الحركة التوافقية البسيطة (SIMPLE HARMONIC MOTION)

تعرفنا في الباب الأول على حركة جسيم في خط مستقيم ، وفي الباب الثاني على حركة الجسيم في المستوى ، وبعد ذلك في الباب الثالث درسنا نوع من أنواع الحركة في مستوى مثل حركة المقذوفات. في هذا الباب سنتعرف على نوع آخر من أنواع الحركة في خط مستقيم تسمى " الحركة التوافقية البسيطة ".

تعريف : يُقال أن جسيم يتحرك في خط مستقيم حركة توافقية بسيطة إذا كانت القوة المؤثرة عليه (عجلته) دائماً متجهه نحو نقطة ثابتة على هذا المسار ومقدارها عند أي موضع للجسيم يتناسب طردياً مع بعد الجسيم عن تلك النقطة الثابتة (تسمى مركز الذبذبة).

وللحصول على الصورة الرياضية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة نفرض أن O هي النقطة الثابتة على الخط المستقيم والذى سيمثله المحور Ox وأن موضع الجسيم عند اللحظة t هو p حيث $Op = x$

من التعريف تكون معادلة حركة الجسيم

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x; \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (1)$$

والاشارة سالبة لأن القوة متجهه نحو مركز الحركة O. ولإيجاد سرعة الجسيم عند أى موضع نستخدم العلاقة

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + c \qquad (3)$$

حيث c مقدار ثابت يمثل ثابت التكامل وللحصول على قيمة هذا الثابت فإننا نحتاج الى شروط ابتدائية ولذلك سنفرض أن أقصى مسافة للجسم هى a والتى عندها يسكن الجسم (أى أن $v = 0$ عند $x = a$) وبالتعويض بهذا الشرط في المعادلة (3) نحصل على $c = \frac{1}{2}\omega^2 a^2$ ونكتب المعادلة (3) في الصورة .

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \qquad or \qquad v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (4)$$

وفي هذه المعادلة سنأخذ الإشارة الموجبة للسرعة v إذا كان الجسم متحركاً في الاتجاه الموجب (أى في اتجاه $Ox-$ تزايد x) وسنعتبر الإشارة السالبة إذا كان الجسم متحركاً في الاتجاه المضاد.

ولمعرفة موضع الجسم عند أى لحظة نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في المعادلة (4) (على اعتبار الاشارة الموجبة) وبفصل المتغيرات والتكامل يكون

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega\int dt\,, \qquad \therefore \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \omega t + \epsilon \qquad (5\,a)$$

حيث ϵ ثابت التكامل يسمى " زاوية الطور " ويعين من الشروط الأبتدائية للحركة ، والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$\therefore x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right) \qquad (5\,b)$$

وهذه المعادلة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (على الدارس أن يعتبر حالة الاشارة السالبة).

وحيث أنه من المعلوم $\left|\sin\left(\omega t + \epsilon\right)\right| \le 1$ و من المعادلة (5 b) يكون

$$|x| = |a\sin(\omega t + \epsilon)| = |a||\sin(\omega t + \epsilon)| \le a \qquad \Rightarrow -a \le x \le a$$

هذه العلاقة تعني أن الجسيم يتحرك بين النقطتين $x = a$ و $x = -a$ ولذلك فإن a تسمى سعة الحركة.

ويمكن ملاحظة أن سرعة الجسيم تتلاشى عند أطراف الذبذبة $x = \pm a$ ، كما تكون أكبر ما يمكن عند مركز الذبذبة $x = 0$. نلاحظ أيضاً أن مقدار السرعة (العجلة) عند نقطة على بعد x أو $-x$ متساو.

الزمن الدوري Periodic Time

كما ذكرنا الحركة التوافقية هي حركة تذبذبية، فإنه من الطبيعي البحث عن زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدوري وسنرمز له بالرمز τ) ويعرف الزمن الدوري على أنه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من $x = a$ الى $x = -a$ ثم العودة مرة ثانية الى النقطة $x = a$ وبذلك يكون الجسيم عمل ذبذبة كاملة وحيث أن

$$\begin{aligned} x = a\sin(\omega t + \epsilon) &= a\sin(\omega t + \epsilon + 2\pi) \\ &= a\sin\left(\omega \underbrace{\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}_{t'} + \epsilon\right) \\ &= a\sin(\omega t' + \epsilon). \qquad t' = t + \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

أى أن x عند الزمن t هى نفسها عند الزمن $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$ وذلك يعنى أن النقطة تعود الى وضعها الأول بعد زمن $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ وهو زمن الذبذبة الكاملة (الزمن الدورى).

ولأن الحركة التوافقية البسيطة لها زمن دوري ، فيمكن معرفة عدد الذبذبات التي يعملها الجسيم في وحدة الزمن وهو ما يُعرف بالتردد.

التردد Frequency

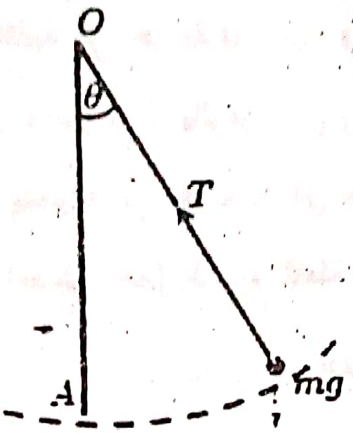
يُعرف التردد بأنه عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسم في وحدة الزمن (الثانية الواحدة) (سنرمز له ν)– وهو مقلوب الزمن الدوري – أى أن

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (6)$$

البندول البسيط

إذا عُلقت كتلة صغيرة في طرف خيط غير مرن (ساق خفيفة) مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تُركت فإنها تأخذ في التذبذب بفعل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O ونصف قطرها هو طول الخيط l. حيث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين هما قوة الوزن mg وقوة شد الخيط T ،

باستعمال قانون نيوتن فإن معادلة الحركة في اتجاه المماس لقوس الدائرة



$$m\,l\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

وعندما تكون الأزاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\sin\theta \cong 1$ ومن ثم المعادلة السابقة تأخذ الصورة

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta, \qquad Or \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. المعادلة الأخيرة تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى يتعين من

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهذه العلاقة تستخدم في علم الطبيعة لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول معلوم ℓ. كما أن البندول الذى تستغرق ذبذبته ثانيتين أى يسجل ثانية واحدة في المشوار الواحد يعرف بـ "بندول الثواني".

قانون هوك

قانون هوك هو قانون تجريبي وينص على أن الشد في الزنبرك أو الخيط المرن يتناسب طردياً مع الأستطالة الحادثة فيه. والصيغة الرياضية لهذا القانون هى $T = Kx$ حيث K هو معامل شد الزنبرك ويتوقف هذا الثابت على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله وقطر مقطعه وعدد لفاته الى آخره. جرت العادة في علم الطبيعة أن يوضع قانون هوك السابق في الصورة

$$T = \frac{\lambda}{\ell} x$$

حيث λ ثابت ويسمى بمعامل المرونة للخيط أو الزنبرك ، x تمثل الأستطالة الحادثة ، ℓ الطول الطبيعى للخيط ، T قوة الشد في الخيط. (الأستطالة الحادثة هى الفرق بين الطول بعد الأستطالة والطول الطبيعي)

كما ذكرنا ما يسرى على الخيط المرن يسرى على الزنبرك في حالة الأستطالة فقط. أما في حالة الأنضغاط فتختفى قوة الخيط خلافاً لحالة الزنبرك وهذا فرق جوهري بين حالتي الزنبرك والخيط المرن يجب عدم إغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

مثال ١

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت العجلة التي يتحرك بها هى $4\ ft\sec^{-2}$ عندما يكون بعد الجسيم عن مركز الذبذبة $2\ ft$ فأوجد زمن الذبذبة . وإذا كانت السرعة عند مركز الذبذبة هي $8\ ft\sec^{-1}$ فأوجد سعة الذبذبة ؟

الحل

حيث أن $\ddot{x} = -\omega^2 x$ وكانت $\ddot{x} = 4$ عندما $x = 2$ وبالتالي يكون $\boxed{\omega^2 = 2}$ (لاحظ أن مقدار العجلة $|\ddot{x}| = \omega^2 |x|$) وكما أن زمن الذبذبة يعطى بـ $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ فإن $\tau = \sqrt{2}\pi \sec$.

وحيث ان $v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$ ومن المعطيات فإن $v = 8$ عندما $x = 0$ ومن ثم

$64 = 2(a^2 - 0)$. $\Rightarrow a = 4\sqrt{2}\ ft$

وهي تمثل سعة الذبذبة.

مثال ٢

يتحرك جسم تبعاً للعلاقة $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. اثبت أن حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزاوية الطور؟ .

الحل

حيث أن $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = -wA\sin(\omega t) + wB\cos(\omega t)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة للزمن

$$\ddot{x} = -w^2\underbrace{\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}_{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x$$

المعادلة الأخيرة تعنى أن حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة.

وحيث أنه من المعادلة (5b) يكون

$$x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\therefore a\sin(\omega t)\cos\epsilon + a\cos(\omega t)\sin\epsilon = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلة الأخيرة . نجد أن

$a\sin\epsilon = A$, $a\cos\epsilon = B$

ومن هاتين العلاقتين يمكن الحصول على زاوية الطور ϵ بقسمة العلاقتين $\tan\epsilon = \dfrac{A}{B}$ و

للحصول على سعة الذبذبة ، بتربيع العلاقتين والجمع نحصل على $a^2 = A^2 + B^2$ أو $a = \sqrt{A^2 + B^2}$.

مثال ٣

إذا تعينت سرعة جسيم يتحرك في خط مستقيم من العلاقة $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ فاثبت أن حركة الجسيم هى حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وأوجد الزمن اللازم للحركة من $x = 4a$ الى $x = 6a$ ؟

الحـــل

حيث أن $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ بإجراء التفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$2v\frac{dv}{dx} = n^2(8a-2x)$

$$v\frac{dv}{dx} = n^2\left(4a - x\right)$$

ومنها $\ddot{x} = n^2(4a - x)$ أى أن عجلة الجسيم تتناسب طرديا مع بعده عـن نقطـة ثابتـة (مركز الذبذبة) هى $4a$، كما أن $\omega = n$

(توضيح افـترض أن $y = 4a - x$ فـإن المعادلـة $\ddot{x} = n^2(4a - x)$ تأخـذ الـصـورة $\ddot{y} = -n^2 y$ وهى معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها عنـد النقطـة $y = 0$ أى عنـد $x = 4a$)

للحصول على سعة الذبذبة نضع $v = 0$ فى العلاقة $v^2 = n^2\left(8ax - x^2 - 12a^2\right)$ ومنها

$$x^2 - 8ax + 12a^2 = 0. \quad \Rightarrow \left(x - 2a\right)\left(x - 6a\right) = 0. \quad \Rightarrow x = 2a,\ x = 6a$$

وهى أطراف الذبذبة أى ان سعة الذبذبة $2a$ والزمن T الـلازم للحركـة مـن $x = 4a$ الى $x = 6a$ يمثل ربع الزمن الدورى

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{n}. \qquad \Rightarrow T = \frac{1}{4}\tau = \frac{\pi}{2n}.$$

مثال ٤

إذا كانت v, f, τ ترمز الى سرعة وعجلة و زمن الذبذبة لنقطة مادية تتحرك حركة توافقية بسيطة فاثبت أن $f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2$ مقدار ثابت ثم أوجد القيمة العددية لهذه الكمية الثابتة إذا كان زمن الذبذبة $2\,\text{sec}$ وسعة الذبذبة $2\,ft$ ؟

الحـــــل

حيث أن $f = -\omega^2 x$ ، وأيضاً $v^2 = \omega^2 \left(a^2 - x^2\right)$ والزمن الدوري $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ومـــن تلك العلاقات

$$f^2\tau^2 = \omega^4 x^2 \left(\frac{4\pi^2}{\omega^2}\right) = 4\pi^2\omega^2 x^2. \qquad 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

وبجمع هاتين العلاقتين $f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2 a^2 = const.$ والآن عـــنـــدما $a = 2\,ft.$ $\tau = 2$ sec. فإن $\omega = \tau$ ونجد أن القيمة العددية للكمية الثابتة السابقة هى

$$f^2\tau^2 + 4\pi^2 v^2 = 4\pi^2\omega^2 a^2 = 4\pi^2\left(\pi^2\right)4 = 16\pi^4$$

مثال ٥

عن موضعين ما

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فإذا كانت u_1, u_2 سرعتي الجسيم على بعدين b_1, b_2 من مركز الذبذبة . أثبت أن الزمن الدوري يكون مساوياً $2\pi\sqrt{\dfrac{b_2^2 - b_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$ ؟

$u_1 \quad u_2$

$a_1 \quad a_2$

الحـــل

حيث أن $v^2 = w^2\left(a^2 - x^2\right)$ حيث a هى سعة الحركة ولكن من معطيات المسألة نجد أن

$$u_1^2 = \omega^2\left(a^2 - b_1^2\right), \qquad u_2^2 = \omega^2\left(a^2 - b_2^2\right)$$

ومن العلاقتين السابقتين نحصل على

$$u_1^2 - u_2^2 = \omega^2\left(b_2^2 - b_1^2\right). \qquad Or \qquad \omega^2 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{b_2^2 - b_1^2}$$

ومن ثم يكون الزمن الدورى $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{b_2^2 - b_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$ وهو المطلوب.

مثال ٦

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ، وجد أن المسافات المقطوعة أثناء جزء من الحركة — مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الحركة — هى y_1, y_2, y_3 عند نهايات ثلاث ثوانى متتالية

ثالث أن زمن الذبذبة هو $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{y_1+y_3}{2y_2}\right)}$ ؟

الحل

من المعلوم أن صورة الحل لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة هى $x = a\sin(\omega t + \epsilon)$

ونفرض أن زمن وصول الجسيم الى الموضع y_1 هو t وبالتالى زمن وصوله الى الموضع y_2 هو $t+1$ وزمن وصوله الى y_3 هو $t+2$ وبالتالى يكون .

$$y_1 = a\sin(\omega t + \epsilon)$$
$$y_2 = a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)$$
$$y_3 = a\sin(\omega(t+2) + \epsilon)$$

ومن المعادلات الثلاث السابقة ، بجمع الاولى والثالثة نجد أن

$$y_1 + y_3 = a\left\{\sin(\omega t + \epsilon) + \sin(\omega(t+2) + \epsilon)\right\}$$

$$= \underbrace{2a\sin(\omega(t+1) + \epsilon)}_{y_2}\cos\omega$$

$$\boxed{= 2y_2\cos\omega}$$

هنا استخدمنا العلاقة المثلثية $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$$\therefore \quad \cos\omega = \frac{y_1+y_3}{2y_2}. \qquad Or \quad \omega = \cos^{-1}\left(\frac{y_1+y_3}{2y_2}\right)$$

ولكن الزمن الدورى يعطى بـ $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ وبالتعويض عن قيمة ω يكون

$\tau = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{y_1+y_3}{2y_2}\right)}$ ونلاحظ أنه يجب أن يتحقق الشرط $-2y_2 \le y_1 + y_3 \le 2y_2$.

مثال ٧

يعمل بندول بسيط 21 ذبذبة كاملة كل 44 sec وإذا قصر طوله بمقدار 47.6875 فإنه يعمل 21 ذبذبة كاملة كل 33 sec . أوجد مقدار عجلة الجاذبية عند مكان البندول ؟

الحـــل

بفرض أن طول البندول هو ℓ وأن الطول الجديد هو $\ell' = \ell - 47.6875$ وحيث أن الزمن الدوري في الحالة الاولى يعطى بـ $\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{44}{21}$ وفي الحالة الثانية يعطى بـ $\tau_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} = \frac{33}{21}$ وبتربيع هاتين العلاقتين والطرح نجد أن

$$\frac{4\pi^2}{g}\left(\ell' - \ell\right) = \frac{44^2 - 33^3}{21^2}, \qquad \ell' - \ell = 47.6875$$

$$g = \frac{21 \times 21 \times 4\pi^2 \times 47.6875}{11 \times 77} \simeq 9.81\ m\sec^{-2}$$

مثال ٨

زنبرك طوله الطبيعي ℓ ومعامل مرونته λ . ربط في أحد طرفيه جسم كتلته m وثبت الطرف الآخر من الزنبرك على منضدة أفقية ملساء. فإذا شد هذا الجسم في اتجاه الزنبرك ثم ترك ليتحرك. أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ، وأوجد زمنها الدوري؟

الحـــل

نفرض أن النقطة المثبتة من الزنبرك هي A ، وأن الجسم أُزيح من النقطة O (موضع الاتزان) مسافة ما ثم ترك ليتحرك. القوة الوحيدة المؤثرة على حركة الجسم في اتجاه المحور Ox هي الشد T فقط وتكون معادلة حركة الجسم عندما يكون على بعد x من مركز الحركة O هي

$$m\ddot{x} = -T$$

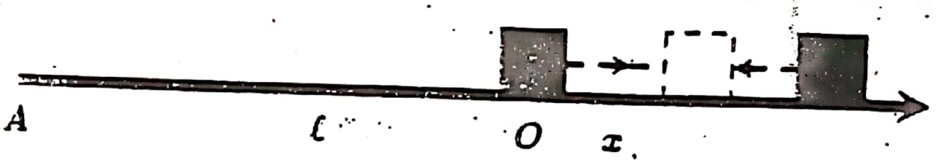
وحيث أن معامل المرونة للزنبرك هو فطبقاً لقانون هوك فإن

$$T = \frac{\lambda}{\ell}(\ell + x - \ell) = \frac{\lambda}{\ell}x$$

وبالتالي نحصل على

$$\ddot{x} = -\omega^2 x; \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m\ell}}$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدوري $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{\lambda}}$.



مثال ٩

عُلّق جسم كتلته m من طرف خيط مرن ومثبت من طرفه الآخر ، زُحزح الجسم من موضع أتزانه مسافة رأسية صغيرة فوجد أنه يعمل n ذبذبة في الثانية . فإذا كان طول الخيط عند موضع الأتزان هو ℓ ، أوجد الطول الطبيعي للخيط واثبت أن الشد في الخيط عندما تكون الأستطالة مساوية للطول الطبيعي هو $m\left(4\pi^2 n^2 \ell - g\right)$ ؟

الحل

حيث أن ℓ هو طول الخيط في حالة الأتزان ، سنفرض أن ℓ_0 هو الطول الطبيعي للخيط وأن T° هو قيمة قوة الشد في الخيط عند الأتزان، في حالة الأتزان تؤثر على الخيط قوتي الوزن والشد فقط ومن قانون هوك

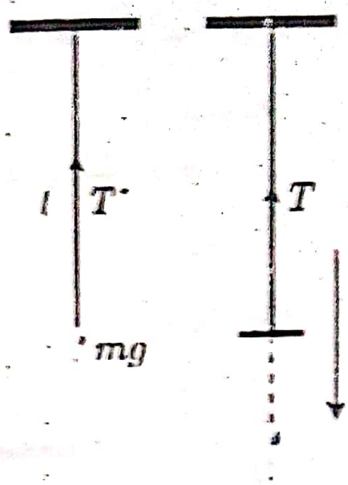
$$mg = T^{\circ} = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) \qquad (1)$$

فإذا أعطينا الجسم ازاحة x بعيداً عن موضع الأتزان في هذه الحالة تكون معادلة حركته هي

$$m\ddot{x} = mg - T \qquad (2)$$

حيث T هو الشد في الخيط ويساوي $T = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + x - \ell_0)$ ، $\ddot{x}$ هي عجلة الجسم ،

بالتعويض عن قيمة الشد فى المعادلة (2) وباستخدام المعادلة (1)



$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell + x - \ell_0)$$

$$= mg - \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) - \frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$= \cancel{mg} - \cancel{mg} - \frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$= -\frac{\lambda}{\ell_0}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell_0}x = -\omega^2 x. \qquad \omega^2 = \frac{\lambda}{m\ell_0}$$

المعادلة الأخيرة هى معادلة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدورى يتعين من $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{\lambda}}$ والتردد يتعين من $n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{m\ell_0}}$ ونجد من هذه العلاقة $(2\pi n)^2 m = \frac{\lambda}{\ell_0}$ وبالتعويض في المعادلة (1)

$$mg = \frac{\lambda}{\ell_0}(\ell - \ell_0) = 4n^2\pi^2 m(\ell - \ell_0)$$

$$\ell - \ell_0 = \frac{g}{4n^2\pi^2}. \qquad \Rightarrow \ell_0 = \ell - \frac{g}{4n^2\pi^2}$$

وهو الطول الطبيعي للخيط ، ولتعين قيمة الشد نستخدم قانون هوك

$$T = \frac{\lambda}{\ell_0}\ell_0 = 4n^2\pi^2 m\ell_0$$

$$= 4n^2\pi^2 m\left(\ell - \frac{g}{4n^2\pi^2}\right)$$

$$\therefore T = 4n^2\pi^2 m\ell - mg = m(4n^2\pi^2\ell - g)$$

وهى قيمة الشد المطلوبة.

الخلاصة

- الحركة التوافقية البسيطة هي مسقط حركة جسم يدور في دائرة بسرعة زاوية منتظمة ω إذا أسقطت هذه الحركة على قطر من أقطار الدائرة ، معادلات الحركة التوافقية.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

$$x = a\sin\left(\omega t + \epsilon\right), \quad Or \quad x = a\cos\left(\omega t + \epsilon'\right)$$

- الجسم المتحرك حركة توافقية بسيطة يتردد بين الموضعين $x = \pm a$ متأثراً بقوة تتناسب تناسباً طردياً مع بعده عن مركز الذبذبة ومتجهة دائماً إلى المركز.

- تنعدم السرعة عند أطراف الحركة وتبلغ حدها الأقصى ωa في مركز الذبذبة

- الزمن الدوري للذبذبة $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ كما أن الزمن الدوري للبندول البسيط هو $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

- في حركة جسم متأثراً بقوى زنبركية سنستخدم قانون نيوتن الأساسي للحركة للحصول على المعادلة التفاضلية التي تمثل الحركة.

تمارين

(١) إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على خط مستقيم تعطى بالعلاقة $v^2 + 4x^2 - 2x - 6 = 0$ حيث x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة فاثبت أن هذه الحركة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وزمنها الدوري ؟

(٢) إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على خط مستقيم تعطى بالعلاقة $v^2 = -16x^2 + 32x + 48$ حيث x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة فاثبت أن هذه الحركة هي حركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وزمنها الدوري وأكبر قيمة للسرعة وأكبر قيمة للعجلة ؟

(٣) في حركة توافقية بسيطة كانت السرعة $8\ ft\,sec^{-1}$ وكانت العجلة $-16\ ft\,sec^{-2}$ عندما كانت الإزاحة $4\ ft$ عن مركز الحركة. أوجد السعة والزمن الدوري ؟

(٤) عند نهايات ثلاث أزمنة متتالية كانت المسافات التي قطعتها نقطة تتحرك حركة توافقية بسيطة هي $1, 5, 5$ مُقاسة في نفس الاتجاه من مركز الحركة. اوجد زمن الذبذبة الكاملة ؟ -

(٥) تتحرك نقطة مادية حركة توافقية بسيطة متسع الحركة لها هو a والزمن الدوري τ. أثبت أن النقطة المادية سوف تكون على مسافة x من المركز الجاذب والذي بدأت منه الحركة بعد زمن قدره $\frac{\theta\tau}{2\pi}$ وتكون سرعتها حينئذ $\frac{2\pi a\cos\theta}{\tau}$ حيث $x = a\sin\theta$ ؟

(٦) نقطة مادية كتلتها m ، تتحرك على المحور Ox تحت تأثير قوة مركزية umx متجيه نحو نقطة الأصل ، عندما كانت $t = 2\ sec$ فإن النقطة المادية تمر بنقطة الأصل ، وعندما كانت $t = 4\ sec$ فإن سرعتها $4\ ft\,sec^{-1}$ عيّن الحركة. وإذا كان الزمن الدوري $16\ sec$ فاوجد السعة؟

(٧) تعين الأزاحة لجسيم يتحرك على المحور Ox بدلالة الزمن من العلاقة $x = 45\cos\frac{\pi t}{4} - 28\sin\frac{\pi t}{4}$. أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ، وأوجد سعتها ، وزاوية الطور ، وأكبر سعة ، وأكبر عجلة ، وزمنها الدوري؟

(٨) علق جسم كتلته m في خيط مرن طوله الطبيعي ℓ_0 ومعامل مرونته λ ، فإذا أزيح الجسم من موضع اتزانه مسافة رأسية الى أسفل. فاثبت أنه يتحرك حركة توافقية بسيطة ، وأوجد زمنها الدوري؟

(٩) ثبت أحد طرفي خيط مرن طوله الطبيعي ℓ_0 ومعامل مرونته λ في نقطة A وربط في طرفه الآخر جسيم كتلته m . فإذا قذف الجسيم رأسياً لأسفل بسرعة u. اثبت أن أكبر عمق يصل إليه الجسيم أسفل A هو $\ell_0\left(2+\sqrt{3+\dfrac{u^2}{g\ell_0}}\right)$ ؟

(١٠) ربط جسيم كتلته m بأحد طرفي خيط مرن معامل مرونته λ وطوله الطبيعي ℓ_0 وربط الطرف الآخر للخيط في نقطة ثابتة A على مستوى أفقي أملس وبدأ الجسيم حركته من A بسرعة ثابتة u . أثبت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة ، وأوجد المسافة التي يقطعها من A حتى يسكن أول مرة ، ثم أثبت أنه يعود مرة أخرى الى A بعد زمن قدره $\dfrac{2\ell_0}{u}+\pi\sqrt{\dfrac{m\ell_0}{\lambda}}$ ؟

(١١) علق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن C مثبت طرفاه في نقطتين A, B ، يقعان في مستوى أفقي واحد . وفي وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA, OB زاوية 60° مع الرأسي ويكون طول كل منهما ℓ_0 ، معامل مرونة الخيط يساوي mg ، فإذا زُحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي وترك ليتذبذب . اوجد زمن ذبذبته ؟

$$\left\{Ans.\quad 2\pi\sqrt{\frac{2\ell_0}{5g}}\right\}$$

(١٢) عُلّق جسيم كتلته m بأحد طرفي خيط مرن معامل مرونته $\frac{1}{2}mg\tan^2\alpha$ حيث زاوية α حادة موجبة ، وطوله الطبيعي ℓ_0 وربط الطرف الآخر للخيط في نقطة ثابتة A إذا ترك الجسيم ليسقط من السكون من النقطة A . برهن على أن أقصى عمق يصل إليه أسفل النقطة A هو $\ell_0\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ وأنه يصل الى هذا العمق بعد مضي زمن قدره