u[-n-1] Z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b/z)^n = -\sum_{m=1}^{\infty} (z/b)^m = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (z/b)^m \\ &= 1 - \frac{1}{1-z/b} = \frac{Z}{Z-b} \quad |Z| < |b| \end{aligned} \quad (١٠-٤)$$

هذا التابع له قطب عند  $z=b$  ومنطقة التقارب له هي المنطقة داخل دائرة نصف قطرها  $b$  كما في شكل ٤-٢.

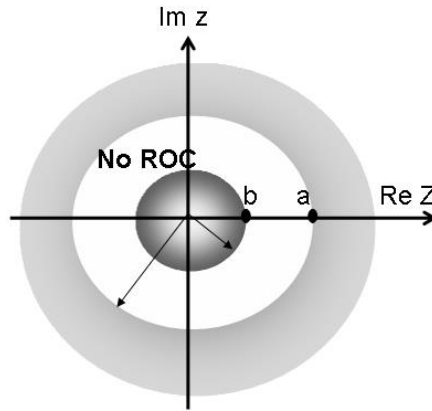


شكل ٤-٢ منطقة تقارب التابع اليساري في المثال ٤-٣.

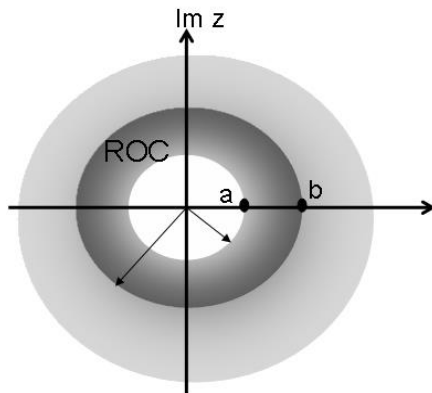
**مثال ٤-٤:** حساب تحويل  $Z$  للتتابع  $x[n]=a^n u[n]-b^n u[-n-1]$ . هذا التابع هو مجموع التابعين السابقين. بنفس الخطوات السابقة يمكن التعويض في معادلة تحويل  $Z$  حيث في النهاية سنحصل على المعادلة التالية:

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-a} + \frac{Z}{Z-b} \quad (١١-٤)$$

كما رأينا فإن منطقة التقارب في المثالين السابقين هي خارج دائرة نصف قطرها  $a$  للتابع اليميني، وداخل دائرة نصف قطرها  $b$  للتابع اليساري. لذلك فإن منطقة التقارب الناتجة ستكون تقاطع منطقتي التقارب للتابعين السابقين. لذلك إذا كانت  $a > b$  فلن تتقاطع منطقتا التقارب ولن يكون هناك منطقة تقارب للتابعين كما في شكل ٤-٣، أما إذا كانت  $a < b$  فسوف تتقاطع منطقتا التقارب وستكون منطقة التقارب الكلية هي الكعكة الناتجة من تقاطع المنطقتين كما في شكل ٤-٤.



شكل ٤-٣ منطقتا التقارب غير المتقاطعتين في المثال ٤-٤.



شكل ٤-٤ منطقتا التقارب المتقاطعتين للمثال ٤-٤.

بصورة عامة فإن شرط التقارب سنعيد كتابته هنا مرة ثانية كما يلي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]Z^{-n}| < \infty \quad (١٢-٤)$$

في المعادلة السابقة مع زيادة  $n$  فإن  $Z^{-n}$  تتناقص قيمتها، بفرض أن  $x[n]=a^n$  فإنه مع زيادة  $n$  فإن  $x[n]$  ستزداد قيمتها. لذلك فإنه لكي نضمن تقارب المجموع في المعادلة (١٢ - ٤) فإن معدل نقصان  $Z^{-n}$  يجب أن يكون أسرع من معدل زيادة  $a^n$  ويتم ذلك إذا كان  $|Z|$  أكبر من  $|a|$  وهذا هو شرط التقارب للتتابعات اليمينية. إذا كان التابع يسارياً، أي أن  $n$  سالبة، فإن  $Z^{-n}$  ستزداد لأن  $n$  سالبة، وبفرض أن  $x[n]=b^n$ ، فإنه مع زيادة  $n$  السالبة ستتناقص  $x[n]$ . لذلك فإنه لكي نضمن تقارب المجموع في المعادلة (١٢ - ٤) فإن معدل زيادة  $Z^{-n}$  يجب أن يكون أقل من معدل نقصان  $b^n$  ويتم ذلك إذا كان  $|Z|$  أصغر من  $|b|$  وهذا هو شرط التقارب للتتابعات اليسارية كما رأينا في الأمثلة السابقة.

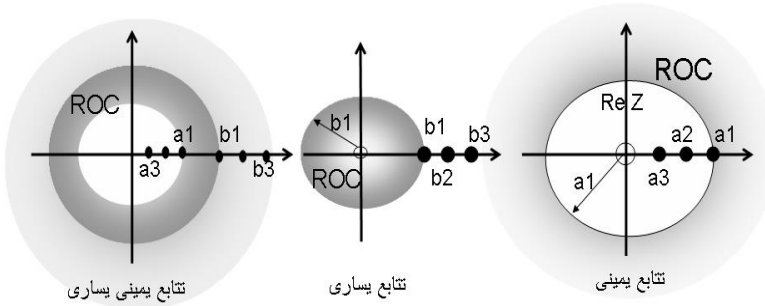
من ذلك نخلص أن تحويل  $Z$  على وجه العموم يجب ألا يحتوى أي قطب في منطقة التقارب ويجب أن يكون دالة متصلة لها جميع التفاضلات في هذه المنطقة وهو كما رأينا سيكون خارج دائرة نصف قطرها يساوى أكبر قطب إذا كان التابع يمينا، وستكون منطقة التقارب داخل دائرة نصف قطرها يساوى أصغر قطب إذا كان التابع يسارياً، أما إذا كان التابع يمينا ويسارياً فإن منطقة التقارب ستكون كعكة محدودة بأكبر قطب للتابع اليميني وأصغر قطب للتابع اليساري على أن يكون أكبر قطب للتابع اليميني أصغر من أصغر قطب للتابع اليساري وإلا فإنه لن تكون هناك منطقة تقارب. شكل (٤ - ٥) يبين الثلاث حالات السابقة في حالة وجود أكثر من قطب.

## ٤-٣ خواص تحويل Z

سنقدم في هذا الجزء بعض خواص تحويل Z دون إثبات لها وذلك لسهولة فهمها ونشجع القارئ على أن يحاول في هذه الإثباتات بنفسه وذلك من المعادلة الأصلية للتحويل.

## خاصية الخطية Linearity

$$Z\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$



شكل ٤-٥ أشكال مختلفة لتقارب تحويل Z.

تحويل Z لمجموع تتابعين يساوى مجموع التحويل لكل من التتابعين على حده. نطاق التقارب في هذه الحالة يساوى تقاطع منطقتي التقارب الخاصة بتحويل كل تتابع.

## خاصية الإزاحة Shifting

$$Z\{X[n + n_0]\} = Z^{n_0}X(Z)$$

تحويل Z لتتابع مزاح بمقدار  $n_0$  يساوى تحويل Z للتتابع الأصلي مضروباً في  $Z^{n_0}$ . نطاق التقارب لا يتغير عن نطاق التقارب الأصلي.

## خاصية الضرب في تتابع أسّي

$$Z\{a^n x[n]\} = X(Z/a)$$

وهذا يعني توسيع أو تضيق كل المستوى  $Z$  بمقدار  $a$ . كل أصفار وأقطاب النظام تضرب في الكمية  $a$  ويتم توسيع حدود نطاق التقارب بنفس الكمية.

### خاصية الضرب في $n$

$$Z\{nx[n]\} = -Z \frac{dX(Z)}{dZ}$$

بنفس نطاق التقارب للتتابع  $x[n]$ .

### خاصية الالتفاف في النطاق الزمني Convolution

$$Z\{x[n]*y[n]\} = X(z)Y(z)$$

وهذه من الخواص المهمة والأكثر استخداما. تحويل  $Z$  للمجموع الالتفافي لتتابعين في النطاق الزمني يساوي حاصل ضرب تحويل  $Z$  لكل من التتابعين. أحيانا يكون من الصعب حساب المجموع الالتفافي لتتابعين، في هذه الحالة يتم حساب تحويل  $Z$  لكل من التتابعين على حده وضربهما، ثم يتم حساب تحويل  $Z$  العكسي لنتائج الضرب الذي سيساوي المجموع الالتفافي للتتابعين. منطقة التقارب الناتجة ستكون تقاطع منطقتي التقارب لتحويل كل من التتابعين.

### خاصية الالتفاف في النطاق $Z$

$$Z\{x[n].y[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_z} X(v)Y(z/v)v^{-1} dv$$

#### نظرية القيمة الابتدائية

بفرض أن  $X(Z)$  هي تحويل  $Z$  للتتابع  $x[n]$  السببي فإنه يمكن كتابة النظرية التالية:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(Z)$$

#### نظرية القيمة النهائية

بفرض أن  $X(Z)$  هي تحويل  $Z$  للتتابع  $x[n]$  السببي المستقر فإنه يمكن كتابة النظرية التالية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) X(Z) \right]$$

#### ٤-٤ تحويل Z لبعض التتابعات المعروفة

جدول ٤-١ يبين تحويل Z لبعض التتابعات البسيطة والتي يمكن استخدامها مع خواص تحويل Z التي سبق ذكرها في استنتاج تحويلات Z لتتابعات أكثر تعقيدا. بعض التحويلات المذكورة في الجدول تم استنتاجها من قبل والبعض الآخر يمكن التدريب على استنتاجه.

#### جدول ٤-١ تحويل Z لبعض التتابعات البسيطة

منطقة التقارب	تحويل Z	التتابع	
كل المستوى Z	1	$\delta[n]$	العينة الواحدة
$ Z  > 1$	$Z/(Z-1)$	$u[n]$	الخطوة
$ Z  < 1$	$Z/(Z-1)$	$-u[-n-1]$	
$ Z  >  a $	$Z/(Z-a)$	$a^n u[n]$	التتابع الأسى
$ Z  <  b $	$Z/(Z-b)$	$-b^n u[-n-1]$	
$ Z  >  a $	$aZ/(Z-a)^2$	$na^n u[n]$	
$ Z  >  a $	$aZ(Z+a)/(Z-a)^3$	$n^2 a^n u[n]$	
	$aZ(Z^2+4az+a^2)/(Z-a)^4$	$n^3 a^n u[n]$	
$ Z  > 1$	$\frac{z \sin w}{z^2 - 2z \cos w + 1}$	$\sin(wn) u[n]$	التتابع الجيبي
$ Z  > 1$	$\frac{z^2 - 2z \cos w}{z^2 - 2z \cos w + 1}$	$\cos(wn) u[n]$	
$ Z  > 1$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$n u[n]$	تتابع المثلث
$ Z  > 1$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$n^2 u[n]$	
$ Z  > 1$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$n^3 u[n]$	

## ٤-٥ تحويل Z العكسي Inverse Z transform

إذا كان لدينا تحويل Z لتتابع معين ومنطقة التقارب له، فما هو التتابع الأصلي؟ هذا ما سنراه في هذا الجزء. هناك أكثر من طريقة للحصول التتابع الأصلي بمعرفة تحويل Z لهذا التتابع.

### ٤-٥-١ باستخدام تكامل كوشي Cauchy integral

نظرية كوشي تحدد قيمة التكامل على أي مسار مغلق يحتوي نقطة الأصل في عكس اتجاه عقارب الساعة بالمعادلة التالية:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint Z^{k-1} dz = \begin{cases} =1 & \text{for } k=0 \\ =0 & \text{for } k \neq 0 \end{cases} \quad (٤-١٣)$$

المعادلة الأصلية لحساب تحويل Z سنعيد كتابتها مرة ثانية كما يلي:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]Z^{-n}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة في  $(Z^{k-1}/2\pi j)$  والتكامل على مسار مغلق يحتوي نقطة الأصل وداخل منطقة تقارب التحويل نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint X(Z)Z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n+k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint Z^{-n+k-1} dz \quad (٤-١٤)$$

في المعادلة (٤-١٤) التكامل الموجود في أقصى يمين المعادلة يساوى صفر تبعا لنظرية كوشي عندما يكون الأس  $-n+k-1=1$  والذي يؤول إلى  $n=k$ ، أي أن الطرف الأيمن سيكون



له قيمة فقط عندما  $n=k$  وسيكون صفر لجميع قيم  $n$  الأخرى. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة (٤ - ١٤) كالتالي:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint X(Z)Z^{n-1} dz = x[n] \quad (٤-١٥)$$

وهذه المعادلة تمثل تحويل  $Z$  العكسي حيث أنها تعطى التابع  $x[n]$  بمعرفة تحويل  $Z$  له،  $X(Z)$ . هذه الطريقة في العادة تكون صعبة الاستخدام نتيجة وجود التكامل الذي يكون غالبا تكاملا معقدا.

#### ٤-٥-٢ طريقة الكسور الجزئية Partial fraction expansion

في العادة يكون تحويل  $Z$  في صورة دالة من بسط ومقام ويمكن تحليل مقامها أو وضعه في صورة مقادير من الدرجة الأولى أو الثانية. بعد ذلك باستخدام الكسور الجزئية يمكن فصل هذه المقادير لتكون في صورة مجموع مقادير بدلا من صورة مضروب مقادير. هذه المقادير البسيطة يمكن تحديد تحويل  $Z$  العكسي لها بسهولة كما سنرى. عموما، تحويل  $Z$  لأي دالة يمكن وضعه على الصورة التالية:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{D(Z)} \quad (٤-١٦)$$

حيث كل من  $P(Z)$  و  $D(Z)$  كثيرة حدود polynomial في المتغير  $Z^{-1}$ . إذا كانت درجة البسط  $M$  في المعادلة (٤ - ١٦) أكبر من درجة المقام  $N$  أو تساويها، فإنه في هذه الحالة يتم قسمة البسط على المقام وإعادة وضع المعادلة (٤ - ١٦) على الصورة التالية:

$$X(Z) = \sum_{r=0}^{M-N} \eta_r Z^{-r} + \frac{P_1(Z)}{D(Z)} \quad (٤-١٧)$$

حيث درجة كثيرة الحدود  $P_1(Z)$  أقل من درجة كثيرة الحدود  $D(Z)$ . وفي هذه الحالة فإن الكسر  $P_1(Z)/D(Z)$  يسمى كسرا سليما proper. في العادة يكون تحويل  $Z$  كسرا سليما ولا

يحتاج لعملية القسمة ويمكن أن يكون المقام  $D(Z)$  في صورة أقطاب poles بسيطة. سنعرف بعد قليل معنى القطب والصفير ولكن مبدئيا القطب هو قيمة  $Z$  التي تكون عندها الدالة  $X(Z)$  تساوى مالا نهاية، والصفير هو قيمة  $Z$  التي تكون عندها  $X(Z)$  تساوى صفر. في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة  $X(Z)$  كما يلي:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{(1-a_1Z^{-1})(1-a_2Z^{-2})\dots(1-a_NZ^{-N})} \quad (١٨-٤)$$

باستخدام نظرية الكسور الجزئية يمكن وضع المعادلة (١٨ - ٤) على الصورة التالية:

$$X(Z) = \sum_{r=1}^N \frac{P_r}{(1-a_rZ^{-1})} \quad (١٩-٤)$$

حيث الكمية  $p_r$  ثابتة، وتسمى الباقي residue وتعطى بالمعادلة التالية:

$$p_r = (1-a_rZ^{-1})X(Z) \Big|_{z=a_r} \quad (٢٠-٤)$$

كل مقدار من مجموعة المقادير الموجودة في المعادلة (١٩ - ٤) عبارة عن تحويل  $Z$  لتتابع أسى يميني منطقة التقارب له هي  $|Z| > |a_n|$  كما رأينا سابقا، وعلى ذلك فإن تحويل  $Z$  العكسي للمعادلة (١٩ - ٤) يمكن كتابته كما يلي:

$$x[n] = \sum_{r=1}^N p_r (a_r)^n u[n] \quad (٢١-٤)$$

**مثال ٤-٥:** بفرض أن تحويل  $Z$  لأحد التتابعات يعطى بالعلاقة التالية:

$$X(Z) = \frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)} = \frac{1+2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}$$

باستخدام الكسور الجزئية وتطبيق المعادلة (٤ - ١٩) يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة التالية:

$$X(Z) = \frac{p1}{(1-0.2z^{-1})} + \frac{p2}{1+0.6z^{-1}} \quad (٤-٢٢)$$

حيث كل من  $p_1$  و  $p_2$  يتم حسابه بتطبيق المعادلة (٤ - ٢٠) كما يلي:

$$p_1 = (1-0.2z^{-1})X(Z) \Big|_{z=0.2} = \frac{1+2z^{-1}}{(1+0.6z^{-1})} \Big|_{z=0.2} = 2.75$$

$$p_2 = (1+0.6z^{-1})X(Z) \Big|_{z=0.6} = \frac{1+2z^{-1}}{(1+0.2z^{-1})} \Big|_{z=0.6} = -1.75$$

وعلى ذلك فالمعادلة (٤ - ٢٢) يمكن كتابتها كما يلي:

$$X(Z) = \frac{2.75}{(1-0.2z^{-1})} - \frac{1.75}{(1+0.6z^{-1})} \quad (٤-٢٣)$$

كل من المقدارين في الطرف الأيمن من المعادلة (٤ - ٢٣) عبارة عن تحويل  $Z$  لتتابع أسى معروف كما رأينا سابقا وكما في جدول ٤-١، وعلى ذلك يمكن كتابة التتابع  $x[n]$  كما يلي:

$$x[n] = 2.75(0.2)^n u[n] - 1.75(0.6)^n u[n]$$

من الممكن أن يكون أي قطب في المعادلة العامة (٤ - ١٩) له درجة أعلى من الدرجة الأولى وفي هذه الحالة نعيد كتابة الصورة العامة للمعادلة (٤ - ١٩) كما يلي:

$$X(Z) = \sum_{r=1}^{N-L} \frac{p_r}{1-a_r z^{-1}} + \sum_{s=1}^L \frac{q_s}{(1-bz^{-1})^s} \quad (٢٤-٤)$$

حيث  $q_s$  تعطى بالعلاقة التالية:

$$q_s = \frac{1}{(L-s)!(-b)^{L-s}} \frac{d^{L-s}}{d(z^{-1})^{L-s}} \left[ (1-bz^{-1})^L X(Z) \right]_{z=b} \quad (٢٥-٤)$$

**مثال ٦-٤:** أحسب تحويل  $Z$  العكسي للدالة التالية:

$$X(Z) = \frac{z^2 + z}{(z-0.5)^3(z-0.25)}$$

باستخدام نظرية الكسور الجزئية يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{X(z)}{Z} = \frac{z+1}{(z-0.5)^3(z-0.25)} = \frac{p_{11}}{(z-0.5)} + \frac{p_{12}}{(z-0.5)^2} + \frac{p_{13}}{(z-0.5)^3} + \frac{p_2}{(z-0.25)}$$

حيث الثوابت في المعادلة السابقة يمكن حسابها تبعا للمعادلة (٢٥-٤) كما يلي:

$$p_{11} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{z+1}{z-0.25} \right) \Bigg|_{z=0.5} = 80 \quad p_{12} = \frac{d}{dz} \left( \frac{z+1}{z-0.25} \right) \Bigg|_{z=0.5} = -20$$

$$p_{13} = \frac{z+1}{z-0.25} \Bigg|_{z=0.5} = 6 \quad p_2 = \frac{z+1}{(z-0.5)^3} \Bigg|_{z=0.25} = -80$$

وعلى ذلك يمكن كتابة  $X(Z)$  كما يلي:

$$X(Z) = \frac{80z}{(z-0.5)} - \frac{20z}{(z-0.5)^2} + \frac{6z}{(z-0.5)^3} - \frac{80z}{(z-0.25)}$$

$$= \frac{80}{(1-0.5z^{-1})} - \frac{20}{z(1-0.5z^{-1})^2} + \frac{6}{z^2(1-0.5z^{-1})^3} - \frac{80}{(1-0.25z^{-1})}$$

وعلى ذلك يمكن كتابة  $x[n]$  كما يلي:

$$x[n]=80(0.5)^n u[n] - 20n(0.5)^{n-1}u[n] + 6n(n-1)(0.5)(0.5)^{n-2} u[n] - 80(0.25)^n u[n]$$

يحتوى MATAB على بعض الأوامر (M files) التي يمكن بها حساب الكسور الجزئية وحساب تحويل Z العكسي وستكلم عن هذه الأوامر في نهاية الفصل.

### ٤-٥-٣ طريقة القسمة المطولة Long division method

بأخذ تحويل Z لأي تتابع نحصل على متتابعة في  $Z^{-1}$  حيث  $Z^{-n}$  تقابل تحويل Z للمركبة n من التتابع. العكس من ذلك صحيح أيضا، فإنه إذا كان لدينا كثيرة حدود في المتغير  $Z^{-n}$  فإنها تمثل تحويل Z للتتابع معين  $x[n]$ . السؤال هو إذا كان تحويل Z معطى في صورة دالة كسرية فكيف نضعه على صورة كثيرة حدود في  $Z^{-1}$ . يتم ذلك عن طريق القسمة المطولة كما في المثال التالي:

**مثال ٤-٧:** أفترض أن  $X(Z)$  هي تحويل Z للتتابع  $x[n]$  سنستخدم طريقة القسمة المطولة لحساب  $x[n]$  بمعلومية  $X(Z)$ .

$$X(Z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.12z^{-2}} \quad (٤-٢٦)$$

تتم قسمة البسط على المقام كما يلي:

$$\begin{array}{r}
 1 + 1.6Z^{-1} - 0.52Z^{-2} + 0.4Z^{-3} - 0.2224Z^{-4} + \dots \\
 1 + 0.4Z^{-1} - 0.12Z^{-2} \overline{) 1 + 2Z^{-1}} \\
 \underline{1 + 0.4Z^{-1} - 0.12Z^{-2}} \\
 1.6Z^{-1} + 0.12Z^{-2} \\
 \underline{1.6Z^{-1} + 0.64Z^{-2} - 0.192Z^{-3}} \\
 -0.52Z^{-2} + 0.192Z^{-3} \\
 \underline{-0.52Z^{-2} - 0.208Z^{-3} + 0.0624Z^{-4}} \\
 0.400Z^{-3} - 0.0624Z^{-4} \\
 \underline{0.400Z^{-3} + 0.1600Z^{-4} - 0.0480Z^{-5}} \\
 -0.2224Z^{-4} + 0.0480Z^{-5} \\
 \dots
 \end{array}$$

من نتيجة عملية القسمة المطولة نرى أن:

$$X(Z)=1 + 1.6Z^{-1} - 0.52Z^{-2} + 0.4Z^{-3} - 0.2224Z^{-4} + \dots$$

وبذلك يمكن كتابة  $x[n]$  كما يلي:

$$x[n]=\delta[n] + 1.6\delta[n-1] - 0.52\delta[n-2] + 0.4\delta[n-3] - 0.2224\delta[n-4] + \dots$$

أو التابع  $x[n]$ :

$$x[n]=[1 \quad 1.6 \quad -0.52 \quad 0.4 \quad -0.224 \quad \dots \quad \dots ]$$

#### ٤-٦ أقطاب وأصفار النظام في المستوى Z

لقد ذكرنا من قبل أن القطب pole لأي دالة هو قيمة Z التي تكون عندها قيمة الدالة تساوى مالانهاية، وأما الصفر zero فهو قيمة Z التي تكون عندها قيمة الدالة تساوى صفر. أي دالة سواء كانت هذه الدالة عبارة عن إشارة دخل لنظام أو إشارة خرج من نظام أو حتى استجابة أي نظام، يمكن كتابتها على الصورة العامة التالية:

$$X(Z)=P(Z)/D(Z)$$

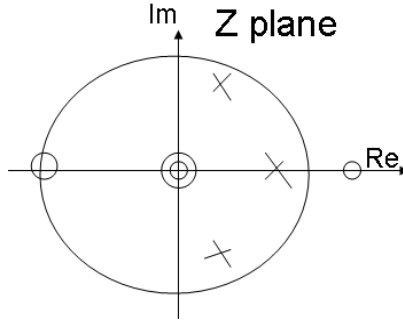
هذه الدالة يمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

$$X(Z) = \frac{k(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)\dots} \quad (٢٧-٤)$$

في المعادلة السابقة الثوابت  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_3$  و ... تسمى أصفار الدالة  $X(Z)$ ، والثوابت  $p_1$  و  $p_2$  و  $p_3$  و ... تسمى أقطاب هذه الدالة، وأما الثابت  $k$  فيسمى معامل التكبير gain factor لهذه الدالة.

المستوى  $Z$  هو مستوى تمثل فيه كل قيمة للمتغير  $Z$  بنقطة على هذا المستوى. المحور الأفقي هو القيمة الحقيقية للمتغير  $Z$ ، والمحور الرأسى هو القيمة التخيلية للمتغير  $Z$ . على هذا المستوى يرمز للقطب بالحرف  $X$  وللصفر بالحرف  $O$ . شكل ٦-٤ يبين تمثيل المتغير  $X(Z)$  في المعادلة (٢٨-٤) في صورة أقطاب وأصفار على المستوى  $Z$ .

$$X(Z) = \frac{z^2(z-1.2)(z+1)}{(z-0.5+j0.7)(z-0.5-j0.7)(z-0.8)} \quad (28-4)$$



شكل ٦-٤ أقطاب وأصفار المعادلة (٢٨-٤) في المستوى  $Z$ .

الدائرة الموضحة في شكل ٦-٤ هي دائرة الوحدة، أي أن نصف قطرها هو الوحدة، ودائرة الوحدة سيكون لها شأن كبير عندما نتكلم عن استقرار الأنظمة بعد قليل. المعادلة (٢٨-٤) كما في الشكل لها صفران منطبقان على نقطة الأصل نتيجة وجود  $z^2$  في بسط المعادلة. هناك أيضا صفر عند  $z = -1$  وآخر عند  $z = 1.2$  وكل من هذين الصفرين حقيقي لذلك فهما يقعان على المحور الأفقي كما في شكل ٦-٤. المعادلة (٢٨-٤) لها ثلاثة أقطاب أحدها قطب حقيقي عند  $z = 0.8$  والقطبان الآخران مركبان ومترافقان، الأول عند  $z = 0.5 - j0.7$  والآخر عند  $z = 0.5 + j0.7$ . مواضع الأقطاب والأصفار في شكل ٦-٤ تقريبية وليست دقيقة، وهي للتوضيح فقط.

### ٤-٦-١ استقرار النظام الرقمي في المستوى Z

عندما يكون لدينا دالة انتقال أو العبور transfer function لأي نظام بدلالة المتغير Z فإنه يمكننا منها استنتاج بعض الحقائق المهمة عن هذا النظام وأول هذه الحقائق هي هل هذا النظام مستقر أم لا ؟ افترض أن دالة العبور لنظام ما تعطى بالعلاقة التالية :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{(z-a)} \quad (٢٩-٤)$$

حيث H(Z) تسمى دالة العبور أو دالة النظام system function، Y(Z) هي معادلة الخرج، و X(Z) هي معادلة الدخل وكل هذه الدوال معبرا عنها في المستوى Z حيث هذا النظام له قطب عند  $z=a$ . بضرب الطرفين في الوسطين في المعادلة السابقة نحصل على :

$$zY(Z) - aY(Z) = X(Z)$$

بأخذ تحويل Z العكسي للمعادلة السابقة نحصل على :

$$y[n+1] - ay[n] = x[n]$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي :

$$y[n] = ay[n-1] + x[n-1] \quad (٣٠-٤)$$

لحساب استجابة العينة الواحدة (استجابة الدفعة أو الصدمة impulse response) للنظام السابق نضع  $x[n] = \delta[n]$ ، ويفرض أن  $y[n] = 0$  لكل قيم n السالبة فإنه يمكن حساب قيم y[n] لجميع قيم n بدأ من  $n=0$  حيث سنحصل على :

$$y[n] = [0, 1, a, a^2, a^3, a^4, \dots]$$

لاحظ أن الخرج السابق y[n] هو خرج النظام عندما كان دخله هو عينة الوحدة، لذلك فإن هذا الخرج سيكون هو استجابة الصدمة لهذا النظام وبالتالي فإن :

$$h[n] = [0, 1, a, a^2, a^3, a^4, \dots] \quad (٣١-٤)$$



في المعادلة السابقة ستكون  $|h[n]|$  قابلة للجمع summable إذا كان  $|a| < 1$  حيث في هذه الحالة فإن  $|h[n]|$  تتحول إلى الصفر عندما  $n$  تتحول إلى مالانهاية. من ذلك نرى أنه لكي يكون هذا النظام مستقرا يجب أن يكون القطب  $a$  أقل من الواحد، أي أن القطب  $a$  يقع داخل دائرة الوحدة. ومن ذلك يمكننا أن نضع شرطا لاستقرار النظام وهو أن تكون جميع أقطابه واقعة داخل دائرة الوحدة. لذلك فإنه عادة ما يعبر عن أقطاب النظام في الصورة القطبية (مقدار وزاوية) بدلا من الصورة الكارتيزية لأنه في هذه الحالة يكون مقدار القطب هو بعده عن نقطة الأصل في المستوى  $Z$  ويكون من السهل استنتاج هل القطب يقع داخل دائرة الوحدة (إذا كان مقداره أقل من الواحد) أم خارجها وبالتالي هل النظام مستقر أم لا. سنرى بعد قليل أن MATLAB يمكن استخدامه لحساب أقطاب أي دالة ورسمها في المستوى  $Z$  وبالتالي استنتاج هل النظام مستقر أم لا.

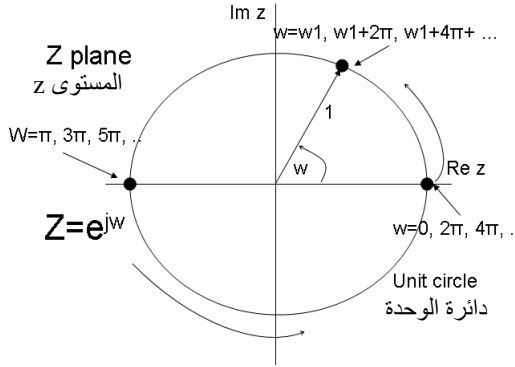
أصفار دالة العبور لا تؤثر على استقرار النظام، إنما تسبب إزاحة فقط لتتابع الصدمة. يمكن إثبات ذلك بوضع  $H(Z) = z/(z-a)$  في المعادلة (٤ - ٢٩) واستنتاج تتابع الصدمة  $h[n]$  في هذه الحالة حيث ستجد أنه  $h[n] = [1, a, a^2, a^3, a^4, \dots]$ .

#### ٤-٦-٢ تحويل $Z$ وتحويل فوريير

سنرى في الفصل القادم كيفية تحويل أي دالة إلى النطاق الترددي frequency domain عن طريق تحويل فوريير لهذه الدالة. ولقد رأينا سابقا أن تحويل فوريير يمكن الحصول عليه من تحويل  $Z$  بوضع  $Z$  في صورتها القطبية والتعويض عن مقدار  $r$  بالواحد الصحيح كما رأينا في المعادلة (٤ - ٦) التي سنعيد كتابتها هنا مرة ثانية كالتالي:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (٣٢-٤)$$

المتغير  $z=re^{jw}$  يمثل نقطة في المستوى  $Z$  عند نصف القطر  $r$  والزاوية  $w$  من المحور الأفقي. وبالتالي عندما  $r=1$  فإن هذه النقطة تقع على دائرة الوحدة، وبزيادة  $w$  من الصفر فإن النقطة تدور على دائرة الوحدة ابتداء من الزاوية صفر حتى تصل إلى النقطة  $\pi/2$  ثم النقطة  $\pi$  ثم  $3\pi/2$  ثم العودة إلى نقطة البداية حيث تكون النقطة قد دارت دورة كاملة على دائرة الوحدة مع تغير  $w$  من الصفر حتى  $2\pi$  كما في شكل ٤-٧.



شكل ٤-٧ التعبير عن تحويل فوريير في المستوى  $Z$ .

كما سنرى أيضا عند دراسة تحويل فوريير فإن الاستجابة الترددية لدالة معينة زمنيا sampled في النطاق الترددي تكون عبارة عن نماذج متكررة لاستجابة النظام عندما تتغير  $w$  من صفر حتى  $2\pi$ . وهذا في الحقيقة هو ما رأيناه هنا، إذ أنه مع كل دورة  $2\pi$  للمتغير  $w$  على دائرة الوحدة في المستوى  $Z$  فإن استجابة النظام الترددية تكرر نفسها كما في شكل ٤-٧. يمكن استخدام هذه الخاصية ( $z=e^{jw}$ ) في رسم تقديري لاستجابة النظام الترددية، أو رسم تغير مقدار أي دالة مع تغير التردد  $w$ . سنتابع ذلك من خلال رسم تقريبي لشكل الاستجابة الترددية للنظام التالي:

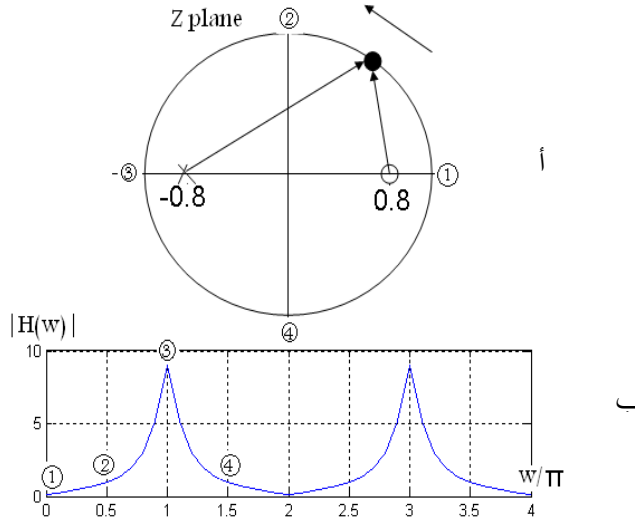
$$H(Z) = \frac{z - 0.8}{z + 0.8} \quad (٤-٣٣)$$

بوضع  $w = e^{j\omega}$  في المعادلة (٤-٣٣) نحصل على المعادلة التالية:

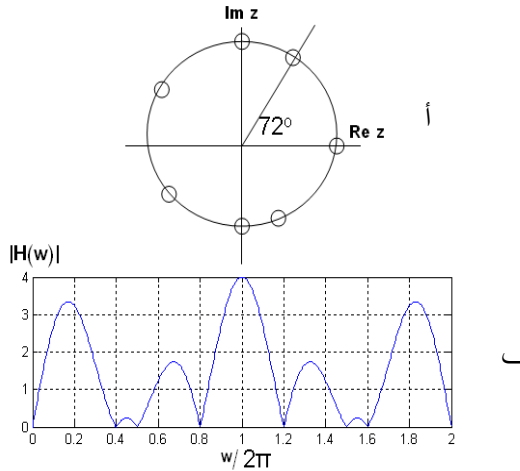
$$H(w) = \frac{e^{j\omega} - 0.8}{e^{j\omega} + 0.8} \quad (٤-٣٤)$$

بوضع  $w=0$  في المعادلة (٤-٣٤) نقف عند النقطة  $r=1$  و  $w=0$  في المستوى  $Z$  كما في شكل ٤-٨ أ نقطة رقم ١. مقدار المتجه من الصفر  $z=0.8$  إلى هذه النقطة يمكن حسابه لنجد أنه يساوى  $1-0.8=0.2$  ومقدار المتجه من القطب  $z=-0.8$  إلى هذه النقطة يساوى  $1-(-0.8)=1.8$ . بالتعويض في المعادلة (٤-٣٤) نحصل على مقدار الاستجابة الترددية عند هذا التردد ( $w=0$ ) وهى  $|H(w)|_{w=0}=0.2/1.8=0.111$ ، وهذه تمثل أول نقطة في منحنى الاستجابة الترددية كما في شكل ٤-٨ ب نقطة رقم ١ أيضا. الآن مع الدوران على دائرة الوحدة عكس عقارب الساعة كما في شكل ٤-٨ أ فإننا نبتعد عن الصفر  $z=0.8$  وبالتالي فإن مقدار المتجه إلى نقطة الدوران على الدائرة يزداد، وفي نفس الوقت مع الدوران فإننا نقرب من القطب الواقع عند  $z=-0.8$  وبالتالي فإن متجهه إلى نقطة الدوران على الدائرة يتناقص، وبالتالي فإن مقدار الاستجابة  $|H(w)|$  يزداد كما في شكل ٤-٨ ب. يستمر ذلك إلى أن تصل نقطة الدوران إلى  $w=\pi/2$  عندها سيتساوى كل من متجه الصفر ومتجه القطب ويكون مقدار الاستجابة  $|H(w)|=1$  وهى النقطة ٢ في شكل ٤-٨ ب. مع استمرار الدوران على دائرة الوحدة في شكل ٤-٨ أ يستمر متجه الصفر في الزيادة ومتجه القطب في التناقص إلى أن نصل إلى النقطة ٣ على دائرة الوحدة، عندها  $w=\pi$  ويكون متجه الصفر في هذه الحالة يساوى 1.8، بينما متجه القطب يساوى 0.2، وبالتالي فإن مقدار الاستجابة سيكون  $|H(w)|_{w=\pi}=1.8/0.2=9$ ، وهى النقطة ٣ في شكل ٤-٨ ب. نستمر في الدوران على دائرة الوحدة في شكل ٤-٨ أ إلى أن نصل إلى النقطة ١ مرة أخرى مروراً بالنقطة ٤ في شكلي ٤-٨ أ و ٤-٨ ب، وبذلك تكتمل أول دورة كاملة، وبعدها تتكرر هذه العملية، ويكرر منحنى الاستجابة نفسه في شكل ٤-٨ ب مرة أخرى. تأييدا لهذا الكلام سنرى بعد دراستنا لتحويل فورير أن الاستجابة الترددية

لأي نظام رقمي خطي ثابت إزاحيا سيكون عبارة عن تكرار لنفس نموذج الاستجابة من  $w=0$  حتى  $w=2\pi$ .



شكل ٤-٨ استنتاج شكل الاستجابة الترددية من مواقع أقطاب وأصفار المعادلة (٤-٣٤).



شكل ٤-٩ استنتاج شكل الاستجابة الترددية من مواقع أقطاب وأصفار المعادلة (٤-٣٥).

حاول تغيير مواضع كل من الصفر والقطب وهم على نفس المحور الأفقي وارسم أو احسب منحنى الاستجابة في كل حالة. ماذا لو كان الصفر عند النقطة  $w=0$  تماما؟ أو كان القطب عند النقطة  $w=\pi$ ؟ ارسم المنحنى المتوقع في كل حالة. سنرى بعد قليل كيفية رسم منحنى الاستجابة مباشرة باستخدام MATLAB.

بنفس الطريقة يمكن تقدير منحنى الاستجابة لأي دالة، حاول تتبع منحنى الاستجابة في شكل ٤-٩ ب مع المعادلة (٤-٣٥) التي تتكون من أصفار فقط.

$$H(Z)=(z^5-1)(z^2+1) \quad (٤-٣٥)$$

### ٤-٦-٣ الأنظمة الرقمية من الدرجات الأولى والثانية

عادة نرسم لدرجة النظام الرقمي بأعلى أس أو أعلى درجة في دالة العبور للمتغير  $Z$ . سنرى في الفصول القادمة أن الأنظمة ذات الدرجات العليا يمكن بناؤها باستخدام أكثر من نظام من الأنظمة ذات الدرجات الأولى أو الثانية، وهذه تعتبر طريقة شهيرة جدا من طرق تصميم الأنظمة الرقمية. لذلك سنعرض في هذا الجزء بعض الخواص المهمة لأنظمة الدرجة الأولى والثانية. الصورة العامة لدالة عبور أو دالة نظام من هذا النوع يمكن كتابتها كما يلي:

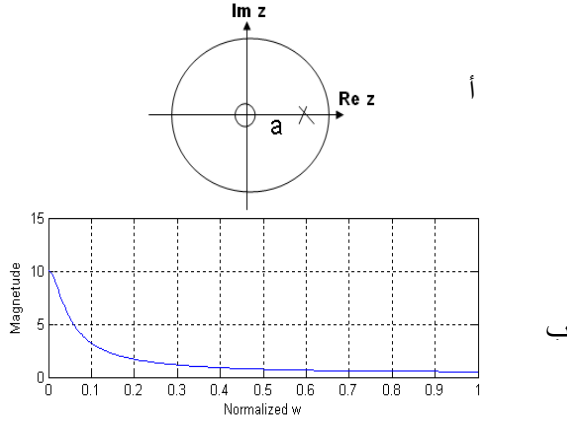
$$H_1(Z) = \frac{z}{z-a} \quad (٤-٣٦)$$

$$H_2(Z) = \frac{z^2}{z^2 - 2rz \cos\theta + r^2} = \frac{z^2}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} \quad (٤-٣٧)$$

حيث  $H_1(Z)$  تمثل دالة العبور لنظام من الدرجة الأولى لها قطب واحد عند  $z=a$  وصفر عند نقطة الأصل  $z=0$  بينما  $H_2(Z)$  فتمثل دالة المرور أو العبور لنظام من الدرجة الثانية لها قطبان مترافقان كل منهما عند نصف القطر  $r$ ، الأول عند الزاوية  $\theta$  والقطب الثاني عند الزاوية  $-\theta$ ، وهذه الدالة لها صفر مزدوج عند نقطة الأصل. كون المعادلتين (٤-٣٦) و (٤-٣٧) كل

منها لها صفر أو صفيران عند نقطة الأصل فإن تحويل  $Z$  العكسي لكل منهما يعطى تتابع الاستجابة الاندفاعي أو الصدمي  $h[n]$  يبدأ من العينة  $n=0$ .

بالنسبة لدالة الدرجة الأولى، شكل ٤-١٠ أ يبين تمثيلها في المستوى  $Z$  وشكل ٤-١٠ ب يبين الاستجابة الترددية لها. نلاحظ من شكل ٤-١٠ ب أن مثل هذه الأنظمة تسلك مسلك المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة Low Pass Filters, LPF حيث أن مقدار الاستجابة يكون أكبر ما يمكن عند  $w=0$  ويتناقص مع زيادة  $w$  كما في الشكل حتى يصل لأدنى مستوى عند  $w=\pi$ . مقدار الاستجابة العظمى عند  $w=0$  يزداد كلما اقترب القطب من دائرة الوحدة، أي مع اقتراب  $a$  من الواحد. كلما اقترب القطب من دائرة الوحدة، يصبح المنحنى أكثر حدية أي أن عرض المجال Band Width, BW يقل، وكلما اقترب القطب من نقطة الأصل يزداد عرض المجال وتقل حدية المنحنى. شكل ٤-١٠ ب تم رسمه بفرض أن  $a=0.9$ . عرض المجال سنعرف التعريف الدقيق له فيما بعد. لاحظ أن القطب في شكل ٤-١٠ أ كان في الجهة اليمنى من المستوى  $Z$  فحصلنا على نظام يسلك مسلك المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة.

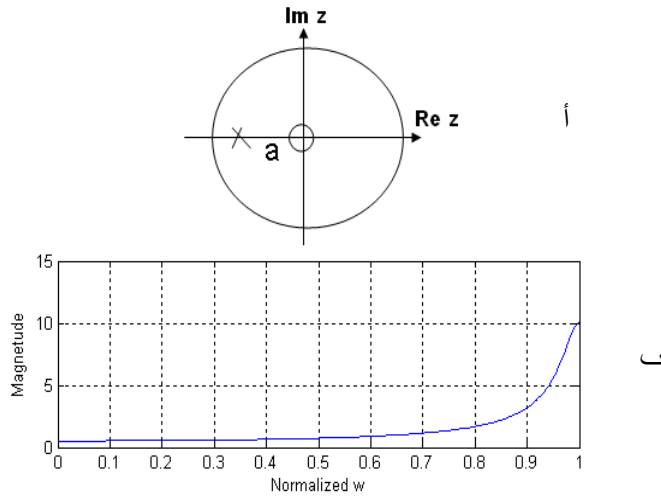


شكل ٤-١٠ أ المستوى  $Z$  والاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى ، قطب يميني.

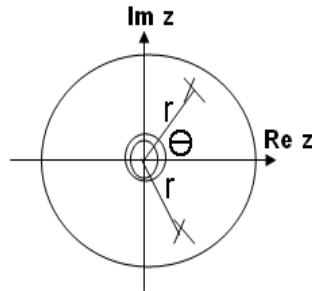
الآن لو نقلنا القطب إلى الجهة اليسرى من المستوى  $Z$  وما زال داخل دائرة الوحدة ماذا سيحدث؟ شكلي ٤-١١ أ و ٤-١١ ب يبينان ذلك. هنا حصلنا على مرشح منفذ للترددات العالية High Pass Filter, HPF حيث أن مقدار الاستجابة تكون قيمته العظمى عند  $w=\pi$ . شكل ٤-١١ ب تم رسمه بفرض أن  $a=-0.9$ .

بالنسبة لأنظمة الدرجة الثانية فإن تمثيلها في المستوى  $Z$  سيكون كما هو موضح في شكل ٤-١٢. الصورة العامة لمعادلة هذا النوع من الأنظمة تبينها المعادلة (٤-٣٧). هذه المعادلة كما ذكرنا لها قطبان مترافقان عند نصف القطر  $r$  وأحدهما يوجد عند الزاوية  $\theta$  والآخر يوجد عند الزاوية  $-\theta$  كما في شكل ٤-١٢. عندما  $\theta=0$  ينطبق القطبان على المحور الأفقي ونحصل على منحنى استجابة منفذ للترددات المنخفضة مثل حالة أنظمة الدرجة الأولى. مع زيادة  $\theta$  يبتعد القطبان عن المحور الأفقي كما في الشكل.

مع الدوران على دائرة الوحدة ابتداء من  $w=0$  حتى  $w=\pi$  فإن مقدار الاستجابة الترددية يزداد مع الاقتراب من القطب حتى يصل إلى قيمته العظمى عندما تتحاذى مع نقطة القطب تماما وبعدها يبدأ مقدار الاستجابة في النقصان. لذلك فإن الترددات التي ستمر من مثل هذا النوع من الأنظمة لا هي الترددات المنخفضة ولا هي الترددات العالية ولكن هذه الأنظمة تكون منتقية للترددات التي تنفذها، لذلك يطلق عليها المرشحات أو الأنظمة المنفذة لمجال من الترددات Band Pass Filters, BPF. شرط هذه الأنظمة كما ذكرنا ألا ينطبق القطبان على المحور الأفقي لا في الناحية الموجبة ولا الناحية السالبة. بالطبع مع زيادة  $r$  يقترب القطبان من محيط دائرة الوحدة ويكون منحنى الاستجابة أكثر حدية. شكل ٤-١٣ يبين منحنى الاستجابة لقيم مختلفة من الزاوية  $\theta$  ونصف القطر  $r$ .

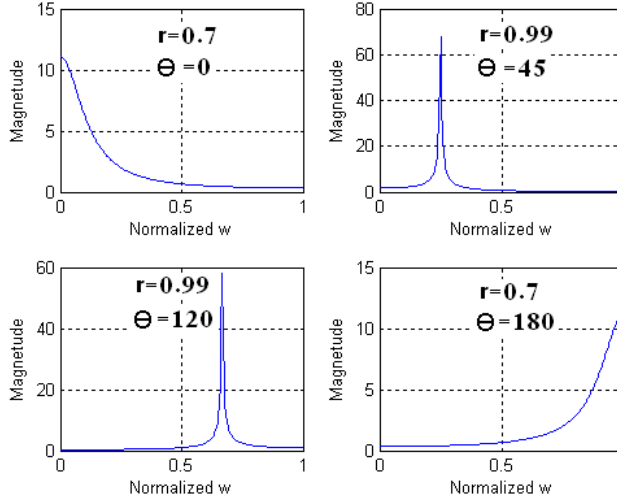


شكل ١١-٤ المستوى  $Z$  والاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى ، قطب يساري.



شكل ١٢-٤ تمثيل أنظمة الدرجة الثانية في المستوى  $Z$ .





شكل ٤-١٣ الاستجابة الترددية لنظام من الدرجة الثانية عند مواضع مختلفة للأقطاب.

#### ٤-٧ تطبيقات برنامج ماتلاب MATLAB

برنامج MATLAB يحتوي على العديد من الدوال التي تتعامل مع تحويل Z والتي سنقدمها هنا بشيء من التفصيل ونصح القارىء بالذهاب فوراً لبرنامج MATLAB وعرض المساعدة help لكل واحدة من هذه الدوال ثم تنفيذ البرامج الموجودة في الأمثلة التالية لكل دالة.

١- **الدالة zplane()**: هذه الدالة ترسم أقطاب وأصفار أي معادلة في المتغير Z في المستوى Z. معاملات هذه الدالة ممكن أن تأخذ أكثر من شكل على حسب طريقة عرض المعادلة. الصورة الأولى أن المعادلة تكون معروضة في صورة بسط ومقام كل منهما عبارة عن كثيرة حدود في المتغير Z كما يلي:

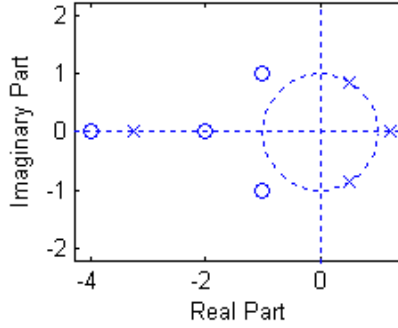
$$H(Z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + 1}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + 1} \quad (٤-٣٨)$$

**مثال ٤-٨:** ارسم أقطاب وأصفار المعادلة التالية:

$$H(Z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12} \quad (٣٩-٤)$$

شكل ٤-١٤ يبين أقطاب وأصفار هذه المعادلة في المستوى Z وقد رسمت دائرة الوحدة كمرجع في الشكل لتبين أي قطب يقع خارج محيط الدائرة وأيها يقع داخل محيط هذه الدائرة. البرنامج m-file لهذا الشكل كان كالتالي:

```
%poles and zeros of a rational z transform
num=[2 16 44 56 32];
den=[3 3 -15 18 -12];
subplot(2,2,1);
zplane(num,den);
```



شكل ٤-١٤ أقطاب وأصفار المعادلة (٣٩-٤).

**٢- الدالة tf2zp()** تستخدم هذه الدالة لوضع أي معادلة في صورة أقطاب وأصفار

ومعامل تكبير بدلا من كثيرة الحدود كما في المعادلة (٣٩-٤).

**مثال ٤-٩:** احسب قيمة كل قطب وكل صفر للنظام الممثل بالمعادلة (٣٩-٤).

إحسب أيضا معامل التكبير لهذه المعادلة ونصف قطر كل قطب.

```
%poles and zeros of a rational z transform
num=[2 16 44 56 32];
den=[3 3 -15 18 -12];
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
m=abs(p);
disp('zeros are'); disp(z);
```

```

disp('poles are'); disp(p);
disp('gain'); disp(k);
disp('radius of poles'); disp(m);
[sos,G]=tf2sos(num,den);
disp('second order sections');
disp(real(sos));

```

في البرنامج السابق num تمثل معاملات كثيرة الحدود في بسط المعادلة، و den تمثل معاملات مقام هذه المعادلة. المتغير z في الجانب الأيسر تمثل متجه الأصفار الناتج، و p هي متجه الأقطاب و k ستكون معامل التكبير الناتج. بتنفيذ هذا البرنامج تم عرض قيم أقطاب وأصفار المعادلة (٤ - ٣٩) ومعامل التكبير لها وكذلك نصف قطر كل قطب من أقطابها كما يلي:

```

zeros are
-4.0000
-2.0000
-1.0000 + 1.0000i
-1.0000 - 1.0000i
poles are
-3.2361
1.2361
0.5000 + 0.8660i
0.5000 - 0.8660i
gain
0.6667
radius of poles
3.2361
1.2361
1.0000
1.0000
second order sections
1.0000 6.0000 8.0000 1.0000 2.0000 -4.0000
1.0000 2.0000 2.0000 1.0000 -1.0000 1.0000

```

حاول مقارنة قيم هذه الأقطاب والأصفار بموضعها على المستوى Z في شكل ٤-١٤. من هذه الأقطاب والأصفار يمكن كتابة معادلة النظام على الصورة التالية:

$$H(Z) = \frac{0.6667(z+4)(z+2)(z+1-j)(z+1+j)}{(z+3.2361)(z-1.2361)(z-0.5-j0.866)(z-0.5+j0.866)} \quad (٤٠-٤)$$

**٣- الدالة tf2sos()** هذه الدالة تحول أي معادلة في النطاق Z من صورة كثيرات الحدود مثل المعادلة (٤ - ٣٩) إلى صورة عدد من الأجزاء أو الأنظمة البسيطة كل منها من الدرجة الثانية. إن tf2sos تعني Transfer Function to Second Order Sections. يتم عرض معاملات كل جزء في صف من ستة أعمدة ، الثلاث الأولى هي معاملات البسط والثلاث الثانية هي معاملات المقام لهذا الجزء، أي أنه يكون هناك عدد من الصفوف يساوي عدد أجزاء الدرجة الثانية. ناتج البرنامج في مثال ٤-٩ عرض هذه النتيجة بعد العنوان second order sections وبذلك يمكن كتابة معادلة العبور (٤ - ٣٩) في صورة مقاطع من الدرجة الثانية كالتالي:

$$H(Z) = 0.667 \frac{(z^2 + 6z + 8)(z^2 + 2z + 2)}{(z^2 + 2z - 4)(z^2 - z + 1)} \quad (٤١ - ٤)$$

لاحظ أن المعادلة (٤٠ - ٤) موضوعة في صورة أجزاء من الدرجة الأولى بينما المعادلة (٤١ - ٤) في صورة أجزاء من الدرجة الثانية.

**٤- الدالة zp2tf()**: هذه الدالة تقوم بالعملية العكسية للدالة tf2zp() حيث أنها تأخذ أصفار وأقطاب أي نظام وتعطى معاملات كثيرة حدود البسط ومعاملات كثيرة حدود المقام للرجوع مرة ثانية لصورة كثيرات الحدود.  
مثال ٤-١٠:

```
%determination of the rational z plane
zr=[-4 -2 -1+i -1-i];
pr=[-3.2361 1.2361 0.5+0.866i 0.5-0.866i];
z=zr';
p=pr';
k=1;
[num,den]=zp2tf(z, p, k);
disp('coeff. of num. polunomial'); disp(num);
disp('coeff. of den. polunomial'); disp(den);
```

بتنفيذ هذا البرنامج نحصل على معاملات كثيرة حدود البسط وكثيرة حدود المقام للمعادلة (٤-٣٩) وهي كما يلي:

coeff. of num. polunomial

1 8 22 28 16

coeff. of den. polunomial

1.0000 1.0000 -5.0002 6.0001 -4.0000

لاحظ أن معاملات البسط مقسومة على 2 ومعاملات المقام مقسومة على 3 وبالتالي فإن معامل التكبير هو  $2/3=0.6667$  الذي هو نفس معامل التكبير الذي حصلنا عليه في المثال ٤-٩.

**٥- الدالة (residuez):** تستخدم هذه الدالة في الكسور الجزئية لتحويل أي معادلة من صور كثيرات الحدود في البسط والمقام إلى صورة الكسور الجزئية تمهيدا للحصول على تحويل Z العكسي.

**مثال ٤-١١:** ضع المعادلة التالية في صورة الكسور الجزئية:

$$H(Z) = \frac{18z^3}{18z^3 + 3z^2 - 4z - 1} \quad (٤-٤٢)$$

البرنامج التالي يقوم بهذه المهمة:

```
% partial fraction expansion for rational z function
num=[18];
den=[18 3 -4 -1];
[r,p,k]=residuez(num,den);
disp('Residues are'); disp(r');
disp('Poles are'); disp(p');
disp('Constants are');disp(k);
```

نتيجة تنفيذ البرنامج هي:

```
Residues are
0.3600 0.2400 0.4000
Poles are
0.5000 -0.3333 -0.3333
Constants are
```

لاحظ أنه لا توجد كميات ثابتة حيث أن درجة البسط والمقام متساوية. لاحظ وجود قطبان كل منهما عند  $z=0.333$  وهذا يعني وجود قطب مركب من الدرجة الثانية عند هذه النقطة، لذلك فإن صورة الكسور الجزئية للمعادلة (٤ - ٤٢) يمكن كتابتها كالتالي:

$$H(Z) = \frac{0.36}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{0.24}{1 + 0.333z^{-1}} + \frac{0.4}{(1 + 0.333z^{-1})^2} \quad (٤٣-٤)$$

**مثال ٤-١٢:** نفس الدالة السابقة (`residuez()`) يمكن أن ندخل لها المتبقيات `residues` والأقطاب والثوابت إن وجدت للحصول على معادلة النظام في النطاق  $Z$  في الصورة كثيرة الحدود كما في البرنامج التالي:

```
%Rational z transform from partial fraction expansion
r=[0.24 0.4 0.36];
p=[-0.333 -0.333 0.5];
k=[0];
[num, den]=residuez(r, p, k);
disp('numerator coefficients'); disp(num);
disp('denominator coefficients'); disp(den);
```

ونتيجة التنفيذ ستكون كالتالي:

```
numerator coefficients
1.0000 -0.0003 -0.0000 0
denominator coefficients
1.0000 0.1660 -0.2221 -0.0554
```

وهي نفس معاملات كثيرتي الحدود في البسط والمقام في المعادلة (٤ - ٤٢)، فقط عليك ضرب كل معامل في الثابت 18.

**٦- الدالة (`impz()`):** هذه الدالة تحسب تحويل  $Z$  العكسي لأي دالة في صورة كثيرات حدود في البسط والمقام. إننا عندما نقسم البسط على المقام نحصل على كثيرة حدود في المتغير  $Z$  يمكن حساب تحويل  $Z$  العكسي لها كما رأينا في طريقة القسمة المطولة في

حساب تحويل Z العكسي. الصورة العامة لهذه الدالة هي  $[h,t]=\text{impz}(\text{num},\text{den})$  حيث num هي معاملات كثيرة حدود البسط في المعادلة  $H(Z)$  و den هي معاملات كثيرة حدود المقام و h هي معاملات التتابع  $h[n]$  الناتج، أو تحويل z العكسي. أما t فتمثل نقاط العينة في الأزمنة الرقمية، n. يمكن وضع متغير L في الصورة العامة للدالة لوضع حد لطول التتابع الناتج،  $[h,t]=\text{impz}(\text{num},\text{den},L)$ . المثال التالي يوضح ذلك.

**مثال ٤-١٣:** برنامج يحسب تحويل Z العكسي للدالة:

$$H(Z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.12z^{-2}} \quad (٤٤-٤)$$

```
%Impulse response of a rational function
L=11; % length of output sequence
num=[1 2];
den=[1 0.4 -0.12];
[h t]=impz(num,den,L);
disp('Coefficients of the impulse response');
disp(y)
subplot(2,1,1);
stem(y);
xlabel('time index');
ylabel('Amplitude');
```

ناتج تنفيذ هذا البرنامج التتابع  $h[n]$  كما يلي:

Coefficients of the impulse response

Columns 1 through 9

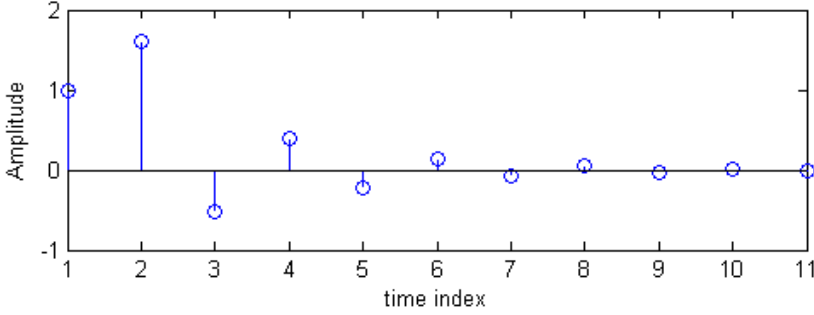
1.0000 1.6000 -0.5200 0.4000 -0.2224 0.1370 -0.0815 0.0490 -

0.0294

Columns 10 through 11

0.0176 -0.0106

لاحظ أننا اكتفينا بعدد 11 عنصرا فقط من عناصر هذه الاستجابة وشكل ٤-١٥ يبين رسما لهذه الاستجابة.



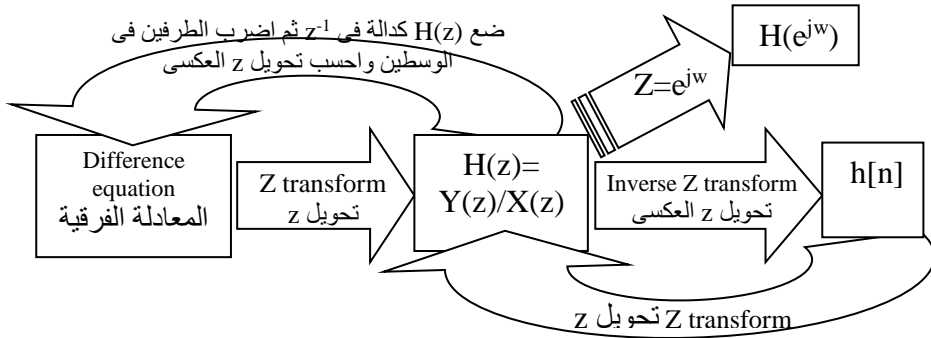
شكل ٤-١٥ الاستجابة الاندفاعية أو الصدمية للمعادلة (٤-٤٤).

**٧- الدالة filter():** يمكن استخدام هذه الدالة في حساب تحويل Z العكسي. الصورة العامة للدالة هي  $\text{filter}(\text{num}, \text{den}, x)$  حيث num هي معاملات كثيرة حدود البسط و den معاملات كثيرة حدود المقام، و x هي تتابع الدخل. لو وضعنا الدخل x يساوى عينة الوحدة فإن خرج الدالة يكون استجابة الدفعة لهذا النظام. وهذا ما سنفعله في البرنامج التالي لنفس المعادلة (٤-٤٤).

#### ٤-٨ الطرق المختلفة للتعبير عن الأنظمة الرقمية

الأنظمة الرقمية الخطية الثابتة إزاحيا LTI يمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة منها المعادلات الفرقية difference equations، واستجابة الدفعة أو الصدمة أو استجابة العينة الواحدة unit sample or impulse response، ودالة الانتقال أو العبور transfer function أو دالة النظام system function، وأخيرا الاستجابة الترددية frequency response. ونقصد بكلمة التعبير أننا نضع علاقة بين خرج ودخل النظام. سنرى في هذا الجزء كيفية التعبير بكل هذه الطرق وكيفية الانتقال من طريقة لأخرى كما في شكل ٤-١٦.





شكل ٤-١٦ الطرق المختلفة للتعبير عن الأنظمة الرقمية LTI

سنبدأ بالتعبير عن النظام بمعادلة فرقية في الحالة العامة كالتالي:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (٤٥-٤)$$

المعادلة السابقة عبارة عن علاقة بين خرج ودخل النظام في صورة معادلة فرقية. يمكن الحصول على دالة العبور أو معادلة النظام بإجراء تحويل Z على المعادلة (٤٥ - ٤) مستخدمين خواص تحويل Z كما سبق، وبالتالي سنحصل على المعادلة التالية:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(Z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(Z) \quad (٤٦-٤)$$

ومنها يمكن كتابة دالة العبور كما يلي:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (٤٧-٤)$$

وهي عبارة عن علاقة بين خرج ودخل النظام في النطاق Z.

يمكن الحصول على استجابة الصدمة impulse response لهذا النظام بإجراء تحويل  $Z$  العكسي للمعادلة (٤٧-٤) كما يلي:

$$h[n]=Z^{-1}\{H(Z)\} \quad (٤٨-٤)$$

من دالة الانتقال أو العبور (٤٧-٤) يمكن الرجوع مرة ثانية للمعادلة الفرقية بضرب الطرفين في الوسطين ثم إجراء تحويل  $Z$  العكسي.

أخيرا يمكن الحصول على الاستجابة الترددية بوضع  $z=e^{j\omega}$  في دالة العبور  $H(Z)$ .

## ٤-٩ تمارين

١- أكتب تحويل  $Z$  وحدد نطاق التقارب لكل من التتابعات التالية:

$$x_1[n]=(0.3)^n u[n] \quad x_2[n]=(-0.5)^n u[n] \quad x_3[n]=(0.2)^n u[n-5] \quad x_4[n]=(-0.2)^n u[-n-1]$$

٢- أكتب تحويل  $Z$  لكل من التتابعين التاليين:

$$x_1[n]=\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-3] \quad , \quad x_2[n]=2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

إجر عملية الالتفاف على التتابعين السابقين لتكوين التتابع  $x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]$ ، ثم

$$\text{بين أن } X_3(Z)=X_1(Z)X_2(Z).$$

٣- التتابع  $x_1[n]=[1, 2, 3, 1, -1, 1]$  يمثل دخلا لنظام خطي ثابت إزاحيا LTI، استجابة

الصدمة له هي  $h[n]=[1, 1, 1]$ . أحسب خرج هذا النظام  $y[n]=x[n]*h[n]$  واثبت أن

$$Y(Z)=X(Z)H(Z)$$

٤- احسب تحويل  $Z$  العكسي في صورة مغلقة closed form لكل مما يأتي:

$$Y_1(Z)=1/(1-4z^{-1}) \quad |z|<1/4$$

$$Y_2(Z)=1/(1-z^{-1}+0.5z^{-2}) \quad |z|>1$$

$$Y_3(Z)=(12+8z^{-1}-3z^{-2})/(12-7z^{-1}+z^{-2}) \quad |z|>1/3$$

٥- استخدم طريقة القسمة المطولة لحساب تحويل  $Z$  العكسي لكل دالة من الدوال التالية:

$$X(Z)=1/(z-0.5), \quad X(Z)=z/(z+1.1), \quad X(Z)=(z+1)/(Z-1)$$

٦- استخدم الكسور الجزئية لحساب تحويل Z العكسي لكل مما يأتي:

$$X_1(Z) = \frac{0.5z}{z^2 - z + 0.5} \quad X_2(Z) = \frac{(z-0.5)}{z(z-0.8)(z-1)} \quad X_3(Z) = \frac{(z+1)(z^2+1.5z+0.9)}{(z+0.7)(z^2-1.6z+0.95)}$$

تأكد من الإجابة مستخدماً برنامج MATLAB.

- ٧- استخدم القسمة المطولة لحساب تحويل Z العكسي للإشارات الموجودة في تمرين ٦.
- ٨- استخدم الدالة `impz()` لرسم استجابة الصدمة لكل من الإشارات الموجودة في تمرين ٦.
- ٩- احسب أصفار وأقطاب المعادلات التالية، استخدم برنامج MATLAB لرسم هذه الأصفار والأقطاب والتأكد من إجابتك ومعرفة هل النظام الممثل بهذه المعادلة مستقر أم لا:

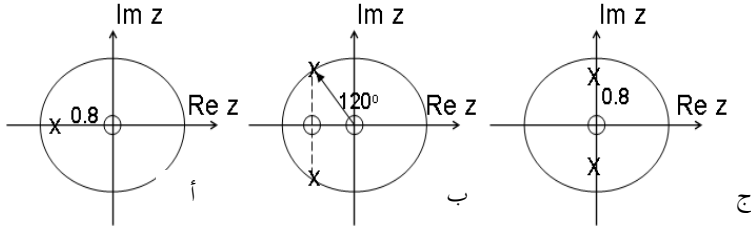
$$H_1(Z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^2 - 1.3z + 0.4} \quad H_2(Z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^2 + 1}$$

$$H_3(Z) = \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^2 - 0.25} \quad H_4(Z) = \frac{z^9 - 1}{z^8(z-1)}$$

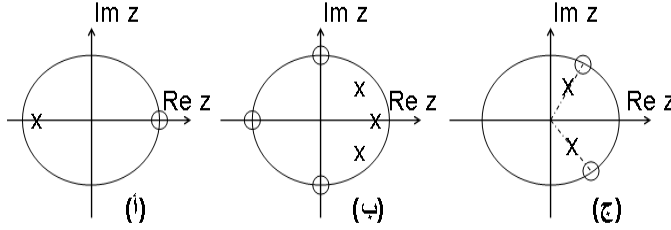
$$H_5(Z) = \frac{z^5 - 2}{z^{10} - 0.8} \quad H_6(Z) = \frac{z^2 + 1.5z + 0.9}{z^2 - 1.5z + 1.1}$$

- ١٠- شكل ت ٤-١٠ يبين المستوى Z لبعض الأنظمة، أكتب معادلة النظام في كل حالة.
- ١١- ارسم منحنى الاستجابة الترددية التقريبي لكل نظام من الأنظمة الموضحة في شكل ت ٤-١٠.

- ١٢- أعد تمرين ١١ للأنظمة الموضحة في شكل ت ٤-١٢. وضح أي نوع من المرشحات يمكن أن يكون كل واحد من هذه الأنظمة.



شكلت ٤-١٠



شكلت ٤-١٢

١٣- ارسم المستوى  $Z$  لمعادلة الانتقال التالية موضحا عليها الأصفار والأقطاب ثم ارسم شكلا تقريبا لمنحنى الاستجابة الترددية لهذا النظام موضحا أي نوع من المرشحات يمكن أن يكون.

$$H(Z) = \frac{z^3 - z^2 + 0.8z - 0.8}{z^3 + 0.8z^2}$$

١٤- استخدم أقل عدد من الأصفار والأقطاب لتحقيق مرشح رقمي بالمواصفات التالية:

- منع كامل للترددات عند  $w=0$
- منع كامل للترددات عند  $w=\pi/3$
- مجال انتقال ضيق للترددات عند  $w=2\pi/3$  نتيجة قطب عند  $r=0.92$  في المستوى  $Z$ .

ارسم المستوى  $Z$  لهذا المرشح موضحا أصفاره وأقطابه واكتب دالة العبور له وارسم شكلا تقريبا لمنحنى الاستجابة الترددية له.

١٥- المعادلة التالية تمثل معادلة فرقية لنظام من الدرجة الثانية:

$$y[n] = ay[n-1] - by[n-2] + x[n]$$

ما هي دالة العبور  $H(Z)$  لهذا النظام. ما هو مدى تغير  $a$  و  $b$  ليكون النظام مستقرا، ويكون المرشح له مجال انتقال عند  $w=\pi/3$ . استخدم الدالة `filter()` في MATLAB لحساب استجابة الصدمة  $h[n]$  لهذا النظام ورسمها.

# الفصل الخامس

## تحويل فوريير Fourier Transform

### ١-٥ مقدمة

لقد كان العالم فوريير عمره ٣٠ عاما عندما كان أحد أعضاء الحملة الفرنسية على مصر عام ١٧٩٨ وعين حاكما على مصر العليا، وتقدم بعدة أبحاث علمية للمعهد العلمي المصري الذي أنشأه نابليون في مصر. ثم عاد بعد ذلك إلى فرنسا حيث قدم أفكاره لحل مشاكل الانتقال الحراري للمعهد الفرنسي عام ١٨٠٧. لقد تركزت أفكاره على أن الإشارة الدورية يمكن تمثيلها بمجموعة محدودة من الإشارات الجيبية المتوافقة. كما أوضح أيضا أن الإشارة الغير دورية يمكن تمثيلها بالمجموع التكاملي من الإشارات الجيبية الغير متوافقة. هاتين الفكرتين هما الأساس لما عرف فيما بعد ويعرف الآن بتتابع فوريير Fourier series وتحويل فوريير Fourier transform اللذين كان لهما أكبر الأثر على كل فروع الهندسة وبالذات هندسة الاتصالات والإلكترونيات ومعالجة الإشارات. من الأشياء الظريفة أن اللذين حكموا هذا البحث الخاص بفوريير هما لابلاس Laplace وقد وافق على نشر البحث في حينه، ولاجرانج Lagrange الذي اعترض على البحث وقال أنه غير قابل للتطبيق عند نقاط الانكسار أو عدم الاتصال في الدوال مثل الموجة المربعة. وعلى ذلك لم ينشر بحث فوريير إلا بعد ١٥ عاما عند وفاة لاجرانج.

لقد تم استخدام كل من تتابع فوريير وتحويل فوريير لما يقرب من ٢٠٠ عام لتمثيل الظواهر التناظرية في الزمن التناظري analog time. مع ظهور الأنظمة الرقمية وأزمنة الزمن المتفاصل

أو المتقطع في صورة عينات ظهرت الحاجة إلى تحويل فوريير المتفاصل Discrete Fourier Transform, DFT أيضا.

لقد رأينا في الفصل السابق أن أي نظام خطى ثابت إزاحيا يمكن التعبير عنه بأكثر من طريقة من الطرق التالية:

١- معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة linear constant coefficients differential equation وذلك للأنظمة التناظرية، أما الأنظمة الرقمية فبدلا من المعادلات التفاضلية الخطية نستخدم المعادلات الفرقية الخطية ذات المعاملات الثابتة linear constant coefficients difference equation .

٢- دالة العبور أو الانتقال transfer function أو دالة النظام system function وهى علاقة الخرج بالدخل معبرا عنها في النطاق S بعد أخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية وذلك للأنظمة التناظرية، أما الأنظمة الرقمية فدالة العبور أو معادلة النظام لها فهي علاقة الخرج بالدخل معبرا عنها في النطاق Z بعد أخذ تحويل Z للمعادلة الفرقية.

٣- استجابة الدفعة أو الصدمة impulse response وهى استجابة النظام أو خرجه عندما يكون دخله عبارة عن دفعة أو صدمة وذلك للأنظمة التناظرية، بالنسبة للأنظمة الرقمية فهذه الاستجابة تسمى استجابة العينة الواحدة unit sample response وإن كان مجازا يطلق عليها أيضا استجابة الصدمة، وهى تمثل خرج النظام عندما يكون دخله يساوى تتابع العينة الواحدة.

٤- الاستجابة الترددية frequency response وهى علاقة الخرج بالدخل أو دالة العبور معبرا عنها في النطاق الترددي ويتم ذلك عن طريق إجراء تحويل فوريير على دالة العبور وذلك للأنظمة التناظرية، بالنسبة للأنظمة الرقمية فإننا نجري تحويل فوريير المقطع على دالة الانتقال كما سنرى في هذا الفصل لأن "تحويل فوريير" هو موضوع الدراسة هنا.

إن عملية تحويل الإشارات من صورة إلى صورة أخرى أو من نطاق إلى نطاق آخر تعتبر عملية شائعة جدا لما لها من فوائد. فأنت مثلا عندما تجرى عملية حسابية على الحاسب

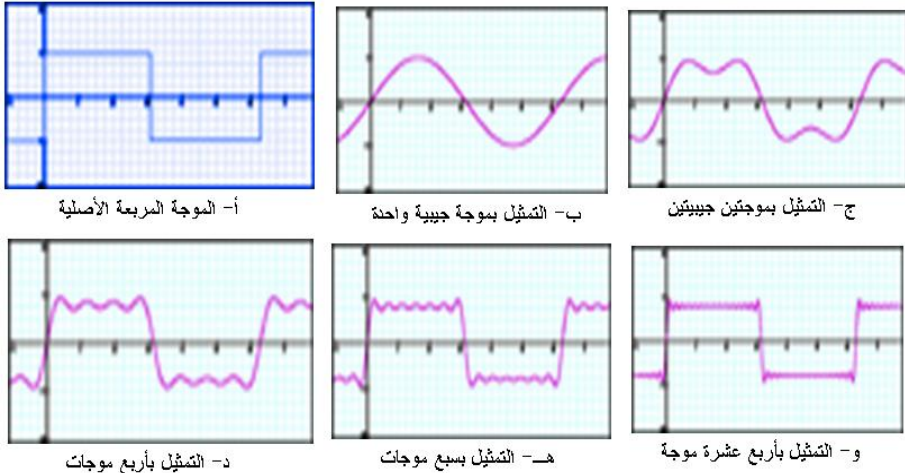
فإن أي رقم تدخله من على لوحة المفاتيح يكون في صورته العشرية (٥ أو ٩ مثلاً) ولكن هذه الأرقام بهذه الصورة غير مناسبة للتعامل معها داخل إلكترونيات الحاسب لذلك لا بد من تحويلها إلى الصورة الثنائية، ثم بعد ذلك يتم إجراء العمليات الحسابية عليها داخل الحاسب، ثم تؤخذ النتيجة في صورتها الثنائية وتحول إلى الصورة العشرية مرة أخرى حتى يستطيع القارئ العادي التعامل معها. هكذا حولنا البيانات من الصورة العشرية إلى الصورة الثنائية لنتتمكن من التعامل معها داخل الحاسب، ثم حولت مرة أخرى إلى الصورة العشرية حتى يمكن قراءتها عن طريق المستخدم، وهكذا عمليات تحويل الإشارات من نطاق إلى نطاق آخر، الغرض منها هو الاستفادة من وجود الإشارة في النطاق الآخر لاستخلاص بعض الخواص التي لا يمكن استخلاصها في النطاق الأول.

لقد رأينا في الفصل الأول ما هو المقصود بالنطاق الزمني والنطاق الترددي لأي إشارة، وقلنا أنه في النطاق الزمني نصف الإشارة بعلاقة بين تغير مقدارها مع الزمن ورأينا أن الجهاز الذي نستطيع به أن نرى الإشارة في هذا النطاق هو الأوسيلوسكوب oscilloscope. أما في النطاق الترددي فيتم عرض تغير مقدار الإشارة مع التردد والجهاز الذي يبين ذلك هو المحلل الطيفي spectrum analyzer. أما تحويل فورير فهو التحويل الذي ننقل به الإشارة بين هذين النطاقين. إن تحويل فورير كما رأينا من فكرته الأساسية، وكما سنرى بالتفصيل في هذا الفصل، يقوم بتمثيل أي إشارة في صورة مجموعة من الإشارات الجيبية الأساسية. فما هي الفائدة من تحويل أو وضع إشارة مركبة في صورة مجموعة من الإشارات الجيبية؟ ولماذا الإشارة الجيبية بالذات ولم تكن الإشارة المربعة مثلاً؟

في الكثير من الأحيان يصعب التعامل مع الإشارات المركبة، فلا يمكن مثلاً حساب استجابة (خرج) نظام لمثل هذه الإشارات، من الإشارات المركبة مثل إشارة الصوت أو صورة أو رسم قلب أو حتى إشارة مربعة. عند وضع مثل هذه الإشارة المركبة في صورة مجموعة من الإشارات البسيطة يسهل حساب استجابة النظام لكل واحدة من هذه الإشارات البسيطة على حده ثم تجميع هذه الاستجابات فنحصل على استجابة النظام



للإشارة المركبة. هذا ما يسمى بنظرية التجميع Superposition، أو بمعنى آخر صفة الخطية وهذا هو السبب في التعامل مع الأنظمة الخطية فقط. أما لماذا الإشارة الجيبية بالذات فلأن الإشارة الجيبية لها ميزة ليست موجودة في أي إشارة أخرى وهى أن استجابة أي نظام خطى للإشارة الجيبية هي إشارة جيبية أيضا تختلف فقط في المقدار والزاوية ولها نفس التردد. لكي نرى كيف أن أي إشارة مركبة يمكن تمثيلها بمجموعة من الإشارات الجيبية أنظر إلى شكل ٥-١ الذي يعرض إشارة مربعة وهذه الإشارة تم تمثيلها بعدد من الإشارات الجيبية بترددات ومقادير مختلفة بدءا من إشارة جيبية واحدة حتى ١٤ إشارة جيبية مجمعة. انظر إلى هذا الشكل لترى كيف أنه مع زيادة عدد الإشارات الجيبية تقترب الإشارة المجمعة من الإشارة المربعة الأصلية .



شكل ٥-١ تمثيل موجة مربعة بالعديد من الموجات الجيبية.

يوجد تحويل فوريير في الكثير من الصور التي منها تتابع فوريير Fourier series وتحويل فوريير Fourier transform وكل منها له صورة تطبق على الإشارات والأنظمة التناظرية وصورة أخرى تطبق على الإشارات والأنظمة الرقمية. ولقد رأينا في هذا الكتاب أن نبدأ الموضوع

من أوله فنلقى نظرة سريعة على تحويل فوريير في الأنظمة والإشارات التناظرية ولا ندخل في الصورة الرقمية منه مباشرة حتى تكتمل الفائدة.

## ٥-٢ تتابع فوريير للإشارات التناظرية الدورية

### Fourier series representation of continuous periodic signals

لأي إشارة تناظرية دورية  $x(t)$  لها زمن دوري  $T$  يمكن كتابة تتابع فوريير لها على الصورة التالية:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\Omega_0 n t} \quad (١-٥)$$

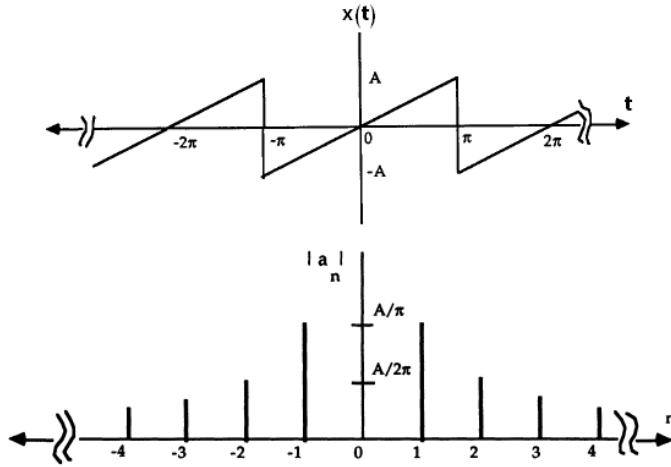
حيث  $\Omega_0 = 2\pi/T$  هي التردد الأساسي fundamental frequency في الإشارة  $x(t)$  و  $a_n$  هي معاملات فوريير المركبة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\Omega_0 n t} dt \quad (٢-٥)$$

المعادلة (١ - ٥) تضع الإشارة  $x(t)$  في صورة عدد لانتهائي من الإشارات المركبة (بدءاً من  $n=-\infty$  حتى  $n=\infty$ ) مقدار كل إشارة يعطى بالمعادلة (٢ - ٥). كما نلاحظ فإن هذه الإشارات موجودة عند ترددات محددة  $\Omega_0 n$  وليس عند قيم مستمرة من التردد  $\Omega$  وهذا هو السبب في تسميتها بالتتابع. التردد  $\Omega_0$  كما سبق يسمى التردد الأساسي وأحياناً التوافق الأول first harmonic وأما باقي الترددات فتسمى التوافقات harmonics من التوافق الثاني second harmonic,  $2\Omega_0$  عندما  $n=2$  حتى التوافق اللانتهائي عند  $n=\infty$ . مقدار هذه التوافقات عندما يرسم مع المتغير  $\Omega$  نحصل على طيف الإشارة  $x(t)$ . المقادير  $a_n$  كلها كميات مركبة لذلك تعرف بمقدار وزاوية وهذا يعطى طيف المقدار

magnitude spectrum وهو تغير مقدار المعاملات  $a_n$  مع تغير  $\Omega$ ، وطيف الزاوية وهو عبارة عن تغير زاوية المعاملات  $a_n$  مع تغير  $\Omega$ .

شكل ٢-٥ يبين إشارة سن المنشار والطيف أو التوافقات الناتجة عنها والتي نحصل عليها بالتعويض في المعادلة (٢-٥) بقيمة  $n=0$  سنجد أن  $a_0=0$  وبالتعويض بعد ذلك بالقيم المختلفة  $n=1, 2, 3, \dots$  سنجد أن  $a_n = a_{-n} = (A/jn\pi)\cos(n\pi)$ .



شكل ٢-٥ إشارة سن المنشار والطيف الناتج عنها.

في المعادلة (١-٥) يمكن التعبير عن الأس المركب  $e^{j\Omega_0 nt}$  بالصورة الجيبية كما يلي:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\Omega_0 nt) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(\Omega_0 nt) \quad (٣-٥)$$

حيث:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\Omega_0 t) dt, \quad c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\Omega_0 t) dt,$$

$$n=1,2,\dots \quad (٤-٥)$$

أي دالة حقيقية  $x(t)$  يمكن التعبير عنها بمركبتين أو جزأين، المركبة الأولى هي المركبة الزوجية  $x_{\text{Even}}(t)$ ، والمركبة الثانية هي المركبة الفردية  $x_{\text{Odd}}(t)$  بحيث تكتب الإشارة الكلية كما يلي:

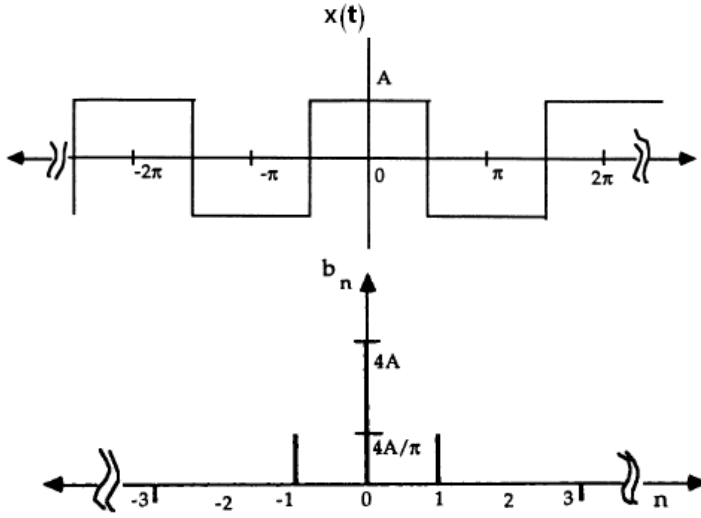
$$x(t) = x_{\text{Even}}(t) + x_{\text{Odd}}(t) \quad (٥-٥)$$

حيث الجزء الزوجي يتميز بالآتي:  $x_{\text{Even}}(t) = x_{\text{Even}}(-t)$  أي أن الجزء الزوجي يكون متماثل حول المحور الرأسي. وأما الجزء الفردي فيتميز بالتالي:  $x_{\text{Odd}}(t) = -x_{\text{Odd}}(-t)$  أي أن هذا الجزء يتميز بأنه متماثل حول نقطة الأصل. كما نعلم فإن الدالة  $\cos()$  تعتبر دالة زوجية بينما الدالة  $\sin()$  تعتبر دالة فردية، لذلك فإن تتابع فورير لأي دالة حقيقية يتكون من مركبة زوجية مقاديرها هي المركبات  $b_n$  في المعادلة (٤ - ٥)، ومركبة فردية مقاديرها هي المركبات  $c_n$  في نفس المعادلة. يمكن حساب كل من المركبة الزوجية والمركبة الفردية لأي دالة باستخدام المعادلتين التاليتين:

$$x_{\text{Even}}(t) = [x(t) + x(-t)]/2 \quad (٦-٥)$$

$$x_{\text{Odd}}(t) = [x(t) - x(-t)]/2 \quad (٧-٥)$$

وعلى ذلك فإنه بالنظر لموجة سن المنشار في شكل ٢-٥ نجد أنها موجة فردية متماثلة حول نقطة الأصل ومتوسطها أو المركبة dc لها تساوى صفر لذلك فإن تتابع فورير لها في صورته الجيبية سيحتوى فقط المركبات الفردية  $\sin()$ . بينما الموجة المربعة في شكل ٣-٥ نجد أنها متماثلة حول المحور الرأسي وأن المركبة dc لها تساوى صفر لذلك فإن تتابع فورير لها سيتكون من المركبات الزوجية  $\cos()$  فقط في المعادلة (٤ - ٥).



شكل ٣-٥ تتابع فوريير لموجة مربعة (زوجية).

### ٣-٥ تحويل فوريير للإشارات التناظرية غير الدورية

#### Fourier transform representation of continuous aperiodic signals

يمكن الاستغناء عن شرط الدورية الذي فرضناه على الإشارة  $x(t)$  في المعادلتين (٥-١) و (٥-٢) وذلك بفرض أن الزمن الدوري  $T$  للإشارة يمتد إلى المالا نهائية. في هذه الحالة فإن التجميع في المعادلة (٥-١) يقول إلى تكامل ويمكن كتابة ما يسمى بتحويل فوريير وليس تتابع فوريير في هذه الحالة كما يلي:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (٨-٥)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (٩-٥)$$

المعادلة (٨-٥) يطلق عليها تحويل فوريير لأنها تنقل أي إشارة  $x(t)$  من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي  $x(j\Omega)$ ، بينما المعادلة (٩-٥) فتسمى تحويل فوريير العكسي inverse Fourier transform لأنها تنقل الإشارة  $x(j\Omega)$  من النطاق الترددي إلى النطاق الزمني  $x(t)$ .

لاحظ أن الإشارة  $x(j\Omega)$  معرفة عند جميع قيم  $\Omega$  المستمرة من  $-\infty$  إلى  $\infty$  وليس عند قيم محددة لها أو عند توافقات معينة للتردد الأساسي كما كان الحال في تتابع فوريير، وهذا يتضح من العلاقة  $\Omega=2\pi/T$  فعندما تؤول  $T$  إلى المالا نهائية فإن  $\Omega$  تؤول إلى الصفر أي أنها تصبح معرفة عند جميع القيم المستمرة للمتغير  $\Omega$ .

جدول ٥-١ تحويل فوريير لبعض الإشارات الشهيرة.

الإشارة	تحويل فوريير
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\Omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{j\Omega t_0}$
$u(t)$	$(1/j\Omega)+\pi\delta(\Omega)$
$e^{-at}u(t),  a >0$	$1/(a+j\Omega)$
$te^{-at}u(t),  a >0$	$1/(a+j\Omega)^2$
$t^{n-1}/(n-1)! \cdot e^{-at}u(t),  a >0$	$1/(a+j\Omega)^n$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t)$	$(\pi/j)[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0 $T_1< t <T_0/2$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \delta(\Omega_k - \Omega_0)$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0 $T_1< t <T_0/2$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \delta(\Omega_k - \Omega_0)$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0, $ t >T_1$	$2T_1 \text{sinc}(\Omega T_1/\pi)$ $=2\sin(\Omega T_1)/\Omega$
$(\Omega_1/\pi)\text{sinc}(\Omega_1 t/\pi)$ $=\sin(\Omega_1 t)/\pi t$	$X(\Omega)=$ 1 $ \Omega <\Omega_1$ 0 $ \Omega >\Omega_1$

سنرمز لتحويل فوريير بالرمز  $F$  وتحويل فوريير العكسي بالرمز  $IF$ . جدول ٥-١ يبين تحويل فوريير لبعض الإشارات الشهيرة نسوقها هنا دون تفاصيل استنتاجها حيث يمكن للقارئ استنتاجها بالتعويض المباشر في معادلة تحويل فوريير الأساسية مع الاستعانة بخواص هذا

التحويل التي سنسوقها في جدول ٥-٢، والذي يبين بعض الخواص المهمة والكثيرة الاستخدام مع هذا التحويل مع العلم أن هذه الخواص رأينا ما يناظرها عند دراسة تحويل Z. من أهم هذه الخواص خاصية الالتفاف في النطاق الزمني والتي تقابل حاصل ضرب في النطاق الترددي. خرج أي مرشح يتم حسابه عن طريق الضرب الالتفافي لإشارة الدخل مع استجابة الصدمة لهذا التحويل. في الكثير من الأحيان يكون من الصعب حساب هذا المضروب. في هذه الحالة نحسب تحويل فورير لكل من الإشارتين، ثم نضرب هذين التحويلين في بعضهما، ثم نحسب تحويل فورير العكسي لحاصل الضرب فيعطينا إشارة الخرج في النطاق الزمني. تذكر أننا فعلنا نفس الشيء مع تحويل Z. الإزاحة في الزمن بمقدار a يقابلها ضرب في الكمية الأسية  $e^{-j\Omega a}$  في النطاق الترددي. أيضا الإزاحة في التردد بمقدار  $\Omega_0$  يقابلها ضرب في الكمية الأسية  $e^{j\Omega_0 t}$  في النطاق الزمني. حاول دراسة باقي الخواص بتأني وحاول أيضا إثبات كل منها.

لقد رأينا فيما سبق كيف تم تمثيل الإشارة الدورية الانسيابية في النطاق الترددي في صورة تتابع فورير Fourier series وذلك باستخدام المعادلتين (٥-١ و ٥-٢). بتطبيق تحويل فورير على الإشارة  $x(t)$  الموجودة في المعادلة (٥-١) نحصل على التالي:

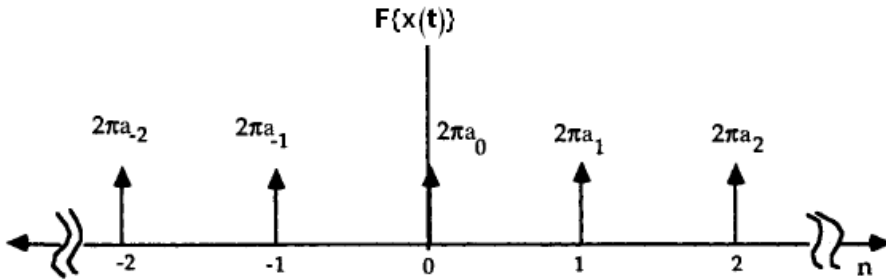
حيث تم استخدام خاصية التعديل، انظر جدول ٥-٢، التي تنص على أن الإزاحة في النطاق الترددي يقابلها ضرب في الكمية الأسية  $e^{j\Omega_0 t}$ . نلاحظ أن المعادلة (٥-١٠) تعطي تحويل فورير للدالة  $x(t)$  الدورية في صورة مجموعة من دوال الصدمة مقاديرها هو  $a_n$  وموجودة عند تتابعات محددة من التردد الأساسي  $\Omega_0$  وهو نفس ما حصلنا عليه من معادلة تتابعات فورير السابقة.

$$F\{x(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\Omega_0 n t}\right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\Omega - n\Omega_0) \quad (١٠-٥)$$

جدول ٥-٢ خواص تحويل فوريير .

الخاصية	تأثير هذه الخاصية
الخطية أو التجميع superposition	$F[ax_1(t)+bx_2(t)]=aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$
إذا كانت $x(t)$ زوجية	$X(j\Omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\Omega t) dt$
إذا كانت $x(t)$ فردية	$X(j\Omega) = 2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\Omega t) dt$
ضرب المقدار في ثابت	$F[ax(t)]=aX(j\Omega)$
ضرب الزمن في ثابت	$F[x(at)]= (1/ a )X(j\Omega/a)$
الضرب الالتفافي في الزمن	$F[x_1(t)*x_2(t)]=X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$
الضرب الالتفافي في النطاق الترددي	$F[x_1(t)x_2(t)]=X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)$
التعديل modulation	$F[x(t)e^{j\Omega_0 t}]=X[j(\Omega-\Omega_0)]$
	$F[x(t)\cos(\Omega_0 t)]=0.5 \{X[j(\Omega-\Omega_0)]+X[j(\Omega+\Omega_0)]\}$
	$F[x(t)\sin(\Omega_0 t)]=0.5j \{X[j(\Omega-\Omega_0)]-X[j(\Omega+\Omega_0)]\}$
الإزاحة في الزمن	$F[x(t-a)]=X(j\Omega)e^{-j\Omega a}$
التفاضل	$F[d^n x(t)/dt^n]=(j\Omega)^n X(j\Omega)$
التكامل	$F[\int_{-\infty}^t x(t) dt] = \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$

شكل ٥-٤ يبين الناتج من المعادلة (٥-١٠).



شكل ٥-٤ تحويل فوريير لدالة دورية انسيابية.



## ٥-٤ تحويل فوريير للإشارات المتفاصلة زمنيا (العينات)

### The Discrete Time Fourier Transform, DTFT

بعد أن رأينا في الأجزاء السابقة من هذا الفصل كيفية تحويل أي إشارة انسيابية من النطاق الزمني time domain إلى النطاق الترددي frequency domain، حان الوقت لنرى كيفية إجراء ذلك على الإشارات الرقمية أو المقطعة أو المتفاصلة زمنيا time sampled. الإشارات من هذا النوع يتم التعبير عنها في صورة تتابعات  $x[n]$  حيث المتغير  $x$  يمثل الإشارة نفسها والمتغير  $n$  يمثل الفهرس الزمني time index الذي يأخذ جميع القيم الصحيحة الموجبة والسالبة. لقد رأينا أيضا في الفصل الثالث العلاقة بين متغير التردد الانسيابي  $\Omega$  ومتغير التردد الرقمي  $w$  حيث تم وضع هذه العلاقة كما يلي:

$$w = \Omega T_s \quad (١١-٥)$$

حيث  $f_s = 1/T_s$  هي معدل أخذ العينات للإشارة التناظرية sampling rate or sampling frequency.

الآن سنفترض أن لدينا التابع  $x[n]$  ونريد وضعه في النطاق الترددي الرقمي، أو بمعنى آخر نريد حساب  $x[n]$  بدلالة التردد  $w$ . إن ذلك يتم باستخدام تحويل فوريير للتتابعات والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \quad (١٢-٥)$$

حيث  $X(e^{jw})$  عبارة عن كمية مركبة complex تمثل الإشارة  $x$  في النطاق الترددي. هذه الكمية يمكن وضعها في صورة مركبتين أحدها مركبة حقيقية real والأخرى مركبة تخيلية imaginary كما يلي:

$$X(e^{jw}) = X_{re}(e^{jw}) + jX_{im}(e^{jw}) \quad (١٣-٥)$$

حيث  $X_{re}(e^{jw})$  هي المركبة الحقيقية، و  $X_{im}(e^{jw})$  هي المركبة التخيلية للإشارة  $X(e^{jw})$ . يمكن وضع المعادلة (٥ - ١٢) في صورة مقدار وزاوية كما يلي:

$$X(e^{jw}) = |X(e^{jw})| e^{j\theta(w)} \quad (٥-١٤)$$

حيث  $|X(e^{jw})|$  هي المقدار magnitude و  $\theta(w)$  هي دالة الطور أو الزاوية angle للإشارة  $X(e^{jw})$  وكليهما كما نرى دالة في المتغير  $w$ . أحيانا تسمى الإشارة  $X(e^{jw})$  بأنها طيف signal spectrum الإشارة أو التابع  $x[n]$  وتسمى الكمية  $|X(e^{jw})|$  مقدار الطيف magnitude spectrum والكمية  $\theta(w)$  تسمى زاوية الطيف phase angle. بالنظر للمعادلة (٥ - ١٢) يمكن استنتاج خاصيتين مهمتين لتحويل فورير للإشارات المتفاصلة وهما:

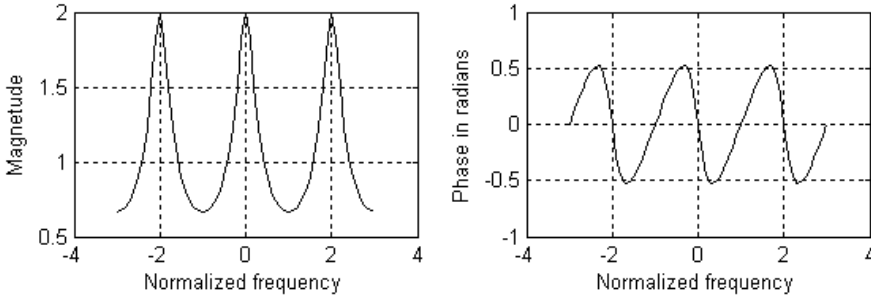
- ١- بالرغم من أننا نحسب تحويل فورير لتتابع أو إشارة مقطعة إلا أن الطيف  $X(e^{jw})$  عبارة عن دالة متصلة أو انسيابية، أي لها قيمة عند جميع قيم  $w$  الممكنة وهذا واضح من المعادلة (٥ - ١٢).
- ٢- في المعادلة (٥ - ١٢)، إذا وضعنا  $jw+2\pi k$  بدلا من  $jw$  حيث  $k$  أي رقم صحيح سالب أو موجب، فإننا نحصل على نفس الكمية  $X(e^{jw})$  وهذا يعنى بالطبع أن الكمية  $X(e^{jw})$  تكون دالة دورية periodical في المتغير  $w$ .

**مثال ٥-١:** افترض التابع  $x[n] = (0.5)^n u[n]$  والمطلوب حساب تحويل فورير المتفاصل DTFT لهذا التابع. بتطبيق المعادلة (٥ - ١٢) على هذا التابع يمكن كتابة ما يلي:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (0.5)^n u[n] e^{-jwn} \quad (15-5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-jw})^n = \frac{1}{1-0.5e^{-jw}}$$

شكل 5-5 يبين مقدار وزاوية الطور للظيف الناتج في المعادلة (5-15) حيث نلاحظ من هذا الشكل تحقق الخاصيتين السابقتين وهما خاصية الاتصال والدورية للتحويل DTFT.



شكل 5-5 تحويل فوريير المتفاضل للمعادلة (5-15).

البرنامج المقترح لرسم المقدار والزاوية للمعادلة (5-15) كما في الشكل 5-5 هو كالتالي:

%Drawing magnitude and phase for equation (5-15)

```
w=-3*pi:0.1*pi:3*pi;
x=1./(1-0.5*exp(-i*w));
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,abs(x),'k');
grid;
xlabel('Normalized frequency');
ylabel('Magnitude');
subplot(2,1,2);
plot(w/pi,angle(x),'k');grid;
xlabel('Normalized frequency');
ylabel('Phase in radians');
```

إذا كانت المعادلة (٥-١٢) تعطى تحويل فوريير للتتابعات أو الإشارات المتفاصلة DTFT، فإن تحويل فوريير العكسي للتتابعات يمكن حسابه كما في المعادلة التالية:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw \quad (٥-١٦)$$

حيث  $x[n]$  هو التابع (النطاق الزمني) الذي نحصل عليه بمعلومية تحويل فوريير لهذا التابع، أي أن المعادلة (٥-١٦) تعطى التحويل العكسي IDTFT. وعلى ذلك فالمعادلة (٥-١٥) والمعادلة (٥-١٦) تمثلان التحويل وعكسه أو كما يطلق عليهما بأتمهما يمثلان تحويل مزدوج transform pair.

المعادلة (٥-١٢) تمثل مجموع من  $-\infty$  حتى  $\infty$ ، وعلى ذلك فهناك احتمال ألا تتقارب هذه المعادلة، أي أنهما لن تؤولا إلى صورة مغلقة closed form عند البحث عن حل لها. يمكن إثبات تقارب المعادلة (٥-١٢) عندما يكون التابع  $x[n]$  قابل للجمع summable ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (٥-١٧)$$

أي أن  $|X(e^{jw})|$  ستؤول إلى قيمة محددة أقل من المالا نهائية (تتقارب) إذا تحقق شرط المعادلة (٥-١٧).

هناك العديد من الخواص لتحويل فوريير للتتابعات DTFT نسوقها في جدول ٥-٣ دون إثبات لها حيث يمكن للقارئ أن يثبتها كلها ببساطة وسنترك بعض هذه الإثباتات كتمارين في نهاية الفصل.

جدول ٥-٣ خواص تحويل فوريير للإشارات المقطعة DTFT.

الخاصية، التتابع في النطاق الزمني x[n]	تحويل فوريير DTFT
ag[n]+bh[n] linearity الخطية	$aG(e^{jw}) + bH(e^{jw})$
g[n-n <sub>0</sub> ] Time shift الإزاحة الزمنية	$e^{jwn_0} G(e^{jw})$
$e^{jw_0n}g[n]$ الإزاحة الترددية	$G(e^{j(w-w_0)})$
ng[n] التفاضل في النطاق الترددي	$j \frac{dG(e^{jw})}{dw}$
g[n]*h[n] Convolution الالتفاف	$G(e^{jw})H(e^{jw})$
g[n]h[n] modulation التعديل	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta})H(e^{j(w-\theta)})d\theta$ التفاف في النطاق الترددي
x[n]	$X(e^{jw})$
$x^*[-n]$ Complex conjugate of x[n]	$X^*(e^{-jw})$
Re{x[n]}	$X_{cs}(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) + X^*(e^{-jw})]$ Xcs=Conjugate symmetric part
jIm{x[n]}	$X_{ca}(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) - X^*(e^{-jw})]$ Xca=Conjugate antisymmetric part
$x_{cs}[n]$	$X_{re}(e^{jw})$
$x_{ca}[n]$	$jX_{im}(e^{jw})$

من أهم الخواص الموجودة في جدول ٥-٣ الخاصية الخامسة والتي تنص على أن تحويل فوريير للمجموع الالتفافي convolution sum لإشارتين g[n] و h[n] يساوي حاصل ضرب تحويل فوريير للإشارتين. هذه الخاصية تنفيذ في الحالات التي يصعب فيها حساب المجموع الالتفافي لتتابعين وبالذات عندما تكون هذه التتابعات لانتهائية الطول. في هذه الحالة يتم حساب تحويل فوريير لكل من التتابعين على حده، بعد ذلك يتم ضرب التحويلين، ثم نحسب تحويل فوريير العكسي لهذا المضروب فيكون هو حاصل الجمع الالتفافي المطلوب.

## ٥-٥ تحويل فورير المتفاصيل تردديا (في صورة عينات في المجال الترددي)

### Discrete Fourier Transform, DFT

لقد رأينا في الجزء السابق كيف أن التحويل DTFT هو نفسة عبارة عن دالة مستمرة في متغير التردد  $w$  مما يعني أن هذا الطيف تكون له قيمة محددة عند جميع القيم الممكنة للمتغير  $w$ . الآن نريد الحصول على طيف رقمي digital أو متفاصيل discrete يكون معرفا فقط عند قيم محددة للمتغير  $w$  لأن هذا الطيف الرقمي هو الذي نستطيع التعامل معه داخل الحاسب أو على أي شريحة للمعالجة الرقمية. لكي يتم ذلك سنقوم بأخذ عينات التحويل DTFT في صورة عدد  $N$  من العينات samples المتساوية الأبعاد على المحور  $w$  والمحصورة في دورة واحدة من دورات التحويل DTFT أو بمعنى آخر على محيط دائرة الوحدة في المستوى  $z$  لأن الدورة الواحدة حول محيط دائرة الوحدة في المستوى  $z$  تكافئ تغير  $w$  من صفر حتى  $2\pi$  على المحور  $w$ ، راجع العلاقة بين تحويل فورير وتحويل  $z$ . يمكن التعبير عن قيمة كل عينة على المحور  $w$  بالمعادلة التالية:

$$X[k] = X(e^{jw}) \Big|_{w=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (١٨-٥)$$

مما يعني أننا أخذنا دورة كاملة  $2\pi$  من التحويل DTFT وقمنا بأخذ عينات فيها sampling إلى  $N$  عينة بدءا من العينة صفر  $w_0$  حتى العينة  $w_{N-1}$ . تذكر جيدا أن  $N$  تمثل طول التابع  $x[n]$  إذا كان هذا التابع محدد الطول وغير دوري، وتمثل عدد العينات في الدورة الواحدة إذا كان هذا التابع دوريا. تحويل فورير المعين DFT ومعكوسه يمكن التعبير عنهما بالمعادلتين التاليتين:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (١٩-٥)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (٢٠-٥)$$

تذكر أنه بصرف النظر عن كون الإشارة  $x[n]$  دورية أو محددة الطول فإن الرقم  $N$  يمثل عدد العينات في تتابع يفترض أنه دوري. الكثير من المراجع يضع  $W_N = e^{-j2\pi/N}$  في المعادلات السابقة، وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلتين (٥-١٩ و ٥-٢٠) كما يلي:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (٥-٢١)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (٥-٢٢)$$

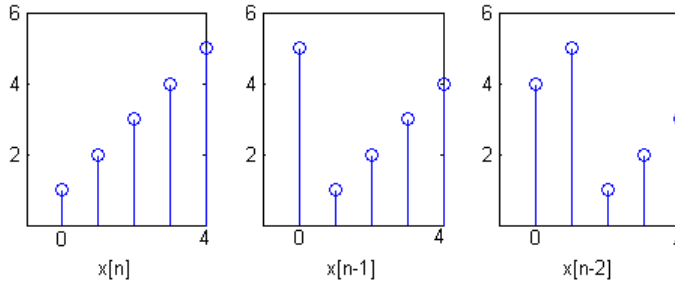
جدول ٥-٤ يبين الكثير من خواص تحويل فوريير المتفاصل أو المتقطع DFT. معظم هذه الخواص مشابهة لخواص تحويل  $z$  والتحويل DTFT مع بعض الخلافات البسيطة. مثلاً في الخاصية الخامسة وهي خاصية الإزاحة في النطاق الزمني فإنه يتم عمل إزاحة دورانية وليس إزاحة خطية على عينات الإشارة  $x[n]$ ، وهذا بالطبع يتطابق مع حقيقة أن التحويل DFT يتعامل مع الإشارة  $x[n]$  كما لو كانت دورة واحدة من إشارة دورية. كما أن عملية الجمع الالتفافي convolution تكون جمع التفافي دوري circular وليس جمع التفافي خطي linear convolution كما في حالة التحويل DTFT.

### الجمع الالتفافي الدوراني circular convolution

إننا نتعامل هنا مع تتابع  $x[n]$  به  $N$  من العينات تتراوح من  $x[0]$  حتى  $x[N-1]$ ، وأما خارج هذا النطاق ( $n < 0$  أو  $n > N$ ) فإن عينات هذا التتابع تكون صفر. لكي نتخيل الإزاحة الدورانية على هذا التتابع تخيل أن هذه العينات موجودة على سطح اسطوانة وموزعة على هذا السطح على مسافات متساوية. الإزاحة الدورانية هي دوران هذه الاسطوانة مع أو عكس عقارب الساعة، أي أن العينة التي تخرج من أقصى اليمين في حالة الدوران ناحية

اليمين تدور وتدخل من ناحية اليسار. شكل ٥-٦ يوضح الإزاحة الدورانية على تتابع مكون من خمس عينات ويمكن التعبير عن ذلك كما في المعادلة التالية:

$$x_c[n] = \begin{cases} x[n - n_0] & \text{for } n_0 \leq n \leq N - 1 \\ x[N - n_0 + n] & \text{for } 0 \leq n < n_0 \end{cases} \quad (٥-٢٣)$$



شكل ٥-٦ الإزاحة الدورانية على التتابعات.

كما نعلم فإن الجمع الالتفافي الخطي linear convolution على التتابعين  $x[n]$  و  $h[n]$  ما هو إلا تكرار من عمليات الإزاحة على أحد التتابعين ثم ضرب التتابعين كل عينة فيما ينظرها. الجمع الالتفافي الدوري circular convolution يشبه تماما الجمع الالتفافي الخطي سوى أن الإزاحة هنا تكون إزاحة دورانية بدلا من الإزاحة الخطية. وعلى ذلك فإنه يمكن كتابة الجمع الالتفافي الدوراني كما في المعادلة (٥-٢٤) التالية:

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[n - m]_N \quad (٥-٢٤)$$

لاحظ أن كل من التتابعين  $x[n]$  و  $h[n]$  يجب أن يكون لهما نفس الطول  $N$ . وعلى ذلك فإن التتابع الناتج من الجمع الالتفافي الدوري يكون هو أيضا له نفس الطول  $N$ ، وذلك على العكس من الجمع الالتفافي الخطي الذي يعطي تتابع طوله  $2N-1$  كما رأينا سابقا.



جدول ٥-٤ خواص تحويل فوريير المتفاصل أو المتقطع DFT.

التحويل DFT	الخاصية والتتابع في النطاق الزمني
$AX[k]+BH[k]$	الخطية $Ax[n]+Bh[n]$
$e^{-j2\pi kn_0/N}X[k]$	إزاحة دورانية في نطاق الزمن $x[(n-n_0)N]$
$X[(k-k_0)N]$	إزاحة دورانية في نطاق التردد $e^{j2\pi k_0 n/N}x[n]$
$X[k]H[k]$	جمع التفاضلي دوراني $\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m)_N]$
$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]H[(k-m)_N]$	التعديل modulation $x[n]h[n]$
$X^*[-k]_N$	$x^*[n]$
$X^*[k]$	$x^*[-n]_N$

**مثال ٥-٢:** احسب المجموع الالتفافي الدوراني circular convolution للتتابعين التاليين:

$$x[n]=[1 \ 2 \ 0 \ 1], \quad h[n]=[2 \ 2 \ 1 \ 1]$$

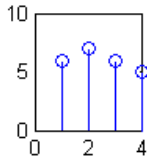
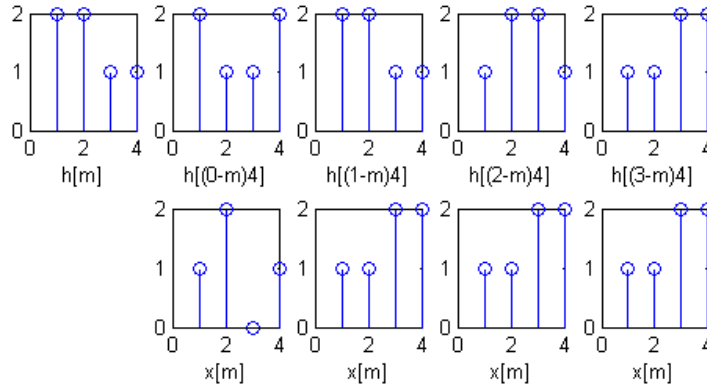
الناتج  $y_c[n]$  سيكون تتابع طوله ٤ ويعطى بالمعادلة التالية:

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^3 x[m]h(n-m)_4, \quad n=0,1,2,3 \quad (٢٥-٥)$$

بوضع  $n=0$  في المعادلة (٢٥-٥) نحصل على العينة الأولى من الخرج:

$$\begin{aligned} y_c[0] &= x[0]h[0]+x[1]h[3]+x[2]h[2]+x[3]h[1] \\ &= 1x_2+2x_1+0x_1+1x_2=6 \end{aligned} \quad (٢٦-٥)$$

بنفس الطريقة يمكن حساب العينات الأخرى  $y_c[1]$  و  $y_c[2]$  و  $y_c[3]$  بالاستعانة بالتتابع  $x[n]$  و  $h[n]$  والإزاحات الدورانية للتتابع  $h[n]$  والتتابع الناتج  $y_c[n]=[6 \ 7 \ 6 \ 5]$  سيكون كما في شكل ٥-٧.



الالتفاف الدوراني circular convolution yc[m]

شكل ٧-٥ الجمع الالتفافي الدوراني.

**مثال ٥-٣:** احسب تحويل فوريير المقطع DFT إذا كان  $x[n]$  عبارة عن تتابع طوله  $N$  من العينات التي كلها أصفار ما عدا عينة واحدة قيمتها تساوى واحد عند  $n=0$ ، تتابع عينة الوحدة unit sample.

بالتعويض عن  $x[n]$  في المعادلة (٥-١٩) نحصل على  $X[k]=1$  لكل قيم  $k$  التي تتراوح من  $k=0$  حتى  $k=N$ . وهذا يناظر تحويل فوريير لإشارة الدفعة impulse signal التناظرية أو الانسيابية حيث أن تحويل فوريير لها يكون ثابت ويساوى واحد عند جميع الترددات.

### حسابات تحويل فوريير المتقطع DFT

المعادلة (٥-١٩) التي تحسب التحويل DFT يمكن إعادة كتابتها في صورة مصفوفات كما يلي:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (٢٧-٥)$$

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} \quad (28-5)$$

$$X = D x$$

حيث  $X$  هو متجه عناصره هي قيم تحويل فوريير المقطع DFT وعددتها  $N$  عنصر، بينما  $x$  هي متجه عناصره هي عينات الإشارة  $x$  المطلوب حساب التحويل DFT لها وعددتها  $N$  من العناصر أيضا.  $D$  عبارة عن مصفوفة مربعة عدد عناصرها هو  $N \times N$  من العناصر. لتعميم الحسابات سنفترض أن الإشارة  $x[n]$  في المعادلة (27-5) هي إشارة مركبة complex أي لها مركبة حقيقية  $\text{Re}(x[n])$  ومركبة تخيلية  $\text{Im}(x[n])$ . كذلك فإن الكمية  $W_N^{kn}$  هي أيضا كمية مركبة تتكون من مركبة حقيقية  $\text{Re}(W_N^{kn})$  ومركبة تخيلية  $\text{Im}(W_N^{kn})$  وعلى ذلك فإنه يمكن كتابة المعادلة (27-5) مرة أخرى في صورتها العامة وبدلالة المركبات الحقيقية والتخيلية كما يلي:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \{ \text{Re}(x[n]) + j \text{Im}(x[n]) \} \{ \text{Re}(W_N^{kn}) + j \text{Im}(W_N^{kn}) \} \quad (29-5)$$

بفك الأقواس لهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي:

$$X[k] = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re}(x[n]) \cdot \text{Re}(W_N^{kn}) - \sum_{n=0}^{N-1} \text{Im}(x[n]) \cdot \text{Im}(W_N^{kn}) \right\} + j \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re}(x[n]) \cdot \text{Im}(W_N^{kn}) + \sum_{n=0}^{N-1} \text{Im}(x[n]) \cdot \text{Re}(W_N^{kn}) \right\} \quad (30-5)$$

بالنظر في المعادلة (٥ - ٣٠) نجد أنه لحساب كل عنصر من عناصر المتجه  $X[k]$  فإننا نحتاج إلى  $4N$  من عمليات الضرب، وبما أن المتجه  $X[k]$  يحوى عدد  $N$  من العناصر حيث  $k$  تتغير من صفر إلى  $N-1$ ، فإننا سنحتاج لعدد  $4N \times N = 4N^2$  من عمليات الضرب الحقيقي real multiplication. كذلك فإن حساب عنصر واحد من عناصر  $X[k]$  سيحتاج إلى عدد من عمليات الجمع يساوى  $4(N-1)+2=4N-2$ ، وبما أننا نحتاج لعدد  $N$  من هذه العناصر فإننا سنحتاج إلى  $N(4N-2)$  من عمليات الجمع. من ذلك نرى أنه للحصول على تحويل فوريير المتقطع DFT لأي إشارة فإننا نحتاج لعدد مهول من عمليات الضرب والجمع يتناسب تقريبا مع مربع عدد عينات الإشارة التي نجرى عليها التحويل DFT. كمثال على ذلك فإنه لو أن عدد عناصر الإشارة  $x[n]$  كان  $N=256$  فإن عدد عمليات الضرب اللازمة يكون  $65536$  عملية ضرب ومثلها تقريبا لعمليات الجمع. هذا الكم المهول من الحسابات بالطبع سيأخذ الوقت الكثير على الحاسب عند تنفيذه. لذلك كانت هناك الحاجة الدائمة لتقليل هذا الكم من الحسابات والوقت اللازم لها وظلت الأبحاث وما زالت في كيفية تقليل هذه الحسابات والبحث عن خواريزم سريع يقوم بهذه الحسابات. المشكلة الأخرى في الحساب المباشر للمعادلة (٥ - ٣٠) هي المقدار الأسى والذي هو في الأصل دالة جيبيية وهذا في حد ذاته يحتاج لوقت كبير على الحاسب بالمقارنة بالكثير من العمليات الحسابية الأخرى. لحسن الحظ فإنه أمكن التوصل إلى خواريزم أو طريقة أمكن باستخدامها تقليل عدد عمليات الحساب اللازمة إلى  $N \log_2 N$  وهذا يعتبر تخفيضا كبيرا في كمية الحسابات وبالتالي الوقت اللازم لإجراء هذا التحويل، هذه الطريقة أو هذا الخواريزم هو ما أطلق عليه خواريزم تحويل فوريير السريع Fast Fourier Transform Algorithm أو ما عرف اختصارا بخواريزم FFT والذي سيكون موضوع الجزء التالي.

## ٥-٦ خواريزم تحويل فوريير السريع

### Fast Fourier Transform Algorithm, FFT

إنه لمن حسن الحظ أن الكثير جدا من عناصر المعادلة (٥-٢٧) مكررا ويمكن حسابه لمرة واحدة فقط، ولو تم أخذ ذلك في الاعتبار لأمكن الاستغناء عن الكثير جدا من الحسابات المباشرة لمعادلة هذا التحويل. إن ذلك يرجع لطبيعة الكمية الأسية  $e^{-j2\pi kn/N}$ ، فهذه الكمية دورية وتكرر نفسها كلما كانت الكمية  $kn > N$  ولذلك فإنها لن يكون لها سوى  $N$  من القيم المختلفة مع تغير كل من  $n$  و  $k$  من صفر حتى  $N-1$ . لكي نشعر بذلك ونرى كيف أنه مع تغير كل من  $n$  و  $k$  من صفر إلى  $N-1$  فإنه سيكون هناك الكثير من القيم المكررة فإننا سنحسب الكمية الأسية  $e^{-j2\pi kn/N}$  كمثال بفرض  $N=8$  وعلى ذلك فإن  $n$  و  $k$  كل منهما ستتغير من صفر حتى 7. جدول ٥-٥ يبين جميع القيم الممكنة لهذه الكمية الأسية في هذه الحالة ( $N=8$ ). نلاحظ من هذا الجدول أن القيمة 1 مثلا تكررت ١٥ مرة والقيمة السالبة -1 تكررت ٨ مرات والقيمة  $j$  تكررت ٨ مرات والقيمة  $-j$  تكررت ٧ مرات وهكذا. أهم ما نلاحظه في هذا الجدول هو وجود ٨ كميات فقط لها قيم مختلفة وهي القيمة 1 و القيمة  $j$  و  $-j$  والقيمة  $(1-j)/\sqrt{2}$  و  $(1+j)/\sqrt{2}$  وكذلك القيمة  $(1-j)/\sqrt{2}$  و  $(1+j)/\sqrt{2}$ . هناك العديد من طرق تخفيض كمية الحسابات المطلوبة لحساب التحويل DFT ومنذ حوالي ٥٠ سنة والأبحاث مكثفة في هذا الموضوع ولقد تم استخدام التحويل FFT أول ما استخدم في عام ١٩٧٦، ولقد كان لظهور هذه الصور السريعة لحساب الـ DFT الأثر الكبير في شيوع استخدام الـ FFT في الكثير من التطبيقات ومنها الرادار وكل تقنيات الاتصالات والإلكترونيات الطبية والكثير من التطبيقات الأخرى وسنعرض هنا بعض هذه الطرق الشائعة الاستخدام.

جدول ٥-٥ جميع القيم الممكنة للكمية  $W_N^{kn}$  عندما  $K=N=8$

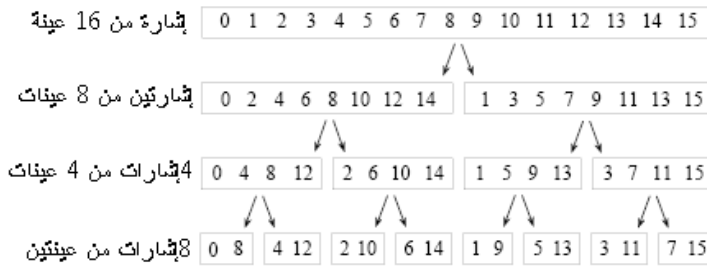
$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$(1-j)/\sqrt{2}$	$-j$	$-(1+j)/\sqrt{2}$	-1	$-(1-j)/\sqrt{2}$	$j$	$(1+j)/\sqrt{2}$
2	1	$-j$	-1	$j$	1	$-j$	-1	$j$
3	1	$-(1+j)/\sqrt{2}$	$j$	$(1-j)/\sqrt{2}$	-1	$(1+j)/\sqrt{2}$	$-j$	$-(1-j)/\sqrt{2}$
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	$-(1-j)/\sqrt{2}$	$-j$	$(1+j)/\sqrt{2}$	-1	$(1-j)/\sqrt{2}$	$j$	$-(1+j)/\sqrt{2}$
6	1	$j$	-1	$-j$	1	$j$	-1	$-j$
7	1	$(1+j)/\sqrt{2}$	$j$	$-(1-j)/\sqrt{2}$	-1	$-(1+j)/\sqrt{2}$	$-j$	$(1-j)/\sqrt{2}$

### طريقة التقسيم في الزمن Decimation in time لحساب التحويل DFT

كما سنرى فإن التحويل FFT هو طريقة أخرى لحساب التحويل DFT ويعطى نفس النتائج النهائية تماماً وبسرعة كبيرة جداً عند مقارنته بالحساب المباشر من خلال المعادلة (٥-٣٠) ولولا استخدام التحويل FFT لما كان من الممكن استخدام تقنيات المعالجة الرقمية في الكثير من التطبيقات المنتشرة في شتى أنحاء الحياة الآن.

في طريقة التقسيم الزمني يتم تقسيم عينات الإشارة وهى في النطاق الزمني على مراحل متتابعة، وسنفترض في البداية أن عدد عينات الإشارة  $x[n]$  في النطاق الزمني هو  $N$  كما ذكرنا، وأن  $N$  هي أحد قوى الرقم 2 أي أن  $N=2^v$  حيث  $v$  أي رقم صحيح. يبدأ خواريزم التقسيم الزمني بتقسيم عينات الإشارة  $x[n]$  إلى جزأين، الجزء الأول يحتوى العينات ذات الأرقام الزوجية  $x[0], x[2], x[4], \dots, x[N-2]$  والجزء الثاني يحتوى العينات ذات الأرقام الفردية  $x[1], x[3], x[5], \dots, x[N-1]$ . بعد ذلك يتم تقسيم كل جزء من الأجزاء السابقة إلى جزأين

مرة أخرى، جزء يحتوي العينات الزوجية في الجزء الأول  $x[0], x[4], \dots$  والجزء الثاني يحتوي العينات الفردية في الجزء الأول  $x[2], x[6], \dots$ ، ثم بنفس الطريقة نقوم بتقسيم عينات الجزء الثاني إلى العينات الزوجية في هذا الجزء  $x[1], x[5], \dots$  والعينات الفردية فيه وهي  $x[3], x[7], \dots$ . تستمر عملية التقسيم هذه إلى أن نصل أن كل جزء سيحتوي على نقطتان فقط وبالطبع فإن عدد مراحل التقسيم هذه ستكون  $v = \log_2(N)$  لأن  $N$  كما ذكرنا هي 2 مرفوعة للقوة  $v$ . شكل ٥-٨ يبين رسماً توضيحياً لعملية التقسيم السابقة حيث تم تقسيم إشارة من ١٦ عينة على ٣ مراحل تقسيم إلى أن وصلنا إلى ٨ إشارات كل منها تتكون من عينتين فقط في المرحلة الأخيرة.



شكل ٥-٨ التقسيم المتتالي لعينات الإشارة في النطاق الزمني.

السؤال المهم هنا هو ماذا سنستفيد من هذا التقسيم؟ سنعرض هنا كيف أن كل عملية تقسيم ستوفر كثيراً في الحسابات اللازمة للحصول على التحويل. سنبدأ من المعادلة (٥-٢١) التي تحدد تحويل فوريير الرقمي DFT للترتيب  $x[n]$  المكون من عدد  $N$  من العينات، وسنعيد كتابتها كما يلي:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (٥-٣١)$$

مع أول خطوة تقسيم في النطاق الزمني يتم تقسيم المتتبع  $x[n]$  إلى جزأين الأول يحتوى العينات الزوجية والثاني يحتوى العينات الفردية وعلى ذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة (٥-٣١) كما يلي:

$$X[k] = \sum_{n=0, \text{even}}^{N-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n=1, \text{odd}}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad (٣٢-٥)$$

بوضع  $n=2r$  في الجزء الأول من المعادلة (٥-٣٢) و  $n=2r+1$  في الجزء الثاني من نفس المعادلة يمكن إعادة كتابة المعادلة (٥-٣٢) كما يلي:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \quad (٣٣-٥)$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٥-٣٣) ليكون كل جزء فيها بدلالة  $N/2$  من النقاط وذلك بالاستعانة بالمعادلة التالية:

$$W_N^{2rk} = (W_N^2)^{rk} = e^{-j(2\pi/N)2rk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}rk} = W_{N/2}^{rk} \quad (٣٤-٥)$$

بالتعويض من المعادلة (٥-٣٤) في المعادلة (٥-٣٣) يمكن كتابة المعادلة التالية:

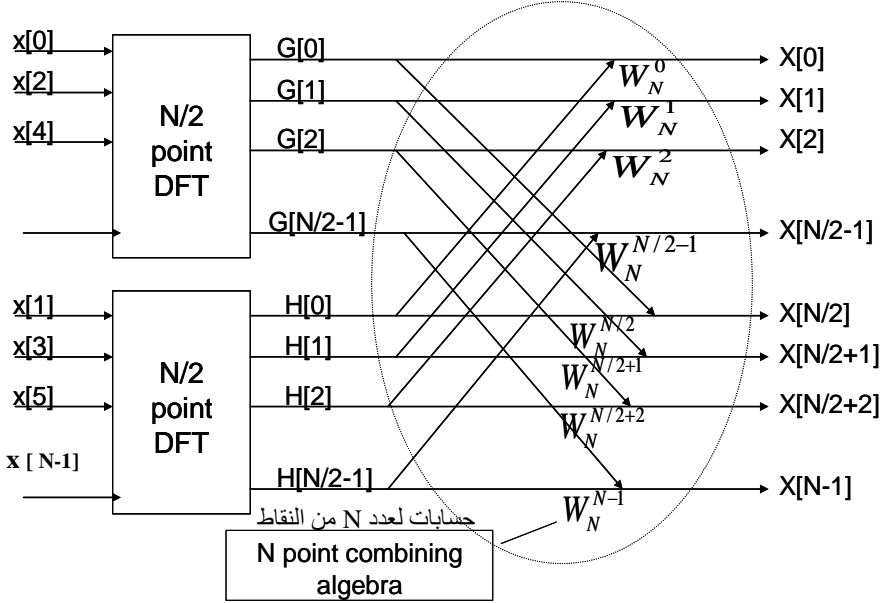
$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} \quad (٣٥-٥)$$

والتي يمكن كتابتها اختصارا كما يلي:

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, (N/2)-1 \quad (٣٦-٥)$$



بهذه الخطوة الأولى من التقسيم نكون قد قسمنا تحويل فوريير الرقمي  $X[k]$  للعدد  $N$  من النقاط إلى تحويلين أو جزأين، الجزء الأول منهما هو  $G[k]$  الذي يمثل تحويل فوريير الرقمي للجزء الزوجي والجزء الثاني  $H[k]$  الذي يمثل تحويل فوريير للجزء الفردي من المتابع  $x[n]$ ، والجزأين يتم تجميعهما كما في المعادلة (٥-٣٦) والموضحة في شكل ٥-٩.



شكل ٥-٩ أول خطوة في التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

كما علمنا من قبل فإن عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT يساوى تقريبا  $N^2$  وعلى ذلك فإنه يمكننا كتابة عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب  $X[k]$  في المعادلة (٥-٣٦) كما يلي:

$$m = (N/2)^2 + (N/2)^2 + N = N + N^2/2 \quad (٥-٣٧)$$

حيث أول كمية  $(N/2)^2$  تمثل عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT للنقاط الزوجية، والكمية الثانية  $(N/2)^2$  تمثل عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT للنقاط الفردية، والكمية  $N$  تمثل عدد عمليات الضرب اللازمة لحساب الكمية  $W_N^k H[k]$ . في المعادلة (٣٦ - ٥) تتغير  $k$  من 0 حتى  $N-1$ ، بينما كل من  $G[k]$  و  $H[k]$  تحتوى  $N/2$  فقط من النقاط ولكن كل منهما عبارة عن تتابع دوري، أي يتكرر كل  $N/2$  من النقاط. لذلك يجب مراعاة أنه عند حساب كل من  $G[k]$  و  $H[k]$  لقيم  $k$  أكبر من  $N/2$  وأقل من  $N-1$  فإن  $G[N/2]=G[0]$  و  $G[N/2+1]=G[1]$  وهكذا ونفس الشيء يطبق على التتابع  $H[k]$ .

بنفس الطريقة يمكن تقسيم كل جزء من الأجزاء السابقة إلى جزأين آخرين، الجزء الأول يحتوى النقاط الزوجية والثاني يحتوى النقاط الفردية في كل جزء ويتم حساب التحويل DFT لكل جزء من الأجزاء الأربعة الناتجة كما في شكل ٥-١٠. يمكن كتابة التحويل  $X[k]$  في هذه الحالة كما في المعادلة (٣٨ - ٥) التالية :

$$X[k] = Ge[k] + W_{N/2}^k Go[k] + He[k] + W_{N/2}^k Ho[k] \quad (٣٨-٥)$$

في المعادلة (٣٨ - ٥)  $Ge[k]$  تمثل التحويل DFT للنقاط الزوجية في الجزء الزوجي  $G[k]$ ، و  $Go[k]$  تمثل التحويل DFT للجزء الفردي من  $G[k]$ ، ونفس الكلام مطبق على التحويلات  $He[k]$  و  $Ho[k]$ .

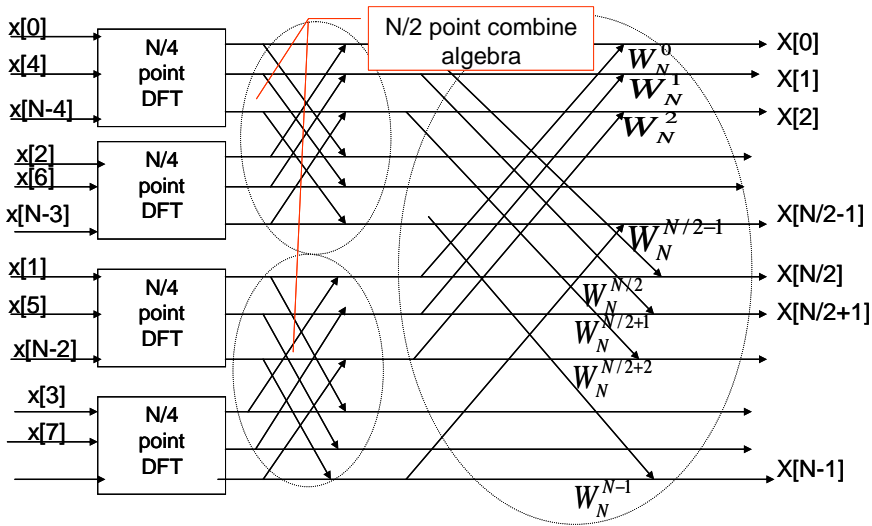
بنفس الطريقة يمكن حساب عدد عمليات الضرب المركب في هذه الحالة والذي يمكن كتابته كما في المعادلة (٣٩ - ٥) التالية:

$$P=4(N/4)^2+2(N/2)+N=N^2/4+2N \quad (٣٩-٥)$$

وتستمر عملية التقسيم بحيث في المرحلة التالية يتم تقسيم كل مجموعة من ال  $N/4$  من النقاط إلى مجموعتين من النقاط الزوجية والفردية أيضا والتي تحتوى كل منها على  $N/8$  من النقاط. وتستمر عمليات التقسيم إلى أن ننتهي في المرحلة الأخيرة، حيث تؤول عملية التقسيم إلى نقطتين فقط في كل مجموعة. بالطبع عندما يكون عدد النقاط الكلى أو في

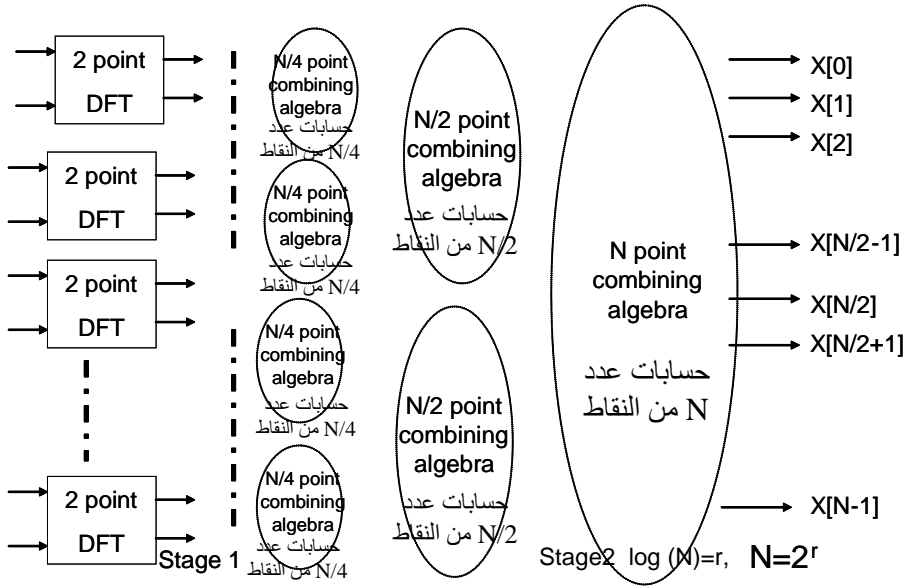
أول مرحلة أحد قوى الرقم 2 ( $N=2^r$ ) فإن عدد مراحل التقسيم سيكون  $\log_2 N=r$ . فإذا كان عدد النقاط مثلاً هو  $N=2^3=8$  فإن عدد مراحل التقسيم في هذه الحالة سيكون 3 مراحل. أما عدد عمليات الضرب المركب الناتج فيمكن استنتاجه من تتابع عمليات التقسيم في الأشكال ٥-٩ حتى ٥-١١. في أول عملية تقسيم كان عدد عمليات الضرب المستخدمة في ربط جزئي التحويل هو  $N$  كما في شكل ٥-٩. في المرحلة الثانية والتي تحتوي على ٤ أجزاء كان عدد عمليات الضرب المستخدمة في الربط هو  $2N$  كما في شكل ٥-١٠. بنفس الطريقة يمكن استنتاج عدد عمليات الضرب الكلي في المرحلة الأخيرة والذي يمكن كتابته كما يلي:

$$P = N \cdot \log_2(N) \quad (٥-٤)$$



شكل ٥-١٠ الخطوة الثانية من التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

كمثال على ذلك سنفترض  $N=2^3=8$ ، وعلى ذلك سيكون هناك ٣ مراحل تقسيم إلى أن نصل إلى المرحلة الأخيرة التي ستحتوي على ٤ مجموعات كل مجموعة تحتوى نقطتان فقط سيتم حساب ال DFT لهما كما في شكل ٥-١٢. في هذه الحالة سيكون عدد عمليات الضرب المركب يساوى  $8\log_2 8=24$ ، وهذا يعتبر تحفيضا كبيرا في عمليات الضرب إذا ما قورن بالعدد المطلوب في حالة الحساب المباشر لل DFT الذي يساوى في هذه الحالة  $N^2=64$  عملية ضرب مركب. من شكل ٥-١٢ يمكن أن نلاحظ أكثر من ملاحظة:



شكل ٥-١١ المرحلة الأخيرة من مراحل التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

١- مركبات ال DFT الناتجة في هذه الحالة  $X[0], X[1], X[N]$  تكون مرتبة ترتيبا تصاعديا كما في الشكل ولا تحتاج لإعادة ترتيب مثل نقاط الدخل  $x[n]$  التي يتم إعادة ترتيبها إلى نقاط زوجية ونقاط فردية كما في شكل ٥-١٢.

٢- نقاط الدخل  $x[n]$  يتم إعادة ترتيبها داخل كل مجموعة مع كل عملية تقسيم إلى نقاط زوجية وأخرى فردية. هذه العملية ليست سهلة وبالذات في التتابعات ذات النقاط العديدة، ولكن هناك ملاحظة جميلة جدا جعلت عملية إعادة ترتيب تتابع الدخل  $x[n]$  للحصول على مجموعات النقاط النهائية عملية سهلة جدا. يتم ذلك عن طريق التعبير عن رقم كل نقطة في النظام الثنائي في الترتيب الطبيعي التصاعدي للنقاط كما في العمود الثاني من اليسار في جدول ٥-٦، ثم يتم عكس بتات كل رقم (عكس مرآة) فنحصل على العمود الثالث من اليسار في نفس الجدول. الأرقام الناتجة في العمود الثالث يتم أخذها اثنين باثنين من القمة لنحصل على مجموعات المرحلة الأخيرة من التقسيم. فمثلا في هذا الجدول وفي حالة  $N=8$  وكما في العمود الأيمن من جدول ٥-٤ سيتم أخذ النقطة رقم 0(000) مع النقطة رقم 4(100) ، والنقطة 2(010) مع النقطة التالية لها في هذا العمود وهي النقطة 6(110) وهكذا إلى أن نأخذ النقطة 3(011) مع النقطة 7(111).

٣- نلاحظ في شكل ٥-١٢ أنه عبارة عن تكرار من شكل الفراشة بأبعاد مختلفة وفي كل فراشة هناك عمليتي ضرب، عملية في أحد القطرين والأخرى في الضلع الأفقي الأسفل من الفراشة. عمليتي الضرب في كل فراشة فيهما خاصية مهمة جدا وهي أن ناتج كل منهما متساوي مع اختلاف في الإشارة فقط. فمثلا الكميتين  $W_2^0$  و  $W_2^1$  يمكن كتابتهما كما يلي:

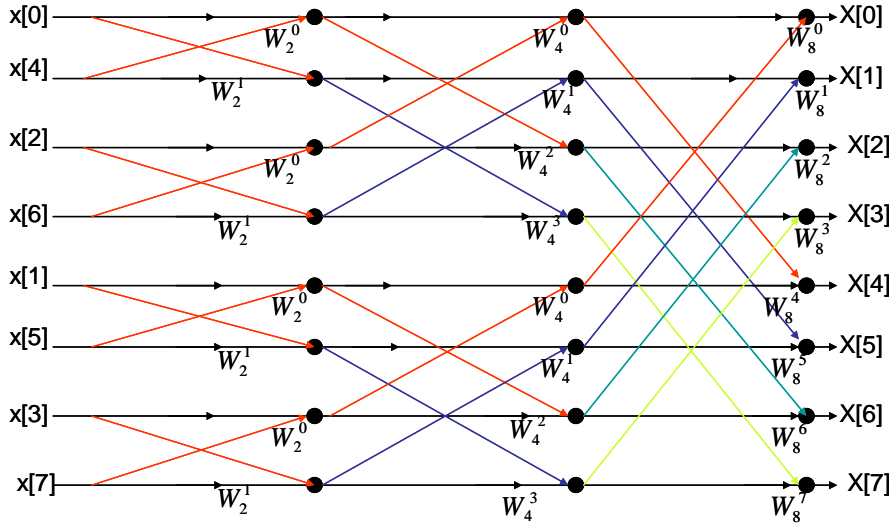
$$W_2^0 = 1$$

$$W_2^1 = e^{-j2\pi/2} = e^{-j\pi} = -1$$

حيث نلاحظ أنهما متساويتان سوى أن الإشارة في أحدهما عكس الآخر. بنفس الطريقة يمكن أن نكتب معاملات الضرب التالية في أحد الفراشات الأخرى في شكل ٥-١٢:

$$W_8^7 = W_8^{8-1} = W_8^8 \cdot W_8^{-1} = 1 \cdot W_8^{-1} = W_8^{-1} \quad \text{و} \quad W_8^3 = W_8^{4-1} = W_8^4 \cdot W_8^{-1} = -1 \cdot W_8^{-1} = -W_8^{-1}$$

نلاحظ أيضا أن الكميتين متساويتين غير أن الإشارة مختلفة بينهما. بنفس الطريقة يمكن كتابة كل معاملات الضرب في كل الفراشات الموجودة في شكل ٥-١٢. وعلى ذلك يمكن إعادة رسم شكل ٥-١٢ كما في شكل ٥-١٣ حيث نلاحظ أن عدد عمليات الضرب المركب في هذه الحالة قد تم تخفيضها إلى النصف بحيث يمكن كتابة عدد عمليات الضرب الناتجة كما يلي:



شكل ٥-١٢ تحويل فوريير FFT لتتابع من ٨ نقاط.

جدول ٥-٤ طريقة مبسطة للحصول على تقسيمات التتابع  $x[n]$

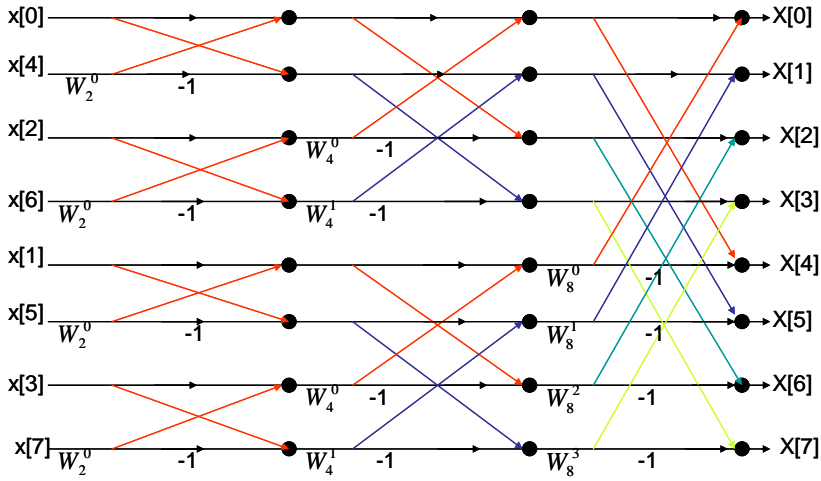
تتابع الدخل $x[n]$	الترقيم الثنائي	عكس الترقيم الثنائي	المجموعات الناتجة
$x[0]$	000	000	$X[0]$
$x[1]$	001	100	$X[4]$
$x[2]$	010	010	$X[2]$
$x[3]$	011	110	$X[6]$
$x[4]$	100	001	$X[1]$
$x[5]$	101	101	$X[5]$
$x[6]$	110	011	$X[3]$
$x[7]$	111	111	$X[7]$

$$P=(N/2).\log_2(N)$$

(٤١-٥)

بتطبيق هذه المعادلة حينما تكون  $N=8$  فإن عدد عمليات الضرب سيصبح ١٢ عملية بدلا

من ٢٤ كما سبق.



شكل ٥-١٣ تحويل فوريير FFT لتتابع من ٨ نقاط بعد تخفيض عمليات الضرب.

جدول ٥-٧ التوفير في استخدام الخواريزم FFT مع زيادة عدد نقاط التتابع  $x[n]$

عدد مراحل التقسيم r	عدد النقاط N	$N^2$	$(N/2)\log_2(N)$	Ratio of $N^2$ to $(N/2)\log_2(N)$
2	4	16	4	4
3	8	64	12	5.333
4	16	256	32	8
5	32	1024	80	12.8
6	64	4096	192	21.33
7	128	16384	448	36.57
8	256	65536	1024	64
9	512	262144	2304	113.77
10	1024	1048576	5120	204.8

٤- جدول ٥-٧ يبين التخفيض في عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل FFT عند القيم المختلفة للمتغير  $N$  والتي يتضح منها القيمة الحقيقية للتخفيض وبالذات عند قيم  $N$  العالية والتي تكون هي القيم الطبيعية في جميع التطبيقات تقريبا.

## ٥-٧ حسابات تحويل فوريير السريع باستخدام ماتلاب MATLAB

يستخدم برنامج MATLAB طريقة التقسيم في الزمن لحساب هذه التحويلات. يتم ذلك من خلال الدوال الآتية المتاحة مباشرة:

```
fft(x)
ifft(X)
fft(x,N)
ifft(X,N)
```

حيث الدالة الأولى تحسب التحويل  $fft$  للمتجه أو المتابع  $x$  من العينات ، بينما الدالة الثانية تحسب التحويل العكسي للمتجه  $X$ . الدالة الثالثة  $fft(x,N)$  تعطى أو تحسب التحويل  $fft$  للعدد  $N$  من عينات المتجه  $x$  بحيث إذا كانت  $x < N$  فإن المتجه  $x$  يتم إضافة أصفار في نهايته إلى أن يصبح طوله هو  $N$ ، بينما إذا كانت  $N < x$  فإنه يتم استقطاع العدد  $N$  فقط من عينات المتجه  $x$  ويتم حساب التحويل  $fft$  لها. الدالة الأخيرة  $ifft(x,N)$  تحسب التحويل العكسي بنفس الطريقة كما في الدالة  $fft(x,N)$ .

**مثال ٥-٤:** سنقدم هنا مثالا لإشارة مكونة من التردد ٥٠ هرتز والتردد ١٢٠ هرتز مجموعان سويا ومعهما إشارة ضوضاء (عشوائية) متوسطها صفر ثم سنحسب  $fft$  لهذه الإشارة لنرى المحتويات الترددية أو طيف هذه الإشارة. معدل أخذ العينات لهذه الإشارة هو ١٠٠٠ هرتز. مشكلة الـ  $fft$  أنه مركب، أي يتكون من مركبة حقيقية وأخرى تخيلية.



لذلك بدلا من أن نرسم الـ fft سنرسم متوسط قدرة الطيف Average power spectrum والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$P = \text{FFT} * (\text{conj}(\text{FFT})) / N \quad (5-42)$$

حيث P هي متوسط قدرة الطيف ، و conj تعني المرافق المركب complex conjugate للـ fft و N هي عدد النقاط التي سنحسب لها الـ fft.

برنامج MATLAB التالي سيحدد هذه الإشارة ونرسم ٥٠ ميلي ثانية منها كما يلي:

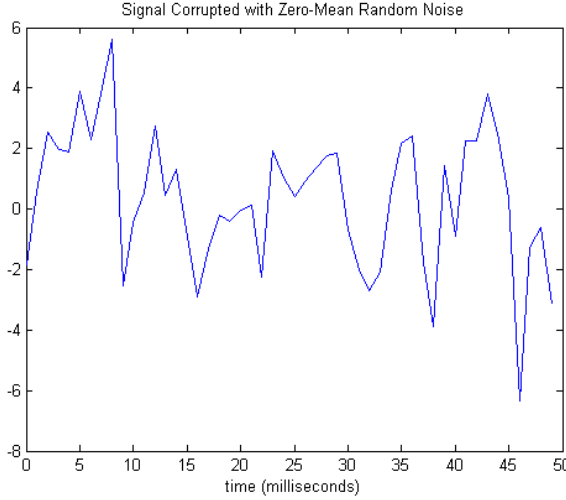
```
%Calculation of the average power spectrum
t = 0:0.001:0.6;%sampling rate 0.001 sec
x = sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t);
y = x + 2*randn(size(t));
plot(1000*t(1:50),y(1:50))
title('Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise')
xlabel('time (milliseconds)')
```

الدالة randn تعطى قيما عشوائية random متوسطها صفر وتباعدها يساوى واحد، والدالة randn(size(t)) ستعطى متجه من هذه القيم العشوائية وحجم هذا المتجه (عدد عناصره) هو نفس حجم المتجه t. شكل ٥-١٤ يبين رسما لهذه الإشارة في النطاق الزمني حيث لا نستطيع أن نحدد المحتويات الترددية لهذه الإشارة.

الآن سنحسب الـ fft لهذه الإشارة ونرسم متوسط قدرة الطيف لها بالأوامر التالية :

```
Y = fft(y,512);
Pyy = Y.* conj(Y) / 512;
f = 1000*(0:256)/512;
plot(f,Pyy(1:257))
title('Frequency content of y')
xlabel('frequency (Hz)')
```

شكل ٥-١٥ يبين متوسط قدرة الطيف (وبالتالي المحتويات الترددية) للإشارة السابقة حيث نلاحظ وجود قمتين عند التردد ٥٠ هرتز والتردد ١٢٠ هرتز وأما باقي الإشارة فهو ضوضاء كما نرى في هذا الشكل.



شكل ٥-١٤ إشارة مختفية داخل ضوضاء.

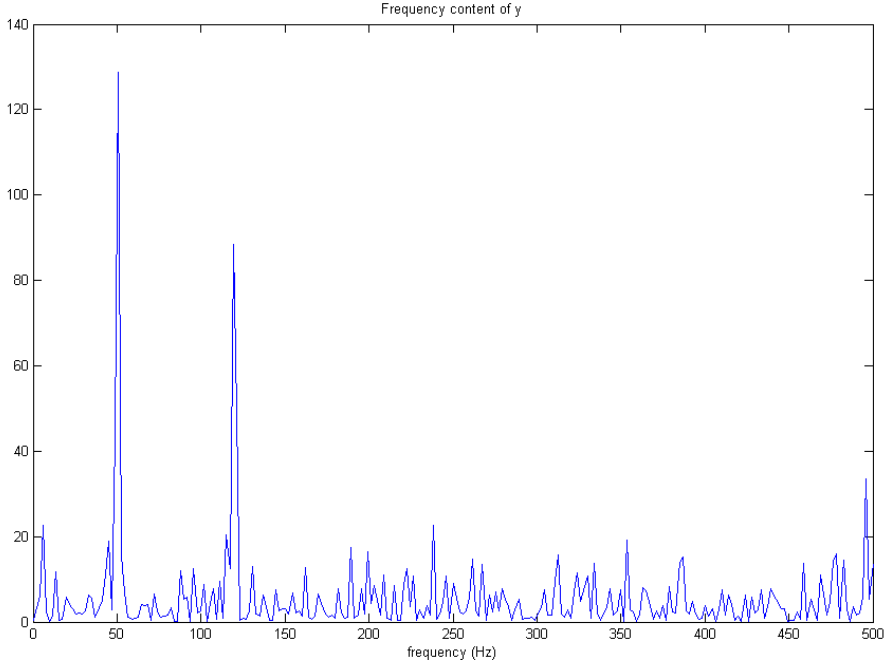
## ٥-٨ تمارين

- ١- افترض أن  $X(e^{j\omega})$  تمثل التحويل DTFT للتابع الحقيقي  $x[n]$ :
- أ- اثبت أن  $x[n]$  يمكن استنتاجها من  $X(e^{j\omega})$  بالعلاقة التالية إذا كانت  $x[n]$  تمثل تتابع زوجي:

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos(\omega n) d\omega$$

- ب- اثبت أن  $x[n]$  يمكن استنتاجها من  $X(e^{j\omega})$  بالعلاقة التالية إذا كانت  $x[n]$  تمثل تتابع فردي:

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{jw}) \sin(wn) dw$$



شكل ١٥-٥ المحتويات الترددية لإشارة المثال ٥-٤.

٢- احسب التحويل DTFT للتابع السببي التالي:

$$x[n] = A\alpha^n \cos(w_0 n + \phi)u[n]$$

٣- احسب التحويل DTFT لكل من التتابعات التالية :

$$x_1[n] = \alpha^n u[n], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_2[n] = \alpha^n u[-n], \dots, |\alpha| > 1$$

$$x_3[n] = \begin{cases} \alpha^{|n|}, \dots, |n| \leq M \\ 0, \dots, \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$x_4[n] = \alpha^n u[n+3], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_5[n] = n\alpha^n u[n], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_6[n] = \begin{cases} 1, \dots, -N \leq n \leq N \\ 0, \dots, \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$x_7[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, \dots, -N \leq n \leq N \\ 0, \dots, \text{Otherwise} \end{cases}$$

٤- افترض التابع التالي:

$x[n] = \{2 \ 1 \ \underline{-1} \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ -3 \ 4\}$   
 حيث العينة  $n=0$  تم تمييزها بالخط أسفلها. بافتراض التحويل DTFT لهذا التابع هو  $X(e^{j\omega})$ ، احسب الدوال التالية دون حساب التحويل DTFT:

$$X(e^{j0})$$

$$X(e^{j\pi})$$

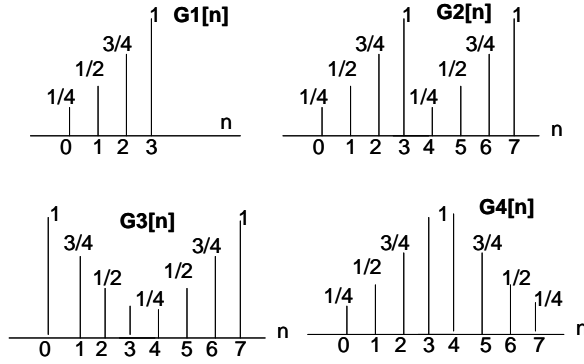
$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

٥- اعد تمرين ٤ ولكن على التابع التالي:

$$x[n] = \{1 \ 5 \ -2 \ 1 \ \underline{3} \ 4 \ 2 \ 0 \ 5\}$$

٦- افترض أن  $G1(e^{j\omega})$  هو التحويل DTFT للتابع  $g1[n]$  الموضح في شكل ٥-٦، عبر عن التحويل DTFT للتابعات الموضحة في نفس الشكل بدلالة  $G1(e^{j\omega})$ .



شكل ٦-٥

٧- افترض أن  $X[k]$  هي التحويل DFT للتتابع  $x[n]$  حيث  $N$  هي طول هذا التتابع، اثبت

معادلة بارسيفال Parseval's relation التالية:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

# الفصل السادس

## المرشحات الانسيابية (التناظرية) Analog Filters

### ٦-١ مقدمة

أحد الطرق المهمة في تصميم المرشحات الرقمية digital filters هي تحويل المرشحات الانسيابية أو التماثلية إلى مرشحات رقمية باستخدام معادلات تحويل معينة. هناك مواقف لا بد فيها من استخدام المرشحات التناظرية، من هذه المواقف المرشح المضاد للتزيف antialiasing filter الذي يحدد المجال الترددي للإشارة الداخلة للمحول التناظري/الرقمي عند تردد معين أقل من نصف تردد العينة. هناك كذلك مرشح بناء الإشارة التناظرية reconstruction filter الذي نضعه في آخر أي نظام رقمي وبعد المحول الرقمي/التناظري D/A الذي يحول الإشارة الرقمية إلى الصورة التناظرية. لذلك كان لزاماً أن نخصص هذا الفصل لإلقاء الضوء على أشهر الطرق المتبعة لتصميم المرشحات التناظرية تمهيداً لاستخدامها في تصميم المرشحات الرقمية. سنقدم في هذا الفصل ثلاث طرق شهيرة لتصميم المرشحات التناظرية وهي:

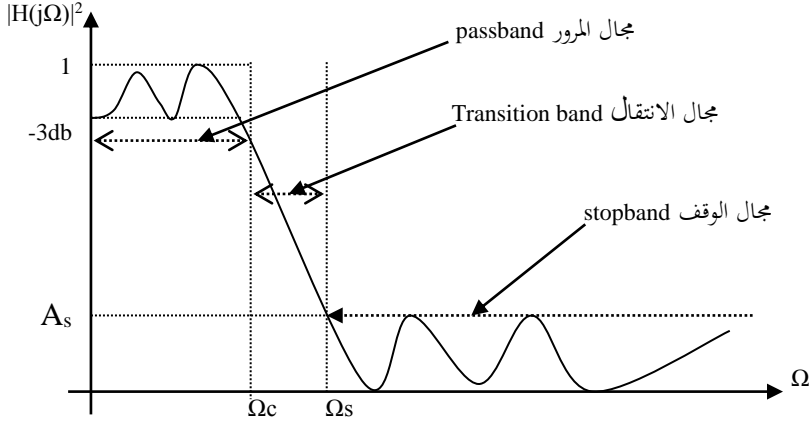
- ١- مرشح بتزورث Butterworth filter، وهذه التسمية نسبة للعالم المهندس الإنجليزي S. Butterworth الذي وصف معادلة هذا المرشح عام ١٩٣٠.
- ٢- مرشح شيبشيف Chebyshev filter، وهذه التسمية نسبة للعالم الرياضي الروسي Pafnuti Chebyshev الذي وضع معادلة هذا المرشح.

٣- مرشح القطع الناقص Elliptic filter، أو المرشح البيضاوي كما يطلق عليه أحيانا، كل واحد من هذه المرشحات يتميز بمواصفات معينة تجعله مرشحا لبعض التطبيقات المعنية عن الأنواع الأخرى وهذا ما سنراه في هذا الفصل.

الغرض من أي مرشح من أي نوع هو السماح لترددات معينة من الإشارة بالمرور عبر المرشح، وأما الترددات الأخرى فلا يسمح لها بالمرور أو يتم وقفها أو منعها أو إحباطها. مجال الترددات الذي يسمح له بالمرور يسمى مجال المرور passband، أما مجال الترددات التي يتم وقفها أو إحباطها فيسمى مجال الوقف stopband. لذلك فإن طرق تصميم أي مرشح تبدأ في العادة بوضع مواصفات لهذا المرشح توضح المجالات السابقة. شكل ٦-١ يبين استجابة حقيقية لأحد المرشحات، حيث يقصد بالاستجابة أنها نسبة قدرة إشارة خرج المرشح إلى قدرة الإشارة الداخلة له، وهذه النسبة يمكن التعبير عنها بالديسيبل. مثل هذه الاستجابة نطلق عليها الاستجابة الترددية للمرشح حيث أنها توضح كيف يستجيب المرشح لإشارة داخله له عند الترددات المختلفة من صفر هرتز DC إلى المالا نهائية.

المنحنى الموجود في شكل ٦-١ يسمح بمرور الترددات من صفر هرتز حتى التردد  $\Omega_c$  الذي يطلق عليه تردد القطع cutoff frequency. إن الاستجابة الترددية تقل تدريجيا ابتداء من القيمة واحد (صفر ديسيبل) حتى تصل إلى النصف (-3db) عند تردد القطع، وعنده تصبح قدرة إشارة الخرج نسبة إلى إشارة دخل المرشح تساوى النصف تماما. هذا المجال (من صفر هرتز حتى  $\Omega_c$ ) يسمى مجال المرور passband. بعض أنواع المرشحات تسمح بتموج منحنى الاستجابة في هذا المدى كما في شكل ٦-١ والبعض لا يسمح بهذا التموج تبعا لطريقة التصميم. المدى الترددي من  $\Omega_c$  حتى  $\Omega_s$  (بداية تردد مجال الوقف stopband) يسمى مجال الانتقال transition band حيث أنه مرحلة متوسطة أو مرحلة انتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف. بالطبع فإن هذا المجال يفضل أن يكون عرضه ( $\Omega_s - \Omega_c$ ) أصغر ما يمكن وفي الحالة المثالية يعتبر عرض هذا المجال صفرا، وهذه الحالة بالطبع لا يمكن الوصول إليها أو تحقيقها. المجال الثالث هو المجال الممتد من التردد  $\Omega_s$  (بداية مجال الوقف) حتى المالا نهائية،

وفيه يتم إخماد إشارة الدخل بدرجة كبيرة يمكن معها اعتبار أن الإشارة وصلت للصفر في الحالة المثالية. بعض أنواع المرشحات يسمح بتموج منحني الاستجابة في هذا المجال كما في شكل ١-٦ والبعض لا يسمح تبعا لطريقة التصميم كما سنرى.



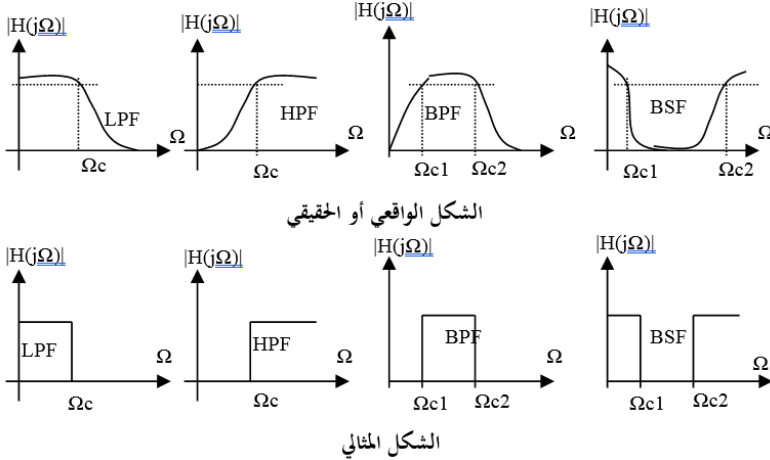
شكل ١-٦ منحنى الاستجابة لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF.

منحنى الاستجابة الموضح في شكل ١-٦ يطلق على نوع من المرشحات يسمى المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة LPF, Low Pass Filter. وتبعا لذلك يمكن تقسيم المرشحات على حسب مجال السماح أو النفاذ إلى الأنواع التالية:

١- المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة Low Pass Filters, LPF، وهي المرشحات التي تسمح للترددات من صفر DC حتى تردد معين (تردد القطع  $\Omega_c$ ) بالنفاذ من خلالها وتوقف جميع الترددات الأخرى.



- ٢- المرشحات المنفذة للترددات المرتفعة High Pass Filters, HPF وهى المرشحات التي تسمح للترددات من تردد معين (تردد القطع  $\Omega_c$ ) حتى مالا نهائية بالنفاذ أو المرور، أما الترددات من صفر حتى تردد القطع فيتم وقفها أو إحباطها.
- ٣- المرشحات المنفذة لمجال ترددي Band Pass Filters, BPF، وهى المرشحات التي تسمح للترددات في مجال معين من  $\Omega_{c1}$  حتى  $\Omega_{c2}$  بالمرور من خلالها وتوقف باقي الترددات من صفر حتى  $\Omega_{c1}$  ومن  $\Omega_{c2}$  حتى مالا نهائية.
- ٤- المرشحات المحبطة لمجال ترددي Band Stop Filters, BSF، هذه المرشحات توقف الترددات في مجال معين من  $\Omega_{c1}$  حتى  $\Omega_{c2}$  أو تحبطها، وتسمح لباقي الترددات من صفر حتى  $\Omega_{c1}$  ومن  $\Omega_{c2}$  حتى مالا نهائية بالمرور من خلالها.



شكل ٦-٢ الشكل الواقعي والشكل المثالي لأنواع الاستجابة الترددية للمرشحات.

كل هذه المرشحات لها تطبيقاتها في الحياة العملية ولا بد من دراستها وأن نكون على دراية بها. سنرى في هذا الفصل أن كل أنواع المرشحات السابقة يمكن استنتاجها من النوع الأول عن طريق تحويل معين. فمثلا يمكننا أن نصمم مرشح ترددات منخفضة، ثم عن طريق

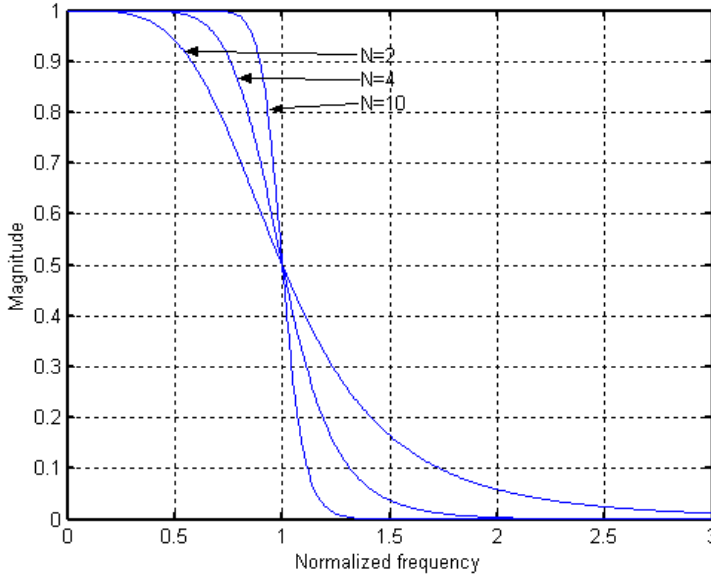
تحويل معين يمكن تحويله إلى مرشح منفذ للترددات العالية أو أي نوع آخر من أنواع المرشحات. شكل ٦-٢ يبين منحنى الاستجابة المثالي والواقعي لكل أنواع المرشحات التي ذكرناها سابقا.

## ٦-٢ مرشح بتورث Butterworth Filter

معادلة الاستجابة للمرشح بتورث من الدرجة n تعطى بالعلاقة التالية:

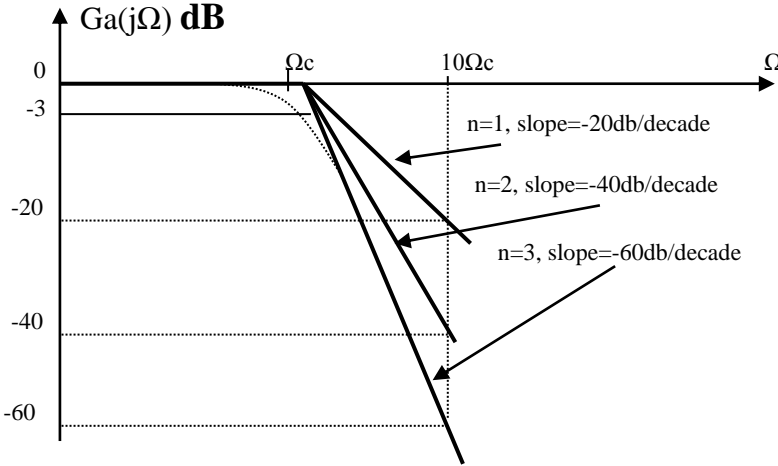
$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}} \quad (٦-١)$$

شكل ٦-٣ يبين منحنى الاستجابة الترددية لهذا المرشح لأكثر من قيمة للدرجة n. في هذا الشكل تم تطبيع المحور الأفقى بقسمته على تردد القطع  $\Omega_c$ . من هذا الشكل يمكن استنتاج أكثر من خاصية لهذا المرشح:



شكل ٦-٣ الاستجابة الترددية لمرشح بتورث Butterworth.

- ١- مربع مقدار الاستجابة  $|Ha(j\Omega)|^2$  يساوى واحد عند التردد  $\Omega=0$  لجميع قيم  $n$ ،  
 $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=0}^2 = 1$  لكل قيم  $n$ .
- ٢- مربع مقدار الاستجابة  $|Ha(j\Omega)|^2$  يساوى نصف عند تردد القطع  $\Omega=\Omega_c$  لجميع قيم  $n$  أيضا. وهذا يعنى الآتي:  $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c}^2 = \frac{1}{2}$  وبالتالي فإن  
 $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 0.707$  والتي يمكن التعبير عنها بالديسبل كما يلي:  
 $20\log|Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = -3.0103dB$
- ٣- المنحنى  $|Ha(j\Omega)|^2$  يقل برتابة أو انتظام  $\text{monotonically decreasing}$  مع زيادة التردد  $\Omega$ .



شكل ٦-٤ استجابة المرشح بتروث بالديسبل لقيم مختلفة لدرجة المرشح  $n$ .

٤- مع زيادة درجة المرشح  $n$  فإن شكل المنحنى  $|Ha(j\Omega)|^2$  يقترب من الشكل المثالي ويمكن ملاحظة ذلك من شكل ٦-٣ حيث عندما  $n=10$  فإن المنحنى يكون أكثر حدية.

٥- هذا المنحنى يطلق عليه أنه في أقصى درجات التسطيح أو الاستواء أو الرتابة maximally flat response عند نقطة الأصل  $\Omega=0$  حيث أن جميع تفاضلات هذا المنحنى عند هذه النقطة موجودة وكلها أصفار. في كل تطبيقات المرشحات يكون في الغالب من المريح جدا أن نعبّر عن منحنى الاستجابة بالديسبل. شكل ٦-٤ يبين منحنى الاستجابة للمرشح بتزورث معبرا عنه بالديسبل، ويمكن استنتاج ذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} Ga(j\Omega) &= 20\log|Ha(j\Omega)| = 10\log|Ha(j\Omega)|^2 \\ &= 10\log\left|\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2n}}\right| = -10\log|1+(\Omega/\Omega_c)^{2n}| \quad (٦-٢) \end{aligned}$$

في المعادلة (٦-٢) عندما تكون  $\Omega$  أقل بكثير من  $\Omega_c$  ( $\Omega \ll \Omega_c$ )، يمكن اعتبار القيمة  $\Omega/\Omega_c=0$ ، وفي هذه الحالة فإن  $Ga(j\Omega)=0$ . أما عندما تكون  $\Omega$  أكبر بكثير من  $\Omega_c$  ( $\Omega \gg \Omega_c$ )، فإن  $Ga(j\Omega)=-20n \log|\Omega/\Omega_c|$  وهذه معادلة خط مستقيم ميله كما في شكل ٦-٤ هو  $-20\text{db/decade}$ . معنى decade هو العقد (أو عشر سنوات) وهي في هذا الموضع تعني عشرة أضعاف، بمعنى مع تضاعف التردد  $\Omega$  عشرة مرات فإن الاستجابة  $Ga(j\Omega)$  تقل بمقدار  $20n$  ديسبل. في شكل ٦-٤ عندما  $\Omega=\Omega_c$  فإن  $Ga(j\Omega)=-3\text{dB}$ ، حاول التعويض في المعادلة (٦-٢) وحساب هذه القيمة.

معادلة النظام system function أو معادلة العبور أو الانتقال transfer function هي منحني الاستجابة الترددية معبرا عنها في المستوى s. كما نعلم فإن  $s=j\Omega$  وبالتعويض بذلك في معادلة بتروث، معادلة (٦-١)، يمكن كتابة معادلة العبور مع اعتبار  $\Omega c=1$  كما يلي:

$$|Ha(s)|^2 = H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^{2n}} \quad (٣-٦)$$

يمكن حساب أقطاب المعادلة (٦-٣) بوضع المقام فيها يساوى صفر كما يلي:

$$\begin{aligned} 1+(s/j)^{2n} &= 0 \\ (s/j)^{2n} &= -1 \\ s^{2n} &= -1(j)^{2n} = -1(j^2)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned} \quad (٤-٦)$$

المعادلة (٦-٤) لها عدد  $2n$  من الأقطاب موزعة حول دائرة نصف قطرها 1 بحيث إذا كانت  $n$  رقم فردي، فإن  $s^{2n} = 1$ ، وهذا يعنى عدد من الأقطاب مقداره  $2n$  موزعة على دائرة الوحدة عند الزوايا:

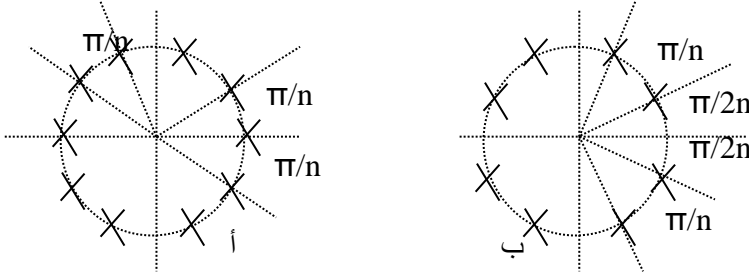
$$2k\pi/2n=k\pi/n, k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

أي أنه سيكون هناك قطب عند  $s=0$  كما في شكل ٦-٥أ.

أما إذا كانت  $n$  رقم زوجي، فإن  $s^{2n} = -1$ ، وهذا يعنى عدد من الأقطاب مقداره  $2n$  موزعة على دائرة الوحدة عند الزوايا:

$$\pi/2n + k\pi/n, k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

وهذا يعنى أنه لن يكون هناك قطب عند  $s=0$  ولكن أول قطب يكون موجودا عند الزاوية  $\pi/2n$  وبعد ذلك توزع الأقطاب على زوايا متساوية  $k\pi/n$  كما في شكل ٦-٥ب.



شكل ٦-٥ توزيع الأقطاب للمرشح بتورث للدرجات الفردية والزوجية  
أ- الدرجات الفردية، ب- الدرجات الزوجية.

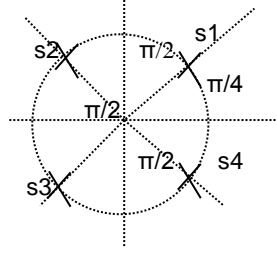
**مثال ٦-١:** احسب معادلة الانتقال أو العبور لمرشح بتورث من الدرجة الأولى، وآخر من الدرجة الثانية. أولاً، عندما  $n=1$  فإن معادلة الاستجابة الترددية (٦-٣) يمكن كتابتها كالتالي:

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^2} = \frac{1}{1+s} \frac{1}{1-s}$$

والتي تمثل قطب عند الزاوية صفر، وآخر عند الزاوية  $\pi$  وكل منهما مقداره واحد. ثانياً، بوضع  $n=2$  في المعادلة (٦-٣) يمكن كتابة الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^4} = \frac{1}{(1+s1)(1+s4)(1-s2)(1-s3)}$$

والتي تمثل ٤ أقطاب توزع على دائرة الوحدة بحيث يكون أول قطب عند الزاوية  $\pi/4$  وستوزع باقي الأقطاب على زوايا  $\pi/2$  بين كل منها كما في شكل ٦-٦. باعتبار الأقطاب الموجودة في النصف الأيسر من المستوى  $S$  فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:



شكل ٦-٦ توزيع الأقطاب للمرشح بتزوت من الدرجة الثانية.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{(s - s_2)(s - s_3)} \\
 &= \frac{1}{\{s - (-0.707 - 0.707j)\}\{s - (-0.707 + 0.707j)\}} \\
 &= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}
 \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة معادلات العبور للدرجات المختلفة لهذا النوع من المرشحات. المعادلة (٥-٦) التالية تبين الصورة العامة لهذه المعادلة، وجدول ٦-١ يبين معاملات معادلة المقام  $B(s)$  لهذه المعادلة.

$$H(s) = \frac{1}{B(s)} = \frac{1}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (٥-٦)$$

تحتوى الكثير من المراجع على جداول ممتدة لدرجات أعلى من الدرجة الثامنة الموضحة في جدول ٦-١ وإن كانت مثل هذه الجداول لا تمثل أهمية في هذه الأيام وفي عصر الحاسبات حيث أنه يمكن إدخال درجة المرشح لبرنامج MATLAB وهو يرد عليك فوراً بكل هذه المعاملات، بل ويرسم لك المستوى  $s$  للمرشح موضحاً عليه مكان الأصفار والأقطاب لهذه المعادلة وهذا ما سنراه بعد قليل. هناك أيضاً جداول تضع معادلة المرشح في الصورة التحليلية التي تبين أقطاب المعادلة كما يلي:

جدول ٦ - ١ معاملات معادلة المقام للمرشح بتزورث.

$B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0$									
b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0	n
							1	1	1
						1	$\sqrt{2}$	1	2
					1	2	2	1	3
				1	2.613	3.414	2.613	1	4
			1	3.236	5.236	5.236	3.236	1	5
		1	3.864	7.464	9.141	7.464	3.864	1	6
	1	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494	1	7
1	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126	1	8

$$B(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n) \quad (٦-٦)$$

في كل المعادلات السابقة تم افتراض تردد القطع  $\Omega_c$  cut off frequency، كما في المعادلة على أنها تساوى ١، أي  $\Omega_c = 1 \text{ rad/sec}$ ، وهذا بالطبع كان لتبسيط المعادلات حيث وصلنا للصورة القياسية لمعادلة العبور  $H(s)$  لهذا النوع من المرشحات كما في المعادلتين (٦-٦) و (٥-٦). هذا المرشح يسمى المرشح الأولي prototype أو المرشح النموذج. يمكن الحصول على معادلة العبور  $H(s)$  للمرشح عند أي تردد قطع مختلف عن الوحدة بوضع  $s = s/\Omega_0$  حيث  $\Omega_0$  تمثل تردد القطع الجديد المختلف عن الواحد. على ذلك يمكن كتابة معادلة العبور الجديدة كما يلي:

$$H_x(s) = H(s) \Big|_{s=s/\Omega_0} = H(s/\Omega_0)$$

ومنها يمكن كتابة الاستجابة الترددية الجديدة لهذا المرشح كما يلي:

$$|H_x(j\Omega)| = |H(j\Omega/\Omega_0)| \quad (٧-٦)$$



لاحظ أنه بوضع  $\Omega = \Omega_0$  نحصل على  $H(j1)$  وهي معادلة الاستجابة الترددية للمرشح الأولى، عند  $\Omega = 1$ . لاحظ أن هذه العملية (نقل تردد القطع من 1rad/sec إلى  $\Omega_0$  تمثل تعديلا في قيم المحور  $\Omega$  حيث يتم سحبه أو ضغطه على حسب قيمة التردد  $\Omega_0$ ).

بنفس الطريقة يمكن باستخدام تحويلات بسيطة تحويل معادلة العبور لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF إلى أي صورة أخرى من المرشحات كما يلي:

١- بوضع  $s = \Omega_0/s$  في معادلة مرشح الترددات المنخفضة نحصل على مرشح منفذ للترددات المرتفعة. كمثال على ذلك افترض مرشح الدرجة الأولى  $H(s) = 1/(1+s)$  حيث بوضع  $s = \Omega_0/s$ ، ثم وضع  $s = z\Omega$  نحصل على الاستجابة الترددية لهذا المرشح كالتالي:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_0/\Omega)^2} \quad (٨-٦)$$

وهذه كما نرى تمثل استجابة مرشح منفذ للترددات المرتفعة.  $\Omega_0$  في المعادلة السابقة تمثل تردد القطع cutoff frequency.

٢- التعويض التالي يحول من مرشح منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ لمجال ترددي BPF:

$$s = \frac{s^2 + \Omega_L \Omega_H}{s(\Omega_H - \Omega_L)} \quad (٩-٦)$$

حاول استخدام هذا التحويل لمرشح LPF لترى إذا كان ذلك سيعطى مرشح BPF أم لا.  $\Omega_L$  تمثل تردد القطع الأسفل Lower cutoff frequency، و  $\Omega_H$  تمثل تردد القطع الأعلى Higher cutoff frequency كما في شكل ٦-٧.

٣- التعويض التالي يحول من مرشح منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح موقف لمجال ترددي BSF:

$$s = \frac{s(\Omega_H - \Omega_L)}{s^2 + \Omega_L \Omega_H} \quad (10-6)$$

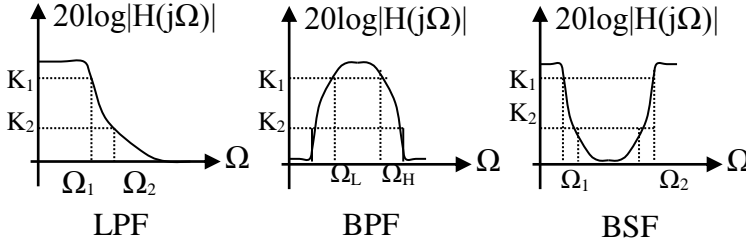
حاول استخدام هذا التحويل لمرشح LPF لترى إذا كان ذلك سيعطى مرشح BSF أم لا.  $\Omega_L$  تمثل تردد القطع الأسفل Lower cutoff frequency، و  $\Omega_H$  تمثل تردد القطع الأعلى Higher cutoff frequency كما في شكل 6-7.

### 6-2-1 تصميم مرشح بتورث منفذ للترددات المنخفضة LPF

في العادة يتم إعطاء متطلبات المرشح في صورة مجموعة من الترددات الحرجة من وجهة نظر المستخدم مثل الاستجابة  $K_1$  و  $K_2$  عند الترددات  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  كما في شكل 6-7. هذه الاستجابات والترددات يمكن وضعها في صورة معادلات كما يلي:

$$0 \geq 20 \log |H(j\Omega)| \geq K_1 \quad \Omega \leq \Omega_1 \quad (11-6)$$

$$20 \log |H(j\Omega)| \leq K_2 \quad \Omega \geq \Omega_2 \quad (12-6)$$



شكل 6-7 الاستجابة الترددية للأنواع المختلفة من المرشحات.

بالتعويض من المعادلتين (6-11 و 6-12) في معادلة المرشح بتورث وهي المعادلة (6-1) نحصل على ما يلي:

$$10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_1/\Omega_c)^{2n}}\right] = K_1 \quad (١٣-٦)$$

$$10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_2/\Omega_c)^{2n}}\right] = K_2 \quad (١٤-٦)$$

يمكن حل المعادلتين (١٣-٦ و ١٤-٦) لإيجاد قيمة n التي تحقق مواصفات المرشحات المعطاة في المعادلتين (١١-٦ و ١٢-٦) كما يلي:

$$n = \frac{\log_{10}\left[(10^{-k_1/10} - 1)/(10^{-k_2/10} - 1)\right]}{2\log_{10}(\Omega_2/\Omega_1)} \quad (١٥-٦)$$

حيث إذا جاءت n رقما صحيحا فهي تمثل درجة المرشح كما هي، أما إذا جاءت n رقما صحيحا وكسر فإنها تقرب لأقرب رقم أعلى من هذه القيمة الصحيحة.

**مثال ٦-٢:** مطلوب تصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة يعطى استجابة مقدارها -

2dB أو أفضل عند التردد 20rad/sec، واستجابته هي -10dB عند التردد 30rad/sec.

في هذه المثال  $\Omega_1=20\text{rad/sec}$  و  $K_1=-2$ ،  $\Omega_2=30\text{rad/sec}$  و  $K_2=-10$ . بالتعويض في المعادلة

(١٥-٦) نحصل على درجة المرشح  $n=3.3709$  وعلى ذلك سنأخذ  $n=4$ . يمكن حساب

قيمة تردد القطع  $\Omega_c$  بالتعويض في المعادلة (١٣-٦) نحصل على  $\Omega_c=21.3868$ . من

جدول ٦-١ يمكن كتابة معادلة العبور الأولية (حيث  $\Omega_c=1$ ) لهذا المرشح كما يلي:

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

ومنها يمكن كتابة معادلة العبور الحقيقية للمرشح باستخدام التعويض  $s = s/\Omega_c$  حيث  $\Omega_c = 21.3868$  نحصل على ما يلي:

$$H(s) = \frac{0.209210 \times 10^6}{s^4 + 55.88370s^3 + 1561.5472s^2 + 25560.94s + 0.209210 \times 10^6}$$

### ٦-٣ مرشحات شيبشيف Chebyshev Filters

هناك نوعان من هذه المرشحات، النوع الأول ويطلق عليه Type 1 يسمح بوجود تموجات في مجال مرور الإشارة فقط، بينما النوع الثاني Type 2 فيسمح بوجود التموجات في مجال وقف الإشارة فقط. معادلة النوع الأول من هذه المرشحات تعطى بالعلاقة التالية:

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (٦-١٦)$$

حيث الكمية  $T_n(\Omega)$  كثيرة حدود شيبشيف Chebyshev polynomial ويمكن حسابها من المعادلة الدوارة recursive التالية:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n > 2$$

حيث  $T_0(x) = 1$  و  $T_1(x) = x$ . شكل ٦-٨ يبين رسماً توضيحياً للاستجابة الترددية لهذا النوع من المرشحات. من هذا الشكل يمكن أن ندون الملاحظات التالية:

١- الاستجابة الترددية في مجال مرور الإشارة تتموج بين القيمة 1 والقيمة  $\frac{1}{1 + \varepsilon^2}$  وذلك مع تغير التردد  $\Omega$  من صفر حتى تردد القطع cutoff frequency أو نهاية مجال المرور.

٢- مقدار هذه التموجات ثابت في كل مجال مرور الإشارة ولكن الزمن الدوري لهذه التموجات غير ثابت أو متغير.

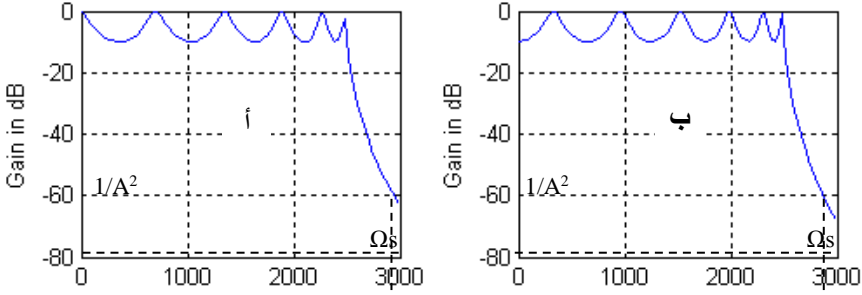
٣- مقدار الاستجابة يقل تدريجياً monotonically حتى يصل إلى الصفر عندما تصل  $\Omega$  إلى مالا نهاية.

٤- مقدار الاستجابة يساوى واحد (صفر db) عندما  $\Omega=0$  إذا كانت درجة المرشح n فردية كما في شكل ٦-٨، بينما يكون مقدار الاستجابة يساوى

$$20 \log \left( \frac{1}{A^2} \right)$$

إذا كانت درجة المرشح n زوجية كما في شكل ٦-٨ ب.

٥- مقدار الاستجابة الترددية عند بداية مجال توقف الإشارة ( $\Omega=\Omega_s$ ) يساوى الكمية  $(1/A^2)$ .



شكل ٦-٨ الاستجابة الترددية لمرشح شيبشيف من النوع الأول.

أ- درجة المرشح فردية ب- درجة المرشح زوجية

من المعادلة (٦-١٦) نلاحظ أنه يلزم تحديد ثابتين أساسيين لكي يتم تصميم مرشح من هذا النوع. هذين الثابتين هما  $\epsilon$  التي يمكن حسابها بمعرفة مقدار التموجات المسموح بها في مجال مرور الإشارة والتي تساوى  $\frac{1}{1+\epsilon^2}$  كما ذكرنا. الثابت الثاني هو n درجة المرشح التي يمكن تحديدها من المعادلات التالية:

$$n = \frac{\log_{10} \left( g + \sqrt{g^2 - 1} \right)}{\log_{10} \left( \Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1} \right)} \quad (١٧-٦)$$

$$g = \sqrt{\frac{(A^2 - 1)}{\epsilon^2}}$$

$$A=1/|H_a(j\Omega_s)|$$

حيث  $\Omega_s$  هي تردد بداية مجال وقف الإشارة.

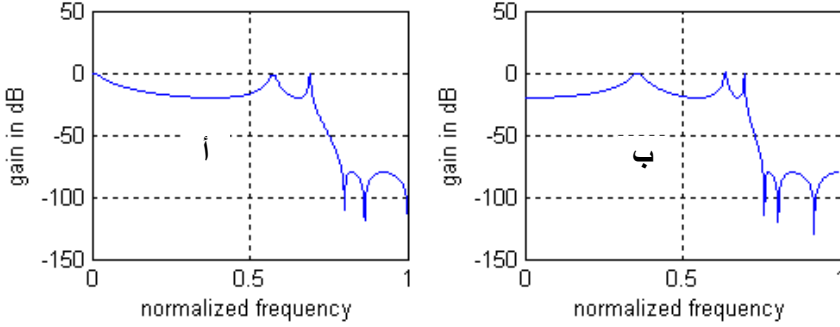
## ٦-٤ مرشحات القطع الناقص Elliptic Filters

تتميز مرشحات شيبشيف عن مرشحات بتورث بأنه لنفس درجة المرشح فإن مرشحات شيبشيف يكون نطاق الانتقال transition band فيها أقل أو أسرع أو أكثر حدية منه في مرشحات بتورث. ولقد رأينا أن مرشحات شيبشيف يسمح بالتموجات في مجال المرور فقط ، بينما النوع الثاني يسمح بالتموجات في مجال الوقف فقط. فهل إذا سمحنا بالتموجات في المجالين (المرور والوقف) سيكون نطاق الانتقال أسرع أو أكثر حدية من النوعين السابقين؟ الإجابة هي نعم، وهو ما حدث في مرشحات القطع الناقص elliptic filters.

الاستجابة الترددية لهذه المرشحات تعطى بالمعادلة التالية:

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\Omega)} \quad (٦-١٨)$$

حيث  $R_n$  تمثل معادلة شيبشيف وهى دالة في  $\Omega$ . شكل ٦-٩ يبين منحنى الاستجابة الترددية لهذا النوع من المرشحات حيث من هذا الشكل يمكن أن نلاحظ ما يلي:



شكل ٦-٩ الاستجابة الترددية لمرشح القطع الناقص.

أ- درجة فردية ب- درجة زوجية

- ١- وجود التموجات في مجالي المرور والوقف.
  - ٢- مقدار التموجات في مجال المرور هو  $\frac{1}{1+\epsilon^2}$ .
  - ٣- قيمة الاستجابة هي 1 (صفر db) عندما  $\Omega=0$  إذا كانت درجة المرشح n فردية، وتكون قيمة الاستجابة  $\frac{1}{1+\epsilon^2}$  أو  $(20\log \frac{1}{1+\epsilon^2})$  ديسبل عندما  $\Omega=0$  إذا كانت درجة المرشح n زوجية.
  - ٤- قيمة هذه الاستجابة هي  $(1/A^2)$  أو ما يعادلها بالديسبل عند بداية مجال الوقف،  $(\Omega=\Omega_s)$ .
  - ٥- يقل المنحنى تدريجياً monotonically خلال مجال الانتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف.
- بوضع  $s=j\Omega$  في المعادلة (٦-١٨) يمكن كتابة معادلة العبور كدالة في المتغير S كما يلي:

$$Ha(s) = \frac{K}{(s+s_0)} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \quad \text{n فردية} \quad (١٩-٦)$$

$$Ha(s) = K \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \quad \text{n زوجية} \quad (٢٠-٦)$$

العوامل المهمة في تحديد درجة المرشح هي  $R_1$  التي تمثل مقدار التموجات في مجال العبور، و  $R_2$  التي تمثل مقدار التموجات في مجال الوقف، وكذلك الكمية  $1/A^2$  التي تمثل مقدار الاستجابة عند بداية مجال الوقف ( $\Omega=\Omega_s$ ).

بعد الحصول على معادلة العبور لأي واحد من المرشحات السابقة فإنه يمكن بسهولة ترجمة هذه المعاملات إلى قيم مقاومات ومكثفات يمكن استخدامها في عملية بناء هذه المرشحات كدوائر الكترونية. من العوامل المهمة في تحديد خواص المرشح الكمية  $\Omega_2/\Omega_1$  والتي تمثل النسبة بين تردد الوقف وتردد القطع cutoff frequency. هذه النسبة تعكس عرض مجال الانتقال، فكلما كبرت هذه النسبة عن الواحد كلما كان مجال الانتقال أعرض والعكس.

نكتفي بهذا القدر عن المرشحات الانسيابية لندخل بعد ذلك في استخدام برنامج ماتلاب MATLAB في تصميم هذه المرشحات، حيث في وجود الماتلاب تكون عملية تصميم المرشح من أى نوع وأى درجة مسألة سهلة جدا مع عرض كل استجابات المرشح.

## ٦-٥ استخدام ماتلاب MATLAB في تصميم المرشحات الانسيابية

يحتوى برنامج الماتلاب على صندوق أدوات toolbox خاص بمعالجة الإشارات الانسيابية والرقمية وهذا الصندوق يحتوى العديد من الدوال التي يمكن استخدامها في تصميم كل أنواع المرشحات السابقة. من هذه الدوال مايلي للمرشحات البترورث:

### الدالة $[b,a]=butter(n,wn,'s')$

هذه الدالة تصمم مرشح تناظري من النوع بترورث من الدرجة n بتردد قطع مقداره wn rad/sec . و 's' تعنى أننا نعمل في النطاق S أو s domain أو بمعنى آخر نتعامل مع مرشح



تناظرى أو تماثلى . الدالة تعطى معاملات المرشح في صورة متجه صف  $b$  يمثل البسط ومتجه صف  $a$  يمثل المقام لدالة العبور transfer function وطول كل من المتجهين هو  $n+1$  من العناصر ، وكل من المتجهين  $b$  و  $a$  تعطى بترتيب تنازلى لقوى المتغير  $s$  كما في دالة العبور للمرشح التي يمكن كتابتها كما يلي :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n+1)}{s^n + a(2)s^{n-1} + \dots + a(n+1)} \quad (٢١-٦)$$

تردد القطع cutoff frequency يجب أن يكون أكبر من الصفر. إذا كانت  $w_n$  متجه من عنصرين  $w_1$  و  $w_2$  وكانت  $w_1 < w_2$  فإن الدالة  $\text{butter}(n, w_n, 's')$  تعطى معاملات مرشح من الدرجة  $2*n$  منفذ لمجال من الترددات bandpass filter حيث مجال العبور له سيكون

.  $w_1 < w < w_2$

### الدالة $[b,a]=\text{butter}(n,w_n,'ftype','s')$

حيث 'ftype' هنا عبارة عن كلمة أو نص يبين نوع المرشح المطلوب تصميمه مثل highpass أو lowpass أو bandpass أو bandstop .

### الدوال $[z, p, k]=\text{butter}(n,w_n,'ftype','s')$ و $[z, p, k]=\text{butter}(n,w_n,'s')$

هى نفس الدوال السابقة سوى أنها تعطى معاملات المرشح المطلوب تنفيذه في صورة أصفار  $z$  وأقطاب  $p$  ومعامل تكبير  $k$  لدالة العبور .

### الدالة $[n,w_n]=\text{buttord}(w_p,w_s,R_p,R_s,'s')$

هذه الدالة تعطى أقل درجة  $n$  للمرشح من النوع بتزورث ، كما تعطى تردد القطع لهذا المرشح  $w_n$  ، معاملات هذه الدالة هى تردد حافة مجال العبور  $w_p$  وتردد حافة مجال الوقف  $w_s$  والاضمحلال عند حافة مجال العبور  $R_p$  والاضمحلال عند حافة مجال الوقف  $R_s$ .

نفس الدوال السابقة يمكن تكرارها لباقي أنواع المرشحات، للمرشحات شيبشيف ١ يمكن كتابة الدوال التالية:

$$[b,a]=\text{cheby1}(n,wn,'s')$$

$$[b,a]=\text{cheby1}(n,wn,'ftype','s')$$

$$[z,p,k]=\text{cheby1}(n,wn,'ftype','s') \text{ و } [z,p,k]=\text{cheby1}(n,wn,'s')$$

$$[n,wn]=\text{cheby1ord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$$

للمرشحات شيبشيف ٢ يمكن كتابة الدوال التالية :

$$[b,a]=\text{cheby2}(n,wn,'s')$$

$$[b,a]=\text{cheby2}(n,wn,'ftype','s')$$

$$[z,p,k]=\text{cheby2}(n,wn,'ftype','s') \text{ و } [z,p,k]=\text{cheby2}(n,wn,'s')$$

$$[n,wn]=\text{cheby2ord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$$

لمرشحات القطع الناقص يمكن كتابة الدوال التالية :

$$[b,a]=\text{ellip}(n,wn,'s')$$

$$[b,a]=\text{ellip}(n,wn,'ftype','s')$$

$$[z,p,k]=\text{ellip}(n,wn,'ftype','s') \text{ و } [z,p,k]=\text{ellip}(n,wn,'s')$$

$$[n,wn]=\text{ellipord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$$

**مثال ٦-٣:** في مثال ٦-٢ كان المطلوب هو تصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة يعطي استجابة مقدارها -2dB أو أحسن عند التردد 20rad/sec ، وأيض استجابة مقدارها -10dB عند التردد 30rad/sec باستخدام برنامج ماتلاب وبالتعويض في الدالة:

$$[n,wn]=\text{buttord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$$

```
[n,Wn] = buttord(20,30,-2,-10,'s')
```

```
n =
```

```
4
```

```
Wn =
```

```
22.7951
```

الكتابة الزرقاء هي استجابة ماتلاب. على ذلك فإن درجة المرشح ستكون ٤ وهي نفس الدرجة التي حصلنا عليها في المثال ٦-٢ وأما تردد القطع فهو 22.7951 rad/sec وإن اختلف قليلا عن ما في المثال ٦-٢. الآن يمكن استخدام الدالة:

**الدالة [b,a]=butter(n,wn,'s')**

لكتابة دالة العبور transfer function لهذا المرشح كما يلي :

```
[b,a]=butter(4,22.7951,'s')
```

```
b =
```

```
1.0e+005 *
```

```
0 0 0 0 2.7000
```

```
a =
```

```
1.0e+005 *
```

```
0.0000 0.0006 0.0177 0.3095 2.7000
```

حيث يمكن كتابة دالة العبور كما يلي :

$$H(s) = \frac{2.7}{s^4 + 0.0006s^3 + 0.0177s^2 + 0.3095s + 2.7}$$

يمكن أيضا استخدام الدالة

**[z, p, k]=butter(n,wn,'s')**

للحصول على دالة العبور في صورة أصفار وأقطاب كما يلي :

$[z, p, k]=\text{butter}(4,22.7951,'s')$

$z =$

Empty matrix: 0-by-1

$p =$

-21.0599 + 8.7233i

-21.0599 - 8.7233i

-8.7233 + 21.0599i

-8.7233 - 21.0599i

$k =$

2.7000e+005

بذلك يمكن كتابة دالة العبور كما يلي :

$$H(s) = \frac{2.7 \times 10^5}{(s+21.06-j8.72)(s+21.06+j8.72)(s+8.72-j21.06)(s+8.72+j21.06)}$$

وبنفس الطريقة يمكن استخدام باقى الدوال فى الماتلاب لتصميم أى نوع من المرشحات.

## ٦-٦ تمارين

١. وضح أن دالة العبور التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF:

$$H1(s) = \frac{a}{s+a} \quad a > 0$$

حدد تردد القطع  $\Omega_c$  الذى عنده ينخفض الكسب عنده بمقدار ٣ ديسبل عن أكبر كسب

عند  $\Omega=0$ .

٢. وضح أن دالة العبور التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفذ للترددات العالية HPF :

$$H2(s) = \frac{s}{s+a} \quad a > 0$$

حدد تردد القطع  $\Omega_c$  الذى عنده ينخفض الكسب عنده بمقدار ٣ ديسبل عن أكبر كسب

عند  $\Omega=\infty$ .

٣. وضح أن دالة العبور التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفذ للترددات المتوسطة BPF:

$$H1(s) = \frac{bs}{s^2 + bs + \Omega_0^2} \quad b > 0$$

حدد ترددى القطع  $\Omega_{c1}, \Omega_{c2}$  الذين عندهما ينخفض الكسب بمقدار ٣ ديسبل عن أكبر كسب عند  $\Omega_0$ . وضح أيضا أن  $\Omega_{c1} \Omega_{c2} = \Omega_0^2$  وأن  $b = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$  حيث  $b$  عرض المجال للمرشح bandwidth.

٤. وضح أن دالة العبور التالية تمثل مقدار استجابة مرشح محبط للترددات المتوسطة BSF:

$$H1(s) = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + bs + \Omega_0^2} \quad b > 0$$

حدد ترددى القطع  $\Omega_{c1}, \Omega_{c2}$  الذين عندهما ينخفض الكسب بمقدار ٣ ديسبل عن أكبر كسب عند  $\Omega = 0, \Omega = \infty$ . وضح أيضا أن  $\Omega_{c1} \Omega_{c2} = \Omega_0^2$  وأن  $b = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$  حيث  $b$  عرض المجال للمرشح bandwidth.

٥. وضح أن أول  $2N-1$  من التفاضلات لمعادلة مقدار الاستجابة  $|H(j\Omega)|^2$  للمرشح من النوع بتورث من الدرجة  $N$  تساوى صفر عند التردد  $\Omega = 0$ .

٦. حدد أقل درجة مرشح بتورث له تردد قطع عند  $2.1\text{kHz}$  والكسب عند هذا التردد يساوى  $0.5\text{dB}$  وأقل اضمحلال له مقداره  $30\text{dB}$  عند التردد  $8\text{kHz}$ . ثم أوجد دالة العبور للمرشح مرة في صورة كثيرة حدود في البسط والمقام ومرة في صورة أصفار وأقطاب. استخدم ماتلاب.

٧. أعد التمرين السابق مرشح من النوع تشبيبيشيف.

# الفصل السابع

## تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية

### Design of Infinite Impulse Response IIR Digital Filters

#### ٧-١ مقدمة

لقد عرضنا في الفصل السابق شرحا سريعا للمرشحات التناظرية analog filters وذكرنا أن ذلك كان خطوة ضرورية لسببين، السبب الأول: أن هناك بعض المواقف أو التطبيقات لا بد فيها من استخدام المرشحات الانسيابية مثل مرشحات تحديد التردد التي توضع في بداية أي نظام رقمي وقبل التحويل التماثلي الرقمي A/D ويسمى هذا المرشح بالمرشح المضاد للتزوير الترددي antialiasing filter. التطبيق الثاني الذي لا بد فيه من استخدام المرشحات التناظرية هو في نهاية أي نظام رقمي لتنعيم الإشارة التناظرية قبل الاستفادة منها كإشارة تناظرية. السبب الثاني: هو أن بعض طرق تصميم المرشحات الرقمية تعتمد على تصميم المرشح التناظري أولا ثم تحويل هذا المرشح التناظري إلى مرشح رقمي، وهذا ما سنراه في هذا الفصل.

المقصود من تصميم المرشح الرقمي أيا كان نوعه هو الحصول على دالة العبور transfer function لهذا المرشح  $H(Z)$  التي تعطى أقرب استجابة ترددية  $H(w)$  للمواصفات المطلوبة من هذا المرشح. إذا كان المرشح الذي سيتم تصميمه من النوع غير محدد الاستجابة الصدمية IIR، فمن الضروري التأكد من أن هذا المرشح مستقر stable فتكون جميع أقطابه (أقطاب الدالة  $H(Z)$ ) تقع داخل دائرة الوحدة. بعد الحصول على دالة العبور  $H(Z)$

(تصميمه) تكون الخطوة التالية هي بناء هذا المرشح implementation بأحد أشكال البناء المعروفة التي سندرسها في فصل قادم.

عودة إلى تحويل فوريير للإشارات المتقطعة DTFT حيث أمكن كتابة المعادلتين التاليتين:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (١-٧)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (٢-٧)$$

حيث المعادلة (٢ - ٧) قد عبرت عن الإشارة  $x[n]$  كمجموع تكاملي من الإشارات الجيبية  $e^{j\omega n}$  مقدار كل منها  $X(e^{j\omega})$ . وعلى ذلك فإنه يمكن تصميم نظام (رقمي) تكون له خاصية الاختيار الترددي frequency selection بحيث يسمح بمرور بعض هذه الترددات ويحبط أو يمنع الترددات الأخرى، وهذا بالضبط هو ما نسميه بالمرشح filter وهذه هي وظيفته. أي أن المرشح عبارة عن نظام (رقمي أو تماثلي) مهمته هي السماح بمرور بعض الترددات المرغوب فيها وإحباط الترددات الأخرى الغير مرغوب فيها مثل الضوضاء noise كما في شكل ١-٧.



شكل ١-٧ وظيفة المرشح هي التخلص من الضوضاء.

عودة إلى الاستجابة الترددية للأنظمة الرقمية حيث قد رأينا سابقا أن خرج أي نظام رقمي يمكن التعبير عنه كدالة في تتابع من الإشارات الجيبية كما يلي:

$$y[n] = H(e^{jw})e^{jwn} \quad (٣-٧)$$

حيث الكمية  $H(e^{jw})$  تسمى الاستجابة الترددية للنظام، وهى عبارة عن تحويل فورير لاستجابة عينة الوحدة unit sample response التي يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jwn} \quad (٤-٧)$$

حيث  $h[n]$  هي استجابة الصدمة أو استجابة وحدة العينة كما ذكرنا. الكمية  $H(e^{jw})$  تسمى الاستجابة الترددية للنظام كما ذكرنا وهى تعبر عن استجابة النظام لإشارات الدخل عند الترددات المختلفة وهى كمية مركبة يمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة كما يلي:

$$H(e^{jw}) = Hr(e^{jw}) + jHi(e^{jw}) \quad (٥-٧)$$

حيث  $Hr(e^{jw})$  هي المركبة الحقيقية real component و  $Hi(e^{jw})$  هي المركبة التخيلية imaginary component للاستجابة  $H(e^{jw})$ . يمكن أيضا التعبير عن هذه الاستجابة كمقدار وزاوية كما يلي:

$$H(e^{jw}) = |H(e^{jw})|e^{j\theta(w)} \quad (٦-٧)$$

حيث  $\theta(w)$  هي الزاوية و  $|H(e^{jw})|$  هي مقدار الاستجابة الترددية. يمكن التعبير عن الاستجابة الترددية بالديسبل كما يلي:



$$G(w) = 20 \log_{10} |H(e^{jw})| \quad (7-7)$$

تذكر أن مقدار الاستجابة الترددية تكون دائما دالة زوجية even في المتغير  $w$ ، أي أن:

$$|H(e^{jw})| = |H(e^{-jw})| \quad (8-7)$$

بينما الزاوية تكون دائما دالة فردية في المتغير  $w$ ، أي أن:

$$\theta(w) = -\theta(-w) \quad (9-7)$$

استجابة (خرج) المرشح لأي إشارة دخل جيبيية تكون إشارة جيبيية أيضا لها نفس التردد وأما مقدارها فيكون مضروبا في مقدار الاستجابة الترددية للمرشح عند هذا التردد. في العادة يتم ذكر أو تحديد الاستجابة الترددية للمرشح المثالي كما يلي:

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} 1 & \text{for } |w| \leq w_c \\ 0 & \text{for } w_c \leq |w| \leq \pi \end{cases} \quad (10-7)$$

حيث  $w_c$  هي تردد القطع التي عندها يتوقف المرشح عن السماح بمرور الإشارة ومن بعدها يبدأ في قطع أو إحباط الإشارات التي ترددها أعلى من  $w_c$ . على فرض أن إشارة الدخل لمرشح تعطى بالعلاقة التالية:

$$x[n] = A \cos(w_1 n) + B \cos(w_2 n), \quad 0 < w_1 < w_c < w_2 < \pi \quad (11-7)$$

فإن خرج المرشح في هذه الحالة يعطى بالمعادلة التالية:

$$y[n] = A|H(e^{jw_1})| \cos(w_1n + \theta(w_1)) + B|H(e^{jw_2})| \cos(w_2n + \theta(w_2)) \quad (١٢-٧)$$

وحيث  $w_2 > w_c$  فإن استجابة المرشح لهذا التردد ستكون صفرا، وعلى ذلك سيكون خرج المرشح كالتالي:

$$y[n] = A|H(e^{jw_1})| \cos(w_1n + \theta(w_1)) \quad (١٣-٧)$$

المثال التالي عبارة عن مثال تقديمي لطرق تصميم المرشحات الرقمية نفهم منه فقط ما هو المقصود بالاستجابة الترددية. المطلوب في هذا المثال هو تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات العالية بحيث يسمح للتردد  $0.4\text{rad/sec}$  بالنفاذ أو المرور بينما يحبط أو يوقف أو يمنع التردد  $0.1\text{rad/sec}$ . سنفترض أن استجابة الصدمة لهذا المرشح تعطى بالعلاقة التالية:

$$h[n] = [a \ b \ a] \quad (١٤-٧)$$

حيث كل من  $a$  و  $b$  مجهولان ومطلوب حساب قيمة كل منهما لأنه بتحديد هذين المعاملين يكون قد تم تحديد المرشح. أما لماذا فرضنا استجابة الاندفاع لهذا المرشح بهذا الشكل فإنه سيأتي تفصيل ذلك فيما بعد عند الحديث عن المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية محددة الطول Finite Impulse Response, FIR. خرج هذا المرشح هو المجموع الالتفافي للدخل  $x[n]$  واستجابة الصدمة  $h[n]$  وعلى ذلك يمكن كتابة الخرج كالتالي:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (١٥-٧)$$

والتي يمكن كتابتها كالتالي:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] \\ &= ax[n] + bx[n-1] + ax[n-2] \end{aligned} \quad (١٦-٧)$$

تحويل فوريير لاستجابة الصدمة  $h[n]$  يمكن كتابته كما يلي:

$$H(e^{jw}) = h[0] + h[1]e^{-jw} + h[2]e^{-j2w}$$

بالتعويض بالقيم  $h[0]=h[2]=a$  و  $h[1]=b$  فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها كالتالي:

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= a(1 + e^{-j2w}) + be^{-jw} \\ &= 2a \left( \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} \right) e^{-jw} + be^{-jw} \\ &= (2a \cos(w) + b)e^{-jw} \end{aligned} \quad (١٧-٧)$$

ومنها يمكن كتابة مقدار وزاوية الاستجابة الترددية كما يلي:

$$\begin{aligned} |H(e^{jw})| &= 2a \cos(w) + b \\ \theta(w) &= -w \end{aligned} \quad (١٨-٧)$$

بالتعويض  $|H(e^{jw})| = 0$  عندما  $w=0.1$  و  $|H(e^{jw})| = 1$  عندما  $w=0.4$  نحصل على معادلتين في المجهولين  $a$  و  $b$  كما يلي:

$$|H(e^{j0.1})| = 2a \cos(0.1) + b = 0 \quad (١٩-٧)$$

$$|H(e^{j0.4})| = 2a \cos(0.4) + b = 0 \quad (٢٠-٧)$$

بحل المعادلتين (١٩-٧ و ٢٠-٧) نحصل على قيمة كل من المجهولين  $a$  و  $b$  كما يلي:

$$\begin{aligned} a &= -6.76195 \\ b &= 13.456335 \end{aligned}$$

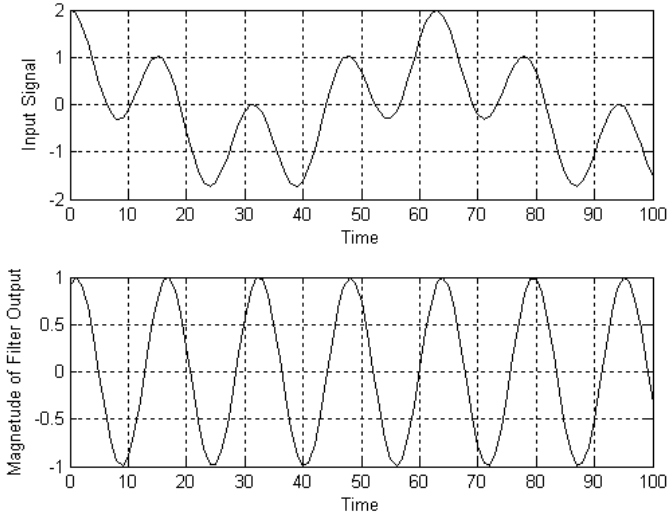
وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة خرج المرشح كما يلي:

$$y[n] = -6.76195(x[n] + x[n-2]) + 13.456335x[n-1] \quad (٢١-٧)$$

الآن بوضع إشارة الدخل كإشارة مركبة من الترددين  $0.1\text{rad/sec}$  و  $0.4\text{rad/sec}$  كما يلي في المعادلة (٧-٢٢) فماذا ستكون إشارة الخرج ؟

$$x[n]=\{\cos(0.1n)+\cos(0.4n)\}u(n) \quad (٧-٢٢)$$

بالتعويض عن قيم  $x[n]$  من المعادلة (٧-٢٢) في المعادلة (٧-٢١) عند قيم  $n$  المختلفة يمكن رسم خرج المرشح كما في شكل ٧-٢ الذي يوضح أيضا شكل إشارة الدخل للمقارنة بها حيث نلاحظ أن الخرج يتبع تماما التردد الأعلى  $0.4\text{rad/sec}$ .



شكل ٧-٢ خرج المرشح في المعادلة (٧-٢١).

الترشيح الرقمي للإشارات يستخدم في الكثير من التطبيقات والتي منها على سبيل المثال لا الحصر، المعالجة الرقمية للكلام والصور، والاتصالات بكل أنواعها وطرقها، والتطبيقات الطبية وبالذات التصوير بالموجات فوق الصوتية وغيرها، والرادار، والتنقيب عن البترول، والإلكترونيات بكل تطبيقاتها، وغير ذلك الكثير.

نوع مهم من المرشحات هو الذي سيكون موضوعنا في هذا الكتاب وهي المرشحات الخطية الثابتة إزاحيا Linear Shift Invariant, LSI وذلك لكثرة استخدامها وشيوعها، أما الأنواع الأخرى مثل المرشحات المهائية adaptive filters فليست موضوع هذا الكتاب ولكن في العادة يفرد لها كتب منفصلة.

## ٧-٢ تصميم المرشحات الرقمية

تصميم المرشح الرقمي يمر بالمراحل الأساسية التالية:

- ١- التحديد الفعلي لمواصفات المرشح مثل تردد القطع cutoff frequency ومجال المرور أو السماح passband، ومجال القطع أو المنع stopband، ومجال الانتقال transition band. مقدار استجابة المرشح في كل من هذه المجالات يجب تحديده بدقة مع تحديد نسبة خطأ error في كل مجال يجب ألا يتم تخطيها.
- ٢- كل هذه المواصفات والشروط المعطاة في الخطوة ١ يتم على أساسها تحديد نوع المرشح هل هو IIR أم FIR وسنرى في هذا الفصل ماذا يعني كل نوع من هذين النوعين ومميزاته وعيوبه. من هذه المواصفات أيضا يتم تحديد درجة المرشح filter order.
- ٣- بناء على الخطوة ٢ يتم تصميم المرشح والمقصود بتصميمه هو حساب معاملاته والاستجابة الترددية له كما سنرى، ويجب أن تكون الاستجابة الترددية التي سنحصل عليها بهذه الخطوة أقرب ما يكون من الاستجابة الترددية المرغوبة ويكون الخطأ أقل ما يمكن وحسب ما هو محدد في الخطوة ١.
- ٤- بعد تصميم المرشح يتم بناؤه implementation، وهذه الخطوة سيتم شرحها في فصل قادم.

هناك الكثير من البرمجيات التي تساعد وتسهل عملية تصميم هذه المرشحات بدرجة كبيرة جدا ومن هذه البرمجيات برنامج MATLAB الذي استخدمناه في تصميم وتنفيذ جميع أمثلة هذا الكتاب.

### تحديد مواصفات المرشح

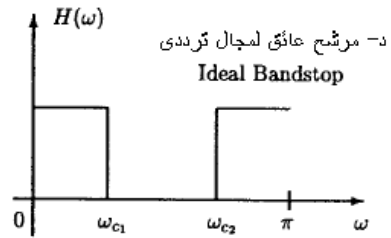
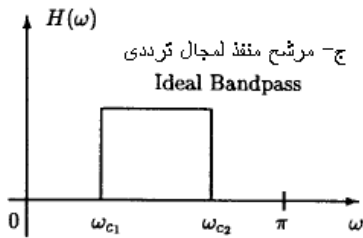
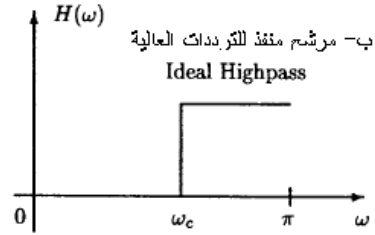
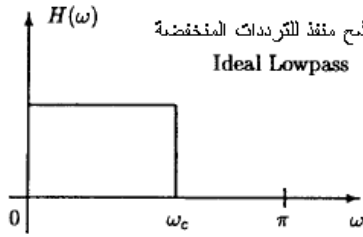
لقد رأينا مسبقا أن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تكون دائما دورية periodical بالنسبة لمتغير التردد  $w$  وتتكرر كل  $2\pi$  على محور التردد. لذلك فإنه يكفي أن ندرس هذه الاستجابة في مدى ترددي مقداره  $2\pi$  فقط وليكن من  $-\pi$  حتى  $\pi$ . ولقد رأينا أيضا أن مقدار هذه الاستجابة الترددية يكون دالة زوجية في المتغير  $w$ ، لذلك فإننا نكتفي بدراسة هذه الاستجابة في المدى من  $w=0$  حتى  $w=\pi$ .

إن أبسط مواصفات يمكن أن نبدأ بها هي مواصفات المرشح الرقمي المثالي المنفذ للترددات المنخفضة digital ideal low pass filter والذي تتحدد مواصفاته بالعلاقة التالية والموضحة في شكل ٧-٣.

$$D(w) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & w_c < |w| < \pi \end{cases} \quad (٧-٢٣)$$

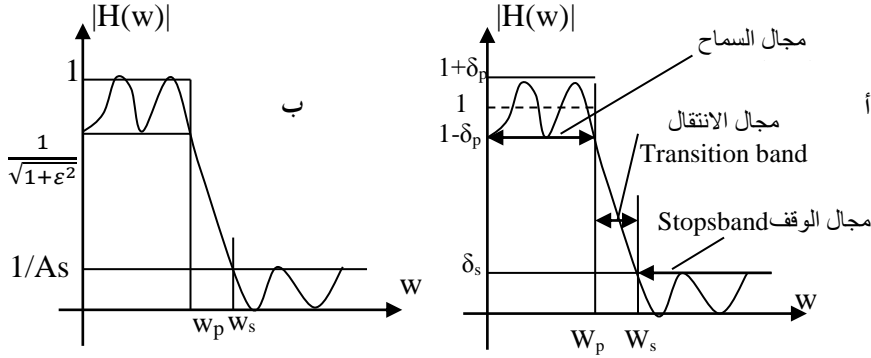
حيث  $w_c$  هي تردد القطع cutoff frequency، ولقد رمزنا للاستجابة الترددية في المعادلة (٧-٢٣) بالرمز  $D(w)$  وليس  $H(w)$  لأن الاستجابة الموضحة في المعادلة (٧-٢٣) هي استجابة مثالية، نرغب فيها desired، ولكننا لا نستطيع الحصول عليها عمليا، لأن مجال الانتقال transition band يساوى صفر، وهذا مستحيل الحصول عليه عمليا إذ لا بد أن يكون هناك مجال انتقال نحاول أن نجعله أقل ما يمكن. شكل ٧-٣ يبين هذا المرشح المثالي، وأنواع أخرى من المرشحات المثالية التي تم ذكرها في معرض الحديث عن المرشحات التناظرية.

- شكل ٧-٤ يبين الاستجابة الترددية الفعلية لمرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة. من هذا الشكل نلاحظ المعاملات التالية والتي يجب أن نتذكرها جيدا:
- $w_p$  نهاية مجال المرور أو السماح pass band cutoff frequency.
  - $w_s$  تردد القطع لمجال المنع stop band cutoff frequency.
  - $w_c$  تردد القطع cutoff frequency وهذه تكون في العادة أكبر من  $w_p$  وأقل من  $w_s$  في حالة المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، وهي تحدد بأنها التردد الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة الترددية بمقدار ٣ ديسبل من قيمتها في مجال السماح pass band.
  - $w_t = w_s - w_p$  تسمى مجال الانتقال transition band وهو مجال الانتقال من مجال السماح إلى مجال المنع.



شكل ٧-٣ الاستجابة المثالية لأنواع عديدة من المرشحات.

- $\delta_p$  تموجات مجال السماح pass band ripples وهى تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال السماح.
- $\delta_s$  تموجات مجال المنع stop band ripples وهى تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال المنع. لاحظ في شكل (٤-٧ب) حيث تم إعادة التعبير عن الترددات الحرجة والتموجات بطريقة تستخدم عادة في تقدير درجة المرشح كما سنرى عند الحديث عن المرشحات من النوع IIR.



شكل ٧-٤ الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

أ- الشكل العام ب- شكل خاص يستخدم في تقدير درجة المرشح

عند تصميم المرشح الرقمي فإن الترددات الحرجة له تعطى في العادة في المجال التناظرى ( $\Omega_p$  و  $\Omega_s$  أو  $F_p$  و  $F_s$ )، أي بالهرتز، وتعطى معه تردد أخذ العينات  $F_s$ ، sampling frequency. قبل البدء في تصميم المرشح الرقمي لابد من تحويل هذه الترددات إلى المجال الرقمي  $w$  في المدى من  $w=0$  إلى  $w=\pi$ . عملية التحويل هذه تتم كما يلي:

$$w_p = \frac{\Omega_p}{F_s} = \frac{2\pi f_p}{F_s} = 2\pi f_p T_s \quad (٧-٢٤)$$

$$w_s = \frac{\Omega_s}{F_s} = \frac{2\pi f_s}{F_s} = 2\pi f_s T_s$$



حيث  $T_s=1/F_s$  هي الزمن الدورى لأخذ العينات.  
 كمثال على ذلك نفترض أن الترددات الحرجة لأحد المرشحات هي  $f_p=3\text{KHz}$  و  $f_s=7\text{KHz}$  ومعدل العينة هو  $F_s=25\text{KHz}$ ، بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على الترددات الرقمية  $w_p=0.24\pi$  و  $w_s=0.56\pi$ .

أول خطوة من خطوات تصميم أي مرشح هي تحديد نوع هذا المرشح هل سيكون Infinite Impulse Response, IIR أم Finite Impulse Response, FIR؟ كل نوع من هذه المرشحات له مواصفاته ومميزاته وعيوبه التي تجعل أي من النوعين مناسب لبعض التطبيقات ولا يناسب التطبيقات الأخرى. لذلك كان من الضروري أن نركز على مواصفات كل واحد من هذه الأنواع في الجزء التالي. كذلك بعد تحديد نوع المرشح علينا تحديد درجته وهذا ما سنراه أيضا في الجزء التالي.

### ٣-٧ مواصفات المرشحات IIR

١- من اسم هذا النوع من المرشحات Infinite Impulse Response والذي يعني أن استجابة الاندفاع أو الصدمة Impulse Response تكون غير محددة الطول Infinite، مما يعني أن عدد عينات هذه الاستجابة يمتد إلى ما لا نهاية، وبالنسبة للمرشحات السببية causal فإنه يمكن كتابة هذه العلاقة لهذا النوع من المرشحات:

$$h[n] \neq 0 \quad \text{for } 0 \leq n \leq \infty$$

والذي يعني أنه للمرشحات السببية فإن طول الاستجابة يمتد من الصفر إلى ما لا نهاية.  
 ٢- الاستجابة الترددية للمرشحات أو الأنظمة الرقمية من النوع IIR تكون كسرية rational أي لها بسط ومقام وكل منهما عبارة عن كثيرة حدود polynomial، ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(w) = \frac{B(w)}{A(w)} = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}} \quad (٢٥-٧)$$

حيث  $N_0$  عبارة عن ثابت صحيح. درجة المرشح من هذا النوع هي  $N$  التي هي أعلى أس في المقام، وفي العادة تكون درجة البسط  $M$  أقل من درجة المقام  $N$ . الدرجة  $N$  في المقام تحدد عدد عينات الخرج السابقة التي يتم استخدامها لحساب قيمة الخرج الحالية، لذلك فإن هذا العدد من عينات الخرج السابقة يتم تخزينه أو الاحتفاظ به واستخدامه كتغذية عكسية feed back لحساب قيمة الخرج الحالية. المعاملات  $a_k$  و  $b_k$  هي معاملات المرشح أو مجاهيله المراد حسابها.

٣- تصميم المرشح الرقمي يكون كما ذكرنا سابقا إيجاد قيم المعاملات  $a_k$  و  $b_k$  في المعادلة (٢٥ - ٧) بحيث تجعل  $H(w)$  تكون أقرب ما يكون من المواصفات المطلوبة للمرشح. درجة المرشح  $N$  في هذه المعادلة تستخدم أيضا كمتغير للحصول على المواصفات المثلى للمرشح.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل  $Z$  لاستجابة الصدمة  $h[n]$  ورمزنا لها بالرمز  $H(z)$  وتعطى بالعلاقة التالية كما رأينا سابقا:

$$H(Z) = H(e^{jw}) \Big|_{e^{jw}=z} = Z^{-N_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}} \quad (٢٦-٧)$$

جذور المقام في المعادلة (٢٦ - ٧) تمثل أقطاب النظام أو المرشح، والقطب كما رأينا هو قيمة  $|z|$  التي عندها تؤول دالة العبور إلى مالانهاية، ولقد رأينا سابقا أن شرط الاستقرار لأي نظام أن تكون جميع أقطابه داخل دائرة الوحدة. لذلك فإن المرشحات من النوع IIR لا بد من حساب جميع أقطابها لأنه من الممكن بعد أن نصمم المرشح أن نجد أنه غير مستقر unstable، ولذلك فإن المرشحات من النوع IIR تكون حساسة

جدا للضوضاء حيث أن هذه الضوضاء من الممكن أن تغير من قيم المعاملات  $a_k$  فتجعل المرشح يصبح غير مستقر لأن أحد أقطابه يخرج دائرة الوحدة نتيجة هذه الضوضاء.

٥- المرشحات السببية causal أو القابلة للتحقيق من النوع IIR لا يمكن أن تكون زاوية الطور  $\theta(w)$  لها خطية مما يحد من تطبيقاتها.

٦- بما أن استجابة الصدمة للمرشحات IIR تمتد إلى المالا نهائية، فإن استخدام الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات يكون غير ممكن.

٧- كما ذكرنا فإن المرشحات IIR تكون حساسة للضوضاء ومنها الضوضاء الناتجة عن تحديد quantization خرج التحويل التماثلي الرقمي A/D عند كميات أو مستويات محددة وهذا يتوقف على العدد المحدد للبتات المستخدمة لتمثيل ثوابت المرشح مما ينتج عنه تقريب في هذه الثوابت عند تمثيلها على الحاسب. كل هذه المصادر للضوضاء من الممكن أن تجعل المرشح غير مستقر unstable.

٨- كما سنرى عند تحقيق هذا النوع من المرشحات فإنه من مميزاته أنه يمكن تحقيق المواصفات المطلوبة للمرشح بدرجة  $N$  أقل إذا ما قورن بالنوع الآخر من المرشحات FIR. أي أنه لتحقيق مواصفات معينة لأي مرشح فإن هذا المرشح إذا تم بناؤه باستخدام النوع IIR فإن درجة المرشح المطلوبة ستكون أقل عن ما لو تم بناؤه باستخدام النوع FIR.

## ٧-٤ مواصفات المرشحات FIR

١- استجابة الدفعة للمرشحات من النوع FIR تكون محددة الطول ويمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

$$h[n] \neq 0 \quad \text{for } N_1 \leq n \leq (N_2 = N_1 + N - 1) \quad (٢٧-٧)$$

حيث  $N$  هي طول استجابة الصدمة والذي يمتد من  $N_1$  إلى  $N_2$  و  $N_1$  من الممكن أن تكون صفرا أو هكذا تكون في العادة.

٢- الاستجابة الترددية  $H(w)$  للمرشحات FIR تكون كثيرة حدود في  $e^{jw}$  ومحددة الطول ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(w) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n](e^{jw})^{-n} \quad (٢٨-٧)$$

حيث  $N_1$  و  $N_2$  أرقام صحيحة تمثل أرقام أول وآخر عينة في استجابة الصدمة  $h[n]$ . معاملات استجابة الصدمة التي عددها  $N$  هي المعاملات المطلوب تحديدها عند تصميم هذا النوع من المرشحات.

٣- تصميم المرشح من النوع FIR هو حساب الاستجابة الترددية  $H(w)$  التي تكون أقرب ما يمكن من الاستجابة الترددية المطلوبة، ويتم ذلك عن طريق إيجاد أو حساب معاملات استجابة الصدمة  $h[n]$  التي تحقق ذلك. درجة المرشح أيضا، التي هي طوله  $N$ ، تعتبر أحد المتغيرات المستخدمة للحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل  $Z$  لاستجابة الصدمة وهي كثيرة حدود في المتغير المركب  $Z$  محدودة الطول وليس لها مقام ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(z) = H(e^{jw}) \Big|_{e^{jw}=z} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n]z^{-n} \quad (٢٩-٧)$$

ونستنتج من ذلك أن هذا النوع من المرشحات يكون دائما مستقر لعدم وجود أقطاب في دالة العبور.

٥- هذا النوع من المرشحات FIR تكون زاوية الطور له  $\theta(w)$  خطية دائما على العكس من المرشحات IIR التي كانت زاوية الطور لها غير خطية. خطية زاوية الطور تجعل هذا النوع من المرشحات مناسبا جدا للكثير من التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة.

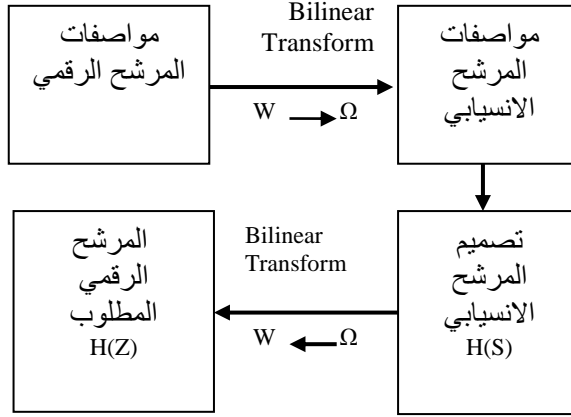
- ٦- بما أن طول استجابة الصدمة يكون محدودا فإنه يمكن في هذه الحالة استخدام عملية الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات.
- ٧- هذه المرشحات ليست حساسة للضوضاء لعدم وجود تغذية عكسية، وعدم وجود أقطاب في معادلة دالة العبور كما كان في حالة المرشحات IIR.
- ٨- درجات هذه المرشحات N قد تمتد إلى قيم كبيرة جدا للحصول على مواصفات معينة للمرشح، فقد تمتد إلى ٥٠٠ مثلا، وهذا يجعل هذه المرشحات معقدة وتحتاج إلى وقت كبير لحساب معاملاتهما calculation time كما أنها تسبب زمن تأخير كبير.

### ٧-٥ طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR

المقصود بتصميم المرشح الرقمي من النوع IIR هو الحصول على المعاملات  $a_k$  و  $b_k$  في معادلة الاستجابة الترددية (٧-٢٥) لكي تكون أقرب ما يمكن من مواصفات المرشح المطلوب تصميمه. سنسوق هنا أكثر من طريقة لتصميم هذا النوع من المرشحات. قبل تصميم المرشح من هذا النوع لابد من معرفة درجته أولا وقد رأينا ذلك في معرض الحديث عن المرشحات الانسيابية.

### ٧-٥-١ التحويل الخطي المزدوج Bilinear Transformation

تعتمد هذه الطريقة على نقل مسألة تصميم المرشح الرقمي من الوسط الرقمي digital domain إلى الوسط التناظري analog domain حيث في الوسط الانسيابي يتم تصميم المرشح بالطرق المعروفة مسبقا لتصميم المرشحات التناظرية، ثم يتم نقل المرشح الذي تم تصميمه مرة أخرى إلى الوسط الرقمي بطرق تحويل معروفة كما سنرى وكما هو موضح في شكل ٧-٥.



شكل ٧-٥ تصميم المرشحات الرقمية بطريقة التحويل الخطي المزدوج  
Bilinear Transform

افترض أن  $H(z)$  هي معادلة دالة الانتقال transfer function للمرشح الرقمي حيث  $H(z)$  كما رأينا هي تحويل  $Z$  لاستجابة الدفعة  $h[n]$ . كذلك تذكر أن دالة العبور للمرشح التناظري هي  $H(s)$  حيث  $H(s)$  هي تحويل لابلاس لاستجابة الصدمة في النطاق الزمني  $h(t)$ . التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation عبارة عن نقل متبادل أو مزدوج من الوسط الانسيابي أو النطاق  $S$  إلى النطاق الرقمي أو النطاق  $Z$  باستخدام المعادلة التالية:

$$S = \frac{2}{T} \left( \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right) \quad (٣٠-٧)$$

حيث  $T$  هي زمن عينة الإشارة التناظرية sampling time. بنفس الطريقة يمكن كتابة المتغير  $Z$  بدلالة المتغير  $S$  كما يلي:

$$Z = \left( \frac{1+ST/2}{1-ST/2} \right) \quad (٣١-٧)$$

وعلى ذلك يمكن تحويل دالة العبور في النطاق التناظري إلى دالة عبور في النطاق الرقمي أو العكس باستخدام المعادلتين (٧-٣٠ و ٧-٣١) كما يلي:

$$H(Z) = H(S) \Big|_{S=\frac{2(1-Z^{-1})}{1+Z^{-1}}} \quad (٧-٣٢)$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة:

$$H(S) = H(Z) \Big|_{Z=\frac{1+ST/2}{1-ST/2}} \quad (٧-٣٣)$$

بوضع  $T=2$  لتسهيل الحسابات فقط، ووضع  $S=\sigma+j\Omega$  في المعادلة (٧-٣١)، يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$Z = \frac{1 + \sigma + j\Omega}{1 - \sigma - j\Omega}$$

حيث يمكن حساب القيمة المطلقة للمتغير  $Z$  كما يلي:

$$|Z|^2 = \frac{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2} \quad (٧-٣٤)$$

من المعادلة (٧-٣٤) يمكن أن نستنتج الخواص المهمة التالية لهذا التحويل:

١- بوضع  $\sigma = 0$  في المعادلة (٧-٣٤) فإن  $|Z| = 1$  وهذا يعني أننا عندما نتحرك على المحور  $\Omega$  من  $\Omega = -\infty$  إلى  $\Omega = \infty$  في المستوى  $S$  فإننا في الحقيقة نتحرك على محيط دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ .

٢- بوضع  $\sigma < 0$  في المعادلة (٧-٣٤) فإن  $|Z| < 1$ ، لاحظ أن  $\sigma < 0$  في المستوى  $S$  هو النصف الأيسر من هذا المستوى، وهذا يعني أن النصف الأيسر من المستوى  $S$  يؤول بهذا التحويل إلى داخل دائرة الوحدة  $|Z| < 1$  في المستوى  $Z$ .

٣- بوضع  $\sigma > 0$  في المعادلة (٣٤ - ٧) فإن  $|Z| > 1$ ، لاحظ أن  $\sigma > 0$  في المستوى S

هو النصف الأيمن من هذا المستوى، وهذا يعني أن النصف الأيمن من المستوى S يؤول

بهذا التحويل إلى خارج دائرة الوحدة  $|Z| > 1$  في المستوى Z.

٤- من الخواص السابقة نستنتج أن أي مرشح تناظري مستقر (كل أقطابه في النصف

الأيسر من المستوى S) بهذا التحويل (التحويل الخطي المزدوج) يؤول إلى مرشح رقمي

مستقر أيضا (كل أقطابه داخل دائرة الوحدة).

٥- خاصية مهمة أيضا يمكن أن نستنتجها وهي أن كل نقطة في المستوى S تؤول إلى

نقطة وحيدة في المستوى Z وهذا ما يطلق عليه تحويل القيم المتناظرة أو الأحادية one

to one transformation والعكس صحيح أيضا عند التحويل من المستوى Z إلى

المستوى S. شكل ٦-٧ يبين هذه الخواص.

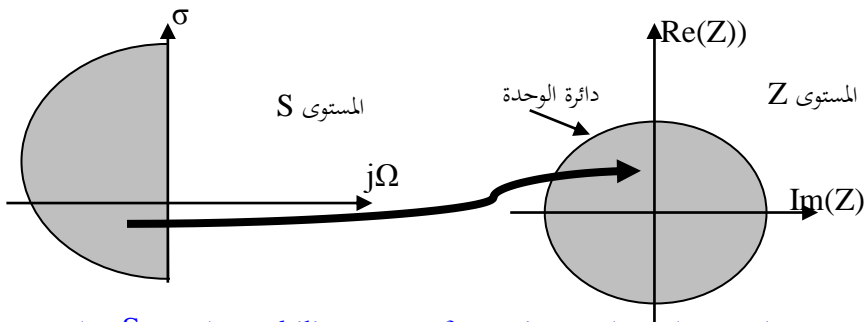
بوضع  $Z = e^{j\omega T}$  في المعادلة (٣٠ - ٧)، وهذا يعني أننا نتحرك على دائرة الوحدة فإننا نحصل

على العلاقة بين التردد الانسيابي  $\Omega$  والتردد الرقمي  $w$  كما يلي:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(w/2) \quad (٣٥-٧)$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة:

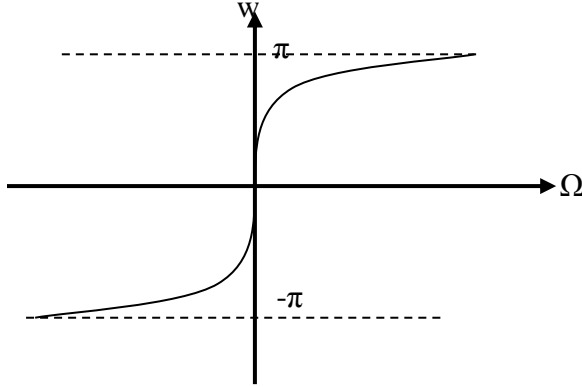
$$w = 2 \arctan(\Omega T/2) \quad (٣٦-٧)$$



شكل ٦-٧ التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation بين المستوى S والمستوى Z.



العلاقتين (٧-٣٥ و ٧-٣٦) تبينان أن العلاقة بين المتغير  $\Omega$  والمتغير  $w$  هي علاقة غير خطية تماما تضغط كل المحور  $z\Omega$  في المستوى  $S$  إلى محيط دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ ، وهذه العلاقة يمكن رسمها كما في شكل ٧-٧.



شكل ٧-٧ العلاقة بين  $w$  و  $\Omega$  في التحويل الخطي المزدوج

**مثال ٧-١:** حول الاستجابة الترددية التماثلية للمرشح  $Ha(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$  إلى استجابة ترددية رقمية مستخدما طريقة التحويل الخطي المزدوج . إفترض  $T=1$  . باستخدام المعادلة (٧-٣٠) وبعد الكثير من الاختصارات والعمليات الحسابية يمكن كتابة الاستجابة الرقمية كما يلي :

$$H(z) = \frac{3+2z^{-1}-z^{-2}}{20+4z^{-1}} = \frac{0.15+0.1z^{-1}-0.05z^{-2}}{1+0.2z^{-1}} \quad (٧-٣٧)$$

### الدالة ( ) bilinear

لحسن الحظ فإن MATLAB يوفر هذه الدالة للتحويل المباشر من النطاق التماثلي إلى النطاق الرقمي بطريقة التحويل الخطي المزدوج لتوفير مجهود الاختصارات والحسابات التي قد نكون لمسناها في المثال السابق. الصورة العامة لهذه الدالة هي:

```
[zd,pd,kd] = bilinear(z,p,k,fs)
[numd,dend] = bilinear(num,den,fs)
```

حيث  $z$  هي الأصفار و  $p$  هي الأقطاب و  $k$  معامل التكبير و  $fs$  تردد العينة، وكل ذلك في النطاق التناظري أو التماثلي. أما  $zd$  و  $pd$  و  $kd$  فهي نظيرها في النطاق الرقمي. الصورة الثانية للدالة هي نفسها الصورة الأولى سوى أنه تم التعبير بصورة كثيرات حدود للبسط  $num$  وكثيرات حدود للمقام  $den$ . البرنامج التالي سيحول الاستجابة الترددية السابقة إلى النطاق الرقمي باستخدام التحويل الخطي:

```
%example 7-1
b=[1,1]; a=[1,5,6]; T=1; Fs=1/T;
[bd,ad]=bilinear(b,a,Fs);
disp('digital numerator polynomial');disp(bd);
disp('digital denominator polynomial');disp(ad);
```

ونتيجة هذا البرنامج كالتالي:

```
digital numerator polynomial
0.1500 0.1000 -0.0500
```

```
digital denominator polynomial
1.0000 0.2000 -0.0000
```

حيث من هذه المعاملات يمكن كتابة المعادلة (٧-٣٧).

الآن وعلى ضوء ما سبق وما هو موضح في شكل ٧-٥ يمكن أن نضع خطوات تصميم المرشح الرقمي باستخدام طريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation كما يلي:

١. إبدأ من مواصفات المرشح الرقمي المعطاه كما في شكل ٧-٤ في صورة ترددات القطع  $w_c$  و  $w_s$  وغيرها.

٢. حول هذه الترددات الرقمية إلى ترددات تناظرية باستخدام المعادلة (٧-٣٥).

٣. صمم مرشح تناظري يحقق هذه المطالب في الخطوة ٢ باستخدام أحد الصور المعروفة مثل البتوروث أو الشيببشيف أو القطع الناقص التي درسناها في فصل تصميم المرشحات الانسيابية. هنا ستحصل على الاستجابة الترددية الانسيابية  $H(S)$ .
٤. استخدم التحويل الخطى المزدوج bilinear transform للحصول على دالة الانتقال transfer function في النطاق الرقمي  $H(Z)$  وذلك باستخدام المعادلة  $(٧ - ٣٧)$ .
٥. بعد ذلك يمكن الحصول على الاستجابة الترددية  $H(w)$  وذلك بوضع  $Z=e^{jw}$  في دالة العبور في الخطوة السابقة.

**مثال ٧-٢:** صمم مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة LPF بالموصفات التالية :

$w_p=0.2\pi$  و  $w_s=0.3\pi$  و  $R_p=1\text{dB}$  و  $A_s=15\text{dB}$ . البرنامج التالي يبين خطوات هذا التصميم :

**أولا** مواصفات المرشح الرقمي

%Example 7-2 Butterworth LPF using bilinear transformation  
 $w_p=0.2*\pi$ ;  $w_s=0.3*\pi$ ;  $R_p=1$ ;  $A_s=15$ ;  
 $T=1$ ;  $F_s=1/T$ ;

**ثانيا** تحويل هذه المواصفات إلى النطاق التناظري

$\omega_{gap}=(2/T)*\tan(w_p/2)$ ;  
 $\omega_{gas}=(2/T)*\tan(w_s/2)$ ;

سنستخدم مرشح من النوع بتورث ونحتاج لمعرفة درجته لذلك سنستخدم الدالة buttord للحصول على هذه الدرجة وكذلك تردد القطع  $w_n$ .

$[N,w_n]=\text{buttord}(\omega_{gap},\omega_{gas},R_p,A_s,'s')$ ;

تصميم المرشح التناظري باستخدام الدالة butter والمعاملات السابقة.

$[bs,as]=\text{butter}(N,w_n,'s')$ ;

استخدام التحويل الخطى للحصول على التصميم في النطاق الرقمي :

$[bz,az]=\text{bilinear}(bs,as,F_s)$ ;  
 $\text{disp}(\text{'Numerator coefficients'})$ ;  $\text{disp}(bz)$ ;  
 $\text{disp}(\text{'Denominator coefficients'})$ ;  $\text{disp}(az)$ ;

$w=0:\pi/255:\pi$ ;  $h=\text{freqz}(bz,az,w)$ ;

```

db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db);grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k'); title('Z plane representation');

```

من هذا البرنامج كانت معاملات البسط والمقام في دالة العبور لهذا المرشح كالتالى:

Numerator coefficients

0.0007 0.0044 0.0111 0.0148 0.0111 0.0044 0.0007

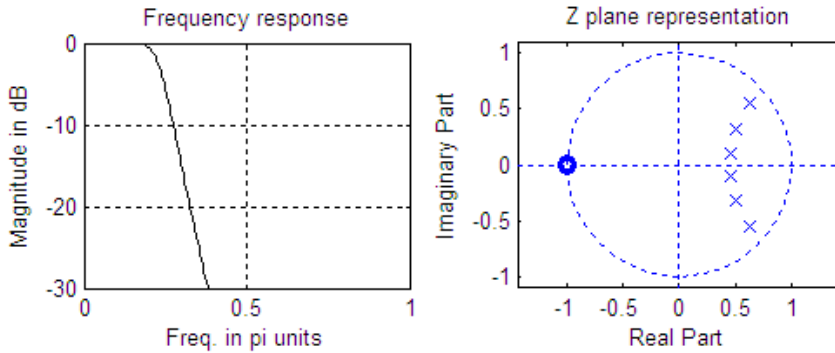
Denominator coefficients

1.0000 -3.1836 4.6222 -3.7795 1.8136 -0.4800 0.0544

وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال لهذا المرشح كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.0007 + 0.0044z^{-1} + 0.0111z^{-2} + 0.0148z^{-3} + 0.0111z^{-4} + 0.0044z^{-5} + 0.0007z^{-6}}{1 - 3.1836z^{-1} + 4.6222z^{-2} - 3.7795z^{-3} + 1.8136z^{-4} - 0.4800z^{-5} + 0.0544z^{-6}}$$

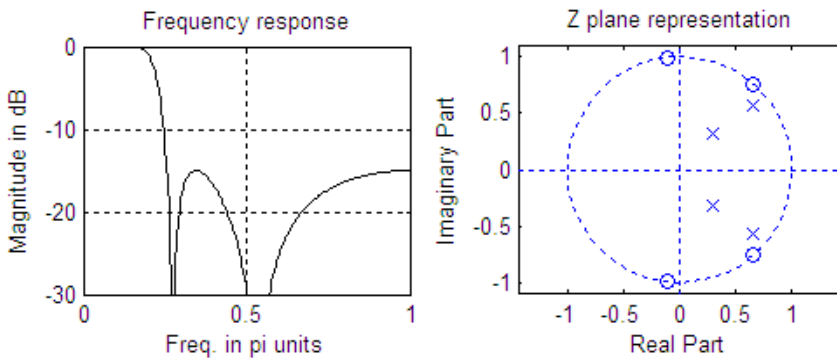
شكل ٧-٨ يبين الاستجابة الترددية للمرشح وتمثيل المرشح في المستوى Z حيث نلاحظ أن جميع أقطاب المرشح تقع داخل دائرة الوحدة مما يعنى أن المرشح مستقر.



شكل ٧-٨ تصميم مرشح المثال ٧-٢ بطريقة التحويل الخطى.

**مثال ٧-٣:** سنعيد المثال ٧-٢ ولكن هذه المرة سنستخدم طريقة المرشح شيبشيف ٢ في التصميم بدلا من طريقة البتورث. البرنامج التالى هو نفس برنامج المثال ٧-٢ مع تعديلات بسيطة وشكل ٧-٩ يبين الاستجابة الترددية وتمثيل المرشح فى المستوى  $Z$ .

```
%Example 7-3 cheby2 LPF using bilinear transformation
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=1; As=15;
T=1; Fs=1/T;
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
omegas=(2/T)*tan(ws/2);
[N,wn]=cheb2ord(omegap,omegas,Rp,As,'s');
[bs,as]=cheby2(N,As,wn,'s');
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs);
disp('Numerator coefficients'); disp(bz);
disp('Denominator coefficients'); disp(az);
w=0:pi/255:pi; h=freqz(bz,az,w);
db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db,'k');grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k');
title('Z plane representation');
```



شكل ٧-٩ تصميم مرشح المثال ٧-٣.

**٧-٥-٢ طريقة تساوى استجابة الصدمة IIM, Impulse Invariant Method**

هذه هي الطريقة الثانية لتصميم المرشحات الرقمية IIR بعد أن رأينا طريقة التحويل الخطى والتي تعتبر الأكثر استخداما وشيوعا. في هذه الطريقة يتم مساواة استجابة الصدمة  $h_a(t)$  للمرشح الانسيابي بعد تقطيعها لتصبح  $h_a(nT)$  مع استجابة الصدمة للمرشح الرقمية  $h[n]$ . معنى ذلك أنه يتم مساواة استجابتي الصدمة للمرشح الانسيابي والرقمي كما يلي:

$$h[n]=h_a(nT) \quad (٣٨-٧)$$

أو بمعنى آخر، أن استجابة الصدمة للمرشح الرقمية تساوى، أو هي استجابة الصدمة للمرشح الانسيابي بعد تقطيعها  $sampling$ .

لقد رأينا مسبقا أن العلاقة بين دالة العبور الرقمية  $H(Z)$  ودالة العبور الانسيابية يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(Z)=Z(h[n])=Z(h_a(nT)) \\ = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left( S + j \frac{2\pi k}{T} \right) \Big|_{s=\left(\frac{1}{T}\right) \ln Z} \quad (٣٩-٧)$$

وأما العلاقة بين الاستجابة الترددية في النطاق الرقمية والنطاق الانسيابي فيمكن الحصول عليها بوضع  $Z=e^{j\omega}$  و  $S=j\Omega$  فنحصل على المعادلة التالية:

$$H(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left( j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (٤٠-٧)$$

التحويل  $s=(1/T)\ln Z$  يستحق وقفة. هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة  $Z=e^{sT}$  وبوضع  $S=\sigma_0+j\Omega_0$  نحصل على الآتي:

$$Z = r e^{j\omega} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T} \quad (٤١-٧)$$

ومنها يمكن كتابة:

$$|Z| = r = e^{\sigma_0 T} \quad (٤٢-٧)$$

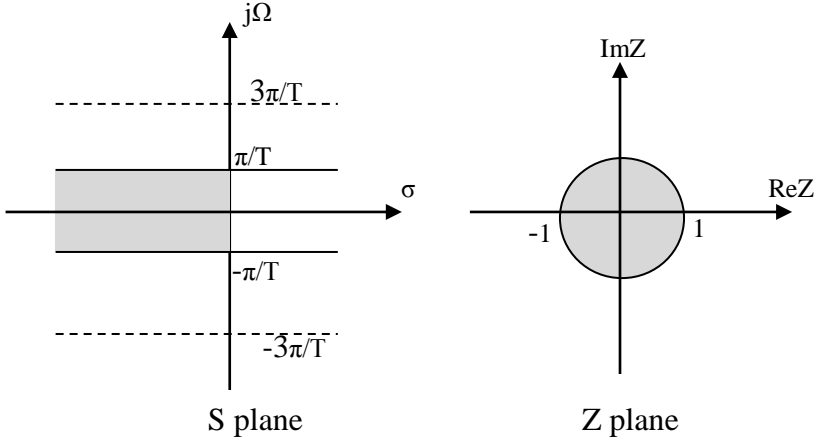
من المعادلة (٧-٤٢) نلاحظ أنه عندما  $\sigma_0=0$ ، أى أننا نتحرك على المحور  $j\Omega$  فى المستوى  $S$  فإنه فى هذه الحالة تكون  $r=1$  أى أننا نتحرك على محيط دائرة الوحدة فى المستوى  $Z$ . وعلى ذلك فإنه عندما تكون  $\sigma_0$  سالبة، أى النصف الأيسر من المستوى  $S$ ، فإن ذلك يقابل  $r<1$  أى داخل دائرة الوحدة، أى أن ذلك يعنى أن المرشح الانسيابى المستقر سيتحول إلى مرشح رقمى مستقر أيضا. وبنفس الطريقة يمكن أن نرى أن النصف الأيمن من المستوى  $S$  سيتقابل مع خارج دائرة الوحدة فى المستوى  $Z$ . هناك خاصية أخرى مهمة فى هذا التحويل وهى أنه يحول كل النقط المعطاه بالمعادلة التالية:

$$S = \sigma_0 + j\Omega_0 + j\frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (٧-٤٣)$$

إلى نقطة واحدة فى المستوى  $Z$  حيث أن:

$$e^{\sigma_0 T} e^{j(\Omega_0 + \frac{2\pi k}{T})T} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T} \quad (٧-٤٤)$$

وهذا يعنى أن الشريط strip الذى عرضه  $2\pi/T$  فى المستوى  $S$  والذى يقع فى المدى الذى يحدد بما يلى :  $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$  يتحول إلى كل المستوى  $Z$  كما فى شكل ٧-١٠ بحيث أن النصف الأيسر من هذا الشريط يؤول إلى داخل دائرة الوحدة فى المستوى  $Z$ ، والنصف الأيمن منها يؤول إلى خارج دائرة الوحدة. وبنفس الطريقة كما فى شكل ٧-١٠ سنرى أن المحور  $j\Omega$  يقسم إلى شرائح عرض كل منها  $2\pi/T$ ، وكلها تؤول بنفس الطريق إلى كل المستوى  $Z$  كما أشرنا سابقا. وهذا التحويل يطلق عليه many to one transformation أى تحويل نقاط عديده إلى نقطة واحدة.



شكل ٧-١٠ تحويل استجابة الصدمة الموحدة IIR.

نلاحظ من المعادلة ٧-٣٩ أن الاستجابة الترددية الرقمية  $H(w)$  للمرشح الرقمي المطلوب تصميمه بهذه الطريقة هي عبارة عن مجموع الاستجابات الترددية للمرشح الانسيابي الأصلي  $H_a(\Omega)$  مع نفس الاستجابات المزاحة لها بمقدار  $\pm 2\pi k/T$ ، مع ضرب هذه المجموع في المعامل  $1/T$  كما في المعادلة (٧-٤٠). معنى ذلك أن كل شريط من هذه الشرائط، النصف الأيسر منه فقط، يؤول إلى دائرة الوحدة، وهذه الشرائط فوق بعضها. نستنتج أيضا من هذه المعادلة ومن شكل ٧-١٠ ومن نظرية التقطيع التي سبق دراستها أن الاستجابة الترددية الانسيابية  $H_a(\Omega)$  إذا كانت محددة النطاق بحيث أن:

$$H_a(j\Omega)=0 \quad \text{for} \quad |\Omega| \geq \pi/T \quad (٧-٤٤)$$

فإن :

$$H(w) = \frac{1}{T} H_a(j \frac{w}{T}) \quad \text{for} \quad |w| \leq \pi \quad (٧-٤٥)$$

ولن يكون هناك تداخل أو تزوير ترددي aliasing، وأما إذا كان شرط المعادلة (٧-٤٥) غير محقق فسوف يكون هناك تداخل ترددي كما في شكل ٧-١١. شكل ٧-١١ يبين



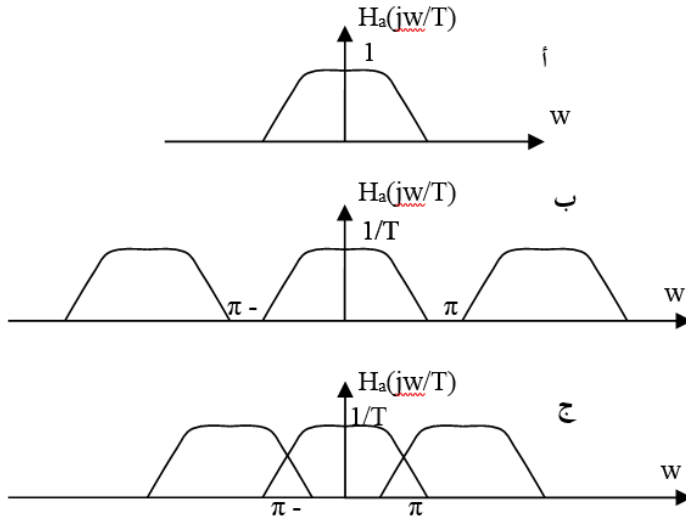
الاستجابة الترددية للمرشح الانسيابي، وفي شكل ٧-١١ ب نرى الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي عندما كانت الاستجابة الترددية محددة النطاق حيث نلاحظ عدم وجود تداخل ترددي بينما نلاحظ هذا التداخل في شكل ٧-١١ ج وهذا التداخل لأن نطاق المرشح الانسيابي أكبر من  $\pi$ .

**مثال ٧-٤:** افترض المرشح الانسيابي التالي من الدرجة الأولى:

$$H_a(S) = \frac{A}{s + \alpha}$$

استجابة الصدمة لهذا المرشح يمكن كتابتها كالتالي:

$$h_a(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$$



شكل ٧-١١ العلاقة بين الاستجابة الترددية للمرشح الانسيابي والمرشح الرقمي في حالة استجابة الصدمة الموحدة.

حيث  $u(t)$  هي دالة الخطوة. الآن يمكن كتابة استجابة الصدمة للمرشح الرقمي باستخدام المعادلة (٧ - ٣٨) كما يلي:

$$h[n] = h_a(nt) = Ae^{-ant}u[n]$$

وعلى ذلك يمكن كتابة دالة العبور لهذا المرشح كما يلي:

$$H(Z) = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ant} z^{-n} = \frac{A}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

لاحظ لكي يكون هذا المرشح مستقرا فإن  $|\alpha| > 1$  وبالتالي فإن  $|e^{-aT}| < 1$  أي أن هذا القطب سيكون داخل دائرة الوحدة.

**مثال ٧ - ٣:** مطلوب تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة من النوع IIR. تردد حافة مجال السماح  $\omega_p = 0.25\pi$ ، وعلى ألا تزيد التموجات في مجال العبور عن 0.5db. تردد بداية مجال الوقف هو  $\omega_s = 0.55\pi$ ، ومقدار الاستجابة عند هذا التردد هو 15db. وعلى ذلك يمكن كتابة استجابة هذا المرشح كما يلي:

$$20 \log_{10} |H(j0.25\pi)| \geq -0.5 \text{db}$$

$$20 \log_{10} |H(j0.55\pi)| \leq -15 \text{db}$$

على أن يكون التصميم مرة باستخدام طريقة استجابة الصدمة الموحدة، ومرة باستخدام التحويل الخطي.

**أولاً: باستخدام طريقة استجابة الصدمة الموحدة:**

سنفترض أولاً عدم وجود تداخل ترددي باختيار معدل تقطيع عالي، وسنفترض التصميم للمرشح الانسيابي من النوع بتورث. أول خطوات تصميم المرشح هي تقدير درجة هذا المرشح  $N$ . من الصور المختصرة التي تستخدم لتقدير هذه الدرجة المعادلة التالية:

$$N = \frac{\log_{10}(\frac{1}{k1})}{\log_{10}(\frac{1}{k})} \quad (٤٧-٧)$$

حيث k و k1 يعطيان بالمعادلتين التاليتين وبلاستعانة بشكل ٧-٤ كما يلي:

$$k = \frac{\Omega p}{\Omega_s} \quad (٤٨-٧)$$

$$k1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A_s^2 - 1}} \quad (٤٩-٧)$$

من المعادلات السابقة وشكل ٧-٤ يمكننا كتابة ما يلي:

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 0.5 \text{db}$$

ومنها يمكن حساب  $\varepsilon^2 = 0.1220185$ ، وبنفس الطريقة يمكن حساب  $A_s^2 = 31.62277$ ، ومن ذلك يمكن حساب قيمة  $(1/k1) = 15.841979$  و  $(1/k) = 2.2$ ، وباستخدام المعادلة (٧-٤٧) يمكن تقدير درجة المرشح  $N = 3.503885$  والتي يتم تقريبها إلى  $N = 4$ . معادلة المرشح بتزورث سبق أن درسناها ويمكن أن نكتبها الآن عند تردد السماح  $\Omega p$  كما يلي:

$$|Ha(j\Omega p)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega p}{\Omega_c})^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (٥٠-٧)$$

وبالتعويض في هذه المعادلة بقيم كل المتغيرات التي سبق الحصول عليها يمكن حساب قيمة تردد القطع  $\Omega_c = 0.3251892\pi = 1.021612 \text{rad/sec}$  وهو التردد الذي تنزل عنده الاستجابة الترددية بمقدار 3db من قيمتها عند التردد صفر. بمعرفة قيمة تردد القطع  $\Omega_c$  ودرجة المرشح N يمكن استخدام أحد دوال ال MATLAB المتاحة لتصميم المرشحات من النوع بتزورث والتي منها:

$$[z,p,k] = \text{buttapp}(N);$$

التي تعطى الأصفار  $Z$  والأقطاب  $P$  ومعامل التكبير  $K$  للمرشح الانسيابي الذي درجته  $N$  وتردد القطع له  $\Omega_c=1\text{rad/sec}$ . كما أن هناك الدالة:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, W_n, 'S');$$

التي تعطى معاملات المتغير  $S$  في البسط  $\text{num}$  وفي المقام  $\text{den}$  بقوى تنازلية للمرشح الانسيابي من النوع بتورث الذي درجته  $N$  وتردد القطع له  $W_n$  وال  $S$  دلالة على العمل في المجال الانسيابي. باستخدام هذه الدالة من matlab يمكن الحصول على معادلة المرشح الانسيابي كما يلي:

$$H_a(S) = \frac{-0.943839s - 0.7380277}{(s + 0.39097)^2 + (0.943839)^2} + \frac{0.943839s + 1.7817187}{(s + 0.9438673)^2 + (0.3909035)^2}$$

باستخدام التحويل  $Z=esT$  (التحويل IIR) نحصل على دالة العبور للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(Z) = \frac{-0.943839 + 0.16038789z^{-1}}{1 - 0.7936648z^{-1} + 0.4575167z^{-2}} + \frac{0.943839 - 0.001667z^{-1}}{1 - 0.719533z^{-1} + 0.1514144z^{-2}}$$

**ثانيا : باستخدام التحويل الخطي Bilinear transformation:**

في هذه الطريقة نبدأ بتحويل مواصفات المرشح الرقمي من النطاق الرقمي إلى النطاق الانسيابي باستخدام التحويل الخطي واعتبار  $T=2$  كما يلي:

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{W_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = 0.4142135$$

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{w_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.55\pi}{2}\right) = 1.1708496$$

الآن لتقدير درجة المرشح الانسيابي نحتاج لحساب كل من:

$$\frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2.8266814 \quad , \quad \frac{1}{k1} = 15.841979$$

ومن ذلك يمكن حساب N كما يلي:

$$N = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{k1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.6586$$

والتي يتم تقريبها إلى  $N=3$ ، حيث نلاحظ أن درجة المرشح الانسيابي في حالة التحويل الخطي تكون أقل منها في حالة استجابة الصدمة ويرجع ذلك إلى أن طريقة استجابة الصدمة تضغط المدى الترددي للمرشح مما يجعله يحتاج إلى درجة أعلى. بالتعويض بقيمة  $N$  و  $\Omega_p$  في المعادلة (٧-٥٠) نحصل على تردد القطع  $\Omega_c=0.588148$ . الآن يمكن استخدام matlab في الحصول على دالة العبور للمرشح الانسيابي الذي له تردد القطع السابق ومن الدرجة الثالثة كما يلي:

$$Ha(s) = \frac{0.203451}{(s + 0.588148)(s^2 + 0.588148s + 0.345918)}$$

بوضع  $s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$  نحصل على دالة العبور للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.0662272(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593284z^{-1})(1-0.676285z^{-1}+0.3917468z^{-2})} \quad (٧-٥١)$$

## ٧-٦ تصميم المرشحات الرقمية IIR في برنامج ماتلاب matlab

يحتوي برنامج matlab على العديد من الدوال المستخدمة في تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR. أول هذه الدوال هي المجموعة التالية التي تستخدم لتحديد درجة المرشح على حسب طريقة التصميم:

$$\begin{aligned} [N, Wn] &= \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby2ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{ellipord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \end{aligned}$$

حيث الدالة الأولى تعطي درجة المرشح الرقمي  $N$ ، وتردد القطع  $Wn$  للمرشح الرقمي من النوع بتزورث الذي تردد مجال السماح له هو  $Wp$ ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هي  $Rp$ ، بينما تردد مجال القطع هو  $Ws$ ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هو  $Rs$ . الدوال الثانية حتى الرابعة تعمل بنفس الطريقة ولكن مع أنواع المرشحات الشيبشيف بنوعيه ومرشح القطع الناقص. التردد  $Wn$  هو تردد القطع (rad/sample)، أو تردد الثلاث ديسبل (الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة 3 ديسبل من قيمته عند التردد صفر). هذا التردد يتراوح من صفر حتى واحد حيث القيمة واحد تقابل نصف تردد التقطيع  $\text{sampling frequency}$ .

الدالة:

$$[B,A] = \text{BUTTER}(N,Wn)$$

تصمم مرشح رقمي من النوع بتزورث حيث تعطى معاملات البسط  $B$  ومعاملات المقام  $A$  في قوى تنازلية للمتغير  $Z$ . درجة المرشح هي  $N$  التي سبق حسابها بالدالة  $\text{buttord}$ ، و  $Wn$  هي تردد القطع كما سبق.

الدالة  $[Bz,Az] = \text{IMPINVAR}(B,A,Fs)$  تعطى مرشح رقمي بمعاملات البسط  $Bz$  ومعاملات المقام  $Az$  باستخدام طريقة استجابة الصدمة  $\text{impulse invariant method}$

لتحويل المرشح الانسيابي الذي معاملات البسط له هي B ومعاملات المقام هي A وتردد التقطيع sampling frequency هي Fs هرتز. إذا لم يتم ذكر Fs فإنها توضع تلقائياً بواحد هرتز. المعاملات B و A تكون مضروبة في الكمية  $1/Fs$ . المثال التالي يبين ذلك فحاول تنفيذه (أنظر في برنامج matlab الأمر help impinvar).

%EXAMPLE: Illustrate the relationship between digital and analog

% frequency responses.

```
[b,a] = butter(4,0.3,'s');
[bz,az] = impinvar(b,a,10);
[Ha,Wa] = freqs(b,a,512);
[Hz,Wz] = freqz(bz,az,512,10);
plot(Wa/(2*pi),20*log10(abs(Ha))); hold on;
plot(Wz,20*log10(abs(Hz)))
```

الدالة  $[Zd,Pd,Kd] = \text{BILINEAR}(Z,P,K,Fs)$  تعطي الأصفار  $Zd$  والأقطاب  $Pd$  ومعامل التكبير  $Kd$  لمرشح الرقمي بطريقة التحويل الخطي bilinear للمرشح الانسيابي الذي أصفاره  $Z$  و أقطابه  $P$  ومعامل التكبير له هو  $K$  وتردد التقطيع هو  $Fs$ . يمكن استخدام الصورة البديلة التالية:  $[\text{Numd},\text{Dend}] = \text{BILINEAR}(\text{Num},\text{Den},Fs)$  التي تحول المرشح الانسيابي الذي معاملات البسط له هي  $\text{Num}$  ومعاملات المقام هي  $\text{Den}$  وذلك كقوى للمتغير  $s$ ، وتردد التقطيع له هو  $Fs$  إلى المرشح الرقمي الذي معاملات البسط له هي  $\text{Numd}$  ومعاملات المقام له هي  $\text{Dend}$  وذلك كقوى للمتغير  $Z$ .

**مثال ٧-٥:** حدد دالة العبور وارسم الاستجابة لمرشح رقمي LPF من الدرجة الخامسة من النوع elliptic. تردد حافة العبور لهذا المرشح هو  $w_p=0.4$  وتوججات مجال العبور  $R_p=0.5\text{db}$  وأقل اضمحلال في مجال الوقف هو  $R_s=-40\text{db}$ . المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح.

البرنامج التالي تم تنفيذه على ال MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%elliptic IIR LP digital filter design
N=5;
```

```

Rp=0.5;
Rs=40;
wn=0.4;
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
disp('Numerator polynomial');
disp(b);
disp('Denominator polynomial');
disp(a);
w=0:0.01/pi:pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');

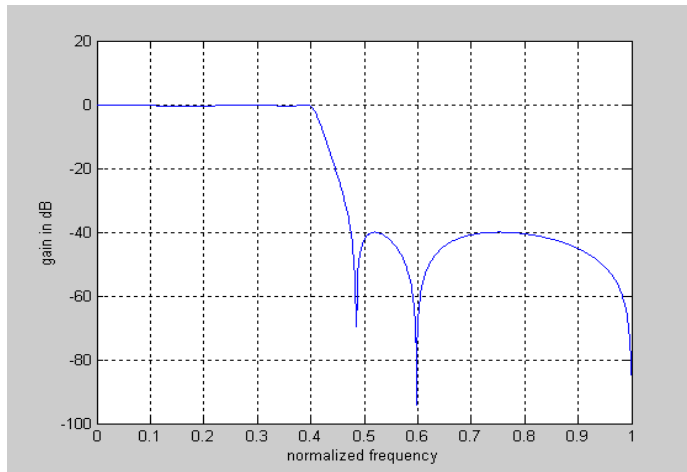
```

خرج هذا البرنامج هو:

```

Numerator polynomial
0.0528 0.0797 0.1295 0.1295 0.0797 0.0528
Denominator polynomial
1.0000 -1.8107 2.4947 -1.8801 0.9537 -0.2336

```



شكل ٧-١٢ إستجابة مرشح المثال ٧-٥.



وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة دالة العبور لهذا المرشح كالتالي:

$$H(z) = \frac{0.0528 + 0.0797z^{-1} + 0.129z^{-2} + 0.129z^{-3} + 0.0797z^{-4} + 0.0528z^{-5}}{1 - 1.81z^{-1} + 2.49z^{-2} - 1.88z^{-3} + 0.953z^{-4} - 0.233z^{-5}} \quad (٥٢-٧)$$

شكل ١٢-٧ يبين الاستجابة الترددية لهذا المرشح.

البرنامج التالي يبين طريقة رسم أصفار وأقطاب هذا المرشح:

```
%elliptic IIR LP digital filter design (poles and zeros)
```

```
N=5;
```

```
Rp=0.5;
```

```
Rs=40;
```

```
wn=0.4;
```

```
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
```

```
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
```

```
disp('Zeros are:');
```

```
disp(z);
```

```
disp('Poles are:');
```

```
disp(p);
```

```
disp('Gain constant is');
```

```
disp(k);
```

```
zplane(b,a);
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي وأقطاب وأصفار هذا المرشح موضحة شكل ١٣-٧:

```
Zeros are:
```

```
-1.0000
```

```
-0.3020 + 0.9533i
```

```
-0.3020 - 0.9533i
```

```
0.0474 + 0.9989i
```

```
0.0474 - 0.9989i
```

```
Poles are:
```

```
0.2787 + 0.8973i
```

```
0.2787 - 0.8973i
```

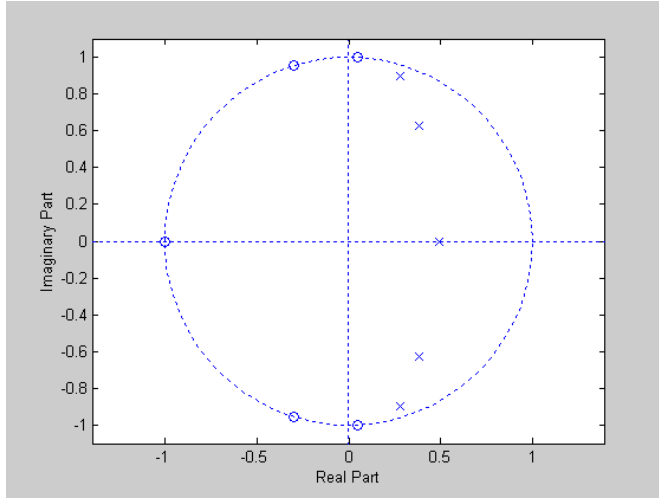
```
0.3812 + 0.6274i
```

```
0.3812 - 0.6274i
```

```
0.4909
```

```
Gain constant is
```

```
0.0528
```



شكل ٧-١٣ أقطاب وأصفار مرشح المثال ٧-٥.

**مثال ٧-٦:** حدد دالة العبور وارسم الاستجابة لمرشح رقمي BPF من الدرجة الثامنة من النوع Butterworth. تردد حافة العبور لهذا المرشح هو  $w_p=0.4$  حتى  $w_p=0.7$ . المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح. البرنامج التالي تم تنفيذه على الـ MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%butterworth IIR BP digital filter
N=8;
M=N/2;
w1=0.4;
w2=0.7;
wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(M,wn);
disp('numerator polynomial');disp(b);
disp('denominator polynomial');disp(a);
w=0.2*pi:0.01/pi:0.85*pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');
```

خرج هذا البرنامج هو:

```
numerator polynomial
0.0186    0 -0.0743    0 0.1114    0 -0.0743 0 0.0186
denominator polynomial
1.0000 0.9780 1.9399 1.3386 1.6271 0.7349 0.5826 0.1386 0.0762
```

وعلى ذلك حاول كتابة معادلة دالة العبور لهذا التحويل.

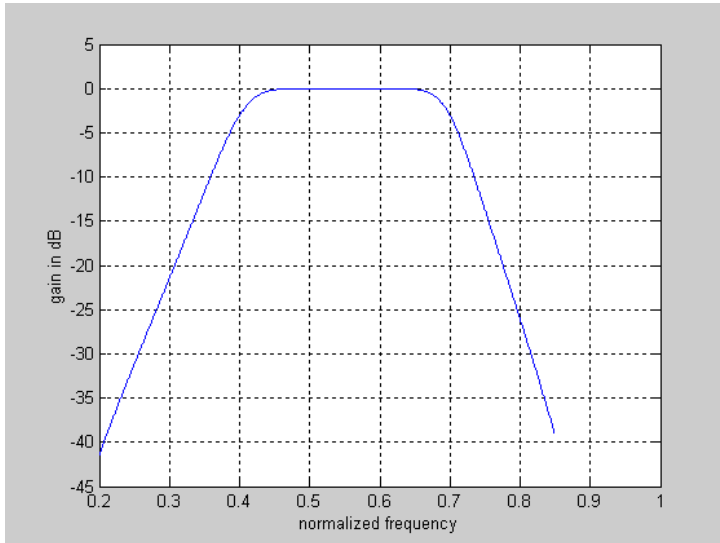
شكل ٧-١٤ يبين دالة العبور لهذا المرشح.

البرنامج التالي يبين كيفية الحصول على أقطاب وأصفار هذا المرشح وشكل ٧-١٥ يبين هذه الأقطاب والأصفار.

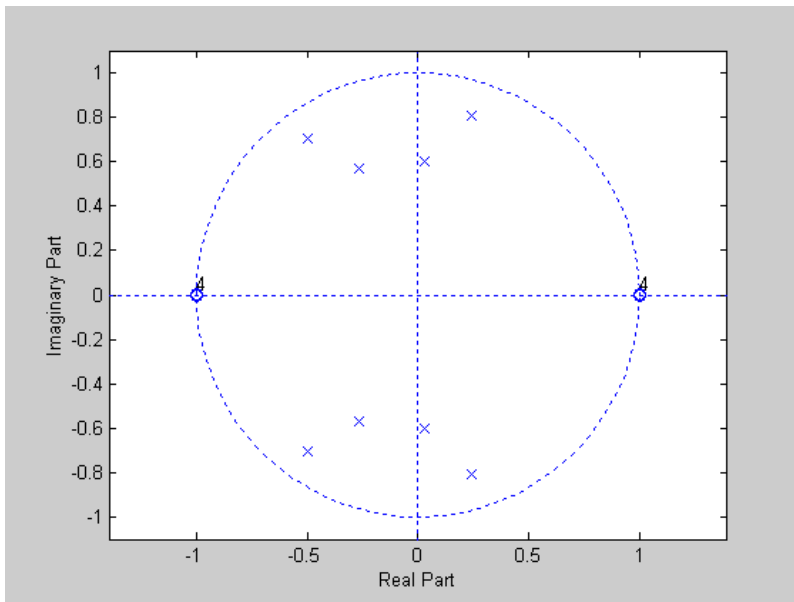
```
%butterworth IIR BP digital filter design (poles and zeros)
N=8;
w1=0.4;
w2=0.7;
wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(N/2,wn);
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
disp('Zeros are:');disp(z);
disp('Poles are:');disp(p);
disp('Gain constant is');disp(k);
zplane(b,a);
```

خرج هذا البرنامج هو:

```
Zeros are:
1.0001
1.0000 + 0.0001i
1.0000 - 0.0001i
0.9999
-1.0001
-1.0000 + 0.0001i
-1.0000 - 0.0001i
-0.9999
Poles are:
-0.4963 + 0.7058i
-0.4963 - 0.7058i
0.2419 + 0.8060i
0.2419 - 0.8060i
-0.2651 + 0.5715i
-0.2651 - 0.5715i
```



شكل ٧-١٤: دالة العبور لمرشح المثال ٧-٦.



شكل ٧-١٥: أصفار وأقطاب مرشح المثال ٧-٥.

0.0305 + 0.6027i  
 0.0305 - 0.6027i  
 Gain constant is  
 0.0186

## ٧-٧ التحويل الطيفي للمرشحات

### Spectral transformation of filters

لقد رأينا فيما سبق أن كل ما تم عرضه أو شرحه كان يتعلق بالمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة LPF، فماذا عن الأنواع الأخرى، HPF و BPF و BSF؟ بل إنه أحيانا نقوم بتصميم مرشح LPF بتردد قطع معين، ثم بعد قليل نريد تصميم مرشح آخر LPF مثل السابق تماما سوى أنه يختلف معه فقط في تردد القطع  $w_c$ ، فهل نقوم بتصميم هذا المرشح من البداية مرة أخرى أم أنه يمكننا الاستفادة بالمرشح الذي تم تصميمه وعن طريق تحويله بسيطة يمكننا الحصول على المرشح الجديد. هذا ما سنراه في هذا الجزء حيث سنرى كيف أنه بدءا من مرشح نموذج أو مبدئي Prototype LPF يمكننا الحصول على كل أنواع المرشحات الأخرى بما فيها LPF آخر، و HPF و BPF و BSF. سنذكر هنا هذه التحويلات بدون برهان أو إثبات حيث البراهين موجودة في العديد من المراجع المتخصصة ثم إننا لن تضيف الكثير ولذلك سنكتفي بذكرها فقط. سنفترض هنا أننا صممنا مرشح النموذج من النوع LPF له تردد قطع  $w_c$  ونريد الحصول منه على أحد الصور الأخرى.

### أولاً: الحصول على مرشح LPF بتردد قطع مختلف عن المرشح النموذج

كما ذكرنا أن لدينا مرشح LPF تردد القطع له هو  $w_c$  ونريد الحصول منه على مرشح آخر LPF بتردد قطع آخر  $w_{c1}$ ، وبالطبع فإن مقدار الاستجابة الترددية سيكون هو نفسه لكل من المرشحين. في هذه الحالة يتم استخدام التحويل التالي:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \quad (٥٣-٧)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)} \quad (٥٤-٧)$$

كمثال على ذلك سنفترض المرشح الرقمي من الدرجة الثالثة والذي تم تصميمه بطريقة التحويل الخطي bilinear transformation وكان تردد القطع له هو  $w_c = 0.25\pi$  ونريد تغير تردد القطع إلى  $0.35\pi$ . باستخدام المعادلة (٥٤ - ٧) ووضع  $w_c = 0.25\pi$  و  $w_{c1} = 0.35\pi$  نحصل على قيمة  $\alpha = -0.1933636$ . الآن بالتعويض بقيمة  $\alpha$  في المعادلة (٥٣ - ٧) ثم التعويض بهذه القيمة للمتغير  $Z$  في معادلة المرشح الأصلي في المعادلة (٥١ - ٧) نحصل على معادلة المرشح الجديد كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.2172235(1+z^{-1})^3}{(1-0.0694472z^{-1})(1-0.1848053z^{-1}+0.337566z^{-2})}$$

### ثانيا: الحصول على مرشح HPF من مرشح LPF

في هذه الحالة سنستخدم التحويل التالي:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}} \quad (٥٥-٧)$$

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)} \quad (٥٦-٧)$$

حيث  $w_{c1}$  هي تردد القطع للمرشح HPF.

### ثالثا : الحصول على مرشح BPF من مرشح LPF

في هذه الحالة نستخدم التحويل التالي:

$$Z^{-1} = -\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\frac{\beta-1}{\beta+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + 1} \quad (٥٧-٧)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2}+w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2}-w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \cot\left(\frac{w_{c2}-w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٥٨-٧)$$

حيث  $w_{c2}$  هي تردد القطع الأعلى و  $w_{c1}$  هي تردد القطع الأسفل للمرشح BPF.

#### رابعاً: الحصول على مرشح BSF من مرشح LPF

في هذه الحالة نستخدم التحويلة التالية:

$$Z^{-1} = -\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + \frac{1-\beta}{1+\beta}}{\frac{1-\beta}{1+\beta}Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + 1} \quad (٥٩-٧)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2}+w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2}-w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \tan\left(\frac{w_{c2}-w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٦٠-٧)$$

حيث  $w_{c2}$  هي تردد القطع الأعلى و  $w_{c1}$  هي تردد القطع الأسفل للمرشح BSF.

#### ٨-٧ تمارين

١- إفترض  $H(z)$  هي دالة العبور لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF، تردد حافة مجال العبور هي  $w_p$ ، وتردد حافة مجال الوقف هي  $w_s$ ، التموجات في مجال العبور هي  $\delta_p$ ، والتموجات في مجال الوقف هي  $\delta_s$ . إفترض توصيل مرشحين متماثلين تماماً وكل منهم

له دالة العبور  $H(z)$  وتم توصيلهم على التوالي. ما هو مقدار التموجات في مجال العبور والوقف عند الترددين  $wp$  و  $ws$  على التوالي. إجعل إجابتك أكثر عمومية بفرض توالى من  $M$  من المرشحات السابقة.

٢- إفترض أن  $HLP(z)$  تمثل دالة العبور لمرشح منفذ للترددات المنخفضة معاملاته حقيقية وله تردد حافة مجال العبور هي  $wp$ ، وتردد حافة مجال الوقف هي  $ws$ ، التموجات في مجال العبور هي  $\delta p$ ، والتموجات في مجال الوقف هي  $\delta s$ . إرسم شكل مقدار استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة  $HLP(-z)$  على المدى  $-\pi \leq w \leq \pi$  وحدد ترددات الحافة لكل من مجالى العبور والوقف  $wp$  و  $ws$ .

٣- استنتج دالة العبور الرقمية  $H(z)$  من دالة العبور السببية causal التالية:

$$Ha(s) = \frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 3)}$$

استخدم طريقة تساوى الصدمة impulse invariant حيث  $T=0.1$ .

٤- استنتج دالة العبور الرقمية  $H(z)$  من دالة العبور السببية causal التالية:

$$Ha(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s + 1)}$$

استخدم طريقة تساوى الصدمة impulse invariant حيث  $T=0.2$ .

إستخدم ماتلاب في حل التمارين التالية :

٥- صمم LPF بالمواصفات التالية :

- معدل التقطيع  $\text{sampling rate} = 8000 \text{ sample/sec}$
- حافة مجال المرور عند التردد  $1500 \text{ Hz}$  مع السماح بتموجات ripples في هذا المجال مقدارها  $3 \text{ dB}$
- حافة مجال الوقف عند التردد  $2000 \text{ Hz}$  مع اضمحلال مقداره  $40 \text{ dB}$
- تموجات متساوية في مجال المرور واضمحلال ثابت في مجال الوقف
- استخدم طريقة تساوى الصدمة IIM Impulse Invariant Method.



- أ- استخدم  $T=1$  واحسب دالة العبور للمرشح، وارسم مقدار الاستجابة الترددية magnitude frequency response واستجابة الصدمة  $h[n]$ .
- ب- استخدم  $T=1/8000$  وأعد الجزء أ.
- ت- قارن بين التصميمين وعلق على الناتج .
- ٦- أعد التمرين ٥ مستخدماً طريقة التحويل الخطى bilinear transformation.
- ٧- صمم مرشح LPF من النوع بتورث بالمواصفات التالية :
- حافة مجال العبور عند التردد  $\omega_p=0.4\pi$  و  $R_p=0.5\text{dB}$
  - حافة مجال الوقف عند التردد  $\omega_s=0.6\pi$  و  $A_s=50\text{dB}$
- صمم المرشح بطريقة تساوى استجابة الصدمة IIM مستخدماً  $T=2$ . إحسب دالة العبور ومقدار الاستجابة الترددية وكذلك استجابة الصدمة للمرشح  $h[n]$ .
- ٨- أعد التمرين السابق مستخدماً طريقة التحويل الخطى.
- ٩- أعد تمرين ٣ وتمرين ٤ مستخدماً المرشحات تشيبيشيف ١ و تشيبيشيف ٢
- ١٠- أعد تمرين ٣ وتمرين ٤ مستخدماً مرشح المنحنى elliptic .
- ١١- صمم مرشح LPF بالمواصفات التالية :
- حافة مجال العبور عند التردد  $\omega_p=0.3\pi$  و  $R_p=0.5\text{dB}$
  - حافة مجال الوقف عند التردد  $\omega_s=0.4\pi$  و  $A_s=50\text{dB}$
- أ- استخدم الدالة buttord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح بتورث. إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.
- ب- استخدم الدالة cheby1ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف
١. إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

ت- استخدم الدالة cheby2ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف

٢. إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال

الوقف بالديسبل.

ث- استخدم الدالة ellipord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح منحني elliptic.

إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال

الوقف بالديسبل.

ج- قارن درجات المرشحات السابقة ، وقيمة أقل اضمحلال في المرشحات السابقة.

١٢- صمم مرشح منفذ مجال من الترددات BPF مستخدما طريقة تشيبيشيف ٢

وبالمواصفات التالية:

• حافة مجال الوقف الأولى  $ws1=0.3\pi$  و حافة مجال الوقف الثانية  $ws2=0.6\pi$

• حافة مجال المرور الأولى  $wp1=0.4\pi$  و حافة مجال المرور الثانية  $wp2=0.5\pi$

•  $Rp=0.5dB$  و  $As=50dB$

إرسم مقدار الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للمرشح.

١٣- أعد تمرين ٨ مستخدما طريقة تشيبيشيف ١.

١٤- أعد تمرين ٨ مستخدما طريقة المنحنى elliptic.

# الفصل الثامن

## تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية محددة الطول

### Design of Finite Impulse Response FIR Digital Filters

#### ٨-١ مقدمة

لقد رأينا في الفصل السابق الطرق المختلفة لتصميم المرشحات من النوع IIR ، وسنرى في هذا الفصل الطرق المختلفة لتصميم المرشحات من النوع FIR. قبل البدء في عرض هذه الطرق سنعيد هنا الخواص الهامة لهذا النوع من المرشحات والتي سبق ذكرها في الفصل السابع:

١- استجابة الصدمة للمرشحات من النوع FIR تكون محددة الطول ويمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

$$h[n] \neq 0 \quad \text{for} \quad N_1 \leq n \leq (N_2 = N_1 + N - 1) \quad (٨-١)$$

حيث  $N$  هي طول استجابة الصدمة والذي يمتد من  $N_1$  إلى  $N_2$  و  $N_1$  و  $N_2$  من الممكن أن تكون صفر، أو هكذا تكون في العادة.

٢- الاستجابة الترددية  $H(w)$  للمرشحات FIR تكون كثيرة حدود في  $e^{jw}$  ومحددة الطول ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(w) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n](e^{jw})^{-n} \quad (٨-٢)$$

حيث  $N_1$  و  $N_2$  أرقام صحيحة تمثل أرقام أول وآخر عينة في استجابة الصدمة  $h[n]$ . معاملات استجابة الدفعة التي عددها  $N$  هي المعاملات المطلوب تحديدها عند تصميم هذا النوع من المرشحات.

**٣-** تصميم المرشح من النوع FIR هو حساب الاستجابة الترددية  $H(w)$  التي تكون أقرب ما يمكن من الاستجابة الترددية المطلوبة، ويتم ذلك عن طريق إيجاد أو حساب معاملات استجابة الصدمة  $h[n]$  التي تحقق ذلك. درجة المرشح أيضا التي هي طوله  $N$  تعتبر أحد المتغيرات المستخدمة للحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة.

**٤-** دالة الانتقال transfer function هي محول  $Z$  لاستجابة الصدمة وهي كثيرة حدود في المتغير المركب  $Z$  محدودة الطول وليس لها مقام ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(z) = H(e^{jw}) \Big|_{e^{jw}=z} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n]z^{-n} \quad (3-8)$$

ونسنتج من ذلك أن هذا النوع من المرشحات يكون دائما مستقر لعدم وجود أقطاب في دالة العبور.

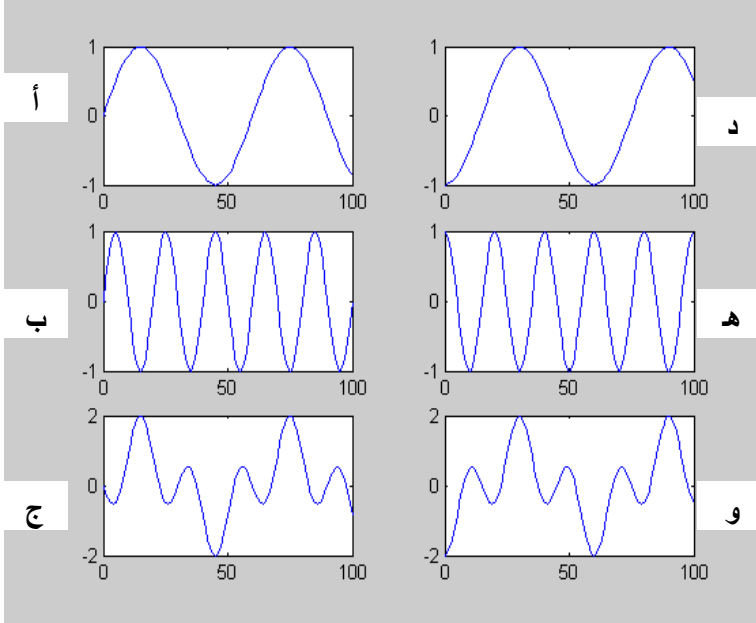
**٥-** هذا النوع من المرشحات FIR تكون زاوية الطور له  $\theta(w)$  خطية دائما على العكس من المرشحات IIR التي كانت زاوية الطور لها غير خطية. خطية زاوية الطور تجعل هذا النوع من المرشحات مناسبا جدا للكثير من التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة.

**٦-** بما أن طول استجابة الصدمة يكون محدود فإنه يمكن في هذه الحالة استخدام عملية الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات.

**٧-** هذه المرشحات ليست حساسة للضوضاء لعدم وجود تغذية عكسية، وعدم وجود أقطاب في معادلة دالة العبور كما كان في حالة المرشحات IIR.

٨- درجات هذه المرشحات  $N$  قد تمتد إلى قيم كبيرة جدا للحصول على مواصفات معينة للمرشح ، فقد تمتد إلى ٥٠٠ مثلاً، وهذا يجعل هذه المرشحات معقدة وتحتاج إلى وقت كبير لحساب معاملاتهما calculation time كما أنها تسبب زمن تأخير كبير.

خاصية زاوية الطور الخطية التي يتميز بها هذا النوع من المرشحات تعتبر من الخواص المهمة بالذات في التطبيقات التي من الضروري الحفاظ فيها على شكل إشارة الخرج من المرشح بحيث تكون مثل شكل إشارة الدخل كما في المرشحات التي تستخدم في معالجة الصور. ولكي نرى كيف أن الطور الخطي يحافظ على شكل الإشارة سنعرض المثال التالي:



شكل ٨-١ إضافة طور ثابت لا يغير من شكل إشارة المجموع.

مثال ٨-١: شكل ٨-١ أ يبين الإشارة:

$$X = \sin((\pi/30)*n) \quad (٤-٨)$$

وشكل ٨-١ ب يبين الإشارة:

$$Y = \sin((\pi/10)*n) \quad (٥-٨)$$

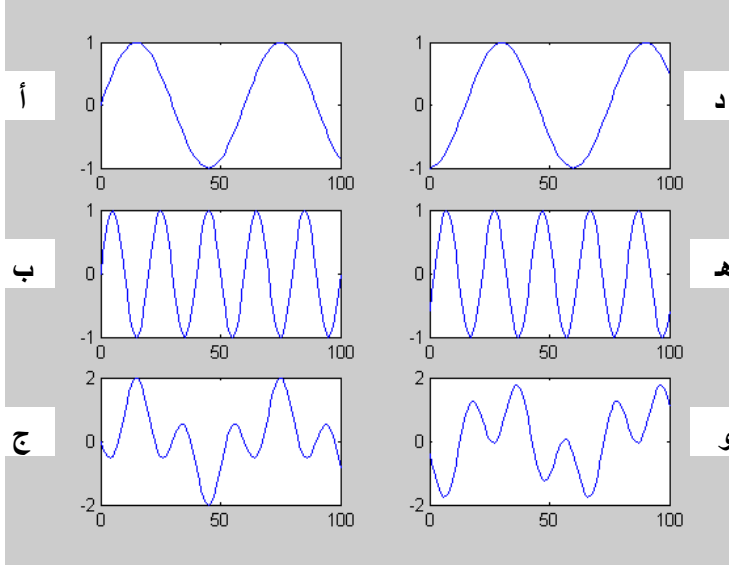
وشكل ٨-١ ج يبين حاصل جمع هاتين الإشارتين. الآن سنقوم بإزاحة الطور للإشارة X لتصبح:

$$X_1 = \sin((\pi/30)*(n-15)) \quad (٦-٨)$$

كما في شكل ٨-١ د. وإزاحة الطور للإشارة Y بنفس المقدار لتصبح:

$$Y_1 = \sin((\pi/10)*(n-15)) \quad (٧-٨)$$

كما في شكل ٨-١ هـ. حاصل جمع الإشارتين  $X_1$  و  $Y_1$  مبين في شكل ٨-١ و. نلاحظ من شكلي ٨-١ ج و ٨-١ د أن إشارة المجموع متطابقة ولهما نفس الشكل تماما سوى أن هناك إزاحة في زاوية الطور بينهما.



شكل ٨-٢ إضافة طور متغير غير خطي لا يحافظ على شكل الإشارة الناتجة.

شكلي ٢-٨ أ و ٢-٨ ب يبينان نفس الإشارتين السابقتين :

$$X = \sin((\pi/30)*n) \quad (٨-٨)$$

$$Y = \sin((\pi/10)*n) \quad (٩-٨)$$

ومجموعهما كما هو في شكل ٢-٨ ج. الآن سنغير طور الإشارة الأولى ليصبح:

$$X_1 = \sin((\pi/30)*(n-15)) \quad (١٠-٨)$$

وأما طور الإشارة الأخرى فسيغير ولكن ليس بنفس المقدار ليصبح :

$$Y_1 = \sin((\pi/10)*(n-2)) \quad (١١-٨)$$

مجموع الإشارتين  $X_1$  و  $Y_1$  هذه المرة موضح في شكل ٢-٨ و. قارن الشكلين ٢-٨ ج و ٢-٨ و هذه المرة ستجد أنهما مختلفان في الشكل على عكس ما كان في شكلي ١-٨ ج و ١-٨ و. نستنتج من ذلك أن الإزاحة الثابتة أو الخطية في الطور تحافظ على شكل الإشارة، بينما الإزاحة الغير خطية فتغير من شكل الإشارة وميزة الحفاظ على شكل الإشارة تكون مهمة في الكثير من التطبيقات بالذات المتعلقة منها بالرؤية، وهذا يوضح ميزة أن المرشحات FIR تعطى زاوية طور خطية وهي ميزة غير موجودة في المرشحات السابقة .IIR

## ٢-٨ تصميم المرشحات FIR الخطية الطور باستخدام استجابة الاندفاع المتماثلة

### Design of a linear phase FIR filters using symmetric impulse response

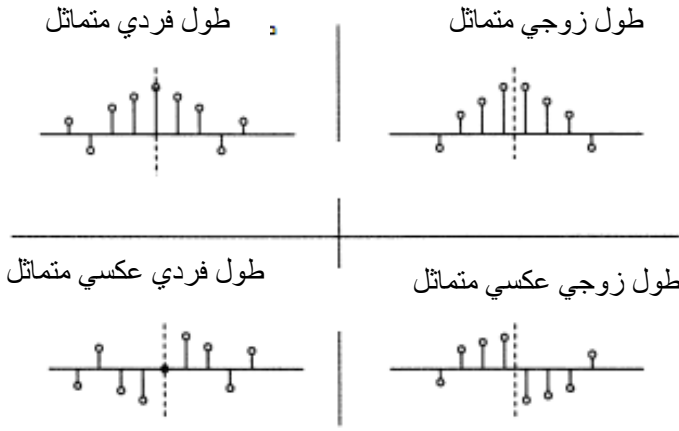
سنرى في هذا الجزء أنه لكي يكون المرشح من النوع FIR خطي الطور فإنه لابد أن تكون استجابة الدفعة له impulse response متماثلة حول نقطة الأصل. هناك أربع حالات لهذا التماثل على حسب إذا كان طول هذه الاستجابة فردى أو زوجى وعلى حسب نوع التماثل كما في شكل ٣-٨ وكما سنرى في الأجزاء التالية:

## ٨-٢-١ المرشح FIR الفردى الطول المتماثل

هذه المرشحات الفردية يمكن كتابة المعادلة العامة لها كما يلي:

$$h[n]=h[N-n], \quad 0 \leq n \leq N \quad (٨-١٢)$$

بفرض أن عدد عينات هذا الطول هو ٩ عينات كمثل فقط، حيث ستكون  $N=8$ ، وعلى ذلك يمكن كتابة دالة العبور كما يلي:



شكل ٨-٣ الحالات المختلفة لتمثيل طول المرشحات الخطية الطور من النوع FIR

$$H(z)=h[8]+h[7]z^{-1}+h[6]z^{-2}+h[5]z^{-3}+h[4]z^{-4}+h[3]z^{-5}+h[2]z^{-6}+h[1]z^{-7}+h[0]z^{-8} \quad (٨-١٣)$$

ستكون استجابة الصدمة لهذا الطول متماثلة حول العينة  $h[4]$ ، بحيث ستكون  $h[0]=h[8]$ ، وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة (٨-١٣) كما يلي:

$$H(z)=h[0](1+z^{-8})+h[1](z^{-1}+z^{-7})+h[2](z^{-2}+z^{-6})+h[3](z^{-3}+z^{-5})+h[4]z^{-4} \quad (٨-١٤)$$



المعادلة (٨-١٤) يمكن وضعها أيضا على الصورة التالية بأخذ  $z^{-4}$  مشترك:

$$H(z)=z^{-4}\{h[0](z^4+z^{-4})+h[1](z^3+z^{-3})+h[2](z^2+z^{-2})+h[3](z^1+z^{-1})+h[4]\} \quad (٨-١٥)$$

باستخدام بعض الدوال المثلثية يمكن كتابة المعادلة السابقة على صورة استجابة ترددية كما يلي:

$$H(e^{jw})=e^{-jw4}\{2h[0]\cos(4w)+2h[1]\cos(3w)+2h[2]\cos(2w)+2h[3]\cos(w)+h[4]\} \quad (٨-١٦)$$

من هذه المعادلة نرى أن زاوية الطور يمكن كتابتها كما يلي:

$$\Theta(w) = -4w \quad (٨-١٧)$$

والتي تمثل دالة خطية في متغير التردد  $w$ . يمكن أيضا كتابة ما يسمى بمجموعة التأخير group delay والذي يساوى تفاضل زاوية الطور كما يلي:

$$GD = 4 \quad (٨-١٨)$$

في النهاية يمكن كتابة الصورة العامة للاستجابة الترددية لهذا النوع من المرشحات كما يلي:

$$H(e^{jw}) = e^{-jwN/2} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2} a[n] \cos(wn) \right\} \quad (٨-١٩)$$

حيث:  $a[0]=h[N/2]$ ,  $a[n]=2h[N/2 - n]$ ,  $1 \leq n \leq N/2$

### ٨-٢-٢ المرشح FIR الزوجي الطول المتماثل

بفرض أن عدد عينات هذا الطول هو ٨ عينات كمثال فقط، حيث ستكون  $N=7$ ، وعلى ذلك يمكن تمثيل هذه العينات كما يلي:  $h[0]=h[7]$ ,  $h[1]=h[6]$ ,  $h[2]=h[5]$ ,  $h[3]=h[4]$  ويمكن كتابة دالة الانتقال كالتالي:

$$H(z)=h[0](1+z^{-7})+h[1](z^{-1}+z^{-6})+h[2](z^{-2}+z^{-5})+h[3](z^{-3}+z^{-4}) \quad (٢٠-٨)$$

وبإجراء بعض الاختصارات كما فعلنا في الجزء السابق، يمكن كتابة الاستجابة الترددية لهذا النظام كما يلي:

$$H(e^{jw})=e^{-jw7/2}\{2h[0]\cos(7w/2)+2h[1]\cos(5w/2)+2h[2]\cos(3w/2)+2h[3]\cos(w/2)\} \quad (٢١-٨)$$

حيث نلاحظ أن معادلة زاوية الطور خطية في المتغير  $w$  ويمكن كتابتها كما يلي:

$$\Theta(w) = -7w/2 \quad (٢٢-٨)$$

وكذلك مجموعة التأخير ستكون:  $GD=7/2$

يمكن كتابة الصورة العامة لمعادلة الاستجابة الترددية في هذه الحالة كما يلي:

$$H(e^{jw}) = e^{-jwN/2} \left\{ \sum_{n=1}^{(N+1)/2} b[n] \cos(w(n-0.5)) \right\} \quad (٢٣-٨)$$

حيث:  $b[n]=2h[(N+1)/2 - n]$ ,  $1 \leq n \leq (N+1)/2$

### ٨-٢-٣ المرشح FIR الفردى الطول عكسى التماثل

في هذه الحالة يمكن التعبير عن استجابة الصدمة كما يلي:

$$h[n]=-h[N-n], \quad 0 \leq n \leq N, \quad h[N/2]=0$$

ويمكن كتابة دالة العبور والاستجابة الترددية بفرض طول استجابة الصدمة يساوى ٩ كما يلي:

$$H(z)=z^{-4}\{h[0](z^4-z^{-4})+h[1](z^3-z^{-3})+h[2](z^2-z^{-2})+h[3](z^1+z^{-1})\} \quad (٢٤-٨)$$

$$H(e^{jw})=e^{-j(4w-\pi/2)}\{2h[0]\sin(4w)+2h[1]\sin(3w)+2h[2]\sin(2w)+2h[3]\sin(w)\} \quad (٢٥-٨)$$

ومعادلة زاوية الطور ستكون:

$$\Theta(w) = -4w - \pi/2, \quad GD = 4 \quad (٢٦-٨)$$

وستكون الصورة العامة للاستجابة الترددية كما يلي:

$$H(e^{jw}) = e^{-j(wN/2 - \pi/2)} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} c[n] \sin(wn) \right\} \quad (٢٧-٨)$$

$$c[n] = 2h[N/2 - n], \quad 1 \leq n \leq N/2 \quad \text{حيث:}$$

### ٨-٢-٤ المرشح FIR الزوجي الطول عكسي التماثل

في هذه الحالة أيضا وبفرض طول استجابة الصدمة يساوى ٨ فإن معادلة دالة العبور والاستجابة الترددية يمكن كتابتهما كما يلي:

$$H(z)=z^{-7/2}\{h[0](z^{7/2}-z^{-7/2})+h[1](z^{5/2}-z^{-5/2})+h[2](z^{3/2}-z^{-3/2})+h[3](z^{1/2}-z^{-1/2})\}H(e^{jw}) \\ =e^{-j(7w/2-\pi/2)}\{2h[0]\sin(7w/2)+2h[1]\sin(5w/2)+2h[2]\sin(3w/2)+2h[3]\sin(w/2)\} \quad (٢٨-٨)$$

حيث زاوية الطور ستعطى بالمعادلة التالية:

$$\Theta(w) = -7w/2 - \pi/2, \quad GD = 7/2 \quad (٢٩-٨)$$

والتي تمثل معادلة خطية في المتغير  $w$  أيضاً.  
الصورة العامة للاستجابة الترددية ستكون:

$$H(e^{jw}) = e^{-j(wN/2 - \pi/2)} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} d[n] \sin(w(n - 0.5)) \right\} \quad (٣٠-٨)$$

حيث:  $d[n] = 2h[(N+1)/2 - n]$ ,  $1 \leq n \leq (N+1)/2$

### ٣-٨ تحديد الأصفار للمرشحات FIR

سنفترض المرشحات المتماثلة أولاً، والتي يمكن كتابة دالة العبور لها كما يلي:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^N h[N-n]z^{-n} \quad (٣١-٨)$$

وذلك باستخدام شرط التماثل  $h[n] = h[N-n]$ . بوضع  $m = N-n$  في المعادلة (٣١-٨) يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$H(z) = \sum_{m=0}^N h[m]z^{-N+m} = z^{-N} \sum_{m=0}^N h[m]z^{-m} = z^{-N} H(z^{-1}) \quad (٣٢-٨)$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة دالة العبور للمرشح من النوع FIR العكسي التماثل كما يلي:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} = -\sum_{n=0}^N h[N-n]z^{-n} = -z^{-N} H(z^{-1}) \quad (٣٣-٨)$$

وذلك باستخدام شرط التماثل العكسي  $h[n] = -h[N-n]$  أيضاً. من المعادلتين السابقتين يمكننا ملاحظة ما يلي:

١- نلاحظ من المعادلتين (٣٢ - ٨) و (٣٣ - ٨) أنه إذا كان  $z=z_1$  يمثل صفر zero لدالة العبور  $h(z)$ ، فإن  $z=1/z_1$  ستكون صفرا أيضا لهذه الدالة.

٢- بالإضافة لذلك فإننا نعلم أن أي مرشح FIR تكون معاملات استجابة الاندفاع  $h[n]$  له حقيقية، فإن أصفاره تكون في أزواج مركبة مترافقة  $complex conjugate pairs$ ، أي أن أي صفر عند  $z=z_1$  مثلا، لابد أن يرافقه صفر عند  $z=z_1^*$ .

٣- وعلى ذلك فإن أي صفر مركب ليس على دائرة الوحدة لابد وأن يصاحبه أربعة أصفار كما يلي:

$$z = re^{\pm j\phi}, \quad z = \frac{1}{r} e^{\pm\phi} \quad (٣٤-٨)$$

أما بالنسبة للصفر على دائرة الوحدة  $r=1$  فإن مقلوبه سيكون واحد أيضا وسيظهر في صورة زوج من الأصفار فقط كما يلي:

$$z = e^{\pm j\phi} \quad (٣٥-٨)$$

وأما الصفر الحقيقي فسوف يظهر في صورة صفرين على المحور الحقيقي  $z=p$ ، فإذا كانت  $p=1$  فسوف يظهر كصفر واحد فقط.

شكل ٨-٤ أ يبين كل هذه الأحوال لأصفار المرشح الفردي المتماثل.

٤- بالنسبة للمرشح الزوجي المتماثل يمكننا كتابة المعادلة التالية:

$$H(-1)=(-1)^N H(1)=-H(1) \quad (٣٦-٨)$$

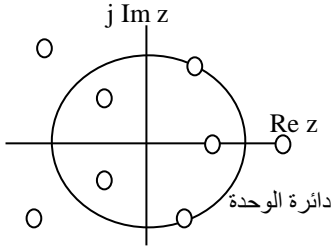
مما يعني أن  $H(-1)=0$ ، أي أن هذا النوع من المرشحات لابد أن يكون له صفر عند  $z=-1$ ، ووجود هذا الصفر يعني أنه لا يمكن تصميم مرشح منفذ للترددات العالية HPF باستخدام هذا النوع. شكل ٨-٤ ب يبين هذا النوع.

٥- بالنسبة للمرشحات العكسية التماثل فإن المعادلة (٣٤ - ٨) تعني أن  $H(1)=-H(1)$  مما يعني ضرورة وجود صفر عند النقطة  $z=1$  سواء كان المرشح زوجي أو فردي.

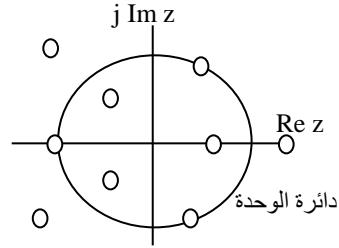
٦- بالنسبة للمرشح الفردي العكسي التماثل فإن  $H(-1) = -(-1)^N H(-1) = -H(-1)$ ، مما يعني أن هذا النوع من المرشحات سيكون له صفر عند  $z=1$  وآخر عند  $z=-1$ ، وبالتالي فإن هذا النوع لا يصلح للاستخدام لأى واحد من المرشحات LPF أو HPF أو BSF. شكل ٤-٨ ج يبين هذا النوع.

٧- بالنسبة للمرشح الزوجي التماثل فإنه بنفس الطريقة سنجد أن له صفر عند النقطة  $z=1$  وبالتالي فإنه لا يصلح لتصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF.

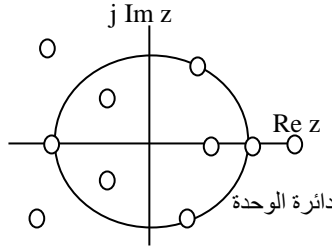
٨- من ذلك نرى أن المرشح الفردي الطول والمتماثل (النوع الأول) هو فقط الذى ليس عليه أى قيود ويمكن استخدامه فى تصميم أى نوع من المرشحات.



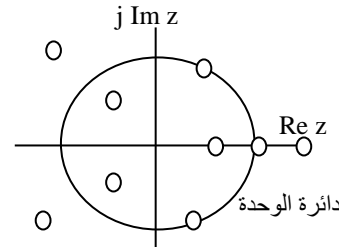
أ- الحالة الأولى فردى متماثل



أ- الحالة الثانية زوجى متماثل



أ- الحالة الثالثة فردى عكسى التماثل



أ- الحالة الرابعة زوجى عكسى التماثل

شكل ٤-٨ د توزيع الأصفار فى المستوى  $z$  المركب لمرشحات النوع FIR

## ٨-٤ تصميم المرشحات FIR باستخدام النوافذ

في هذه الطريقة نبدأ من الاستجابة الترددية المطلوبة أو المرغوب فيها للمرشح  $Hd(w)$  في النطاق الترددي، ومنها نحسب استجابة الصدمة لهذا المرشح  $hd[n]$  حيث كل من الاستجابتين السابقتين تربطهما علاقة تحويل فوريير كما يلي:

$$Hd(w) = \sum_{n=0}^{\infty} hd[n]e^{-jwn} \quad (٣٧-٨)$$

$$hd[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(w)e^{jwn} dw \quad (٣٨-٨)$$

لذلك فإنه بمعرفة الاستجابة الترددية يمكن استنتاج استجابة الاندفاع  $hd[n]$  باستخدام المعادلة (٣٨ - ٨). لسوء الحظ أن هذه الاستجابة  $hd[n]$  تكون لانهاية الطول في الاتجاه الموجب والسالب للمتغير  $n$ . لذلك فإنه للحصول على طول محدد لاستجابة الصدمة سنقوم بقطع عدد  $M-1$  من العينات من الاستجابة  $hd[n]$ ، وسيتم ذلك بضرب الاستجابة  $hd[n]$  في نافذة  $W[n]$  تكون مربعة الشكل طولها هو  $M-1$  من العينات كما يلي:

$$h[n] = hd[n]W[n] \quad (٣٩-٨)$$

حيث:

- $hd[n]$  هي استجابة الصدمة التي حصلنا عليها بالمعادلة (٣٨ - ٨) من الاستجابة الترددية المرغوب فيها.

- $h[n]$  هي استجابة الصدمة للمرشح من النوع FIR التي تم قطعها باستخدام النافذة  $W[n]$  والتي أصبحت محددة الطول كما يلي:

$$h[n] = \begin{cases} hd[n] & n=0,1,2,\dots,M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (٤٠-٨)$$

$W[n]$  هي استجابة الصدمة للنافذة المستخدمة والمحددة بالعلاقة:

$$W[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,\dots,M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (٤١-٨)$$

كما نعلم من خواص تحويل فوريير فإن حاصل الضرب في النطاق الزمني يكافئ ضرب التفاضل convolution في النطاق الترددي، وعلى ذلك فإن تحويل فوريير للاستجابة  $h[n]$  في المعادلة (٣٩ - ٨) يمكن كتابتها كالتالي:

$$H(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Hd(v)W(w-v)dv \quad (٤٢-٨)$$

حيث  $W(w)$  تمثل محول فوريير للنافذة  $W[n]$  وتعطى بالعلاقة التالية:

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} W[n]e^{jwn} \quad (٤٣-٨)$$

النافذة  $W[n]$  كما في المعادلة (٤١ - ٨) هي نافذة مربعة كل عيناتها تساوى واحد في المدى من  $n=1$  إلى  $n=M-1$ ، وبتطبيق ذلك في المعادلة (٤٣ - ٨) يمكننا أن نحصل على  $W(w)$  كما يلي:

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{wM}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{1}\right)} \quad (٤٤-٨)$$

من المعادلة (٤٤ - ٨) يمكننا أن نكتب مقدار الاستجابة الترددية للنافذة كما يلي:

$$|W(w)| = \frac{\left|\sin\left(\frac{wM}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{w}{1}\right)\right|} \quad (٤٥-٨)$$

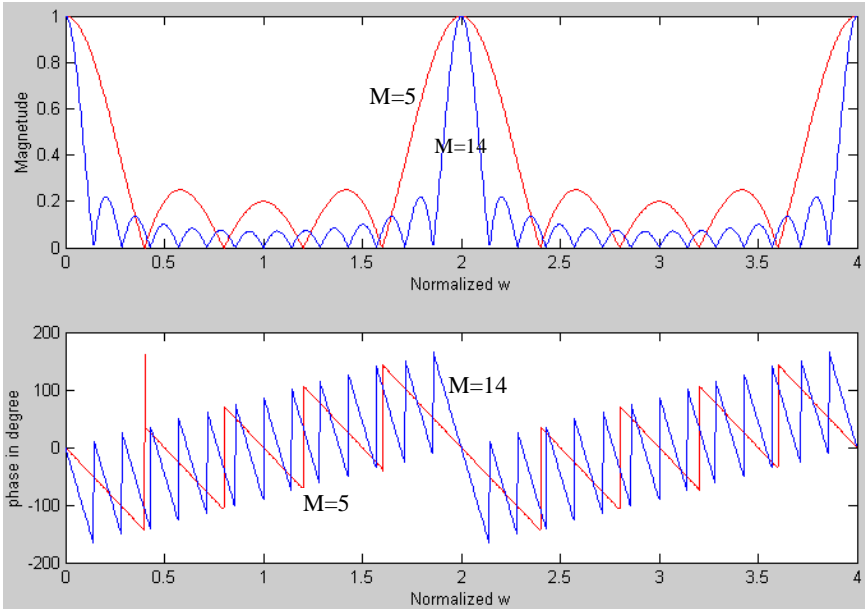
وأما زاوية الطور  $\theta(w)$  فيمكن كتابتها كالتالي:

$$\theta(w) = \begin{cases} -\frac{w(M-1)}{2} & \text{for } \sin\left(\frac{wM}{2}\right) \geq 0 \\ -\frac{w(M-1)}{2} + \pi & \text{for } \sin\left(\frac{wM}{2}\right) < 0 \end{cases} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{wM}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{1}\right)} \quad (٤٦-٨)$$



شكل ٨-٥ يبين الاستجابة الترددية لنافذة عرض استجابة الصدمة لها  $h$  وأخرى طولها  $14$ . لاحظ في هذا الشكل أنه مع زيادة عرض النافذة فإن الجرس الأساسي في main lobe الاستجابة الترددية يكون أكثر حدية (ضيقة) بينما عدد الأجراس الجانبية يكون أكثر وهذا سيكون له تأثير بالطبع على المرشح FIR الناتج كما سنرى.

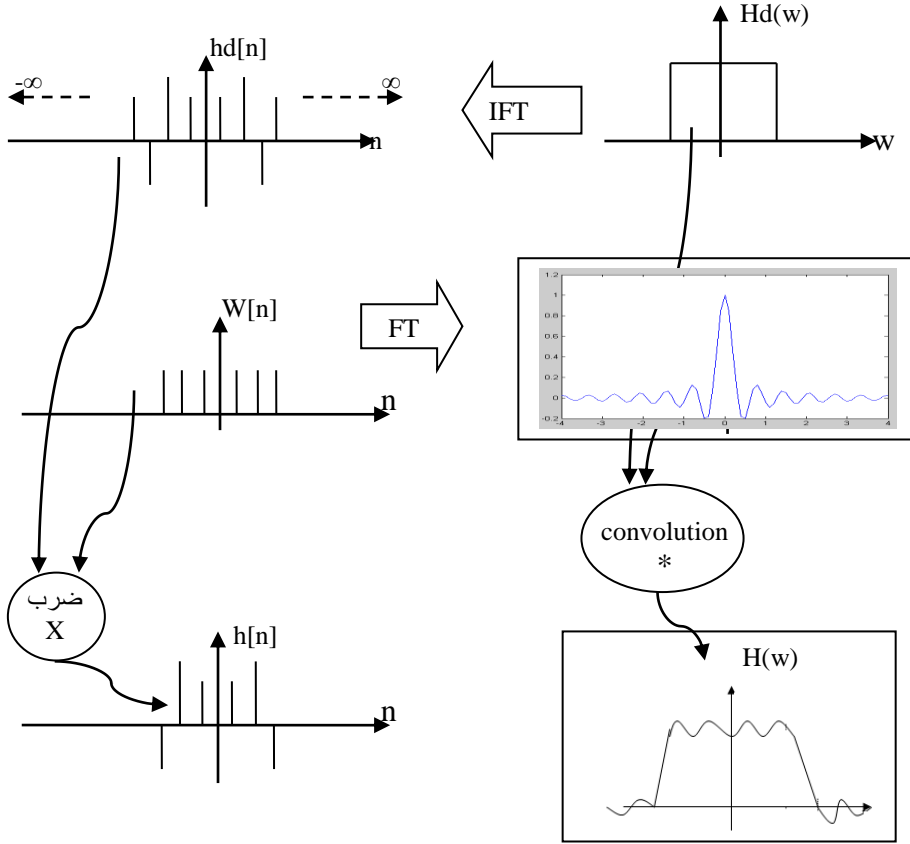
شكل ٨-٦ يبين كيفية الحصول على المرشح محدود الطول FIR باستخدام نافذة مربعة. من هذا الشكل نلاحظ أن عملية الضرب الالتفافي convolution على كل من  $W(w)$  و  $H_d(w)$  كما في المعادلة (٨-٤٢) ينتج عنها صورة مهزوزة smeared أو متموجة من الاستجابة الترددية  $H_d(w)$  وهي تمثل الاستجابة الترددية للمرشح الناتج.



شكل ٨-٥ الاستجابة الترددية والطور لنافذة طولها  $h$  وأخرى طولها  $14$ .

هنا يمكن أن نستنتج تأثير عرض النافذة على الاستجابة الترددية الناتجة، سنجد أنه مع زيادة عرض النافذة فإن عدد التموجات الجانبية يزيد وبالتالي فإن الاستجابة الناتجة تكون

أكثر خشونة أو تموجا بينما يقل عرض مجال الانتقال transition band وهى أهم ميزة من زيادة عرض النافذة. إن عرض الجرس الأساسى main lobe الناتج من النافذة يساوى  $4\pi/M$  حيث  $M$  هى عرض النافذة كما ذكرنا. لذلك مع زيادة  $M$  يقل عرض الجرس الأساسى وبالتالي يقل عرض مجال العبور كما ذكرنا.



شكل ٨-٦ الحصول على مرشح محدود الطول FIR باستخدام نافذة مربعة  $w[n]$

كما لاحظنا فإن طبيعة وشكل النافذة المستخدمة يكون له أكبر الأثر فى شكل الاستجابة الترددية الناتجة، لذلك كان لابد من تجربة أشكال أخرى لهذه النوافذ والتي لا تكون حادة

الانقلاب من مجال النفاذ إلى مجال التوقف كما رأينا في النافذة المربعة. وهذا كان موضوعا للكثير من الأبحاث التي تمت في هذا المجال والتي جاءت بالعديد من النوافذ التي يحمل كل منها مميزات وعيوب كما سنرى، حيث سنعرض في الجزء التالي لبعض من هذه النوافذ سريعا بما فيها النافذة المربعة.

### ١- النافذة المربعة:

$$W[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,\dots,M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (٤٧-٨)$$

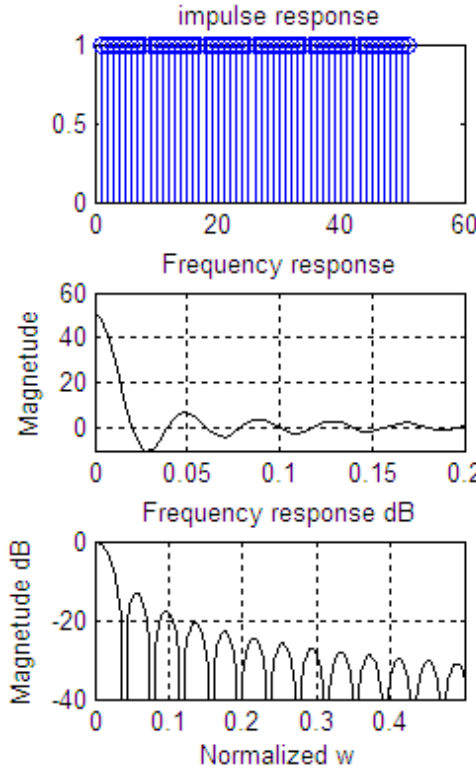
شكل ٨-٦ يبين نافذة مربعة طولها ٥١ عينة وكذلك مقدار الاستجابة الترددية والاستجابة الترددية بالديسبل، وقد تم ذلك باستخدام برنامج MATLAB التالي:

```
%demonstrate rectangle window
```

```
N=51;
h=ones(1,N);
subplot(3,1,1);
stem(h);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
H=freqz(h,1,w);
m1=abs(H);
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,H,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2 -10 60]);
title('Frequency response');
m1=20*log10(abs(H)/abs(H(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
AXIS([0 0.5 -40 0]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
```

جدول ٨-١ يبين المعاملات المختلفة للنافذة المربعة وبعض النوافذ الأخرى التي سنها. لاحظ أن عرض مجال الانتقال transition band يعطى بالعلاقة  $(wp-ws) = c/M$  حيث  $wp$

هي تردد نهاية مجال النفاذ pass band، و  $w_s$  هي تردد بداية مجال القطع أو المنع stop band، و  $C$  ثابت يعتمد على نوع النافذة كما في الجدول ٨-١ وأما  $M$  فهي عرض النافذة. في الجدول ٨-١ عرض الجرس الرئيسي للنافذة main lobe width يعرف على أنه المسافة بين نقطتي تقاطع الجرس الرئيسي مع خط الصفر أو محور التردد  $w$  في منحنى الاستجابة الترددية للنافذة. المستوى النسبي للجرس الجانبي relative side lobe level هو الفرق بين مقدار أول جرس جانبي ومقدار الجرس الرئيسي بالديسبل. لاحظ هذه المعاملات من شكل ٨-٦ للنافذة المربعة والأشكال التالية للنوافذ الأخرى.



شكل ٨-٧ النافذة المربعة

## ٢- نافذة بارتليت Bartlett window

لتجنب الحواف الحادة في النافذة المربعة كان التفكير في نافذة مثلثة تم اقتراحها عن طريق بارتليت حيث تعطى بالعلاقة التالية:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M-1}, & 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M-1}, & \frac{M-1}{2} \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (٤٨-٨)$$

%demonstrate Bartlett window

```
N=51;
bar=bartlett(N);
subplot(3,1,1);
stem(bar);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(bar,1,w);
m1=abs(h);
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,h,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2 -20 30]);
title('Frequency response');
m1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
AXIS([0 0.5 -80 0]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
```

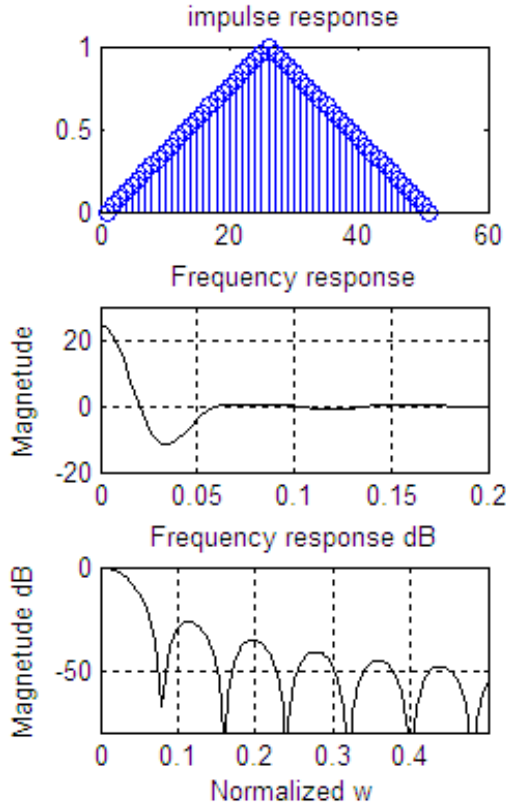
## ٢- نافذة هاننج Hanning window

$$W[n] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) \right], \quad -M < n \leq M \quad (٤٩-٨)$$

%demonstrate Hanning window

```
N=51;
han=hanning(N);
```

```
subplot(3,1,1);
stem(han);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(han,1,w);
m1=abs(h);
```



شكل ٨-٨ نافذة بارتليت.

```
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,h,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2 -20 30]);
title('Frequency response');
m1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
```

```

AXIS([0 0.5 -80 0]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');

```

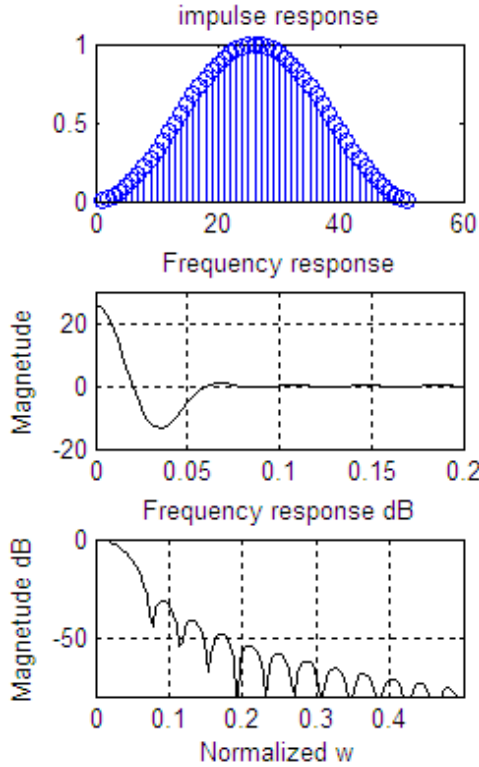
بنفس الطريقة يمكن رسم الاستجابة لباقي النوافذ وملاحظة الفروق بينها والتحقق من هذه الفروق كما في الجدول ٨-١.

### ٣- نافذة هامنج Hamming window

$$W[n] = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right), \quad -M < n \leq M \quad (٥٠-٨)$$

### ٤- نافذة بلاكمان Blackman window

$$W[n] = 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{2M+1}\right), \quad -M < n \leq M \quad (٥١-٨)$$



شكل ٨-٩ نافذة هامنج

## ٥- نافذة كايزر Kaiser window

$$(٥٢-٨) \quad W[n] = \frac{Io(\beta)}{Io(\alpha)}, \quad -M < n \leq M$$

حيث:

$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{2n}{2M+1} \right)^2}$$

$$Io(\chi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \left( \frac{\chi}{2} \right)^k \right]^2$$

و  $\alpha$  عبارة عن متغير مستقل.

جدول ٨-١ مقارنة لسلوك النوافذ الشهيرة

عرض مجال العبور Transition band width	أقل اضمحلال في مجال الوقف Min. stop band attenuation	مستوى الجرس الجانبي Relative side lobe level	عرض الجرس الرئيسي Main lobe width	نوع النافذة Window type
$1.8\pi/M$	20.9dB	13.3dB	$4\pi/(2M+1)$	Rectangle
$6.2\pi/M$	43.9dB	31.5dB	$8\pi/(2M+1)$	Hanning
$6.6\pi/M$	54.5dB	42.7dB	$8\pi/(2M+1)$	Hamming
$11\pi/M$	75.3dB	58.1dB	$12\pi/(2M+1)$	Blackman

مثال ٨-١: صمم مرشح رقمي من النوع FIR بالمواصفات التالية:

تردد حافة مجال المرور  $\omega_p=0.2\pi$ ، وتردد حافة مجال الوقف  $\omega_s=0.3\pi$ ، والتموجات ripples في مقدار الاستجابة في مجال المرور  $R_p=0.25\text{dB}$ ، وأقصى مقدار للاستجابة في مجال الوقف  $A_s=50\text{dB}$ . استخدم طريقة النوافذ التي سبق شرحها.



كل من نافذتي الهامنج وكيزر يمكنهما تحقيق هذا القدر من مقدار الاستجابة في مجال التوقف (أكثر من 50dB) ولذلك سنصمم هذا المرشح باستخدام هاتين النافذتين.

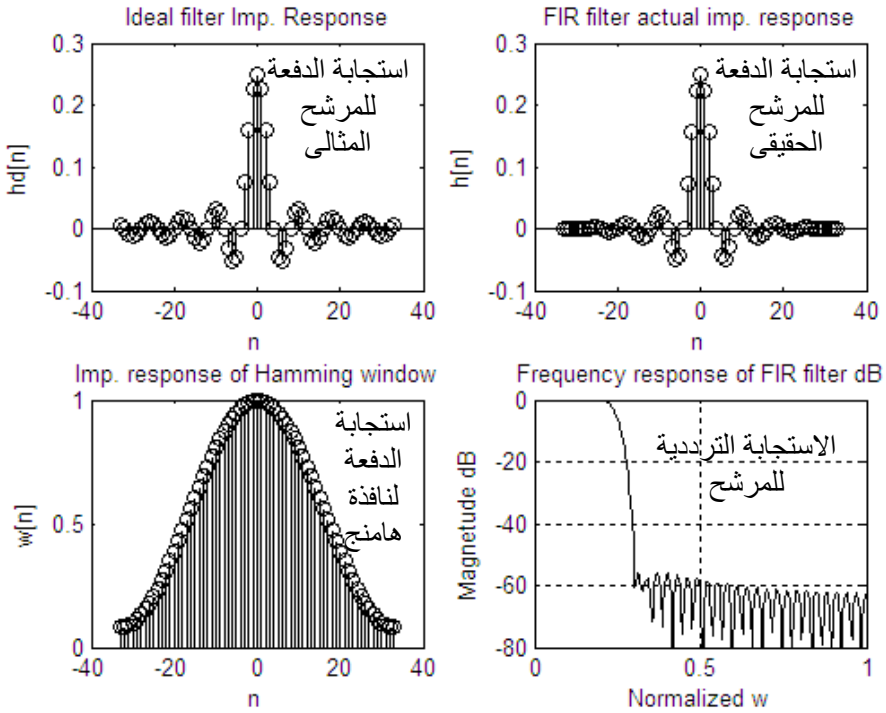
**أولاً:** باستخدام نافذة هامنج يوضح البرنامج التالي تصميم هذا المرشح باستخدام

.MATLAB

%Design of FIR filter using Hamming window, Example 8-1a

```
wp=0.2*pi;
ws=0.3*pi;
tr_band=ws-wp;
M=ceil(6.6*pi/tr_band)+1; %required length of the resp. it is always infinity
wc=(ws+wp)/2; %cuttoff frequency for the ideal filter
n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps; %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd=sin(wc*m)./(pi*m);
subplot(2,2,1);
stem(m,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response');
xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
w_ham=(hamming(M));
subplot(2,2,3);
stem(m,w_ham,'k');
title('Imp. response of Hamming window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_ham;
subplot(2,2,2);
stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response');
xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf, 'color', 'white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of FIR filter dB');
axis([0 1 -80 0]);
ylabel('Magnitude dB');
xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(1:1:wp*255/pi)) %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band
```

في بداية البرنامج تم تصميم مرشح مثالي استجابة الاندفاع له هي  $hd$  وطول هذه الاستجابة مفروض أن يمتد إلى الملائهية، ولكن لصعوبة ذلك تم أخذ عدد من النبضات منه هو  $M$  فقط. هذه الاستجابة تم ضربها في استجابة النافذة  $w\_ham$  لنحصل على الاستجابة للمرشح المطلوب  $h$  والتي منها تم حساب الاستجابة الترددية. شكل ٨-١٠ يبين استجابة الصدمة للمرشح المثالي ونافذة هامنج واستجابة الصدمة للمرشح المطلوب وكذلك الاستجابة الترددية لهذا المرشح. للتأكد من صحة التصميم فإن نهاية البرنامج تعطى أقل مقدار للموجات الناتجة من هذا التصميم في مجال المرور  $Rp = 0.0017$  وهو أفضل بكثير من المطلوب، كما أن أعلى اضمحلال تم التوصل إليه بهذا المرشح في مجال الوقف هو  $As = -55.86$  وهو أيضا أفضل من المطلوب.



شكل ٨-١٠ خطوات تصميم مرشح رقمي باستخدام نافذة هامنج.

**ثانياً:** باستخدام نافذة كيزر هناك قيم مختصرة للثابت  $\beta$  يمكن التعويض بها مباشرة بمعرفة قيمة أقل اضمحلال في مجال الوقف كما يلي:

$$\beta = \begin{cases} 0.1101(As-8.7) & \text{for } As > 50 \\ 0.5842(As-21)+0.07886(As+21) & \text{for } 21 < As < 50 \\ 0 & \text{for } As < 21 \end{cases} \quad (٥٣-٨)$$

بالتعويض في المعادلة السابقة بقيمة  $As=50$  سنحصل على  $\beta=4.543$ . بنفس الخطوات كما في الجزء السابق يمكن كتابة البرنامج التالي لتصميم المرشح باستخدام نافذة كيزر.

**%Design of FIR filter using Kaiser window, Example 8-1b**

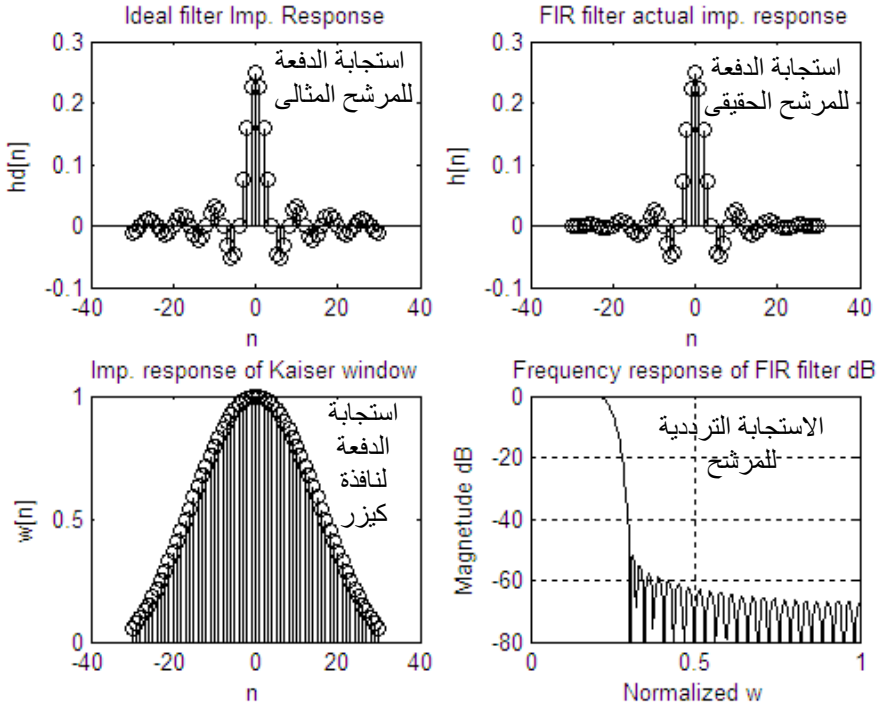
```
wp=0.2*pi;As=50;
ws=0.3*pi;
tr_band=ws-wp;
M=ceil((As-7.95)/(14.36*tr_band/(2*pi))+1)+1; %required length of the resp. it is
always infinity
wc=(ws+wp)/2; %cutoff frequency for the ideal filter
n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps; %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd=sin(wc*m)./(pi*m);
subplot(2,2,1);
stem(m,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response');
xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
beta=0.1102*(As-8.7);
w_kaiser=(kaiser(M,beta));
subplot(2,2,3);
stem(m,w_kaiser,'k');
title('Imp. response of Kaiser window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_kaiser;
subplot(2,2,2);
stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response');
xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf, 'color', 'white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB,'k');grid;
```

```

title('Frequency response of FIR filter dB');
axis([0 1 -80 0]);
ylabel('Magnitude dB');
xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(1:1:wp*255/pi)) %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band

```

شكل ٨-١١ يبين استجابة الصدمة للمرشح المثالي ونافاذة كيزر واستجابة الصدمة للمرشح المطلوب وكذلك الاستجابة الترددية لهذا المرشح. للتأكد من صحة التصميم فإن نهاية البرنامج تعطي أقل مقدار للموجات الناتجة من هذا التصميم في مجال المرور  $R_p = 0.0164$  وهو أفضل بكثير من المطلوب، كما أن أعلى اضمحلال في مجال الوقف  $A_s = 51.6726$  وهو أيضا أفضل من المطلوب.



شكل ٨-١١ خطوات تصميم مرشح رقمي باستخدام نافذة كيزر.

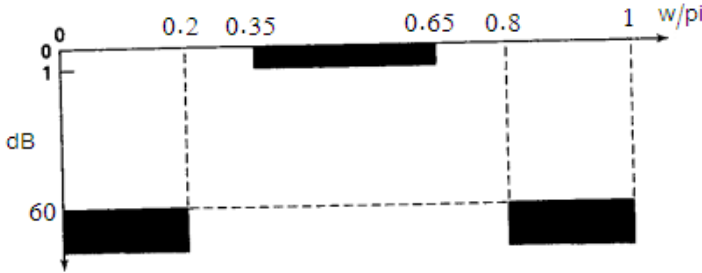
**مثال ٨-٢:** سنرى في هذا المثال كيفية تصميم مرشح منفذ للترددات المتوسطة BPF

باستخدام طريقة النوافذ التي سبق شرحها. مواصفات هذا المرشح كالتالي:

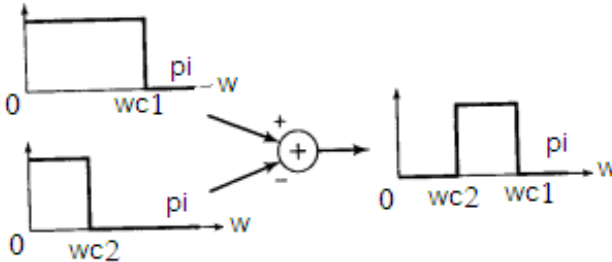
$$\begin{aligned} ws_1 = 0.2\pi \quad wp_1 = 0.35\pi \quad As_1 = -60\text{dB} \quad Rp = 1\text{dB} \\ ws_2 = 0.8\pi \quad wp_2 = 0.65\pi \quad As_2 = -60\text{dB} \quad Rp = 1\text{dB} \end{aligned}$$

هذه الترددات يوضحها شكل ٨-١٢.

للحصول على مرشح مثالي منفذ للترددات المتوسطة سنقوم بطرح الاستجابة الترددية لمرشحين كل منهما منفذ للترددات المنخفضة على أن يكون تردد القطع لكل منهما يسمح بأن يكون ناتج طرحهما هو مرشح منفذ للترددات المتوسطة كما في شكل ٨-١٣. بذلك يمكننا اتباع نفس الخطوات السابقة كما في المثال ٨-١ حيث يوضح البرنامج التالي وشكل ٨-١٤ نتيجة هذا التصميم. لاحظ أننا استخدمنا نافذة بلاكمان في هذا التصميم لأنها هي التي تحقق أفضل اضمحلال في مجال التوقف كما في جدول ٨-١.



شكل ٨-١٢ مواصفات مرشح المثال ٨-٢.



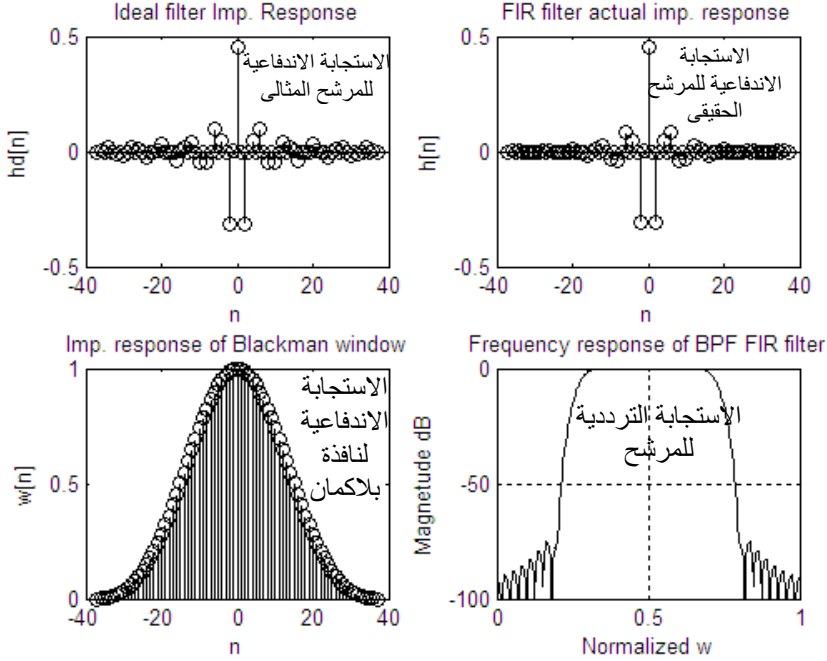
شكل ٨-١٣ مرشح منفذ للترددات المتوسطة للمثال ٨-٢.

طول نافذة بلاكمان المستخدمة كان ٧٥ وذلك من البرنامج كما أن التموجات في مجال المرور كانت  $R_p = 0.0048\text{dB}$  وأعلى اضمحلال في مجال التوقف كان  $A_s = -74.6195\text{dB}$  وهذا يحقق المطلوب من المرشح وأكثر كما في شكل ٨-٤١. برنامج هذا المرشح كالتالي:

```
%Design a BPF, FIR filter using Blackman window, Example 8-2
ws1=0.2*pi; wp1=0.35*pi; As=60;
wp2=0.65*pi; ws2=0.8*pi;
tr_band=min((wp1-ws1),(ws2-wp2));
M=ceil(11*pi/tr_band)+1 %required length of the resp. it is always infinity
wc1=(ws1+wp1)/2; %cutoff frequency for the ideal filter
wc2=(wp2+ws2)/2; n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps; %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd1=sin(wc1*m)/(pi*m); hd2=sin(wc2*m)/(pi*m);
hd=hd2-hd1;
subplot(2,2,1); stem(m,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response'); xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
w_blackman=(blackman(M));
subplot(2,2,3); stem(m,w_blackman,'k');
title('Imp. response of Blackman window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_blackman;
subplot(2,2,2); stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response'); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf,'color','white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(125)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of BPF FIR filter');
axis([0 1-100 0]); ylabel('Magnitude dB'); xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(wp1*255/pi:wp2*255/pi)) %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws2*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band
```

**مثال ٨-٣:** تصميم مرشح رقمي FIR مانع للترددات الوسطى BSF بالمواصفات التالية كمرشح مثالي:

$$Hd(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |w| < \pi/3 \\ 0 & \pi/3 \leq |w| \leq 2\pi/3 \\ 1 & 2\pi/3 \leq |w| < \pi \end{cases}$$



شكل ٨-١٤ مرشح المثال ٨-٢ المنفذ للترددات المتوسطة BPF.

استخدم نافذة كيزر أو أى نافذة أخرى على أن يكون طول النافذة ٤٥، وأعلى اضمحلال في مجال التوقف هو -60dB. لاحظ أن عرض مجال الانتقال transition width في هذا المثال غير معطى، لذلك سنصمم المرشح بالطول ٤٥ وبقيمة معينة للمتغير  $\beta$  بحيث إذا لم تتحقق مواصفات المرشح نغير في طول النافذة وقيمة  $\beta$  وهذا هو السبب في إضافة 0.3 لقيمة beta في البرنامج. ترددات القطع لهذا المرشح هي  $wc_1=\pi/3$  و  $wc_2=2\pi/3$ ، لذلك للحصول على استجابة المرشح FIR المطلوب سنفترض أنها حاصل طرح مرشح مثالي منفذ لجميع الترددات  $hd(\pi)$  مطروح منها مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد قطع أى  $wc_2$  ومضافا إلى ذلك استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد قطع أى  $wc_1$

البرنامج التالي سيوضح خطوات تصميم هذا المرشح وشكل ٨-١٥ يوضح نتيجة هذا التصميم.

%Design a BSF, FIR filter using Kaiser window, example 8-3

As=60; M=45;

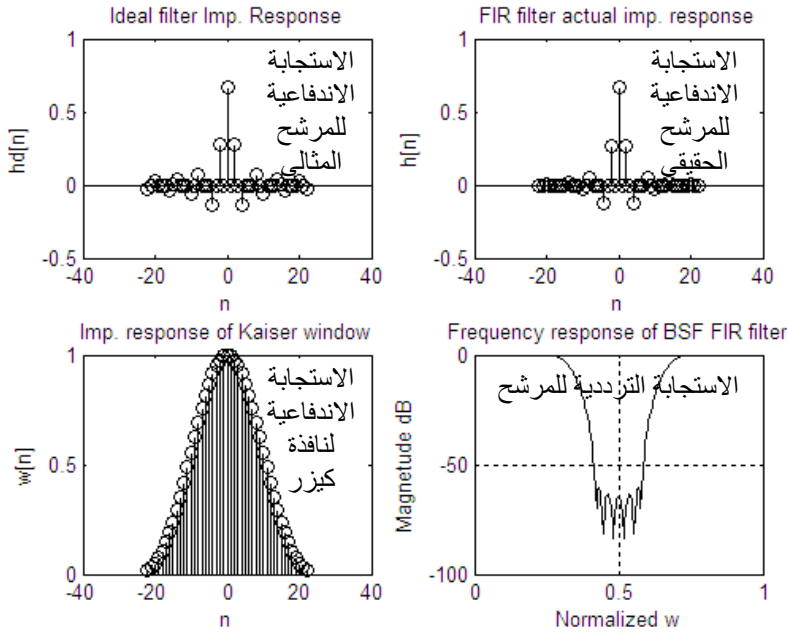
wc1=pi/3; wc2=2\*pi/3; % first and second cutoff freq. for ideal filter

n=[0:1:(M-1)];

m=n-(M-1)/2+eps; %eps is the smallest value to avoid division by zero

hd3=sin(wc2\*m)/(pi\*m); hd1=sin(pi\*m)/(pi\*m); hd2=sin(wc1\*m)/(pi\*m);

hd=hd1+hd2-hd3;



شكل ٨-١٥ مرشح المثال ٨-٣ المعيق للترددات المتوسطة BSF.

```
subplot(2,2,1); stem(m,hd,'k');
xlabel('n'); ylabel('hd[n]'); title('Ideal filter Imp. Response');
w_kaiser=(kaiser(M,beta)); beta=0.1102*(As-8.7)+0.3;
subplot(2,2,3); stem(m,w_kaiser,'k');
xlabel('n'); ylabel('w[n]'); title('Imp. response of Kaiser window');
h=hd.*w_kaiser;
subplot(2,2,2); stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response'); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi; h=freqz(h,1,w); set(gcf, 'color', 'white');
```



```
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of BSF FIR filter');
axis([0 1 -100 0]);ylabel('Magnitude dB'); xlabel('Normalized w');
```

## ٨-٥ تصميم المرشحات الرقمية FIR بأخذ عينات من الاستجابة الترددية

### Frequency sampling technique

الطريقة الثانية من طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR هي طريقة أخذ عينات الاستجابة الترددية. في هذه الطريقة يتم عيننة sampling الاستجابة الترددية المثالية أو المحددة  $Hd(e^{jw})$  على فترات منتظمة في عدد محدد من النقط مقداره  $N$  على محور التردد كالتالى:  $w_k=2\pi k/N$ ، حيث  $k=0,1,2,\dots,N-1$ . هذه النقط ستمثل عدد من عينات تحويل فوريير المتقطع DFT عددهم  $N$  من النقط  $H[k]$ ، والتي يمكن حساب تحويل فوريير المتقطع العكسى لها IDFT لحساب استجابة الاندفاع  $h[n]$  للمرشح المطلوب تصميمه. كما نعلم فإن الاستجابة الترددية  $Hd(e^{jw})$  عبارة عن دالة دورية في المتغير  $w$  تتكرر كل  $2\pi$  ترتبط باستجابة الصدمة  $hd[n]$  بعلاقة تحويل فوريير المتقطع وعكسه كما يلي:

$$Hd(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} hd[n]e^{-jw} \quad (٥٤-٨)$$

$$hd(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Hd(e^{jw})e^{jwn} dw \quad -\infty \leq n \leq \infty \quad (٥٥-٨)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلتين التاليتين:

$$H[k] = Hd(e^{jw}) = Hd(e^{-j2\pi kn/N}) \quad (٥٦-٨)$$

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]e^{j2\pi kn/N} \quad (٥٧-٨)$$

دالة العبور  $H(z)$  للمرشح الناتج يمكن الحصول عليها بدلالة  $H(k)$  كما يلي:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} \quad (٥٨-٨)$$

بالتعويض من المعادلة (٥٧ - ٨) في المعادلة (٥٨ - ٨) نحصل على:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N} z^{-n} \quad (٥٩-٨)$$

والتي يمكن كتابتها في النهاية وبعد القليل من الاختصارات كما يلي:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1-e^{j2\pi kn/N} z^{-n}} \quad (٦٠-٨)$$

وعلى دائرة الوحدة في المستوى z المركب يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{-jw(N-1)/2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{\sin\left(\frac{wN-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{wN-2\pi k}{2N}\right)} e^{j2\pi k(N-1)/N} \quad (٦١-٨)$$

هذه المعادلة تمثل الاستجابة الترددية للمرشح المطلوب تصميمه بهذه الطريقة. في هذه المعادلة لو عوضنا بالقيم  $w=2\pi k/N$  في المعادلة (٦١ - ٨) سنحصل على قيم الاستجابة الترددية عند نقاط التقطيع بالضبط وأما قيمة الاستجابة فيما بين نقاط التقطيع فإنها تحسب بنفس المعادلة (٦١ - ٨).

**مثال ٨-٤:** تصميم المرشح الرقمي في المثال ٨-١ بطريقة تقطيع الاستجابة الترددية بالمواصفات التالية:

تردد حافة مجال المرور  $w_p=0.2\pi$ ، وتردد حافة مجال الوقف  $w_s=0.3\pi$  والتموجات ripples في مقدار الاستجابة في مجال المرور  $R_p=0.25\text{dB}$  وأقصى مقدار للاستجابة في مجال الوقف  $A_s=50\text{dB}$ .

سنفترض تقطيع الاستجابة الترددية للمرشح المثالي باستخدام ٢٠ نقطة تقطيع، ولذلك فإن النقطة  $w_p=0.2\pi$  ستكون عند  $k=2$  (لأن  $2\pi k/20=0.2$  عندما  $k=2$ ) وكذلك النقطة  $w_s=0.3\pi$  ستكون عند  $k=3$ . البرنامج التالي سيرسم الاستجابة الترددية ويوقع عليها نقاط التقسيم كما في شكل ٨-١٦ وهي تمثل الخطوة الأولى في التصميم بهذه الطريقة. الخطوة الثانية يتم فيها حساب استجابة الاندفاع للمرشح المطلوب. استجابة الاندفاع هي تحويل فورير العكسي للاستجابة الترددية التي حصلنا عليها في الخطوة الأولى والتي يمثلها المتغير  $h_{\text{samples}}$  في البرنامج بعد ضربه في زاوية الطور لكل نقطة والتي يمكن أخذها من المعادلة (٨-٦١). شكل ٨-١٦ ب يبين استجابة الصدمة التي حصلنا عليها بناء على خطوات البرنامج. بذلك يمكن حساب الاستجابة الترددية ومقدارها من استجابة الاندفاع كما في باقى البرنامج وشكلى ٨-١٦ ج و ٨-١٦ د.

#### %Design a LPF, FIR filter using freq. Sampling tech. example 8-4

```
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=0.25; As=50;
M=20; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[1,1,zeros(1,15),1,1]; %samples of the ideal LPF from 0 to 2pi
wdl=[0,0.25,0.25,1]; hdr=[1,1,0,0];%to draw solid line
set(gcf, 'color', 'white'); subplot(2,2,1);
plot(wsamples(1:11)/pi,hsamples(1:11),'ok',wdl,hdr);grid;
axis([0,1,-0.1,1.1]); title('Freq. Samples of ideal filter : M=20');
xlabel('Freq. in pi units'); ylabel('Magnitude');
k1=0:floor((M-1)/2); k2=floor((M-1)/2+1):M-1;%index to calculate the phase
angleH=[-2*pi*((M-1)/2)/M*k1,2*pi*((M-1)/2)/M*(M-k2)];
H=hsamples.*exp(j*angleH);%This represent DFT of the imp. response
hi=real(iff(H,M));
subplot(2,2,2);stem(samples,hi,'k');axis([-1,M,-0.1,0.3]);
title('Impulse response of desired filter');
xlabel('n');ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi; h=freqz(hi,1,w);subplot(2,2,3);
```

```

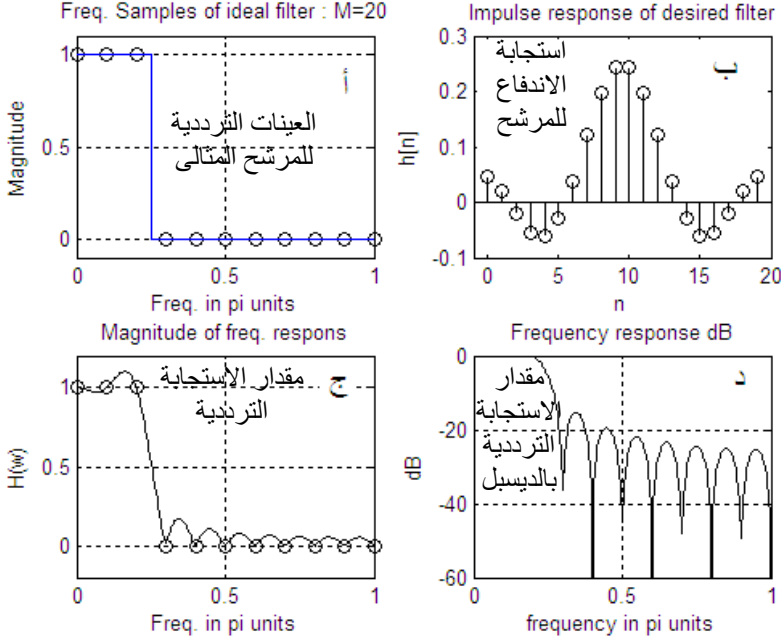
plot(w/pi,abs(h),'k',wsamples(1:11)/pi,hsamples(1:11),'ok');grid;
title('Magnitude of freq. respons');
axis([0,1,-0.2,1.2]);xlabel('Freq. in pi units');ylabel('H(w)');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;axis([0,1,-60,0]);
title('Frequency response dB'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');

```

من شكل ٨-١٦ نلاحظ أن أعلى اضمحلال في مجال الوقف حوالي 16dB وهذا بعيد جدا من القيمة المطلوبة وهي 50dB ولذلك فإن المطلوب من المرشح لم يتحقق بهذه الطريقة. لكي نحقق المطلوب فإن التفكير المنطقي هو أن نزيد قيمة M التي تمثل عدد نقاط العينة، ولكن المشكلة في ذلك هي أنه في هذه الحالة قد تقع بعض نقاط العينة في مجال الانتقال transition band مما سيضيف مجال مرور لم يكن موجودا أصلا في المرشح المثالي المفروض. لاحظ في مثال ٨-٤ وبفرض  $M=20$  كانت هناك نقطة عند نهاية مجال السماح تماما  $w_p=0.2\pi$  ونقطة أخرى عند بداية مجال الوقف  $w_s=0.3\pi$ . لذلك كان الاقتراح بآلا نفترض أن مجال الانتقال منعدم أو صفر ولكننا سنفترض قيمة لمجال الانتقال وسنفترض فيه عددا معيناً من النقاط وقيمة الاضمحلال عند هذه النقاط ستكون افتراضية بحيث أن عدد النقاط والاضمحلال عند كل نقطة ستكون متغيرات يمكن تغييرها للحصول على مرشح بأحسن الإمكانيات. المثال التالي سيوضح هذه الطريقة.

**مثال ٨-٥:** لكي نوضح هذه الطريقة سنعيد تصميم المرشح في المثال السابق ٨-٤ ولكن باستخدام عدد من نقاط التقطيع  $M=40$  بدلا من  $M=20$ . أقل مسافة بين نقطتين تقطيع متتاليتين ستكون  $2\pi/40=0.05\pi$  مما يعني وجود نقطة تقطيع واحدة في مجال الانتقال  $0.2\pi < w < 0.3\pi$  وهذه النقطة ستكون النقطة رقم خمسة، ولو نظرنا للاستجابة الكلية، فإن هذه النقطة ستكون لها نظير عند النقطة رقم ٣٥ نظرا لتماثل الاستجابة في المجال الترددي  $0 < w < \pi$  و  $\pi < w < 2\pi$ . قيمة الاضمحلال عند النقطة ٥ و ٣٥ سغيرها إلى أن نحصل على

أحسن تصميم، وبذلك يمكن كتابة قيمة الاستجابة الترددية عند نقاط العينة الأربعين كما يلي:



شكل ٨-١٦ تصميم مرشح رقمي بطريقة تقطيع الاستجابة الترددية مثال ٨-٤.

$$Hr[k]=[1, 1, 1, 1, 1, T, 0,..29 zeros,..,0, T, 1, 1, 1, 1]$$

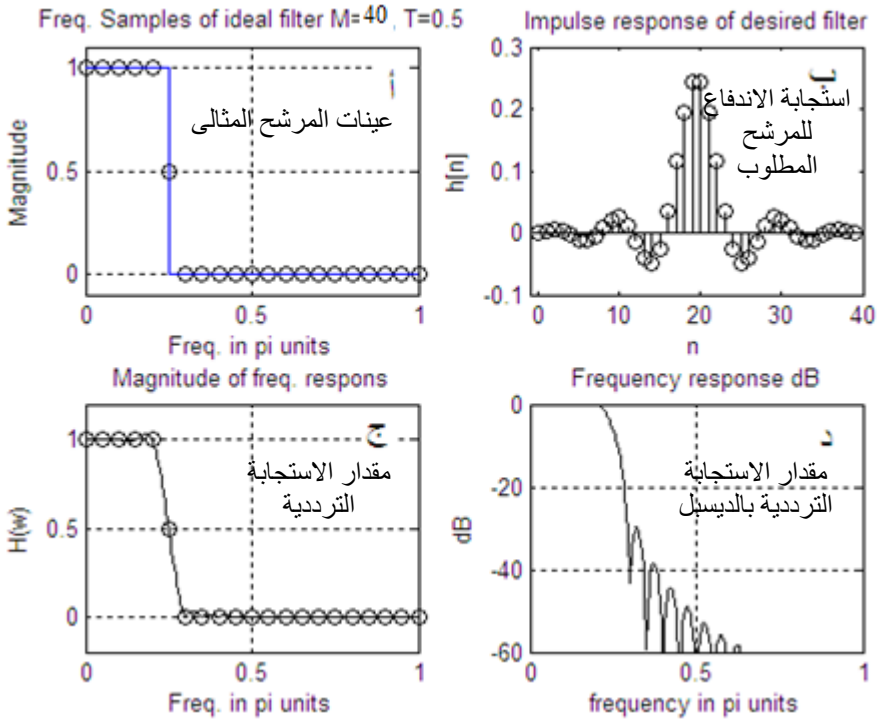
حيث  $Hr[k]$  ستمثل بالطبع كما عرفنا مقدار تحويل فوريير DFT لاستجابة الاندفاع للمرشح المطلوب تصميمه. زاوية الطور عند كل نقطة ستعطى بالمعادلة التالية كما رأينا سابقا:

$$AngH[k]=\begin{cases} -\frac{M-1}{2} \frac{2\pi k}{M} = -0.975\pi k & 0 \leq k \leq 19 \\ \frac{M-1}{2} \frac{2\pi(M-k)}{M} = 0.975(40-k) & 20 \leq k \leq 39 \end{cases}$$

في أول محاولة للتصميم سنفترض  $T=0.5$  وسنبدأ في تصميم المرشح بنفس الطريقة السابقة حيث سنحسب تحويل فوريير العكسي IDFT لنقاط العينة ومنها سنحسب الاستجابة

الترددية للمرشح الناتج كما في البرنامج التالى والذى هو تعديل بسيط لبرنامج المثال ٨-٨  
 ٤. شكل ٨-١٧ يبين نتيجة هذا التصميم حيث بالمقارنة بشكل ٨-١٦ نلاحظ أن أعلى  
 اضمحلال في مجال الوقف أصبح حوالى 30dB بدلا من ١٦ كما في شكل ٨-١٦.

```
%Design a LPF, FIR filter using freq. Sampling tech. adding transition band
example 8-5
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=0.25; As=50;
M=40; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[ones(1,5),0.5,zeros(1,29),0.5,ones(1,4)]; % samples of the ideal LPF
from 0 to 2pi
```



شكل ٨-١٧ مرشح المثال ٨-٥.

```
wl=[0,0.25,0.25,1]; hdr=[1,1,0,0];%to draw solid line
set(gcf, 'color', 'white'); subplot(2,2,1);
plot(wsamples(1:21)/pi,hsamples(1:21),'ok',wl,hdr);grid;
axis([0,1,-0.1,1.1]);
title('Freq. Samples of ideal filter M=40, T=0.5');
```

```

xlabel('Freq. in pi units'); ylabel('Magnitude');
k1=0:floor((M-1)/2); k2=floor((M-1)/2+1):M-1;
%index to calculate the phase
angleH=[-2*pi*((M-1)/2)/M*k1,2*pi*((M-1)/2)/M*(M-k2)];
H=hsamples.*exp(j*angleH);%This represent DFT of the imp. response
hi=real(iff(H,M));
subplot(2,2,2);stem(samples,hi,'k');axis([-1,M,-0.1,0.3]);
title('Impulse response of desired filter');xlabel('n');ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi; h=freqz(hi,1,w);subplot(2,2,3);
plot(w/pi,abs(h),'k',wsamples(1:21)/pi,hsamples(1:21),'ok');grid;
title('Magnitude of freq. respons');
axis([0,1,-0.2,1.2]);xlabel('Freq. in pi units');ylabel('H(w)');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;
axis([0,1,-60,0]);title('Frequency response dB');
xlabel('frequency in pi units'); ylabel('dB');

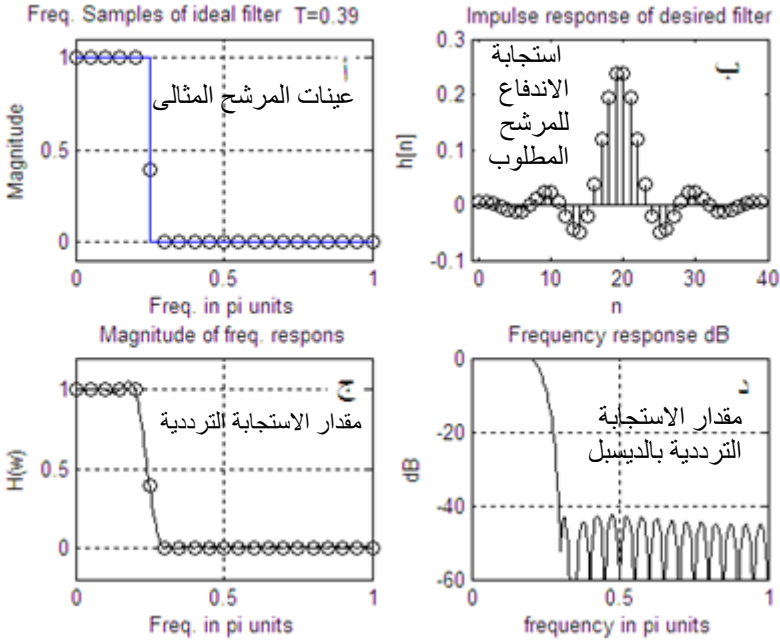
```

**مثال ٨-٦:** لكي نرى كيف أن قيمة الاضمحلال عند النقطة الموجودة في مجال العبور يكون له أثر كبير في نتيجة تصميم المرشح فإنه بعد العديد من المحاولات بقيم مختلفة للمتغير  $T$  في البرنامج السابق فإن أحسن قيمة تم افتراضها كانت  $T=0.39$  حيث يبين شكل ٨-١٨ نتيجة هذا التصميم وكيف أن أكبر اضمحلال في مجال الوقف تغير من 30dB إلى 43dB ، ولن نعيد كتابة البرنامج مرة أخرى.

**مثال ٨-٧:** لقد رأينا كيف أن إضافة نقطة واحدة في مجال الانتقال حسنت من أداء المرشح ولكن كان على حساب اتساع مجال الانتقال وكما نعلم فإن هذا شيء غير مرغوب فيه. ولذلك أصبحت المشكلة التي تواجه الباحثين في هذا المجال هي الاختيار بين اتساع مجال الانتقال وفرض أكثر من نقطة فيه وبين الحصول على أداء أفضل للمرشح.

لاحظ أن التصميم أصبح الآن أكثر تعقيدا حيث أن عدد النقاط في مجال الانتقال، وقيمة الاضمحلال عند كل نقطة أصبحت كلها متغيرات يتم تغييرها ومحاوله أكثر من قيمة لكل منها حتى نحصل على أفضل تصميم. أفضل من تصدى لهذه المشكلة كان راينر Rabiner والذي قام بوضع جداول تبين عدد النقاط المفروض وأحسن اضمحلال يمكن فرضه عند كل نقطة ونحن هنا سنعيد المثال ٨-٦ ولكن بفرض عدد نقاط ٦٠ نقطة بدلا من ٤٠

حتى يكون هناك نقطتان في داخل مجال الانتقال. سنقوم بتعديل برنامج المثال ٨-٦ على هذا الوضع وسنعرض هنا للخطوات التي تم تعديلها فقط في البرنامج، وقيمة الاضمحلال عند النقطتين سيتم أخذهما من ملحوظ مرجع راينير حيث اضمحلال النقطة الأولى سيكون 0.5925 والاضمحلال عند النقطة الثانية سيكون 0.1099 كما في شكل ٨-١٩.

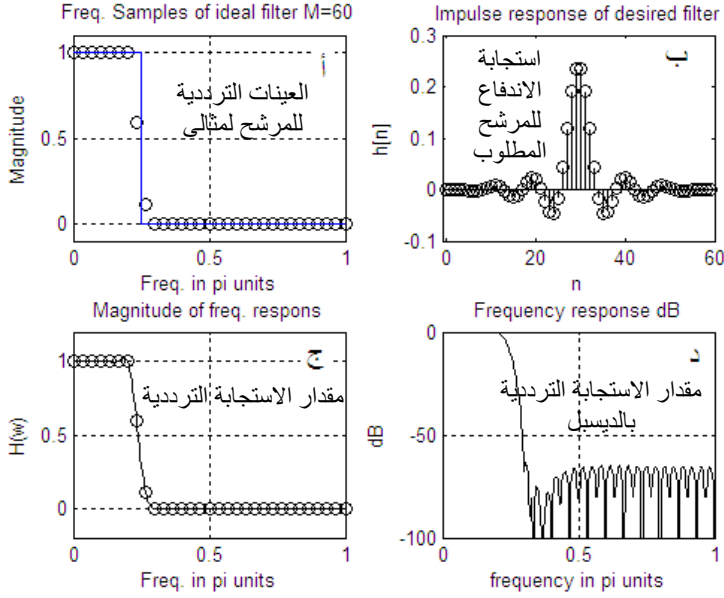


شكل ٨-١٨ مثال ٨-٦.

```
M=60; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,43),0.1099,0.5925,ones(1,6)];
%samples of the ideal LPF from 0 to 2pi
```

بنفس الطريقة يمكن تصميم أى نوع من أنواع المرشحات BPF أو BSF أو HPF.





شكل ٨-١٩ مثال ٨-٧.

### ٨-٦ تصميم المرشحات FIR مباشرة باستخدام ماتلاب MATLAB

برنامج MATLAB غني بالدوال التي يمكن استخدامها مباشرة في تصميم المرشحات من النوع FIR والتي لا بد من الإشارة إليها في هذا الجزء بعد أن فهمنا القواعد الأساسية في تصميم هذا النوع من المرشحات وبالذات طريقة النوافذ.

#### الدالة FIR1()

الصورة العامة لهذه الدالة هي  $b = \text{fir1}(N, \omega_n)$  حيث تقوم هذه الدالة بتصميم مرشح رقمي من النوع FIR المنفذ للترددات المنخفضة LPF والذي درجته  $N$  حيث تعطى هذه الدالة معاملات المرشح والتي تمثل استجابة الصدمة له بطول  $N+1$  في المتجه  $b$ . تردد القطع لهذا المرشح cutoff frequency هي  $\omega_n$  حيث  $0 < \omega_n < \pi$  و  $\pi$  تمثل نصف معدل أخذ العينات

sampling rate . معامل التكبير عند  $w_n$  يساوى 6dB. الطريقة المستخدمة هنا هي طريقة النوافذ كما درسناها.

### الدالة ( $b=fir1(N,w_n,'high')$ )

تصمم مرشح رقمي FIR منفذ للترددات العالية HPF، لاحظ في حالة عدم كتابة نوع المرشح LPF أو HPF فإنه يعتبر أنه LPF، ولذلك فإن الصورة ( $b=fir1(N,w_n,'low')$ ) تعتبر صحيحة مثل الصورة الأولى.

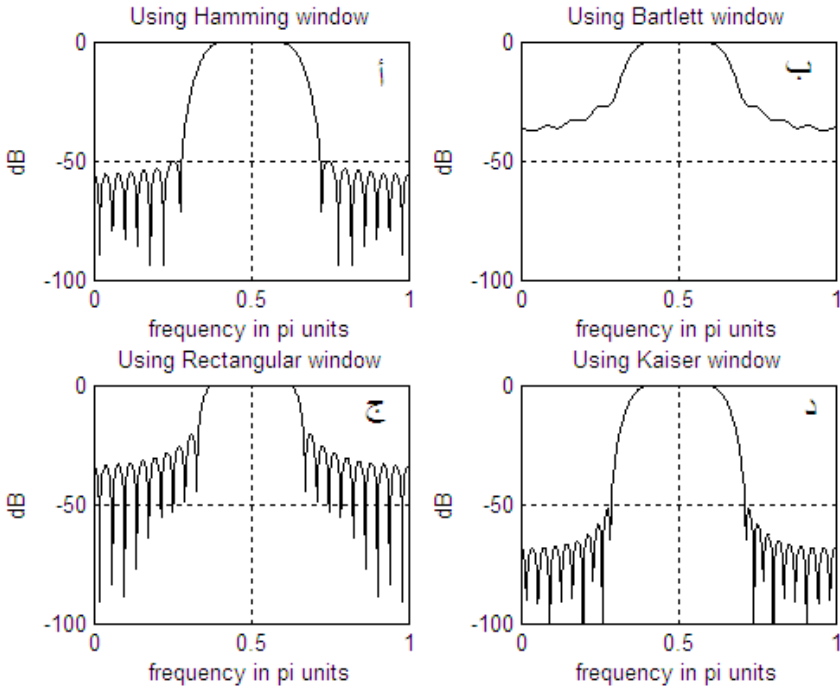
في حالة وضع  $w_n=[w_1,w_2]$  فإن كتابة الدالة على الصورة ( $b=fir1(N,w_n,'bandpass')$ ) ستصمم مرشح رقمي من النوع FIR المنفذ للترددات المتوسطة BPF حيث سيكون مجال السماح أو المرور محدد بـ  $w_1 < w < w_2$ . أما في حالة كتابة الدالة على الصورة ( $b=fir1(N,w_n,'stop')$ ) فإنها ستصمم مرشح رقمي من النوع FIR المانع للترددات المتوسطة BSF حيث سيكون مجال المنع أو الوقف محدد بـ  $w_1 < w < w_2$ .

يمكن تصميم مرشح بأكثر من مجال للسماح وأكثر من مجال للوقف حيث في هذه الحالة يتم تعريف  $w_n$  كالتالي:  $w_n = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]$  حيث المجال الأول هو  $0 < w < w_1$  والمجال الثاني  $w_1 < w < w_2$  وهكذا حتى المجال  $w_m < w < \pi$ . في هذه الحالة إذا كتبنا المعادلة على الصورة ( $b = fir1(N,w_n,'DC-1')$ ) فإنه سيصمم مرشح رقمي متعدد المجالات بحيث أول مجال هو مجال مرور والتالي وقف وهكذا. أما إذا كتبنا ( $b=fir1(N,w_n,'DC-0')$ ) فإنه سيصمم مرشح رقمي متعدد المجالات بحيث يكون أول مجال عبارة عن مجال وقف والتالي مجال سماح وهكذا.

في كل صور الدالة السابقة التي لم يذكر فيها اسم النافذة المستخدمة تكون النافذة الافتراضية هي نافذة Hamming window. يمكن كتابة الدالة السابقة مع النص على نوع النافذة التي يجب استخدامها كالتالي:  $b = fir1(N,w_n>window)$  حيث window هي متجه عمود يمثل معاملات النافذة المطلوبة ويجب أن يكون طولها  $N+1$ . هذه الدالة تسمح

يالتعامل مع كثير من النوافذ ومنها النوافذ Hamming, Blackman, Kaiser, Bartlett والكثير من النوافذ الأخرى التي يمكن مراجعتها من مساعد MATLAB.

**مثال ٨-٨:** صمم مرشح رقمي من النوع FIR المنفذ للترددات المتوسطة BPF ومجال السماح هو:  $0.35 < w < 0.65$ . استخدم الدالة fir1 مع أى ٤ نوافذ تختارها. شكل ٨-٢٠ يبين نتيجة هذا التصميم ونوع النوافذ المختلفة والبرنامج المستخدم كما يلي:



شكل ٨-٢٠ مثال ٨-٨.

%example 8-8 variations of the fir1() function

```
b3 = fir1(48,[0.35 0.65],rectwin(49));
```

```
b4 = fir1(48,[0.35 0.65],kaiser(49,4.55));w=0:pi/512:pi;
```

```
h1=freqz(b1,1,w);h2=freqz(b2,1,w);h3=freqz(b3,1,w);h4=freqz(b4,1,w);
```

```
dB1=20*log10(abs(h1)/abs(h1(255)));
```

```

set(gcf, 'color', 'white');
subplot(2,2,1); plot(w/pi,dB1,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Hamming window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB2=20*log10(abs(h2)/abs(h2(255)));
subplot(2,2,2); plot(w/pi,dB2,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Bartlett window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB3=20*log10(abs(h3)/abs(h3(255)));
subplot(2,2,3); plot(w/pi,dB3,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Rectangular window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB4=20*log10(abs(h4)/abs(h4(255)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB4,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Kaiser window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');

```

### الدالة ( ) FIR2

هذه الدالة تصمم مرشح رقمي من النوع FIR مثل الدالة ( ) fir1 غير أن الطريقة المستخدمة هنا هي طريقة أخذ عينات الاستجابة الترددية التي سبق شرحها أيضا. هذه الدالة أيضا لها أكثر من صورة عامة كالتالي:

$$b = \text{fir2}(n,f,m)$$

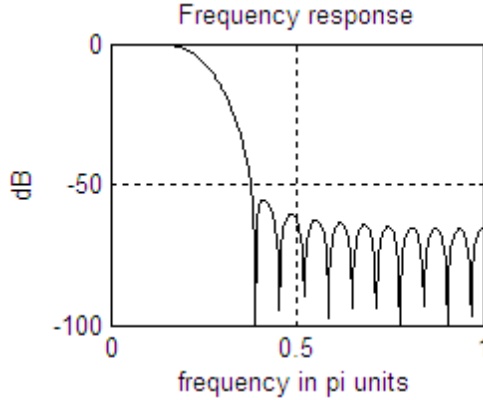
$$b = \text{fir2}(n,f,m,\text{window})$$

- حيث  $b$  هو متجه يحتوي  $n+1$  من المعاملات تمثل استجابة الاندفاع للمرشح FIR الذي درجته هي  $n$  التي يجب أن تكون زوجية.
- $f$  هو متجه نقاط التردد التي يتم عندها التقطيع، وقيمها تتراوح من 0 إلى 1 بطريقة تصاعدية حيث الواحد يمثل نصف تردد العينة.
- $m$  هي متجه يحتوي قيمة الاستجابة الترددية عند نقاط التردد المحددة بالمتجه  $f$ .
- $\text{window}$  هي النافذة التي يتم بها أخذ الاستجابة الترددية للمرشح بعد حساب الـ  $\text{ifft}$ . هذه النافذة يمكن ذكرها كما ذكرناها مع الدالة ( ) fir1، وإن لم يتم ذكرها فإنها تؤخذ تلقائيا على أنها نافذة هامنج.

**مثال ٨-٩:** في هذا المثال سنصمم مرشح رقمي باستخدام الدالة (`fir2`) وسنفترض  $n=30$  نقطة تقسيم وأما قيمة الاستجابة عند كل نقطة تقسيم والتي ستمثل المتجه  $m$  سنأخذها من المثال ٨-٧ كما في البرنامج التالي وشكل ٨-٢١ الذي يبين نتيجة تنفيذ هذا البرنامج.

`%example 8-9`

```
n=30; samples=0:n-1; f=(1/(n-1))*samples;
m=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,21)]; %samples of the ideal LPF from 0 to pi
set(gcf, 'color', 'white'); w=0:pi/512:pi;
b=fir2(n,f,m); h=freqz(b,1,w);
dB1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,1); plot(w/pi,dB1,'k');grid; axis([0,1,-100,0]);
title('Frequency response'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
```



شكل ٨-٢١ مثال ٨-٩.

### الدالة (`filter`)

الصورة العامة لهذه الدالة هي:  $y = \text{filter}(b,a,X)$  حيث تقوم بترشيح البيانات  $X$  باستخدام المرشح الذي معاملاته هي كل  $b$  و  $a$ ، حيث  $b$  هي معاملات كثيرة حدود البسط للمرشح، و  $a$  هي معاملات كثيرة حدود المقام.  $a$  من الممكن أن تساوي واحد وفي هذه الحالة سيكون المرشح من النوع FIR وإذا اختلفت عن الواحد (بحيث لا تساوي الصفر) فسيكون

المرشح من النوع IIR. نتيجة تطبيق المرشح على البيانات  $X$  ستوضع في المتجه  $y$ ، أى أن  $y$  ستمثل خرج المرشح بينما  $X$  هى الدخل.

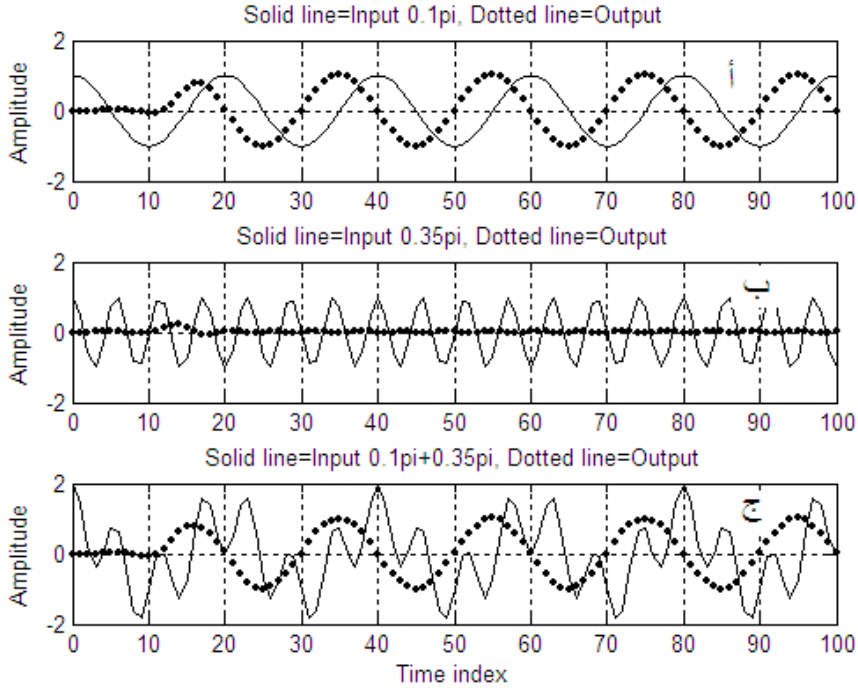
**مثال ٨-١٠:** في هذا المثال سنفترض المرشح الذى سبق تصميمه في المثال ٨-٩ وسندخل له إشارة جيبية ذات تردد في مجال السماح  $w=0.1\pi$  كما في شكل ٨-٢٢أ ونلاحظ أنها خرجت من المرشح كما هى من حيث المقدار غير أن هناك إزاحة في زاوية الطور بين الخرج والدخل. في شكل ٨-٢٢ب أدخلنا إشارة ذات تردد خارج مجال السماح  $w=0.35\pi$  حيث نلاحظ أنها اضمحلت بدرجة كبيرة، وفي شكل ٨-٢٢ج أدخلنا مجموع الإشارتين السابقتين فكانت النتيجة مرور الإشارة الأولى فقط وأما الثانية فقد اضمحلت إلى صفر تقريبا. البرنامج التالي يوضح ذلك.

#### %example 8-10

```
n=30; samples=0:n-1; f=(1/(n-1))*samples;
m=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,21)]; %samples of the ideal LPF from 0 to pi
set(gcf, 'color', 'white');
w=0:pi/512:pi; b=fir2(n,f,m);
n=0:1:100; x1=cos(0.1*pi*n); x2=cos(0.35*pi*n); y=filter(b,1,x1);
subplot(3,1,1); plot(n,x1,'-k',n,y,'.k');axis([0,100,-2,2]);grid;
ylabel('Amplitude'); title('Solid line=Input 0.1pi, Dotted line=Output');
y=filter(b,1,x2); subplot(3,1,2);
plot(n,x2,'k',n,y,'.k');axis([0,100,-2,2]);grid; ylabel('Amplitude');
title('Solid line=Input 0.35pi, Dotted line=Output'); subplot(3,1,3);
plot(n,x1+x2,'k',n,y,'.k');axis([0,100,-2,2]);grid; ylabel('Amplitude'); xlabel('Time
index');
title('Solid line=Input 0.1pi+0.35pi, Dotted line=Output');
```

في نهاية هذا الفصل نود أن نشير هنا أننا اكتفينا فقط بشرح طريقتين من طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR على أنه هناك طرق أخرى لا يتسع مجال هذا الكتاب

لشرحها ومن يريد الاستزادة منها فعليه الرجوع إلى مراجع هذا الكتاب. هذه الطرق الأخرى ممثلة أيضا بدوال في برنامج MATLAB بحيث يمكن التعامل المباشر معها.



شكل ٨-٢٢ المثال ٨-١٠.

### ٧-٨ تمارين

١- مرشح غير تكرارى nonrecursive له دالة الانتقال التالية :

$$H(z) = \frac{1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 3z^4 + 2z^5 + z^6}{z^6}$$

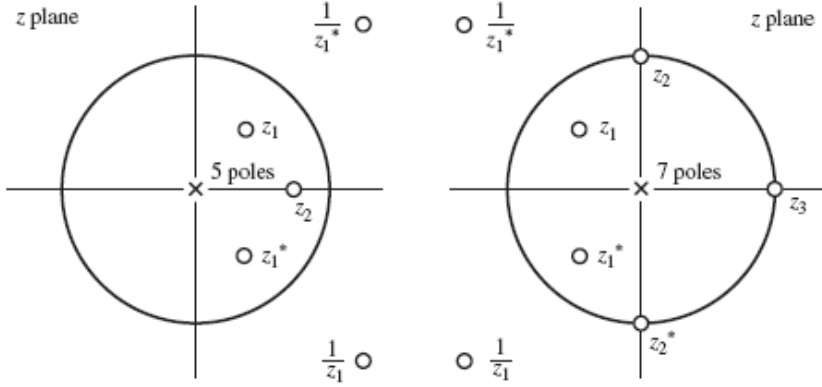
إحسب تأخير المجموعة group delay لهذا المرشح ، وهل هذا المرشح خطي؟ في أى

نوع من التماثل تقع هذه الدالة؟

٢- أعد تمرين ١ لدالة الانتقال التالية:

$$H(z) = \frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 3z^4 - 2z^5 + z^6}{z^6}$$

٣- شكل ت ٣-٨ يبين المستوى  $z$  لمرشحين ، إختبر الطور لكل من المرشحين:



شكل ت ٣-٨ المستوى  $z$  لمرشحين

- ٤- إفتراض أن استجابة الصدمة لمرشح من النوع FIR هي  $h[n]=[1,1,1]$  ، إحسب استجابة المقدار والطور للمرشح ووضح أن المرشح سيكون خطى الطور .
- ٥- إفتراض أن استجابة الصدمة لمرشح خطى ثابت زمنيا  $time\ invariant$  تعطي بالعلاقة التالية :

$$h[n]=a^n u[n]$$

وضح أن الخرج الناتج من دخل عبارة عن وحدة الخطوة  $unit\ step$  سيعطي بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad n \geq 0$$

٦- إفتراض أن الاستجابة  $h[n]$  لها خاصية التماثل التالية:  $h[n]=h[-n]$  لكل

$n=0,1,\dots,M$  وضح أن  $H(w)$  يمكن كتابتها على الصورة:

$$H(w) = h[0] + \sum_{n=1}^M 2h[n]\cos(wn)$$



٧- صمم مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع FIR طوله  $L=5$  وزاوية طور خطية ليحاكي مرشح مثالي بتردد قطع  $w_c=1$ . استخدم نافذة هامنج.

٨- افترض استجابة الصدمة لمرشحات من النوع FIR كما يلي:

$$h[n]=[-4,1,-1,-2,5,0,-5,2,1,-1,4] \quad (a)$$

$$h[n]=[-4,1,-1,-2,5,6,5,-2,-1,1,-4] \quad (b)$$

استخدم الماتلاب لرسم مقدار الاستجابة والطور، وكذلك مواضع الأصفار لدالة العبور للمرشحات  $H(z)$ .

٩- إرسم مقدار الاستجابة لمرشح خطي منفذ للترددات العالية من النوع FIR وتردد القطع  $w_c=0.6\pi$  عن طريق قطع الاستجابة الترددية لمرشح مثالي منفذ للترددات العالية بطول  $L=2M+1$  حيث  $M=32$  مرة و  $M=64$  مرة أخرى.

١٠- أعد المسألة السابقة مستخدماً نافذة هامنج مرة و نافذة بلاكمان مرة أخرى وقارن.

١١- إستخدم نافذة كيزر لتصميم مرشح منفذ للترددات العالية بالمواصفات التالية :

$$w_s=0.4\pi, \quad A_s=60\text{dB}, \quad w_p=0.6\pi, \quad R_p=0.5\text{dB}$$

إرسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح.

١٢- استخدم نافذة هامنج لتصميم مرشح منفذ لمجال متوسط من الترددات BPF بالمواصفات التالية:

$$w_{s1}=0.3\pi, \quad w_{s2}=0.6\pi, \quad A_s=50\text{dB}, \quad w_{p1}=0.4\pi, \quad w_{p2}=0.5\pi, \quad R_p=0.5\text{dB}$$

إرسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح.

١٣- استخدم نافذة هامنج لتصميم مرشح مانع لمجال متوسط من الترددات BSF بالمواصفات التالية :

$$w_{s1}=0.4\pi, \quad w_{s2}=0.6\pi, \quad A_s=40\text{dB}, \quad w_{p1}=0.3\pi, \quad w_{p2}=0.7\pi, \quad R_p=0.5\text{dB}$$

إرسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح.

١٤- صمم مرشح من النوع FIR بالمواصفات التالية:

$$H(w) = \begin{cases} 1 & \text{for } 2.5 \leq |w| \leq 5 \text{ rad/s} \\ 0 & \text{for } |w| < 2.5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

استخدم النافذة المستطيلة بفرض أن  $w_s=10\text{rad/s}$  و  $N=11$ .

- ١٥- أعد تمرين ١٤ بفرض أن  $N=21$  مرة و  $N=31$  مرة أخرى وقارن النتائج.
- ١٦- أعد تمرين ١١ مستخدماً النوافذ هامنج وهاننج وبلاكمان بفرض  $N=21$  وقارن النتائج.

# الفصل التاسع

## بناء المرشحات الرقمية Implementation of Digital Filters

### ٩-١ مقدمة

لقد عرضنا في الفصول الأولى من هذا الكتاب نظريات الأنظمة المتقطعة والرقمية في كل من النطاق الزمني والنطاق الترددي، ثم عرضنا في الفصل السابع طرق تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية IIR، وفي الفصل الثامن عرضنا الطرق المختلفة لتصميم المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية المحددة FIR. في هذا الفصل سنرى أن معالجة أي إشارة وبالتالي ترشيحها يعتمد على طريقة بناء المرشح كما يعتمد على نوع وطريقة تصميم هذا المرشح. لذلك تم تخصيص هذا الفصل لعرض الطرق المختلفة لبناء هذه المرشحات عمليا. سنبدأ الفصل بوصف الوحدات الأساسية التي سيتم استخدامها في بناء هذه المرشحات، وفي باقي الفصل سنشرح طرق بناء المرشحات IIR و FIR مع شرح دوال الماتلاب MATLAB المستخدمة في هذا الصدد. لبناء المرشحات الرقمية من أي نوع سنحتاج فقط للوحدات الثلاث التالية وهي:

### ١- المجمع Adder

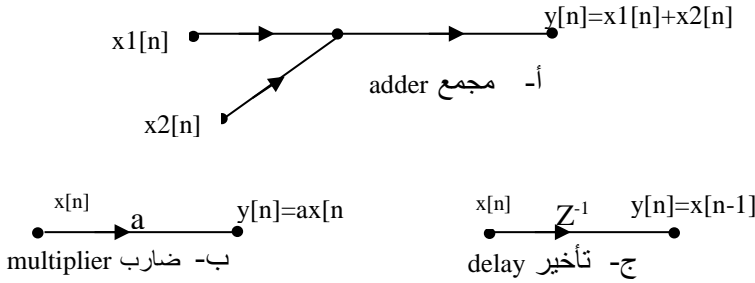
هذا العنصر كما في شكل ٩-١ له دخلان وخرج واحد وخرجه يمثل مجموع الدخلين، في حالة جمع أكثر من دخلين يتم استخدام تتابعات من مثل هذا المجمع كما سنرى.

## ٢- الضارب Multiplier

عنصر له دخل واحد وخرج واحد حيث يكون الخرج مساويا لحاصل ضرب الدخل في معامل تكبير هذا العنصر. معامل التكبير يكون موضعا على خط سير الإشارة كما في شكل ٩-١ ب.

## ٣- عنصر التأخير أو التأجيل Delay أو الإزاحة shift أو الذاكرة memory

هذا العنصر كما في شكل ٩-١ ج يؤخر الإشارة المارة خلاله بمقدار عينة واحدة أو نبضة تزامن ، ويتم بناؤه باستخدام مسجل إزاحة shift register . باستخدام هذه العناصر سنرى الآن كيفية بناء المرشحات الرقمية.



شكل ٩-١ العناصر الأساسية لبناء المرشحات الرقمية.

## ٩-٢ بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية IIR

الصورة العامة لمعادلة دالة العبور للمرشحات من النوع IIR يمكن كتابتها كما يلي، وكما سبق أن رأيناها في الفصول السابقة:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (٩-١)$$

حيث كل من  $a_n$  و  $b_n$  تمثل معاملات المرشح كما سبق ورأينا. لاحظ أن  $a_0$  تم اعتبارها بواحد دون أي تأثير على عمومية المعادلة، كما أن درجة هذا المرشح تكون دائما درجة المقام  $N$ . المعادلة (٩ - ١) يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{m=1}^M a_m y(n-m) \quad (٢-٩)$$

حيث  $x[n]$  تمثل إشارة الدخل للمرشح و  $y[n]$  تمثل إشارة الخرج. هناك ثلاث طرق مختلفة لبناء المرشحات الرقمية بناء على المعادلتين (٩ - ١ و ٩ - ٢) وهي:

### ١- الطريقة المباشرة Direct form

في هذه الطريقة يتم بناء المعادلة (٩ - ٢) مباشرة، وهناك صورتان لهذا البناء، الطريقة المباشرة ١ والطريقة المباشرة ٢ كما سنرى في تفصيل هذه الطريقة.

### ٢- الطريقة المتوالية أو التتابعية Cascade form

في هذه الطريقة يتم تحليل دالة العبور في المعادلة (٩ - ١) إلى أجزاء من الدرجة الثانية بحيث تكون دالة العبور هي حاصل ضرب هذه الأجزاء، يتم بناء كل جزء على حده بالطريقة المباشرة، وأما المرشح كله فيتم بناؤه من هذه الأجزاء على التتابع أو على التوالي.

### ٣- الطريقة المتوازية Parallel form

هنا يتم تحليل دالة العبور (٩ - ١) إلى أجزاء من الدرجة الثانية كما في الطريقة التتابعية، ثم باستخدام الكسور الجزئية توضع دالة العبور في صورة مجموع من هذه الأجزاء (وليس حاصل ضرب كما سبق). كل جزء يتم بناؤه بالطريقة المباشرة وأما المرشح كله فيتم بناؤه من هذه الأجزاء على التوازي.

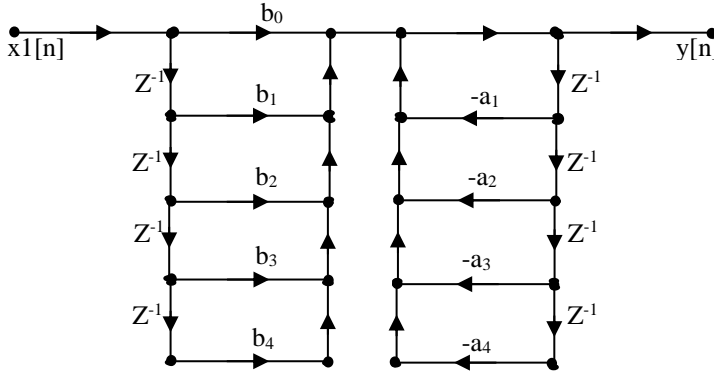
في الأجزاء التالية سنشرح الطرق الثلاثة السابقة بالتفصيل.

## Direct form ١-٢-٩ الطريقة المباشرة

كما يوحي هذا الاسم فإن المعادلة الفرقية (٩-٢) يتم بناؤها مباشرة باستخدام وحدات تأخير ومجمعات ووحدات ضرب. كمثال توضيحي سنفترض  $M=N=4$  في المعادلة (٩-٢) وكتابتها كما يلي:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3] + b_4x[n-4] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] - a_4y[n-4] \quad (٩-٣)$$

وهذه المعادلة يمكن بناؤها كما في شكل ٩-٢ وهو ما يسمى بالطريقة المباشرة الأولى direct form1. نلاحظ أنه في هذه الطريقة يتم بناء كل جزء في المعادلة (٩-٢) مباشرة ثم تجميع الجزئين تتابعيا كما في الشكل. نلاحظ في هذه الطريقة أن جزء البسط عبارة عن تتابع من عدد من وحدات التأخير عددهم ٤ متبوعا بجزء المقام الذي يتكون هو الآخر من تتابع من عدد من وحدات التأخير مقداره ٤ أيضا، ولذلك فإن المرشح ككل يحتاج إلى عدد من وحدات التأخير مقداره ٨ كما في شكل ٩-٢.



شكل ٩-٢ الطريقة المباشرة الأولى 1 Direct form

يمكن استنتاج أكثر من صورة لهذه الطريقة المباشرة عن طريق إعادة كتابة معادلة دالة الانتقال (٩-١) والتي سنعيد كتابتها مرة ثانية للدرجة الرابعة فقط للتوضيح.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}$$

ومنها يمكن كتابة دالة الخرج على الصورة التالية:

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4})W(z) \quad (٤-٩)$$

حيث:

$$W(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}X(z) \quad (٥-٩)$$

المعادلة (٥ - ٩) يمكن كتابتها في النطاق الزمني كما يلي:

$$w[n] = x[n] - a_1w[n-1] + a_2w[n-2] + a_3w[n-3] + a_4w[n-4] \quad (٦-٩)$$

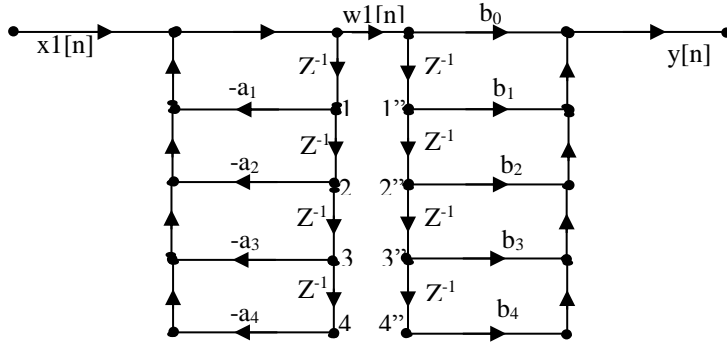
المعادلة (٤ - ٩) يمكن كتابتها في النطاق الزمني أيضا كما يلي:

$$y[n] = b_0w[n] + b_1w[n-1] + b_2w[n-2] + b_3w[n-3] + b_4w[n-4] \quad (٧-٩)$$

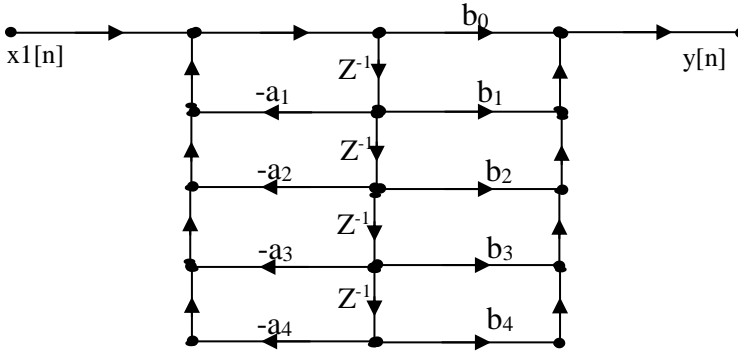
المعادلتان (٦ - ٩) و (٧ - ٩) يمكن بناؤهما كما في شكل ٣-٩ حيث نلاحظ أن الشكلين ٢-٩ و ٣-٩ متكافئين تماما مع بعض التعديل في أماكن الوحدات المكونة لهما.

في شكل ٣-٩ نلاحظ أن النقطتين 1 و "1 متكافئتين تماما حيث أن الإشارة عند كل منهما عبارة عن تأخير من الإشارة  $w[n]$  وعلى ذلك فإنه يمكن ضمهما في نقطة واحدة، بنفس الطريقة يمكن ضم النقطتين 2 و "2 والنقطتين 3 و "3 والنقطتين 4 و "4 لنحصل على الصورة الجديدة للمرشح والموضحة في شكل ٤-٩.

نلاحظ في شكل ٤-٩ أن عدد وحدات التأخير نزل للنصف وأصبح أربعة بدلا من ثمانية. هذه الصورة تسمى الصورة المباشرة ٢ أو 2 direct form، ونلاحظ أنها تستخدم أقل عدد ممكن من عناصر التأخير ولذلك فإنها تسمى الصورة المثلى أو الصورة الرسمية أو القانونية .canonical form



شكل ٩-٣ صورة أخرى للطريقة المباشرة الأولى 1 direct form.



شكل ٩-٤ الطريقة المباشرة الثانية canonical form.

إن تقليل عدد وحدات التأخير يكون ضروريا جدا لسببين أن كل وحدة تأخير هي عبارة عن ذاكرة وعلى ذلك فإن تقليل عددها يقلل من الذاكرة المستخدمة، كما أنه يقلل من زمن تنفيذ أو إجراء حسابات المرشح وهذا يكون عاملا مهما جدا بالذات في التطبيقات التي تتطلب سرعة أو عمل في الزمن الحقيقي real time processing.

### ٩-٢-٢ الطريقة المتوالية أو المتتابعة Cascaded form

في هذه الطريقة يتم كتابة دالة العبور للمرشح في صورة حاصل ضرب أجزاء من الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية، ويتم ذلك عن طريق تحليل كل من كثيرتي الحدود في البسط والمقام



إلى جذورها الحقيقية وبعد ذلك يتم ربط أزواج الجذور المركبة، أو أي جذرين حقيقيين في صورة كثيرة حدود من الدرجة الثانية. بفرض أن  $N$  زوجية فإنه يمكن كتابة دالة الانتقال للمرشح كما يلي:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (8-9)$$

بقسمة البسط على  $b_0$  يمكن كتابة المعادلة (8-9) كما يلي:

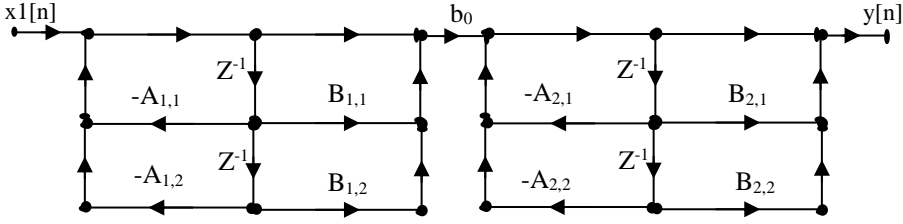
$$H(z) = b_0 \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \dots + \frac{b_N}{b_0} z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (9-9)$$

والتي يمكن كتابتها في صورة أجزاء من الدرجة الثانية كما يلي:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^K \frac{1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}} \quad (10-9)$$

حيث  $B_{k,1}$ ,  $B_{k,2}$  و  $A_{k,1}$ ,  $A_{k,2}$  ثوابت حقيقية تمثل معاملات الأجزاء من الدرجة الثانية والتي عددها  $K$  حيث  $K=N/2$

المعادلة (9-10) كما ذكرنا تمثل تتابع من الأجزاء التي كل منها من الدرجة الثانية بحيث أن دخل الجزء رقم  $k$  هو خرج الجزء  $k-1$  وخرج الجزء  $k$  يمثل دخلا للجزء  $k+1$  وهكذا. كل جزء من هذه الأجزاء يمكن بناؤه بالطريقة المباشرة الثانية، وبعد ذلك يتم توصيل هذه الأجزاء على التتابع لنحصل على المرشح كله كما في شكل 9-5 الذي يبين مرشح من الدرجة الرابعة مكون من جزأين كل منهما من الدرجة الثانية.



شكل ٩-٥ مرشح من الدرجة الرابعة بالطريقة المتتالية.

### ٩-٢-٣ الطريقة المتوازية Parallel form

في هذه الحالة يتم وضع دالة العبور في صورة مجموع من الأجزاء التي كل منها يمثل جزء من الدرجة الثانية وذلك باستخدام الكسور الجزئية كما يلي:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (٩)$$

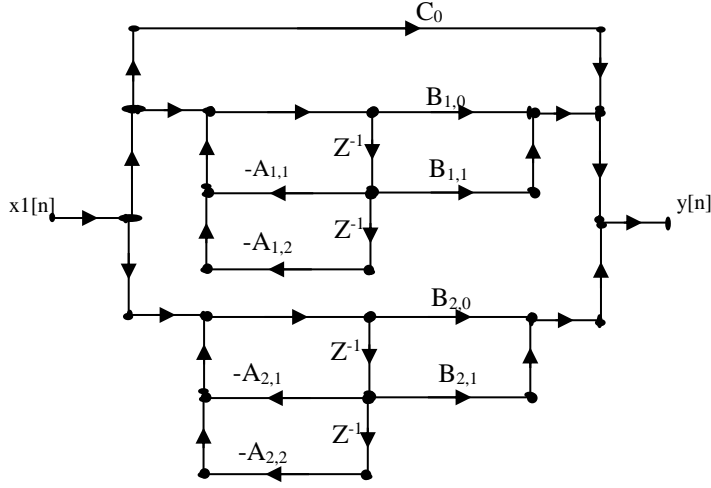
بفرض أن  $M > N$  فإنه بقسمة البسط على المقام يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{1-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} + \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} \quad (٩)$$

باستخدام الكسور الجزئية يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{B_{k,0} + B_{k,1} z^{-1}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}} + \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} \quad (٩-١٣)$$

حيث  $K=N/2$  و  $B_{k,0}$  و  $B_{k,1}$  و  $A_{k,1}$  و  $A_{k,2}$  كلها ثوابت حقيقية تمثل معاملات كل جزء من أجزاء الدرجة الثانية. شكل ٩-٦ يبين بناء المرشح في هذه الحالة بفرض  $M=N=4$ ، وفي هذه الحالة يكون دخل المرشح دخلا لجميع أجزاء المرشح كما في الشكل.



شكل ٩-٦ مرشح من الدرجة الرابعة بالطريقة المتوازية.

### ٩-٣ بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة المحدودة FIR

كما علمنا فإن معادلة دالة العبور لهذا النوع من المرشحات ليس لها مقام أى أنها تتكون فقط من عدد من الأصفار ولا يوجد بها أقطاب مما يجعل طرق بناء هذا النوع أسهل بكثير من النوع السابق IIR. دالة العبور لهذا النوع سنعيد كتابتها كما يلي:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n}$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} \quad (٩-١٤)$$

يمكن كتابة المعادلة الفرقية لهذه المرشحات كما يلي:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{M-1} x[n-M+1] \quad (٩-١٥)$$

بناء على المعادلات السابقة يمكن بناء هذا النوع من المرشحات بأكثر من طريقة.

## ٩-٣-١ الطريقة المباشرة Direct form

في هذه الطريقة يتم بناء المعادلة الفرقية (٩-١٥) مباشرة كمجموعة من عناصر التأخير المتتالية كما في شكل ٩-٧ الذي يبين بناء مرشح من هذا النوع من الدرجة الخامسة.

## ٩-٣-٢ الطريقة التتابعية Cascaded form

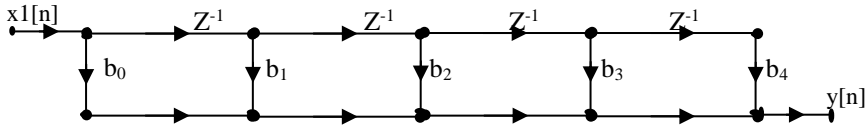
في هذه الطريقة أيضا يتم وضع المعادلة (٩-١٤) في صورة حاصل ضرب أجزاء من الدرجة الثانية كما يلي:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1}$$

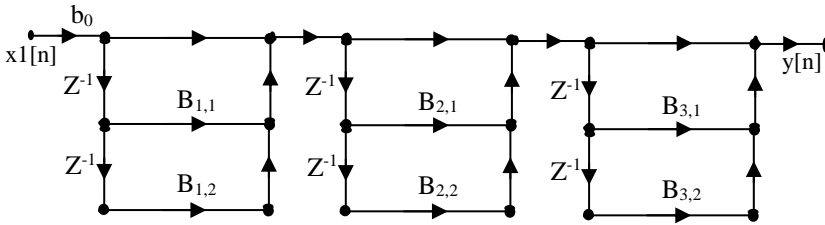
$$H(z) = b_0 \left( 1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \dots + \frac{b_{M-1}}{b_0} z^{-M+1} \right)$$

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^K (1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}) \quad H(z) = b_0 \left( 1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \dots + \frac{b_{M-1}}{b_0} z^{-M+1} \right) \quad (٩-١٦)$$

حيث  $K=M/2$  و  $B_{k,1}$  و  $B_{k,2}$  ثوابت حقيقية كما أشرنا سابقا. شكل ٩-٨ يبين بناء مرشح من الدرجة السابعة من هذا النوع.



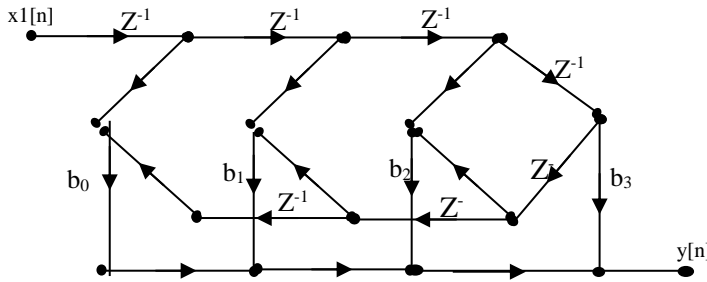
شكل ٩-٧ مرشح FIR من الدرجة الخامسة بالطريقة المباشرة.



شكل ٩-٨ مرشح FIR من الدرجة السابعة بالطريقة التتابعية.

### ٩-٣-٣ طريقة الطور الخطى Linear phase form

لقد رأينا في فصل تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR أنه عندما تكون هذه المرشحات متماثلة symmetrical أو عكسية التماثل antisymmetrical فإن زاوية الطور لهذه المرشحات تكون خطية ورأينا أن هذه تكون ميزة مهمة من مميزات هذا النوع من المرشحات. في هذه الحالة فإن استجابة الاندفاع لكل من المرشح المتماثل وعكسي التماثل يمكن كتابتهما كما يلي على التوالي:



شكل ٩-٩ مرشح FIR من الدرجة السابعة المتماثلة بطريقة الطور الخطى.

$$h[n] = h[M-n-1] \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (١٧-٩)$$

$$h[n] = -h[M-n-1] \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (١٨-٩)$$

وفي هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة الفرقية للمرشح المتماثل في المعادلة (١٨ - ٩) كما يلي:

$$y[n] = b_0\{x[n] + x[n-M + 1]\} + b_1\{x[n-1] + x[n-M + 2]\} + \dots \quad (١٩ - ٩)$$

المعادلة ١٩-٩ يمكن بناؤها لمرشح من الدرجة السابعة كما في شكل ٩-٩. كما يمكن بالمثل بناء الصور الأخرى للمرشحات ذات الطور الخطى المتماثلة وعكسية التماثل والزوجية والفردية.

# الفصل العاشر

## معالجة الكلام Speech Processing

### ١-١٠ مقدمة

إن تطبيقات المعالجة الرقمية للإشارات قد اتسعت واشتملت على كل تطبيقات الحياة التي نحيها الآن وبالذات بعد ثورة الحاسبات وثورة الاتصالات التي نعيشها الآن. ولذلك فإنه من المستحيل أن نشم كل تطبيقات معالجة الإشارات في فصل كهذا أو حتى كتاب واحد أو كتب عديدة. إن موضوع معالجة الكلام الذي نحن بصدده في هذا الفصل من المستحيل أيضا أن نشمه كله في هذا الفصل، لأن كل مجال من مجالات البحث قد أفردت له كتب مخصوصة بكل نقطة من نقاط الحديث في هذا الموضوع، لذلك فإننا سنمر في هذا الفصل على بعض موضوعات معالجة الكلام دون الدخول في التفاصيل الدقيقة لأي موضوع حتى يتعرف القارئ المبتدئ في معالجة الإشارات عليها ومن يريد الزيادة في أي فرع من هذه الفروع فإن هناك الكثير من الكتب والمراجع الخاصة بكل موضوع والتي يستطيع قراءتها والاستزادة منها.

إن شرائح معالجة الكلام قد رخصت أسعارها بدرجة كبيرة لدرجة أنك من الممكن أن تجدها محتفية embedded في أي نظام أو تطبيق بدءا من الأجهزة المنزلية مثل الغسالات والأفران وأجهزة التليفونات وغيرها إلى تطبيقات الحاسب مثل برامج الإملاء للحاسب وبرامج قراءة النصوص على الحاسب للمكفوفين والتصفح الصوتي للإنترنت وغير ذلك

الكثير من التطبيقات التي يصعب حصرها هنا. إن مجال معالجة الكلام يمكن تقسيمه إلى أقسام عديدة منها:

#### ١- نماذج إنتاج الصوت وبنائها إلكترونياً **speech production modeling**: هذا المجال

يهتم بدراسة جهاز الصوت في الإنسان وكيفية محاكاته وبنائه إلكترونياً أو رقمياً لأن هذه النماذج تعتبر أساساً للكثير من أنظمة معالجة الكلام.

#### ٢- تشفير الكلام **speech coding**: لنقل إشارة الكلام عبر قنوات الاتصالات أو تخزينها

على أوساط التخزين المختلفة لابد من تشفير هذه الإشارة لتقليل عرض مجالها أو مساحة التخزين التي ستشغلها على الوسط. وكل التطبيقات التي تستخدم الصوت مثل أجهزة التليفونات الخلوية أو التليفونات العادية وكل تطبيقات الصوت على الحاسب أو الإنترنت كلها تتعامل مع الصوت بعد تشفيره.

#### ٣- تحويل النصوص إلى صوت **text to speech conversion**: أو تخليق الكلام sound

synthesis وهو عملية إنتاج صوت يحاكي الصوت الآدمي من الآلة أو الحاسب لنقل رسالة صوتية من هذه الآلة. هنا يكون دخل النظام عبارة عن نص يكون في العادة مكتوباً بشفرات الأسكى ٢ ASCII والخرج إشارة صوتية يمكن للإنسان أن يفهمها. مهم جداً هنا أن يكون الصوت الناتج طبيعياً يشبه الصوت الآدمي ومفهوماً أيضاً. من هذه التطبيقات القواميس الناطقة، وقراءة مواعيد رحلات الطيران، وقراءة البريد الإلكتروني أو الرسائل أو حتى ملفات كاملة للتعامل مع المكفوفين.

#### ٤- التعرف على الكلام **speech recognition**: وهو عملية التعرف على الكلمة

واستخلاص المعلومات المصاحبة لها واستخدام ذلك لأداء أهداف معينة، فأننا مثلاً حينما أقول كلمة "يمين" يتعرف عليها الحاسب أو الماكينة وبناءً على ذلك تتحرك السيارة مثلاً ناحية اليمين. يمكن عن طريق خوارزميات التعرف على الكلام وخوارزميات تخليقه بناءً نظاماً للتداول الآلي مع الماكينة بحيث يستطيع الإنسان أن يكلم هذه الآلة وهي ترد عليه.

٥- **التحقق من المتكلم speaker verification**: وهى عملية التحقق من شخصية المتكلم عن طريق عينة من كلامه ، فعند دخول شخص ما إلى مبنى معين مثلا يطلب منه أن ينطق إسمه أمام جهاز الحاسب وليكن مثلا "محمد أحمد"، عندها يتحقق الحاسب أن هذا الإسم أو الصوت المنطوق هو فعلا صوت "محمد أحمد" بناء على مقارنة هذا الصوت بقاعدة بيانات للأصوات مخزنة عنده. كما نرى فإن تطبيقات هذا النوع من معالجة الصوت كثيرة ومتعددة.

## ١٠-٢ نماذج إنتاج الصوت

هناك طرق عديدة لتصنيف الأصوات وأحد هذه الطرق للتصنيف هى التصنيف تبعا لطريقة إثارة الجهاز الصوتى لإنتاج هذه الأصوات، وتبعا لذلك يمكن تصنيف الأصوات إلى:

١- **أصوات جهورية voiced**: يتم إنتاج هذه الأصوات عن طريق إثارة الجهاز الصوتى بنفخات أو دفعات دورية من الهواء تتسبب فى ذبذبة الأحبال الصوتية فى الحنجرة. هذه الذبذبات تسبب تعديل فى انسياب الهواء القادم من الرئتين، ومعدل هذه الذبذبات يتراوح من ٦٠ ذبذبة فى الثانية للرجل البالغ إلى ٤٠٠ أو ٥٠٠ ذبذبة فى الثانية للنساء أو الأطفال.

٢- **أصوات انفجارية plosive**: ويتم إنتاجها عن طريق إثارة الجهاز الصوتى بالإطلاق المفاجىء لضغط هواء مثل ب أو ت أو ك.

٣- **الأصوات الأنفية nasal**: حيث جزء أو حتى كل الهواء يسمح له بالمرور فى التجويف الأنفى عن طريق فتح الغشاء الأنفى velum، من هذه الأصوات م أو ن.

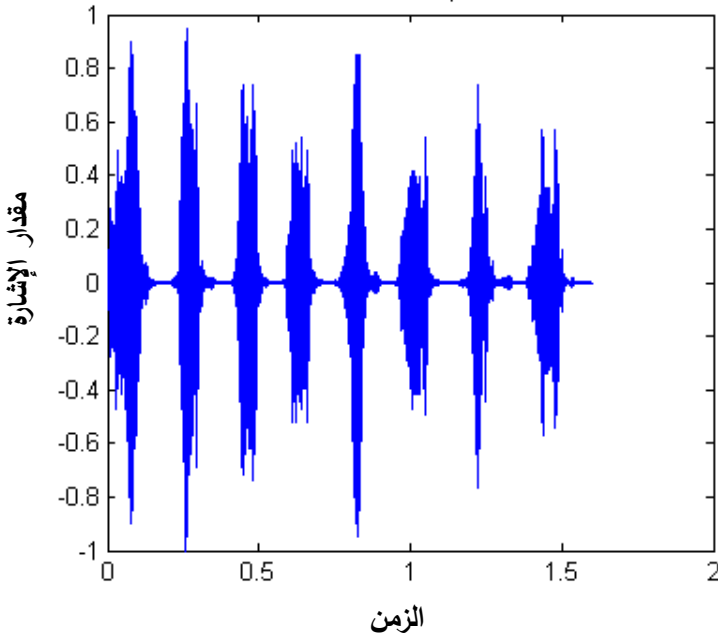
٤- **الأصوات الاحتكاكية fricatives**: تنتج من إثارة الجهاز الصوتى بتدفق توربينى من الهواء يتولد من مرور الهواء فى فتحة ضيقة. من هذه الأصوات ف أو س أو ش.



٥- أصوات احتكاكية جهورية **voiced fricatives**: وتنتج من إثارة الجهاز الصوتي بتدفق توربيني للهواء مع ذبذبات في الأحبال الصوتية مثل *v* أو *z* أو *zh* في كلمة *pleasure*. بجانب طريقة إثارة الجهاز الصوتي فإن نوع الصوت الناتج يتوقف أيضا على حركة اللسان والشففتين والفك السفلي.

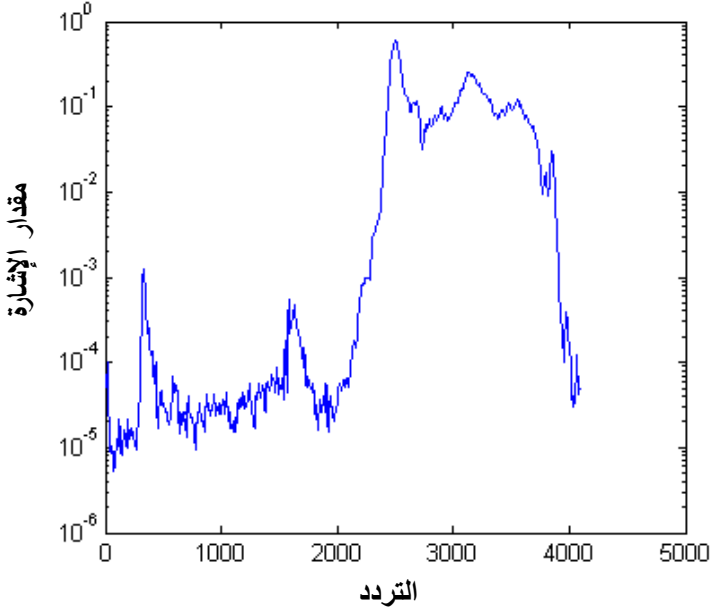
هناك أكثر من طريقة لعرض إشارة الصوت حتى يتمكن الباحث من التفريق بين الأصوات المختلفة ومن هذه الطرق:

عرض **شكل موجة الضغط pressure wave form** لأنه كما نعلم أن الأصوات الناتجة تكون عبارة عن موجة من الضغط المنتشرة في الهواء، ويمكن عرض مقدار هذا الضغط مع الزمن كما في شكل ١٠-١ الذي يعرض مقطع من صوت زقزقة العصافير.



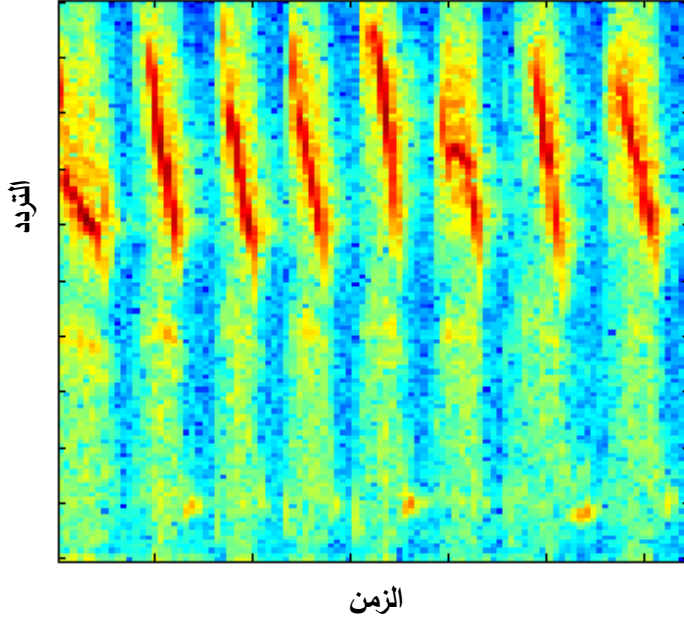
شكل ١٠-١ عرض إشارة الصوت كموجة ضغط.

الطريقة الثانية للعرض هي عرض طيف الإشارة spectrum وأحيانا يسمى طيف القدرة power spectrum وهو علاقة بين قدرة الإشارة التي هي الضغط والتردد. شكل ١٠-٢ يبين طيف نفس الإشارة السابقة التي هي صوت زقزقة العصافير. الطريقة الثالثة للعرض هي الاسبيكتروجرام spectrogram وهو علاقة بين تردد الإشارة والزمن. شكل ١٠-٣ يبين الاسبيكتروجرام لنفس إشارة الصوت السابقة.



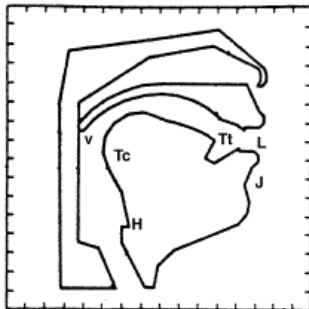
شكل ١٠-٢ طيف إشارة صوتية.

طرق عديدة تم استخدامها لتصوير الجهاز الصوتي في الإنسان أثناء السكوت والكلام وذلك للوصول إلى نموذج تقريبي لهذا الجهاز المركب. من هذه الطرق التصوير باستخدام أشعة إكس أو الرنين المغناطيسي MRI أو باستخدام الموجات فوق الصوتية ultrasound حتى أنهم وضعوا ملفات متناهية الصغر على هذه الأجزاء المتحركة بحيث عندما تتحرك هذه الملفات في مجال مغناطيسي فإنه يمكن رسم شكل أو استجابة لهذه الحركة. يبين شكل ١٠-٤ رسماً تخطيطياً للجهاز الصوتي في الإنسان بناء على طرق التصوير المختلفة السابقة.



شكل ١٠-٣ الاسبكتروجرام.

إن حجم فراغ الجهاز الصوتي وشكله يتحكم فيه الأجزاء المسئولة عن النطق وهي اللسان (موضعه ومقدمته) والفكين والشففتين ومكان عظمة تثبيت اللسان وفتحة التجويف الأنفي، حيث تتحكم كل هذه الأجزاء أو تعدل من حجم هذا الفراغ أثناء الكلام مما يعطى الكلام الخاصية الفريدة التي تحدد كل شخص على حده.



- H = HYOID POSITION عظمة تثبيت اللسان  
 J = ANGLE OF JAW OPENING زاوية فتح الفك  
 L = LIP PROTRUSION AND ELEVATION نتوء أو بروز الشفتين  
 Tc = TONGUE CENTER مركز اللسان  
 Tt = POSITION OF TONGUE TIP موضع مقدمة اللسان  
 V = VELUM OPENING فتحة العشاء الأنفي

شكل ١٠-٤ نموذج الجهاز الصوتي في الإنسان.

لدراسة انتشار الموجات الصوتية في تجويف الجهاز الصوتي فإنه لا بد من وضع بعض الافتراضات لتبسيط التعامل مع هذا الفراغ المعقد، هذه الافتراضات ليس لها تأثير كبير على نتائج الدراسة ولكنها تسهل وبدرجة كبيرة العمليات الحسابية اللازمة لذلك. هذه الافتراضات تتمثل في ثلاث افتراضات فقط وهي كالتالي:

١- تبسيط الفراغ الصوتي في صورة أنبوبة مستقيمة بدايتها عند فتحة المزمار glottis وتنتهي عند الشفتين، ويتغير نصف قطرها عند مواضع مختلفة وأزمنة مختلفة على حسب الكلام الذي يتم نطقه.

٢- الموجة الصوتية تنتشر في هذا الفراغ في صورة موجة مستعرضة، وهذا يعني أن جميع خواص هذه الموجة تكون ثابتة على أي مقطع عرضي عمودي على الأنبوبة.

٣- الفرض الثالث أن عملية انتشار الموجة الصوتية في هذا الفراغ تكون خطية. وإن كانت هناك بعض الأبحاث التي تفترض عدم الخطية في مناطق معينة وبالذات في ظل التقدم الهائل في الحاسبات والتي تساعد على سرعة الحساب في ظل عدم الخطية. بناء على هذه الافتراضات أمكن عمل نماذج كاملة للجهاز الصوتي يمكن بها تخليق كل أنواع الأصوات وبدقة معقولة وللمزيد من المعلومات في هذا المجال نحيل القارئ إلى مراجع متخصصة في هذا المجال وهي كثيرة وبالذات الفصل ٤٤ في المرجع [Vijay K. Madiseti and Douglas 1999] الذي يحتوي ٢٥ مرجعا في هذا الموضوع.

### ٣-١٠ تشفير الصوت

المقصود بتشفير الصوت هو تحويل الصوت أو تمثيله في صورة مناسبة لنقله عبر قنوات الاتصال أو تخزينه على أوساط التخزين. بالطبع فإن هذه العملية يصاحبها فقد لبعض المعلومات الموجودة في إشارة الصوت والخوارزميات التي تقوم بذلك يطلق عليها lossy

algorithms ولحسن الحظ أن الفقد في المعلومات لا يؤثر بدرجة ملحوظة على جودة الصوت عند استرجاعه في مقابل الفائدة العظيمة التي نحصل عليها من هذه الخوارزميات. إن التطبيقات التي تستخدم الصوت في أحد مراحلها مثل أجهزة التليفونات وأجهزة المحمول والراديو والتلفزيون كلها لا بد أن تتعامل مع طرق تشفير الصوت.

النقل الرقمي للصوت عبر شبكات التليفونات يبدأ بتحويل إشارة الصوت من الصورة التماثلية أو الانسيابية إلى الصورة الرقمية عن طريق العينة sampling بمعدل مقداره 8KHz مثلا ثم التكميم quantization أو تمثيل هذه العينات في 8 بت أو تمثيلها بكمية من 256 كمية ممكنة باستخدام ال 8بت. بعد ذلك يتم إرسال هذه الإشارة بمعدل 64Kbit/s على قنوات النقل. الاتصالات الدولية عبر الكابلات البحرية أو الأقمار الصناعية تستخدم معدل إرسال أقل (32Kbit/s) للتوفير في عرض المجال.

تمر إشارة الصوت بعدة مراحل قبل إطلاقها على قناة الاتصال حيث يتم تحويل الإشارة من الصورة التماثلية إلى الصورة الرقمية digital form حيث تمثل كل عينة بعدد معين من البتات، بعد ذلك يتم تشفير encryption لهذه الإشارة وإرسالها على القناة بالمعدل المطلوب. عند المستقبل يتم فك شفرة الإشارة decryption وتحويلها إلى الصورة التماثلية مرة أخرى قبل سماعها عن طريق المستقبل.

هناك بعض الخواص المهمة لمشفرات الصوت والتي عن طريقها يتم الحكم بجودة هذا المشفر من عدمه. من هذه الخواص: معدل البتات bit rate، والجودة quality، والتعقيد (وبالتالى التكلفة) complexity، والتأخير delay.

#### ١- معدل البتات bit rate: كما ذكرنا سابقا فإن شبكات التليفونات تستعمل معدل

عينة مقداره 8KHz وتمثل كل عينة في 8بت، ولذلك فإن معدل الإرسال يكون 64Kbit/s. تبعا لظروف قنوات الاتصال وعرض المجال على كل منها يتم ضغط هذا المعدل ويقاس مقدار هذا الضغط بمقدار الضغط من الكمية القياسية في التليفونات 64Kbit/s. في شبكات الاتصالات الدولية يمكن لعرض المجال أن ينزل من 64Kbit/s

إلى 5.3Kbit/s مما يعنى توفير كبير فى عرض المجال. بعض الاتصالات الخلوية تنزل بعرض المجال حتى 3.54Kbit/s-13Kbit/s. ليس من الضرورى أبدا أن يكون عرض المجال ثابت دائما على القناة إذ أنه فى أثناء المحادثات يكون فترات كثيرة من السكوت فلماذا يكون معدل التراسل على فى هذه الفترات، لذلك يمكن جعل معدل التراسل متغير مع طبيعة الإشارة.

**٢- التأخير delay:** عملية التأخير ليس لها أهمية فى تطبيقات تخزين الصوت حيث العمل فى الزمن الحقيقى ليس ضرورة فى هذه الحالة. أما على قنوات الاتصال فإن عملية التشفير يجب ألا تتأخر أو تستغرق وقتا أكثر من ٣٠٠ مللي ثانية وإلا فإن عملية الاتصال تكون غير مريحة أو مقبولة. هناك مصادر عديدة لهذا التأخير منها التأخير نتيجة الحسابات أو معالجة الإشارة سواء تكبيرها أو ترشيحها وهذا بالطبع سيعتمد على نوع المعالج processor المستخدم. فى العادة تتم عملية التشفير على بلوكات أو إطارات blocks أو frames من إشارة الصوت وهذه العملية تحتاج لوقت أيضا، كما أن التراسل نفسه على القناة وتعدد الإرسال multiplexing يسبب تأخير أيضا.

**٣- التعقيد (التكلفة) complexity:** عاملان مهمان فى تحديد درجة تعقيد النظام وهما التكلفة واستهلاك القدرة power. بالطبع فإن التكلفة تكون عاملا مهما فى اختيار أى مشفر للصوت كذلك استهلاك القدرة وبالذات فى الأجهزة التى تعمل لاسلكيا وتعمل من خلال بطاريات حيث هنا يكون استهلاك القدرة عاملا مهما فى اختيار النظام. معظم مشفرات الصوت تكون مبنية باستخدام شرائح معالجات أو شرائح معالجة إشارة DSP أو حتى على شرائح خاصة بذلك، وفى كل هذه الأحوال تكون سرعة الشريحة ونبضات التزامن التى تعمل عندها عاملا مهما فى تحديد تكلفة النظام واختياره. بعض هذه الشرائح تحتوى كميات من الذاكرة RAM أو ROM وبعضها يكون ١٦ بت أو ٣٢ بت أو حتى ٦٤ بت وكل ذلك يكون عاملا مهما أيضا فى تحديد سرعة النظام. بعض هذه الأنظمة أيضا تتعامل مع الأرقام الصحيحة integers

والبعض يتعامل مع الأرقام الحقيقية floating point، وبالطبع فإن التعامل مع الأرقام الصحيحة يكون أسهل من وجهة نظر البرمجة والحسابات.

### نموذج شفرة التنبؤ الخطى لإنتاج الصوت LPC speech production

في نموذج التنبؤ الخطى يتم التنبؤ بالعينة القادمة أو التالية كمركبة خطية من العينات السابقة، وعلى ذلك يمكن كتابة العينة  $x[n]$  عند اللحظة  $n$  كما يلي:

$$x[n] = \sum_{i=0}^I a_i x_{n-i} \quad (1-10)$$

حيث  $a_i$  هي معاملات التنبؤ، وهناك أكثر من طريقة لحساب هذه المعاملات بحيث تجعل الفرق بين العينة المتوقعة والعينة الحقيقية أقل ما يمكن. بأخذ محول  $z$  لطرفي المعادلة (10-1) يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^I a_i z^{-i} \quad (2-10)$$

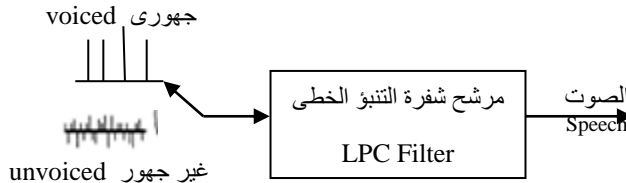
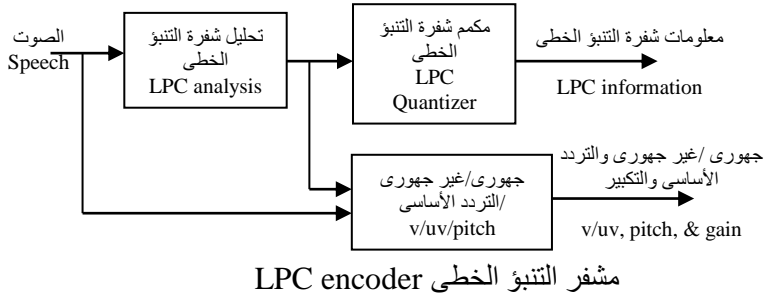
حيث  $1/A(z)$  يسمى مرشح التنبؤ الخطى. أقطاب هذا المرشح تكون قريبة جداً من دائرة الوحدة بحيث أنه أى تعديل أو خطأ يطرأ على هذه الأقطاب يمكن أن يجعل هذا المرشح غير مستقر. لذلك فإن التكميم quantization للمعاملات  $a_i$  يجب أن يكون بدرجة عالية جداً من الدقة (التمثيل بعدد كبير من البتات) حتى نتجنب دخول هذا المرشح في حالة عدم استقرار.

### أنواع مشفرات الصوت

١- مشفرات التنبؤ الخطى LPC coders: شكل 10-5 يبين هذه الطريقة حيث من

إشارة الصوت الحقيقية يتم حساب معاملات مشفر التنبؤ الخطى LPC coefficients

أو  $a_i$  كما ذكرنا سابقا، وهذه المعاملات يتم تكميمها وإرسالها إلى المستقبل. مع هذه المعاملات يتم إرسال التردد الأساسي pitch وهل هذا البلوك أو الإطار جهورى أم لا ومعامل التكبير حيث يتم إرسال هذه المعاملات مع كل إطار من إشارة الصوت كما فى الشكل. عند المستقبل إذا كان الإطار الذى تم استقباله جهوريا فإنه بمعرفة التردد الأساسى يتم توليد إشارة دورية وبمساعدة معاملات التنبؤ يتم إنتاج الصوت. أما إذا كان الإطار غير جهورى فإن إشارة الإثارة عند المستقبل تكون ضوضاء white noise وباستخدام معاملات التنبؤ يمكن أيضا إنتاج الصوت. هناك الكثير من المراجع الموجودة فى فصل ٤٥ من المرجع [Vijay K. Madisetti and Douglas 1999] والتي يمكن الاستزادة منها. هذه الأنظمة عند المرسل والمستقبل يطلق عليها عادة فوكودر vocoders أو المشفرات الصوتية.

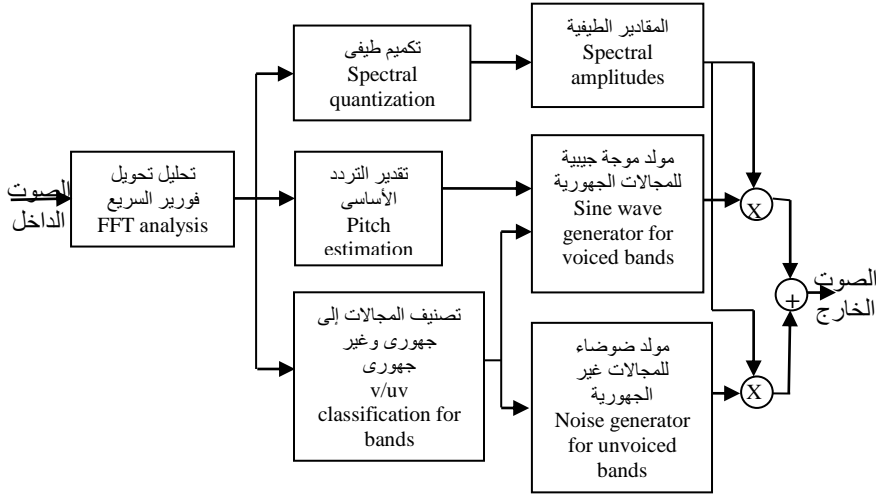


شكل ١٠-٥ تشفير الصوت وإعادةه vocoder.



## ٢- المشفرات متعددة النطاق **Multiband excitation coders**: يبين شكل ١٠-٦

رسمًا تخطيطيًا لهذه الطريقة، حيث هنا يتم حساب معاملات محول فوريير (المكونات الطيفية لإشارة الصوت)، كما يتم تحديد التردد الأساسي وهل هذا الإطار جهورى أم لا. كل هذه المعلومات يتم حسابها وإرسالها إلى المستقبل حيث بمعرفة التردد الأساسي ومعلومات الطيف spectral amplitude يتم توليد الأصوات الجهورية باستخدام مولد نبضات جيبي كما في الشكل. أما الأصوات الغير جهورية فباستخدام مولد ضوضاء مع معلومات الطيف والتردد الأساسي فيمكن توليد الأصوات غير الجهورية. بعد ذلك يمكن جمع الإشارة الجهورية والغير جهورية للحصول على إشارة الصوت كاملة. هذه الطريقة والطريقة السابقة تسمى بطرق النمذجة حيث يتم استخدام نموذج لتخليق الصوت ولا تستخدم الشكل الأساسي لموجة الصوت كما في بعض الطرق الأخرى التي سنراها.



شكل ١٠-٦ استخدام المكونات الطيفية لإشارة الصوت في تشفيره.

٣- هناك طرق عديدة لتشفير الصوت تعمل على شكل الإشارة في النطاق الزمني وهذه الطرق معروفة ولمن يريد معلومات أكثر عن هذه الطرق عليه اللجوء إلى أي كتاب في

معالجة الصوت. من هذه الطرق: التشفير بالتعديل النبضي Pulse code modulation  
 PCM والتشفير بالتعديل النبضي الفرقى Differential pulse code modulation DPCM  
 والتشفير بالتعديل النبضي الفرقى المتكيف Adaptive differential pulse code  
 modulation ADPCM.

## ١٠-٤ تحويل النصوص إلى كلام Text to speech conversion

إن عملية تحويل النصوص إلى كلام تحاكي تماما القراءة من نص غير أن الإنسان حينما يقرأ نص فإنه يضيف بعض التعبيرات مثل الوقفات عند بعض الكلمات أو رفع الصوت وخفضه مع كلمات معينة لتأكيد معنى هذه الكلمات ولكن عند استخدام آلة أو حاسب لمحاكاة هذه العملية فإن إضافة هذه التعبيرات تكون صعبة جدا وهي أقصى ما يمكن الوصول إليه.

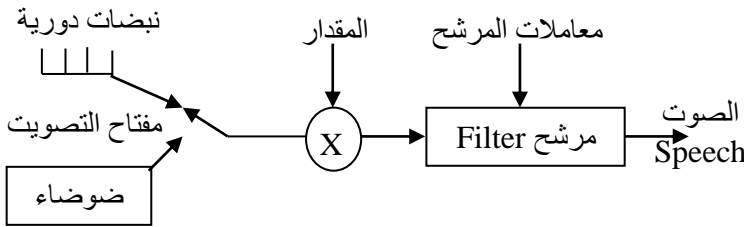
**المرحلة الأولى** من مراحل تحويل النص إلى كلام هي تهيئة النص، ويشمل ذلك تحديد نهاية كل كلمة وكل جملة والتخلص من الاختصارات إن وجدت مثل Mr. حيث يحول هذا الاختصار إلى كلمة مستر مثلا، كما أن النقطة هنا لا تعني نهاية جملة لذلك يجب التفريق بينها وبين النقطة في نهاية الجملة.

**المرحلة الثانية** بعد عملية عزل كل كلمة على حدة تأتي عملية النطق بهذه الكلمة. أبسط الطرق لذلك هي تكوين قاموس يحتوى الكلمات المكتوبة وما يقابلها نطقا وعند التعرف على الكلمة المكتوبة يتم إخراج منطوقها من القاموس. هذه الطريقة تعاني من عدة عيوب منها أن حجم القاموس سيكون بالطبع كبيرا جدا حتى يحتوى كل كلمات اللغة التي نتعامل بها، كما أن القاموس لن يحتوى كل مشتقات الكلمات مثل يكتب وكاتب ومكتوب وكاتبة ومشتقات أخرى كثيرة، وهذه مشكلة خاصة باللغة العربية ونعتقد أنها لا توجد في اللغات

الأخرى. كما أنه لا يمكن للقاموس أن يضم كل الأسماء الموجودة في اللغة، لذلك فإن فكرة القاموس نادرا ما تستخدم لهذا الغرض.

الطريقة المثلى لتخليق الكلام هي عن طريق تقسيم كل كلمة إلى وحدات صوتية تسمى فونيمات ، والفونيم هو حرف تقريبا، لذلك فإننا نتوقع أن قاموس فونيمات أي لغة سيساوى تقريبا عدد أحرف هذه اللغة أو ربما يزيد قليلا. لذلك فإن عملية التعرف على الفونيم واستخراج منطوقه ستكون أسرع بكثير في هذه الحالة عن طريقة استخدام قاموس للكلمات الكاملة، كما أن مشكلة مشتقات الكلمات لن يكون لها تأثير الآن.

بعد تحديد الفونيمات (أو الوحدات الصوتية) تأتي مرحلة النطق أو تخليق هذه الوحدات. شكل ١٠-٧ يبين رسما صندوقيا لأحد أنظمة تخليق الصوت الشائعة الاستخدام. نلاحظ أن الجزء الأيمن في هذا الشكل هو الاختيار بين الإشارة النبضية الدورية والتي تتحدد دورتها من التردد الأساسي formant لهذا الفونيم، أو ضوضاء كما في الشكل. الاختيار بين هذين المصدرين يتم عن طريق هل الصوت المطلوب جهوري أو غير جهوري. بعد ذلك يتم التحكم في مقدار الإشارة أو جهارتها loudness، ثم يأتي في النهاية دور المرشح النهائي الذي يضمن تعميم الإشارة وجعلها طبيعية بقدر الإمكان عن طريق التحكم في معاملات هذا المرشح.



شكل ١٠-٧ نموذج لتخليق الصوت.

## ١٠-٥ التعرف على الكلام Speech recognition

منذ أن اضطر الإنسان للتعامل مع الآلة وهو يبحث عن وسائل أكثر راحة وأكثر ملائمة لظروفه للتعامل مع الآلة بدأ من المفاتيح البسيطة (فتح أو غلق) إلى لوحة المفاتيح التي يستطيع من خلالها إعطاء أوامر أكثر تعقيدا، إلى الفأرة أو الماوس إلى التعامل مع الشاشات باللمس وهكذا نرى أن هناك طرق عديدة من خلالها يستطيع الإنسان أن يتعامل مع الآلة. من الطرق الحديثة للتعامل مع الآلة، التعامل معها من خلال الصوت والذي كثرت تطبيقاته هذه الأيام ومن أهمها الإملاء الآلي. في الإملاء الآلي يقوم الشخص بإملاء الحاسب، ويقوم الحاسب بالتعرف على الكلمات التي ينطقها المستخدم، ثم يخزنها في ملف للاستفادة منها. هناك أيضا إعطاء الأوامر الصوتية للآلة وغير ذلك الكثير. نلاحظ أن أنظمة أو خوارزميات التعرف على الكلام يكون الدخول لها كلام منطوق أما خرجها فأحيانا يكون نصا (وفي هذه الحالة فهي تسلك المسلك العكسي لخوارزميات تحويل النصوص إلى كلام كما رأينا)، أو فعلا معينا يتم اتخاذه بناء على الكلمة أو النص الذي تم التعرف عليه.

هناك العديد من العوامل أو المتغيرات التي تحكم عملية التعرف على الكلام ومنها ما يلي:

- ١- الطريقة التي يتكلم بها الإنسان إلى الماكينة أو الحاسب وهناك ثلاث طرق لذلك:
  - التكلم بكلمات أو عبارات محددة مفصولة عن بعضها isolated words، وهذه هي أسهل طرق التعرف على الكلام.
  - كلمات متصلة continuous words أو حديث مستمر أو طليق ولكن كل الكلمات تكون مأخوذة من قاعدة بيانات معروفة ومحددة.
  - كلمات متصلة أو حديث مستمر غير محدد الكلمات، وهذه هي أصعب طرق التعرف على الكلام.
- ٢- حجم قاموس الكلمات المستخدمة في عملية التعرف:

- قاموس كلمات صغير يحتوى أقل من ١٠٠ كلمة.
- قاموس كلمات متوسط يحتوى من ١٠٠ حتى ١٠٠٠ كلمة.
- قاموس كلمات كبير يحتوى أكثر من ١٠٠٠ كلمة.

### ٣- عوامل تعتمد على المتكلم:

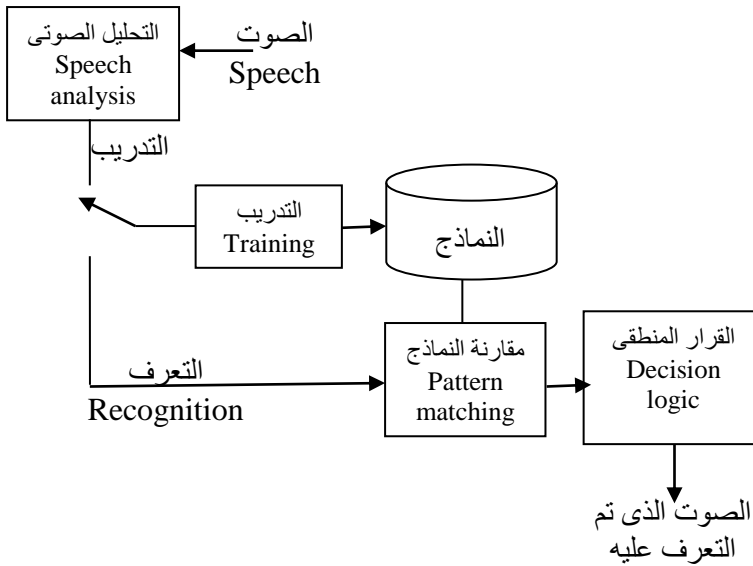
- هل النظام يعتمد على شخصية المتكلم، أو بمعنى آخر هل النظام مصمم لشخص معين وإذا تغير هذا الشخص فإن النظام يفشل في التعرف speaker dependent system.
- هل النظام لا يعتمد على شخصية المتكلم speaker independent بمعنى أن النظام يعطى نفس نسبة التعرف الصحيحة بصرف النظر عن الشخص المتكلم.
- هل النظام متكيف adaptive بمعنى أنه مع زيادة مستخدمى النظام فإن النظام يكيف نفسه بحيث يستوعب المستخدمين الجدد.

إن عملية التعرف على الكلام عملية صعبة نتيجة متغيرات عديدة في إشارة الصوت نفسها، فمثلا هل يضمن المستخدم أن ينطق الكلمات المطلوب التعرف عليها دائما بنفس الطريقة ودون أي تغيير ونحن نعلم أنه حتى الحالة المزاجية للشخص يمكن أن تغير من طريقة نطقه للكلمات، ناهيك عن إذا كان الشخص عنده برد أو أي مرض يمكن أن يغير من طبيعة جهاز النطق عنده. أيضا لهجة المتكلم فيمكن أن تنطق نفس الكلمة بأكثر من لهجة وهذا قد يؤدي إلى التعرف الخاطئ على الكلمة. هناك أيضا عوامل تتوقف على طبيعة الميكروفون المستخدم ومدى جودته في إنتاج إشارة الكلمة وحتى المسافة بين الميكروفون وفم المتكلم تعتبر مؤثر كبير في نسبة التعرف الصحيح على الكلمة. الوسط الذي يتكلم فيه الشخص وهل هو وسط هادئ صوتيا أم أنه وسط به ضوضاء.

**التعرف على النماذج عن طريق المقارنة pattern matching:** شكل ١٠-٨ عبارة عن

رسم صندوقي يبين هذه الطريقة. بعد الحصول على إشارة الكلام من الميكروفون وتميئتها

إلكترونيا يتم تقسيمها إلى مقاطع زمنية قصيرة تتراوح من ١٠ حتى ٣٠ مللي ثانية نتيجة طبيعة إشارة الصوت المتغيرة. بعد ذلك يتم تحويل كل مقطع من هذه المقاطع إلى مجموعة من المعاملات. هذه المعاملات قد تكون في النطاق الزمني مثل عدد مرات عبور الإشارة لمستوى الصفر أو أي مستوى آخر، وقد تكون في النطاق الترددي مثل معاملات تحويل فوريير المعين DFT، أو معاملات التنبؤ الخطي المشفر LPC، أو حتى خرج مجموعة من المرشحات للإشارة في نطاقات ترددية مختلفة. ولقد وجد عمليا أن معاملات طيف القدرة power spectrum و cepstrum (تحويل فوريير للطيف اللوغاريتمي log spectrum) تعطى أفضل نتائج في التعرف على الكلام. كل ذلك يقوم به الصندوق الخاص بتحليل الإشارة Recognition في شكل ١٠-٨.



شكل ١٠-٨ التعرف على الكلام عن طريق مقارنة النماذج.

بعد عملية التحليل السابقة تأتي عملية التدريب، حيث يتم إدخال نماذج من الكلمات المعروفة ويطلب من النظام التعرف على هذه النماذج فإذا تم التعرف عليها خطأ يتم تغيير

معاملات النظام بحيث يتم تعديل نتيجة التعرف على هذه النماذج، أو حتى يتم ضم هذه النماذج إلى قاعدة بيانات النظام. تستمر هذه العملية إلى أن يتم التعرف الصحيح على كل محتويات قاعدة بيانات النظام. تأتي بعد ذلك عملية الاختبار testing أو التعرف على كلمات حقيقية حسب متغيرات النظام، حيث يتم إدخال كلمات بما بعض الضوضاء مثلا، أو منطوقة بمتحدث آخر، ويطلب من النظام التعرف على هذه النماذج وحساب دقة النظام. آخر بلوك في شكل ١٠-٨ هو القرار الذى يتم أخذه بناء على المقارنة في البلوك السابق وقد يكون هذا القرار صحيحا أو خطأ أى أنه حصل على الكلمة أو النموذج الصحيح أم لا. هناك أكثر من خواريزم يتم استخدامها في هذا الشأن ومنها نماذج ماركوف الخفية Hidden Markoff Models HMM وهى الأكثر استخداما، والشبكات العصبية والخواريزمات الجينية والكثير من الخواريزمات الأخرى.

## ١٠-٦ التعرف على الأشخاص والتحقق منهم

### Person recognition and verification

هناك كتب كثيرة تم تأليفها وأبحاث مازالت مستمرة في مجال القياسات الحيوية biometrics وكلها تصب في التعرف على الشخص من خلال بعض الخواص الحيوية والتي منها صورة وجهه، أو بصمة يده، أو شكل يده، أو شكل أذنه، أو بصمة دمه DNA، أو بصمة صوته عن طريق كلمة أو عبارة ينطقها الشخص وتعرف عليه منها.

هناك فرق بين التعرف على الأشخاص من خلال أصواتهم والتحقق منهم. التعرف على الأشخاص هو الأعم حيث من كلمة أو عبارة منطوقة تبحث في قاعدة بيانات لتقرر هل هذا الصوت يخص أى شخص في قاعدة بيانات النظام. أما التحقق من الشخص فإن شخص ما يأتي ويقول مثلا أنا محمد وفي هذه الحالة فإن نظام التعرف عليه أن يتحقق هل هذا الشخص هو في الحقيقة محمد أم لا بناء على كلمة أو عبارة ينطقها. تطبيقات التعرف

على الأشخاص والتحقق منهم من خلال الصوت له تطبيقات كثيرة جدا وأهمها في مجال مكافحة الجريمة والتعرف على المجرمين.

من أهم الخواص التي يتم استخلاصها من إشارة الصوت لاستخدامها في التعرف على الشخص هي الخواص الطيفية spectral features مثل التردد الأساسي formants، أو طاقة الطيف spectral energy، ويتم حساب ذلك على مقاطع صوتية تبلغ ١٠ حتى ٣٠ ميللي ثانية باستخدام نافذة هامنج كما أشرنا مسبقا. من المعاملات الكثيرة الاستخدام هي خرج مجموعة من المرشحات التي يبلغ عددها أحيانا ١٦ مرشح من النوع BPF والتي يتم توزيع مراكز تردداتها بحيث تكون المسافة الترددية بين كل منها والآخر حوالى ٥٠٠ هرتز في مدى ترددات الصوت وهو ٤ كيلوهرتز، وأحيانا يتم توزيع هذه المرشحات توزيعا خطيا أو غير خطيا.

معاملات التنبؤ الخطى المشفر يتم استخدامها بكثرة في التعرف على المتكلمين، وكما ذكرنا فإن كل عينة من عينات إشارة الصوت يمكن كتابتها في صورة كثيرة حدود من العينات السابقة كما في المعادلة التالية:

$$S(t)=a_1s(t-1)+a_2s(t-2)+a_3s(t-3)+\dots+a_p s(t-p)+Gu(t) \quad (3-10)$$

هناك أكثر من طريقة لحساب المعاملات  $a_1, a_2, \dots, a_p$  وهي التي يتم استخدامها لتحديد الشخص المتكلم. ولقد وجد أيضا أن الطاقة الصوتية على مقاطع معينة من إشارة الصوت، أو حتى على عبارات كاملة يتم نطقها وهي في النطاق الزمني، تعطى نتائج جيدة في التفريق بين الأشخاص مثل المعاملات الطيفية.



## ٧-١٠ مرشحات لبعض التأثيرات الصوتية الخاصة

## Digital filters for special sound effects

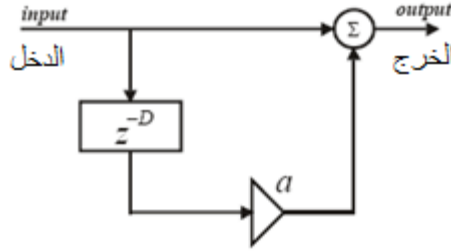
## مرشح الصدى الأحادي single echo filter

إضافة صدى للصوت يعتبر أحد التأثيرات التي يرغبها البعض في الكثير من التطبيقات ويتم ذلك باستخدام مرشح يضيف للإشارة نسخة منها نفسها متأخرة عنها بزمن معين يمكن التحكم فيه، وكذلك يتم التحكم في معامل  $a$  لإحباط أو اضمحلال attenuation هذه الإشارة المضافة كما في شكل ٩-١٠.

يمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$y(n)=x(n)+ax(n-D) \quad (٤-١٠)$$

حيث  $D$  هي زمن التأخير و  $|a| \leq 1$  هي معامل الاضمحلال attenuation. بإجراء تحويل  $z$  على طرفي المعادلة (٤ - ١٠) نحصل على دالة العبور كما يلي:



شكل ٩-١٠ مرشح الصدى الإحادي.

$$H(z)=1+az^{-D} \quad (٥-١٠)$$

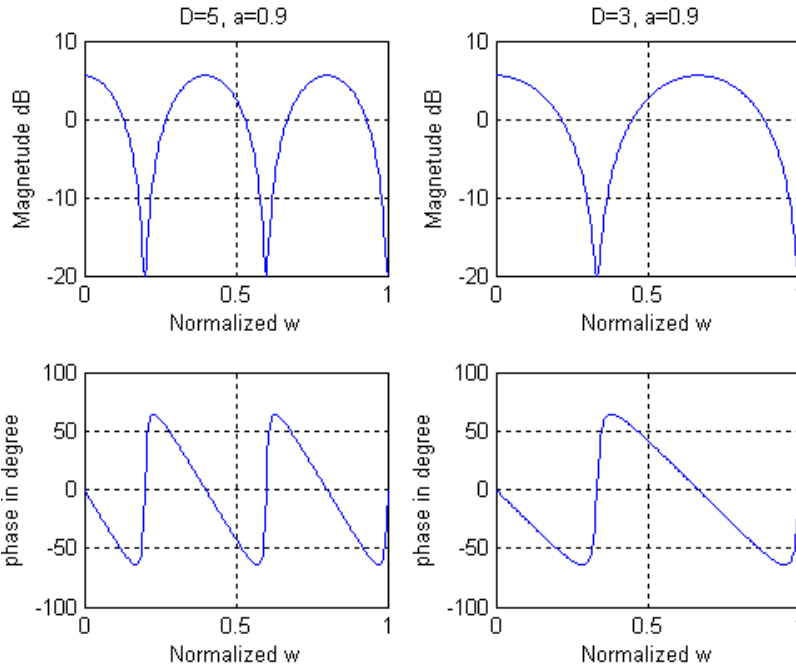
والاستجابة الترددية كما يلي أيضا:

$$H(e^{jw})=1+ae^{-jwD} \quad (6-10)$$

شكل ١٠-١٠ يبين الاستجابة الترددية لهذا المرشح عند قيم مختلفة للتأخير  $D$  مع ثبوت معامل الاضمحلال  $a$ . يمكن تكرار هذه الرسم لقيم مختلفة لمعامل الاضمحلال مع ثبوت التأخير  $D$ . البرنامج التالي هو المستخدم للحصول على شكل ١٠-١٠.

%Frequency response for an echo filter

```
h1=[1 0 0 0 0 0.9];
h2=[1 0 0 0.9];
w=0:pi/255:pi;
H1=freqz(h1,1,w);
H2=freqz(h2,1,w);
mag1=20*log10(abs(H1));
mag2=20*log10(abs(H2));
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(2,2,1);
plot(w/pi,mag1);grid;
ylabel('Magnetude dB'); xlabel('Normalized w');
title('D=5, a=0.9');
ph1=angle(H1)*180/pi;
ph2=angle(H2)*180/pi;
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,ph1);grid;
ylabel('phase in degree'); xlabel('Normalized w');
subplot(2,2,2);
plot(w/pi,mag2);grid;
ylabel('Magnetude dB'); xlabel('Normalized w');
title('D=3, a=0.9');
ph1=angle(H1)*180/pi;
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,ph2);grid;
ylabel('phase in degree'); xlabel('Normalized w');
```



شكل ١٠-١٠ الاستجابة الترددية لمرشح الصدى الأحادي.

كما أشرنا في مقدمة هذا الفصل أننا لن ندخل في التفاصيل الدقيقة لموضوعات معالجة الكلام المختلفة والتطبيقات الخاصة بها. ولكننا فقط مررنا عليها مروراً سريعاً كأحد التطبيقات الهامة للموضوع الأساسي في هذا الكتاب وهو المعالجة الرقمية للإشارات. وعلى القارئ المهتم بموضوع معالجة الكلام اللجوء إلى الكتب والمراجع التي تناولت هذا الموضوع بالشرح المفصل.

# الفصل الحادي عشر

## أساسيات معالجة الصور الرقمية Fundamentals of Digital Image Processing

### ١-١١ مقدمة

يمكن تعريف الصورة على أنها دالة في بعدين  $f(x,y)$  حيث كل من  $x$  و  $y$  هما بعدين في مستوى السطح، وأما مقدار هذه الدالة  $f$  عند أي نقطة  $(x,y)$  فهو كثافة intensity هذه النقطة أو شدة إضاءتها أو حدتها. أحيانا يطلق عليها مستوى الرمادية gray level لهذه النقطة. إذا كانت الأبعاد  $x$  و  $y$  والدالة  $f$  كلها قيما رقمية، أي تأخذ قيما محددة، فإن الصورة في هذه الحالة يطلق عليها صورة رقمية، وبالتالي فإن الطرق المستخدمة لمعالجة هذه الصور ستكون أيضا طرقا رقمية نستخدم فيها الحاسبات أو المعالجات الرقمية، وهذا هو بالضبط المقصود من المعالجة الرقمية للصور. ولقد انتشر هذا المجال من العلوم مع انتشار الحاسبات وتقدمها مثله في ذلك مثل مجال المعالجة الرقمية للإشارات. بالطبع وكما فعلنا في الفصل السابق والخاص بالمعالجة الرقمية للصوت فإنه من الصعب أن نجمع كل هذا الموضوع في فصل واحد، أو حتى أن نتكلم بالتفصيل على جزء من جزئياته، ولكننا سنمر سريعا على الموضوع، وربما مع بعض الأمثلة البسيطة، لمعرفة مجالاته المختلفة وتطبيقاته دون الدخول في التفاصيل وسنترك الدخول في التفاصيل لمن يريد الاستزادة حيث هناك العديد من الكتب المتخصصة في كل جزئية من هذه الجزئيات.

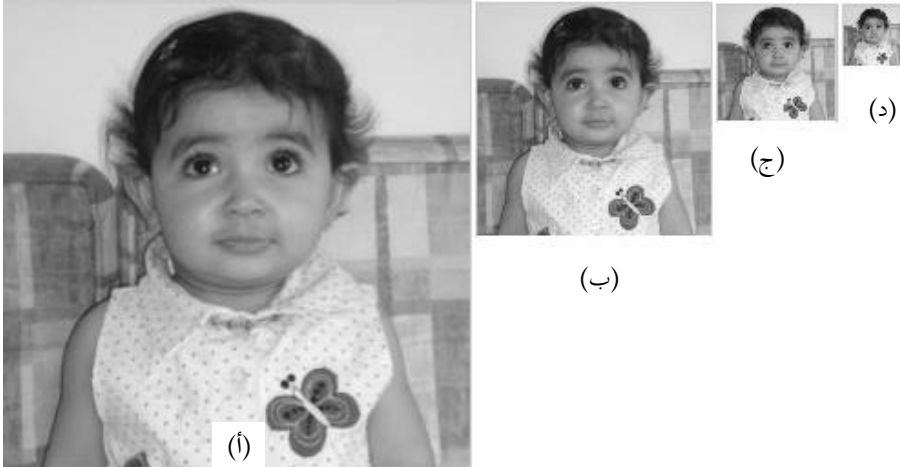
تتكون الصورة الرقمية من عدد محدد من العناصر كل منها يشغل مكان معين وقيمة أو مستوى رمادية معين، كل من هذه العناصر يسمى عنصر صورة picture element أو pixel

ونحن سنستخدم هنا نفس المنطوق، بكسل، لكثرة شيوع اللفظ. يرجع موضوع معالجة الصور إلى بداية العشرينيات من القرن الماضي (عام ١٩٢٠) عندما تم نقل صور عبر المحيط من أمريكا إلى أوروبا من خلال كابل بحري وتوالى بعد ذلك تطور سريع في طرق نقل وتحسين هذه الصور، ولكن كل هذه الطرق لا يمكن أن نعتبرها طرقا رقمية لأن الحاسب لم يكن ظهر في هذا الوقت ولم يتم استخدامه. لذلك فإن التقدم الحقيقي في طرق المعالجة الرقمية للصور وطرق حفظها كان بعد الانفجار الذي حدث في تكنولوجيا الحاسبات الذي بدأ مع نهاية السبعينيات من القرن الماضي.

كما نعلم فإن الرؤية بالعين هي من أهم طرق الإحساس التي يتمتع بها أي كائن حي، ولكن من المعروف أيضا أن العين البشرية لا تستطيع أن ترى سوى الصور المحصورة في مجال الضوء المرئي من مجال الطيف، وهذا على عكس الكثير من ماكينات التصوير أو الرؤية التي يمكنها التصوير في نطاقات غير مرئية من الطيف مثل أشعة أكس وأشعة جاما والموجات فوق الصوتية والرنين المغناطيسي وغيرها الكثير التي أضافت أبعادا لعملية التصوير لم تكن موجودة من قبل والذي استلزم طرقا جديدة ومتقدمة يستخدم فيها الحاسب لتحسين هذه الصور لتراها العين البشرية بشكل مريح، أو تخزين هذه الصور لاستدعائها في أوقات لاحقة، أو التعرف الآلي على مكونات هذه الصورة، والكثير من هذه الطرق والوسائل الأخرى التي نطلق عليها المعالجة الرقمية للصور digital image processing.

من أهم خواص الصورة التي تتأثر بها العين مباشرة خاصية التحديد أو المقدرة التحليلية resolution والتي على ضوئها تتحدد جودة جهاز أو طريقة عرض الصورة. كما ذكرنا سابقا فإن الصورة الرقمية يتم عرضها في صورة عدد من البكسلات في وحدة المساحة. فكلما زاد عدد البكسلات في وحدة المساحة زادت جودة الصورة، فشاشة الصورة المقسمة إلى  $512 \times 512$  بكسل ستكون بالطبع أفضل بكثير من شاشة لها نفس المساحة ولكنها مقسمة إلى  $16 \times 16$  بكسل. تخيل أنك تريد عمل صورة مكبرة بطريقة يدوية عن طريق تقسيم هذه الصورة الأصلية إلى مربعات ثم نقل محتويات كل مربع على حده من الصورة

الأصلية إلى الصورة المكبرة. بالطبع فإن جودة عملية النسخ ستكون أفضل بكثير كلما كان عدد المربعات المستخدمة في عملية النسخ أكبر، هنا عدد المربعات المستخدمة يقابل عدد البكسلات أو عناصر الصورة التي ذكرناها. شكل ١١-١ يبين صورة أصلية وقد تم تصغيرها على مراحل عن طريق حذف صف من البكسلات من بين كل صفين، وأيضا عمود من البكسلات من بين كل عمودين حيث يتم تقسيم الصورة إلى عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة من البكسلات. فالصورة الأصلية تتكون من ٢٥٦ صف و ٢٥٦ عمود من البكسلات ولذلك فإننا نقول أنها  $256 \times 256$  بكسل.



شكل ١١-١ (أ) الصورة الأصلية  $256 \times 256$  بكسل (ب) نفس الصورة  $128 \times 128$  بكسل (ج) نفس الصورة  $64 \times 64$  بكسل (د) نفس الصورة  $32 \times 32$  بكسل

شكل ١١-٢ يبين تأثير جودة التحديد resolution حيث نلاحظ في شكل ١١-٢ الذي يمثل الصورة الأصلية  $256 \times 256$  بكسل، وشكل ١١-٢ ب يمثل الصورة  $128 \times 128$  بكسل معروضة في نفس مساحة الصورة الأصلية، وشكل ١١-٢ ج عبارة عن صورة  $64 \times 64$  بكسل معروضة في نفس مساحة الصورة الأصلية، وأخيرا شكل ١١-٢ د يمثل

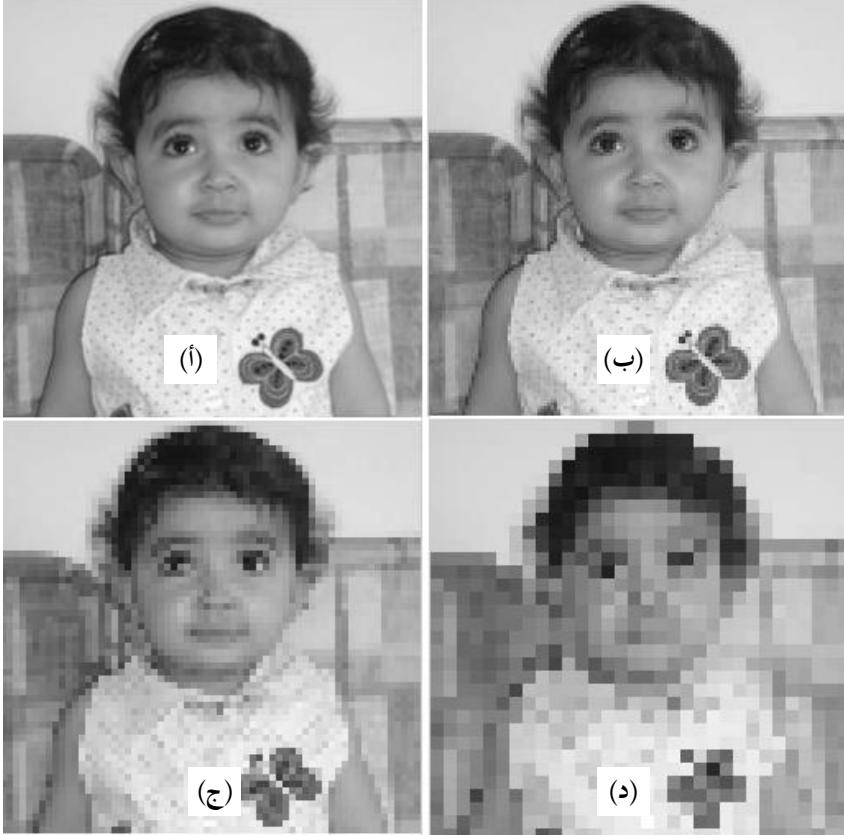
صورة  $32 \times 32$  بكسل معروضة في نفس مساحة الصورة الأصلية. لاحظ في هذه الأشكال ظهور عيب الصندوقة blocking effect حيث تظهر الصورة في صورة صناديق تشابه صناديق لوحة الشطرنج تتسبب في عدم وضوح الصورة وعدم تحديدها، وهذا عيب معروف في وسط المعالجة الرقمية للصور وهناك العديد من طرق التخلص منه.

كما ذكرنا فإن الصورة الرقمية عبارة عن مصفوفة من الأرقام كل رقم يمثل كثافة intensity أو شدة الإضاءة عند هذه البكسل. الرقم الممثل لكثافة كل نقطة يتم التعبير عنه بعدد من البتات في حالة الصور الرمادية. فمثلا في حالة استخدام بايت كاملة (8 بت) لتمثيل هذه الأرقام فإن كل رقم من هذه الأرقام سيتراوح من صفر حتى 255، أي أن عدد مستويات الرمادية في هذه الحالة سيكون 256 مستوى. يفرض أن لدينا صورة مساحتها  $64 \times 64$  بكسل فإن هذه الصورة ستحتاج لذاكرة مقدارها  $1 \times 64 \times 64$  بايت = 4096 بايت. بالنسبة للصور الملونة RGB فإن كل بكسل تمثل بثلاثة بايت حيث تمثل درجة كل لون ببايت، بايت يمثل كثافة اللون الأحمر، وآخر يمثل كثافة اللون الأخضر، والثالث يمثل كثافة اللون الأزرق، بحيث عند جمع الثلاث مركبات نحصل على اللون الطبيعي للبكسل. في هذه الحالة فإن الصورة السابقة ستحتاج لذاكرة أكبر حيث ستكون  $3 \times 64 \times 64$  بايت = 12288 بايت.

شكل 11-3 يبين تمثيل الكثافة بأعداد مختلفة من البتات بدأ من 7 بت = 128 مستوى وانتهاء ب 1 بت = مستويين فقط. نلاحظ أنه بزيادة عدد مستويات تمثيل مستوى الرمادية، فإن الصورة تكون أفضل، ومريحة أكثر للعين البشرية.

تمثيل الصورة بمستويين رماديين كما في شكل 11-3 و يعطى صورة أبيض وأسود فقط ويتم ذلك عن طريق اختيار مستوى رمادية معين ووضع جميع البكسلات التي كثافتها أعلى منه باللون الأبيض والبكسلات التي كثافتها أقل منه باللون الأسود، ولذلك فإن الصورة الناتجة ستعتمد في مظهرها على مقدار المستوى الذي سيتم اختياره. شكل 11-4 يبين نفس

صورة أسيل في المستويين الأبيض والأسود باستخدام أكثر من مستوى فصل وباستخدام دالة الماتلاب التالية:

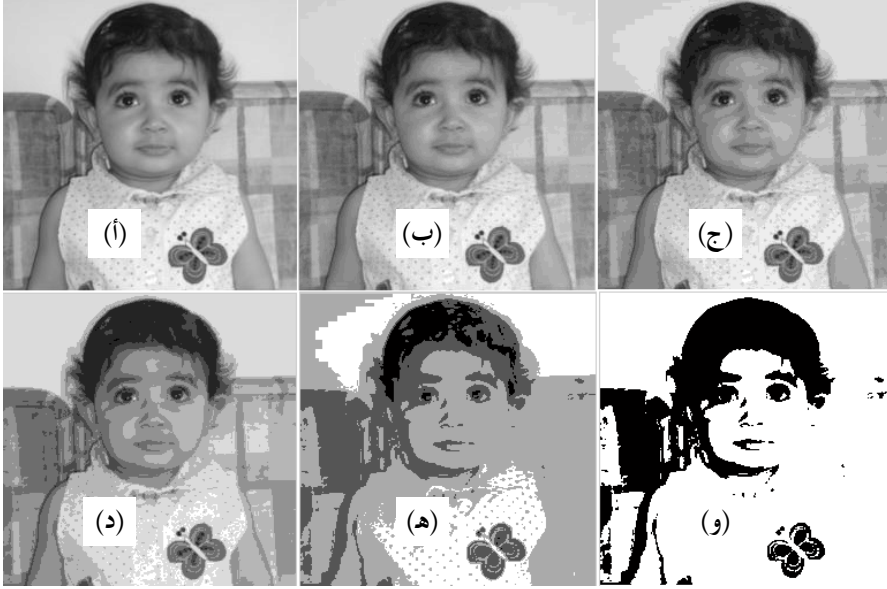


شكل ١١-٢ (أ) الصورة الأصلية (ب) صورة  $128 \times 128$  بكسل بنفس مساحة الصورة الأصلية (ج) صورة  $64 \times 64$  بنفس مساحة الصورة الأصلية (د) صورة  $32 \times 32$  بنفس مساحة الصورة الأصلية.

$$BW = \text{im2bw}(I, \text{level})$$

حيث BW هي الصورة الأبيض والأسود الناتجة، و I هي الصورة المراد تمثيلها بالمستويين الأبيض والأسود و level هو المستوى الذى ستكون كثافة البكسلات الأعلى منه باللون الأبيض والبكسلات التى ستكون كثافتها أقل منه باللون الأسود كما فى شكل ١١-٤.



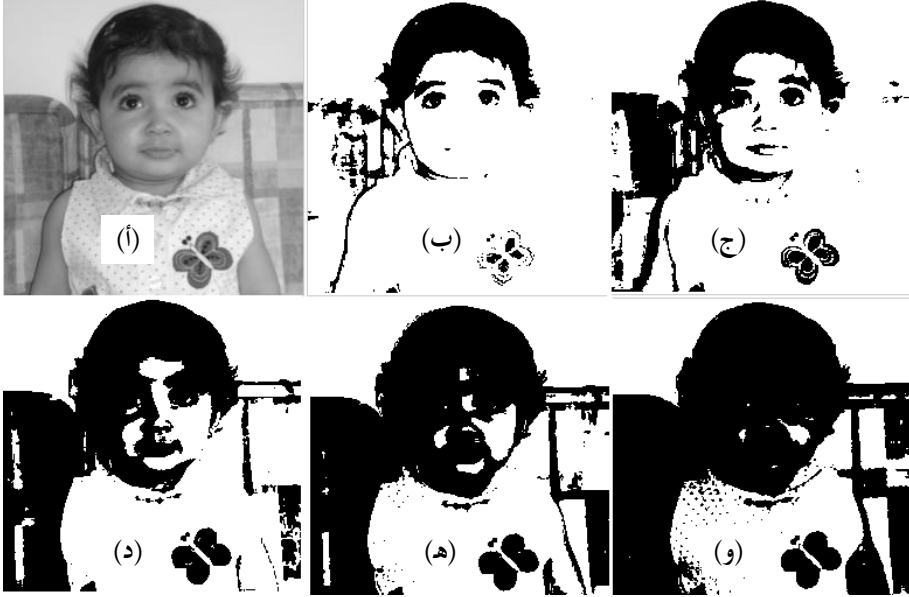


شكل ١١-٣ تمثيل الصورة بمستويات رمادية مختلفة (أ) ١٢٨ مستوى (ب) ٣٢ مستوى (ج) ١٦ مستوى (د) ٨ مستويات (هـ) ٤ مستويات (و) مستويان.

## ٢-١١ تحسين الصور Image enhancement

المقصود بتحسين الصورة هو الحصول على صورة أفضل من الصورة الأصلية باستخدام طريقة أو خواريزم معين. خواريزمات تحسين الصورة كثيرة ومتعددة وتعتمد بدرجة كبيرة على الصورة نفسها، فالطريقة التي تعطي نتائج جيدة مع صور الكاميرات الضوئية ليس بالضرورة أن تعطي نفس الجودة مع صور أشعة أكس. تنقسم خواريزمات تحسين الصورة إلى قسمين، قسم يعمل في النطاق المكاني أو المساحي spatial domain الذي يعمل على مساحة الصورة وعلى بكسلاتها، وأما القسم الثاني فيعمل على الصورة وهي في النطاق الترددي frequency domain أى بعد أخذ تحويل فورير لها. ونحن هنا سنقدم عرضاً سريعاً

لبعض هذه الطرق والخوارزميات دون الدخول في تفاصيل معظمها أو حتى ذكرها كلها لضيق المساحة المخصصة لهذا الموضوع وهى هذا الفصل فقط.



شكل ١١-٤؛ الحصول على صورة أبيض وأسود من الصورة الرمادية بأكثر من مستوى  
تشيع (أ) الصورة الأصلية (ب) level=0.4 (ج) level=0.5 (د)  
level=0.6 (هـ) level=0.65 (و) level=0.7.

### ١١-٢-١ طرق التحسين في نطاق مساحة الصورة spatial domain

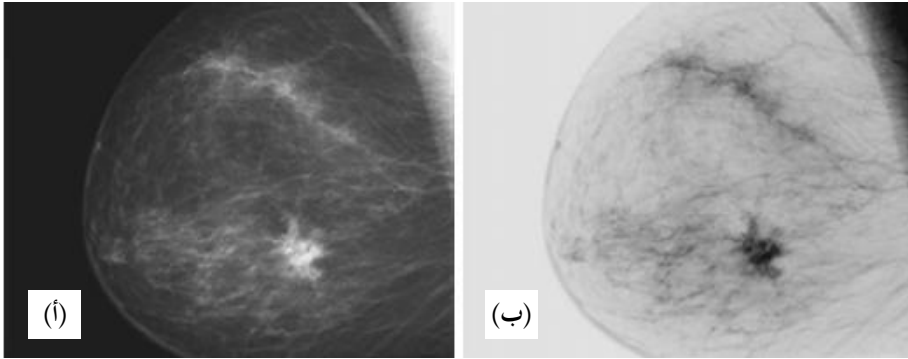
يمكن التعبير عن أي عملية على الصورة في نطاق المساحة بالمعادلة البسيطة التالية:

$$g(x,y)=T(f(x,y)) \quad (1-11)$$

حيث  $f(x,y)$  تمثل بكسل في الصورة الأصلية،  $g(x,y)$  تمثل البكسل الناتجة بعد إجراء العملية أو التحويل  $T$  عليها. من أشهر هذه التحويلات هو الحصول على الصورة السالبة negative للصورة الأصلية حيث يمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$s=L-1-r \quad (2-11)$$

حيث  $L$  هي الحد الأقصى لعدد المستويات الرمادية (٢٥٦ في حالة التمثيل باستخدام ٨ بت)، و  $r$  هي المستوى الرمادي لأي بت في الصورة الأصلية، و  $s$  هي المستوى الرمادي لأي بت في الصورة السالبة. إن عملية الحصول على الصورة السالبة لا تكون بغرض التسلية فقط ولكن في العادة يكون هناك صور إذا تم عكسها تكون الصورة أفضل ومبينة للكثير من التفاصيل كما في شكل ١١-٥ الذي يبين صورة أشعة أكس لثدي يتم فحصه لتشخيص وجود سرطان من عدمه في هذا الثدي حيث نلاحظ أن الصورة الأصلية تحتوى الكثير من السواد مما أخفى الكثير من تفاصيلها، ولكن بعكسها ظهر الكثير من التفاصيل.



شكل ١١-٥ ماموجرام (أ) الصورة الأصلية (ب) الصورة السالبة

طريقة عكس الصورة بالمعادلة (١١ - ٢) طريقة خطية كما هو واضح من المعادلة، هناك طرق أخرى غير الطرق الخطية والتي منها الطريقة اللوغاريتمية الممثلة في المعادلة التالية:

$$s=c\text{Log}(1+r) \quad (3-11)$$

حيث  $c$  قيمة ثابتة، و  $r$  و  $s$  كما ذكرنا سابقا. لاحظ أن هذا التحويل سيضغط المستويات الرمادية العالية. يمكن أيضا استخدام تحويل أسى على المستويات الرمادية لتحسين الصورة كما في المعادلة التالية:

$$s=cr^g \quad (4-11)$$

حيث كل من  $c$  و  $g$  ثوابت موجبة.

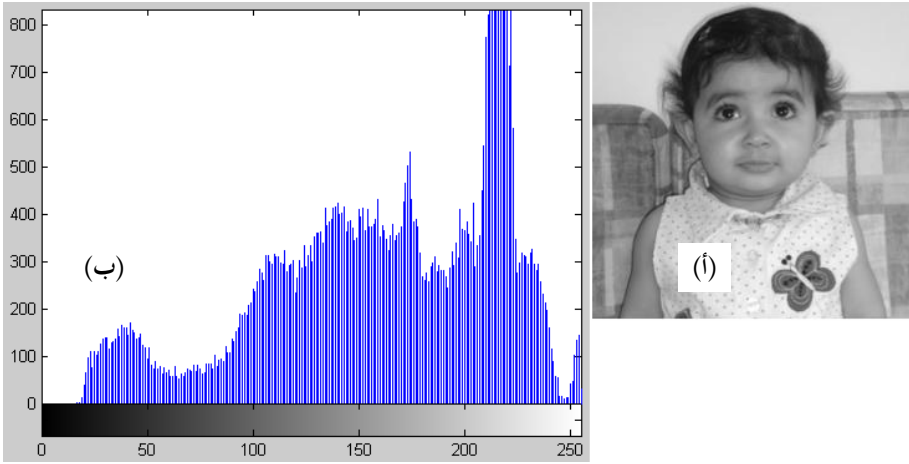
المعادلات (11-2) حتى (11-4) تتعامل مع كل بكسلات الصورة بنفس الطريقة. هناك طرق للتحسين تقسم مستويات الصورة الرمادية إلى عدد من المجالات، فمثلا المجال الأول من المستوى الرمادي صفر حتى المستوى 100، والمجال الثاني من المستوى 100 حتى المستوى 150، والثالث من المستوى 150 حتى المستوى 256 وهكذا، ثم بعد ذلك تقوم بمعالجة كل مجال من هذه المجالات بطريقة تحسين معينة أو معادلة تحسين معينة من المعادلات السابقة تختلف عن المجال الآخر. بالطبع معظم هذه الطرق تخضع للتجربة وتكون العين البشرية هي الحكم النهائي حيث يتم التحسين بعد محاولات مختلفة حتى تصل إلى أحسن رؤية.

### ١- المدرج الإحصائي (المستوجرام) Histogram

المستوجرام هو أحد طرق تحسين الصورة الشهيرة التي تعمل على بكسلات الصورة، أي في النطاق المساحي للصورة. بفرض أن لدينا صورة رقمية عدد مستوياتها الرمادية يمتد من المستوى صفر إلى المستوى  $L-1$ . مستوجرام هذه الصورة يمكن كتابته كما في المعادلة التالية:

$$h(r_k)=n_k \quad (5-11)$$

حيث  $k=0,1,2,\dots,L-1$  و  $r_k$  هو المستوى الرمادي رقم  $k$ ، و  $n_k$  هو عدد البكسلات التي لها هذا المستوى الرمادي. فمثلا في صورة لها ٢٥٦ مستوى رمادي، المستوجرام يحسب عدد بكسلات الصورة التي لها المستوى صفر، وعدد البكسلات التي لها المستوى واحد، وعدد البكسلات التي لها المستوى ٢،... وهكذا إلى المستوى ٢٥٥. يتم تمثيل المستوجرام على محورين، الأفقي يمثل المستويات من صفر حتى ٢٥٥، والرأسي يمثل عدد البكسلات في هذا المستوى. شكل ١١-٦ يبين صورة أسيل وبجوارها المستوجرام الخاص بها.



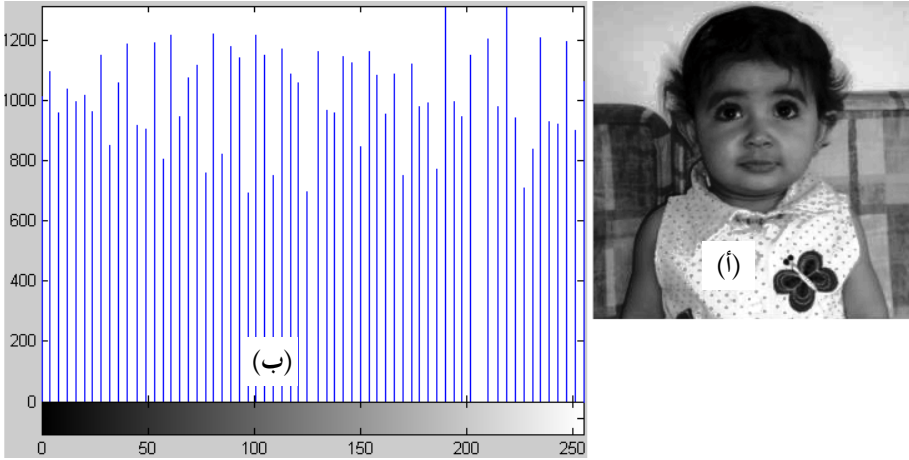
شكل ١١-٦ (أ) صورة أسيل (ب) المستوجرام.

لاحظ الشريط الموجود في أسفل المستوجرام والذي يبين أن أقصى مستوى في اللون الأبيض هو المستوى ٢٥٦ بينما المستوى صفر يمثل أقصى اللون الأسود. نلاحظ أيضا من المستوجرام أن الصورة تميل إلى اللون الأبيض حيث نلاحظ تركز المستوجرام ناحية اللون الأبيض. حتى تكون الصورة ذات تباين جيد يجب أن يكون المستوجرام الخاص بها منتظم تقريبا على كل المستويات الرمادية، أو يأخذ شكل الجرس، بحيث يكون عالي قليلا عند المستويات الرمادية المتوسطة ويقل تدريجيا عند مستويات الأطراف. هناك طرق لتحسين

الصورة عن طريق ضبط الهستوجرام يضيق المكان لشرحها هنا ولكن يمكن قراءة تفاصيلها في أي مرجع من مراجع معالجة الصور. برنامج الماتلاب به دالة تقوم بضبط هستوجرام أي صورة تسمى histogram equalization وتكتب كما يلي:

$$I = \text{haste}(J)$$

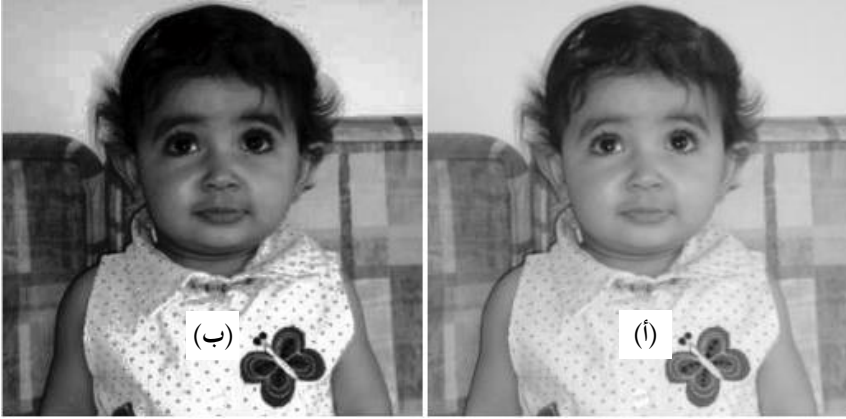
حيث I هي الصورة الناتجة بعد تعديل هستوجرام الصورة J. باستخدام الدالة السابقة لتعديل هستوجرام صورة أسيل في شكل ١١-٦ أنحصل على الصورة الجديدة والهستوجرام الخاص بها كما في شكل ١١-٧.



شكل ١١-٧ (أ) الصورة بعد تعديلها عن طريق تعديل الهستوجرام (ب) الهستوجرام الجديد.

لاحظ التباين الزائد في الصورة الناتجة حيث اللون الأبيض أصبح أكثر بياضاً والأسود أصبح أكثر سواداً. ربما لو وضعنا الصورتين متجاورتين يمكننا أن نلاحظ هذا الفرق بسهولة

كما في شكل ١١-٨. إن تعديل الصورة عن طريق تعديل المستوجرام يعتمد بدرجة كبيرة على خبرة المستخدم وعلى عين الرائي. إن موضوع المستوجرام وطرق تعديله يتم عرضه في صفحات عديدة في أي كتاب ولكننا نكتفي بهذا القدر عنه هنا حيث أننا نعرض في هذا الفصل الأفكار فقط عن موضوع المعالجة الرقمية للصور.



شكل ١١-٨ (أ) الصورة قبل التعديل (ب) الصورة بعد التعديل عن طريق تعديل المستوجرام الخاص بها.

## ٢- المرشحات في النطاق المساحي للصورة **Spatial filtering**

إن كلمة مرشح ترتبط دائما بالعمل على المحتويات الترددية للإشارة أو الصورة ويتم ذلك في العادة بعد أخذ تحويل فوريير لهذه الصورة. هذا النوع من المرشحات ليس هو موضوعنا هنا ولكنه سيكون موضوع جزء خاص بذلك. المرشح الذي نعنيه هنا هو مرشح يعمل على بكسلات الصورة أو يعمل على الصورة وهي في النطاق المساحي. مثال ذلك أن نمثل مستوى الرمادية لكل بكسل بمتوسط مستوى الإضاءة للثمان بكسلات المحيطة بها مثلا. تتم عملية الترشيح في هذه الحالة تبعا للخطوات التالية:

- ١- يتم تحديد مساحة المرشح filter أو أحيانا يسمى القناع mask وأحيانا أخرى يسمى النافذة window ونحن هنا سنستخدم أى واحد من هذه الأسماء. في العادة تكون هذه المرشحات مربعة الأبعاد مثل  $3 \times 3$  بكسل أو  $4 \times 4$  بكسل وهكذا، وتتوقف المساحة على حسب المرشح المستخدم.
- ٢- يتم تحديد معامل أو ثابت لكل بكسل من بكسلات هذا المرشح. قيمة هذا المعامل تتوقف على الغرض المستخدم من أجله المرشح كما سنرى.
- ٣- يتم تطبيق المرشح على الصورة ومسحها به، ويتم ذلك في العادة بدأ من الصف الأعلى من اليسار وانتهاء بالصف الأسفل من اليمين. عند كل موضع من مواضع المسح يتم ضرب معاملات المرشح في قيمة مستوى كل بكسل مقابل من بكسلات الصورة كما في المعادلة التالية:

$$R = w(-1, -1)f(x-1, y-1) + w(-1, 0)f(x-1, y) + w(-1, 1)f(x-1, y+1) + w(0, 1)f(x, y+1) + w(1, 1)f(x+1, y+1) + w(1, 0)f(x+1, y) + w(1, -1)f(x+1, y-1) + w(0, -1)f(x, y-1) + w(0, 0)f(x, y) \quad (6-11)$$

لاحظ أن النافذة أو المرشح المستخدم في المعادلة (٦ - ١١) مساحتها  $3 \times 3$  بكسل متمركزة حول البكسل  $(x, y)$ ، والقيمة R والتي نعتبرها استجابة المرشح في هذه الحالة تمثل مستوى الرمادية الجديد عند النقطة  $(x, y)$ . يمكن كتابة معادلة الترشيح السابقة بصورة عامة كما يلي:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{r=-b}^b w(s, r) f(x+s, y+r) \quad (7-11)$$

حيث a و b تمثل مساحة المرشح أو النافذة التي سيتم إجراؤها على بكسلات الصورة  $f(x, y)$  لتنتج بكسلات الصورة الجديدة  $g(x, y)$ . لترشيح صورة كاملة ذات أبعاد  $M \times N$  فإن x في المعادلة (٧ - ١١) ستتغير من صفر حتى  $M-1$ ، و y ستتغير من صفر حتى  $N-1$ .



### مرشحات تنعيم الصورة Smoothing filters

مرشحات التنعيم تعتمد في نظريتها على استبدال مستوى الرمادية لكل بكسل بمتوسط مستوى الرمادية للبكسلات المحيطة بها على حسب مساحة المرشح. سميت بمرشحات التنعيم لأن أخذ المتوسط على مستوى مساحة معينة يقلل من حدة الحواف الموجودة في هذه المنطقة من الصورة، وهذه العملية تسمى blurring أو الضبابية حيث أن الصورة في هذه الحالة تظهر كما لو كانت مأخوذة في ضباب حيث تتلاشى أو تحف حدة الحواف الموجودة في الصورة وهذه من العيوب الجانبية لهذا النوع من المرشحات. وهذه الظاهرة تكون مفيدة في الصور التي بها ضوضاء عشوائية تتسم بالحدة حيث يمكن في هذه الحالة تخفيف حدة هذه الحواف العشوائية وهذه من مميزات هذه المرشحات. ومن مميزات هذه المرشحات أيضا أنها يمكن استخدامها في تخفيف حدة المسارات أو الحلقات الكاذبة التي تظهر في الصورة نتيجة استخدام عدد غير كاف من المستويات الرمادية لتمثيل الصورة والتي سميت من قبل بعيب الصندوق.

يوجد نوعان من هذه المرشحات والنوعان ممثلان في الماتلاب كما سنرى. النوع الأول يسمى مرشحات التنعيم الإلتفافية convolution smoothing filters وهذا النوع يقوم بنفس الدور الذي كانت تقوم به عملية الإلتفاف التي شرحناها على الإشارات سابقا، حيث يتم قلب الإشارة وبعد ذلك يتم سحبها على الإشارة الأخرى مع الضرب عند كل خطوة سحب. هنا يتم دوران المرشح أو النافذة التي سيتم استخدامها كمرشح بمقدار ١٨٠ درجة وبعد ذلك يتم ضرب بكسلات المرشح في بكسلات الصورة مع الإزاحة المستمرة من اليمين لليساار ومن أعلى لأسفل.

برنامج الماتلاب لديه الدالة imfilter التي تقوم بترشيح الصورة المعطاة تبعا للمرشح المعطى أيضا. الخطوات التالية تبين ذلك:

```
I=imread('d:\aseel\aseel256.jpg');
J = rgb2gray(I);
J = imresize(J,[256 256]);
imshow(J);title('Original Image')
```

```
h = ones(11,11) / 121;
I2 = imfilter(J,h,'conv');
figure; imshow(I2); title('Filtered Image')
```

حيث تم تحديد المرشح الذي سيتم استخدامه بالمصفوفة  $h$  وبعد ذلك تم إجراء عرض للصورتين الأصلية والمرشحة كما في شكل ١١-٩.

الدالة `imfilter` يمكن استخدامها بدون الاختيار 'conv' حيث في هذه الحالة سيتم ضرب بكسلات المرشح مباشرة في البكسلات المقابلة لها في الصورة الأصلية بدون عملية الدوران  $180^\circ$  درجة كما في حالة دالة الالتفاف convolution. هذه الحالة التلقائية للدالة `imfilter`، أي أنه إذا لم تكتب بها الاختيار 'conv' فإن الدالة لن تنفذ الضرب الالتفافي، ولكنها ستنفذ الضرب العلاقي correlation فحاول تنفيذ نفس البرنامج السابق بنفس حجم النافذة أو المرشح ( $11 \times 11$  بكسل والرقم واحد) وانظر هل هناك فرق بين الحالتين أم لا. المفروض ألا يكون هناك فرق لأن مصفوفة المرشح أو نافذة الترشيح كلها تحتوى الرقم واحد فقط ولن تتأثر بعملية الدوران  $180^\circ$  درجة نتيجة إجراء الضرب الالتفافي. هناك ملاحظة ثانية على الصورة الناتجة من مرشح التنعيم في الشكل ١١-٩ وهي وجود إطار أسود أو حدود حول الصورة الناتجة من الترشيح وهذا الإطار أو هذا الحد لم يكن موجودا في الصورة الأصلية، فما هو سبب وجود هذا الإطار؟. سبب وجود هذا الإطار نفهمه لو فهمنا طريقة تطبيق هذا المرشح. كما ذكرنا أنه يتم تطبيق مساحة المرشح على مساحة الصورة لتعديل أو تنعيم مستوى نقطة المركز في مساحة المرشح، ثم نبدأ في تحريك المرشح بالنسبة للصورة من اليسار لليمين ومن أعلى لأسفل إلى أن ننتهي من مسح الصورة كلها. السؤال الآن هو ما هو موقف النقاط الموجودة على حافة الصورة أو على إطارها؟ عندما تكون واحدة من هذه النقاط هي مركز مساحة المرشح فإن جزء من مساحة المرشح سيقع خارج نقاط الصورة حيث لا توجد بكسلات معروفة للصورة يمكن الضرب فيها، فما هو الموقف في هذه الحالة وكيف سنتعامل مع بكسلات المرشح التي تقع خارج نطاق الصورة.

هناك أكثر من حل لهذا الموقف، أحدها أن يتم فرض مستوى رمادية هذه البكسلات بأصفار وهذا ما يفعله الماتلاب فعلا وهو السبب في ظهور الإطار الأسود حول الصورة وهو ما يسمى zero padding. هناك حل آخر وهو أن كل بكسل خارج نطاق الصورة تأخذ نفس مستوى الرمادية في النقطة المجاورة لها على حافة الصورة أو بمعنى آخر يتم تكرار نقاط الحافة كبكسلات خارج الصورة وهو ما يسمى border replication. ويمكن عمل ذلك في الدالة imfilter بإضافة كلمة replicate لها حيث ستكون النتيجة كما في شكل ١٠-١١ حيث نلاحظ اختفاء الحافة الخارجية تقريبا بالمقارنة بالصورة الموجودة في شكل ١١-٩ ب.



شكل ١١-٩ (أ) الصورة الأصلية (ب) نفس الصورة بعد تطبيق مرشح التنعيم الالتفافي عليها.

### مرشحات الوسط Median filters

هذا النوع من المرشحات مفيد جداً في إزالة نوع معين من الضوضاء التي تقع على الصورة والتي تكون في صورة نقاط سوداء جداً في وسط أقل سواداً، أو العكس نقاط بيضاء جداً

في وسط أقل بياضا أيضا. هذا النوع من الضوضاء يسمى ضوضاء الملح والفلفل salt and pepper noise لأنها تشبه حبات الفلفل الأسود المنتشرة في الملح الأبيض. مرشح الوسط median filter، عبارة عن نافذة مربعة لا تحتوي أى معاملات تسمح بها الصورة كما سبق، ولكننا نقرأ مستويات بكسلات الصورة تحت هذه النافذة ونرتبها ترتيبا تصاعديا ونأخذ القيمة المتوسطة فيها ونستبدل بها قيمة البكسل التي نرشحها أو نعالجها والتي هي البكسل الموجودة في مركز النافذة.

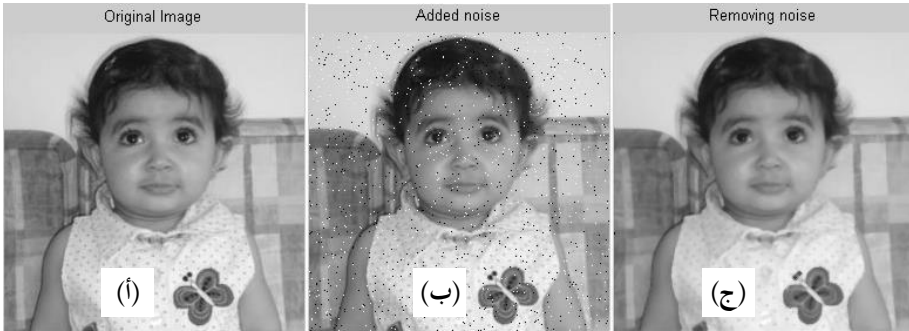
فمثلا لو فرضنا أن بكسلات الصورة التي كانت تحت نافذة أبعادها  $3 \times 3$  مستوياتها الرمادية كالتالي (٥٠، ١٠، ٨٠، ٣٠، ٠، ١٠٠، ٢٥، ٨٨، ٩٠). لتطبيق مرشح الوسط على هذه النافذة نقوم بترتيب البكسلات السابقة ترتيبا تصاعديا من اليسار لليمين كالتالي (٠، ١٠، ٢٥، ٣٠، ٥٠، ٨٠، ٨٨، ٩٠، ١٠٠)، وعلى ذلك تكون القيمة الوسطى هي القيمة ٥٠ حيث أن قبلها ٤ قراءات أقل منها وبعدها ٤ قراءات أكبر منها كما ترى. بعد ذلك نقوم باستبدال قيمة البكسل التي في مركز المرشح بالقيمة ٥٠. لاحظ أننا نبحت عن القيمة الوسطى في النافذة، أي التي في منتصف القائمة بعد الترتيب وقبلها عدد من النقاط يساوى العدد الذي بعدها. البعض يعتقد أننا نحسب متوسط نقاط النافذة وهذا خطأ. برنامج الماتلاب يوفر الكثير من الدوال للمساعدة في ذلك ومنها مثلا الدالة:

$J = \text{imnoise}(J, 'salt \& pepper', 0.02);$

التي تضيف الضوضاء من نوع الملح والفلفل للصورة بنسبة 0.02 من عدد بكسلات الصورة، وكذلك فإن كثافة كل بكسل أو مستوى الرمادية لها يكون 0.02 أيضا. البرنامج التالي سيضيف هذا النوع من الضوضاء على صورة أسيل الأصلية ثم يستخدم مرشح وسط بالأبعاد  $3 \times 3$  لإزالة هذه الضوضاء كما في شكل ١١-١١ الذي يبين الصورة الأصلية والصورة مع الضوضاء ثم الصورة بعد إزالة هذه الضوضاء.



شكل ١١-١٠ تأثير المعاملة مع حواف الصورة.



شكل ١١-١١ تأثير مرشح الوسط median filter على ضوضاء الملح والفلفل (أ)  
 الصورة الأصلية (ب) الصورة مضافا إليها الضوضاء (ج) الصورة بعد إزالة  
 الضوضاء.

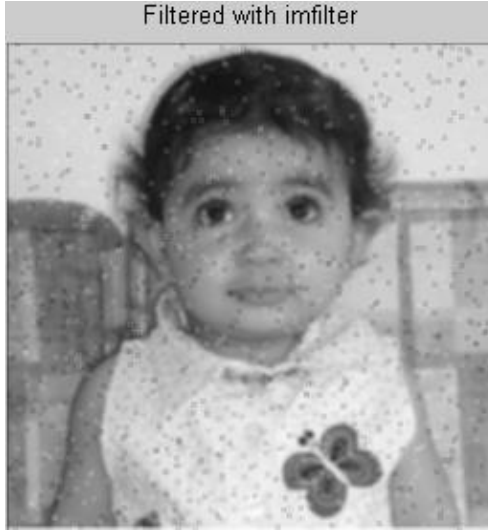
```
I=imread('d:\aseel\aseel256.jpg');
J = rgb2gray(I);
J = imresize(J,[256 256]);
imshow(J);title('Original Image')
J = imnoise(J,'salt & pepper',0.02);
figure, imshow(J)
```

```
L = medfilt2(J,[3 3]);
figure, imshow(L)
```

لكي نرى مدى جودة مرشح الوسط في إزالة هذا النوع من الضوضاء سنحاول إزالة هذه الضوضاء بمرشح تنعيم كما سبق باستخدام الدالة:

```
h = ones(3,3) / 9;
I2 = imfilter(J,h);
```

شكل ١١-١٢ يبين كيف أن مرشح التنعيم لم يزيل هذه الضوضاء كما فعل مرشح الوسط.



شكل ١١-١٢ إزالة ضوضاء الملح والفلفل باستخدام مرشح تنعيم.

### مرشحات زيادة الحدة أو الإظهار Sharpening filters

إظهار الصورة نقصد به التخلص من ما بها من ضبابية إن وجد، وكذلك التأكيد أو إظهار تفاصيل الصورة بما فيها من حواف ومكونات. كما ترى فإن عملية الإظهار عكس عملية

الضبابية blurring. كما ذكرنا من قبل فإن الضبابية عبارة عن تجميع لشدة البكسلات في المنطقة المجاورة وإيجاد متوسطها وإحلالها محل البكسل الموجودة في مركز هذه المنطقة. أي أنها في النهاية عبارة عن عملية تكامل لشدة البكسلات في هذه المنطقة. لذلك فإننا نتوقع أن تكون عملية الإظهار sharpening عبارة عن عملية تفاضل (عكس عملية التكامل في مرشحات الضبابية). كما نعلم فإن التفاضل في الدوال الرقمية عبارة عن الفرق، لذلك فإنه في المنطقة المتجانسة التي لها نفس مستوى الرمادية عند كل البكسلات سيكون تفاضلها يساوي صفر. بينما عند أي حافة أو خط في الصورة يجب أن نتوقع أن التفاضل سيكون كبيرا لأنه عند الخط أو الحافة هناك تغير مفاجيء في الشدة. وعلى ذلك فالمعادلة التالية تحدد التفاضل في الاتجاه x كما يلي:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+1) - f(x) \quad (8-11)$$

في بعض الخوارزميات تكون هناك حاجة للتعامل مع التفاضل الثاني للدالة، ويمكن تعريف التفاضل الثاني في هذه الحالة كما يلي:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \quad (9-11)$$

بتطبيق المعادلة (9-11) على صورة  $f(x,y)$  يمكن كتابة المعادلتين التاليتين:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \quad (10-11)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y) \quad (11-11)$$

بجمع المعادلتين (10-11) و (11-11) يمكن كتابة معادلة التفاضل الثاني للصورة كما يلي:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial(x, y)^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) \quad (11-12)$$

المعادلة (11-12) تسمى الالابلاسيان Laplacian وفي العادة تكتب كما يلي:

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) \quad (11-13)$$

شكل 11-13 أ يبين طريقة وضع الالابلاسيان في صورة مرشح مساحة أو نافذة. شكل 11-13 ب يبين نفس الالابلاسيان ولكن مع أخذ كل من قطري النافذة في الاعتبار.

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

(أ)

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

(ب)

شكل 11-13 تنفيذ الالابلاسيان كمرشح مساحة أو نافذة.

الدالة

`h = fspecial('laplacian');`

تعطى نافذة لابلاس مناسبة للتطبيق الفوري على الصورة. بتنفيذ هذه الدالة نحصل على النافذة التالية:

`h =`  
 0.1667 0.6667 0.1667  
 0.6667 -3.3333 0.6667  
 0.1667 0.6667 0.1667

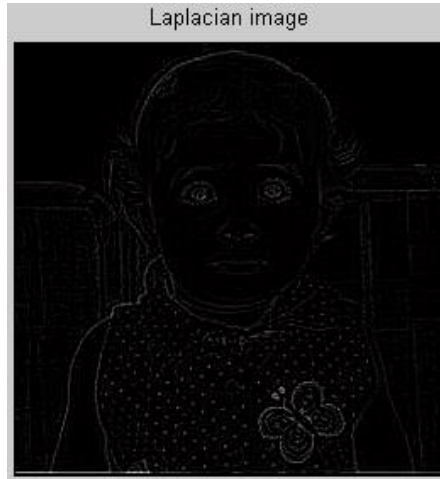


الآن يمكن ترشيح أي صورة بهذه النافذة لنحصل على الصورة الالابلاسيان كما في شكل ١١-١٤ وكما هو في البرنامج التالي:

```
I=imread('d:\aseel\aseel256.jpg');
J = rgb2gray(I);
J = imresize(J,[256 256]);
imshow(J);title('Original Image');
h = fspecial('laplacian');
I3 = imfilter(J,h);
figure; imshow(I3); title('Laplacian image')
```

لاحظ السواد الزائد في الصورة الالابلاسيان، وهذا متوقع لأننا كما ذكرنا عندما نفاضل نأخذ الفرق، وعندما تكون النقطتان متساويتان فالفرق بينهما يكون صفرا ويظهر بالطبع باللون الأسود كما نرى، إلا عند الحواف أو الخطوط يكون الفرق له قيمة لذلك يظهر بلون رمادي تبعاً لقيمة هذا الفرق. هنا يظهر سؤال، ماذا سنستفيد من هذه الصورة؟ في الحقيقة فإن الصورة الموجودة في الشكل ١١-١٤ في حد ذاتها تكون غير مفيدة، ولكن في الكثير من التطبيقات عند إضافة هذه الصورة على الصورة الأصلية يحدث تحسين كبير في الصورة وبالذات من ناحية الإظهار sharpening حيث مع إضافة الصورتين يتم التأكيد على الخطوط والحواف.

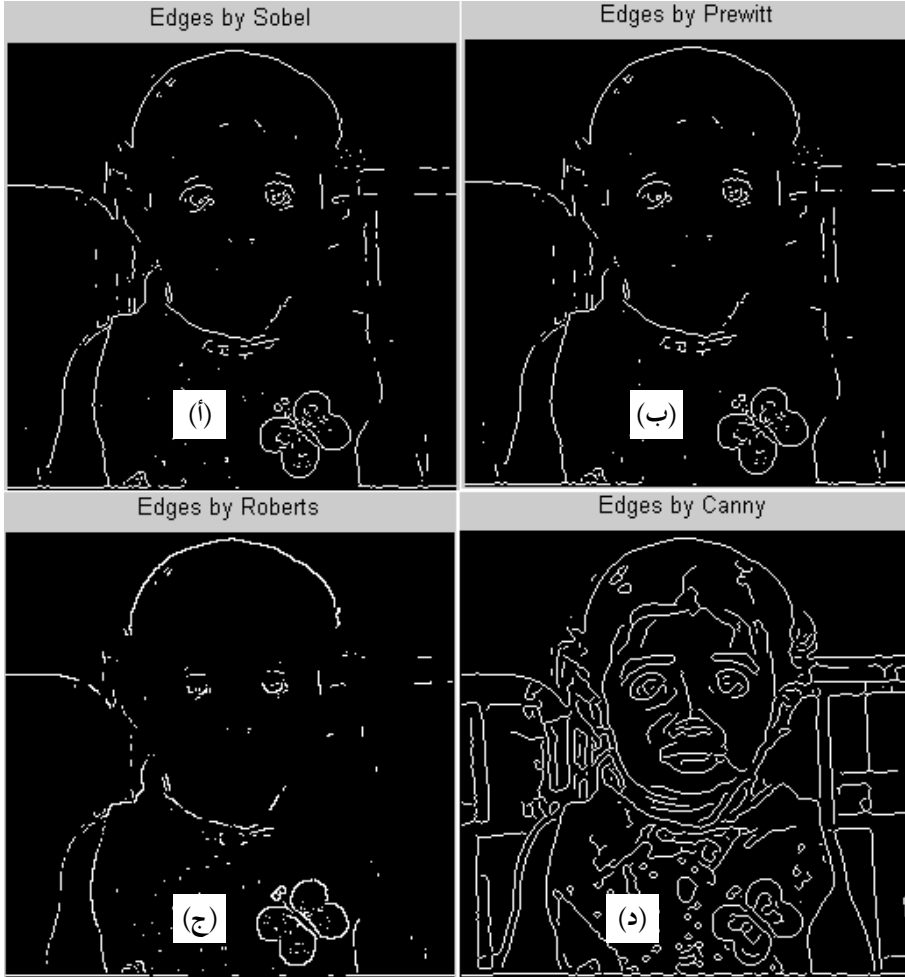
كما رأينا فإنه بالتفاضل يمكن إظهار الخطوط والحواف، ومن هنا ظهر الكثير من الخوارزميات التي تستعمل مرشحات مساحية بمعاملات معينة لإظهار هذه الحواف والتأكيد عليها، ونحن هنا لن نخوض في تفاصيل هذه الخوارزميات لأنها تحتاج لمساحات كبيرة من الشرح. من هذه الخوارزميات سوبيل Sobel وبرويت Prewitt وروبرتس Roberts وكانى Canny وكلها مرشحات تؤكد أو تظهر الحواف أو الخطوط في الصورة. شكل ١١-١٥ يبين تطبيق هذه الخوارزميات الأربعة على صورة أسيل باستخدام البرنامج التالي:



شكل ١١-١٤ الصورة اللابلاسيان.

```

I=imread('d:\aseel\aseel256.jpg');
J = rgb2gray(I);
J = imresize(J,[256 256]);
imshow(J);title('Original Image');
BW1 = edge(J,'sobel');
figure; imshow(BW1);title('Edges by Sobel');
BW2 = edge(J,'prewitt');
figure; imshow(BW2);title('Edges by Prewitt');
BW3 = edge(J,'roberts');
figure; imshow(BW3);title('Edges by Roberts');
BW4 = edge(J,'canny');
figure; imshow(BW4);title('Edges by Canny');
  
```



شكل ١١-١٥ الحصول على حواف وخطوط الصورة باستخدام خوارزم (أ) سوبيل (ب) برويت (ج) روبرتس (د) كاني.

### ١١-٢-٢ المرشحات في النطاق الترددي للصورة Frequency domain filtering

كما علمنا من الفصول السابقة فإن المعالجة في النطاق الترددي تستلزم الحصول على تحويل فوريير للدالة أو الإشارة، وإذا كانت الإشارة أو الدالة رقمية فإننا نجرى عليها تحويل فوريير

الرقمي ولا حاجة لنا هنا لمراجعة تحويل فوريير لأنه تم ذلك في فصول سابقة، فقط وبما أن الصور تعتبر دالة ثنائية البعد فإننا سنعرض هنا فقط لتحويل فوريير ثنائي البعد. تحويل فوريير للصور ثنائية الأبعاد يمكن كتابته كالتالي:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (11-14)$$

حيث  $M$  و  $N$  هي أبعاد الصورة في الاتجاه  $x$  و  $y$  على التوالي بالبكسل و  $u$  و  $v$  هي التردد الرقمي حيث أن التحويل الناتج سيكون ثنائي الاتجاه بنفس عدد النقاط  $M$  في الاتجاه  $u$  و  $N$  في الاتجاه  $v$ ، وهذا يناظر تماما تحويل فوريير أحادي الاتجاه الذي درسناه سابقا. بالتناظر يمكن كتابة تحويل فوريير العكسي ثنائي الاتجاه كما يلي:

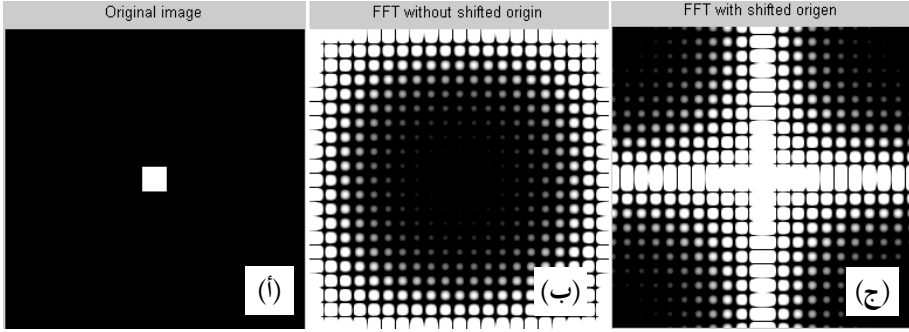
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (11-15)$$

كما نذكر فإن نقطة الأصل لتحويل فوريير الرقمي أحادي الاتجاه تكون عند النقطة  $w=0$ ، فإنه بنفس الطريقة ستكون نقطة الأصل لتحويل فوريير ثنائي الاتجاه عند  $u=0$  و  $v=0$ ، وهذا في العادة يكون غير مرغوب فيه في حالة التعامل مع الصور حيث عادة نريد نقطة الأصل أن تكون في قلب مستوى الصورة، أي عند  $u=M/2$  و  $v=N/2$  وهذا يتم ببساطة بضرب الصورة  $f(x, y)$  في القيمة  $(-1)^{x+y}$  حيث يمكن من خواص تحويل فوريير أن نثبت المعادلة التالية:

$$\xi [f(x, y)(-1)^{x+y}] = F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (11-16)$$

حيث  $\xi$  [.] ترمز إلى تحويل فوريير لما بين القوسين. وهذه المعادلة تعني أن نقطة الأصل لتحويل فوريير للدالة  $f(x, y)(-1)^{x+y}$  ستنتقل إلى النقطة  $u=M/2$  و  $v=N/2$ . شكل 11-16 و 11-17 و 11-18 يبين تحويل فوريير للصورة الموجودة في شكل 11-16، والبرنامج التالي يبين

طريقة الحصول على هذه الصور. لاحظ الفرق بين وجود نقطة الأصل في مركز الصورة ووجودها أعلى يسار الصورة.



شكل ١١-١٦ محول فوريير لصورة (أ) الصورة (ب) محول فوريير بدون إزاحة نقطة الأصل (ج) محول فوريير بعد إزاحة نقطة الأصل لمركز الصورة.

```
f = zeros(256,256);
f(118:138,118:138) = 1;
imshow(f); title('Original image');
F1 = fft2(f,256,256);
F2 = log(abs(F1));
figure; imshow(F2); title('FFT without shifted origin');
F3 = fftshift(F1);
F4 = log(abs(F3));
figure; imshow(F4); title('FFT with shifted origin');
```

### ترشيح الصور في النطاق الترددي

كما نتوقع وكما درسنا في الفصول السابقة فإن ترشيح أى صورة في النطاق الترددي سيتم في الخطوات التالية:

١- اضرب الصورة في النطاق المساحي في  $(-1)^{x+y}$  كما في المعادلة (١١ - ١٦) لجعل نقطة الأصل في النطاق الترددي في مركز الصورة.

- ٢- احسب تحويل فوريير الرقمي DFT للصورة باستخدام المعادلة (١١ - ١٤) لتحصل على الصورة في النطاق الترددي  $F(u,v)$ .
- ٣- اضرب تحويل فوريير للصورة  $F(u,v)$  في تحويل فوريير للمرشح المطلوب  $H(u,v)$  إجراؤه على الصورة ، وهناك أنواع كثيرة من هذه المرشحات.
- ٤- احسب تحويل فوريير العكسي لحاصل الضرب الناتج من الخطوة ٣ باستخدام المعادلة (١١ - ١٥).
- ٥- احسب الجزء الحقيقي real part للناتج من الخطوة ٤.
- ٦- اضرب الناتج من الخطوة ٥ في  $(-1)^{x+y}$  كما في المعادلة ١١-١٦ لإرجاع نقطة الأصل لأصلها في الصورة في النطاق المساحي.

وهذه الخطوات هي بالضبط ما تم تنفيذه في معرض الحديث عن المرشحات أحادية البعد في الفصول السابقة.

إن الحديث عن المعالجة الرقمية للصور تفرد له مراجع ضخمة ونحن هنا في هذا الفصل قد عرضنا لطرق تحسين الصورة عرضا مختصرا جدا حيث أن هناك طرقا أخرى عديدة لتحسين الصورة. بجانب هذا فإن الأمر لا يتوقف على تقنيات تحسين الصورة فقط بل إن هناك أيضا ضغط الصورة وهي عبارة عن مجموعة من الخوارزميات التي تضغط الصورة بحيث تأخذ أقل مساحة تخزينية ممكنة لأن الصور كما نعلم تحتاج مساحات تخزينية كبيرة. هناك أيضا تقنيات أو خوارزميات تقسيم الصورة والتعرف على محتوياتها، وهذا يأخذنا إلى موضوع الرؤية بالحاسب والذي يعتبر من الموضوعات النشطة بحثيا وتستخدم في تطبيقات الروبوتيات.

لذلك سنتوقف عند هذا الحد في الحديث عن أساسيات المعالجة الرقمية للصور تاركين الموضوع لمن يريد الاستزادة للرجوع إلى المراجع العديدة.

## قاموس الترجمة الإنجليزية إلى العربية

المصطلح الإنجليزي	الترجمة العربية
<b>A</b>	
Adder	<b>المجموع:</b> عنصر لتجميع إشارتي دخل ويعطى إشارة خرج واحدة ويستخدم في بناء الأنظمة الرقمية.
Algorithm	<b>خواريزم:</b> مجموعة من الخطوات التي لا لبس فيها لحل مشكلة معينة، بالذات عن طريق الحاسب.
Aliasing	<b>التزييف:</b> أو الاستعارة، ويقصد بها ظهور بعض الترددات بقيم غير قيمتها الحقيقية، فنرى الترددات العالية بقيم منخفضة، وهذه مشكلة كبيرة تظهر عند التحويل من الصورة الانسيابية إلى الرقمية تحت ظروف معينة.
Analog	<b>تناظري:</b> أو تماثلي أو انسيابي، بمعنى أن الإشارة أو المتغير ينساب بين قيمته العظمى والصغرى، أى يمكن أن يأخذ مالا نهاية من القيم بين قيمته العظمى والصغرى.
Analog Filter	<b>مرشح تناظري أو انسيابي أو تماثلي:</b> كل من دخله وخرجه عبارة عن إشارة تناظرية، كما أنه مصمم باستخدام مكونات إلكترونية تناظرية مثل المقاومات والمكثفات.
Antialiasing filter	<b>مرشح مضاد للتزييف:</b> يوضع في بداية أى نظام رقمي للحد من ترددات الإشارة التناظرية.
Aperiodic	<b>غير دوري:</b> إشارة ليس لها نمط تكرارى ثابت.
Associative	<b>إنضمامي:</b> أى عملية تكون انضمامية عندما لا تتأثر بضم عناصرها $(x+y)+z=x+(y+z)$ ، ولذلك فعلمية الجمع إنضمامية.
Attenuation	<b>إخماد:</b> أو إحباط الإشارة، حيث يكون في هذه الحالة مقدار إشارة الخرج من النظام أقل من مقدار إشارة الدخل، ويعبر عن ذلك عادة بالديسبل الذي هو ٢٠ مضروبة في لوغاريتم نسبة مقدار الخرج على مقدار الدخل، وبالطبع ستكون سالبة.
<b>B</b>	
Band width	<b>عرض المجال:</b> المجال الترددي بين أكبر تردد وأقل تردد يسمح يسمح أى مكبر له بالمرور.
Bit	<b>الخانة الثنائية:</b> وسنستخدم اللفظ بت للدلالة عليها. وهى الخانة التي تستوعب صفر أو واحد.
Blocking effect	<b>تأثير الصندوقية:</b> حيث تظهر الصورة كمجموعة من الصناديق المرصوفة مثل لوحة الشطرنج وهذا عيب في المقدرة التحليلية أو تحديدية الصورة ويمكن التخلص منه.
Blurring	<b>الضبابية:</b> تكون الصورة كما لو كانت مأخوذة في وسط ضبابي.
Butterworth	<b>بتزورث:</b> نوع من المرشحات يتميز بالتغير الانسيابي لمنحنى الاستجابة الترددية في كل من مجال المرور ومجال الوقف للمرشح. أى أنه لا توجد تموجات لمنحنى الاستجابة في أى من المجالين. وهو منسوب لإسم أحد العلماء.
Buffer	<b>عازل:</b> أو فاصل، دائرة تفصل بين المصدر والحمل لجعلهما متناسبين فلا يحدث تأثير على شكل أو مقدار الإشارة.

C	
Causal	<b>سببي</b> : أو معقول، أو نظام قابل للبناء ومنها الأنظمة التي يعتمد خرجها الحالى على الدخل الحالى والسابق فقط ولا يعتمد على دخل قادم أو تالى.
Clock	<b>الساعة</b> : أو نبضات الساعة، أو نبضات التزامن، وهى نبضات تستخدم للحفاظ على تزامن أو توافق النظام الرقمى.
Coding	<b>تشفير</b> : التعبير عن أصل أى شىء بشفرة أو كود مختلف.
Commutative	<b>تبادل</b> : العملية التبادلية هى العملية التى حينما تجرى على طرفين، لا يهم ترتيب الطرفين، مثل $x+y=y+x$ ، فعملية الجمع عملية تبادلية.
Complex	<b>مركب</b> : المتغير المركب يتكون من جزأين، جزء حقيقى وآخر تخيلى.
Convolution	<b>الالتفاف</b> : أو المجموع الالتفائى، وهى من العمليات المهمة على التتابعات.
Cutoff frequency	<b>تردد القطع</b> : وهو التردد الذى تنزل عنده قدرة المرشح إلى النصف.
D	
Decade	<b>العشرة سنوات</b> : فى مجال الترددات تعنى تضاعف التردد عشرة مرات.
Decimation in frequency	<b>التقسيم فى نطاق التردد</b> : أحد طرق حساب تحويل فورير السريع.
Decimation in time	<b>التقسيم فى نطاق الزمن</b> : أحد طرق حساب تحويل فورير السريع.
Delay	<b>تأخير</b> : أو تأجيل، وهو دائرة تؤجل أو تؤخر الإشارة بمقدار نبضة ساعة.
Difference equation	<b>المعادلة الفرقية</b> : تناظر المعادلة التفاضلية فى النظم المستمرة.
Discrete Fourier transform	<b>تحويل فورير المتفاصل</b> : أو المعين أو المقطع، وهو يناظر تحويل فورير المستمر ولكنه يجرى على الإشارات التى فى صورة تتابعات أو عينات.
Discrete time signal	<b>إشارة متفاصلة زمنياً</b> : معرفة عند أزمنة محددة فقط، وغير معرفة بين هذه الأزمنة أو الفواصل.
Distributive	<b>توزيعى</b> : إجراء أى عملية على متغيرين مجموعين مع متغير ثالث يكافئ إجراء العملية على كل من المتغيرين وجمع النتيجة $x(y+z)=xy+xz$ فعملية الضرب توزيعية.
E	
Elliptic filter	<b>مرشح القطع الناقص</b> . نوع من المرشحات الانسيابية أو الرقمية يتميز بتموجات فى كل من مجالى المرور والقطع.
embedded	<b>مختفى</b> : أو خبىء، والنظام الخبىء هو النظام الذى يؤدي كل وظائفه دون أن يراه المستخدم وغالبا ما يحتوى هذا النظام أحد المعالجات، مثل نظام التحكم فى المصعد مثلاً.



Enhancement	تحسين: أو تعزيز.
<b>F</b>	
Fast Fourier Transform	تحويل فوريير السريع: خواريزم لحساب تحويل فوريير لتتابع من عينات الإشارة في أقل زمن ممكن.
Filter	مرشح: نظام (رقمي أو تناظري) تكون له خاصية الاختيار الترددي بحيث يسمح بمرور بعض هذه الترددات ويحبط أو يمنع الترددات الأخرى.
Floating point numbers	أرقام النقطة العائمة: أو الأرقام الحقيقية، وهى الأرقام التى تحتوى على النقطة العشرية، أو هى الأرقام التى يمكن أن تحتوى كسور.
Flow chart	خريطة تدفق: أو مخطط سير، وهو رسم تخطيطى يبين تتابع عمليات حل أى مشكلة من البداية إلى النهاية.
Fourier series	تتابع فوريير: هو وسيلة لتحليل أى دالة أو إشارة دورية إلى مركبات لانهائية من الموجات الجيبية البسيطة ذات المقادير المختلفة.
Fourier transform	تحويل فوريير: هو وسيلة لتحليل أى دالة أو إشارة غير دورية إلى مركباتها الترددية من الموجات الجيبية البسيطة ذات المقادير المختلفة. بذلك يتم نقل الدالة من النطاق الزمنى إلى النطاق الترددى.
Fricative	احتكاكى: الصوت الاحتكاكى هو الصوت الذى ينتج من دفع الهواء عبر قنوات يتم تضيقها فى نظام النطق عن طريق وضع اثنين من السدادات فوق بعضهما مثل الشفة السفلى والأسنان الأمامية العليا. مثال ذلك الصوت "ف".
Frequency domain	النطاق الترددى: نطاق يتم فيه تمثيل مقدار الإشارة كدالة فى التردد.
Frequency response	الاستجابة الترددية: استجابة النظام (مرشح أو مكبر) لجميع الترددات.
<b>G</b>	
glottis	فتحة المزمار: الفتحة بين الأحبال الصوتية.
Gray level	مستوى الرمادية: يتم تمثيل مستوى الرمادية لبكسلات الصورة بعدد من البتات، بحيث إذا كانت هذه البتات تساوى أصفار، فإن ذلك يمثل أقصى مستوى للبكسل، وليكن الأسود مثلاً. وإذا كانت كل هذه البتات تساوى وحيد فإن ذلك يمثل المستوى الأقصى الثانى وهو الأبيض، وأحياناً يتم عكس ذلك.
<b>H</b>	
Histogram	المدج الإحصائى: تمثيل دقيق لتوزيع البيانات الرقمية. مثلاً بالنسبة للصورة الرقمية، يمثل المستوجرام عدد البكسلات الواقعة فى كل مستوى من المستويات الرمادية، ويتم رسم ذلك فى صورة أعمدة رأسية.

Homogeneous	<b>متجانس</b> : يعتمد معنى الكلمة على السياق المستخدمة فيه، ولكنها على وجه العموم تعني إحتواء نفس المكونات. في النظم الرقمية تعني أن أي تغير في مقدار إشارة الدخل للنظام يقابلها تغير بنفس المقدار في خرج النظام.
<b>I</b>	
Image	<b>صورة</b> : تمثيل لدالة ثنائية الأبعاد في النطاق المساحي $X$ و $Y$ ، حيث يمثل مقدار الدالة عند أي نقطة $(X,Y)$ مستوى الرمادية لهذه النقطة.
Impulse function	<b>دالة الاندفاع</b> : أو الصدمة وهي معرفة عند الزمن صفر فقط. وهي دالة ذات مقدار على جدا (غير محدد عادة) تحدث في زمن قليل جدا (صفر تقريبا).
Impulse Response	<b>استجابة الصدمة</b> : أو استجابة الدفعة أو استجابة العينة الواحدة (في النظم الرقمية)، وهي خرج النظام عندما يكون دخله هذه الصدمة.
Integer	<b>رقم صحيح</b> : لا يحتوي كسور، على العكس من أرقام النقطة العائمة (الحقيقية).
Intensity	<b>الشدة</b> : أحد الخواص المقاسة للقوة، أو الإضاءة، أو المجال المغناطيسي مثلا.
Inverse Laplace transform	<b>تحويل لابلاس العكسي</b> : تحويل دالة من النطاق الترددي المركب إلى النطاق الزمني. يشبه تحويل فوريير العكسي.
Inverse Fourier transform	<b>تحويل فوريير العكسي</b> : تحويل دالة من النطاق الترددي إلى النطاق الزمني.
Inverse z transform	<b>تحويل z العكسي</b> : تحويل دالة من النطاق الترددي المركب إلى النطاق الزمني المتقطع أو المتقطع.
<b>L</b>	
Laplace transform	<b>تحويل لابلاس</b> : تحويل دالة من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي المركب.
Linear shift invariant	<b>الثبات الإزاحي الخطي</b> : استجابة النظام لأي دخل مزاح زمنيا يكون هو نفس استجابة النظام للدخل مزاحه زمنيا بنفس المقدار. في النظم الرقمية تكون الإزاحة مقدرة بعدد العينات.
Linear time invariant	<b>الثبات الزمني الخطي</b> : استجابة النظام لأي دخل مزاح زمنيا يكون هو نفس استجابة النظام للدخل مزاحه زمنيا بنفس المقدار.
<b>M</b>	
Modulation	<b>التعديل</b> : في الاتصالات يتم تعديل خاصية أو أكثر لأحد الإشارات الترددية (تسمى الإشارة الحاملة) عن طريق موجة التعديل الحاملة للمعلومات المراد إرسالها. مثال ذلك تعديل المقدار، والتردد، والطور، وغير ذلك.
modeling	<b>نمذجة</b> : إيجاد علاقة (رياضية أو إحصائية) بين دخل أي نظام وخرجه. والكلمة تعتمد على السياق بدرجة كبيرة.

Monotonically decreasing	<b>يقبل برتابة:</b> أو بانتظام، مثل الدالة الأسية المتناقصة.
<b>N</b>	
Nasal	<b>أنفى:</b> متعلق بالأنف، أو بالتجويف الأنفى. الأصوات الأنفية هي الأصوات التي تخرج كلياً أو جزئياً عبر التجويف الأنفى. مثل "م" في اللغة العربية.
Noise	<b>الضوضاء:</b> إضافات غير مرغوب فيها على الدالة أو الإشارة الأساسية.
Nonrecursive	<b>غير تكرارى:</b> أو غير عودى. يعتبر النظام غير تكرارى إذا كان خرجه الحالى يعتمد على الدخل الحالى فقط ولا يعتمد على الخرج السابق.
<b>O</b>	
Operational Amplifier	<b>المكبر التشغيلى:</b> أو مكبر العمليات، وهو مكبر عام مناسب لجميع أغراض التكبير، وهو مكبر له دخلان وخرج واحد، وخرجه يساوى حاصل ضرب معامل تكبير على جدا في الفرق بين هذين الدخلين.
<b>P</b>	
Partial fraction expansion	<b>مفكوك الكسور الجزئية:</b> تحليل أى دالة كسرية (البسط والمقام كل منهما عبارة عن كثيرة حدود) إلى كثيرة حدود، وواحد أو أكثر من الكسور التي تكون مقاماتها في صورة مبسطة (كثيرة حدود من الدرجة الأولى أو الثانية)، وهو أحد الطرق المستخدمة في حساب تحويل Z العكسى.
Passband	<b>مجال المرور:</b> مجال الترددات التي يسمح المرشح بمرورها.
Pattern	<b>نموذج:</b> النموذج هو الانتظام في الشكل، أو في التصميم، وعادة يتكون النموذج من عناصر متكررة، وبالطبع سيعتمد التعريف الدقيق للكلمة على السياق المستخدمة فيه.
Period	<b>الزمن الدورى:</b> الزمن بين نقطتين متشابهتين على أى دالة دورية.
Pitch	<b>التردد الأساسى:</b> هي أحد الخواص للدوال أو الإشارات المتكررة مثل إشارة الصوت.
Pixel	<b>عنصر صورة:</b> أو بكسل، يمثل شدة إضاءة نقطة من نقاط الصورة، وهذه الإضاءة قد تكون رمادية أو ملونة. مساحة هذه النقطة تمثل تحديدية الصورة. وهي أصغر وحدة يمكن التعامل معها في مساحة الصورة.
Plosive	<b>إنفجارى:</b> تحدث الأصوات الانفجارية نتيجة المنع الكامل لتدفق الهواء في جزء من الفم.
Polar	<b>القطبى:</b> المحاور القطبية تعبر عن المتجه بمقدار وزاوية.
Pole	<b>القطب:</b> قيمة للمتغير (Z) في الأزمنة المتفاصلة، أو المتغير (S) في الأزمنة المستمرة، تؤول عندها الدالة إلى المالا نهائية.

polynomial	<b>كثيرة حدود:</b> تعبير رياضي يتكون من متغيرات ومعاملات، ويشتمل فقط على عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقوى الأسية الموجبة فقط للمتغيرات.
Probability	<b>الاحتمال:</b> مقياس لإمكانية وقوع حدث معين. تتراوح قيمته بين الصفر والواحد، حيث الصفر يعنى استحالة وقوع الحدث، والواحد يعنى تأكيد وقوع هذا الحدث.
Probability density function	<b>دالة كثافة الاحتمال:</b> دالة لمتغير عشوائي مستمر، تكاملها في أى مدى معين يعطى إحتمال أن قيمة هذا المتغير ستكون في هذا المدى.
Processor	<b>معالج أو مشغل:</b> وحدة معالجة مركزية على شريحة واحدة، مثل البنتيوم ٤.
Prototype filter	<b>مرشح أولي:</b> أو مرشح نموذج، يكون في الغالب مرشح منفذ للترددات المنخفضة، حيث يمكن بعلاقات معينة استنتاج العديد من نماذج المرشحات الأخرى مثل المرشحات المنفذة للترددات العالية، والمنفذة، والممانعة لمجال معين من الترددات.
<b>Q</b>	
Quantization	<b>التكميم:</b> حصر مقدار الإشارة (المتغير) في مستويات محددة بحيث لا توجد أى قيمة للإشارة (المتغير) بين أى مستويين.
<b>R</b>	
Ramp function	<b>دالة المطمع:</b> دالة تتزايد خطيا مع الزمن بدأ من الصفر.
Random	<b>عشوائي:</b>
Real time processing	<b>المعالجة في الزمن الحقيقي:</b> نظم المعالجة في الزمن الحقيقي تحصل على الدخل، وتقوم بمعالجته، وإعطاء النتيجة بسرعة أو في زمن مناسب لبيئة التعامل مع هذا النظام.
Reconstruction filter	<b>مرشح إعادة البناء:</b> في العادة يستخدم لإعادة بناء الإشارة التماثلية الناتجة من خرج أى نظام رقمي. عادة يسمى مرشح التنعيم.
Recursive	<b>تكراري:</b> النظام التكراري هو الذى يعتمد خروجه الحالى على الدخل الحالى والسابق وعلى الخرج السابق أيضا.
Region of convergence	<b>منطقة التقارب:</b> هى منطقة تواجد تحويل S أو تحويل Z.
RGB	<b>إختصارات للألوان الأساسية:</b> الأحمر ، والأخضر ، والأزرق.
Resolution	<b>المقدرة التحليلية:</b> أو التحديدية، وهى مقدرة النظام على التمييز بين المستويات المختلفة للدخل.
Response	<b>الاستجابة:</b> خرج أى نظام عند تغذيته بدخل معين.
<b>S</b>	
Sample	<b>العينة:</b> أو أخذ العينة أو العينة، وهى تمثل قيمة أى دالة عند لحظة زمنية معينة.

Sample and Hold	<b>العينة والمسك:</b> أو العينة والثبيت، وهى دائرة تقرأ عينة من الدخل وتثبتها لفترة زمنية معينة إلى أن يتم تحويل مقدار هذه العينة إلى صورته الرقمية.
Sequence	<b>تتابع:</b> أى إشارة رقمية يتم التعبير عنها بتتابع من العينات.
Sharpening filter	<b>مرشحات الحدة أو الإظهار:</b> مرشحات تعمل على تعزيز الحواف الموجودة فى الصورة.
Shift invariant	<b>الثبات الإزاحى:</b> أى إزاحة زمنية فى تتابع الدخل يقابلها إزاحة زمنية فى الخرج بنفس المقدار.
Smoothing filter	<b>مرشح تنعيم:</b> مرشح يستخدم عادة فى المراحل الأخيرة من النظم الرقمية لجعل الخرج التناظرى أكثر نعومة.
Spatial domain	<b>النطاق المساحى:</b> أو الحيزى أو الفضائى، وهو نطاق التعبير عن الصورة فى بعدين تراه العين وتستطيع تمييزه.
Spectrum	<b>الطيف:</b> وهو المحتوى الترددى للإشارة.
Successive approximation	<b>التقريب المتتالى:</b> أحد طرق التحويل من تناظرى إلى رقمى.
Superposition theory	<b>نظرية التجميع:</b> تنص هذه النظرية على أن استجابة أى نظام خطى لمجموعة من الدخول تساوى مجموع استجابات هذا النظام لكل دخل على حده.
Step response	<b>استجابة الخطوة:</b> هى استجابة أى نظام عندما يكون خرجة هو دالة الخطوة.
Stopband	<b>مجال الوقف:</b> أو مجال الترددات التى يمنعها المرشح من المرور.
System function	<b>دالة النظام:</b> أو دالة الانتقال معبراً عنها فى النطاق Z.
<b>T</b>	
Time domain	<b>النطاق الزمنى:</b> نطاق يمثل فيه مقدار الإشارة كدالة فى الزمن.
Transfer function	<b>دالة العبور:</b> تحدد علاقة خرج النظام بدخله.
Transition band	<b>مجال الانتقال:</b> مجال الترددات بين مجالى المرور والوقف لأى مرشح.
Trigger	<b>الإطلاق:</b> أو القدح أو البدء، نبضة تعطى لبدأ تشغيل النظام.
Truth table	<b>جدول الحقيقة:</b> يعطى خرج النظام الرقمية المقابل لجميع الاحتمالات الممكنة للدخل الرقمية.
<b>U</b>	
Ultrasound	<b>فوق صوتى:</b> إشارة صوتية ترددها يبدأ من ٢٠ كيلوهرتز ويصل إلى عشرين ميغاهرتز.
Uniform Distribution	<b>التوزيع المنتظم:</b> هو التوزيع الذى يكون فيه الاحتمال ثابت على كل المدى. لذلك يسمى أحياناً بالتوزيع المستطيل.

Unit step	دالة الخطوة الواحدة: دالة معرفة (عادة تساوى واحد) عند الصفر وكل القيم الأكبر من الصفر.
unvoiced	غير جهورى: أصوات تخرج بدون اهتزاز الأحبال الصوتية، مثل "ش".
V	
Verification	التحقق من:
Voiced	جهورى: له صوت نتيجة اهتزاز الأحبال الصوتية مثل "ب" و "م".
X	
Y	
Z	
Z transform	تحويل Z: يكافئ تحويل لابلاس للنظم المستمرة أو التناظرية.
Zero padding	الحشو بأصفار: إضافة إطار من البكسلات للصورة كله يحتوى أصفارا.