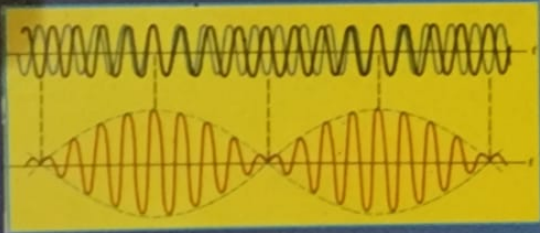
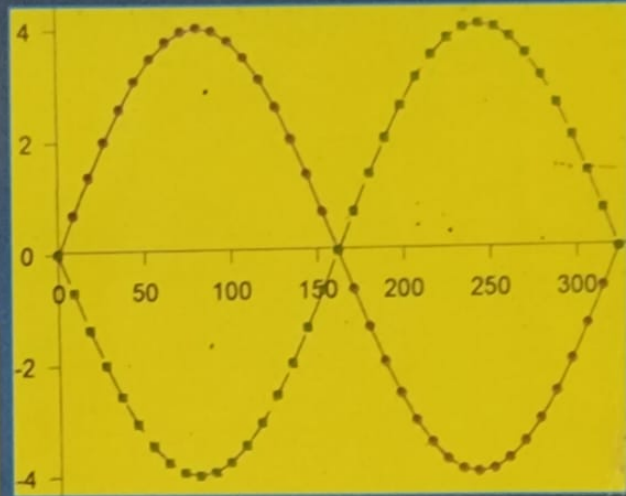
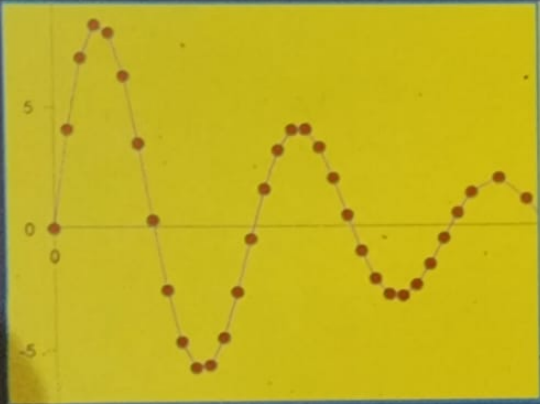


الاهتزازات والأمواج

وتحليل فورييه



د. حسن غانم

جامعة العلوم والتكنولوجيا الأردنية

د. محمد قيصرون ميرزا

جامعة البحرين

الطبعة الاولى

دار الأمل

١٩٩٩

الاهتزازات والأمواج

الاهتزازات والأمواج

وتحليل فورييه

د. حسن غانم

جامعة العلوم والتكنولوجيا الأردنية

د. محمد قيصرون ميرزا

جامعة البحرين

الطبعة الأولى

دار الأمل

١٩٩٩

جميع الحقوق محفوظة
يمنع تصوير او طباعة هذا الكتاب



واذا ما ازددت علماً زادني علماً جهلي

الناشر
دار الأمل للنشر والتوزيع

اريد - الاردن

تلفاكس ٢٧٦١٧٤ ص.ب ٤٦٩

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد ،
فنحمد الله عز وجل الذي أعاننا على إنهاء هذا الكتاب في الإهتزازات والأمواج ، الذي يعتبر
الأول من نوعه باللغة العربية على هذا المستوى من المادة المطروحة والعمق الفيزيائي والرياضي .
من المعروف أن هذا الموضوع يعتبر من أصعب المواضيع التي يواجهها طالبنا في المرحلة الجامعية
لارتباطه بمفهوم الأمواج التي يصعب على الإنسان تصورها في بعض الأحيان . لذا حاولنا أن نضمّن الكتاب
المبديء الأساس التي يدرسها طلبة الفيزياء خاصة ، وطلبة العلوم والهندسة عموماً ، في السنتين الجامعيتين
الثانية والثالثة بشكل مبسط ما أمكن بحيث يشمل معظم المواضيع الرئيسة في هذا الموضوع الهام .
كما حرصنا على إعطاء الأمثلة التوضيحية المناسبة قدر المستطاع ، ووضعنا عدداً مناسباً من
التمارين والمسائل في نهاية كل فصل لمساعدة الطالب على استيعاب الأفكار والنقاط الأساس بشكل متدرج
ويسير .

وقد تطوّر هذا الكتاب من سلسلة محاضرات للمؤلفين في أثناء تدريسهما لموضوع الاهتزازات
والامواج في عدة جامعات عربية ، وإيماناً منا بضرورة تعريب التعليم الجامعي وتلبية لاحتياجات طلبتنا
لكتاب يوضح لهم المفاهيم والمبديء الاساسية في الاهتزازات والامواج ، حيث تبين لنا خلو المكتبة العربية
لمثيله ، فقد جاء هذا الكتاب لسد ثغرة في المكتبة العربية العلمية ، وكمساهمة متواضعة في دفع عجلة
تعريب الكتاب الجامعي الى الامام .

إننا نرجو من الأخوة والأخوات الزملاء والزميلات من المدرسين، والمدربات ، والطلبة على حد
سواء بموافاتنا بما يرتأونه مناسباً من التصويبات أو مقترحات للإضافة أو الحذف ونكون ممتنين فعلاً لآخذ
ذلك بعين الاعتبار في الطباعات التالية إن شاء الله تعالى .

واخيراً فإن (د. محمد قيصرين ميرزا) ليشكر جامعة البحرين لتوفير الجو العلمي والإمكانات
المناسبة لإنجاز هذا العمل .

« لا يكلف الله نفساً إلاّ وسعها، لها ما كسبت وعليها ما اكتسبت، ربنا لا تؤاخذنا
إن نسينا أو أخطأنا، ربنا ولا تحمل علينا إصراً كما حملته على الذين من قبلنا، ربنا ولا
تحملنا ما لا طاقة لنا به، واعف عنا واغفر لنا وارحمنا، أنت مولانا فانصرنا على القوم
الكافرين».

صدق الله العظيم

المؤلفان

المحتويات

الفصل الأول : الحركة الاهتزازية البسيطة

1	1-1 تمهيد : الحركة الدورية
2	2-1 المعادلة الأساس للحركة الاهتزازية البسيطة
6	3-1 طاقة الحركة الاهتزازية البسيطة
7	أ - جسم مربوط بزئبرك
8	ب - البندول البسيط
10	4-1 الربط بين الحركة الاهتزازية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة
11	5-1 تداخل الحركات الاهتزازية ومبدأ التراكب
13	6-1 الخفقان
15	7-1 جمع n حركة اهتزازية متماثلة على نفس الخط
18	8-1 جمع الحركات الاهتزازية في مستو وأشكال ليساجو
21	9-1 منحنيات الطور
23	10-1 أمثلة على الحركة الاهتزازية البسيطة
23	أ - الدارة الكهربائية L C
25	ب - الأجسام الطافية
27	ج - السوائل في الأواني المستطرقة
28	د - اهتزاز الأعمدة الهوائية
30	هـ - بندول القتل
31	11-1 الحركة الاهتزازية البسيطة المتخامدة
35	12-1 ملاحظات أساس على الحركة الاهتزازية البسيطة المتخامدة
35	أ - التناقص اللغاريتمي للطاقة
36	ب - التناقص اللغاريتمي للسعة
36	ج - معامل الجودة
39	13-1 أمثلة محلولة
42	مسائل

الفصل الثاني : الاهتزازات القسرية

- 46 2-1 تمهيد
- 47 2-2 الاهتزازات القسرية غير المتخامدة
- 51 3-2 الاهتزازات القسرية المتخامدة
- 54 4-2 فرق الطور بين القوة الدافعة ومتغيرات الحركة
- 56 5-2 تغيرات السعة العظمى للإزاحة مع تردد القوة الدافعة
- 57 6-2 تغيرات السعة العظمى للسرعة مع تردد القوة الخارجية
- 59 7-2 القدرة الناتجة عن القوة الدافعة والقدرة الضائعة بالتخامد
- 60 8-2 تغير القدرة المتوسطة مع تردد القوة الخارجية
- 62 9-2 ارتباط معامل الجودة بسعة الاهتزازة ومعامل التضخيم
- 64 10-2 المرحلة الانتقالية
- 66 11-2 أمثلة على التجاوب
- 67 أ - التجاوب الكهربائي
- 67 ب - التجاوب المغناطيسي النووي
- 68 ج - التجاوب النووي
- 69 12-2 أمثلة
- 73 مسائل

الفصل الثالث : الاهتزازات المرتبطة

- 77 1-3 تمهيد
- 77 2-3 هزازان مرتبطان بزنبرك أو مكثف
- 80 3-3 تعاريف أساس
- 80 أ - الإحداثيات الطبيعية
- 80 ب - الحالة الطبيعية والترددات الطبيعية
- 80 ج - الطاقة الكلية والإحداثيات الطبيعية
- 81 4-3 استقلال الإحداثيات الطبيعية وانتقال الطاقة
- 83 5-3 الطريقة العامة لإيجاد الترددات الطبيعية
- 85 6-3 الاهتزازات المرتبطة ادارتين كهربائيتين مرتبطين بمحثة
- 88 7-3 الاهتزازات المرتبطة لـ N كتلة محملة على حبل مشدود
- 93 8-3 الترددات الطبيعية لـ N كتلة محملة على حبل مشدود

96	9-3 المعادلة الموجية
97	10-3 الاهتزازات المرتبطة لمنظومة مدفوعة بقوة خارجية
100	11-3 الاهتزازات المرتبطة لمنظومة متخادمة مدفوعة بقوة خارجية
101	12-3 حل معادلات منظومة مرتبطة بطريقة المصفوفات
105	12-3 أمثلة
109	مسائل

الفصل الرابع : الحركة الموجية

114	1-4 تمهيد
114	2-4 الحركة الموجية
115	3-4 المعادلة الموجية
117	4-4 الحل العام للمعادلة الموجية
119	5-4 سرعة الانتشار وسرعة الاهتزاز
120	6-4 الممانعة المميزة
122	7-4 انعكاس ونفوذ الأمواج
125	8-4 انعكاس ونفوذ الطاقة
126	9-4 مساواة الممانعة
128	10-4 انعكاس الأمواج عند نهاية ثابتة
130	11-4 الأمواج المستقرة
131	12-4 انتشار الطاقة وسعة الحركة في الأمواج المستقرة
131	13-4 نسبة الأمواج المستقرة
132	14-4 الطاقة الحركية وطاقة الوضع لحبل تنتشر فيه أمواج مستقرة
134	15-4 التبدد وسرعة الطور وسرعة المجموعة
139	16-4 تطبيقات على سرعة الطور وسرعة المجموعة
139	16-4-1 نظرية عرض الفرقة
142	16-4-2 انتشار الأمواج المستعرضة في وسط دوري
143	17-4 أمواج النبضات
146	18-4 تراكب النبضات
147	19-4 الأمواج في بعدين أو ثلاثة أبعاد
150	20-4 أمثلة
152	مسائل

الفصل الخامس : الأمواج الطولية والصوت

156	1-5 تمهيد
156	2-5 المعادلة الموجية
160	3-5 طاقة الأمواج الصوتية
161	4-5 شدة الصوت
162	5-5 انعكاس ونفوذ الأمواج الصوتية
164	6-5 الأمواج الصوتية المستقرة
167	7-5 المتوافقات في الأمواج الصوتية المستقرة
168	مسائل

الفصل السادس : تحليل فورييه

169	1-6 تمهيد : سلسلة فورييه
174	2-6 تعميم سلسلة فورييه للحركات الدورية
178	3-6 سلسلة فورييه في مجال محدد
181	4-6 تطبيق سلسلة فورييه على حبل مشدود
185	5-6 سلسلة فورييه لنبضة مربعة على حبل
188	6-6 طيف سلسلة فورييه
189	7-6 تكاملات فورييه
191	8-6 تحويلات فورييه
194	مسائل

مراجع

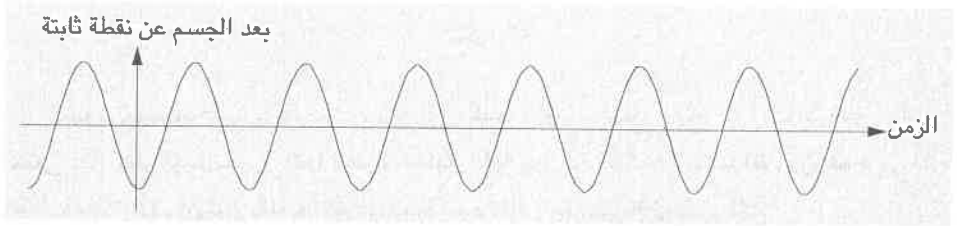
الحركة الاهتزازية البسيطة

(The Simple Harmonic Motion)

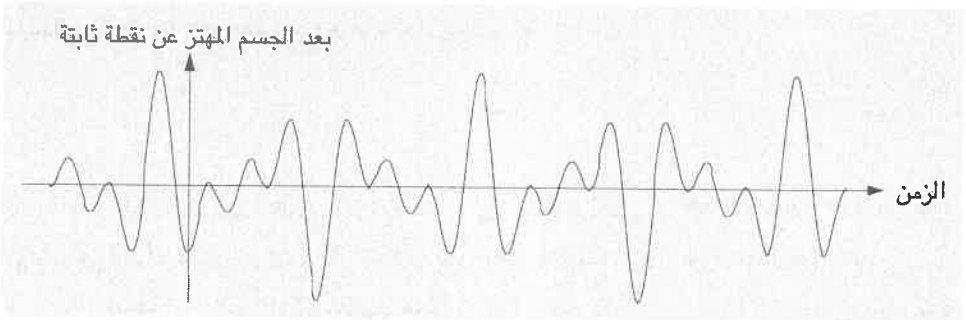
1-1 تمهيد : الحركة الدورية (Periodic Motion)

تعتبر الحركات الاهتزازية للأجسام والمنظومات الميكانيكية من أهم مجالات الدراسة في الفيزياء لأن كل الأنظمة الفيزيائية في الطبيعة قادرة على القيام بحركات اهتزازية بشكل أو بآخر . بالفعل فإن الصوت والضوء ماهما إلا حركتان اهتزازيتان ؛ أولاهما لذرات الهواء نتيجة حركة مصدر معين مثل جناح بعوضة الذي يهتز مئات المرات في الثانية مصدراً أمواجاً ذات تردد مسموع فتهتز ذرات الهواء المجاورة تدريجياً لتصل للأذن الخارجية لشخص نائم فيهتز الطبل فيها ناقلاً الصوت للأذن الوسطى ثم الداخلية ليستيقظ صاحبنا المسكين ويبدأ بالبحث عن هذا الزائر ثقيل الظل ، وثانيهما حركة اهتزازية لمجال كهربائي وآخر مغناطيسي يمثلان الفوتون الذي ينتقل على شكل شعاع ضوئي . من الأمثلة الأخرى ؛ اهتزازات الإلكترونات في المواد الناقلة مولدة تيارات متناوبة ، واهتزازات بندول ساعة المسجد الكبيرة ، وهكذا دواليك .

يوضح الشكل (1-1) حركة اهتزازية بسيطة (simple harmonic motion) كاهتزازات شوكة رنانة أو بندول بسيط ، بينما يوضح الشكل (2-1) حركة دورية غير بسيطة ، كنبضات قلب إنسان . في كلتا الحالتين لا يمكن لبعد الجسم المهتز عن نقطة ثابتة أن يتزايد أو يتناقص إلى ما لانهاية بل يصل لحد أعظمي ثم يتقهقر ثم يتزايد ، وهكذا .



الشكل (1-1)

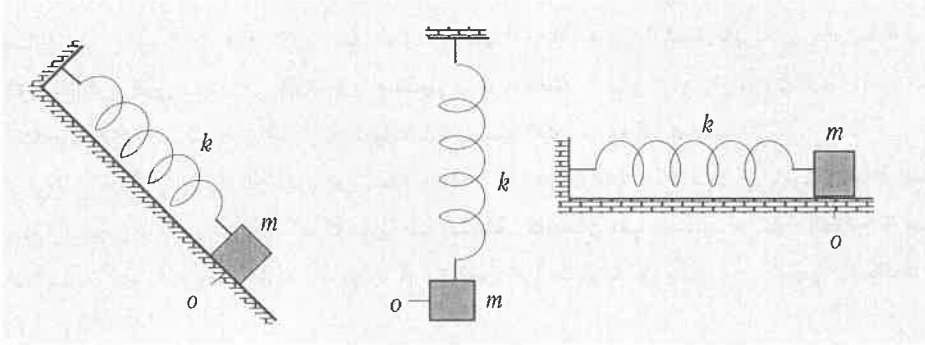


الشكل (2-1)

إن أهم ما تتميز الحركات الاهتزازية التكرار الرتيب (*periodicity*)، أي أن الحركة تكرر نفسها خلال فترات زمنية متساوية يدعى كل منها الدور (*period*) ، وسندرس في هذه الفصل كيف نحدد دور أي حركة اهتزازية من ثوابت النظام المهتز والقوى التي تؤثر عليه .

1-2 المعادلة الأساس للحركة الاهتزازية البسيطة

سنقوم في هذه الفقرة بكتابة المعادلة الأساس لجسم حر يهتز بشكل بسيط غير خاضع لقوى خارجية أو قوى مقاومة . أفضل مثل على ذلك جسم m معلق بنهاية زنبرك ، كما في الشكل (3-1) حيث نعرف وضع الاتزان عند النقطة o التي يكون الجسم ساكناً عندها سواء علق أفقياً ، أو شاقولياً ، أو غير ذلك .

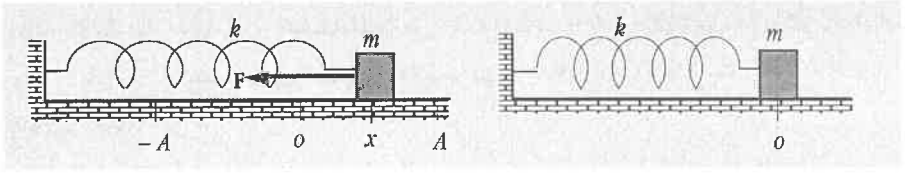


الشكل (3-1)

تتصف الأوساط المرنة ، كالزنبرك ، بأنه إذا خضعت لمؤثر خارجي ، وتغيرت أبعادها نتيجة لذلك ، ثم اختفى هذا المؤثر فإنها تعود لحالتها السابقة تماماً . كما نقول إن المنظومة تخضع لقانون هوك في المرونة (*Hook's Law*) إذا كان تغير أبعادها يتناسب خطياً مع المؤثر الخارجي الذي سبب ذلك .
فإذا أبعدنا الجسم المربوط بالزنبرك في الشكل (4-1) مسافة x عن o فإن الزنبرك يؤثر عليه بقوة إرجاع (*restoring force*) تتناسب مع x وبتجاه معاكس لها ، أي أن :

$$(1-1) \quad F = -kx$$

حيث يدعى ثابت التناسب k ثابت المرونة أو ثابت القوة للزنبرك (*spring force or elastic constant*) ووحدته في النظام الدولي N/m ، ويمثل k مقدار القوة اللازمة لزيادة طول الزنبرك بمقدار متر واحد .
تمثل العلاقة (1-1) أحد أشكال قانون هوك .



الشكل (4-1)

يمكن الوصول لمعادلة الحركة للجسم m من قانون نيوتن الثاني ، فنكتب :

$$(2-1) \quad F = m a = - kx$$

أو

$$(3-1) \quad a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} x$$

نلاحظ من (3-1) أن التسارع a غير ثابت لتغير قيمة x من موضع لآخر ، لذا نكتب (3-1) علي النحو :

$$(4-1) \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} x = -\omega_0^2 x$$

حيث وضعنا :

$$(5-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وتسمى التردد الزاوي (*angular frequency*) ، أو السرعة الزاوية .

بكتابة (4-1) بالشكل :

$$(6-1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

نحصل على المعادلة الأساس للحركات الاهتزازية البسيطة .

نلاحظ أن (6-1) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها العام هو :

$$(7-1) \quad x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

حيث A و ϕ ثابتان يتحددان من شروط البدء (*initial conditions*) التي نعني بها بدء توقيت أو متابعة الحركة

لابدء الحركة نفسها . فتسمى A السعة العظمى (*maximum amplitude*) لأنها تمثل أكبر ابتعاد للجسم عن وضع الاتزان 0 ، بينما تسمى ϕ الطور الابتدائي (*initial phase*) لأنها تحدد موضع الجسم لحظة بداية توقيت حركته .

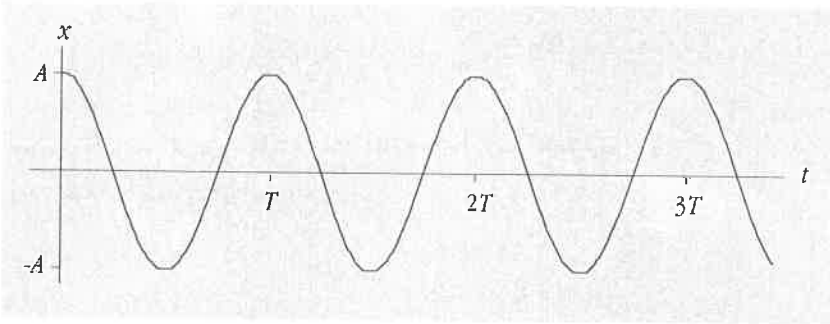
يمكن فهم طبيعة ϕ بمثل بسيط ، فنفترض أن لدينا جسماً مربوطاً بزنبرك على طاولة أفقية ملساء ، كما في الشكل (4-1) ، وأننا أبعدناه باليد مسافة A عن 0 وأفلتناه . فإن بدأنا توقيت الحركة في تلك اللحظة ، أي أن $x = A$ عندما $t = 0$ عندئذ نجد من (7-1) أن $\phi = 0$. أما لو بدأنا التوقيت عندما يصل الجسم لـ 0 ، أي أن $x = 0$ عندما $t = 0$ ، فنجد أن $\phi = \pi/2$ ، وهكذا دواليك . أي أن قيمة ϕ ترتبط بالموضع الذي كان عنده الجسم لحظة بدء توقيت حركته ولذا تسمى ، كما أسلفنا ، الطور الابتدائي . بينما تحدد الزاوية $(\omega_0 t + \phi)$ موضع الجسم في أي لحظة تالية t ، لذلك تسمى الطور اللحظي (*instantaneous phase*) أو الطور فقط . يمكن إيجاد سرعة وتسارع الجسم m باشتقاق (7-1) فنكتب :

$$(8-1) \quad v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

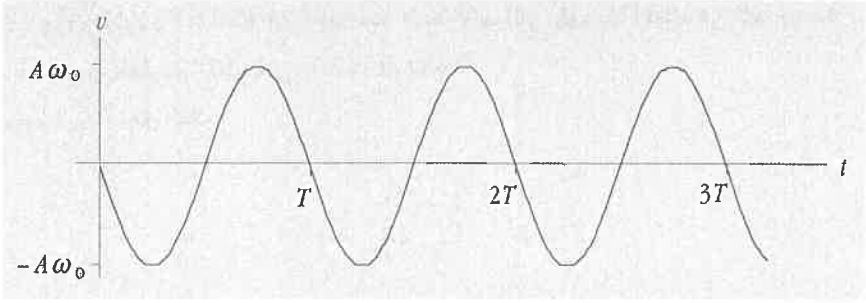
و

$$(9-1) \quad a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x$$

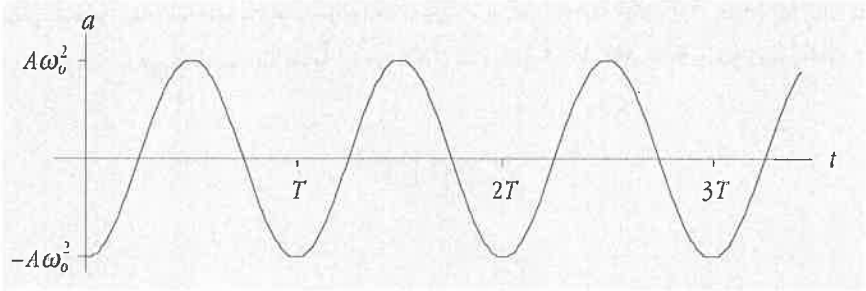
يوضح الشكل (5-1) تغيرات كل من x ، v ، و a مع الزمن .



الشكل (5-1) تغيرات x مع الزمن



الشكل (5-1 ب) تغيرات v مع الزمن



الشكل (5-1 ج) تغيرات a مع الزمن

بعد كتابة معادلة الحركة وحلها العام نحدد دور الحركة الذي نرمز له بـ T ويمثل الزمن اللازم للجسم ليعود إلى نفس الموضع بنفس السرعة ، أي أن الجسم سيكون في الموضع x في اللحظة t واللحظة $t+T$ بالاستفادة من (7-1) نكتب :

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0(t+T) + \phi)$$

يتضح من هذه العلاقة أنها ستكون محققة دوماً إذا كان :

$$\omega_0 T = 2\pi$$

أي أن :

$$(10-1) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

فدور الحركة الاهتزازية لنظام حر يرتبط بخواص النظام فقط ، من كتلة وثابت مرونة ، بغض النظر عن الطريقة التي بدأ بها حركته . لهذا نسميه دور طبيعي (natural period)

كما نعرف التردد f (frequency) بأنه عدد الاهتزازات التي يقوم بها النظام في ثانية واحدة ، ويسمى في حالة نظام حر التردد الطبيعي (natural frequency) .
يرتبط f بـ T وفق العلاقة :

$$(11-1) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

3-1 طاقة الحركة الاهتزازية البسيطة

لنعتبر نظاماً مهتزاً معامل مرونته k (كجسم مربوط بزنبك) ، عندئذ تكون قوة الإرجاع المؤثرة عليه من الشكل $F = -kx$ ، وهي قوة محافظة طبعاً (برهن ذلك) . من ثم يمكن اشتقاق طاقة وضع منها بكتابة :

$$(12-1) \quad U = -\int_0^x F dx$$

أي أن :

$$(13-1) \quad U = \frac{1}{2} k x^2$$

كما نجد طاقة الحركة من :

$$(14-1) \quad K = \frac{1}{2} m v^2$$

من ثم تصير الطاقة الميكانيكية الكلية :

$$(15-1) \quad E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

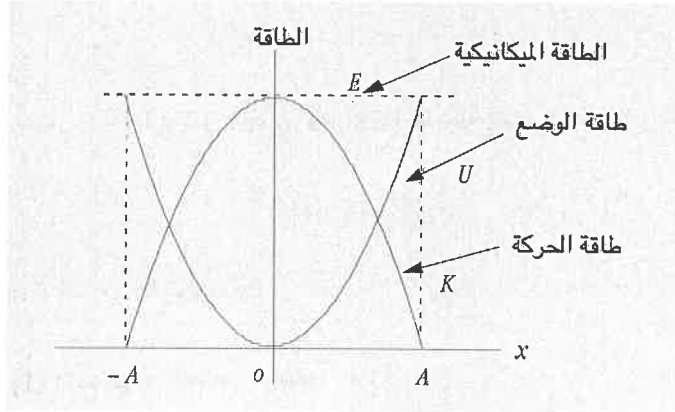
بالتعويض عن x و v من (7-1) و (8-1) نجد :

$$(16-1) \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

نلاحظ من (16-1) أن الطاقة الميكانيكية ثابتة وهذا بديهى طالما بقيت القوى المؤثرة على النظام محافظة ، كما في حالتنا هذه ، أما لووجدت قوى ممانعة لاختلف الأمر كما سنرى بعد قليل .

يوضح الشكل (6-1) تغير كل من طاقة الوضع والحركة مع بعد الجسم عن وضع الاتزان عندما يتحرك بين

A و $-A$ ، حيث نلاحظ أن مجموعهما عند كل نقطة هو نفسه ويساوي الطاقة الميكانيكية الكلية .



الشكل (6-1)

بما أن الطاقة الميكانيكية ثابتة ، فيكون معدل تغيرها بالنسبة للزمن مساوياً للصفر ، أي أن :

$$(17-1) \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

لهذه النتيجة أهمية كبيرة في تعريف النظام المحافظ وثوابت الحركة ، إذ يطلق على E هنا اسم ثابت حركة (*constant of motion*) ويستفاد منه للوصول لمعادلة الحركة ببسر وسهولة ، كما في الأمثلة التالية .

أ - جسم مربوط بزنبك : (نظام ميكانيكي)

إذا ربط جسم m بزنبك k على سطح أفقي أملس وتُرك ليتهز بشكل حر فإن طاقته الميكانيكية تبقى ثابتة ، كما وجدنا أعلاه ، فنكتب :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{ثابت}$$

باشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة للزمن نجد :

$$m \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} (m \ddot{x} + kx) = 0$$

وللمعادلة الأخيرة حلان ؛ أولهما الحل البديهي :

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \text{ثابت}$$

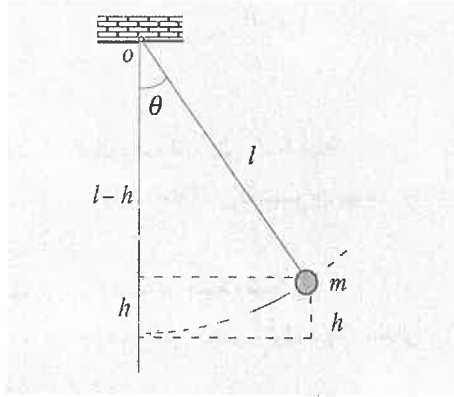
أي أن الجسم سيبقى ساكناً في نفس الموضع دوماً ، وهذا حل مرفوض ، والحل الثاني الفيزيائي :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وهي معادلة الحركة التي وصلنا إليها سابقاً .

ب – البندول البسيط (The Simple Pendulum)

يتألف البندول البسيط من خيط طوله l تثبت إحدى نهايتيه وعلق بالأخرى جسيم m ذو أبعاد مهملة بالمقارنة مع طول الخيط ، كما في الشكل (7-1) . فإذا أبعدنا m عن وضع الاتزان الشاقولي بحيث ينحرف الخيط بزاوية θ_0 ثم أفلتناه لتأرجح الجسيم بشكل اهتزازي .



الشكل (7-1)

بما أن القوى المؤثرة على النظام محافظة (لماذا؟) فإن الطاقة الميكانيكية له ستبقى ثابتة ونكتب :

$$E = U + K = mgh + \frac{1}{2} mv^2 = \text{ثابت}$$

ويوضع :

$$h = l(1 - \cos \theta)$$

و

$$v = l\dot{\theta}$$

تؤول معادلة الطاقة إلى :

$$(18-1) \quad E = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

لكن :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

فإذا بقيت θ (مقدرة بالراديان) صغيرة (أقل من 20° تقريباً) عندئذ نحتفظ بالحدين الأول والثاني فقط ونكتب :

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

فتصير الطاقة الميكانيكية مساوية إلى :

$$(19-1) \quad E = \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = \text{ثابت}$$

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد :

$$\dot{\theta}(ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta) = 0$$

بالطبع فإن الحل المقبول هو :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

أو

$$(20-1) \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

حيث وضعنا :

$$(21-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

نلاحظ هنا أن (20-1) تشبه (6-1) تماماً مع استبدال θ بـ x في الأخيرة . فاهتزازات البندول بسيطة طالما بقيت θ صغيرة) وسرعتها الزاوية ω_0 مرتبطة بطوله وتسارع الجاذبية (الذي يوفر عزم الإرجاع) ، وفق (21-1) .

4-1 الربط بين الحركة الاهتزازية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة

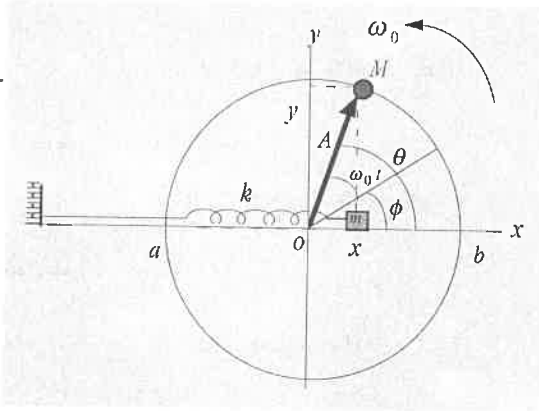
(الدائرة الطورية) (Phasor Circle)

يمكن ربط الحركة الاهتزازية لجسيم m بمسقط حركة دائرية منتظمة ، كما في الشكل (8-1) ، حيث نفترض أن جسماً M يدور بسرعة زاوية ثابتة ω_0 على دائرة نصف قطرها A ، وأن مسقطه أو ظله على المحور ox هو m .

من الواضح أنه عندما يدور M على الدائرة فإن ظله m يتحرك جيئةً وذهاباً على قطرها الأفقي بشكل مشابه لجسم مربوط بزنبك على طاولة أفقية ملساء . فإذا بدأنا متابعة حركة M (أي توقيتها) عندما كان المتجه OM يصنع زاوية ϕ مع ox فإننا نجد أنه بعد زمن t تصير زاوية OM مع ox مساوية لـ $\theta = \omega_0 t + \phi$ ، حينئذ يصير بعد m عن المبدأ o مساوياً إلى :

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

أي أن x تتغير مع الزمن كما لو كان m مربوطاً بزنبك تماماً .



الشكل (8-1)

نستنتج مما تقدم أنه يمكن تمثيل أي حركة اهتزازية بمسقط حركة دائرية منتظمة نصف قطرها يساوي السعة العظمى A ، وسرعتها الزاوية ω_0 ، بينما تمثل ϕ الطور الابتدائي للحركة الاهتزازية .

يطلق على الدائرة المذكورة أعلاه اسم الدائرة الطورية (phasor circle) ويستفاد منها لجمع عدة حركات اهتزازية بسيطة لها نفس الدور وتختلف عن بعضها بالسعة العظمى أو/و الطور الابتدائي .

نشير أخيراً إلى أن مركبة حركة M في الشكل (8-1) على oy وتمثل حركة اهتزازية شاقولية تعطى بالمعادلة :

$$y = A \sin \theta = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (22-1)$$

5-1 تداخل الحركات الاهتزازية ومبدأ التراكب

(Interference & Principle of Superposition)

نكرنا في الفقرة السابقة أنه يمكن الاستفادة من المنحنى الطوري لجمع حركات اهتزازية تتم على نفس الخط بنفس التردد ، لكن تختلف عن بعضها بالسعة العظمى أو/و الطور الابتدائي . فإذا خضع جسم لحركتين من الشكل :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

و

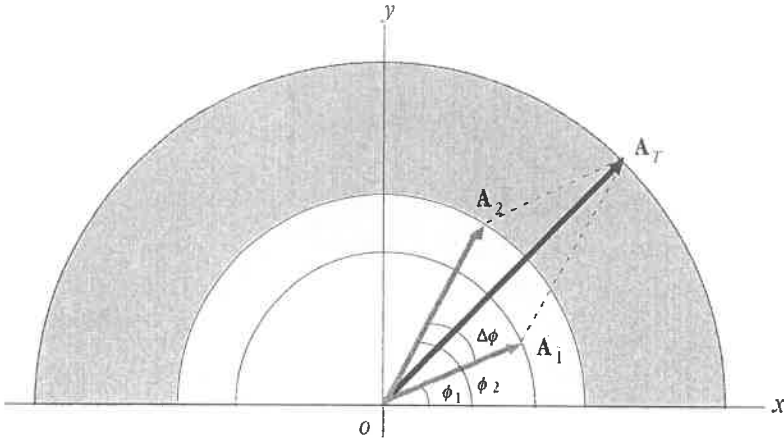
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

فإن حركته الكلية تكون معطاة بالمعادلة :

$$(23-1) \quad x_T = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) = A_T \cos(\omega t + \phi)$$

حيث A_T السعة العظمى للمحصلة و ϕ طورها الابتدائي .

من الواضح أن جمع x_1 و x_2 تحليلاً ليس بالأمر السهل ، لذلك نستفيد من الدائرة الطورية ونمثل الحركة الاهتزازية الأولى في اللحظة $t=0$ بمتجه دوّار OA_1 طوله A_1 يصنع زاوية ϕ_1 مع ox . كما نمثل الاهتزازة الثانية بمتجه دوّار آخر OA_2 طوله A_2 يصنع زاوية ϕ_2 مع ox ، كما في الشكل (9-1) .



الشكل (9-1)

نلاحظ من الشكل (9-1) أن محصلة A_1 و A_2 هي :

$$A_T = A_1 + A_2$$

يعطى طولها بالعلاقة :

(24-1)

$$A_T = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\theta)}$$

حيث وضعنا :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

كما تصنع المحصلة زاوية ϕ مع المحور ox معطاة بالعلاقة :

(25-1)

$$\tan \phi = \frac{(A_T)_y}{(A_T)_x} = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

بما أن للحركتين نفس التردد ، لذا فإن الزاوية بين الجسمين الدوّارين الممثلين للاهتزازتين ستبقى كما هي خلال دورانهما ، من ثم تبقى العلاقات السابقة صحيحة دوماً .
من جهة أخرى كان بإمكاننا أن نكتب مركبات المحصلة A_T مباشرة :

$$(A_T)_x = A_{1x} + A_{2x}$$

$$(A_T)_y = A_{1y} + A_{2y}$$

حيث :

$$A_{ix} = A_i \cos \phi_i$$

$$A_{iy} = A_i \sin \phi_i$$

ويصير طولها معطى بـ

$$A_T = \sqrt{(A_T)_x^2 + (A_T)_y^2}$$

التداخل البناء والتداخل الهدام :

نلاحظ من (24-1) أن سعة المحصلة A_T ستكون أكبر ما يمكن عندما :

$$(26-1) \quad \Delta\phi = 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

يسمى مجموع الحركتين الاهتزازيتين في هذه الحالة تداخلاً بناءً *(constructive interference)* وتصير سعة المحصلة عندها مساوية إلى :

$$(27-1) \quad A_T = A_1 + A_2$$

أما إذا كان :

$$(28-1) \quad \Delta\phi = (2n+1)\pi \quad n=0, 1, 2, \dots$$

عندئذ تكون سعة المحصلة أصغر ما يمكن وتساوي :

$$(29-1) \quad A_T = A_1 - A_2$$

يسمى مجموع الحركتين الاهتزازيتين حينئذ تداخلاً هداماً *(destructive interference)* وسنعود لموضوع التداخل بتفصيل أكثر عند دراسة الأمواج .

1-6 الخفقان (Beats)

درسنا في الفقرة السابقة مجموع حركتين اهتزازيتين على نفس الخط لهما نفس التردد ؛ أما إذا كان لهما ترددين متباينين قليلاً بحيث أن :

$$(30-1) \quad x_1 = A \cos \omega_1 t$$

و

$$(31-1) \quad x_2 = A \cos \omega_2 t$$

حيث نفترض أن $\omega_1 \approx \omega_2$ و $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \neq 0$.

عندئذ يكون مجموع هاتين الاهتزازتين معطى بالعلاقة :

$$(32-1) \quad x_T = x_1 + x_2 = A[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]$$

ومنه :

$$(33-1) \quad x_T = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

أو :

$$(35-1) \quad x_T = A_T(t) \cos \omega t$$

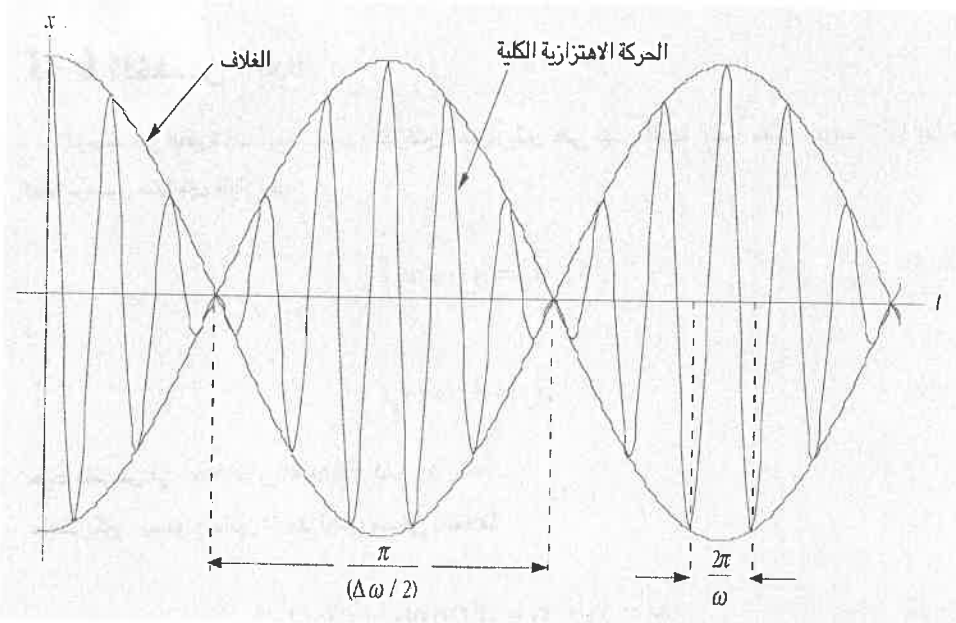
حيث وضعنا :

$$(36-1) \quad A_T(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

و

$$(37-1) \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

فالحركة الاهتزازية الكلية الممتلئة بالعلاقة (35-1) لها نفس تردد أي من الحركتين الأصليتين تقريباً ، إلا أن سعتها العظمى تتغير مع مرور الزمن وفق العلاقة (36-1) بشكل جيبي بتردد $(\Delta\omega/2)$ أصغر من تردد الحركة نفسها (ω) . فيقوم الجسم بعدة اهتزازات قبل أن تنعدم سعة حركته ، كما في الشكل (10-1) .



الشكل (10-1)

يطلق على المنحنى الممثل لـ A_T اسم الغلاف (*envelop*) ، حيث نلاحظ من الشكل (10-1) أن السعة الكلية للحركة الاهتزازية تنعدم مرتين خلال كل نصف دور من أدوار الغلاف . من ثم نعرف تردد الخفقان (*beat frequency*) ω_b بضعف تردد الغلاف ، $(\Delta\omega/2)$ ، أي أن :

$$(38-1) \quad \omega_b = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

تبدو ظاهرة الخفقان بوضوح عند استقبال موجتين صوتيتين ذات ترددين متقاربين في المذياع إذ تتغير شدة الصوت المسموع (التي تتناسب مع مربع سعة الاهتزازة الكلية ، كما سنرى عند دراسة الأمواج) صعوداً وهبوطاً بتردد يساوي تردد الخفقان . كما يستفاد من الخفقان لمعرفة تردد مصدر صوتي مجهول بتقريب شوكات رنانة لها تردد معين ω_1 منه وتسجيل تردد الخفقان ω_b الناتج ، وحساب تردد المصدر ω_2 من (38-1).

7-1 جمع n حركة اهتزازية متماثلة تتم على نفس الخط

سندرس في هذه الفقرة حاصل جمع عدد كبير n من الاهتزازات المتماثلة التي لها نفس السعة والتردد ، تتم على نفس الخط إلا أن هناك فرق طور ثابت بين كل حركتين متتاليتين . فنكتب الحركات على النحو :

$$(39-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = A \cos \omega t \\ x_2 = A \cos(\omega t + \delta) \\ x_3 = A \cos(\omega t + 2\delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = A \cos[\omega t + (n-1)\delta] \end{array} \right.$$

ثم نكتب محصلة هذه الاهتزازات :

$$(40-1) \quad X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = R \cos(\omega t + \alpha)$$

حيث تدل R على السعة العظمى للمحصلة و α فرق الطور بينها وبين الحركة الأولى . يمكن إيجاد كل من R و α الثابتين من المنحنى الطوري ، فنمثل كل حركة في اللحظة $t = 0$ بمتجه طوله يساوي سعتها العظمى ويميل على محور السينات بزاوية تساوي طورها الابتدائي ، فتكون زاوية المتجه الأول مساوية للصفر ، وزاوية الثاني δ ، والثالث 2δ ، و . . . ، والأخير $(n-1)\delta$ ، كما في الشكل (11-1 أ). نلاحظ من الشكل (11-1 ب) أن :

$$(42-1) \quad \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) = \frac{R/2}{r} \Rightarrow R = 2r \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right)$$

ومن الشكل (11-1) ب)

$$(43-1) \quad \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{A/2}{r} \Rightarrow r = \frac{A}{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

أي أن :

$$(44-1) \quad R = A \left(\frac{\sin\left(\frac{n\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)$$

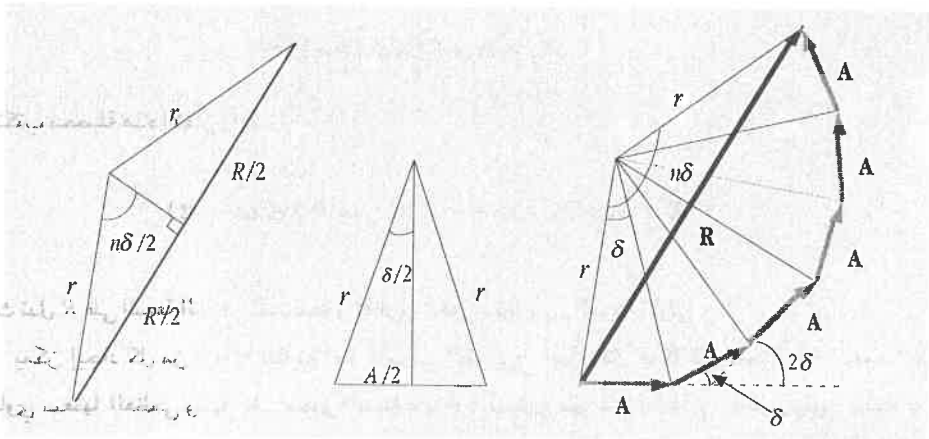
كما نلاحظ من الشكل (11-1) أ) أن الزاوية بين الاهتزازة الأولى والمحصلة هي (لماذا؟) :

$$(45-1) \quad \alpha = (n-1) \frac{\delta}{2}$$

من ثم نكتب الشكل النهائي لمحصلة n اهتزازة بالشكل :

$$(46-1) \quad X = R \cos\left[\omega t + (n-1) \frac{\delta}{2}\right]$$

فالسعة العظمى للمحصلة تعتمد على عدد الاهتزازات n وعلى فرق الطور بين كل اثنتين متتاليتين .



(ب)

(أ)

الشكل (11-1)

حالة خاصة : جمع عدد كبير من الاهتزازات

إذا كان عدد الاهتزازات n كبيراً جداً ($n \gg 1$) ، عندئذ يمكن تقريب (45-1) بكتابة :

$$\alpha = (n-1) \frac{\delta}{2} \approx \frac{n\delta}{2} \Rightarrow \delta \approx \frac{2\alpha}{n} \ll 1$$

ومنه :

$$\sin \frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2} \approx \frac{\alpha}{n}$$

فتؤول R إلى :

$$R = A \frac{\sin(n\delta / 2)}{\sin(\delta / 2)} \approx A \frac{\sin \alpha}{\alpha / n} = nA \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

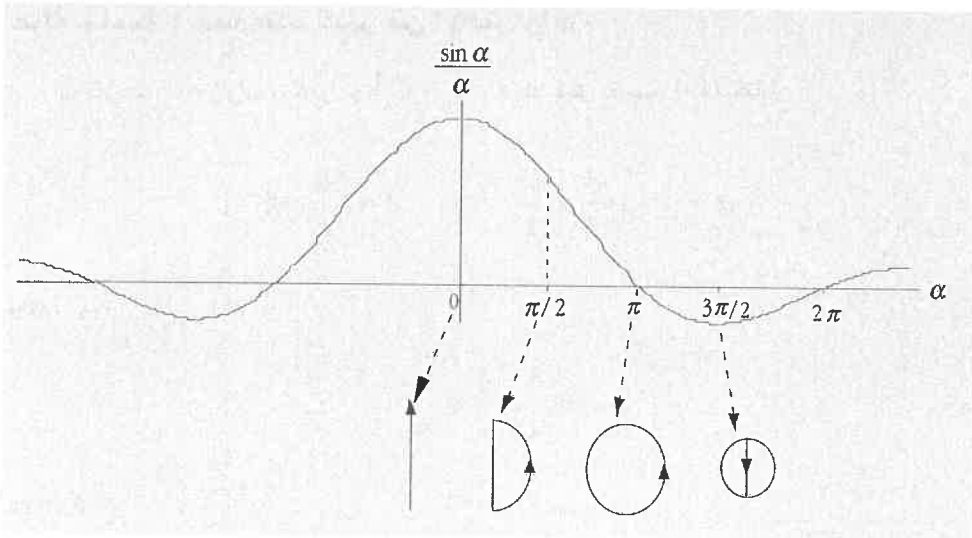
أي أن :

$$(47-1) \quad R = A_T \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

حيث وضعنا $A_T = nA$ ، وتصير المحصلة مساوية إلى :

$$(48-1) \quad X = R \cos(\omega t + \alpha)$$

يوضح الشكل (12-1) كيف تتغير السعة العظمى R مع فرق الطور الكلي α (المعادلة (47-1)) .
 نلاحظ من الشكل المذكور أنه إذا كانت $\alpha = 0$ ، أي أن $\delta = 0$ ، فإن R تصير أكبر ما يمكن لأنها تمثل جمع عدة متجهات بنفس الاتجاه ، أما إذا كان $\alpha = n\pi$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$ فإن $R = 0$ أي أن نهاية آخر متجه تنطبق على بداية أول واحد منها .



الشكل (12-1)

من تطبيقات جمع حركات اهتزازية بينها فروق طور متساوية ظاهرة حيود الضوء من شبكة حيود (*diffraction grating*) إذ تتصرف الشقوق فيها كمصادر ضوئية متزامنة (*coherent*) لها نفس السعة والتردد وتكون الاهتزازات الواصلة من كل هذه المصادر إلى نقطة على شاشة أمام الشبكة مماثلة تماماً للمحصلة التي وجدناها أعلاه . وسندرس لاحقاً هذه الظاهرة ونرى كيف تعتمد الإضاءة على عدد الشقوق في الشبكة وعلى فرق الطور بين كل إثنين منها .

8-1 جمع الاهتزازات البسيطة في مستو وأشكال ليساجو

درسنا حتى الآن جمع الحركات الاهتزازية التي تتم على نفس الخط ، وندرس في هذه الفقرة اهتزاز جسم في مستو وخاضع لحركتين اهتزازيتين تتمان على خطين متعامدين ؛ أولاهما على محور السينات وتعطى بالعلاقة :

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

أو

$$x = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

حيث وضعنا $\phi_1 = \phi_1 + \pi/2$ ، والثانية على محور الصادات وتعطى بالعلاقة :

$$y = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

وتكون الحركة الكلية للجسيم مساوية لمجموع هاتين الاهتزازتين .
 يمكن معرفة شكل الطريق الذي سيتحرك عليه الجسم ، أي معادلة المسار ، باختصار الزمن بين المعادلتين
 السابقتين على النحو التالي :
 نكتب الأولى بالشكل :

$$\frac{x}{A_1} = \sin(\omega t + \phi_1) = \sin \omega t \cos \phi_1 + \cos \omega t \sin \phi_1$$

والثانية :

$$\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t + \phi_2) = \sin \omega t \cos \phi_2 + \cos \omega t \sin \phi_2$$

ثم نضرب الأولى بـ $\cos \phi_2$ والثانية بـ $\cos \phi_1$ ونأخذ ناتج الطرح ، ثم نضرب الأولى بـ $\sin \phi_2$ والثانية بـ $\sin \phi_1$
 ونأخذ ناتج الطرح أيضاً، فنجد المعادلتين الآتيتين :

$$\frac{x}{A_1} \cos \phi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \phi_1 = \cos \omega t [\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2]$$

و

$$\frac{x}{A_1} \sin \phi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \phi_1 = -\sin \omega t [\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2]$$

بترتيب العلاقتين الأخيرتين وجمعهما نجد (بعد بعض الإصلاح) :

$$(49-1) \quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \sin^2(\phi_1 - \phi_2)$$

لكن العلاقة (49-1) ماهي إلا المعادلة العامة لقطع ناقص نصفه قطريه A_1 و A_2 يميل قطره الأول على محور
 السينات بزاوية $\delta - \pi/2$ ، حيث وضعنا :

$$\delta = \phi_1 - \phi_2$$

التي تمثل فرق الطور بين الاهتزازتين .

نلاحظ من المعادلة (49-1) أن شكل المسار يعتمد على δ بشكل واضح . فإذا اعتبرنا الحالة الخاصة

عندما $A_1 = A_2 = A$ فإننا نميز الحالات التالية :

(أ) $\delta = n\pi$: في هذه الحالة تؤول (49-1) إلى :

$$y' = \pm x$$

وهي معادلة خط مستقيم ميله $\pm 45^\circ$ بحسب كون n زوجية (+) أو فردية (-) كما في الأشكال (14-1 أ و ب) .

(ب) $\delta = (2n + 1)\pi/2$: في هذه الحالة تؤول (49-1) إلى :

$$x^2 + y^2 = A^2$$

أي أن الجسم يدور على دائرة نصف قطرها A . ويكون اتجاه الدوران مع عقارب الساعة إذا كان $n = 0, 2, 4, \dots$ أو يعكس عقارب الساعة إذا كان $n = 1, 3, 5, \dots$ ، كما في الأشكال (14-1 ج ، د) .

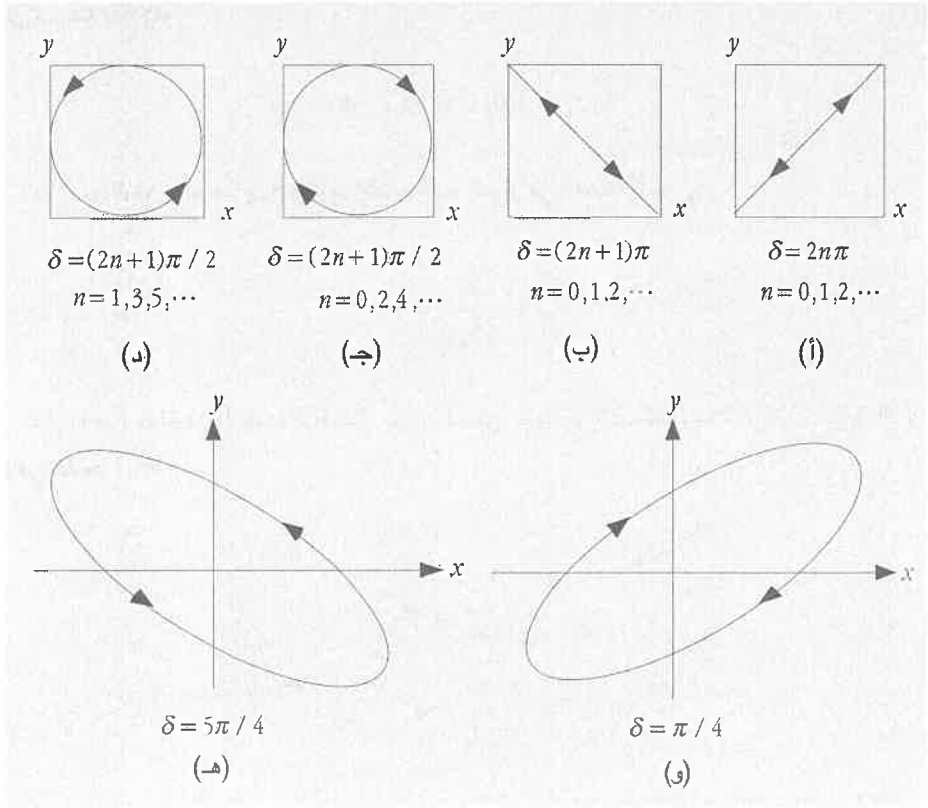
(ج) $\delta = (2n + 1)\pi/4$: في هذه الحالة تصير (49-1) :

$$x^2 + y^2 \pm \sqrt{2}xy = \frac{1}{2}A^2$$

وهي معادلة قطع ناقص يميل محوره الكبير على محور السينات بزاوية $\pm 45^\circ$ يدور الجسم عليه مع أو يعكس عقارب الساعة بحسب قيمة n ، كما في الأشكال (14-1 هـ ، و) (تحقق من ذلك) .

تسمى الأشكال الناتجة عن جمع حركتين اهتزازيتين باتجاهين متعامدين أشكال ليساجو ، يمكن تعميمها على جمع حركتين لهما ترددين مختلفين ω_1 و ω_2 ، عندها نحصل على أشكال مختلفة ثابتة أو دوارة بحسب قيم النسبة ω_1/ω_2 .

من السهل مشاهدة أشكال ليساجو عملياً باستخدام راسم الاهتزاز المهبطي (CRT) ومولدين للاهتزازات الجيبية يربطان عند المدخلين X و Y للراسم . بتغيير تردد كل مولد ببطء تظهر منحنيات مغلقة أخاذة تدور بهدوء وكأنها أشكال فراغية مع العلم أنها مسارات مستوية للإلكترون الخاضع لحركتين اهتزازيتين من المولدين المرتبطين بالراسم .



الشكل (14-1)

9-1 منحنيات الطور (Phasor Diagrams)

واضح من دراستنا للأنظمة الميكانيكية أن تحديد الحالة الحركية لجسم يتحرك على خط مستقيم كهزاز توافقي بسيط ، أو بندول بسيط ، في أي لحظة من الزمن يتم بمعرفة كميتين معينتين هما الموضع x والسرعة v لأن المعادلة التفاضلية للحركة هي من الدرجة الثانية . من ثم يمكن اعتبار x و v إحدائهما نقطة في مستو ذي بعدين يسمى **الفضاء الطوري (phase space)** ، وعندما يتحرك الجسم تتغير كل من x و v ، أي يتغير موضع النقطة $P(x,v)$ في هذا المستوي متحركة على منحنى طوري (phase path) . يتغير شكل هذا المنحنى بحسب الشروط الابتدائية للحركة . لذا يمثل أي من هذه المنحنيات تاريخاً كاملاً للمنظومة المهتزة ، كما تشكل المنحنيات الناتجة عن المجموعة المؤلفة من كل الشروط الابتدائية الممكنة للمنظومة **الصورة الطورية (phase portrait)** أو **الشكل الطوري (phase diagram)** لها .

فإذا اعتبرنا هزازاً توافقياً بسيطاً يتحرك وفق العلاقة :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \phi)$$

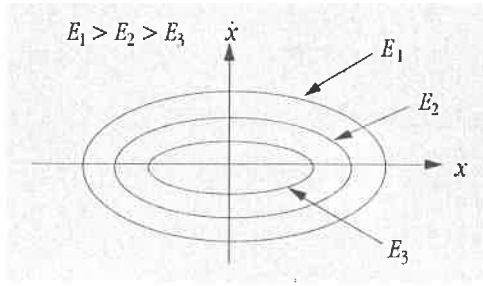
تعطى سرعته بالعلاقة :

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$$

عندئذ نختصر الزمن t من هاتين العلاقتين لنجد معادلة المسار في الفضاء الطوري :

$$(50-1) \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_0^2} = 1$$

تمثل (50-1) عائلة من القطوع الناقصة ، يتحدد كل فرد منها من الشروط الابتدائية بحسب قيمة الثابت A ، كما في الشكل (16-1) .



الشكل (16-1)

كما نعلم فإن الطاقة الكلية للمنظومة هي :

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

لذلك يمكن تعويض كل من A و ω_0 في (50-1) لنجد :

$$(51-1) \quad \frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن كل مسار طوري يمثل طاقة كلية معينة E للمنظومة ، وهذا متوقع لأن النظام محافظ أي أن الطاقة الكلية ثابتة دوماً .

لا يمكن لأي مسارين طوريين أن يتقاطعا لأنه لو كان الأمر كذلك لتحركت المنظومة على مسارين مختلفين من أجل نفس الشروط الابتدائية $x(t_0)$ و $\dot{x}(t_0)$ وهذا مستحيل لأنه لا يوجد للمعادلة التفاضلية للحركة إلا حل واحد فريد دوماً .

إذا اخترنا المحاور الاحداثية x و \dot{x} ، كما في الشكل (16-1) عندئذ يصبح مسار كل نقطة ممثلة للحركة (*representative point*) باتجاه حركة عقارب الساعة ، لأنه عندما تكون $x > 0$ فإن السرعة \dot{x} تتناقص دوماً ، بينما عندما تكون $x < 0$ فإن السرعة تتزايد دوماً .
يمكن الحصول على معادلة المسار بدءاً من المعادلة التفاضلية للحركة بطريقة مبسطة بوضع :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0^2 x \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

والعلاقة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها هو المعادلة (50-1) مباشرة .
مما لا شك فيه أن حل المعادلة التفاضلية الأصلية للحركة لهزان توافقي بسيط سهل تماماً لا يستدعي اللجوء للطريقة المذكورة أعلاه ، أما في الحالات الأكثر تعقيداً فإنها توفر الوقت والجهد بشكل كبير ، حيث يمكن الربط بين السعة اللحظية x والسرعة \dot{x} دون الحاجة لمعرفة تغيرات أي منهما بدلالة الزمن .

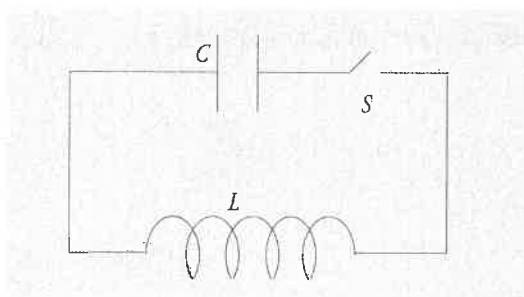
10 - 1 أمثلة على الحركة الاهتزازية البسيطة

1-10-1 الدارة الكهربائية L-C

لانتصر الاهتزازات البسيطة على المنظومات الميكانيكية فقط بل تظهر في مجالات متعددة كالكهرباء والسوائل وغيرها . ندرس في هذه الفقرة اهتزاز التيار الكهربائي في دارة بسيطة مثالية (أي معدومة المقاومة) مؤلفة من محث (*inductance*) L ، ومكثف C مشحون مبدئياً بشحنة Q_0 ، كما في الشكل (17-1) .
عند إغلاق المفتاح S يسري تيار في الدارة بحيث نكتب من قانون كيرشوف الثاني :

$$V_L + V_C = 0$$

حيث V_L فرق الجهد بين طرفي المحث و V_C فرق الجهد بين طرفي المكثف .



الشكل (17-1)

بوضع :

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

و

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

نجد :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

باشتقاق العلاقة الأخيرة بالنسبة للزمن نجد :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

أو

$$(52-1) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

حيث وضعنا :

$$(53-1) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

نلاحظ من العلاقة (52-1) أن معادلة الحركة للتيار الكهربائي في الدارة مماثلة لجسم مربوط بزنبك ، أي أن

التيار يتغير بين قيمتين $\pm i_0$ بتردد ω_0 .

يمكن إيجاد الطاقة الكلية في الدارة بكتابة القدرة اللحظية في المحث على النحو :

$$p_L = iV_L = Li \frac{di}{dt}$$

بالتالي نحسب الطاقة الكلية المخزنة في الملف :

$$E_L = \int p_L dt = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\dot{Q}^2$$

حيث Q الشحنة الآتية في المكثف .

كما نكتب الطاقة المخزنة في المكثف بالشكل :

$$(54-1) \quad E_C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \right) Q^2$$

وتصير الطاقة الكلية في الدارة في أي لحظة :

$$(55-1) \quad E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \right) Q^2 + \frac{1}{2} L \dot{Q}^2$$

بمقارنة العلاقة الأخيرة بمعادلة الطاقة لجسم مربوط بزنبرك نستنتج أن الدارة الكهربائية تناظر المنظومة الميكانيكية بوضع معامل الكتلة $L \leftrightarrow m$ ومعامل المرونة $1/C \leftrightarrow k$.
نلاحظ أنه كان بإمكاننا الوصول لمعادلة الحركة لو كتبنا معادلة الطاقة (55-1) أولاً ثم قمنا باشتقاقها بالنسبة للزمن فنجد :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{C} \right) Q \dot{Q} + L \dot{Q} \ddot{Q} = 0$$

أي أن :

$$\left(\frac{1}{C} \right) Q + L \ddot{Q} = 0$$

وهي معادلة الحركة للشحنة Q .

1- 10- 2 الأجسام الطافية (Floating Objects)

من المعروف أنه إذا غمس جسم كلياً أو جزئياً في سائل فإنه يخضع ، بحسب قاعدة أرخميدس ، إلى قوة دفع للأعلى تساوي وزن السائل الذي أزاحه الجسم بالإضافة لوزنه نحو الأسفل ، كما في الشكل (1-18 أ) .
سنحل هذا المثل بطريقتين :

أ - طريقة قانون نيوتن :

نكتب في حالة الاتزان :

$$(56-1) \quad mg = F_{up} = (\rho Ah)g$$

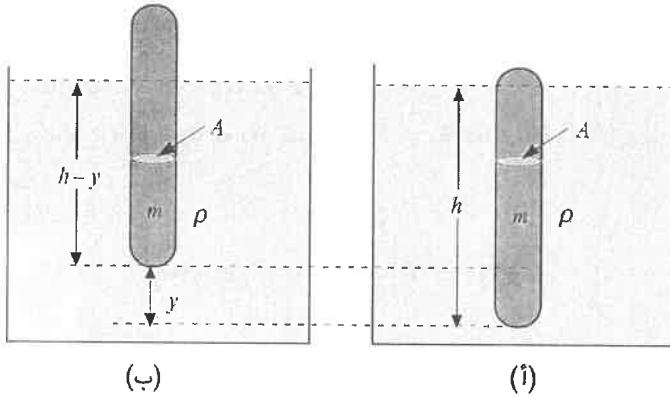
حيث m كتلة الانبوب كله و ρ كثافة السائل و h الطول المغمور من الانبوب و A مساحة مقطعه .
 الآن : إذا دُفع الانبوب للأسفل أو للأعلى مسافة صغيرة y ، كما في الشكل (18-1 ب) ، فإن دافعة أرخميدس
 تصير :

$$(57-1) \quad F_{up} = (\rho A(h-y))g$$

من ثم تؤول محصلة القوى المؤثرة على الانبوب إلى :

$$(58-1) \quad F_T = (\rho A(h-y))g - mg$$

حيث اعتبرنا الاتجاه الموجب نحو الأعلى .



الشكل (18-1)

بالاستفادة من (56-1) نكتب المعادلة (58-1) بالشكل :

$$(59-1) \quad F_T = -(\rho Ag)y$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن الانبوب سيخضع لقوة إرجاع تتناسب مع y ليقوم بحركة اهتزازية بسيطة
 يمكن إيجاد ترددها بكتابة معادلة الحركة :

$$(60-1) \quad F_T = -(\rho Ag)y = m\ddot{y}$$

ومنه :

$$(61-1) \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

حيث وضعنا التردد ω_0 مساوياً إلى :

$$(62-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho Ag}{m}}$$

ب - طريقة الطاقة :

نكتب طاقة النظام الكلية (هيدروميتر + ماء مزاح) على النحو :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \rho g A y \left(\frac{y}{2}\right)$$

حيث m كتلة الهيدروميتر و ρ كثافة الماء و $\rho A y$ كتلة الماء المزاح و $y/2$ ارتفاعه عن وضع الاتزان .
إذا أهملنا الاحتكاك بين سطح الهيدروميتر والماء فإن E تبقى ثابتة ونكتب :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

أي أن :

$$m \dot{y} \ddot{y} + \rho A g y \dot{y} = 0$$

بأخذ الحل غير البديهي نجد :

$$m \ddot{y} + \rho A g y = 0$$

وهي نفس معادلة الحركة التي وجدناها أعلاه !

10-3 السوائل في الأواني المستطرقة

لندرس حركة سائل في انبوب على شكل حرف U ، كما في الشكل (10-1) ، حيث نلاحظ أنه إذا ارتفع السائل في أحد الذراعين مسافة صغيرة y عن مستواه في الذراع الأخرى فإن السائل كله سيخضع لقوة إرجاع للأسفل ويقوم بحركة اهتزازية بسيطة . سنحل هذا المثل باستخدام مبدأ الطاقة .
نكتب طاقة حركة السائل المهتز كله :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (\rho A l) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

حيث m كتلة السائل المهتز كله ، و l طوله ، و ρ كثافته ، و A مساحة مقطع الانبوب ، بينما تمثل dy/dt سرعة السائل اللحظية .

كما نكتب طاقة الوضع الكلية الناتجة عن ارتفاع السائل في الذراع على النحو :

$$U = m'gy = (\rho A y g) y = (\rho A g) y^2$$

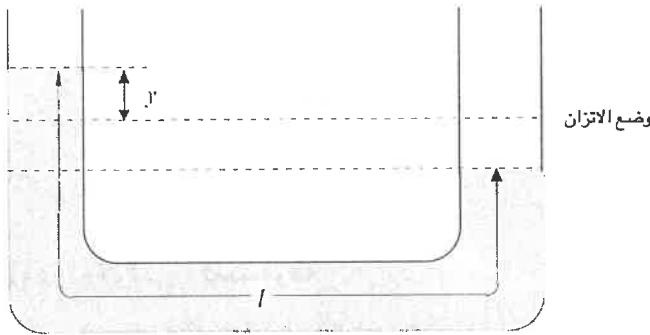
حيث m' كتلة الجزء الذي ارتفع من السائل .

حينئذ تصير الطاقة الكلية مساوية إلى :

$$(63-1) \quad E = \frac{1}{2}(\rho A l) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}(2\rho A g) y^2$$

بمقارنة (63-1) مع (15-1) نستنتج أن السائل في الانبوب يشبه منظومة ميكانيكية معامل كتلتها $\rho A l \leftrightarrow m$ ومعامل مرونتها $2\rho A g \leftrightarrow k$. من ثم نكتب التردد الزاوي مباشرة بالشكل :

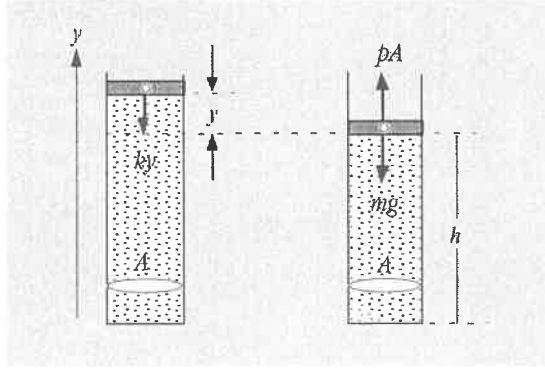
$$(64-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$



الشكل (19-1)

1 - 10 - 4 اهتزاز الأعمدة الهوائية (Air columns)

يعتبر الصوت من التطبيقات المهمة للحركة الاهتزازية حيث تهتز ذرات الهواء بدءاً من نقطة ما ، كالأوتار الصوتية في الحنجرة ، دافعة الذرات المجاورة للاهتزاز وهكذا . سندرس لاحقاً تفاصيل هذه الحركة بينما نتطرق الآن لاهتزاز عمود هوائي (أو أي غاز آخر) في اسطوانة ونوضح كيف تماثل نظام الكتلة والزنبرك تماماً . لنفترض إذاً أن لدينا اسطوانة مساحة مقطعها A ، وارتفاع الغاز فيها h ، ويتحرك فيها مكبس كتلته m



الشكل (20-1)

في وضع الاتزان يتساوى وزن المكبس مع القوة الناتجة عن ضغط الغاز p ، أي أن :

$$mg = pA$$

الآن : إذا ضغطنا المكبس مسافة صغيرة y للأسفل (أو الأعلى) عندئذ سيزداد ضغط الغاز (أو يتناقص) ويختل اتزان القوتين المذكورتين وتصير قوة دفع الغاز أكبر (أو أصغر) من الوزن بمقدار بسيط يساوي :

$$F = A \Delta p$$

ويقوم الغاز بدفع المكبس للأعلى (أو الأسفل) فيتحرك الأخير بذلك الاتجاه ليمر بوضع الاتزان ويتجاوزه بسبب سرعته الابتدائية إلى وضع أعلى (أو أخفض) منه ، وهكذا دواليك . أي أن المكبس يتحرك للأعلى والأسفل حركة اهتزازية بسيطة .

يمكن الوصول لمعادلة الحركة بفرض أن تغير حجم الغاز يتم بشكل كظوم (*adiabatic*) (أي لا يوجد تبادل حراري مع الوسط الخارجي) ، عندئذ تكون العلاقة بين ضغط الغاز وحجمه هي :

$$pV^\gamma = \text{ثابت}$$

حيث γ ثابت ، ومنه :

$$V^\gamma \Delta p + \gamma p V^{\gamma-1} \Delta V = 0$$

أي أن :

$$\Delta p = -\gamma p V^{-1} \Delta V = -\gamma p (1/Ah) A y = -(\gamma p) y = -K y$$

حيث $K = \gamma p$ يدعى المعامل المادي الكظوم للغاز (adiabatic bulk module) .
وتصير محصلة القوى المؤثرة على المكبس :

$$F = -AKy = -ky$$

فهي قوة إرجاع ثابتها :

$$k = AK$$

ويهتز المكبس بتردد :

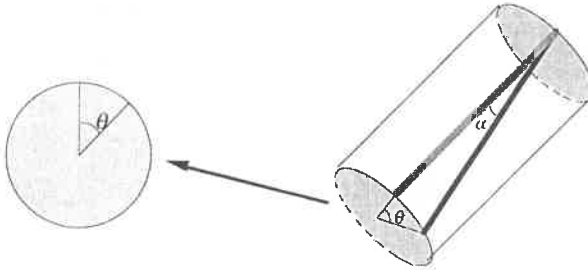
$$(65-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{AK}{m}}$$

1 - 10 - 5 بندول الفتل (Torsional Pendulum)

تتميز الأسلاك المعدنية بمرونتها ومقاومتها لعملية ميكانيكية معينة هي الفتل . وعندما يخضع سلك لقوة فتل ويدور بزاوية صغيرة θ فإن مرونته تعاكس ذلك بعزم τ يتناسب مع θ ، كما في الشكل (21-1) ، فنكتب :

$$\tau = -K\theta$$

حيث K ثابت الفتل (torsional constant) .



الشكل (21-1)

بحسب قانون نيوتن الثاني في الدوران فإن :

$$\tau = -K\theta = I\ddot{\theta}$$

ومنه :

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{I}\theta = 0$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن تردد الاهتزازات هو :

$$(66-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

11-1 الحركة الاهتزازية البسيطة المتخامدة (Damped Oscillations)

درسنا فيما سبق الحركة الاهتزازية البسيطة غير المتخامدة ، أي أن المنظومة المهتزة لاتخضع لأي قوى مقاومة ، إلا أن هذا غير صحيح في معظم الحالات العملية نتيجة وجود الاحتكاك أو اللزوجة . لذلك سندرس في هذه الفقرة كيف يتغير بعد جسم مهتز عن وضع اتزانه إذا خضع لقوى تخامد بالإضافة لقوى الإرجاع .
نفترض أن لدينا جسماً m مربوطةً بزنبرك k على طاولة أفقية خشنة بحيث يخضع لقوة احتكاك متناسبة مع سرعته ، أي أن :

$$(67-1) \quad F_r = -bv = -b\dot{x}$$

حيث b ثابت التناسب الذي يعتمد على طبيعة التماس بين الجسم والسطح ، ونكتب معادلة الحركة :

$$F_r = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

ومنه :

$$(68-1) \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث وضعنا :

$$(69-1) \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$(70-1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

نحصل على الحل العام لمعادلة الحركة (68-1) بكتابة المعادلة المميزة :

$$(71-1) \quad r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

وحلها هو :

بضلا افة لعلا نم وتتند

$$(72-1) \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

من ثم نكتب الحل العام للمعادلة (68-1) بالشكل :

$$(73-1) \quad x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

فحصا II -

واضح من (73-1) أن طبيعة الحركة تعتمد على الجذرين $r_{1,2}$ ، لهذا نميز الحالات التالية :

رقبسا لمية لنسب

بيذا انه نأ نأ ، فمولا

بيقتيا بفيلا قبقفلاه

لنيما نأ رخصتفة

نأ رجا ، فتخصب ر

(أ) - تخامد مفراط (over damping)

إذا كانت قوى التخامد كبيرة جداً ، أي أن b كبيرة بحيث أن :

$$\frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m} \Rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2$$

عندئذ يكون $r_{1,2}$ عددين حقيقيين ويصير حل (68-1) هو :

بسلنتنا تبكاه لمية

$$(74-1) \quad x = e^{-\gamma t} (c_1 e^{qt} + c_2 e^{-qt})$$

حيث وضعنا :

فنه :

$$(75-1) \quad q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

لنعيضو فيه :

بالطبع فإن الحل (74-1) لايمثل حركة اهتزازية ، بل يبتعد الجسم عن وضع الاتزان مسافة عظيمة ثم يتباطأ

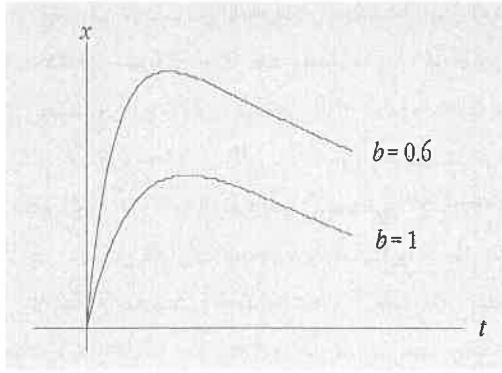
إلى أن يقف . فإذا افترضنا أن شروط البدء هي $x=0$ ، $t=0$ ، عندئذ تؤول (74-1) إلى :

$$(76-1) \quad x = Ae^{-\gamma t} \sinh qt$$

يمثل الشكل (22-1) تغيرات x مع t من أجل قيمتين مختلفتين لمعامل التخامد b حيث نلاحظ أن القيمة

العظيمة لابتعاد الجسم عن وضع الاتزان تتناقص كلما زادت b .

ولعلا راعا رجا رلمصن



الشكل (21-1)

(ب) - تخامد حرج (critical damping)

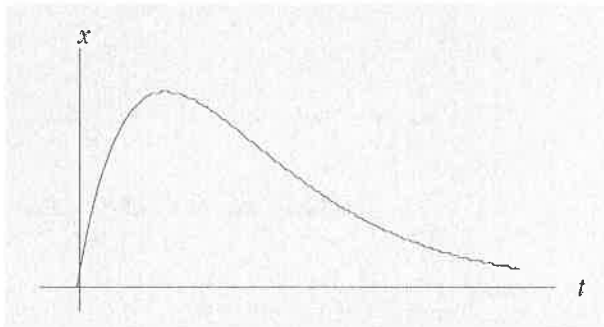
إذا كان معامل التخامد $b = 2m\omega_0$ عندئذ يصير الجذر في (72-1) مساوياً للصفر ويصير للمعادلة (68-1) حلاً مضاعفاً معطى بالعلاقة :

$$(77-1) \quad x = e^{-\gamma t} (A + Bt)$$

يلاحظ من (77-1) أن بعد الجسم عن وضع الاتزان يتزايد لقيمة عظمى ثم يتناقص ببطء حتى يصل إليه. فإذا افترضنا أنه في اللحظة $t=0$ كان $x=0$ وأن $v_0 = V$ ، عندئذ تصير (77-1) على النحو :

$$x = Vte^{-\gamma t}$$

نستنتج من المعادلة الأخيرة أن الجسم يصل إلى أقصى ابتعاد عن الاتزان عندما $v = dx/dt = 0$ ، أي بعد زمن $t = 1/\gamma$ ، كما في الشكل (22-1) . تدعى هذه الحالة تخامداً حرجياً .



الشكل (22-1)

يتم تعديل قيمة ثابت التخماد في العديد من المنظومات الميكانيكية عمداً للوصول للتخامد الحرج بحيث يمكن إزاحة منظومة قابلة للاهتزاز ، ساكنة أصلاً عند وضع معين ، فجأة بواسطة قوة دفع فتبتعد عنه تدريجياً لتصل لموضع اتزان جديد دون أن تتجاوزه أو تهتز حوله . وهذه خاصة هامة في العديد من الأجهزة الكهربائية كأجهزة القياس مثل الأميتر والفولتميتر التي تستخدم للحصول على قراءة ثابتة مباشرة بعد إغلاق المفتاح الكهربائي في دارة كهربائية . في الجلفانوميتر الضوئي (Light Galvanometer) مثلاً تحل مرآة صغيرة محل مؤشر جلفانوميتر حساس للتيارات الصغيرة يسقط عليها شعاع ضوئي دقيق جداً منطلق من مصدر جانبي لينعكس على شاشة أمامية محدداً موضع الاتزان الأصلي θ . عند مرور تيار صغير فجأة في الجلفانوميتر تنحرف المرآة بزواوية متناسبة مع شدته وتقف لحظياً عند موضع جديد مما يؤدي لانحراف الشعاع المنعكس بزواوية تساوي ضعف زاوية انحرافها لتحرك البقعة الضوئية على الشاشة وتستقر عند وضع جديد يبعد عن θ مسافة متناسبة مع دوران المرآة ، أي مع شدة التيار الداخل . فإذا تم معايرة الجهاز مسبقاً يمكن عندئذ استخدامه لقياس تيارات غاية في الصغر نظراً لحساسيته العالية .

(ج) - تخامد ضعيف (under damping)

إذا كان معامل التخماد ضعيفاً بحيث أن :

$$\frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m} \Rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2$$

عندئذ يصير المقدار المجذور في (72-1) سالباً مما يعني أن الحلين $r_{1,2}$ غير حقيقيين ، عندها يؤول الحل العام للمعادلة (68-1) إلى الشكل :

$$(78-1) \quad x = e^{-\gamma t} (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t})$$

حيث وضعنا :

$$(79-1) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

في هذه الحالة يمكن البرهان أن الحل (78-1) يكتب بالشكل :

$$(80-1) \quad x = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

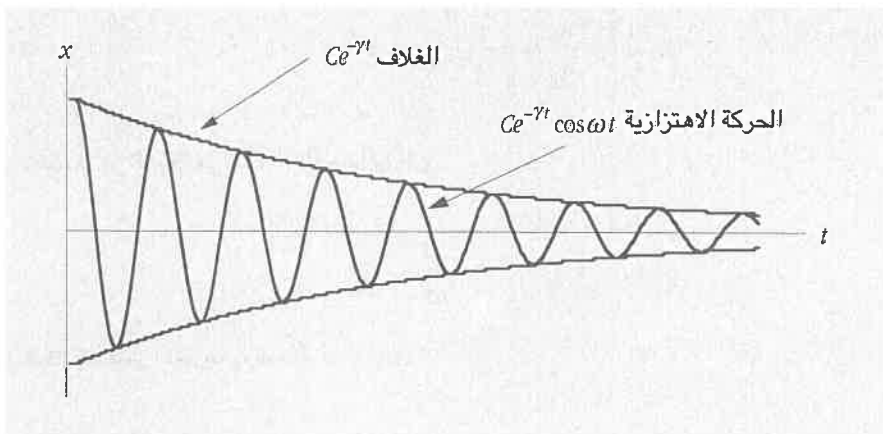
أو :

$$(81-1) \quad x = A(t) \cos(\omega t + \phi)$$

حيث :

$$(82-1) \quad A(t) = Ce^{-\gamma t}$$

تمثل (81-1) حركة اهتزازية $\cos(\omega t + \phi)$ ترددها ω وطورها الابتدائي ϕ وسعتها العظمى $A(t)$ تتناقص أسياً مع الزمن بحسب (82-1). لذلك تكون الحركة اهتزازية متخامدة ، كما في الشكل (23-1) .



الشكل (23-1)

12 - 1 ملاحظات أساس على الحركة الاهتزازية المتخامدة

1 - 12 - 1 التناقص اللغاريتمي للطاقة (logarithmic decrement of energy)

وجدنا سابقاً أن الطاقة الكلية لهزّان بسيط هي :

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

بما أن A متغيرة مع الزمن لذا نحسب معدل تغير الطاقة فنكتب :

$$\frac{dE}{dt} = kA \frac{dA}{dt} = kCe^{-\gamma t} (-C\gamma e^{-\gamma t}) = -kA^2 \gamma = -2\gamma E$$

من ثم نجد معدل التناقص اللغاريتمي للطاقة $-(dE/dt)/E$:

$$(83-1) \quad -\frac{1}{E} \left(\frac{dE}{dt} \right) = 2\gamma = \frac{b}{m}$$

يبدو جلياً من (83-1) كيف يعتمد تناقص الطاقة على معامل التخماد b .

1 - 12 - 2 التناقص اللغاريتمي للسعة (logarithmic decrement of amplitude)

نلاحظ من (82-1) أن السعة العظمى للحركة تتناقص خلال كل دور بنسبة ثابتة لأن :

$$(84-1) \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T}$$

حيث وضعنا دور الحركة في هذه الحالة مساوياً إلى :

$$(85-1) \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

فإذا كتبنا التناقص اللغاريتمي للسعة δ بالشكل :

$$(86-1) \quad \delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

لوجدنا أن :

$$(87-1) \quad \delta = \gamma T = \frac{b}{2m} T$$

فالتناقص اللغاريتمي للسعة ثابت ويعتمد على معامل التخماد b .

1 - 12 - 3 معامل الجودة أو القيمة Q (Quality Factor, Q -value)

تتميز المنظومات المهتزة الخاضعة لقوى تخامد عن بعضها بعضاً بعدد الاهتزازات التي يمكن أن تقوم

بها أي واحدة إلى أن تتناقص طاقتها إلى $1/e$ من قيمتها الابتدائية ، أي عندما :

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{e}$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

و

$$A = A_0 e^{-\gamma t}$$

نكتب E بالشكل :

$$(88-1) \quad E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kC^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}$$

ويكون الزمن اللازم لتخفيض الطاقة إلى $1/e$ من قيمتها الأصلية معطى بـ :

$$\frac{E}{E_0} = e^{-2\gamma t_0} = \frac{1}{e} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2\gamma} = \frac{m}{b}$$

من ثم نجد عدد الاهتزازات التي يقوم بها النظام خلال هذا الزمن (المساوي للزاوية الكلية التي يدورها المتحرك الممثل له على دائرته الطورية) فنكتب :

$$(89-1) \quad Q = \omega t_0 = \frac{\omega m}{b}$$

تسمى Q معامل الجودة أو القيمة - Q .

إذا كان معامل التخميد b صغيراً ، عندئذ يكون :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

وتصير Q مساوية إلى :

$$(90-1) \quad Q \approx \omega_0 t_0 = \frac{\omega_0 m}{b}$$

يمكن في هذه الحالة كتابة السعة العظمى بالشكل :

$$(91-1) \quad A(t) \approx C e^{-\frac{2\omega_0}{Q} t}$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن السعة العظمى بعد n اهتزازة تؤول إلى :

$$A(n) \approx Ce^{-\frac{2\omega_0}{Q} t_n}$$

حيث $t_n = nT \approx n(2\pi/\omega_0)$ ، لذلك تصير العلاقة :

$$(92-1) \quad A(n) \approx Ce^{-\frac{n\pi}{Q}}$$

نستفيد من Q كذلك لمعرفة معدل تناقص الطاقة dE/E لأي منظومة مهتزة ، فنلاحظ أن :

$$-dE = 2\gamma E_0 e^{-2\gamma t} dt = \frac{b}{m} E dt$$

أي أن :

$$-\frac{dE}{E} = \frac{b}{m} dt \Rightarrow -\frac{\Delta E}{E} = \frac{b}{m} \Delta t$$

ونجد الطاقة المفقودة خلال دور واحد بوضع $\Delta t = T$:

$$-\frac{\Delta E}{E} = \frac{b}{m} T = \frac{b}{m} \frac{2\pi}{\omega}$$

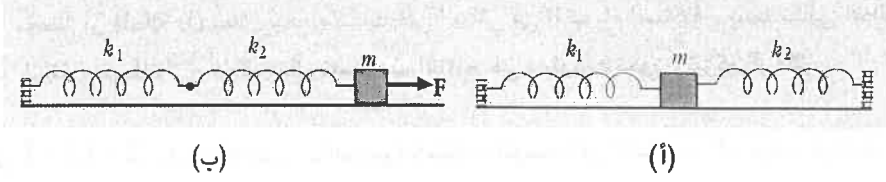
وبحسب تعريف القيمة Q نكتب :

$$(93-1) \quad -\frac{E}{\Delta E} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\text{طاقة النظام}}{\text{الطاقة الضائعة في دورة واحدة}}$$

فكلما كانت Q كبيرة كلما كان تناقص الطاقة ΔE قليلاً ، لذلك تقارن المنظومات المهتزة سواء كانت ميكانيكية أو كهربائية أو غير ذلك بمعامل الجودة لكل منها .

1 - 13 أمثلة محلولة

مثل 1 - 13 - 1 مآررد اهآرازآ المنظومة الموضحة في الشكل (124-1) و (24-1) ب) ؟



الشكل (24-1)

الآل : (أ) نلاحظ أنه إذا أبعدنا m عن الاتزان مسافة صغيرة x فإن طول كل من k_1 و k_2 يتغير بذلك المقدار فيؤثر كل زنبرك بقوة إرجاع $-kx$ ، وتكون محصلة القوى مساوية إلى :

$$F = -k_1x - k_2x = -k_Tx$$

آهآ وضعنا $k_T = k_1 + k_2$. أي يمكن اعتبار الزنبركين زنبركاً واحداً مرونته تساوي مجموع مرونتيهما . ويصير تردد الاهتزازات معطى بـ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

ب) نلاحظ في هذه الحالة أنه عندما نؤثر على m بقوة F ونبعدها مسافة x عن وضع الاتزان فإن k_1 يستطيل بمقدار $x_1 = F/k_1$ بينما يستطيل k_2 بمقدار $x_2 = F/k_2$ بحيث يكون المجموع $x = x_1 + x_2$ ، أي أن :

$$x = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

ومنه :

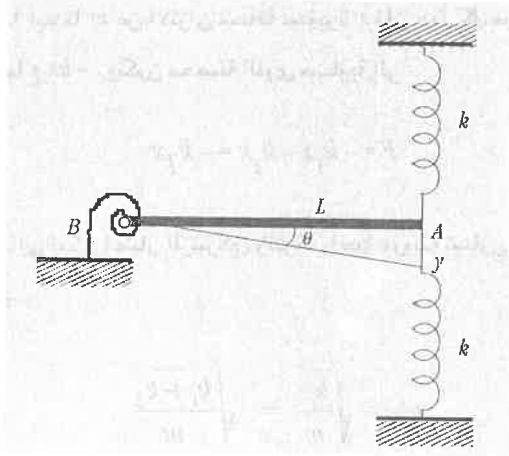
$$F = \left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\right)x = k_Tx$$

آهآ وضعنا $k_T = k_1k_2/(k_1 + k_2)$. فالزنبركين يكافئان في هذه الحالة زنبركاً جديداً مرونته تعطى بالعلاقة السابقة، ويصير تردد الاهتزازات معطى بـ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 / (k_1 + k_2)}{m}}$$

نلاحظ أن الحالة (أ) تماثل جمع مكثفات على التوالي في الكهرباء الساكنة ، بينما تكافئ الحالة (ب) جمع المكثفات على التوازي ، لذلك يمكن تعميم هذه النتائج على منظومات تحوي زنبركين أو أكثر .

مثل 1 - 13 - 2 ماتردد الاهتزازات الصغيرة للمنظومة الموضحة في الشكل (1-25) بفرض أن ثابت المرونة للزنبركين الخطيين عند النهاية A هو k ، وأن ثابت الفتل لزنبرك الفتل عند النهاية B هو κ ؟



الشكل (1-25)

الحل : نلاحظ أنه عندما نزيح نهاية القضيب AB عن الوضع الأفقي للأسفل بمقدار صغير y فإن كل زنبرك يؤثر عليه بقوة إرجاع $F = -ky$ عزمها بالنسبة للنقطة B هو $(ky)L$ - في حين يقوم زنبرك الفتل بالتأثير عليه بعزم إرجاع يتناسب مع الزاوية θ بحيث أن $\tau = -\kappa\theta$. تكون محصلة العزوم على القضيب :

$$\tau_T = -\kappa\theta - 2kyL$$

بفرض أن الاهتزازات صغيرة نضع $y = L\theta$ ، يصير العزم الكلي مساوياً إلى :

$$\tau_T = -(\kappa + 2kL^2)\theta$$

بحسب قانون نيوتن الثاني في الدوران ، نكتب :

$$\tau_T = -(\kappa + 2kL^2)\theta = I_B \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left[\frac{(\kappa + 2kL^2)}{I_B} \right] \theta = 0$$

حيث I_B عزم القصور الذاتي للقضيب بالنسبة لمحور الدوران المار من B عمودياً على الصفحة .
من ثم نكتب تردد الاهتزازات الصغيرة :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(\kappa + 2kL^2)}{I_B}}$$

مثل 1 - 13 - 3 مامعادلة الحركة لسائل لزج في انبوب على شكل حرف U إذا كان قوة التخماد المؤثرة عليه تتناسب مع سرعته اللحظية بثابت $b=0.1$ N.s/m وكان طول السائل الكلي 20 cm ؟ هل يهتز النظام ؟ إذا كان الجواب نعم ماترده عندئذ ومعامل جودته Q ؟
الحل : بيّننا في الفقرة 1-10-3 أن التردد الطبيعي للنظام هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{2(9.8)}{0.2}} \approx 10 \text{ rad / s}$$

لإيجاد معادلة الحركة نلاحظ أن وجود احتكاك مع سطح الانبوب يماثل قوة تخماد لجسم مربوط بزنبك ، فنكتب :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

حيث k معامل مرونة الوسط ويساوي :

$$k = m\omega_0^2 = (\rho AL) (2g / L) = 2\rho Ag$$

وتؤول معادلة الحركة إلى :

$$\ddot{x} + \left(\frac{b}{\rho AL} \right) \dot{x} + (2\rho Ag) x = 0$$

أو

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث وضعنا $\gamma = b/2\rho AL$. بالطبع فإن حل العلاقة السابقة هو :

$$x = e^{-\gamma t} (Ae^{qt} + Be^{-qt})$$

حيث :

$$q = \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-99.4} = i\omega' \approx i\omega_0$$

فالحركة اهتزازية متخامدة ترددها ω' ، حلها هو :

$$x = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) \approx Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

حيث يتحدد الثابتان C و ϕ من الشروط الابتدائية .

ونجد معامل الجودة من العلاقة :

$$Q = \frac{m\omega'}{b} \approx \frac{m\omega_0}{b} \approx 6.3 \text{ rad}$$

نلاحظ هنا أن نسبة الطاقة المخزونة في النظام إلى الطاقة الضائعة في الدورة الواحدة يساوي :

$$\frac{E}{-dE} = \frac{Q}{2\pi} \approx 0.997$$

مسائل

1-1 تعلق كتلة 1 g بزنبرك في وضع شاقولي وتترك لتتهتز بشكل بسيط . ما ثابت مرونة الزنبرك إذا علمت أن سعة الاهتزازة في اللحظة $t=0$ كانت 43.785 cm وتسارعها -1.7514 cm/s^2 ؟

2-1 تهتز منصة أفقية عليها كتلة صغيرة m للأعلى والأسفل بشكل توافقي بسيط بسعة عظمى 5 cm وتردد $10/\pi \text{ Hz}$. في أي لحظة ستطير m عن المنصة وما أعلى ارتفاع ستصل إليه بالنسبة للمنصة نفسها ؟

3-1 تطفو اسطوانة طولها L وقطرها d في سائل كثافته ρ فينغمر منها طول l . ما تردد الاهتزازات البسيطة إذا دفعت الاسطوانة للأسفل مسافة A وتركت لتتهتز ؟ اكتب معادلة الطاقة واستنتج معامل المرونة والكتلة .

4-1 ما دور الاهتزازات الصغيرة لمنظومة مؤلفة من قضيب طوله L معلق من نقطة تقع على بعد $L/3$ من نهايته ؟

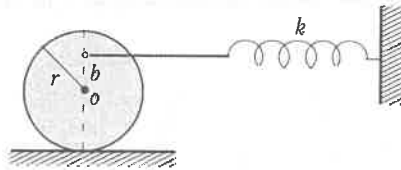
5-1 تتحرك منظومة بشكل اهتزازي بسيط وفق العلاقة: $x = A \sin(\omega t + \phi)$. برهن أن :

$$A = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \quad \text{و} \quad \tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

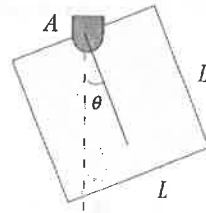
حيث x_0 و v_0 الموقع والسرعة الابتدائيين .

6-1 ما تردد الاهتزازات الصغيرة للصفحة المربعة المتجانسة الموضحة في الشكل (26-1 أ) حول محور عمودي على الورقة ويمر من النقطة A ؟

7-1 ما تردد الاهتزازات الصغيرة للمنظومة الموضحة في الشكل (26-1 ب) بفرض أن عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محورها هو I ؟



الشكل (26-1 ب)



الشكل (26-1 أ)

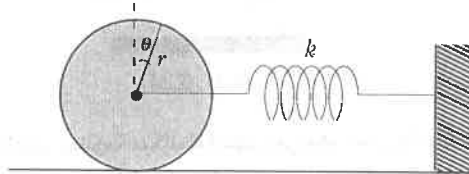
8-1 تخضع منظومة مهتزة لتخامد شديد . حل معادلة الحركة بفرض أن السرعة الابتدائية معدومة .

9-1 تتفرغ مكثفة سعتها C وشحنتها الابتدائية Q_0 خلال مقاومة R . برهن أن شحنتها ستتناقص مع مرور الزمن وجد المعادلة التي تصف ذلك . برهن أن الزمن اللازم للشحنة لتتخفض إلى $1/e$ من قيمتها الابتدائية (يدعى هذا الزمن زمن الاسترخاء (relaxation time) ويرمز له τ) يساوي RC .

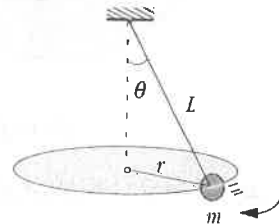
10-1 تعلق كتلة 0.2 kg بزنبيرك 80 N/m بوضع شاقولي وتترك لتتهتز بشكل توافقي بسيط . (أ) اكتب معادلة الحركة مفترضاً وجود قوة احتكاك متناسبة مع السرعة معاملها b (ب) ما قيمة b إذا كانت نسبة تردد التخامد إلى التردد الحري $\sqrt{3}/2$ ؟ (ج) ما قيمة Q لهذه المنظومة وماسعة الاهتزازات بعد 10 أدوار من بدء الحركة ؟

11-1 البندول المخروطي (conical pendulum) : تعلق الكتلة m بنهاية خيط طوله L مثبت من طرفه عند النقطة A ويدور حول محور شاقولي، كما في الشكل (27-1) . وتدور m في دائرة أفقية إذا بقيت θ ثابتة .

ما تردد الحركة؟ الجواب : $\omega = \sqrt{g / L \cos \theta}$



الشكل (28-1)



الشكل (27-1)

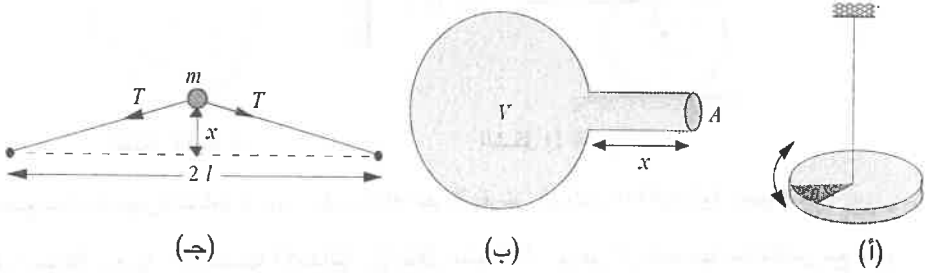
12-1 يُربط قرص متجانس كتلته m ونصف قطره r بزنبيرك ثابتته k ، كما هو موضح بالشكل (28-1) ، ويترك ليتدحرج بدون انزلاق ذهاباً وإياباً مهتماً اهتزازات صغيرة حول وضع الاتزان . ما تردد الحركة إذا علمت أن

عزم قصوره الذاتي حول محور يمر من مركز كتلته هو $mr^2/2$ ؟ الجواب : $\omega = \sqrt{2k/3m}$

13-1 تعطى معادلة الطاقة لأي منظومة اهتزازية بسيطة بالعلاقة :

$$\text{الطاقة} = (1/2)(\text{معامل المرونة}) \times (\text{إزاحة})^2 + (1/2)(\text{معامل الكتلة}) \times (\text{سرعة})^2$$

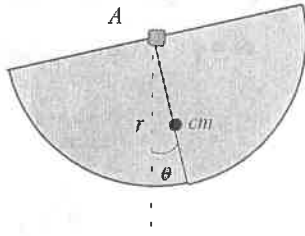
اكتب معادلة الطاقة للمنظومات الموضحة في الأشكال (29-1) وجد معادلة الحركة بوضع $dE/dt = 0$.
(أ) قرص فتل ، (ب) إناء غاز ، (ج) كتلة معلقة عند منتصف حبل مشدود .



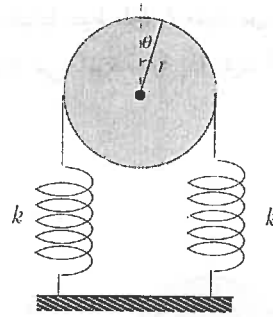
الشكل (29-1)

14-1 ماتردد الاهتزازات الصغيرة للاسطوانة الموضحة بالشكل (30-1) إذا علمت أن عزم قصورها الذاتي حول محور يمر من مركزها هو 1.13 kg.m^2 وأن ثابت مرونة كل زنبرك هو 175 N/m ؟

15-1 ماتردد الاهتزازات الصغيرة لنصف القرص المتجانس الموضح بالشكل (31-1) عندما يهتز حول مار من A عمودياً على الورقة ؟ (أين مركز الكتلة ؟) . الجواب : $\sqrt{8g/3\pi r}$



الشكل (31-1)



الشكل (30-1)

16-1 اعتبر منظومة ميكانيكية مهتزة ترددها الحر ω_0 والمتخامد ω . (أ) برهن أن $Q = 500$ عندما يكون

$\omega_0^2 - \omega^2 = 10^{-6} \omega_0^2$ وبرهن أن التناقص اللغاريتمي للسعة $\delta = \pi/500$ (ب) جد معامل المرونة ومعامل التخامد للمنظومة إذا علمت أن معامل كتلتها 10^{-10} kg وتردها الحر 10^6 rad/s . (ج) جد طاقة المنظومة وزمن الاسترخاء إذا علمت أن سعة الحركة في اللحظة $t=0$ هي 1 cm وبرهن أن مقدار الطاقة المفقودة في الدورة الأولى $2\pi \times 10^{-5} \text{ J}$.

17-1 برهن أن معامل الجودة في دائرة $L-R-C$ متسلسلة هو $Q = \omega_0 L/R$ حيث $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

18-1 تعلق كتلة M بنهاية زنبرك طوله l وكتلته m وثابت مرونته k بوضع شاقولي . (أ) برهن أن الطاقة الحركية لعنصر من الزنبرك طوله dy يبعد مسافة y عن نقطة التثبيت هي :

$$dK = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{l} dy \right) \left(\frac{y}{l} v \right)^2$$

حيث v سرعة الكتلة M . (ب) كامل العلاقة السابقة بالنسبة لطول الزنبرك وبرهن أن الطاقة الحركية الكلية للزنبرك هي $mv^2/6$ (ج) اكتب معادلة الطاقة الكلية للمنظومة وبرهن أن ترددها الزاوي هو $\omega = (k/(M+m/3))^{1/2}$.

19-1 تتناسب شدة الحركة الاهتزازية للأمواج مع مربع سعتها . برهن أن شدة الحركة الاهتزازية الناتجة عن تراكب اهتزازتين لهما نفس السعة A والتردد ω وبينهما فرق في الطور δ هي $I = 4A^2 \cos^2 \delta / 2$.

20-1 يتحرك جسم بحيث تتغير إحداثياته وفق العلاقتين : $x = A \cos \omega t$ و $y = B \sin \omega t$. (أ) برهن أن معادلة المسار الذي يتحرك عليه الجسم قطع ناقص نصف قطريه هما A و B . (ب) جد معادلة الطاقة الكلية وبرهن أن معادلة المسار توافق معادلة طاقة ثابتة . (ج) برهن أن المقدار $m(x\dot{y} - y\dot{x})$ ثابت وبين معناه الفيزيائي .

21-1 برهن أن التغير النسبي في التردد الطبيعي ω_0 لمنظومة اهتزازية متخامدة يساوي $1/8 Q^2$. (مساعدة : ضع $\omega \approx \omega_0$ حيثما يلزم !)

22-1 يتألف بندول بسيط من كتلة m معلقة بخيط طوله l ويهتز اهتزازات صغيرة السعة . (أ) برهن أنه إذا تغير طول الخيط ببطء بينما بقيت سعة الحركة θ ثابتة فإن الشغل اللازم لإنقاص الطول بمقدار Δl هو $mg\Delta l$ وأن تغير الطاقة الكلية هو : $\Delta E = (\frac{1}{2} mg \bar{\theta}^2 - ml \bar{\theta}^2) \Delta l$ ، حيث $\bar{\theta}$ و $\bar{\theta}$ متوسط θ و θ خلال تناقص الخيط . (ب) برهن أنه إذا تغيرت θ مع الزمن وفق العلاقة $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ فإن الطاقة الكلية للبندول تغطي بالعلاقة :

$$E = ml^2 \omega^2 \theta_0^2 / 2 = mgl \theta_0^2 / 2 \quad \text{(ج) برهن من (أ) و (ب) أن: } \Delta E / E = -\Delta l / 2l = \Delta v / v \quad \text{حيث } v \text{ التردد .}$$

23-1 يلاحظ أنه عندما تُقرع النغمة "C" في منظومة مؤلفة من بيانو فإن طاقة الحركة الاهتزازية تتناقص إلى نصف قيمتها الابتدائية خلال زمن مقداره 1 s . (أ) ما معامل الجودة لهذه المنظومة المنظومة إذا كان تردد النغمة "C" هو 256 Hz ؟ (ب) بفرض أن تردد النغمة التالية هو 512 Hz وتستغرق نفس الزمن لتفقد نفس النسبة من الطاقة ، ما معامل الجودة في هذه الحالة ؟

24-1 تتألف منظومة اهتزازية متخامدة من كتلة 0.1 kg مربوطة بزنبرك 0.9 N/m وتهتز في وسط لزج متأثرة بقوة احتكاك متناسبة مع السرعة اللحظية ثابتها b . ما معامل الجودة للمنظومة إذا تناقصت طاقتها إلى $1/e$ من قيمتها الابتدائية خلال أربع ثواني وما قيمة b ؟

25-1 تنص النظرية الكهرمغناطيسية التقليدية على أن كل شحنة q لها تسارع a تشع طاقة بمعدل $Kq^2 a^2 / c^3$ حيث K ثابت يساوي $9 \times 10^9 \text{ N.m/C}^2$ ، و c سرعة الضوء . (أ) ما معدل الطاقة التي يشعها إلكترون يهتز على

خط مستقيم بسعة A وتردد ν ؟ (ب) مامعامل الجودة ؟ (ج) ماعدد الاهتزازات التي سيقوم بها الإلكترون إلى أن يفقد نصف طاقته الابتدائية ؟ (د) قدر القيمة Q من أجل طول موجي في منتصف الطيف الضوئي المرئي .

26-1 تخامد كولوم (*Coulomb damping*) : يتحرك جسم m مربوط يزنبك ثابتته k على طاولة أفقية خشنة معامل الاحتكاك الحركي بينها وبينه μ . ادرس حركة الجسم إذا بدأ الحركة من السكون من نقطة تبعد x_0 عن وضع الاتزان وبرهن أن دور الحركة لايتغير نتيجة قوة التخامد الثابتة بالقيمة والتي تدعى بتخامد كولوم .

27-1 يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة على محور السينات بسعة عظمية A . برهن أن احتمال وجوده بين x و $x + dx$ يساوي :

$$\frac{dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

الاهتزازات القسرية

(Forced Oscillation)

1-2 تمهيد :

درسنا في الفصل السابق الحركة الاهتزازية لمنظومة حرة أي غير خاضعة لأي قوة خارجية محرّكة لها باستثناء القوى الطبيعية الناتجة عن طبيعة النظام المهتز نفسه ، كمرونة الزنبرك لنظام الكتلة والزنبرك ، أو وزن الكتلة لنظام البندول البسيط . ووجدنا أن خواص الحركة الاهتزازية الحرة ، كالنور والتردد ، تتعلق بطبيعة النظام المهتز وليس لنا أي خيار فيها إلا إذا غيرنا أجزاء النظام نفسه . كما وجدنا أن هذه الاهتزازات الحرة ستلاشى في النهاية نتيجة وجود قوى تخامد مهما كانت صغيرة . إلا أن التطبيقات العملية للأنظمة المهتزة ، كالآلات وغيرها ، تتطلب اهتزازات دائمة ، ذات نور وتردد معينين ، للوصول لغاية معينة (كصناعة ساعة يدوية مثلاً) ، هذا لا يتم إلا بتوليد هذه الاهتزازات بوساطة قوى خارجية متغيرة مع الزمن . تدعى الاهتزازات الناتجة في هذه الحالة اهتزازات قسرية ، أي مدفوعة قسراً بمؤثر خارجي .

سندرس في هذا الفصل الحركات الاهتزازية المدفوعة بقوة خارجية متغيرة مع الزمن بشكل جيبي ، كمحرك السيارة أو مولد التيار المتردد ، ونستخرج معادلات الحركة وحلها العام ، وندرس كيف ترتبط سعة الاهتزازات بثوابت القوة الخارجية من سعة وتردد . كما ندرس الطاقة التي تستهلكها المنظومة في كل دور ونقارنها بالطاقة التي تعطيها إياها القوة الخارجية خلال ذلك ونبحث عن الشروط اللازمة لجعل الطاقة الضائعة أقل ما يمكن .

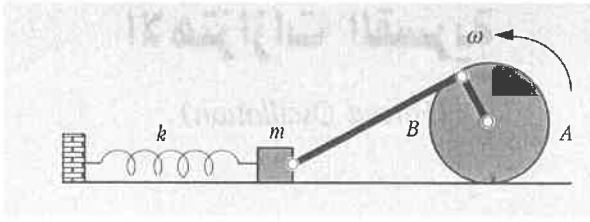
2-2 الاهتزازات القسرية غير المتخامدة

سندرس أولاً الاهتزازات القسرية لمنظومة مثالية غير خاضعة لقوى تخامد ، ونفترض أن القوة الخارجية المؤثرة عليها تتغير جيبياً مع الزمن وفق العلاقة :

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (1-2)$$

يمثل الشكل (1-2) مثلاً على جسم كهذا حيث تتحرك الكتلة m المربوطة بالزنبرك k نتيجة دوران القرص فنلاحظ أن القوة تصير أكبر مايمكن بالاتجاه الموجب عندما يكون المحور D عند الموضع A . وأكبر مايمكن بالاتجاه السالب عندما يصير المحور D عند الموضع B ، أما فتدل على السرعة الزاوية لدوران القرص . كما نلاحظ أن الكتلة m تخضع لقوتين هما الإرجاع الناتجة عن مرونة الزنبرك والقوة الخارجية الناتجة عن ارتباطها بالمحور D ، حيث نهمل قوى التخامد حالياً . من ثم نكتب معادلة الحركة لها على النحو :

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2-2)$$



الشكل (1-2)

يمكن فهم حركة المنظومة وصفيًا بملاحظة أنه لو تحركت بشكل حر لاهتزت بتردها الطبيعي ω_0 ، إلا أن القوة الخارجية ستفرض عليها قسراً أن تهتز بتردها هي ω . لذلك فإننا نتوقع أن تكون الحركة العامة للمنظومة مرتبطة بهذين الترددين بشكل أو بآخر . بالفعل فإن الحل العام لمعادلة الحركة (2-2) سيشمل كلاً منهما ، كما سنرى بعد قليل ، وبما أن قوى التخماد التي تؤثر على المنظومة في الحالة العامة تؤدي لتلاشي الاهتزازات الحرة ، أي تلك المرتبطة بـ ω_0 ، لذا تؤول اهتزازات المنظومة لتلك المتعلقة بـ ω فقط . تسمى المرحلة الزمنية التي يظهر فيها الترددان ω_0 و ω معاً الحالة الانتقالية (transient state) ، بينما تدعى المرحلة التي لا تبقى فيها إلا الاهتزازات المرتبطة بـ ω الحالة الدائمة (steady state) وستكون محور اهتمامنا في هذه الفقرة ، ونعود للمرحلة الانتقالية فيما بعد .

الآن : لحل المعادلة (2-2) نكتبها بالشكل :

$$(3-2) \quad m\ddot{x} + kx = F_0 e^{j\omega t}$$

بما أن :

$$(4-2) \quad e^{j\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

حيث i العدد التخيلي (imaginary number) $\sqrt{-1}$ ، لذا فإن القوة F تمثل الجزء الحقيقي من الطرف الأيمن من (3-2) . بالتالي فإننا نأخذ الجزء الحقيقي من الحل النهائي لسعة الحركة x عندما نتوصل إليه . يفرض أن المنظومة ستتهتز في الحالة الدائمة بنفس تردد القوة الخارجية ، نكتب الحل بالشكل :

$$(5-2) \quad x = Ae^{j\omega t}$$

بالتعويض في (3-2) نجد :

$$-m\omega^2 Ae^{j\omega t} + Ake^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t}$$

ومنه :

$$(6-2) \quad A = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

حيث وضعنا التردد الطبيعي :

$$(7-2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

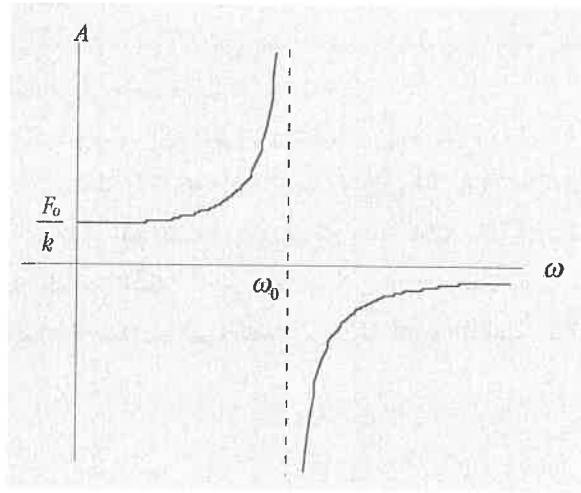
ويصير حل معادلة الحركة (3-2) هو :

$$(8-2) \quad x = A \cos \omega t$$

حيث أخذنا الجزء الحقيقي من $e^{i\omega t}$.

يتضح من (6-2) أن السعة العظمى للحركة A تعتمد على قيمة تردد القوة الخارجية ω ، كما في الشكل

(2-2) ، فتصير لانتهائية إذا كان $\omega = \omega_0$.



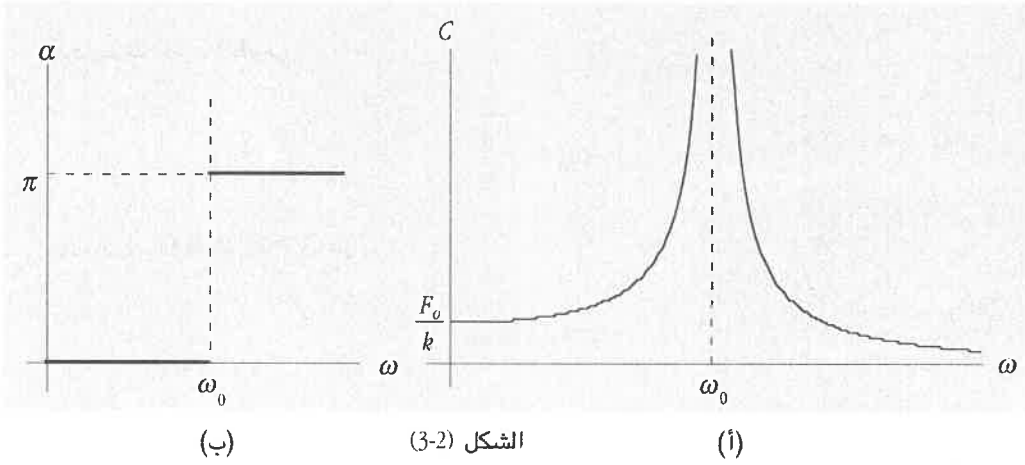
الشكل (2-2)

نلاحظ من الشكل (2-2) أيضاً أن A موجبة أي أن x و F متوافقتان في الطور إذا كان $\omega < \omega_0$ ، بينما تصير A سالبة ، أي أن x و F متعاكستان في الطور إذا كان $\omega > \omega_0$ ، لذلك يمكن كتابة الحل العام بالشكل :

$$(9-2) \quad x = C \cos(\omega t + \alpha)$$

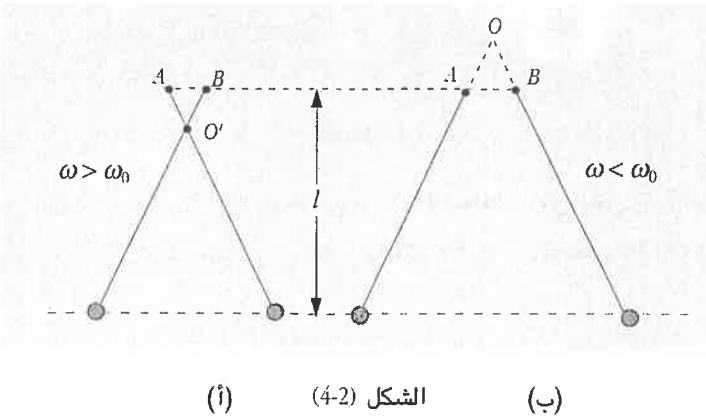
حيث $C = |A|$ ، بينما لـ α قيمتان فقط: $\alpha = 0$ عندما $\omega < \omega_0$ و $\alpha = \pi$ عندما $\omega > \omega_0$.

يوضح الشكلان (3-2 أ) و (3-2 ب) تغيرات كل من C و α مع تردد القوة الخارجية ω .



من الواضح أنه لا يوجد معنى فيزيائي للتغير المفاجئ لـ α إذا تغير تردد القوة الخارجية ω من قيمة أصغر من التردد الطبيعي ω_0 للمنظومة إلى قيمة أكبر منها . كما أن بلوغ السعة العظمى A قيمة لانهائية عندما يصير الترددان متساويين غير منطقي عملياً . سنرى كيف تزول هذه الملاحظات عندما نأخذ قوى التخميد (الموجودة دائماً في أي منظومة مهتزة) بعين الاعتبار .

من أفضل الأمثلة لتوضيح تغير فرق الطور بين اهتزازات المنظومة والقوة الخارجية من توافق إلى تعاكس أن ندرس حركة بندول بسيط طوله l ، وكتلته m ، وترده الطبيعي ω_0 ، وتهتز نقطة تعليقه أفقيًا بتردد معين ω . إذا كان $\omega < \omega_0$ عندئذ تتوافق اهتزازات البندول مع نقطة التعليق ويبدو الأول كأنه معلق بنقطة أعلى من نقطة التعليق الحقيقية ، كما في الشكل (4-2 أ) . أما إذا كان $\omega > \omega_0$ عندئذ تصير اهتزازات البندول معاكسة لنقطة التعليق ويبدو الأول كأنه معلق من نقطة أخفض من نقطة التعليق الحقيقية ، كما في الشكل (4-2 ب) .



2-3 الاهتزازات القسرية المتخامدة

نعتبر الآن منظومة ميكانيكية حقيقية مؤلفة من جسيم m مربوط بزنبك k ، يخضع لقوة خارجية دافعة متغيرة جيبياً مع الزمن حسب العلاقة (1-2) ، ولقوة تخامد متناسبة مع سرعته اللحظية $F_r = -bv$.
نكتب معادلة حركة m بالشكل :

$$m\ddot{x} = -kx - bv + F_0 \cos \omega t = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

أو

$$(10-2) \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 / m) \cos \omega t$$

حيث وضعنا التردد الطبيعي :

$$(11-2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

و

$$(12-2) \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

نلاحظ أن العلاقة (10-2) هي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية ، يتألف حلها العام من جزأين ؛ حل عام بدون طرف ثان ، وحل خاص بطرف ثان .
لقد قمنا في الفصل السابق بإيجاد الحل العام بدون طرف ثان على النحو :

$$(13-2) \quad x = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi')$$

حيث افترضنا أن المنظومة خاضعة لتخامد ضعيف نسبياً (*under damping*) ، ووضعنا :

$$(14-2) \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

أما الحل الخاص بطرف ثان فنجدّه بإعادة كتابة (9-2) بالشكل :

$$(15-2) \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

وأخذ الجزء الحقيقي منه ، كما فعلنا في الفقرة السابقة .

الآن : بما أن الحل الخاص يظهر نتيجة وجود القوة الخارجية لذلك نفترض أن الجسم سيهتز بترددها ω ، ونكتب الحل الخاص بالشكل :

$$(16-2) \quad x = A e^{i\omega t}$$

بتعويض هذا الحل في (14-2) والاختصار نجد :

$$(17-2) \quad A[-m\omega^2 + ib\omega + k] = F_0$$

ومنه :

$$(18-2) \quad A = \frac{F_0}{(-m\omega^2 + k) + ib\omega}$$

أو :

$$(19-2) \quad A = \frac{F_0}{i\omega[b + i(m\omega - k/\omega)]} = -\frac{iF_0}{\omega Z}$$

حيث وضعنا :

$$(20-2) \quad Z = b + i(m\omega - k/\omega)$$

تسمى Z المعرفة بالعلاقة (20-2) **ممانعة** (*impedance*) المنظومة ، ونعرفها بأنها القوة اللازمة لإعطاء النظام واحدة السرعة ، أي :

$$(21-2) \quad Z = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{v}}$$

سنرى أهمية هذه الكمية بعد قليل .

يمكن كتابة Z بالشكل :

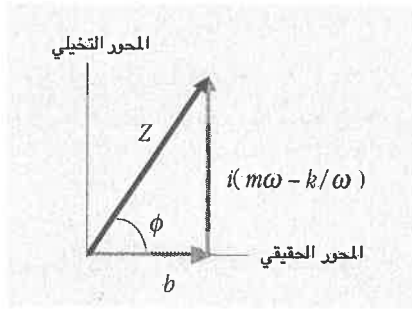
$$(22-2) \quad Z = Z_m e^{j\phi}$$

حيث يمكن معرفة Z_m والزاوية ϕ بسهولة برسم المتجهين المتعامدين b و $(m\omega - k/\omega)$ ، كما في الشكل (5-2)
فتجد :

$$(22-2) \quad Z_m = \sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}$$

و

$$(23-2) \quad \tan \phi = \frac{m\omega - k/\omega}{b}$$



(5-2) الشكل

بتعويض Z في (19-2) نجد :

$$A = -\frac{iF_0 e^{-i\phi}}{\omega Z_m}$$

ويصير الحل الخاص (16-2) :

$$x = -\frac{iF_0 e^{-i\phi}}{\omega Z_m} e^{j\omega t} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m} e^{j(\omega t - \phi)}$$

بأخذ الجزء الحقيقي منه ، نجد :

$$(25-2) \quad x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

هذا هو الحل الخاص المنشود .

أخيراً نكتب الحل العام الكلي لمعادلة الحركة (9-2) على النحو :

$$(26-2) \quad x = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi') + \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

نلاحظ هنا مايلي :

- 1- إن الحد الأول من الطرف الأيمن من (26-2) ، الذي يمثل الحل العام بدون طرف ثان ، يتلاشى تدريجياً مع مرور الزمن إلى أن يصير مهملاً بالمقارنة مع الحد الثاني الذي يمثل الحل الخاص بطرف ثان . لذلك يطلق على الحد الأول اسم حل المرحلة الانتقالية (transient period) ، أي المرحلة التي تنتقل فيها المنظومة من السكون إلى أن تصل للحالة الدائمة . سنهمل المرحلة الانتقالية حالياً لعدم أهميتها .
- 2- بما أن المنظومة ستتحرك وفق الحل الخاص بعد فترة زمنية قصيرة نسبياً ، وستبقى كذلك مادامت القوة الخارجية مطبقة ، لذا يدعى هذا الحل الحالة الدائمة (steady state) ، لأننا نفترض أن زمن تأثير القوة t أكبر بكثير من زمن استرخاء النظام τ . كما أن معامل الجودة Q لمعظم الأنظمة المتخامدة ، ذات الأهمية العملية ، صغير جداً ، أي أن عدد الدورات التي يقوم بها النظام بنفسه دون دفع خارجي قليل ، لذلك يمكن إهمال زمن الاسترخاء بالمقارنة مع زمن تأثير القوة ، وهذا مادعانا لإهمال الحل الانتقالي والتركيز على حل المرحلة الدائمة .

4-2 فرق الطور بين القوة الدافعة ومتغيرات الحركة

وجدنا في الفقرة السابقة أن الحل الدائم لحركة منظومة ترددها الطبيعي ω_0 ، مدفوعة بقوة خارجية ترددها ω ، يكتب بالشكل :

$$(27-2) \quad x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) = A(\omega) \sin(\omega t - \phi)$$

حيث وضعنا :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\omega Z_m}$$

بينما كتبنا القوة الدافعة بالشكل :

$$(28-2) \quad F = F_0 \cos \omega t$$

بملاحظة أن :

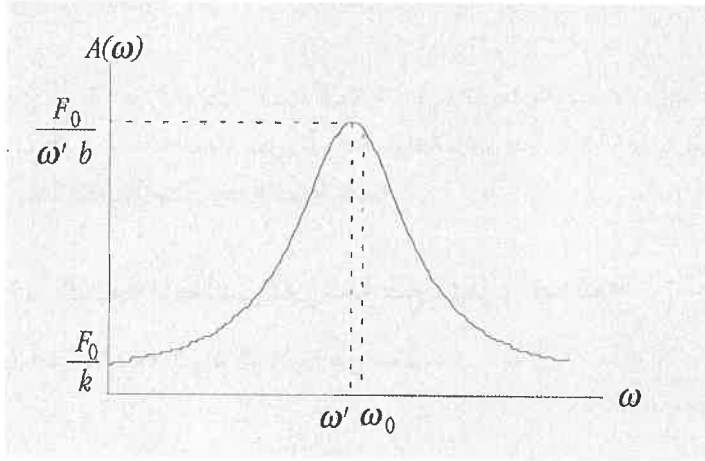
$$\sin \theta = \cos(\theta - \pi / 2)$$

نستنتج عندئذ أن فرق الطور بين القوة F والسعة اللحظية للمنظومة x يساوي :

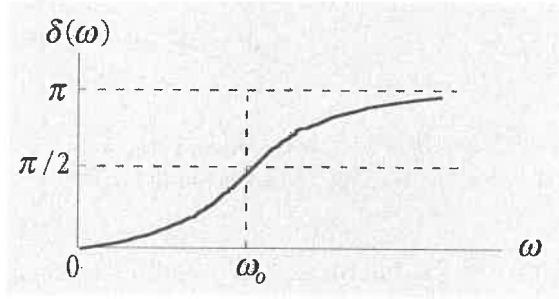
$$(29-2) \quad \delta = \phi + \frac{\pi}{2}$$

يوضح الشكل (7-2) كيف تتغير السعة العظمى لـ x مع الزمن t ، بينما يوضح الشكل (8-2) كيف يتغير فرق

الطور ϕ مع تردد القوة الخارجية ω .



الشكل (7-2)



الشكل (8-2)

نلاحظ من (29-2) أنه إذا كانت $\delta = \pi/2 \Leftarrow \phi = 0$ ، أي أنه عندما تكون القوة الخارجية أكبر ما يمكن بالقيمة المطلقة فإن السعة اللحظية تصير مساوية للصفر (والعكس بالعكس) . بحسب (23-2) فإن هذا يتم عندما :

$$(30-2) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

أي عندما يتوافق تردد القوة الخارجية مع التردد الطبيعي للمنظومة .

من جهة أخرى نجد فرق الطور بين السرعة اللحظية للمنظومة والقوة الدافعة بكتابة :

$$(31-2) \quad v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\omega t - \phi)$$

أي أن فرق الطور بين F و v يساوي ϕ .

في الحالة التي تكون المنظومة متجاوبة مع القوة الخارجية ، أي $\phi = 0$ تصير السرعة والقوة متفتتان في الطور .

تمثل الشحنة Q في الدارات الكهربائية السعة اللحظية x في المنظومات الميكانيكية ($x \leftrightarrow Q$) بينما يمثل التيار سرعة الجسم المهتز ($v \leftrightarrow I$) . فعندما تكون السرعة متوافقة بالطور مع القوة الخارجية فإن التيار يكون أكبر ما يمكن في تلك الحالة بينما تكون قيمة الشحنة معدومة .

2- 5 تغيرات السعة العظمى للإزاحة مع القوة الدافعة :

كتبنا في الفقرة 2-2 الإزاحة اللحظية للمنظومة على النحو :

$$(32-2) \quad x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أن السعة العظمى للإزاحة هي :

$$(33-2) \quad A = \frac{F_0}{\omega Z_m} = \frac{F_0}{\omega \sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}}$$

يظهر من (33-2) كيف تتغير السعة العظمى مع تردد القوة الخارجية ω ، إذ نلاحظ أنه عندما $\omega \rightarrow 0$ فإن $Z_m \rightarrow k$ ، أي أن $A \rightarrow F_0/k$. أما عندما $\omega \rightarrow \infty$ فإن $A \rightarrow 0$. أي تتغير السعة العظمى من قيمة محددة F_0/k إلى الصفر مارة بنهاية عظمى عندما يصير المقام في (33-2) أصغر ما يمكن ، أي عندما يكون :

$$\frac{d(\omega Z_m)}{d\omega} = 0$$

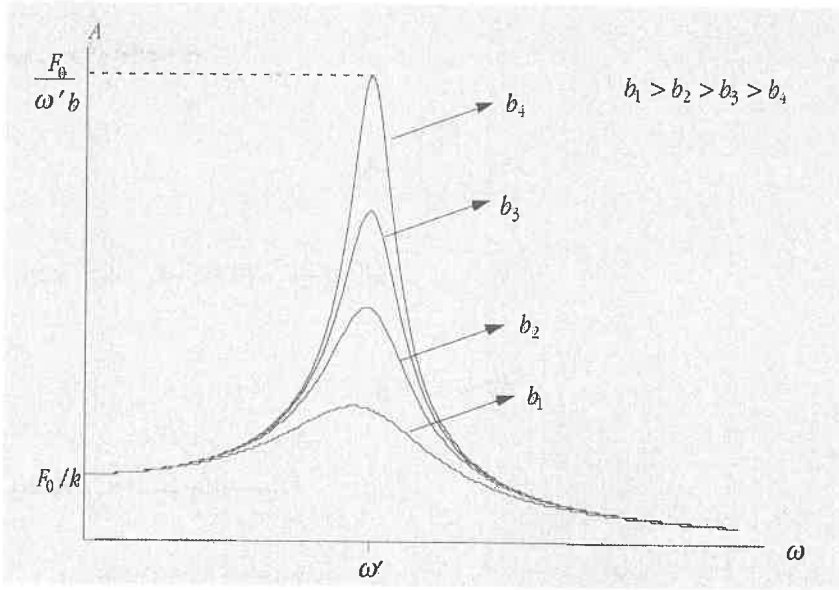
بتعويض Z_m من (22-2) والاشتقاق والإصلاح نجد :

$$(34-2) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} = \omega'$$

وتصير قيمة السعة العظمى في هذه الحالة (انظر (27-2)) :

$$(35-2) \quad A_{max} = \frac{F_0}{\omega' b}$$

أي أن قيمة A_{max} تتناقص بتزايد معامل التخماد b وهذا متوقع بالطبع .
يوضح الشكل (9-2) كيف تتغير A_{max} من أجل قيم مختلفة لـ b .



الشكل (9-2)

6-2 تغيرات السعة العظمى للسرعة مع تردد القوة الخارجية

وجدنا أن السرعة اللحظية لـ m تعطى بالعلاقة :

$$(36-2) \quad v = v_0 \cos(\omega t - \phi)$$

حيث تعطى السعة العظمى للسرعة v_0 بالعلاقة :

$$(37-2) \quad v_0 = \frac{F_0}{Z_m} = \frac{F_0}{\sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}}$$

يتضح لنا من (37-2) أن v_0 تتغير مع ω بحيث أنه عندما يكون تردد القوة الخارجية مساوياً للصفر ($\omega \rightarrow 0$) أو يصير كبيراً جداً ($\omega \rightarrow \infty$) فإن $v_0 \rightarrow 0$ ، أي أن السعة العظمى للسرعة ستتم حتماً بنهاية عظمى عند قيمة ما لتردد القوة الخارجية وذلك عندما تكون Z_m أصغر ما يمكن. نجد هذا التردد بوضع:

$$\frac{dZ_m}{d\omega} = 0$$

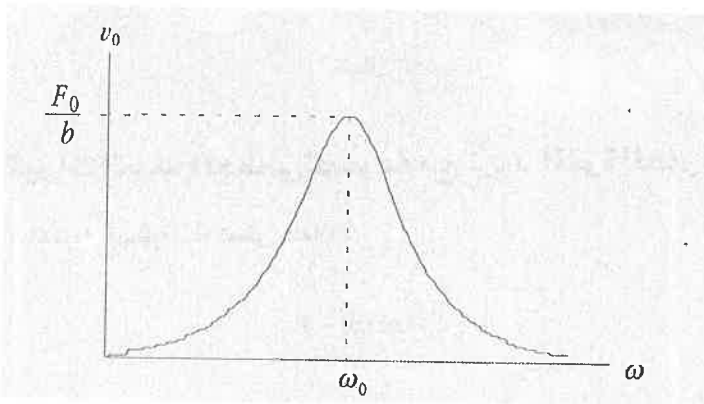
بتعويض Z_m والاشتقاق نجد:

$$(38-2) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

وتصير السعة العظمى للسرعة عندها مساوية إلى:

$$(39-2) \quad (v_0)_{max} = \frac{F_0}{b}$$

يوضح الشكل (10-2) تغيرات v_0 مع ω .



الشكل (10-2)

7-2 القدرة الناتجة عن القوة الدافعة والقدرة الضائعة بالتخامد

نعلم أن القدرة اللحظية الناتجة عن قوة F مؤثرة على جسم سرعته اللحظية v تعطى بالعلاقة :

$$(40-2) \quad p = F v$$

فإذا اعتبرنا أن القوة الخارجية متغيرة مع الزمن بحسب العلاقة (2-1) لوجدنا :

$$(41-2) \quad p = (F_0 \cos \omega t) \left[\frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi) \right]$$

ويكون متوسط القدرة خلال دور واحد :

$$p_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{F_0^2}{Z_m T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) \, dt$$

أي أن :

$$(42-2) \quad P_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi$$

بنفس الشكل نكتب القدرة الضائعة نتيجة التخامد :

$$(43-2) \quad p_r = F_r v = (bv)(v) = \frac{bF_0^2}{Z_m^2} \cos^2(\omega t - \phi)$$

أي أن :

$$(44-2) \quad (p_r)_{av} = \frac{bF_0^2}{2Z_m^2}$$

وبما أن :

$$(45-2) \quad \cos \phi = \frac{b}{Z_m}$$

لذلك نكتب متوسط القدرة الضائعة خلال دور واحد :

$$(46-2) \quad (p_r)_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi$$

فالقدره المغذاه للمنظومه من القوه الدافعه خلال دور تساوي تلك الضائعه نتيجه قوى التخماد، لهذا نقول إن المنظومه في حاله دائمه (steady state)، كما يطلق على $\cos \phi$ اسم معامل القدره (power factor).

8-2 تغير القدره المتوسطه مع تردد القوه الخارجيه

نلاحظ من (42-2) أن $p_{av} = 0$ عندما تنتهي ω إلى الصفر أو اللانهايه بينما تصير أكبر مايمكن عندما :

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ويكون عندها :

$$(47-2) \quad (P_{av})_{max} = Q \frac{F_0^2}{2m\omega_0}$$

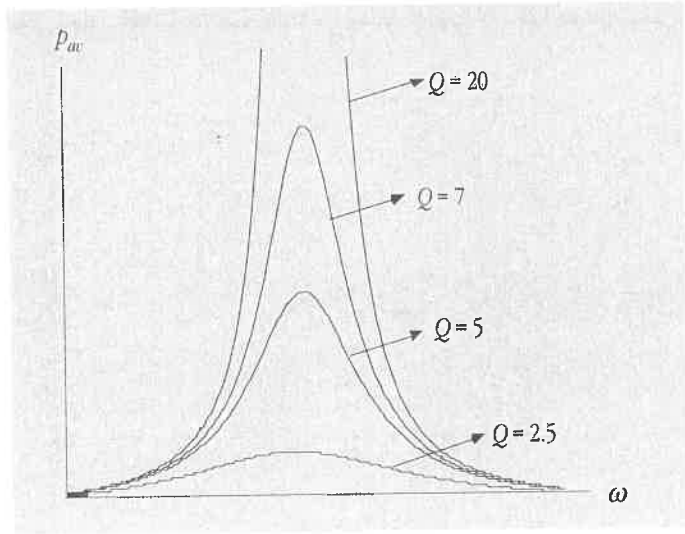
نستنتج مما تقدم أن المنظومه المهترزه تمتص أكبر قدر من الطاقه من القوه الخارجيه الدافعه لها عندما يكون للأخيره نفس التردد الطبيعي للمنظومه، أي عندما يكون هناك تجاوب بين الإثنتين. بينما تصير القدره الممتصه معدومه كلما ابتعد تردد القوه الخارجيه عن التردد الطبيعي للمنظومه.

يوضح الشكل (11-2) تغير القدره المتوسطه مع تردد القوه الخارجيه، الذي يسمى منحني تجاوب القدره (power resonance curve)، من أجل قيم مختلفه لمعامل الجوده Q . يمكن حساب عرض منحني التجاوب $\Delta\omega$ الذي يساوي الفرق بين قيمتي تردد القوه الخارجيه الذين تصير عندهما القدره المتوسطه نصف قيمتها العظمى، أي عندما يكون :

$$(48-2) \quad \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{2b}$$

بوضع $\cos \phi = b/Z_m$ ، فنجد :

$$(49-2) \quad \frac{bF_0^2}{2Z_m^2} = \frac{F_0^2}{4b} \Rightarrow 2b^2 = Z_m^2$$



الشكل (11-2)

بتعويض Z_{in} والإصلاح تؤول (49-2) إلى :

$$(50-2) \quad (m\omega - k / \omega)^2 = b^2$$

للمعادلة الأخيرة حلان :

$$(51-2) \quad (m\omega_1 - k / \omega_1) = +b$$

و

$$(52-2) \quad (m\omega_2 - k / \omega_2) = -b$$

فإذا ضربنا (51-2) بـ ω_1 و(52-2) بـ ω_2 وطرحنا الناتجين من بعضهما نجد :

$$(53-2) \quad m(\omega_1^2 - \omega_2^2) = b(\omega_1 + \omega_2)$$

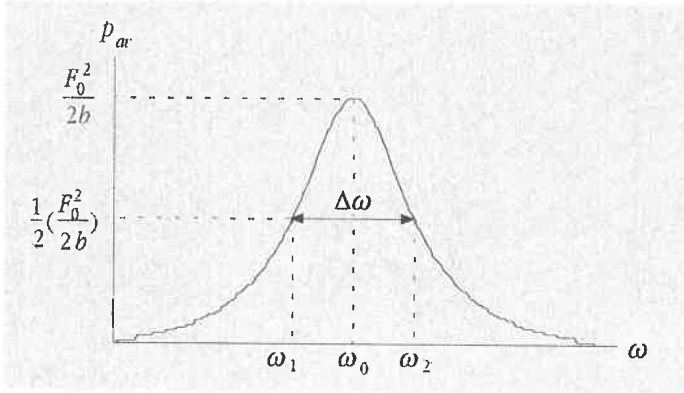
أي أن :

$$(54-2) \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{b}{m}$$

أو :

$$(55-2) \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

أي أن عرض منحنى تجاوب القدرة يتناسب عكساً مع معامل الجودة Q ، كما هو موضح بالشكل (12-2).



الشكل (12-2)

9-2 ارتباط معامل الجودة بسعة الإزاحة ومعامل التضخيم

أخيراً سنربط بين معامل الجودة لمنظومة مهتزة وسعة اهتزازاتها لتوضيح كيف أنه كلما كان معامل الجودة كبيراً كلما كانت سعة الاهتزازات كبيرة . لذلك نكتب السعة اللحظية بالشكل :

$$(56-2) \quad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

حيث :

$$(57-2) \quad A = \frac{F_0}{\omega Z_m}$$

و

$$(58-2) \quad \delta = \phi + \frac{\pi}{2}$$

و

$$(59-2) \quad Z_m^2 = (b^2 + (m\omega - k/\omega)^2)$$

كما وجدنا أن السعة العظمى A ستكون أكبر مايمكن عندما :

$$(60-2) \quad \omega^2 = \omega'^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}$$

عندئذ يكون :

$$(61-2) \quad A_{max} = \frac{F_0}{\omega' b}$$

لذا يمكن كتابة السعة A بالشكل :

$$(62-2) \quad A = (A_{max}) \frac{\omega' b}{\omega Z_m}$$

أي أن :

$$\frac{A_{max}}{A} = \frac{\omega Z_m}{\omega' b}$$

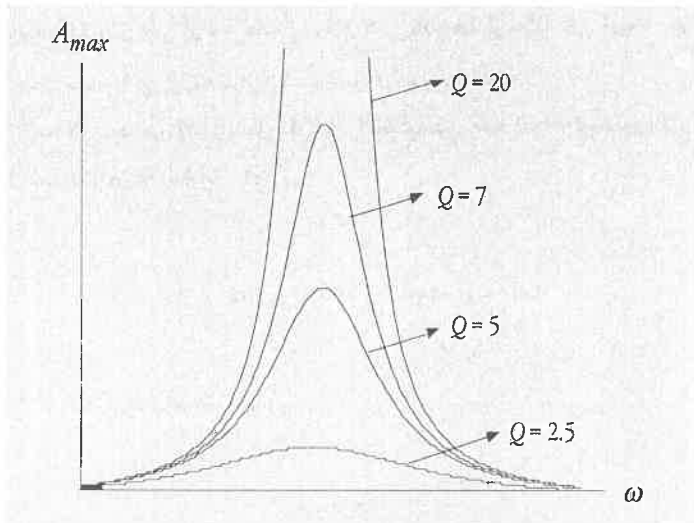
ومنه :

$$(63-2) \quad \left(\frac{A_{max}}{A}\right)^2 = \frac{\omega^2 (b^2 + (m\omega - k/\omega)^2)}{(k/m - b^2/2m^2)b^2} = \frac{\omega^2 b^2 + m\omega^2 - k}{\omega_0^2 (1 - \frac{1}{2}(b/m\omega_0)^2) b^2}$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أنه عندما تنتهي ω إلى الصفر فإن النسبة (A_{max}/A) تؤول إلى :

$$(64-2) \quad \left(\frac{A_{max}}{A}\right)^2 \rightarrow \frac{Q^2}{(1 - 1/4 Q^2)} \approx Q^2$$

يوضح الشكل (13-2) كيف تتغير A_{max} من أجل قيم مختلفة لـ Q .



الشكل (13-2)

10 - 2 المرحلة الانتقالية (Transient Period)

درسنا حتى الآن الحل الدائم للاهتزازات القسرية لأنها الأهم في التطبيقات العملية ، ونعتبر فيما يلي ما يحدث لمنظومة مهتزة في اللحظات الأولى لبدء تطبيق قوة دافعة عليها . فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من كتلة m معلقة بزنبك k ، ونهمل قوة التخماد مرحلياً ، فنكتب معادلة الحركة بالشكل :

$$(65 - 2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

أو

$$(66 - 2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

ووجدنا أن حل الحركة الدائمة للمعادلة (66-2) هو من الشكل :

$$(67 - 2) \quad x = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

فإذا افترضنا أن المنظومة بدأت الحركة من وضع الاتزان وأن $\omega < \omega_0$ ، عندئذ نلاحظ أنه عندما $t=0$ فإن إزاحة الكتلة موجبة وهذا غير منطقي إذ لا يمكن لمنظومة لها ممانعة (كتلة) غير معدومة أن تنتقل إلى سعة غير معدومة في زمن يساوي الصفر لحظة خضوعها لقوة خارجية دافعة ، إذ لابد أن تحتاج لفترة زمنية مهما قصرت للانتقال من الاتزان إلى إزاحة عظمى . ولو كان $\omega > \omega_0$ لوصلنا إلى نتيجة أُعرب ، إذ أن الكتلة ستتحرك خلال زمن معدوم إلى إزاحة سالبة عند تطبيق قوة موجبة عليها !
لحل هذه المعضلة لابد من إدخال حل المرحلة الانتقالية في هذه الحالة للوصول إلى النتيجة السليمة .
فإذا كان x_1 حلٌ لمعادلة الحركة الدائمة ، أي أن :

$$(68 - 2) \quad \frac{d^2}{dt^2} x_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

وكان x_2 حلٌ لمعادلة الاهتزازات الحرة ، أي أن :

$$(69 - 2) \quad \frac{d^2}{dt^2} x_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

عندئذ نلاحظ أنه إذا جمعنا المعادلتين السابقتين فإننا نجد :

$$(70-2) \quad \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

أي أن $x_1 + x_2$ هو حل أيضاً لنفس معادلة الاهتزازات القسرية أعلاه ، ولا يوجد داع لإغفال الحل الانتقالي x_2 بل على العكس فإننا مجبرون على إدخاله لتوضيح ما يحصل للمنظومة لحظة بدء الحركة تماماً . فلو كانت القوة الخارجية مؤثرة للحظة قصيرة جداً ، أي قوة دفع (*impulsive force*) ، كأن ندفع الكتلة باليد وهي في وضع الاتزان ، عندئذ تكسب طاقة حركة وتنتقل من مكانها لتتهز بتردها الطبيعي ω_0 . أما لوبيقت القوة الخارجية المترددة مؤثرة لعدة أدوار لاهتزت المنظومة بتردها هي عندئذ ، كما وجدنا سابقاً . لذا فإننا نتوقع أن تكون الحركة خلال اللحظات الأولى منها مزيجاً من الترددين .

لنكتب الآن حل الاهتزازات الحرة :

$$(71-2) \quad x_2 = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

نلاحظ أنه يحوي ثابتين اختياريين A و ϕ يمكن تحديدهما بحيث تتحقق الشروط الابتدائية للحركة ، أي أن تكون $x=0$ و $v=0$ عندما $t=0$. ونكتب الحل الكامل لمعادلة الحركة :

$$(72-2) \quad x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

فإذا افترضنا أنه عندما $t=0$ فإن $x=0$ و $v=0$ ، لوجدنا أن x ستؤول إلى (تحقق من ذلك) :

$$(73-2) \quad x = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

ما المعادلة الأخيرة إلا معادلة الخفقان الذي حصلنا عليها سابقاً ! فإن لم يكن هناك تخامد لبقيت اهتزازات الخفقان هذه مستمرة ولا تنصل للمنظومة إلى الحالة الدائمة أبداً ، كما في الشكل (2-14 أ) .

ونلاحظ أيضاً أنه في اللحظات الأولى للحركة أي عندما $t \ll 1/\omega_0$ ، فإن :

$$(74-2) \quad \cos \omega_0 t \approx 1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}$$

$$(75-2) \quad \cos \omega t \approx 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}$$

أي أن

$$(76-2) \quad x \approx \frac{F_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2$$

وهذه نتيجة منطقية تماماً . إذ قبل أن تبدأ قوة الإرجاع بالتأثير على m فإن هذه الأخيرة تتحرك باتجاه القوة الخارجية بتسارع F_0/m . بالطبع فإن العملية لن تستمر بهذا الاتجاه لفترة طويلة إذ تتدخل قوة الإرجاع لتجعل حركة الجسم اهتزازية ، كما وجدنا أعلاه .

نعود الآن إلى الحالة الحقيقية التي تشمل وجود قوة تخامد ، إذ كتبنا الحل على النحو :

$$(77-2) \quad x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) + B \cos(\omega t + \delta)$$

يمكن في هذه الحالة أيضاً تطبيق الشروط الابتدائية ، كما فعلنا أعلاه لتحديد الثابت الاختيارية A و ϕ ويترك ذلك كتمرين للقارئ .

2 - 11 أمثلة على التجاوب

وجدنا فيما سبق أنه عندما تخضع منظومة مؤلفة من كتلة مربوطة بزئيرك إلى قوة خارجية مترددة فإن السعة العظمى للاهتزازات الناتجة ستكون أكبر ما يمكن إذا كان تردد القوة الخارجية يساوي التردد الطبيعي للمنظومة تقريباً (في حالة تخامد ضعيف نسبياً) . أطلقنا على هذه الظاهرة اسم تجاوب ، أي أنه لو غيرنا تردد القوة الخارجية بدءاً من قيم صغيرة بالمقارنة مع التردد الطبيعي للمنظومة صعوداً ، فإن رد فعل الأخيرة من سعة وطور وقدرة ممتصة يتغير تدريجياً ، ويوصف كميّاً بكميتين هما التردد الطبيعي ω_0 وعرض منحنى التجاوب $\gamma = \omega_0/Q$ وهما خاصتان مميزتان للمنظومة المدفوعة . فالتجاوب إذاً هو ظاهرة دفع المنظومة بشروط تجعل التفاعل بينها وبين سبب حركتها أكبر ما يمكن . ومهما كانت المنظومة فإن التجاوب يعني أن تفاعلها مع عامل خارجي سيصل إلى نهاية عظمى عند كمية ما نرمز لها بـ ω_0 ، كما يكون مدى تغير الكميات المهمة للمنظومة محصوراً في مجال معين نرمز له بـ γ ، وسنرى أن هناك حالات لا يكون فيها التردد أو القدرة هي الكميات المهمة للدلالة على التجاوب بالضرورة ، كما في الأمثلة التالية .

(أ) التجاوب الكهربائي (Electrical Resonance)

إذا دُفعت دائرة كهربائية متسلسلة مؤلفة من مكثف C ومحاثة L ومقاومة R بوساطة مولد تيار متردد شدته العظمى E_0 وتردده ω ، فإن معادلة التيار الناتج تُكتب بحسب قوانين كيرشوف على النحو :

$$(78-2) \quad IR + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = E_0 \cos \omega t$$

بما أن $I = dQ/dt$ فيمكن كتابة (78-2) بالشكل :

$$(79-2) \quad L\dot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t$$

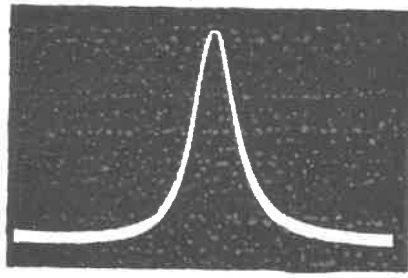
نلاحظ أن هذه العلاقة تماثل معادلة الاهتزازات المدفوعة لمنظومة ميانكية معامل كتلتها $L \leftrightarrow m$ ، ومعامل تخامدها $R \leftrightarrow b$ ، ومعامل مرونتها $1/C \leftrightarrow k$ ، لذلك فإن السعة العظمى للشحنة ستكون أكبر مايمكن عندما يكون تردد المولد مساوياً للتردد الطبيعي $\omega_0 = (k/m)^{1/2} = (1/LC)^{1/2}$. ولواعتبرنا طاقة المنظومة للاحظنا أن الكمية $E_0 dQ$ تمثل مقدار الشغل المبذول لنقل شحنة dQ في الدارة (مثمما تمثل $F dx$ مقدار الشغل المبذول على الكتلة m لتحريكها مسافة dx في المنظومة الميكانيكية) .
تمثل الاهتزازات التبادل الدوري للطاقة بين المكثف والمحاثة مع الضياع المستمر لها خلال المقاومة R .

(ب) التجاوب المغناطيسي النووي (Nuclear Magnetic Resonance)

يمكن تصور النواة الذرية في ميكانيك الكم (Quantum Mechanics) كأنها مغناطيس صغير يتأثر بأي مجال مغناطيسي خارجي يؤثر عليها . إلا أن عدد الاتجاهات التي يمكن أن يأخذها هذا المغناطيس محدد تماماً ، فلايمكن لقتل (*spin*) البروتون في نواة ذرة الهيدروجين مثلاً إلا أن يتجه مع أو بعكس المجال المغناطيسي الخارجي ، وحتى يقبل من منحى فقله يجب إعطاؤه طاقة تتناسب مع شدة المجال الموجود فيه . في حالة المغناطيسية الأرضية يتجه قتل البروتون معها أو بعكسها فقط ، ولو اصطدم به فوتون له طاقة تساوي الفرق بين هذين الاتجاهين لانقلب وغير اتجاهه . ويتم عادة تسليط حزمة فوتونات لها تردد معين على بروتونات في وعاء ماء موضوع في مجال مغناطيسي متغير . فإذا انقلبت مجموعة من البروتونات في 1 cm^3 من الماء مثلاً فإنها تؤدي لتوليد فرق جهد محسوس (بوساطة التحريض المغناطيسي) في ملف كاشف . يصل فرق الجهد هذا لقيمة عظمى عندما تصير شدة المجال المغناطيسي الخارجي متجاوبة مع طاقة الفوتونات الساقطة التي تقبل كل البروتونات في الماء .
يعطى فرق الجهد بالعلاقة :

$$(80-2) \quad V(B) = \frac{V_0}{[2(B_0 - B)/(\Delta B)]^2 + 1}$$

حيث جهد التجاوب ، و B_0 شدة المجال المغناطيسي هناك ، و ΔB عرض منحنى التجاوب .
يمثل الشكل (14-2) ظاهرة التجاوب المغناطيسي النووي في كهرينات المنغيز بشكل أخذ ، حيث يدل
الاتجاه الأفقي على شدة المجال المغناطيسي والاتجاه الرأسى على فرق الجهد الناتج .



الشكل (14-2)

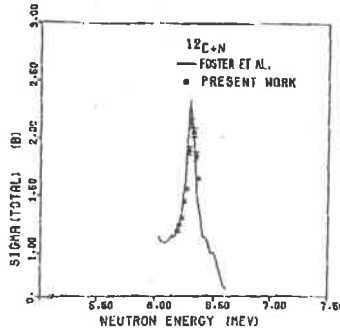
(ج) التجاوب النووي (Nuclear Resonance)

يظهر التجاوب في الفيزياء النووية بشكل دائم وبخاصة في التفاعلات النووية ، إذ يعتمد احتمال التفاعل بين الأجسام النووية على طاقتها . فإذا أطلقنا حزمة من النيوترونات على صفيحة من نظير الفحم (^{12}C) وأحصينا عدد النيوترونات المتشتتة نتيجة التصادم بينهما ، بوساطة كاشف مناسب ، لوجدنا أنه يزداد بشكل كبير إذا كانت طاقة النيوترونات الساقطة تساوي 6.29 MeV ، كما في الشكل (15-2) .

يمكن تفسير هذه الظاهرة بأن احتمال تفاعل النيوترونات مع ^{12}C ، الذي يدعى مساحة مقطع التفاعل (reaction cross-section) ، ويرمز له بـ σ ، يصير كبيراً عند هذه الطاقة ليتشكل نظير آخر هو ^{13}C .
تعطى مساحة المقطع هذه بالعلاقة :

$$(81 - 2) \quad \sigma(E) = \frac{\alpha}{[2(E - E_0) / \Gamma]^2 + 1}$$

حيث α ثابت ، و Γ عرض منحنى التجاوب ، و E طاقة النيوترونات الساقطة ، و E_0 طاقة التجاوب .



الشكل (15-2)

نلاحظ من هذا المثل أن المتغير في هذه الحالة هي الطاقة لالتردد ، أي أن ظاهرة التجاوب لاتخص التردد فقط بل تشمل كميات فيزيائية أخرى تعتمد على المنظومة التي تظهر فيها . إلا أن التكامل الفيزيائي واضح تماماً لأن التردد والطاقة مرتبطان بشكل وثيق في الفيزياء الكمية من خلال علاقة التكميم $E = h\nu$ المشهورة .

2- 12 أمثلة

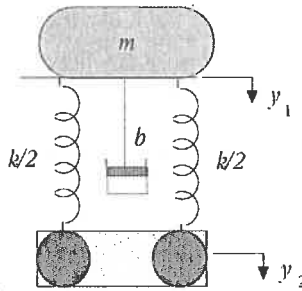
2- 12- 1 ماصات الصدمة في السيارة (shock absorbers)

من المعروف أنه عندما تسير سيارة على طريق غير سوية فإن عجلاتها ترتفع وتنخفض حسب طبيعة الطريق . لمنع اهتزازات العجلات من الانتقال لجسم السيارة (ثم لراكبيها) ، تربط هذه العجلات بجسم السيارة بواسطة زنبركات قاسية تمتص الصدمات الناتجة عن سقوط واحد أو أكثر من العجلات في حفرة في الطريق مثلاً .

يمكن تمثيل هذه المنظومة بالشكل (16-2) ، حيث تدل المنصة AB على عجلات السيارة ، التي نفترض أنها تهتز للأعلى والأسفل بسعة a وتردد ω ، بحيث نكتب حركتها على النحو :

$$y_2 = a \cos \omega t$$

لنحاول تحديد حركة جسم السيارة الممثل بالكتلة m في الشكل (16-2).



الشكل (16-2)

نكتب معادلة الحركة :

$$m\ddot{y}_1 = -k(y_1 - y_2) - b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

حيث افترضنا أن قوة التخماد متناسبة مع السرعة اللحظية لـ m بالنسبة للمنصة . نكتب معادلة الحركة بالشكل :

$$m\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + ky_1 = ky_2 + b\dot{y}_2$$

بتعويض y_2 في هذه العلاقة نجد :

$$\ddot{y}_1 + 2\gamma\dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = \omega_0^2 a \cos \omega t - 2\gamma a \omega \sin \omega t$$

حيث وضعنا $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ و $\gamma = b/2m$.

نعيد كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$\ddot{y}_1 + 2\gamma\dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = \frac{a}{m} [k^2 + (\omega b)^2] \cos(\omega t + \beta)$$

حيث $\tan \beta = \omega b/k$ (تحقق من ذلك) . بالطبع فإن المعادلة السابقة ماهي إلا معادلة اهتزازات قسرية بقوة خارجية سعتها العظمى $F_0 = a[k^2 + (\omega b)^2]$. لذلك تكون السعة العظمى لاهتزازات الحالة الدائمة هي :

$$J'_{10} = \frac{a[k^2 + (\omega b)^2] / m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

بوضع $b_c = (mk)^{1/2}$ ، حيث نلاحظ أن أبعاده تماثل أبعاد ثابت تناسب قوة التخماد b ، يمكن أن نكتب

نسبة السعة العظمى للكتلة m إلى السعة العظمى للمنصة AB بالشكل :

$$\frac{J'_{10}}{J'_{20}} = \frac{\{1 + [2(b/b_c)(\omega/\omega_0)]^2\}^{1/2}}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2 + [2(b/b_c)(\omega/\omega_0)]^2\}^{1/2}}$$

يوضح الشكل (17-2) تغيرات هذه النسبة بدلالة ω/ω_0 من أجل قيم مختلفة لـ b/b_c .

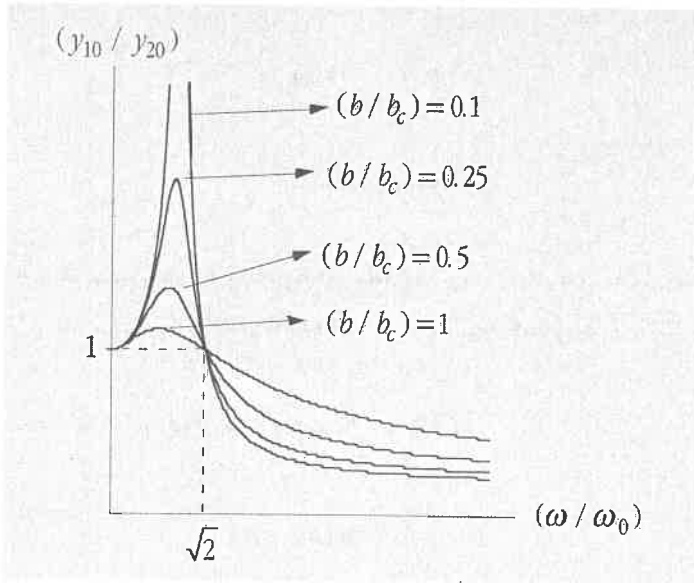
بما أننا نرغب في منع اهتزاز m لذا يجب جعل $J'_{10}/J'_{20} < 1$. هذا يتحقق عندما $(\omega/\omega_0)^2 > 2$ مهما

كانت قيمة b/b_c . ونرى من الشكل (17-2) أنه عندما يتحقق هذا الشرط فإن تأثير التخماد على m يسعى لزيادة

سعة حركتها بالنسبة للمنصة . فعندما تبدأ المنظومة بالاهتزاز وبتزايد ω فإنها تمر بتردها الطبيعي ω_0 إذا

كان $\omega > \omega_0$. على الرغم من أن التخماد يزيد النسبة السابقة إلا أنه ضروري لحد سعة الحركة خلال هذا

الانتقال .



الشكل (17-2)

2-12-2 تهتز منظومة ميكانيكية بشكل حر بتردد معين ω_1 وعندما تخضع لقوة خارجية جيبية ترددها ω متغير فإن عرض منحنى تجاوب الطاقة يبلغ $\omega_1/5$. (أ) عند أي تردد تصير القدرة أكبر ما يمكن؟ (ب) ما القيمة Q لهذه المنظومة؟ (ج) ما ثابت التخماد b بدلالة كتلة المنظومة m وثابت زنبركها k ؟
الحل : بما أن تردد الاهتزازات الحرة للمنظومة ω_1 يعطى بالعلاقة :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

حيث $\gamma = b/2m$ ، بينما يعطى عرض منحنى تجاوب القدرة بالعلاقة :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\gamma$$

لذا يكون :

$$2\gamma = \frac{\omega_1}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

ومنه :

$$\omega_0 \approx 1.005 \omega_1$$

أي أن :

$$Q \approx 5$$

كما نجد من :

$$2\gamma = \omega_0 / Q = \omega_0 / 5$$

أن :

$$\gamma \approx 0.1(k/m)^{1/2}$$

مثال 2- 12- 3 يهتز جسم مدفوع بقوة خارجية ترددها ω . برهن أنه إذا كان معامل التخميد $b = (mk)^{1/2}$ فإن سعة التسارع عند تردد تجاوب السرعة ($\omega = \omega_0$) تساوي القيمة الحدية لسعة التسارع عند الترددات العالية .

الحل : وجدنا حل الحالة الدائمة لهزّان مدفوع بقوة خارجية بالشكل :

$$(1) \quad x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

حيث Z_m ممانعة النظام و ϕ فرق الطور بين سعة الاهتزازة والقوة الدافعة . ونكتب تسارع الجسم :

$$(2) \quad \ddot{x} = - \frac{F_0 \omega}{Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

ومن الواضح أن سعة التسارع ستكون أكبر مايمكن عندما تصير Z_m أصغر مايمكن ، أي عندما $\omega = \omega_0$ ، وتصير سعة التسارع عندها :

$$(3) \quad \ddot{x}_{max} = - \frac{\omega_0 F_0}{b} = - \frac{\sqrt{k/m} F_0}{\sqrt{mk}} = - \frac{F_0}{m}$$

من جهة أخرى فإن سعة التسارع هي :

$$(4) \quad \ddot{x}_0 = - \frac{F_0 \omega}{\sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)}}$$

ونلاحظ أنه عند الترددات العالية يمكن إهمال k/ω بالمقارنة مع $m\omega$ لنجد :

$$(5) \quad \ddot{x}_0 = - \frac{F_0 \omega}{\sqrt{mk + m^2 \omega^2}} \approx - \frac{F_0 \omega}{m\omega} = - \frac{F_0}{m}$$

وهو المطلوب إثباته .

مسائل

1-2 تتألف منظومة مهتزة من كتلة 0.2 kg معلقة بزنبك 80 N/m وخاضعة لقوة مقاومة متناسبة مع سرعتها بعامل تناسب 4 N.s/m . (أ) اكتب معادلة الحركة للاهتزازات الحرة وجد دورها . (ب) ماسعة الاهتزازات للحركة الدائمة للمنظومة إذا خضعت لقوة خارجية من الشكل $F = 2 \sin 30t \text{ (N)}$ ؟

2-2 (أ) اكتب معادلة الحركة لهزأز توافقي بسيط مدفوع بقوة خارجية $F_0 \sin \omega t$ وجد معادلة الاهتزازات الدائمة بفرض أنه لا يوجد تخامد ثم اكتب معادلة الحل الكلي . (ب) برهن أنه إذا الجسم ساكناً عند وضع الاتزان في لحظة البداية فإن الحل العام يُكتب على النحو :

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} (\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t)$$

حيث $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. (ج) برهن أنه إذا كانت ω قريبة من ω_0 (أي أن $\Delta \omega = \omega - \omega_0$ صغير) عندئذ يكون:

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$$

3-2 ينضغط زنبك k بمقدار h عندما تؤثر قوة شاقولية قيمتها mg على كتلة m معلقة به ، كما تكون قوة التخامد على m مساوية لـ mg عندما تكون سرعتها u . (أ) اكتب معادلة الحركة للاهتزازات الشاقولية للمنظومة بدلالة m و g و h و u . (ب) ماتردد الاهتزازات وزمن الاسترخاء عندما $u = 3(gh)^{1/2}$ ؟ (ج) ما القيمة Q عندئذ ؟ (د) ما معادلة الحركة الناتجة عندما تصطم رصاصه كتلتها مهملة وزخمها p_0 بالكتلة m وهي ساكنة ؟ (هـ) ما معادلة الحركة للاهتزازات الدائمة إذا خضعت المنظومة لقوة خارجية $F = mg \cos \omega t$ حيث $\omega = (2g/h)^{1/2}$ ؟

4-2 برهن أن الطاقة الضائعة لمنظومة مهتزة في دورة كاملة نتيجة قوة التخامد عند تردد معين ω تساوي $\pi b \omega A^2$ حيث b معامل تناسب قوة التخامد و A السعة العظمى .

5-2 يهتز بندول بسيط بشكل حر فيلاحظ أن سعة اهتزازته تتناقص إلى $1/e$ من قيمتها الابتدائية خلال 50 اهتزازة . (أ) برهن أنه يمكن كتابة معادلة الحركة لهذا البندول عندما تهتز نقطة تعليقه أفقياً بشكل بسيط بسعة 1 m بالشكل $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi$ حيث x بُعد البندول عن وضع الاتزان في حالة الاهتزازات الصغيرة و ξ الإزاحة اللحظية لنقطة تعليقه و $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$. (ب) حل معادلة الحركة للاهتزازات الدائمة عندما يكون $\xi = \xi_0 \cos \omega t$ وجد سعة الحركة العظمى عند التجاوب ومعامل الجودة Q . (ج) عند أي تردد ω ستكون سعة الاهتزازات مساوية لنصف قيمة سعة التجاوب ؟

6-2 برهن أن عرض منحنى تجاوب القدرة عند نصف القيمة العظمى (FWHM) يحدد قيم زاوية الطور ϕ ضمن المجال $\tan \phi = \pm 1$.

7-2 يطبق فرق جهد متغير سعته V_0 على دارة LRC متسلسلة . برهن أن فرق الجهد بين طرفي المكثف أو الملف عند أكبر قيمة للتيار هو QV_0 .

8-2 برهن أن الجهد بين طرفي مكثف في دائرة LRC متسلسلة في حالة تجاوب يتم عند تردد معطى بالعلاقة :

$$Q_0 = \omega_0 L/R \text{ و } \omega_0 = 1/(LC)^{1/2} \text{ حيث } \omega = \omega_0(1 - 1/2Q_0^2)^{1/2}$$

9-2 برهن أن الجهد الأعظمي بين طرفي الملف في المسألة السابقة يحدث عند تردد $\omega = \omega_0(1 - 1/2Q_0^2)^{-1/2}$

10-2 ينطلق ضوء طول موجته 6000 \AA من ذرة تهتز كهزّان بسيط متخامد عامل جودته 5×10^7 . برهن أن عرض الخط الطيفي الصادر هو $1.2 \times 10^{-4} \text{ m}$.

11-2 برهن أنه إذا كان معامل الجودة Q كبيراً لهزّان ميكانيكي مدفوع بقوة خارجية ترددها ω فإن عرض منحنى تغيرات السعة مع ω عند نصف السعة العظمى يساوي $\sqrt{3}(b/m) \sim$.

12-2 (أ) ما الطاقة الحركية وطاقة الوضع اللحظية لمنظومة مدفوعة بقوة خارجية ترددها ω ؟ (ب) ما نسبة متوسط طاقة الحركة إلى متوسط طاقة الوضع بدلالة ω/ω_0 حيث ω_0 التردد الطبيعي للمنظومة ؟ (ج) ما قيمة ω التي تجعل النسبة السابقة مساوية لـ 1 وما طاقة النظام الكلية عندئذ ؟ (د) كيف تتغير الطاقة الكلية للمنظومة مع ω وما قيم هذه الأخيرة التي تجعل هذه الطاقة ثابتة بالنسبة للزمن ؟

13-2 تخضع كتلة m إلى قوة تخامد bv - بدون وجود قوة إرجاع . (أ) ما معادلة الحركة وكيف تتغير الإزاحة مع الزمن ؟ (ب) تخضع m وهي ساكنة إلى قوة $F = F_0 \cos \omega t$. ما السعة العظمى والطور الابتدائي للحركة الدائمة ؟ (ج) اكتب الحل الكلي وحدد السعة العظمى للإزاحة والسرعة (v_0, A) .

14-2 تتألف منظومة من كتلة 0.2 kg وزنبرك 80 N/m ومعامل تخامد 4 N.s/m ودفع بقوة خارجية سعتها 2 N وتردها 30 rad/s . (أ) ما الحل العام للاهتزازات ؟ (ب) ما الطاقة الضائعة في دورة كاملة ؟ (ج) ما متوسط القدرة التي تمتصها المنظومة في دورة كاملة ؟

15-2 برهن أنه يمكن كتابة متوسط القدرة الممتصة في الاهتزازات القسرية على النحو :

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2 \omega_0}{2kQ} \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{-1}$$

16-2 برهن أنه يمكن كتابة السعة العظمى للاهتزازات القسرية بالشكل :

$$A(\omega) = \frac{F_0 \omega_0}{k\omega} \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{-1/2}$$

17-2 برهن أنه يمكن كتابة فرق الطور ϕ للاهتزازات القسرية بالشكل :

$$\tan \phi = \left[Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^{-1}$$

18-2 برهن أنه يمكن كتابة السعة العظمى للسرعة للاهتزازات القسرية بالشكل :

$$v_0(\omega) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{-1/2}$$

19-2 برهن أنه يمكن كتابة تردد التجاوب للاهتزازات القسرية بالشكل: $\omega_{max} = \omega_0(1-1/2Q^2)^{1/2}$

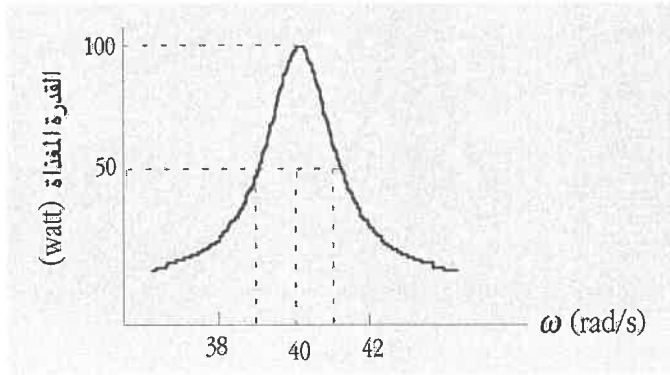
20-2 برهن أنه يمكن كتابة السعة العظمى للاهتزازات القسرية عند التجاوب بالشكل :

$$A_{max} = A_0(1-1/4Q^2)^{1/2}$$

21-2 تتغير سعة هزاز متخامد ومدفوع بقوة خارجية مع الزمن وفق العلاقة $x = A \sin \omega t$. (أ) ما الشغل المبذول ضد قوة الاحتكاك في دورة واحدة ؟ (ب) ارسم تغيرات طاقة الوضع وطاقة الحركة والطاقة الكلية للجسم خلال دورة كاملة إذا كان $\omega < \omega_0$ ، حيث ω_0 التردد الطبيعي للمنظومة ، وحدد نقاط الدوران والتقاطعات المهمة بقيمة الطاقة والزمن الموافقة لها .

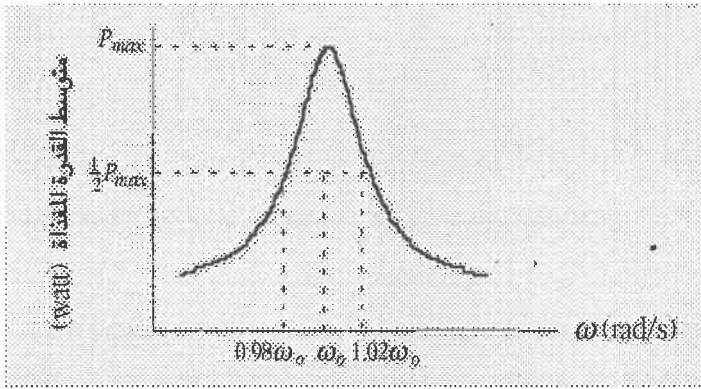
22-2 تعلق كتلة 2 kg بزنبك مهمل الكتلة فيستطيل بمقدار 2.5 cm ، ثم تهتز النهاية العليا للزنبك حركة اهتزازية بسيطة سعتها العظمى 1 mm وتردها ω فتبلغ القيمة Q للمنظومة 15 . (أ) ما التردد الطبيعي للنظام ω_0 ؟ (ب) ما السعة العظمى للاهتزازات القسرية عندما $\omega = \omega_0$ ؟ (ج) ما متوسط القدرة المغذاة للمنظومة اللازمة للمحافظة على الاهتزازات عند تردد أكبر من ω_0 بـ 2% ؟

23-2 يوضح الشكل (18-2) منحني تجاوب القدرة لمنظومة ميكانيكية مدفوعة بقوة خارجية جيبيية من الشكل $F = F_0 \sin \omega t$. (أ) ما القيمة العددية لـ ω_0 و Q للمنظومة ؟ (ب) بفرض أن القوة الخارجية توقفت في لحظة معينة ، بعد كم دورة من الاهتزازات الحرة ، ستخفض الطاقة الكلية للمنظومة إلى 1/50 من قيمتها الابتدائية ؟



الشكل (18-2)

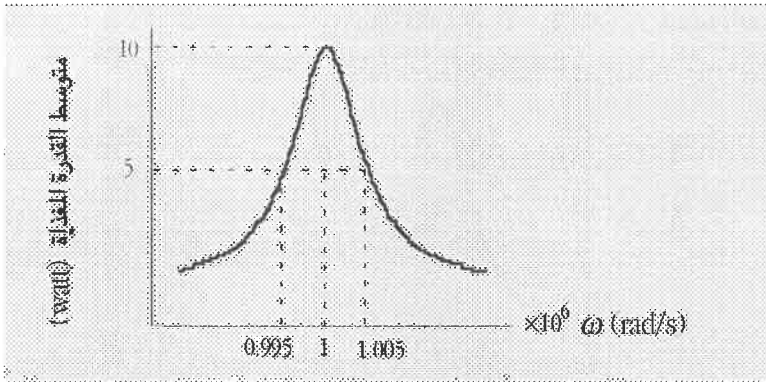
24-2 يوضح الشكل (19-2) تغيرات القدرة المتوسطة مع تردد قوة جيبيية متغيرة مع الزمن ومؤثرة على منظومة مؤلفة من كتلة وزنبك . (أ) ما القيمة Q للمنظومة ؟ (ب) تُزال القوة الخارجية في لحظة معينة فتنقص الطاقة وفق العلاقة $E = E_0 \exp(-\gamma t)$ ما قيمة γ ؟ (ج) ما نسبة الطاقة الضائعة في كل دورة بعد زوال القوة الخارجية ؟



الشكل (19-2)

25-2 تُشكل منظومة ميانيكية من عناصر المنظومة المذكورة في المسألة 24 باستثناء الزنبرك الذي يُستبدل بأخر له ضعف ثابت المرونة ، كما تؤثر نفس القوة الخارجية عليها . (أ) ما تردد التجاوب الجديد ω' ؟ (ب) ما معامل الجودة الجديد Q' ؟ (ج) ما القيمة العظمى لمتوسط القدرة المغذية للمنظومة ؟ (د) ما الطاقة الكلية للمنظام عند التجاوب ؟

26-2 يوضح الشكل (20-2) متوسط القدرة المغذية لهزاز عندما يُدفع بقوة خارجية ذات تردد متغير . (أ) ما الشغل المبذول ضد التخماد خلال دورة كاملة عند التجاوب ؟ (ب) ما الطاقة الميكانيكية الكلية للمنظومة عند التجاوب ؟ (ج) ما الزمن اللازم للطاقة الكلية لتتخفص إلى $1/e$ من قيمتها العظمى إذا أُزيلت القوة الخارجية ؟



الشكل (20-2)

الاهتزازات المرتبطة

(Coupled Oscillations)

3-1 تمهيد

درسنا في الفصلين السابقين الاهتزازات الحرة أو القسرية لمنظومة وحيدة معزولة عن الوسط الخارجي . إلا أنه نادراً مايتواجد هزاز ميكانيكي أو كهربائي منعزل تماماً عن غيره ، بل على العكس ، فإن سبب الحركة الموجية هو انتقال الاهتزازات من هزاز لآخر نتيجة ارتباطهما ببعضهما بعامل مشترك (أو وسيلة نقل) ، كبنولين متصلين ببعضهما بوساطة زنبرك ، أو دارتين كهربائيتين بينهما ملف أو محاثة مشتركة ، وهكذا دواليك . فتنتقل الاهتزازات من جسم لآخر أي أن الطاقة تنتقل بينهما بشكل دائم . لذلك تستطيع المنظومة أن تهتز بأكثر من تردد واحد بحسب الطريقة التي تتولد فيها الاهتزازات .

هناك نوعان من الارتباط بين أجزاء المنظومات المهتزة : ارتباط مرونة (*stiffness coupling*) بوساطة زنبرك أو مكثف ، وارتباط حث (*inductance coupling*) بوساطة كتلة أو محاثة . سندرس في هذا الفصل بعض الأمثلة على هذين النوعين لمنظومات ميكانيكية وكهربائية ، فنحدد الطريقة العامة لإيجاد الترددات التي يمكن للمنظومة أن تهتز بها وكيفية انتقال الطاقة بين أجزائها المختلفة .

3-2 هزازان مرتبطان بزنبرك (أو مكثف)

لنعتبر منظومة مؤلفة من بندولين بسيطين لهما نفس الطول l والكتلة m ، وبينهما زنبرك k ، كما في الشكل (3-1 أ) ، فإذا أزحنا البندول الأول عن وضع الاتزان مسافة x_1 والثاني x_2 (كلاهما صغيرة بالمقارنة مع طول البندول) ، لأمكن كتابة معادلة الحركة للبندول الأول مثلاً بالشكل :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - mg \sin \theta_1$$

نلاحظ من الشكل (3-1 ب) أنه في حالة الاهتزازات الصغيرة فإن $\sin \theta = \tan \theta$ ويؤول الحد الثاني من الطرف الأيمن إلى :

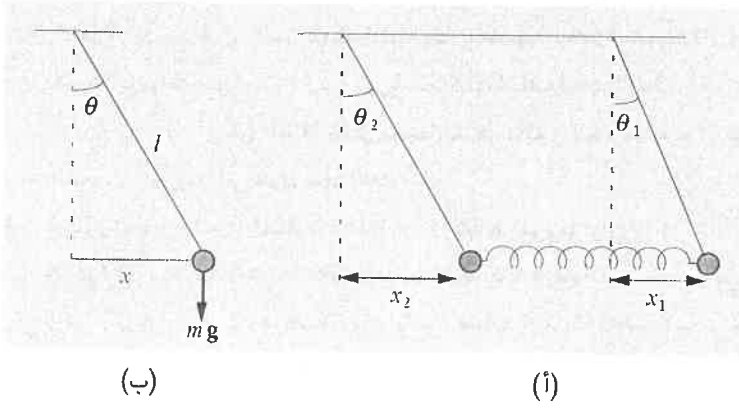
$$mg \sin \theta \approx mg \frac{x}{l}$$

من ثم نكتب معادلة الحركة للبندول الأول بالشكل :

$$(1-3) \quad m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \frac{mg}{l} x_1$$

بنفس الشكل نكتب معادلة الحركة للبندول الثاني :

$$(2-3) \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - \frac{mg}{l} x_2$$



الشكل (1-3)

يمكن حل المعادلتين (1-3) و (2-3) بجمعهما فنجد :

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{mg}{l}(x_1 + x_2)$$

أو

$$(3-3) \quad \ddot{X} + \omega_1^2 X = 0$$

حيث وضعنا :

$$(4-3) \quad X = x_1 + x_2$$

و

$$(5-3) \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

كذلك نطرح (2-3) من (1-3) فنجد :

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -2k(x_1 - x_2) - \frac{mg}{l}(x_1 - x_2)$$

أو

$$(6-3) \quad \ddot{Y} + \omega_2^2 Y = 0$$

حيث :

$$(7-3) \quad Y = x_1 - x_2$$

و

$$(8-3) \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

بالطبع فإن حل (3-3) و (6-3) هو :

$$(9-3) \quad X = A \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

و

$$(10-3) \quad Y = B \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

من ثم نجد حركة البندولين بكتابة :

$$(11-3) \quad x_1 = \frac{1}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}[A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2)]$$

و

$$(12-3) \quad x_2 = \frac{1}{2}(X - Y) = \frac{1}{2}[A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2)]$$

نستنتج من المعادلتين الأخيرتين أن كل بندول يهتز بمزيج من الترددين ω_1 و ω_2 ، أي أن الحركة ليست

اهتزازية بسيطة بل معقدة تشبه الخفقان الذي درسناه في الفصل الأول .

3-3 تعاريف أساس

(أ) الإحداثيات الطبيعية (normal coordinates)

نلاحظ من المعادلتين (1-3) و (2-3) أنه لا يمكن حل المعادلة الأولى إلا بحل الثانية ، والعكس بالعكس ، أي أن الإحداثيين x_1 و x_2 مرتبطين ببعضهما ، لذا فهما غير مناسبين تماماً لإيجاد الحل العام للحركة . أما الإحداثيين X و Y فهما مستقلان عن بعضهما ، كما هو واضح من (3-3) و (6-3) ، وحل أي منهما لا يتعلق بحل الآخر بتاتاً . لذلك نطلق عليهما اسم **إحداثيات طبيعية** (normal coordinates) التي نعرفها بأنه يمكن كتابة المعادلة التفاضلية لأي منها دون أن تحوي أي إحداثي آخر للحركة .

نستنتج كذلك من (11-3) و (12-3) أن الحل العام لأي جزء من المنظومة هو مجموع خطي لإحداثياتها الطبيعية . وأن الحركة العامة لاتتم بإحداثي طبيعي واحد ، مثل X أو Y فقط ، بل من مزيج منهما ، كما هي الحال في مثل البندولين المرتبطين المدرسين ، إذ أن حل الحركة لهما هو x_1 و x_2 ، على الترتيب ، أي مجموع خطي من X و Y ، كما أسلفنا سابقاً ، لذلك لا يكون لها تردد وحيد بل خليط من ترددين مما يؤدي لظهور الخفقان في حركة كل جزء . إلا أنه يمكن أن نعدّل الشروط الابتدائية بحيث نجعل كلا البندولين يهتزتان وفق أحد الإحداثيات الطبيعية X أو Y ، كأن نجعل المجموع $x_1 + x_2 = 0$ دائماً بينما نترك الفرق $x_1 - x_2$ غير معدوم مما يعني أن المنظومة ستهتز بالإحداثي Y فقط بينما تؤول X إلى الصفر وتهتز كل أجزاء المنظومة بتردد هذا الإحداثي فقط ، أو بالعكس نجعل $x_1 - x_2 = 0$ ونبقي $x_1 + x_2$ غير معدوم فتتحرك أجزاء المنظومة وفق الإحداثي X وتهتز كلها بترده فقط . سنرى بعد قليل كيف يمكن تحقيق ذلك بسهولة .

(ب) الحالة الطبيعية والترددات الطبيعية

يطلق على الحركة الاهتزازية المتعلقة بإحداثي طبيعي (مثل X أو Y) اسم **حالة طبيعية** (normal mode) ويسمى تردد هذه الحركة (مثل ω_1 أو ω_2) **تردداً طبيعياً** (normal frequency) . تهتز كل أجزاء المنظومة عندما تكون في حالة طبيعية ما بالتردد الطبيعي لتلك الحالة فقط .

(ج) الطاقة الكلية والإحداثيات الطبيعية

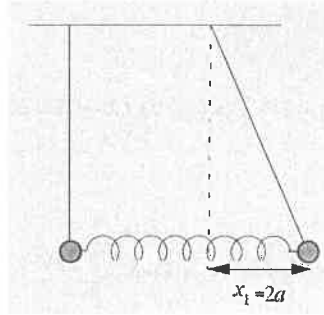
يمكن كتابة الطاقة الكلية لمنظومة مهتزة غير متخامدة على شكل مجموع مربعات الإحداثيات الطبيعية مضروبة بأمثال ثابتة ومجموع مربعات المشتقات الأولى لهذه الإحداثيات مضروبة بأمثال ثابتة أيضاً ، أي أن :

$$E = aX^2 + bY^2 + \dots + \alpha\dot{X}^2 + \beta\dot{Y}^2 + \dots \quad (13-3)$$

حيث a و b و α و β و ... ثوابت .

3-4 استقلال الإحداثيات الطبيعية وانتقال الطاقة

لو عدنا إلى البندولين المربوطين ببعضهما بواسطة الزنبرك وافترضنا أنه في اللحظة $t=0$ كان البندولان ساكنين وأن $x_1=2a$ و $x_2=0$ ، كما في الشكل (2-3) ، ثم تركناهما ليتهززا بشكل حر للاحتظنا أن البندول الأول يبدأ بالاهتزاز بسعة عظمى بينما الثاني ساكن ، ثم تتناقص سعة الأول وتزداد الثاني ، وهكذا دواليك . فحركة البندول الثاني بعدما كان ساكناً تعني أن الطاقة انتقلت إليه من الأول الذي يتباطأ تدريجياً إلى أن يقف ، ثم ينعكس الوضع لتنتقل الطاقة من الثاني للأول وهكذا دواليك . أي أن الطاقة تنتقل باستمرار بين البندولين .



الشكل (2-3)

بحسب الشروط الابتدائية نجد :

$$A = B = 2a$$

و

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

ويصير الحلان (11-3) و (12-3) على الشكل :

$$x_1 = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t$$

$$x_2 = a \cos \omega_1 t - a \cos \omega_2 t$$

أو

$$(14-3) \quad \begin{cases} x_1 = 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\ x_2 = 2a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{cases}$$

$$(15-3) \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

و

$$(16-3) \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

نكتب (14-3) بالشكل :

$$(17-3) \quad \begin{cases} x_1 = C_1(t) \cos \omega t \\ x_2 = C_2(t) \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

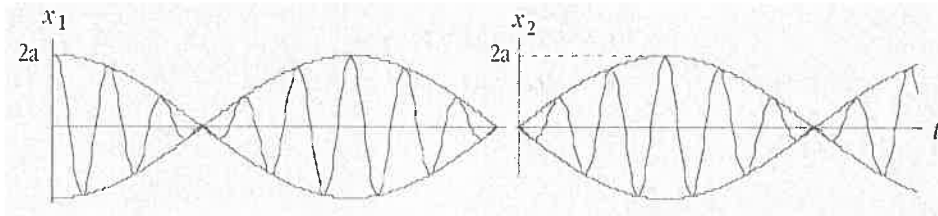
حيث

$$(18-3) \quad C_1(t) = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$$

و

$$(19-3) \quad C_2(t) = 2a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$$

نستنتج من (17-3) أن حركة كل من x_1 و x_2 تمثل خفقاناً (*beats*) لأن السعة العظمى لأي منهما (C_1 و C_2) تتغير جيئياً مع مرور الزمن . كما نلاحظ أنه عندما تكون x_1 أكبر ما يمكن فإن x_2 تكون معدومة والعكس صحيح كما في الشكل (3-3)، أي أن فرق الطور بين البندولين يساوي $\pi/2$.



الشكل (3-3)

يتضح من (9-3) و (10-3) أن الطاقة الكلية المتعلقة بـ X أو Y ستبقى ثابتة مع مرور الزمن ، أي أن الإحداثيات الطبيعية لا تتبادل الطاقة فيما بينها ، كما أن كل من هذين الإحداثيين يتغير جيبياً بتردد واحد فقط (ω_1 للأول و ω_2 للثاني) . أما الطاقة المتعلقة بـ x_1 أو x_2 فتتغير زيادة ونقصاناً مع مرور الزمن ، أي أن الإحداثيات العادية تتبادل الطاقة فيما بينها . كما أن أي منها لا يهتز بتردد واحد بالضرورة بل بترددين بنفس الوقت على شكل خفقان .

3-5 الطريقة العامة لإيجاد الترددات الطبيعية

وجدنا في الفقرة السابقة أن هناك ترددين طبيعيين لمنظومة مؤلفة من بندولين مرتبطين ببعضهما بواسطة زنبرك . كما وجدنا أنه إن اهتزت المنظومة بأحد هذين الترددين فستهتز كل أجزائها به ، أي أنه إن كان ω تردداً طبيعياً للمنظومة عندئذ يكون الحل العام لكل جزء منها عندما تهتز به هو :

$$(20-3) \quad x_i = A_i \cos \omega t \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

حيث N عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد حالتها الحركية في كل لحظة وتسمى درجات الحرية للمنظومة (number of degrees of freedom).

فإذا عدنا لمعادلتَي الحركة (1-3) و (2-3) وعوضنا الحل (20-3) لوجدنا :

$$(21-3) \quad \begin{cases} [-m\omega^2 A_1 + (\frac{mg}{l})A_1 + k(A_1 - A_2)] \cos \omega t = 0 \\ [-m\omega^2 A_2 + (\frac{mg}{l})A_2 + k(A_2 - A_1)] \cos \omega t = 0 \end{cases}$$

بالاختصار وترتيب المعادلتين (21-3) نجد :

$$(22-3) \quad \begin{cases} (-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k)A_2 = 0 \end{cases}$$

لكن حتى يكون لـ (22-3) حل غير بديهي ($A_1 = A_2 = 0$) يجب أن يكون معين (أو محدد) ($determinant$) الأمثال مساوياً للصفر ، أي يجب أن يكون :

$$(23-3) \quad \begin{vmatrix} -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \end{vmatrix} = 0$$

يفك هذا المعين نجد :

$$\left(-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k\right)^2 = k^2$$

أي أن :

$$-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k = \pm k$$

فإما أن يكون :

$$-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k = +k$$

ومنه :

$$(24-3) \quad \omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

أو أن يكون :

$$-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k = -k$$

وهذا يعطي :

$$(25-3) \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}}$$

هذان هما الترددان الطبيعيان اللذين وجدناهما سابقاً .

بتعويض ω_1 في (22-3) نجد :

$$A_1 = A_2$$

أي أن x_1 و x_2 متفتقتان بالطور (*in phase*) .
كذلك إذا عوضنا ω_2 في (22-3) لوجدنا :

$$A_1 = -A_2$$

- أي أن x_1 و x_2 متعاكستان في الطور (*out of phase*) .
نلاحظ أن هذه النتائج تتفق مع ما توصلنا إليه سابقاً تماماً .
نلخص الخطوات الواجب اتباعها للحصول على الترددات الطبيعية لمنظومة مهتزة على النحو التالي :
- أ - نكتب المعادلة التفاضلية للحركة لكل عنصر من عناصر المنظومة .
ب - نكتب الحل العام للعنصر رقم i بالشكل : $x_i = A_i \cos \omega t$ ، بفرض أن المنظومة ستهتز بتردد طبيعي ما ω (أي أن كل أجزائها ستهتز بهذا التردد) .
ج - نعوض الحل المفترض لعناصر المنظومة في معادلات الحركة فنحصل على مجموعة معادلات جبرية خطية متجانسة بأمثال ثابتة .
د - نكتب شرط عدم كون حل المجموعة الجبرية بديهياً هو أن يكون معين الأمثال مساوياً للصفر ونحل المعادلة الناتجة لنجد الترددات المطلوبة كافة .

3-6 الاهتزازات المرتبطة لدارتين كهربائيتين مرتبطتين بمحاثة

من المعروف في الكهرباء أن مرور تيار متردد في محاثة (*inductance*) يغير تدفق المجال المغناطيسي (*flux of magnetic field*) خلالها مما يولد فرق جهد تحريضي (*induced electromotive force*) بين طرفيها يعطى بحسب قانون فاراداي (*Faraday's Law*) بالعلاقة :

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} \quad (3-26)$$

حيث L معامل الحث الذاتي (*self inductance*) للمحاثة و di/dt معدل تغير التيار المار فيها بالنسبة للزمن .
فإذا كانت هناك دائرة مؤلفة من مكثف مشحون ومحاثة فقط وتركت المكثفة لتتفرغ خلال المحاثة عنئذ يؤدي تولد فرق الجهد بين طرفي هذه الأخيرة إلى شحن الأولى لتتفرغ ثانية وهكذا دواليك . أي ينتج تيار متردد في الدارة ويبقى كذلك إذا كانت المقاومة الأومية فيها مهملة .
من جهة أخرى إذا كان هناك محاثتان متجاورتان فإن تغير المجال المغناطيسي الناتج عن إحداها يؤدي لتغير التدفق خلال الثانية ليتولد فيها فرق جهد يعطى بالعلاقة :

$$(27-3) \quad \mathcal{E} = M \frac{di_1}{dt}$$

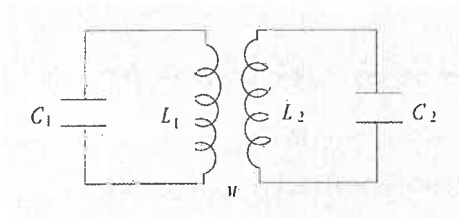
حيث M معامل الحث المشترك بينهما (*mutual inductance*) (ويكون عادة $M < L_1 L_2$) و di_1/dt معدل تغير التيار المار في المحاثة الأولى بالنسبة للزمن .

فإذا اعتبرنا دارتين كهربائيتين في كل واحدة محاثة ومكثف ، كما في الشكل (4-3) ، وكتبنا معادلة كيرشوف لكل دائرة لوجدنا :

$$(28-3) \quad L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

و

$$(29-3) \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$



الشكل (4-3)

نلاحظ أن (28-3) و (29-3) تمثلان معادلتين مرتبطتين ، لذلك نفترض أن التيارين i_1 و i_2 سيتغيران جيئياً بنفس التردد الطبيعي ω ونكتب :

$$(30-3) \quad i_1 = I_1 e^{j\omega t}$$

و

$$(31-3) \quad i_2 = I_2 e^{j\omega t}$$

(حيث نأخذ الجزء الحقيقي من الحل النهائي)

بتعويض i_1 و i_2 في (28-3) و (29-3) نحصل على المعادلتين الجبريتين التاليتين :

$$(32-3) \quad \begin{cases} i\omega L_1 I_1 - i\left(\frac{1}{\omega C_1}\right) I_1 + i\omega M I_2 = 0 \\ i\omega M I_1 - i\left(\frac{1}{\omega C_2}\right) I_2 + i\omega L_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

بوضع :

$$(33-3) \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}} \quad \text{و} \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}$$

وإصلاح المعادلتين (32-3) نجد :

$$(34-3) \quad \begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2) I_1 = \frac{M}{L_1} I_2 \\ (\omega_{02}^2 - \omega^2) I_2 = \frac{M}{L_2} I_1 \end{cases}$$

فإذا وضعنا :

$$(35-3) \quad k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

وضربنا المعادلتين (34-3) ببعضهما نجد :

$$(36-3) \quad (\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) = k^2 \omega^4$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ ω نجد الترددات الطبيعية للمنظومة

في الحالة الخاصة عندما يكون $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ نجد :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm k \omega^2$$

للمعادلة الأخيرة حلان هما :

$$\omega = -\frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}} \quad \text{و} \quad \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}$$

لكن الحل السالب مرفوض طبعاً ، لذلك نجد الترددین الطبيعيين المقبولين :

$$(38-3) \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \quad \text{و} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$$

فالتيار في كل دائرة سيكون أكبر مايمكن (حالة تجاوز (resonance)) من أجل قيمتين للتردد ω .
نلاحظ أنه في حالة ارتباط ضعيف (loose coupling) حيث تكون M و k صغيرتين فإن :

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0$$

أي أن التيار في كل دائرة يهتز بشكل مستقل عن الدائرة الثانية . أما في حالة ارتباط قوي (tight coupling) ، حيث تكون M و k كبيرتين نسبياً ، فإن الفرق بين الترددین الطبيعيين يزداد ويكون هناك نهايتين للسعة العظمى للتيار في كل دائرة .

7-3 الاهتزازات المرتبطة لـ N كتلة محملة على حبل مشدود

سندرس في هذه الفقرة الحركة الاهتزازية لعدد كبير من الهزازات المرتبطة مع بعضها ككتل متساوية m محملة على حبل مشدود بين نقطتين ، كما في الشكل (5-3) ، حيث نفترض أن المسافة بين كل كتلتين متجاورتين ثابت يساوي a ، ونبدأ ترقيم الكتل من 0 إلى $N+1$ بحيث تكون الكتلة الأولى والأخيرة ساكنتين دوماً ويبقى عدد الكتل المهتزة فعلياً N .



الشكل (5-3)

فإذا اعتبرنا الاهتزازات الشاقولية صغيرة السعة لكل كتلة ووضعنا إزاحة الكتلة r هي y_r بينما إزاحة الكتلة $r+1$ هي y_{r+1} فإننا نلاحظ من الشكل (6-3) أن :

$$a' = \frac{a}{\cos \theta_r}$$

حيث a' طول الحبل بين الكتلتين وهما مزاحتان عن وضع الاتزان .

فإذا كانت الاهتزازات صغيرة السعة عندئذ يمكن أن نضع :

$$\cos \theta_r \approx 1 - \frac{\theta_r^2}{2}$$

وتصير a' مساوية إلى :

$$a' \approx a \left(1 + \frac{\theta_r^2}{2}\right) \Rightarrow \Delta a = a' - a \approx \frac{\theta_r^2}{2}$$

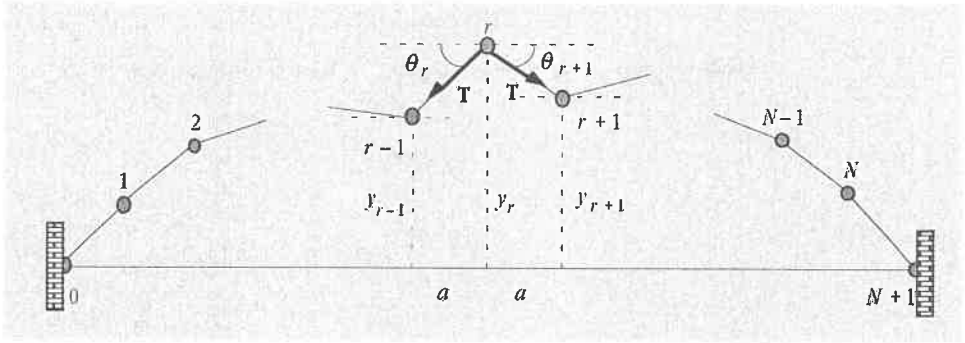
أي أن تغير طول الحبل مهمل .

بما أن هذا التغير ناتج عن تغير قيمة الشد T ولذا يمكن أن نعتبر T ثابتاً عند كل نقطة من الحبل .

نلاحظ من جهة أخرى أن محصلة القوى على الكتلة r بالاتجاه الأفقي هي :

$$-T \cos \theta_r + T \cos \theta_{r+1} \approx \frac{1}{2} T (\theta_{r+1}^2 - \theta_r^2) \approx 0$$

لأن كل من θ_r و θ_{r+1} (مقدرة بالراديان) صغيرة .



الشكل (6-3)

لنكتب الآن قانون نيوتن الثاني للكتلة r ملاحظين من الشكل (6-3) أن محصلة القوى عليها هي بالاتجاه

الشاقولي فقط فنجد :

$$F = -T(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = m\ddot{y}_r$$

لكن :

$$\sin \theta_2 = \frac{y_r - y_{r+1}}{a} \quad \text{و} \quad \sin \theta_1 = \frac{y_r - y_{r-1}}{a}$$

وتؤول (39-3) إلى :

$$m\ddot{y}_r = -T\left[\frac{y_r - y_{r-1}}{a} + \frac{y_r - y_{r+1}}{a}\right]$$

أو :

$$(40-3) \quad \ddot{y}_r = \frac{T}{ma}[y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}]$$

وبوضع

$$(41-3) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ma}}$$

تصير (40-3) :

$$(42-3) \quad \ddot{y}_r = \omega_0^2[y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}]$$

هذه هي المعادلة الأساس لاهتزازات منظومة متعددة الكتل .

لإيجاد الترددات الطبيعية للمنظومة ، نفترض أنها تهتز بتردد طبيعي ω ونكتب :

$$(43-3) \quad y_r = A_r e^{j\omega t}$$

بتعويض y_r و y_{r-1} و y_{r+1} في (42-3) نجد :

$$(44-3) \quad -A_{r-1} + \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_r - A_{r+1} = 0$$

نلاحظ أن العلاقة (44-3) تربط بين سعة الحركة لأي كتلة بحركة الكتلة التي قبلها والكتلة التي بعدها ، وتسمى **علاقة إرجاع** (recursion relation) ، يستفاد منها بوضع $r = 1, 2, 3, \dots, N$ وتطبيق الشروط

الحدودية (boundary conditions) $A_0 = A_{N+1} = 0$ ، نحصل على مجموعة N من المعادلات الجبرية في A_1 و A_2 و

\dots و A_N .

حتى يكون له (44-3) حل غير بديهي يجب أن يكون معين الأمثال مساوياً للصفر . هذا الشرط يعطي بدوره معادلة جبرية في ω من الدرجة N ، لها بشكل عام N جذر كل واحد منها يمثل تردداً طبيعياً للمنظومة المهتزة .

حالات خاصة :

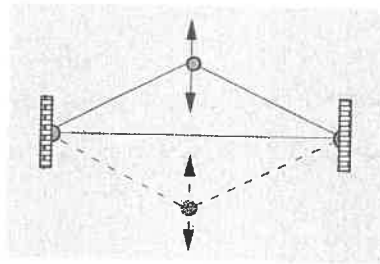
(أ) $N=1$: في هذه الحالة لا يوجد إلا كتلة مهتزة واحدة ويكون $A_0 = A_1 = 0$. لذلك تصير (44-3) على النحو :

$$\left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_1 = 0$$

مما يعني أن هناك تردد طبيعي واحد معطى بالعلاقة :

$$(45-3) \quad \omega^2 = 2\omega_0^2 = 2\frac{T}{ma}$$

يمثل الشكل (7-3) حالة منظومة وحيدة الكتلة .



الشكل (7-3)

(ب) $N=2$:

في هذه الحالة نضع $r=1$ ثم $r=2$ في (44-3) فنحصل على :

$$(46-3) \quad \begin{cases} \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 + \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

فحتى يكون حل المعادلتين (46-3) غير بديهي يجب أن يكون :

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 \\ -1 & 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{vmatrix} = 0$$

أي أن :

$$2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 \pm \omega_0^2$$

فإما أن يكون :

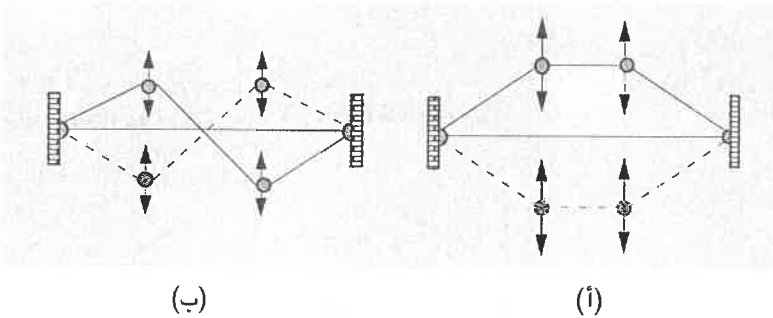
$$\omega_1^2 = 3\omega_0^2$$

أو أن :

$$\omega_2^2 = \omega_0^2$$

هذان هما الترددان الطبيعيان لهذه المنظومة .

إذا عوضنا ω_1 في (46-3) فإننا نجد $A_1 = -A_2$ أي أن حركة الكتلتين متعاكستين في الطور ، كما في الشكل (8-3 ب) ، أما إذا عوضنا ω_2 في (46-3) فنجد $A_1 = A_2$ أي أن الحركتين متوافقتين في الطور ، كما في الشكل (8-3 أ) .



الشكل (8-3)

3- 8 الترددات الطبيعية لـ N كتلة محمولة على حبل مشدود :

لإيجاد الترددات الطبيعية في هذه الحالة نعيد كتابة (44-3) بالشكل :

$$(47-3) \quad \frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}$$

نلاحظ من (47-3) أن الطرف الأيمن مستقل تماماً عن موضع الكتلة r مما يعني أن الطرف الأيسر يجب أن يكون كذلك أيضاً . لذلك نستعين بالصيغة التالية لـ A_r ونكتب :

$$(48-3) \quad A_r = C \sin r\theta$$

حيث θ ثابت نحدده من الشروط الحدودية فيما بعد .

فإذا عوضنا عن A_r و A_{r+1} و A_{r-1} في (47-3) نجد :

$$\frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = \frac{C \sin(r-1)\theta + C \sin(r+1)\theta}{C \sin r\theta} = 2 \cos \theta$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن الطرف الأيمن مستقل تماماً عن r ، أي أن فرضنا لشكل A_r صحيح .

نكتب الحل العام لحركة الكتلة r بالشكل :

$$(49-3) \quad y_r = A_r \cos(\omega t + \phi) = C \sin r\theta \cos(\omega t + \phi)$$

ويمكن تحديد الثابت θ من الشرط الحدودي $A_{r+1} = 0$ فنجد :

$$C \sin(N+1)\theta = 0$$

أي أن :

$$(50-3) \quad \theta = \frac{n\pi}{(N+1)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وتصير السعة A_r مساوية إلى :

$$(51-3) \quad A_m = C_n \sin\left(\frac{m\pi}{N+1}\right)$$

بتعويض A_r و A_{r+1} و A_{r-1} في (47-3) نجد :

$$(52-3) \quad \omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

هذه هي الترددات الطبيعية للمنظومة .

نلاحظ من (52-3) أن هناك حداً أعلى للتردد $\omega_{max} = 2\omega_0$ لا يمكن للمنظومة أن تتجاوزه خلال اهتزازها يدعى تردد القطع (cut-off frequency).

أخيراً نكتب المعادلة العامة لحركة الكتلة r في الحالة الطبيعية n بالتردد الطبيعي ω_n بالشكل :

$$(53-3) \quad y_m(t) = A_m \cos(\omega_n t + \phi)$$

حيث تعطى A_m و ω_n بالعلاقتين (51-3) و (52-3) ، على الترتيب .

لنبحث عن عدد الترددات الطبيعية الممكنة لهذه المنظومة ، أي أكبر قيمة ممكنة لـ n في العلاقة (52-3) فنلاحظ أنه عندما تتغير n من 1 إلى N فإننا نحصل على N قيمة لـ ω_n . أما عندما تصير $n = N+1$ فإن $\omega_{N+1} = 0$ ، إلا أن $A_{r,N+1} = 0$ مهما تكن r (انظر العلاقة (51-3)) ، أي أنه لا يجوز أن تصير $n = N+1$ حتى لاتنعدم حركة الكتل المختلفة كلها . وعندما $n = N+2$ فإننا نجد :

$$\omega_{N+2} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{(N+2)\pi}{2(N+1)}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(N+1)}\right)$$

أي أن :

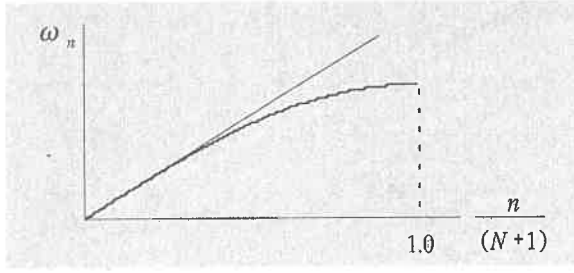
$$\omega_{N+2} = 2\omega_0 \cos\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right) = \omega_N$$

بنفس الشكل عندما $n = N+3$ فإن $\omega_{N+3} = \omega_{N-1}$ ، كما يمكن البرهان بأن $A_{r,N+2} \approx A_{r,N}$ و $A_{r,N+3} \approx A_{r,N-1}$ ، وهكذا

دواليك . فالقيمة العظمى لـ n هي N ، أي أن هناك N تردد طبيعي للمنظومة المؤلفة من N كتلة مهتزة .

يوضح الشكل (9-3) كيف يتغير ω_n مع نسبة ترتيب المتوافقة n إلى عدد الكتل $N+1$ ، حيث نلاحظ أنه

في حالة المتوافقات الأولى $n \ll N$ فإن التناسب خطي ، بينما يصير غير خطي عندما تقترب النسبة $n/(N+1)$ من الواحد ، وسنرى أهمية هذا الموضوع عند دراسة ظاهرة التبديد (dispersion) .



الشكل (9-3)

يمكن أن ندرس كيفية اهتزاز هذه المنظومة من أجل كل تردد طبيعي ممكن . فنكتب معادلة الحركة للكتلة r وهي تهتز بالتردد الطبيعي الأول $n = 1$ فنجد :

$$y_{r1}(t) = A_{r1} \cos \omega_1 t = C_1 \sin\left(\frac{r\pi}{N+1}\right) \cos \omega_1 t$$

حيث افترضنا $\phi = 0$ للسهولة .

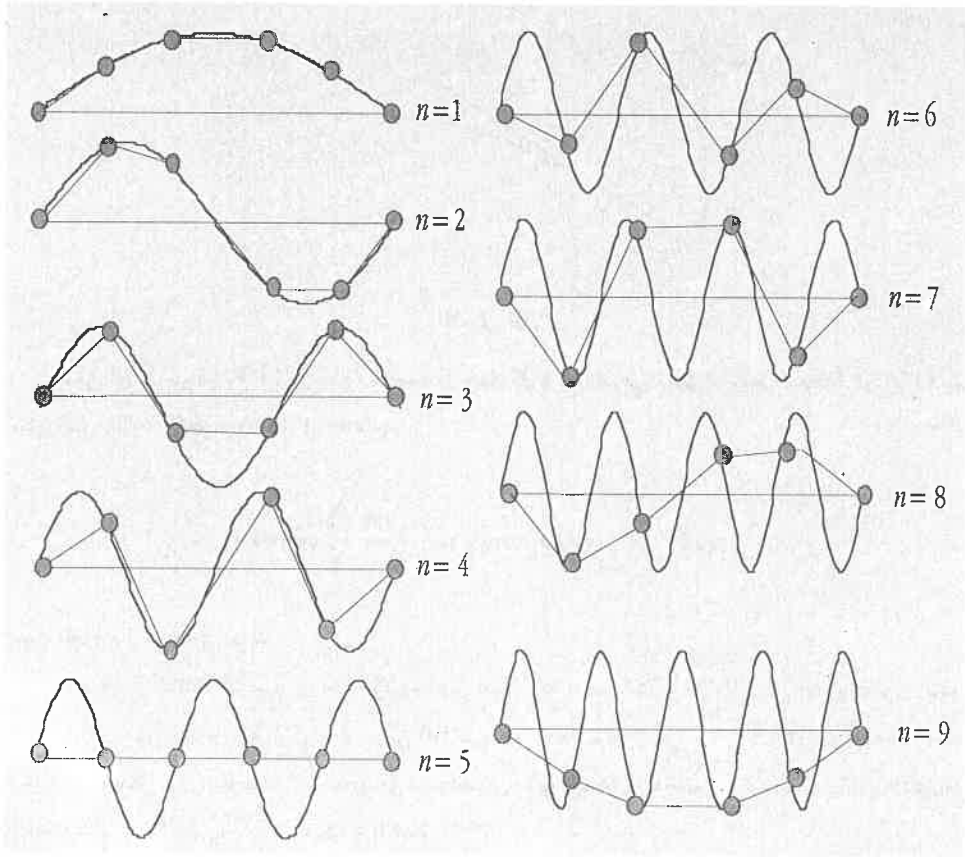
نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن كل الكتل ستهتز بتردد ω_1 بنفس الاتجاه (توافق في الطور) ولكن السعة العظمى لأي منها تعتمد على ترتيبها r . ومن الواضح أنه عندما تتغير r من 0 إلى $N+1$ فإن $\sin(r\pi/N+1)$ يتغير من الصفر مروراً بقيمة عظمى موجبة وعودة للصفر ، أي لا يمكن أن يصير سالباً ، لذلك تتحرك الكتل مع بعضها للأعلى والأسفل ، كما هو موضح بالشكل (10-3).

أما في التردد الطبيعي الثاني $n = 2$ فإن المعادلة العامة تعطي :

$$y_{r2}(t) = A_{r2} \cos \omega_2 t = C_2 \sin\left(\frac{2r\pi}{N+1}\right) \cos \omega_2 t$$

نلاحظ في هذه الحالة أن الكتل ستهتز بنفس التردد ω_2 ، لكن يمكن أن تكون السعة العظمى لبعضها موجبة في نفس الوقت التي تكون فيه السعة العظمى لغيرها سالبة ، لأنه عندما تتغير r من 0 إلى $N+1$ هذه المرة فإن $\sin(2r\pi/N+1)$ يبدأ من الصفر ويصل لقيمة عظمى موجبة ثم ينعدم ليصل بعد ذلك لقيمة عظمى سالبة ثم يعود للصفر ، وإذا كانت r عدداً فردياً فإن هناك كتلة معينة ستبقى ساكنة دائماً . فإذا كان هناك ثلاث كتل مهتزة فستبقى الكتلة التي في المنتصف ساكنة في التردد الطبيعي الثاني ، بينما تسكن إحدى الكتلتين الأخريين في التردد الطبيعي الثالث (تأكد من ذلك) .

يوضح الشكل (10-3) اهتزازات منظومة مؤلفة من أربع كتل مهتزة . فنلاحظ أن الكتل تهتز بنفس الشكل تماماً في التردد الأساس ($n = 1$) ، أي توافق في الطور بين جميع الكتل . بينما تصير أول كتلتين متعاكستين في الطور مع الأثنتين الأخريين في التردد الطبيعي الثاني ($n = 2$) ، وهكذا نواليك . ونلاحظ من الشكل (10-4) كيف تكرر المنظومة نفسها عندما تهتز بضعف المتوافقة n عندما تصير $n > 4$.



الشكل (10-3)

3-9 المعادلة الموجية (The Wave Equation)

سنوضح في هذه الفقرة كيف تنتهي المعادلة العامة لحركة منظومة مؤلفة من N كتلة متوزعة على حبل مشدود إلى معادلة موجة منتشرة في الحبل عندما يصير عدد الكتل كبيراً جداً بحيث يمكن اعتباره توزعاً مستمراً على طول الحبل .
 فإذا كتبنا المعادلة (3-42) بالشكل :

$$\frac{d^2 y_r}{dt^2} = \frac{T}{ma} (y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1})$$

إذا صار البعد بين كل كتلتين متجاورتين صغيراً بحيث نضع $a = dx$ عندئذ نجد :

$$\frac{d^2 y_r}{dt^2} = \frac{T}{m} \left(\frac{y_{r+1} - y_r}{dx} - \frac{y_r - y_{r-1}}{dx} \right)$$

أو :

$$\frac{d^2 y_r}{dt^2} = \frac{T}{m} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_x \right]$$

لكن :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_x = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

لذلك نجد :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

بوضع $m = \rho dx$ حيث ρ كثافة الكتلة الطولية على امتداد السلك ، نجد :

$$(54-3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

تدعى (54-3) المعادلة الموجية المنتشرة على الحبل وسنعود إليها بالتفصيل في الفصل التالي .

10-3 الاهتزازات المرتبطة لمنظومة مدفوعة بقوة خارجية

درسنا فيما سبق الاهتزازات المرتبطة الحرة ، ونقوم الآن بدراسة منظومة مرتبطة مدفوعة بقوة خارجية متغيرة جيبياً مع الزمن من الشكل : $F = F_0 \cos \omega t$. فنفترض أن قوة من هذا الشكل قد طبقت على البندول 1 في الشكل (1-3) ونعيد كتابة معادلة الحركة لكل بندول فنجد :

$$(55-3) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_c^2 (x_1 - x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \\ m\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \omega_c^2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

حيث نعتبر الجزء الحقيقي من الطرف الأيمن طبعاً ، كما وضعنا :

$$(56-3) \quad \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{g}{l} & \text{التردد الطبيعي} \\ \omega_c^2 = \frac{k}{m} & \text{تردد الارتباط} \end{cases}$$

من الواضح أن المنزومة ستتهتز (بعد المرحلة الانتقالية) وفق تردد القوة الخارجية. لذا نكتب الحل على النحو:

$$(57-3) \quad \begin{cases} x_1 = Ae^{i\omega t} \\ x_2 = Be^{i\omega t} \end{cases}$$

بتعويض (57-3) في (55-3) نجد (بعد الإصلاح):

$$(58-3) \quad \begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)A - \omega_c^2 B = \frac{F_0}{m} \\ -\omega_c^2 A + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)B = 0 \end{cases}$$

بحل المعادلتين بالنسبة لكل من A و B نجد:

$$(59-3) \quad \begin{cases} A = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 + \omega_c^2) - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)} \\ B = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

حيث وضعنا:

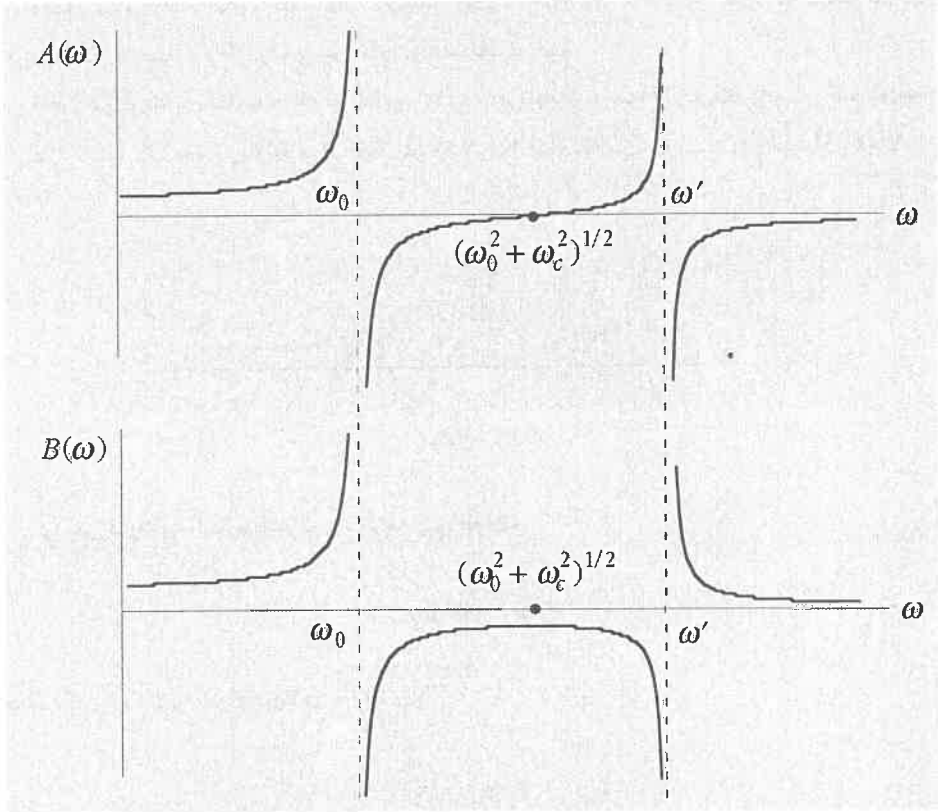
$$(60-3) \quad \omega'^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2$$

من ثم نكتب الحل النهائي للجسمين بالشكل:

$$(61-3) \quad \begin{cases} x_1 = A(\omega) \cos \omega t \\ x_2 = B(\omega) \cos \omega t \end{cases}$$

فيهتز الجسمان بتردد واحد وسعتين مختلفتين.

يوضح الشكل (11-3) كيف تتغير سعة كل جسم مع تردد القوة الخارجية حيث نلاحظ أن هناك ترددين للتجاوب في هذه الحالة هما ω_0 و ω' .



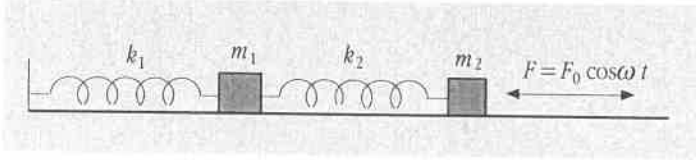
الشكل (11-3)

من الملفت للانتباه أنه عندما يكون تردد القوة الخارجية في المجال $0 \leftarrow \omega_0$ فإن A و B نفس الإشارة دوماً أي أن هناك توافقاً في الطور بين الجسمين . أما عندما يكون ω واقعاً في المجال $\omega' \leftarrow \infty$ فإن لهما إشارتين مختلفتين مما يعني أن حركتهما متعاكستان في الطور .

من الجدير ذكره أيضاً هو أنه عندما تصير $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2$ فإن $A=0$ دوماً بينما تبقى B غير معدومة مما يعني أن حركة البندول الثاني صارت مستقلة عن البندول الأول وهذا غير منطقي إذ لابد أن يبقى الارتباط بينهما مادام الزنبرك موجوداً ! بالفعل فإنه لكل منظومة حقيقية سيكون هناك بعض الاهتزازات الصغيرة للبندول الأول . أما حلنا فناتج عن إهمال التخميد ، الذي لابد أن يتواجد في أي منظومة حقيقية ، وهذا مانعته في الفقرة التالية .

3-11 الاهتزازات المرتبطة لمنظومة متخامدة مدفوعة بقوة خارجية

سندرس في هذه الفقرة كيف تهتز منظومة حقيقية مؤلفة من عدة أجزاء مترابطة عندما تُدفع بقوة خارجية متغيرة جيبياً مع الزمن مع وجود قوى تخامد مؤثرة عليها .
فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من كتلتين m_1 و m_2 مرتبطتين بواسطة الزنبركين k_1 و k_2 ، كما هو موضح بالشكل (12-3). كما نفترض أن قوى التخماد المؤثرة على كل كتلة تتناسب مع سرعتها بالنسبة للكتلة الأخرى .



الشكل (12-3)

بفرض أن القوة الخارجية تتغير مع الزمن وفق العلاقة :

$$(62-3) \quad F = F_0 \cos \omega t$$

عندئذ نكتب معادلات الحركة للكتلتين على النحو :

$$(63-3) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_0 \cos \omega t - k_2 (x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

حيث b ثابت قوة التخماد .

الآن : لإيجاد حل الحالة الدائمة ، نضع :

$$(64-3) \quad F = F_0 e^{j\omega t}$$

حيث نأخذ الجزء الحقيقي فقط ، ونفترض أن x_1 و x_2 ستتغيران بنفس الشكل ، أي أن :

$$(65-3) \quad \begin{cases} x_1 = A e^{j\omega t} \\ x_2 = B e^{j\omega t} \end{cases}$$

بتعويض (64-3) و (65-3) في (63-3) والإصلاح نجد العلاقتين التاليتين :

$$(66-3) \quad \begin{cases} [(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) + i(b\omega)]A - [k_2 + ib\omega]B = 0 \\ -[k_2 + ir\omega]A + [(-m_2\omega^2 + k_2) + i(r\omega)]B = F_0 \end{cases}$$

العلاقتين الأخيرتين خطيتان بطرف ثان ، نجد حلبيهما بطريقة كرامير (Cramer's method) التي تعطى حل معادلتين جبريتين من الشكل :

$$(67-3) \quad \begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = g \end{cases}$$

بالعلاقتين :

$$(68-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} , \quad x = \frac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{array} \right.$$

يترك للطالب أن يحل (66-3) عندما يكون $k_1 = k_2 = k$ و $m = m_2 = m$

12-3 حل معادلات منظومة مهتزة بطريقة المصفوفات

أخيرا سندرس كيف نحل جملة معادلات تفاضلية لمنظومة مرتبطة مؤلفة من N هزاز ذات n درجة حرية بطريقة المصفوفات . بحقيقة الأمر فإن هذه المعالجة لا تختلف عن تلك التي استعملناها في حالة هزازين مرتبطين ، إلا أن إيجاد الترددات الطبيعية في هذه الحالة سيكون أسهل خاصة أن عدد الاحتمالات الممكنة يساوي عدد درجات الحرية للمنظومة ، أي n .

فنقترض أننا كتبنا المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الإحداثيات العامة q_1, q_2, \dots, q_n ، بالشكل :

$$(69-3) \quad \begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \dots + m_{1n}\ddot{q}_n + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \dots + k_{1n}q_n = 0 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \dots + m_{2n}\ddot{q}_n + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \dots + k_{2n}q_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_{n1}\ddot{q}_1 + m_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + m_{nn}\ddot{q}_n + k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \dots + k_{nn}q_n = 0 \end{cases}$$

حيث تدل m_{ij} على معامل الكتلة في المنظومة (inertia) و k_{ij} على معامل المرونة (stiffness)

نكتب العلاقة (69-3) بطريقة المصفوفات على النحو :

$$(70-3) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = 0$$

أو بالشكل المختصر :

$$(71-3) \quad [M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0$$

حيث تدعى $[M]$ مصفوفة العطالة (inertia matrix) و $[K]$ مصفوفة المرونة (stiffness matrix) .
نعيد كتابة (71-3) على النحو :

$$(72-3) \quad \{\ddot{q}\} + [M]^{-1}[K] \{q\} = 0$$

أو :

$$(73-3) \quad \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = 0$$

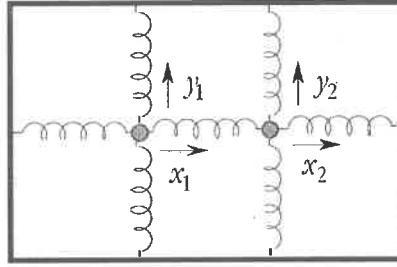
حيث تدعى $[C]$ المصفوفة التحريكية (dynamic matrix) .
نحصل على الترددات الطبيعية للمنظومة من المعادلة المميزة :

$$(74-3) \quad |\lambda I - C| = 0$$

حيث I مصفوفة الوحدة ، كما نعلم من نظرية المصفوفات . نوضح هذا في المثل التالي :

مثل توضيحي : الاهتزازات المرتبطة في بعدين

لنوجد الترددات الطبيعية للمنظومة الموضحة في الشكل (13-3) بفرض أن كل الزنبركات متماثلة (k) وكذلك الكتل (m) . تكمن أهمية هذا المثل في أنه يشبه توزيع الذرات في بلورة مستوية .



الشكل (13-3)

إذا كانت الاهتزازات صغيرة السعة عندئذ يمكن اعتبار الحركة الأفقية مستقلة عن الحركة الرأسية ،
ونكتب معادلة الحركة للكتل بالشكل :

$$(75-3) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \\ m\ddot{y}_1 + 2ky_1 = 0 \\ m\ddot{y}_2 + 2ky_2 = 0 \end{cases}$$

حيث نلاحظ أن الارتباط يتم بالاتجاه الأفقي فقط ، بينما تبقى الحركة الرأسية لكل كتلة مستقلة عن الأخرى .
بوضع $x_1 = q_1$ و $x_2 = q_2$ و $y_1 = q_3$ و $y_2 = q_4$ والتعويض في (71-3) نجد المعادلة التالية :

$$(76-3) \quad \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & -2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0$$

حيث نلاحظ أن مصفوفة العطالة هي :

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

ومصفوفة المرونة :

$$[k] = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & -2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

من ثم نجد المصفوفة التحريكية :

$$[C] = [M]^{-1}[k]$$

أو

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & -2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{m} \end{bmatrix}$$

ثم نجد من (74-3) :

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \lambda - \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \frac{2k}{m} \end{vmatrix} = 0$$

ونحصل على المعادلة المميزة للترددات الطبيعية بكتابة :

$$\|\lambda I - C\| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & \lambda - \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \frac{2k}{m} \end{vmatrix} = 0$$

أي أن :

$$\left(\lambda - \frac{2k}{m}\right)^4 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 \left(\lambda - \frac{2k}{m}\right)^2 = 0$$

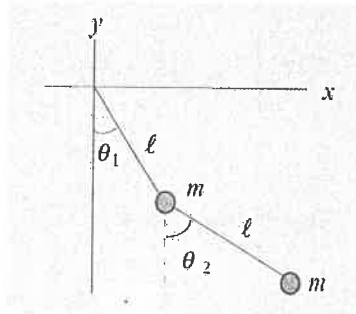
بحل المعادلة السابقة بالنسبة لـ λ نجد الترددات الطبيعية التالية :

$$\omega_{1,2} = \lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_3 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad \omega_4 = \lambda_4 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

فلمنظومة أربعة ترددات طبيعية ، كما هو متوقع ، إثنان منها متساويان يمثلان حالة تفسخ (*degeneracy*) ، أي أن للمنظومة حالتان طبيعيتان لهما نفس الطاقة ! لهذا الموضوع أهمية كبيرة في الفيزياء الكمية .

3- 13 أمثلة

مثال 3-13-1 ماهي الترددات الطبيعية للبنولين الموضحين بالشكل (3-14) ؟



الشكل (3-14)

الحل : سنقوم بحل هذا المثل بوساطة معادلات لاغرانج لسهولة حلها في هذه الحالة .

نحدد أولاً إحداثيات كل كتلة بالعلاقات :

$$x_1 = l \sin \theta_1 \quad , \quad y_1 = l \cos \theta_1$$

$$x_2 = l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad , \quad y_2 = -l(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

ثم نكتب الطاقة الحركية والطاقة الكامنة لكل منها :

$$T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$V_1 = mgy_1 = -mgl \cos \theta_1$$

و

كذلك :

$$T_2 = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \quad , \quad V_2 = mgy_2 = -mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

حيث افترضنا أن الاهتزازات صغيرة السعة بحيث يمكن استخدام التقريب $\sin \alpha \approx \alpha$ و $\cos \alpha \approx 1$ إذا كانت α صغيرة .

ثم نكتب دالة لاغرانج ، $L = T - V$ ، لكل إحداثي :

$$i = 1, 2 \quad \text{حيث} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

فنجد بعد قليل من العمليات الجبرية :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \theta_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 = 0$$

و

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \theta_2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 = 0$$

نلاحظ مباشرة من العلاقتين الأخيرتين أنه لو اختفى أحد البندولين (θ_1 أو θ_2) لآلت معادلة البندول الآخر

لذلك الموافقة لبندول بسيط .

لإيجاد الترددات الطبيعية للمنظومة ، نفترض أنها ستتهتز بأحدها ω ، ونكتب حل كل إحداثي بالشكل :

$$\theta_1 = A \cos \omega t$$

$$\theta_2 = B \cos \omega t$$

بتعويض هذين الحلين في معادلتَي الحركة والإصلاح نصل للمعادلتين الجبريتين :

$$\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)A - \left(\frac{1}{2}\omega^2\right)B = 0$$

$$-\left(\omega^2\right)A + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)B = 0$$

كما نضع شرط عدم كون حل العلاقتين الأخيرتين بديهياً ($A=B=0$) ، هو :

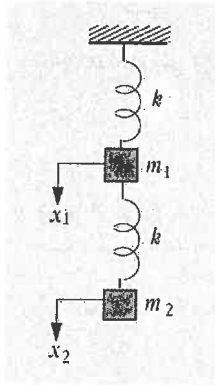
$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

يفك هذا المعين نجد الترددین المطلوبین :

$$\omega_2 = 1.86\sqrt{g/l} \quad , \quad \omega_1 = 0.75\sqrt{g/l}$$

(سؤال : ما الشروط الابتدائية اللازمة لجعل المنظومة تهتز بأحد هذين الترددین فقط ؟)

مثال 2-13-3 تخضع m_1 في الشكل (15-3) لقوة تخامد متناسبة مع سرعتها اللحظية بالنسبة للجدار وأخرى متناسبة مع سرعتها اللحظية بالنسبة لـ m_2 ، بينما تخضع m_2 لقوة تخامد متناسبة مع سرعتها اللحظية بالنسبة لـ m_1 فقط . ادرس حركة المنظومة إذا كان $m_1 = m_2 = m$ و $k_1 = k_2 = k$ ، بفرض أن الشروط الابتدائية هي $x_2(0) = a$ و $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ، وأن ثابت قوة التخامد b واحد للكتلتين :



الشكل (15-3)

الحل : نكتب معادلات الحركة لـ m_1 بالشكل :

$$(1) \quad m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b \dot{x}_1 - r (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

كذلك بالنسبة لـ m_2 :

$$(2) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

لإيجاد حل المعادلتين (1) و (2) نلاحظ أن الحركة المتخامدة يمكن أن تكون اهتزازية أو غير اهتزازية ، لذلك نفترض أن الحلين من الشكل :

$$(3) \quad x_1 = Ae^{\alpha t}$$

و

$$(4) \quad x_2 = Be^{\alpha t}$$

حيث يمكن أن يحوي α جزءاً حقيقياً (الجزء المتخامد) وآخر تخيلياً (الجزء الاهتزازي) .
بتعويض (3) و (4) في (1) و (2) والإصلاح نجد :

$$(5) \quad \begin{cases} (m\alpha^2 + 2b\alpha + 2k)A - (b\alpha + k)B = 0 \\ -(b\alpha + k)A + (m\alpha^2 + b\alpha + k)B = 0 \end{cases}$$

كما في الحركة غير المتخامدة ، فإن شرط كون حل العلاقتين السابقتين غير بديهي هو :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} m\alpha^2 + 2b\alpha + 2k & -(b\alpha + k) \\ -(b\alpha + k) & m\alpha^2 + b\alpha + k \end{vmatrix} = 0$$

من الواضح أن حل هذا المعين سيعطي أربع قيم لـ α مما يعني أن الحل الكلي لكل من x_1 و x_2 هو من الشكل :

$$(7) \quad \begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + A_4 e^{\alpha_4 t} \\ x_2(t) = B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t} + B_3 e^{\alpha_3 t} + B_4 e^{\alpha_4 t} \end{cases}$$

حيث يمكن تحديد الثوابت A_i و B_i من الشروط الابتدائية والعلاقتين (5) . يترك للطالب إتمام الحل !!!

مسائل

1-3 برهن أن الطاقة الكلية لبندولين متماثلين كتلة الواحد m وطوله l مرتبطين بوساطة زنبرك k ، كما في الشكل

$$(1-3) \quad E = \frac{1}{2}\alpha X^2 + \frac{1}{2}\beta Y^2 + \frac{1}{2}\gamma \dot{X}^2 + \frac{1}{2}\delta \dot{Y}^2$$

و α و β و γ و δ بدلالة m و l و k و g .

2-3 ادرس حركة بندولين كتلة الأول m_1 وطوله l وكتلة الثاني m_2 وطوله l أيضاً مرتبطين ببعضهما بوساطة

$$Y = x_1 - x_2 \quad \text{و} \quad X = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$$

برهن أن الإحداثيات الطبيعية هي $(1-3)$.

وأن التردد الطبيعي الموافق لـ X هو $\omega_1^2 = g/l$ و لـ Y هو $\omega_2^2 = g/l + k(1/m_1 + 1/m_2)$. لاحظ أن X هو إحداثي مركز الكتلة و Y هو إحداثي الحركة النسبية بكتلة مساوية للكتلة المختزلة .

3-3 تخضع الكتلة m_1 في المسألة 2-3 إلى قوة أفقية دافعة من الشكل $F = F_0 \cos \omega t$. برهن أن شرط بقاء m_1

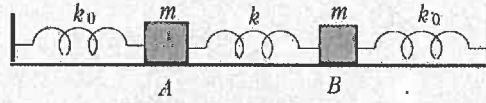
$$\text{ساكنة دوماً هو أن يكون } \omega^2 = k/m_1$$

4-3 (أ) مامعادلة الحركة لكل كتلة في المنظومة الموضحة بالشكل (16-3) وما الترددات الطبيعية لها ؟ (ب) ما تردد

الكتلة B عندما تبقى A مثبتة في مكانها إذا علمت أنه لو ثبتت B وتركت A لتتهتز كان ترددها 1.81 Hz وأن

تردد الحالة الطبيعية الأقل لو تركت كلاهما لتتهتز هو 1.14 Hz ؟ (ج) ما التردد الطبيعي المرتفع للمنظومة عندما

تهتز A و B (د) ما النسبة k/k_0 ؟

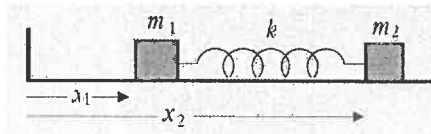


الشكل (16-3)

5-3 ترتبط الكتلتان m_1 و m_2 ببعضهما بوساطة الزنبرك k وتتحركان على المحور ox ، كما في الشكل (17-3) .

اكتب معادلة الحركة لكل منهما وبرهن أن الحركة الكلية هي اهتزازية بسيطة للكتلة المختزلة μ (reduced mass)

$$\text{حيث: } \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{وأن ترددها } \omega^2 = k/\mu$$

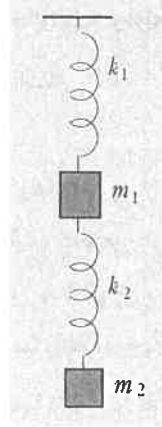


الشكل (17-3)

6-3 ترتبط الكتلتان المتساويتان $m_1 = m_2 = m$ بالزنبركين المتماثلين $k_1 = k_2 = k$ ، كما في الشكل (18-3) . برهن أن

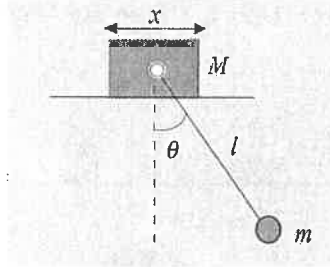
ترددات الحالات الطبيعية تعطى بالعلاقة : $\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5}) \frac{k}{2m}$ وبرهن أيضاً أن نسبة سعة الكتلة العليا إلى

السفلى هي $\frac{1}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$. هل يجب أخذ قوة الجاذبية بعين الاعتبار في هذه المسألة ؟ علل إجابتك .



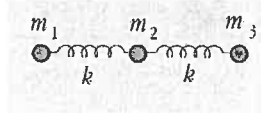
الشكل (18-3)

7-3 ما الترددات الطبيعية للمنظومة الموضحة بالشكل (19-3) إذا كانت M تنزلق على المستوي الأفقي بدون احتكاك ؟



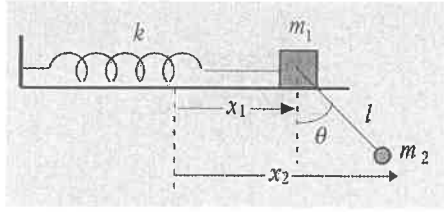
الشكل (19-3)

8-3 يمكن تمثيل جزيء CO_2 بكتلة m_2 متصلة بكتلتين متماثلتين $m_1 = m_3$ بوساطة زنبركين متماثلين k ، كما في الشكل (20-3) . (أ) اكتب معادلة الحركة لكل كتلة وجد الترددات الطبيعية للمنظومة . (ب) مانسبة الترددين الطبيعيين الناتجين إذا كانت $m_1 = 16u$ و $m_2 = 12u$ ، حيث تدل u على وحدة الكتل الذرية ؟



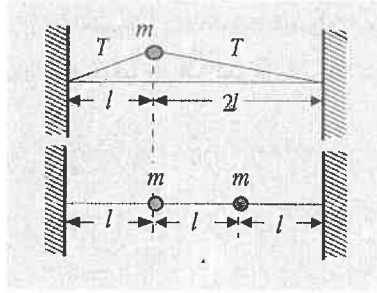
الشكل (20-3)

9-3 ما معادلات الحركة والحالات الطبيعية للمنظومة الموضحة بالشكل (21-3) إذا علمت أن m_1 تتحرك على المستوي الأفقي بدون احتكاك وأن m_2 تقوم باهتزازات صغيرة وأن $m_1 = m_2$ و $g/l \ll k/m$ ؟



الشكل (21-3)

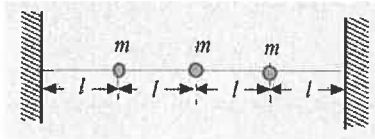
10-3 يثبت سلك طوله $2l$ بين نقطتين بحيث يبلغ الشد فيه T ثم توضع كتلة m على بعد l من أحد طرفيه ، كما في الشكل (22-3) . (أ) اكتب معادلة الحركة لـ m عندما تقوم باهتزازات شاقولية صغيرة السعة . (ب) توضع كتلة ثانية m على بعد l من الطرف الآخر للحبل بحيث يبقى الشد في كل جزء منه T . جد الحالات الطبيعية وارسم شكل الحبل للحالتين الطبيعيتين الناتجتين .



الشكل (22-3)

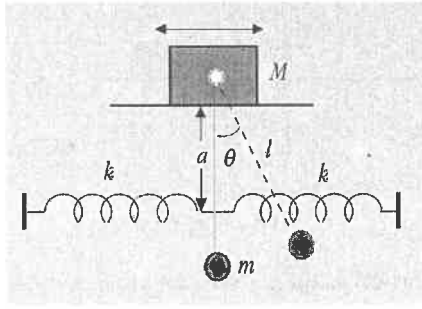
11-3 توضع ثلاث كتل متساوية على سلك مشدود بين نقطتين طوله $4l$ والشد فيه T ، كما في الشكل (23-3) . (أ) اكتب معادلات الحركة للاهتزازات الشاقولية صغيرة السعة للكتل الثلاث . (ب) يمكن الحصول على الحالات الطبيعية برسم منحنى جيبي (sine) بحيث يمر بنقطتي التثبيت A و B . ارسم هذه المنحنيات لتحديد القيم النسبية للسعات A_1 و A_2 و A_3 لكل حالة طبيعية ممكنة . (ج) عوض $y_i = A_i \sin \omega t$ ($i=1,2,3$) في معادلات الحركة التي كتبتها في (أ) واستخدم النسب $A_1:A_2:A_3$ التي وجدتها في (ب) لتحديد الترددات الطبيعية للمنظومة وبرهن

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{T}{ma} (2 \pm \sqrt{2}) \quad \text{و} \quad \omega_1^2 = \frac{2T}{ma} \quad \text{أنها}$$



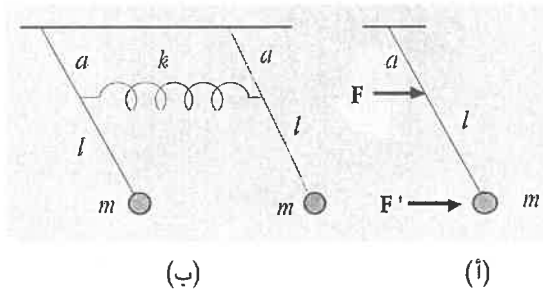
الشكل (23-3)

12-3 جد الترددات الطبيعية للمنظومة الموضحة بالشكل (24-3) من أجل اهتزازات صغيرة لـ m .



الشكل (24-3)

13-3 يخضع بندول بسيط إلى قوة أفقية F مطبقة عند نقطة تبعد مسافة a عن نقطة تعليقه ، كما في الشكل (25-3) (أ). عند أي زاوية سيتزن النظام ؟ (اعتبر زوايا صغيرة فقط) . (ب) ما القوة F' المطبقة عند m والتي ستعطي نفس حالة الاتزان في (أ) ؟ (ج) اكتب معادلات الحركة للبندولين الموضحين بالشكل (25-3) (ب) في حالة الاهتزازات الصغيرة . (د) جد الترددات الطبيعية وصف الحركة لكل حالة طبيعية .



الشكل (25-3)

14-3 يرتبط بندولان متماثلان ببعضهما بواسطة زنبرك ، كما في الشكل (1-3) فوجد أنه عندما يمنع أحدهما عن الحركة ويترك الآخر ليهتز فإن دوره يكون 1.25 s . (أ) ما الترددات الطبيعية للمنظومة إذا ترك البندول الثاني ليهتز بشكل حر مع الأول علماً بأن طول الواحد هو 0.4 m ؟ (ب) ما دور حركة أي من البندولين إذا أزيح أحدهما مسافة معينة وترك ليهتز بينما كان الآخر ساكناً لحظة البدء ؟

15-3 يخضع أحد البندولين في الشكل (1-3) إلى قوة دافعة من الشكل $F = F_0 \cos \omega t$. (أ) اكتب معادلة الحركة بدلالة x_1 و x_2 ثم حول للإحداثيات الطبيعية $X = x_1 + x_2$ و $Y = x_1 - x_2$ وبرهن أن معادلات الحركة لهما تماثل حركة اهتزازية متخامدة مدفوعة بقوة خارجية F . (ب) حل معادلات الحركة للإحداثيات الطبيعية وبرهن أنه إذا أهملنا التخامد F فإن معادلتني x_1 و x_2 تصيران على النحو :

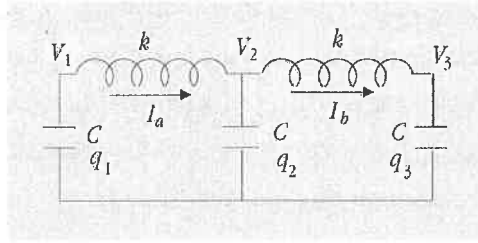
$$x_1 \approx \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]$$

$$x_2 \approx \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]$$

حيث $\omega_1^2 = g/l$ و $\omega_2^2 = g/l + 2k/m$ ، (ج) برهن أن :

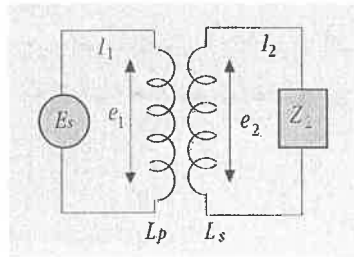
$$\frac{x_2}{x_1} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}$$

16-3 يوضح الشكل (26-3) دارتين كهربائيتين مرتبطتين بوساطة المكثف C_2 . اكتب معادلة التيارين I_b و I_a وجد الإحداثيات الطبيعية الملائمة والترددات الطبيعية المرافقة لها ما النسبة I_a/I_b لكل تردد طبيعي ؟



الشكل (26-3)

17-3 يرتبط مولد كهربائي E بحمولة Z_2 (محطة توزيع كهرباء في المدينة مثلاً) بوساطة محوّل كما في الشكل (27-3) بحيث أن معادلات التيار في كل فرع هي $E = -e_1 = i\omega L_p I_1 - i\omega M I_2$ و $I_2 Z_2 = e_2 = i\omega M I_1 - i\omega L_s I_2$ ما الممانعة الكلية للمنظومة التي يراها المولّد والمعرفة بالنسبة E/I_1 ؟



الشكل (27-3)

الحركة الموجية

(Wave Motion)

4-1 تمهيد

درسنا في الفصلين الأول والثاني الحركة الاهتزازية الحرة والقسرية لجسم واحد ووجدنا في الفصل الثالث أنه إذا ارتبط جسمان ببعضهما بواسطة عامل مشترك فإن اهتزازات أحدهما تنتقل إلى الآخر ، ولو كان هناك أكثر من جسمين لانتقلت الاهتزازات إلى كل واحد منها . نقول عندها إن موجة قد انتشرت في الوسط الحاوي على هذه الهزانات .

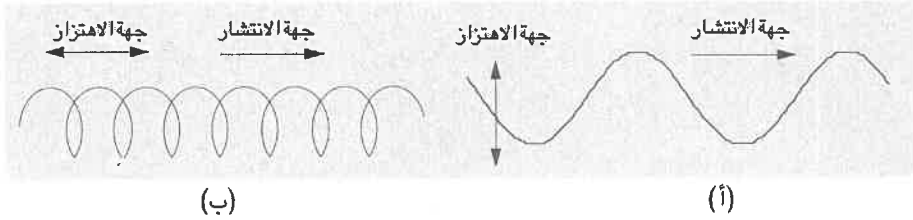
تتميز بعض الأمواج بوجود عامل ارتباط مشترك بين أجزاء الوسط الذي تنتشر فيه الموجة ، كالزنبك بين كتلتين ، الذي لولاه لما انتقلت الاهتزازات من جسم لآخر . لذلك نقول إن انتشار هذه الأمواج يحتاج لوسط ناقل ، هذا مانعرقه عن الصوت مثلاً الذي لاينتقل في منطقة مفرغة من الهواء . يطلق على هذا النوع من الأمواج اسم أمواج ميكانيكية (Mechanical Waves) . إلا أن ضرورة وجود وسط ناقل لانتشار الأمواج قد أدى في القرن التاسع عشر إلى خلق معضلة للفيزيائيين إذ أن الضوء بحسب معادلات ماكسويل كان يعتبر حركة موجية خالصة ومن ثم فهو يحتاج لوسط لينتشر في الفضاء . وقد افترض لفترة طويلة أن هناك وسط كهذا يملأ الفضاء وأطلق عليه اسم الأثير (ether) وظل هذا الاعتقاد مقبولاً إلى أن قام مايكلسون ومورلي (Michelson & Morely) بتجربتهما المشهورة التي أكدت أنه لاوجود للأثير، ثم بين أينشتين بعد ذلك أن لاضرورة لوجوده أصلاً ، لذلك يطلق على الضوء اسم أمواج كهرومغناطيسية (Electromagnetic Waves) وهي مماثلة للأمواج الميكانيكية عموماً من حيث تفاعلها مع بعضها ، وانعكاسها ، ونفوذها من وسط لآخر ، إلا أنها تختلف بطبيعتها عنها ، كما ذكرنا آنفاً .

سندرس في هذا الفصل الخواص العامة للأمواج الميكانيكية والكهرومغناطيسية ، فنكتب المعادلة الموجية لها ونحدد طرق وسرعة انتقالها ، ثم ندرس انعكاسها وتداخلها وحيودها عند وصولها لحواجز فاصلة بين أوساط مختلفة .

4-2 الحركة الموجية (Wave Motion)

لوأمسكنا بطرف حبل طويل مشدود مثلاً وقمنا بهزه للأعلى والأسفل للاحظنا أن نقاط الحبل تتبع نفس حركة المنبع (طرف الحبل) بشكل متتال بحيث أنه بعد فترة زمنية معينة تصير كل أجزاء الحبل تهتز للأعلى والأسفل ، كما في الشكل (4-1أ) ، ونقول إن حركة موجية قد انتشرت على امتداد الحبل . فالحركة الموجية هي انتشار الحركة الاهتزازية من جسم لآخر . نلاحظ في هذه الحالة أن جهة اهتزاز كل نقطة من الحبل تعامد جهة انتشار الموجة . هذا ما يطلق عليه اسم موجة مستعرضة (transverse wave) .

بنفس المنطق لو تابعتنا حلقات زنبرك عندما ندفع إحداها لليمين أو اليسار فإننا نلاحظ أن بقية الحلقات ستهتز بنفس الاتجاه بعد فترة زمنية ما ، كما في الشكل (4-2 ب) ، نقول في هذه الحالة أيضاً إن موجة طولية (*longitudinal wave*) قد انتشرت على امتداد الزنبرك .



الشكل (4-1)

في كلا النوعين من الأمواج لا يمكن أن تولد موجة بدون وجود منبع اهتزازي ، بينما يمكن لجسم أن يهتز دون أن يؤدي ذلك لتوليد موجة .

يعتبر الصوت والضوء أهم مثلين على انتشار الأمواج الطولية والمستعرضة ، على الترتيب ، ففي الحالة الأولى تهتز ذرات الهواء ، أو الوسط الذي يوجد فيه المنبع الصوتي ، بنفس الاتجاه الذي ينتشر فيه الصوت ، أما في الحالة الثانية فإن المجالين الكهربائي والمغناطيسي المؤلفين للشعاع الضوئي يهتزان باتجاهين عموديين على جهة انتشار الضوء نفسه .

3-4 المعادلة الموجية (*Wave Equation*)

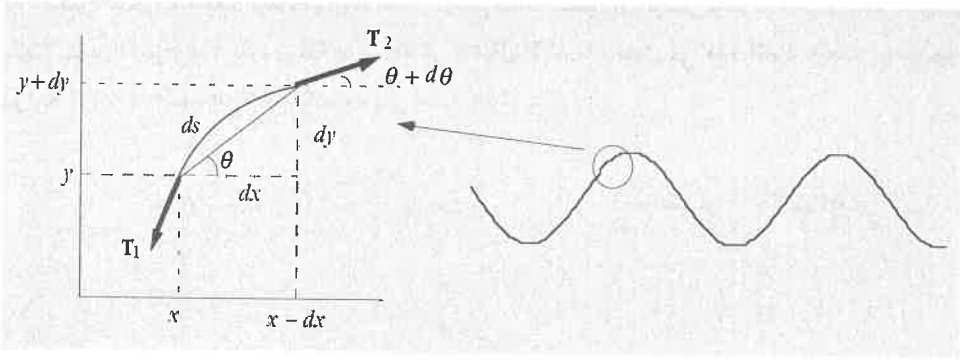
سنشتق في هذه الفقرة المعادلة الأساس للحركة الموجية التي هي معادلة الحركة لنقطة من وسط كبير تنتشر فيه موجة صادرة عن منبع نتيجة مؤثر خارجي ، كاهتزاز طرف حبل مشدود بوساطة رنانة كهربائية أو اهتزاز ذرات الهواء بالقرب من حجرة شخص يتكلم ، وهكذا .

فإذا اعتبرنا الحركة الموجية المنتشرة على امتداد حبل طويل جداً ، بحيث يمكن إهمال تأثير الطرف البعيد حتى لا يؤدي ذلك لانعكاس الأمواج عنده ، وأخذنا عنصراً صغيراً طولاً dl وكتلته dm ، كما في الشكل (4-2)، وكتبنا معادلة الحركة له من قانون نيوتن الثاني ، نجد :

$$dF = (dm)a \quad (1-4)$$

فإذا افترضنا أن الكثافة الكتلية للحبل هي ρ عندئذ تصير الكتلة :

$$dm \approx \rho dl \approx \rho dx \quad (2-4)$$



الشكل (2-4)

نظراً لأن حركة كل طول عنصري من الحبل تتم بالاتجاه الشاقولي فقط (لماذا ؟) لذلك يجب أن يكون :

$$(3-4) \quad T_1 = T_2$$

وتصير معادلة الحركة على النحو :

$$(4-4) \quad T \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta = (\rho dx) \frac{d^2 y}{dt^2}$$

ولكن :

$$(5-4) \quad \sin(\theta + d\theta) = \sin \theta \cos d\theta + \cos \theta \sin d\theta \approx \sin \theta + \cos \theta d\theta$$

حيث وضعنا $\cos d\theta \approx 1$ و $\sin d\theta \approx d\theta$. لذا نقول معادلة الحركة إلى :

$$(6-4) \quad T \cos \theta d\theta = (\rho dx) \frac{d^2 y}{dt^2} = T d(\sin \theta) = (\rho dx) \frac{d^2 y}{dt^2}$$

ولكن :

$$(7-4) \quad \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin \theta) \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$$

لذلك تصير معادلة الحركة على النحو :

$$(8-4) \quad T \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \rho \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

أو :

$$(9-4) \quad \frac{T}{\rho} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

حيث وضحنا أن المشتقات هي جزئية (partial) لأن y يعتمد على الزمن t ، وموضع العنصر x على امتداد الحبل .

تمثل العلاقة (9-4) المعادلة الموجية (The Wave Equation) وتتنطبق على كل أنواع الأمواج سواء كانت مستعرضة أم طولية .

4-4 الحل العام للمعادلة الموجية

من الواضح أن الحل العام للمعادلة التفاضلية (1-4) سيكون دالة (function) لكل من الزمن t والموضع x يعطى بالشكل :

$$(10-4) \quad y(x, t) = f(ct + x) + g(ct - x)$$

حيث f و g أي دالتين لـ t و x بينما c ثابت يحقق (9-4) .

للتأكد من صحة هذا الفرض نضع $\xi = ct + x$ و $\eta = ct - x$ فتصير (10-4) على النحو :

$$(11-4) \quad y(x, t) = f(\xi) + g(\eta)$$

ونأخذ المشتقات :

$$(12-4) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} - \frac{dg}{d\eta}$$

ومنه :

$$(13-4) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{d^2 g}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2}$$

وكذلك :

$$(14-4) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta}$$

ومنه :

$$(15-4) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{d^2 g}{dx^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + c^2 \frac{d^2 g}{dx^2}$$

بتعويض هذه المشتقات في (9-4) نجد أنها محققة دوماً مما يعني أن الحل المفترض صحيح طالما أن لكل من f و g مشتقات من الدرجة الثانية ، وكان الثابت c يحقق العلاقة :

$$(16-4) \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

لمعرفة شكل f و g نلاحظ أن كل نقطة من وسط تنتشر فيه موجة ما تهتز بشكل توافقي بسيط ، أي أنه يجب أن يكون كلاً من f و g دالة جيبية على النحو :

$$(17-4) \quad y(x, t) = A \sin(\omega t - \phi)$$

أو

$$(18-4) \quad y(x, t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

لكن وحدة المقدار $(ct \pm x)$ هي طول بينما وحدة $(\omega t - \phi)$ هي الراديان ، لذلك لتحويل الحد الأول إلى راديان وإدخاله في دالة جيبية نضربه بالمقدار $2\pi/\lambda$ ، حيث λ طول يدعى طول الموجة (*wave length*) ، ونكتب :

$$(19-4) \quad f = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ct + x)$$

أو

$$f = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct + x)$$

وكذلك بالنسبة لـ g باستبدال الإشارة الموجبة بإشارة سالبة .

ويصير الحل العام للمعادلة الموجية على النحو :

$$(20-4) \quad y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct \pm x)$$

أو :

$$(21-4) \quad y(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ct \pm x)$$

يمكن دمج (20-4) و (21-4) معاً على النحو :

$$(22-4) \quad y(x, t) = Ae^{i(\omega t \pm kx)}$$

حيث وضعنا :

$$(23-4) \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi f$$

يدعى ω التردد الزاوي (angular frequency) ، بينما يسمى f التردد (frequency) ويرتبط بـ λ و c وفق العلاقة :

$$(24-4) \quad f = \frac{c}{\lambda}$$

كما وضعنا :

$$(25-4) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

ويدعى العدد الموجي (wave number) .

تدل الإشارة الموجية في (22-4) على أن جهة انتشار الموجة من اليمين لليسار ، أي باتجاه محور السينات السالب ، بينما تدل الإشارة السالبة على أن جهة الانتشار من اليسار لليمين ، أي باتجاه محور السينات الموجب .

من جهة أخرى فإن العلاقة (22-4) غير حقيقية لأنها تحوي عدداً تخيلياً إلا أننا نعتمد الجزء الحقيقي $(\cos(\omega t \pm kx))$ ، أو الجزء التخيلي $(\sin(\omega t \pm kx))$ ، بحسب الشروط الابتدائية المفروضة .

5-4 سرعة الانتشار وسرعة الاهتزاز

وجدنا في الفقرة السابقة أن الحل العام للمعادلة الموجية يكتب على النحو :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

تمثل هذه المعادلة إزاحة أي نقطة من وسط تنتشر فيه موجة سرعتها الزاوية ω ، عن وضع الاتزان .

يمكن إيجاد سرعة الاهتزاز لأي نقطة من الوسط المهتز بأخذ المشتق :

$$(26-4) \quad v = \frac{\partial y'}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx)$$

ولكن :

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = -kA \sin(\omega t - kx)$$

أي أن :

$$(27-4) \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\omega}{k} \frac{\partial y'}{\partial x} = c \frac{\partial y'}{\partial x}$$

حيث :

$$(28-4) \quad c = \frac{\omega}{k}$$

تدل c على سرعة الانتشار للموجة من نقطة لأخرى في الوسط . ويمكن فهمها بسهولة إذا كتبنا :

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

لكن بحسب (27-4) نجد :

$$(29-4) \quad c = \frac{\partial x}{\partial t}$$

تعطي العلاقة الأخيرة سرعة حركة جسم على محور السينات ، كما نعلم ، أي أن سرعة انتشار الموجة مكافئة لجسم يتحرك على محور السينات تماماً .

4-6 الممانعة المميزة (Characteristic Impedance)

من البديهي أن تعتمد سرعة انتشار موجة في وسط ما على "مرونته" ، كانتشار موجة في الماء أو في وسط لزج ، كالزيت أو القطران ، إذ تكون سرعة الأمواج في الأول أكبر مما هي عليه في الثاني أو الثالث . لذلك نقول إن كل وسط يمانع الحركة الموجية فيه بحسب طبيعته . يطلق على هذه الخاصة اسم الممانعة المميزة (characteristic impedance) ويرمز لها بـ Z .
نعرف الممانعة المميزة لوسط بالعلاقة :

$$(30-4) \quad Z = \frac{F}{v}$$

حيث F القوة المحركة التي تسبب الحركة الموجية ، و v سرعة اهتزاز نقاط الوسط .
فإذا افترضنا أن لدينا حبلًا مشدوداً من طرفه بقوة F متغيرة على النحو :

$$(31-4) \quad F = F_0 e^{j\omega t}$$

(حيث نأخذ الجزء الحقيقي منها فقط) ولاحظنا أن محصلة القوة المؤثرة على ذرات الحبل عند طرفه في أي لحظة يجب أن تكون (انظر الشكل (3-4)) :

$$F = -T \sin \theta \approx -T \tan \theta = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

نجد :

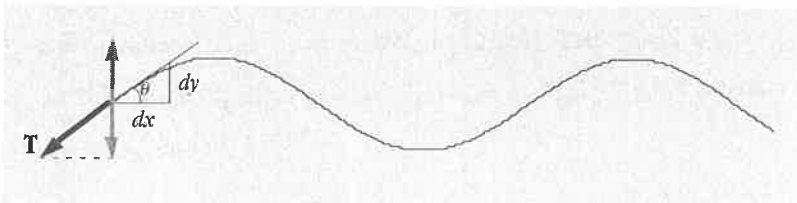
$$F_0 e^{j\omega t} = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

وبما أن :

$$y(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

فيكون :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ikAe^{i(\omega t - kx)}$$



الشكل (3-4)

بوضع $x = 0$ عند طرف الحبل نجد أن :

$$F_0 e^{j\omega t} \approx -T(-ikAe^{i(\omega t - kx)})$$

أي أن :

$$A = \frac{F_0}{ikT} = \frac{F_0}{i\omega} \left(\frac{c}{T} \right)$$

كما أن سرعة اهتزاز أي عنصر من الحبل هي :

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = i\omega A e^{j(\omega t - kx)}$$

بحسب تعريف الممانعة Z ، وتعويض كل من v و F ، نجد :

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{T}{c}$$

بملاحظة أن $c^2 = T/\rho$ تؤول Z إلى :

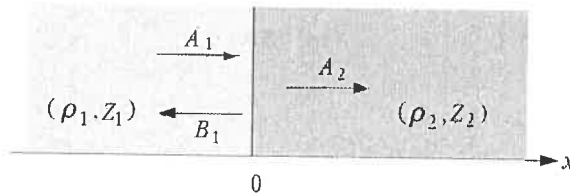
(32-4)

$$Z = \rho c$$

أي أن ممانعة وسط تعتمد على كثافته وسرعة انتشار الموجة فيه .

7-4 انعكاس ونفوذ الأمواج (Reflection and Transmission of Waves)

وجدنا في الفقرة السابقة أن كل وسط يمانع مرور الأمواج فيه بشكل أو آخر بحسب ممانعته . سندرس في هذه الفقرة كيف تتغير الموجة عند انتقالها بين وسطين لهما ممانعتين مختلفتين كانتقال الضوء من الهواء إلى الماء مثلاً ، فنفترض أن موجة ترددها ω تنتشر في وسط أول كثافته ρ_1 بسرعة c_1 ، أي أن $Z_1 = \rho_1 c_1$ ، ثم تصل عند $x = 0$ لوسط ثاني كثافته ρ_2 فتنتشر فيه بسرعة c_2 ، أي أن $Z_2 = \rho_2 c_2$ ، فينعكس جزء منها وينفذ الجزء الآخر ، كما في الشكل (4-4) .



الشكل (4-4)

يجب أن يتحقق عند الحد الفاصل بين الوسطين (أي عند $x=0$) الشرطان التاليان :

(أ) شرط هندسي (*geometrical condition*) : يجب أن تكون سعة الموجة إلى يمين ويسار نقطة الاتصال واحدة حتى تتجنب عدم استمرار الموجة ، أي يجب أن يكون :

$$(33-4) \quad y_i + y_r \Big|_{x=0} = y_t \Big|_{x=0}$$

حيث y_i سعة الموجة الساقطة و y_r سعة الموجة المنعكسة و y_t سعة الموجة النافذة .

(ب) شرط تحريكي (*dynamical condition*) : يجب أن تكون القوة المؤثرة على الوسط عند نقطة الاتصال واحدة ، أي يجب أن يكون :

$$(34-4) \quad -T \frac{\partial}{\partial x} (y_i + y_r) \Big|_{x=0} = -T \frac{\partial}{\partial x} (y_t) \Big|_{x=0}$$

حيث :

$$(35-4) \quad \begin{cases} y_i = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} \\ y_r = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$

باعتبار أن الموجة القادمة والنافذة تتحركان باتجاه محور السينات الموجب ، بينما تتحرك الموجة المنعكسة باتجاه محور السينات السالب .

كما افترضنا أن تردد الموجة وسرعتها الزاوية لن يتغيرا عند الانتقال من وسط لآخر، أي أن هذه الأوساط غير مبددة (*non-dispersive*) ، مع العلم أن سرعة وطول الموجة يمكن أن يتغيرا من وسط لآخر .

بتطبيق الشرط الهندسي نجد :

$$A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \Big|_{x=0} = A_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} \Big|_{x=0}$$

أي أن

$$(36-4) \quad A_1 + B_1 = A_2$$

كما نكتب من الشرط التحريكي :

$$-ikTA_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + ikTB_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \Big|_{x=0} = -ikTA_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} \Big|_{x=0}$$

ومنه :

$$(37-4) \quad k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2$$

نعرف معامل الانعكاس r (reflection coefficient) بالعلاقة :

$$(38-4) \quad r = \frac{B_1}{A_1}$$

ف نجد من (36-4) و(37-4) $c = \omega/k = 1/Z$ ، أن :

$$(39-4) \quad r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

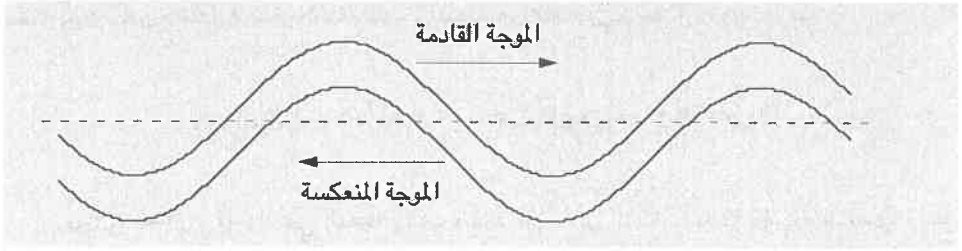
بنفس الشكل نعرف معامل النفوذ t (transmission coefficient) بالعلاقة :

$$(40-4) \quad t = \frac{A_2}{A_1}$$

أي أن :

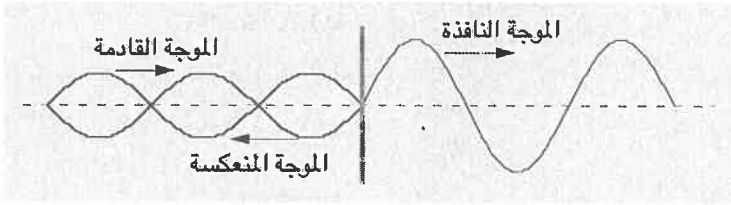
$$(41-4) \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

يتضح من (39-4) و(41-4) أن معاملي النفوذ والانعكاس لايعتمدان على التردد ω ، لذا نقول في هذه الحالة إن الوسط غير مبدد (*non-dispersive*) وسنعود لهذا الموضوع المهم فيما بعد .
 من جهة أخرى فإننا نلاحظ أنه إذا كانت ممانعة الوسط الثاني كبيرة جداً ، أي أن $Z_2 \ll Z_1$ ، كأن تكون نهاية جبل مثبته بحاجز أو أن تصل موجة ماء إلى حائط ، عندئذ تؤول النسبة A_2/A_1 إلى الصفر وتندم الموجة النافذة بينما تصير النسبة $B_1/A_1 = -1$ ، أي أن الموجة المنعكسة تختلف عن الموجة الساقطة بالطور بمقدار π .
 يمثل الشكل (5-4) الموجة القادمة والمنعكسة عن نهاية ثابتة في لحظة معينة .



الشكل (5-4)

أما إذا كانت ممانعة الوسط الثاني معدومة كأنعكاس موجة عند النهاية الحرة لحبل أو ارتداد موجة صوتية عند نهاية مفتوحة لانيوب صوتي (ناي) ، عندئذ يكون $B_1/A_1=1$ و $A_2/A_1=2$ ، أي أن سعة الموجة المنعكسة تصير مساوية للساقطة بينما تصير سعة الموجة النافذة ضعف الساقطة .
يمثل الشكل (6-4) الموجة القادمة والمنعكسة والنافذة عند نهاية حرة .



الشكل (6-4)

8-4 انعكاس ونفوذ الطاقة (Reflection & Transmission of Energy)

تكمن أهمية الأمواج في الطاقة التي تحملها من نقطة لأخرى عند انتشارها في أوساط مختلفة . سندرس فيمايلي ما يحدث للطاقة المحمولة عند وصول موجة لحاجز فاصل بين وسطين مختلفين .
نعتبر انتشار موجة سعتها العظمى A ، وتردها ω ، وعددها الموجي k ، في حبل مشدود كثافته الطولية ρ ، ونحسب الطاقة الكلية لواحدة الطول منه فنكتب :

$$(42-4) \quad E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

إذا افترضنا أن سرعة انتشار الموجة هي c عندئذ نعرّف معدل انتشار الطاقة بـ $E \times c$ ، فيكون معدل انتشار الطاقة في وسط أول (c_1, ρ_1) هو :

$$E_1 \times c_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_1^2 c_1 = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_1^2$$

بينما يكون مجموع معدل انتشار الطاقة للموجة المنعكسة والنافذة في وسط ثان (c_1, ρ_2) هو :

$$\frac{1}{2}\rho_1\omega^2 B_1^2 c_1 + \frac{1}{2}\rho_2\omega^2 A_2^2 c_2 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2}Z_2\omega^2 A_2^2$$

بتعويض (39-4) و (41-4) في العلاقة الأخيرة نجد أن معدل انتشار الطاقة للموجة الساقطة يساوي مجموع معدل انتشار الطاقة للموجة المنعكسة والنافذة ، أي أن :

$$(43-4) \quad \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2}Z_2\omega^2 A_2^2$$

أخيراً نعرّف معامل انعكاس الطاقة بالعلاقة :

$$(44-4) \quad \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = \frac{Z_1 B_1^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{\text{الطاقة المنعكسة}}{\text{الطاقة الساقطة}}$$

ومعامل نفوذ الطاقة :

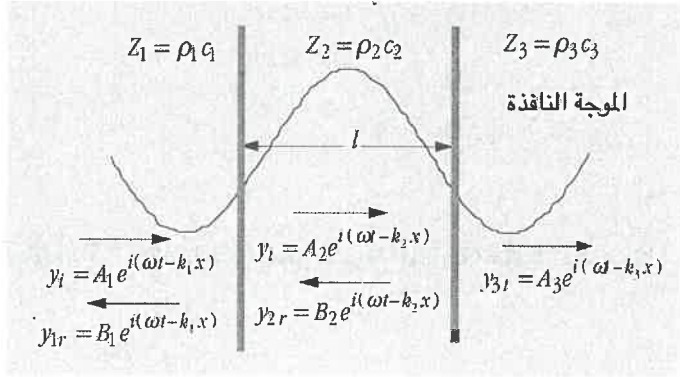
$$(45-4) \quad \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{\text{الطاقة النافذة}}{\text{الطاقة الساقطة}}$$

4-9 مساواة الممانعة (Impedance Matching)

وجدنا في الفقرة السابقة أنه عندما تنتقل الطاقة بين وسطين لهما ممانعتين مختلفتين فإن جزءاً منها ينعكس والآخر ينفذ . في كثير من التطبيقات العملية يتطلب الأمر أن تنتقل الطاقة بدون انعكاس إطلاقاً أو أن تنعكس كلياً دون أن ينفذ منها شيء . يمكن الوصول للهدف المنشود بإضافة وسط فاصل بين الوسطين الأصليين له خواص معينة تجعل معامل انعكاس الطاقة أو معامل نفوذها مساوياً للواحد أو الصفر ، بحسب ما نريد .

فإذا انتشرت الموجة من وسط أول (c_1, ρ_1) إلى وسط (c_3, ρ_3) ، وأردنا منع انعكاسها كلياً ، عندئذ نضيف وسطاً (c_2, ρ_2) سمكه l بينهما ، كما في الشكل (7-4) ، بحيث يصير معامل نفوذ الطاقة مساوياً للواحد ، أي أن :

$$(46-4) \quad \frac{Z_3 A_3^2}{Z_1 A_1^2} = 1$$



الشكل (7-4)

بكتابة الشروط الحدودية عند $x=0$:

$$y_{1i} + y_{1r} \Big|_{\text{من اليسار}} = y_{2i} + y_{2r} \Big|_{\text{من اليمين}}$$

و

$$T \frac{\partial (y_{1i} + y_{1r})}{\partial x} \Big|_{\text{من اليسار}} = T \frac{\partial (y_{2i} + y_{2r})}{\partial x} \Big|_{\text{من اليمين}}$$

كذلك نكتب الشروط الحدودية عند $x=l$:

$$y_{2i} + y_{2r} \Big|_{\text{من اليسار}} = y_{3t} \Big|_{\text{من اليمين}}$$

و

$$T \frac{\partial (y_{2i} + y_{2r})}{\partial x} \Big|_{\text{من اليسار}} = T \frac{\partial (y_{3t})}{\partial x} \Big|_{\text{من اليمين}}$$

ونضع :

$$\begin{aligned}
y_{1i} &= A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\
y_{1r} &= B_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\
y_{2i} &= A_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} \\
y_{2r} &= B_2 e^{j(\omega t + k_2 x)} \\
y_{3i} &= A_3 e^{j(\omega t - k_3 x)}
\end{aligned}$$

يمكن عندها التحقق من أن الدالات السابقة تحقق الشروط الحدودية المذكورة أعلاه إذا كان :

$$(47-4) \quad Z_2^2 = Z_1 Z_3 \quad \text{و} \quad l = \frac{\lambda_2}{4}$$

حيث λ_2 طول الموجة في الوسط الجديد ، ويساوي λ/n_2 ، و n_2 معامل انكسار هذا الوسط ، الذي يرتبط بالممانعة Z_2 وفق العلاقة :

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{1}{Z_2}$$

حيث c سرعة الانتشار في الفراغ و v_2 سرعة انتشارها في الوسط 2 .

نستنتج مما تقدم أنه حتى نتخلص من انعكاس لون معين عند سقوط أمواج ضوئية على عدسة آلة تصوير مثلاً ، يجب طليها بمادة شفافة معامل انكسارها n_2 وسمكها يساوي ربع طول موجة الضوء المراد التخلص منه في تلك المادة .

4 - 10 انعكاس الأمواج عند نهاية ثابتة

وجدنا فيما سبق أنه إذا سقطت موجة على حاجز فاصل بين وسطين مختلفين فإنها سترتد كلياً إذا كانت ممانعة الوسط الثاني كبيرة جداً بالمقارنة مع الوسط الأول ، وتكون لها نفس السعة مع تغير في الطور بمقدار π . سندرس الآن انتشار أمواج في حبل مشدود مثبت من نهايته بحيث تعتبر كل نهاية كممانعة لانهاية يتم عندها انعكاس كلي وتغير في الطور ، ونكتب معادلة الموجة القادمة بالشكل :

$$y_i = A e^{j(\omega t - kx)}$$

والمنعكسة :

$$y_r = B e^{j(\omega t + kx)} = -A e^{j(\omega t + kx)}$$

عندئذ تكون الموجة الكلية عند نقطة ما x من الحبل هي :

$$y(x) = Ae^{i(\omega t - kx)} - Ae^{i(\omega t + kx)}$$

بوضع $y(x) = 0$ عند $x = L$ نجد :

$$\sin(kL) = 0$$

أي أن :

$$kL = n\pi \quad \text{حيث} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

فإذا عوضنا عن k بـ ω/c ، حيث c سرعة انتشار الموجة ، وجدنا الترددات المسموح بها في الحبل :

$$(48-4) \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

تسمى ω_n الترددات الطبيعية (natural frequencies) .

بوضع $\omega = 2\pi f$ ، نجد :

$$(49-4) \quad f_n = n\left(\frac{c}{2L}\right) = nf_0$$

حيث :

$$(50-4) \quad f_0 = \frac{c}{2L}$$

يطلق على f_0 اسم النغمة الأساس (fundamental tone) ، بينما تسمى مضاعفاتها f_1 ، و f_2 ، و ... المتوافقات (harmonics) ، أو النغمات العليا (overtones) . فتسمى f_1 المتوافقة الأولى ، و f_2 المتوافقة الثانية ، وهكذا دواليك .

نلاحظ من (48-4) أن شرط انتشار أمواج ذات تردد معين ω_n في حبل ما هو أن يحقق طوله العلاقة :

$$(51-4) \quad L = \frac{n\pi c}{\omega_n} = n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

أي يجب أن يكون طوله مساوياً لعدد صحيح من أنصاف طول الموجة المنتشرة فيه .

4- 11 الأمواج المستقرة (Standing Waves)

إذا انتشرت موجة في حبل مثبت من طرفيه فإن نقاطاً منه ستبقى ساكنة دوماً إذا كان موقعها يحقق

العلاقة :

$$y(x) = Ae^{i(\omega t - kx)} - Ae^{i(\omega t + kx)} = 0$$

أي إذا كان :

$$\sin(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = N\pi$$

ومنه :

$$(52-4) \quad x = \frac{N\pi}{k} = \frac{NL}{n}$$

نلاحظ مباشرة أنه عندما $N=0$ فإن $x=0$ ، وهي نقطة بداية الحبل ، بينما عندما $N=n$ فإن $x=L$ وهي نقطة نهايته . بين هاتين النقطتين يوجد عدد $n-1$ من النقاط التي لاتهتز بتاتاً . تسمى كل نقطة ساكنة عقدة (node) ، فإن اهتز الحبل بالتردد الأساس ($n=1$) عندئذ لاتوجد أي عقدة داخله (باستثناء طرفيه) ، وإن اهتز بالتوافقة الأولى ($n=2$) فيوجد عقدة واحدة في منتصفه ، وهكذا . فعدد العقد داخله يساوي رتبة المتوافقة التي يهتز بها .

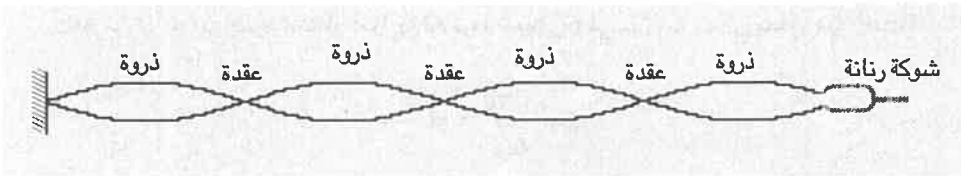
بالمقابل فهناك نقاط تهتز دوماً بأكبر سعة ممكنة تقع في المواضع المحددة بـ :

$$\sin(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = (2N+1)\frac{\pi}{2}$$

أي أن :

$$(53-4) \quad x = \frac{(2N+1)\pi}{2k} = \frac{(2N+1)L}{2n}$$

تسمى كل نقطة منها ذروة (crest) . من الواضح أن الذروات تقع في منتصف المسافة بين العقد . تدعى الأمواج المنتشرة في الحبل عند تشكل العقد والذروات فيه أمواجاً مستقرة (standing waves) بسبب سرعة اهتزاز الذروات وسكون العقد فيظهر الحبل للعين وكأنه ساكن بشكل معين ، كما في الشكل (8-4).



الشكل (8-4)

4- 12 انتشار الطاقة وسعة الحركة في الأمواج المستقرة

إذا تشكلت أمواج مستقرة في حبل مشدود فإن الطاقة الكلية لعقدة فيه تساوي الصفر حتماً مما يعني أن إحدى الموجتين القادمة أو المنعكسة تضيّع الطاقة التي أعطتها الأخرى لهذه النقطة من الحبل . ويكون مجموع الطاقة الكلية المحمولة خلال واحدة المساحة في الأمواج المستقرة تساوي الصفر . نجد سعة الاهتزازات العظمى للموجة المستقرة في الحالة الطبيعية n بكتابة :

$$y_n(x) = Ae^{j(\omega_n t - k_n x)} - Ae^{j(\omega_n t + k_n x)}$$

أو :

$$(54-4) \quad y_n(x) = [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right)$$

يرتبط الثابتان A_n و B_n ب A وفق العلاقة :

$$(55-4) \quad \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = 2A$$

4- 13 نسبة الأمواج المستقرة

وجدنا في الفقرة السابقة أن الانعكاس يتم بشكل كلي عندما تكون ممانعة الوسط الثاني لانهاية ، كالنهاية المثبتة لحبل . أما لو كانت متصلة بحبل آخر من مادة مختلفة لصارت لممانعتها قيمة محدودة . كما عرفنا معامل الانعكاس بنسبة سعة الموجة المنعكسة إلى الساقطة $r = B_1/A_1$ ، ومعامل النفاذ بنسبة سعة الموجة النافذة إلى الساقطة $t = A_2/A_1$.

نعرف نسبة الأمواج المستقرة SWR (Standing Wave Ration) بالعلاقة :

$$(56-4) \quad SWR = \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} = \frac{1 + r}{1 - r}$$

أي أن :

$$(57-4) \quad r = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

4-14 الطاقة الحركية وطاقة الوضع لحبل تنتشر فيه أمواج مستقرة

لنعتبر طولاً عنصرياً ds من حبل تنتشر فيه موجة مستقرة ترددها ω ، ولنحسب طاقتي الحركة والوضع له ، فنكتب طاقة الحركة :

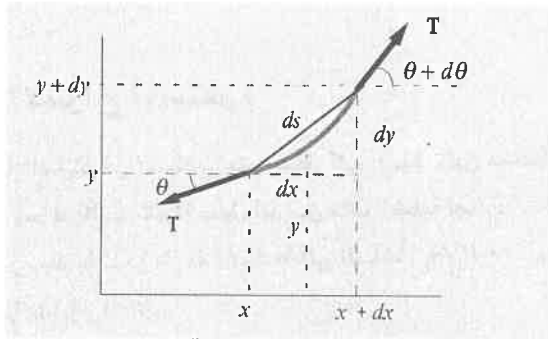
$$dK = \frac{1}{2}(dm)y^2 = \frac{1}{2}\rho dx y^2$$

أي أن :

$$(58-4) \quad K = \int_0^L \frac{1}{2}\rho dx y^2$$

نجد طاقة الوضع بحساب شغل القوى المؤثرة على هذا العنصر عند شده وتغيير طوله من dx إلى ds ، كما في الشكل (9-4) ، فنكتب :

$$dU = T(ds - dx)$$



الشكل (9-4)

بوضع :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx [1 + \frac{1}{2}(dy/dx)^2 + \dots]$$

تصير طاقة الوضع للحبل كله :

$$(59-4) \quad U = \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

لكن بحسب (54-4) فإن سعة الحركة الآتية لنقطة على بعد x من بداية الحبل هي :

$$y_n(x) = [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right)$$

لذا تؤول طاقته الحركية الكلية إلى :

$$(60-4) \quad K = \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 [-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t]^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) dx$$

وطاقة الوضع :

$$(61-4) \quad U = \frac{1}{2} T \frac{\omega_n^2}{c^2} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t]^2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) dx$$

من ثم نجد الطاقة الكلية :

$$(62-4) \quad E = \frac{1}{2} \rho L \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

بوضع الكتلة الكلية للحبل $m = \rho L$ وتعويض :

$$A_n^2 + B_n^2 = 2A^2 = A'^2$$

تصير (46-4) :

$$(63-4) \quad E = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2 = \frac{1}{2} k A'^2$$

وهي الصيغة المعروفة لهزاز توافقى بسيط !

4 - 15 التبديد وسرعة الطور وسرعة المجموعة

كتبنا معادلة موجة وحيدة الطول منتشرة في وسط بالشكل :

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (4-64)$$

حيث :

$$\omega = 2\pi f$$

و

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

كما وجدنا أن سرعة انتشار الموجة في الوسط تعتمد على القوة الخارجية الدافعة له وعلى كثافته ، بحيث أن :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

بحسب هذه المعادلات فإن سرعة انتشار الأمواج ثابتة دوماً ، ترددها يساوي :

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

ووجدنا سابقاً أن شرط تشكل أمواج مستقرة في حبل طوله L مثبت من طرفيه هو أن يكون :

$$L = (n+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

وتكون الترددات الممكنة انتشارها في الحبل معطاة بالعلاقة :

$$f_n = (n+1)\left(\frac{v}{2L}\right) \quad (4-65)$$

فإن بقيت v ثابتة لكل الأمواج (كما افترضنا حتى الآن) عندئذ نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن التردد يتغير خطياً مع ترتيب المتوافقة المنتشرة في الحبل n . إلا أن هذا ليس صحيحاً تماماً في كل الأوساط ، إذ وجدنا في الفصل السابق أن الترددات الممكنة في منظومة مؤلفة من N كتلة محملة على سلك مشدود تعطى بالعلاقة :

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

أي أن :

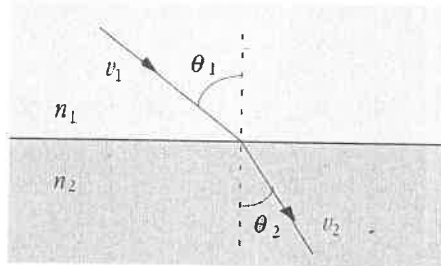
$$(66-4) \quad f_n = 2f_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

تعني العلاقة الأخيرة أن هناك قيمة عليا لهذه الترددات هي $2f_0$. كما نلاحظ أنه من أجل المتوافقات الأولى ، أي عندما تكون $n \ll N$ فإن f_n تصير متناسبة خطياً مع n فعلاً ، وتكون مناقشتنا السابقة مقبولة . أما عندما تتزايد قيمة n فإن f_n تتزايد بسرعة أقل من التناسب الخطي أعلاه مما يعني أن سرعة انتشار هذه المتوافقات أقل من تلك الأولى . لذلك تنتشر الأمواج ذات الترددات العالية وطول الموجة القصير بسرعة أقل من الترددات المنخفضة وطول الموجة الطويل . هذا ما يدعى بالتبديد (*dispersion*) ويدل على تغير سرعة الانتشار مع طول الموجة .

تعني كلمة تبديد التفريق بين ماكان مجتمعاً أصلاً ، كانكسار ضوء أبيض منتشر في الفراغ (أو الهواء) حيث تكون كل مركباته مجتمعة معاً وتسير بنفس السرعة ، عند دخوله في موشور (*prism*) زجاجي مثلاً . إذ تنكسر الألوان المشكلة له بزوايا مختلفة نتيجة اختلاف سرعة كل منها عن غيرها ، وتنفذ منه متفرقة عن بعضها وفق قانون سنل (*Snell's Law*) في انكسار الضوء :

$$(67-4) \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

حيث θ_1 زاوية السقوط للشعاع الأبيض الأصلي ، و θ_2 زاوية الانكسار لأحد الألوان النافذة من الموشور ، كما في الشكل (10-4) ، بينما n_1 معامل انكسار الوسط الأول ، و n_2 معامل انكسار الوسط الثاني ، الذي يعتمد على اللون المار فيه في حالة الوسط المبدد . أما v_1 فهي سرعة انتشار الضوء (الأبيض) في الوسط الأول و v_2 سرعة انتشار اللون المعين في الوسط الثاني .



الشكل (10-4)

في حالة انتشار قطارات أمواج (أي أمواج مستمرة) على خط مستقيم فإن التبديد يعني أنه إذا انتشر قطاران لهما طولين محدودين ومتقاربين بالطول الموجي ، وكانا منطلقين من نفس النقطة في لحظة ما ، فإن سرعة انتشار كل واحد ستختلف عن الآخر مما يؤدي إلى تباعد المسافة بينهما بشكل مضطرب مع مرور الزمن . وإذا كان هناك قطار أمواج مؤلف من عدة مركبات منتشرة على خط مستقيم فإن شكله سيتشوه رويداً رويداً مع الزمن .

يعتبر الفراغ (أو الهواء ومعظم الغازات) وسطاً غير مبدد للضوء والصوت (وإلا لوصل صوت مطرب إلى مستمعيه على شكل أمواج وحيدة التردد تصل كل منها بوقت مختلف عن الأخرى !).

لدراسة التبديد بشكل موضوعي نعتبر انتشار موجتين ، متقاربتين بالطول الموجي وبالتردد ، على امتداد حبل مشدود مثبت من طرفيه ، ونفترض للسهولة أن لهما نفس السعة فنكتبهما على النحو :

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad (68-4)$$

و

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (69-4)$$

عند وصولهما إلى نقطة ما x يكون مجموعهما :

$$y_T = y_1 + y_2 \quad (70-4)$$

أي أن :

$$y_T = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

فإذا وضعنا :

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{و} \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\Delta k = k_1 - k_2 \quad \text{و} \quad \Delta \omega = \omega_1 - \omega_2 \quad \text{و}$$

لألت y_T إلى الشكل :

$$y_T = 2A \sin(\omega t - kx) \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \quad (71-4)$$

نلاحظ من (4-71) أن الحركة موجية $\sin(\omega t - kx)$ ذات غلاف $2A\cos(\Delta\omega t/2 - \Delta kx/2)$ ، وتكون سرعة انتشار الموجة (أي سرعة انتقال عقدة أو ذروة منها بشكل مواز لمحور السينات) هي :

$$(4-72) \quad v_p = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

تسمى هذه السرعة سرعة الطور (*phase velocity*) . أما الغلاف فينتشر هو الآخر بسرعة :

$$(4-73) \quad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

تسمى سرعة المجموعة (*group velocity*) لأنها تغلف مجموعة من الأمواج قصيرة الطول داخلها . لسرعة المجموعة أهمية كبيرة لأنها هي التي نراقبها عندما تتحرك مجموعة أمواج لاسرعة الطور التي تمثل كل واحدة منها سرعة انتشار مركبة من المركبات فقط . تتضح هذه النقطة أكثر عندما تجتمع عدة أمواج مشكلة مغلف موجي (*wave packet*) ، إذ نلاحظ عندها أن سرعة المجموعة هي التي تحدد سرعة هذا المغلف الذي يمثل في الميكانيك الكمي كل جسيم في الطبيعة . فسرعة أي واحد منا هي سرعة المجموعة للمغلف الموجي الممثل له .

يمكن فهم الفرق الكبير بين سرعة الطور والمجموعة من حركة الأمواج في قاع المحيط التي تسمى أمواج جاذبية (*gravity waves*) ، إذ تتناسب سرعة انتشار كل موجة (سرعة الطور) مع الجذر التربيعي لطولها ، أي أن :

$$v_p = \alpha\lambda^{1/2} = \sqrt{2\pi\alpha} k^{-1/2} = \frac{\omega}{k}$$

ومنه :

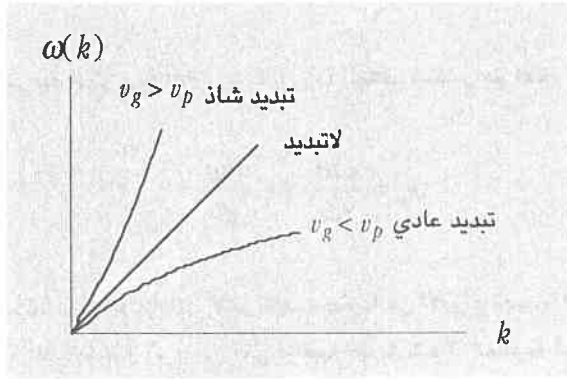
$$\omega = \sqrt{2\pi\alpha} k^{1/2}$$

من ثم نجد أن سرعة المجموعة هي :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{k}} = \frac{1}{2} v_p$$

لذلك تتحرك ذروة كل موجة داخل الغلاف بسرعة كبيرة (مع العلم أنه لا يمكن لها مغادرته) فتزداد سعتها في البداية ثم تضمحل تدريجياً كأنها تختفي كلياً لتعود وتظهر ثانية ، وهكذا .

من جهة أخرى إذا كانت $v_p > v_g$ فإننا نقول إن التبديد عادي (normal dispersion) ، أما إذا كانت $v_p < v_g$ فنقول إن التبديد شاذ (anomalous dispersion) . بالطبع إذا كانت $v_p = v_g$ فالوسط غير مبدد .
يمثل الشكل (11-4) علاقة التبديد بين ω و k للحالات الثلاث .



الشكل (11-4)

من الأمثلة العملية على التبديد الشاذ انتشار الضوء في وسط عازل إذ تكون سرعته هناك $v = (\mu\epsilon)^{1/2}$ حيث μ إنفاذية الوسط (permiability) و ϵ سماحيته (permittivity) . أما سرعة الضوء في الفراغ فتعطى بـ $c = (\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$ حيث ϵ_0 و μ_0 إنفاذية وسماحية الفراغ ، على الترتيب . ويعطى معامل انكسار الوسط بالعلاقة:

$$(74-4) \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

حيث وضعنا $\mu_r = \mu/\mu_0$ وتدعى الإنفاذية النسبية و $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ وتدعى السماحية النسبية .
على الرغم من أن μ_r تساوي الواحد تقريباً لمعظم الأوساط ، إلا أن ϵ_r تعتمد على التردد f مما يجعل سرعة الانتشار تعتمد بدورها على طول الموجة لتصير سرعة المجموعة :

$$(75-4) \quad v_g = f\lambda = v \left(1 + \frac{\lambda}{2\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial \lambda} \right)$$

فإذا كان $\partial \epsilon_r / \partial \lambda > 0$ عندئذ تصير سرعة الطور أصغر من سرعة المجموعة ويصير التبديد شاذاً .

4-16 تطبيقات على سرعة الطور وسرعة المجموعة

4-16-1 نظرية عرض الفرقة (Bandwidth Theorem)

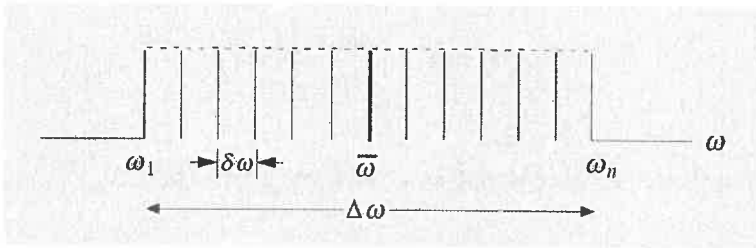
سندرس في هذه الفقرة حركة نبضة (pulse) ناتجة عن انتشار مجموعة أمواج لكل منها نفس السرعة بينما يزداد تردد الحركة من موجة إلى التي تليها بشكل منتظم $\delta\omega$ بحيث تقع ترددات كل الأمواج المؤلفة للنبضة ضمن نطاق ضيق $\Delta\omega$. فنكتب الأمواج المختلفة بالشكل :

$$\begin{aligned} y_1 &= a \cos \omega_1 t \\ y_2 &= a \cos \omega_2 t = a \cos(\omega_1 + \delta\omega)t \\ y_3 &= a \cos \omega_3 t = a \cos(\omega_1 + 2\delta\omega)t \\ &\vdots \\ y_n &= a \cos \omega_n t = a \cos[\omega_1 + (n-1)\delta\omega]t \end{aligned} \quad (76-4)$$

بحيث أن :

$$\omega_n - \omega_1 = (n-1)\delta\omega = \Delta\omega \quad (77-4)$$

كما في الشكل (12-4).



الشكل (12-4)

بحسب الفقرة (1-7) من الفصل الأول فإن محصلة الأمواج المعطاة بالعلاقة (59-4) هي :

$$R = a \cos \bar{\omega} t \left(\frac{\sin(\frac{1}{2} n \delta\omega)t}{\sin(\frac{1}{2} \delta\omega)t} \right) \quad (78-4)$$

حيث $\bar{\omega}$ متوسط تردد الأمواج كلها :

$$\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \omega_1 + \frac{1}{2}(n-1)(\delta\omega) \quad (79-4)$$

إذا كان عدد الأمواج كبيراً جداً عندئذ يمكن أن نضع :

$$(80-4) \quad (n-1)(\delta\omega) \approx \Delta\omega$$

أي أن :

$$\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{n}$$

ونكتب :

$$(81-4) \quad \sin\left(\frac{1}{2}\delta\omega\right)t = \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2n}\right)t \approx \left(\frac{\Delta\omega}{2n}\right)t$$

لتؤول المحصلة (78-4) إلى :

$$(82-4) \quad R(t) = a \cos \bar{\omega}t \left(\frac{\sin(n\delta\omega/2)t}{\sin(\delta\omega/2)t} \right) \approx an \cos \bar{\omega}t \left(\frac{\sin(\Delta\omega/2)t}{\Delta\omega/2)t} \right)$$

أو :

$$(83-4) \quad R(t) = A \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \cos \bar{\omega}t$$

حيث وضعنا $A = na$ و $\alpha = (\Delta\omega/2)t$ التي نلاحظ أنها تساوي فرق الطور بين أول موجة وآخر موجة من النبضة في اللحظة t .

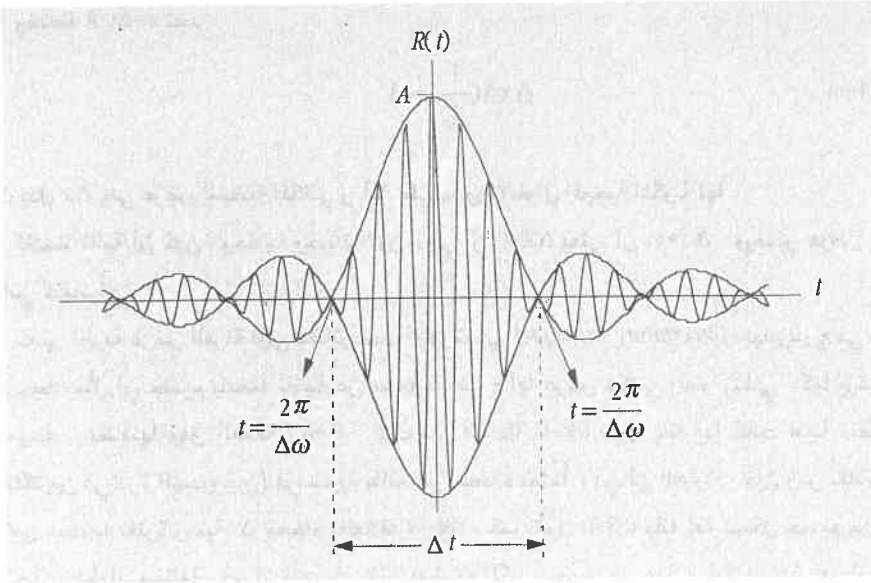
يوضح الشكل (13-4) كيف تتغير R مع الزمن بشكل جيبي ضمن الغلاف $A \sin\alpha/\alpha$. ففي اللحظة $t=0$ ينتهي $\sin\alpha/\alpha$ إلى الواحد وتصير السعة أكبر ما يمكن ($R(0)=A=na$) ، وبعد فترة زمنية معينة $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$ تصير $\alpha=\pi$ وتؤول R إلى الصفر . أي أن سعة الغلاف تتغير خلال الفترة Δt من قيمة عظمى إلى الصفر ، أما بعد ذلك فإن أكبر قيمة لها ستكون أقل من $R(0)$ بكثير ، كما هو موضح في الشكل (13-4) . لذا فإن الزمن Δt يقيس عرض النبضة المركزية (*central pulse*) .

نكتب العلاقة بين عرض النبضة ونطاق ترددات مكوناتها بالشكل :

$$(84-4) \quad \Delta\omega\Delta t = 2\pi$$

بوضع $\omega = 2\pi f$ تؤول (84-4) إلى :

$$(85-4) \quad \Delta f\Delta t = 1$$



الشكل (13-4)

الآن : لقد كان بالإمكان تغيير اختيار الفترة الزمنية Δt كوحدة لقياس عرض النبضة لتبقى متمركزة حول اللحظة $t=0$ بحيث تكون السعة العظمى أكبر نسبياً من $A/2$ ، عندئذ نكتب العلاقة (85-4) بالشكل :

$$(86-4) \quad \Delta f \Delta t \approx 1$$

تعرف العلاقة (86-4) باسم نظرية عرض الفرقة (Bandwidth Theorem) وتنص على أن مركبات المجموعة الواقعة ضمن النطاق $\Delta \omega$ ستترابك بشكل بناء (constructive interference) خلال الفترة الزمنية Δt لتعطي حركة ذات سعة عظمى كبيرة نسبياً ثم تضمحل النبضة بسرعة بسبب فروق الطور بين مركباتها . كما يصغر عرض النبضة كلما زاد مدى النطاق $\Delta \omega$ والعكس بالعكس .

من جهة أخرى فإن نظرية عرض الفرقة تقول بأنه إذا انتشرت نبضة ذات مدى زمني Δt قصير فإنها ناتجة عن تراكم مجموعة أمواج تقع تردداتها ضمن مدى معين $\Delta \omega$ ، وكلما كان Δt صغيراً صار نطاق $\Delta \omega$ كبيراً ، والعكس بالعكس أيضاً . ففي حالة موجة وحيدة التردد (كضوء وحيد اللون) ، أي أن $\Delta \omega = 0$ ، يؤول العرض الزمني Δt إلى ما لا نهاية .

لقد عالجنا فيما تقدم نبضة ناتجة عن تراكم أمواج في المجال الزمني حيث كتبنا الأمواج (59-4) بدلالة التردد ω والزمن t . إلا أنه كان بإمكاننا أن نكتبها بدلالة الموضع x والعدد الموجي k ، أي $y_1 = a_1 \sin(kx + \delta_1)$ ، عندئذ نستنتج أننا كنا سنصل لنتيجة مماثلة للعلاقة (86-4) باستبدال x بـ t و k بـ ω وتصير نظرية عرض الفرقة على النحو :

$$(87-4) \quad \Delta x \Delta k \approx 2\pi$$

فإذا وضعنا $k=2\pi/\lambda$ نجد :

$$(88-4) \quad \Delta x \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \approx 1$$

حيث يدل Δx على عرض النبضة المكاني و $\Delta \lambda$ على مدى الأطوال الموجية المكونة لها .
نلاحظ ثانية أن كون موجة ما وحيدة اللون ، أي أن $\Delta \lambda = 0$ يعني أن $\Delta x = \infty$ ويصير عرض النبضة المكاني لانهاياً .

تعتبر نظرية عرض الفرقة أولى بشائر مبدأ الارتياب (Uncertainty Principle) لهايزنبرج في ميكانيك الكم حيث يُمثل أي جسيم بنبضة ناتجة عن مجموعة أمواج لها عرض مكاني وآخر زمني . كما يرتبط تردد أي موجة f بطاقتها وفق العلاقة $E = hf$. لذلك فإن المعادلة (86-4) تقول بأنه إذا كانت لدينا منظومة ما (كالإلكترون في ذرة الهيدروجين) في سوية طاقة غير محددة تماماً ، أي أن $\Delta f \neq 0$ ، فإن زمن بقائها هناك سيكون محدوداً بفترة زمنية Δt معطاة بالعلاقة (86-4) ، كما تقول (88-4) بأنه إذا تشكل جسيم من تراكب أمواج ذات أطوال مختلفة ، أي أن $\Delta \lambda \neq 0$ ، فإن موضعه المكاني يصير غير محدد بمقدار Δx وفق (88-4) .

2-16-4 انتشار الأمواج المستعرضة في وسط دوري

وجدنا في الفصل الثالث أن المعادلة الموجية الناتجة عن اهتزاز حبل مشدود بين نقطتين هي :

$$(89-4) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

حيث T الشد في الحبل و ρ كثافته الطولية .
فإذا انتشرت أمواج مستعرضة في وسط دوري ، كالبورات (crystals) تتوزع ذراته بانتظام بشكل مشابه لكتل كثيرة محملة على حبل مشدود ، عندئذ نكتب معادلة الذرة رقم r بالشكل :

$$(90-4) \quad y_r = A_r e^{j(\omega t - kx)} = A_r e^{j(\omega t - kra)}$$

حيث وضعنا $x = ra$ وتدل على بعد الذرة عن طرف البلورة ، حيث a المسافة بين ذرتين متجاورتين . بتعويض y_r في معادلة الحركة (90-4) والإصلاح وأخذ الشروط الحدودية بعين الاعتبار نجد الترددات المسموح بانتشارها في البلورة :

$$(91-4) \quad \omega_n^2 = \frac{4T}{ma} \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{4T}{ma} \sin^2 \frac{na}{2(N+1)}$$

حيث T قوة المرونة بين الذرات في البلورات و N عدد هذه الذرات .

نلاحظ من (4-91) أن أكبر تردد مسموح به هو $\omega_n = 2\omega_0 = 4T/ma$. ونظراً لأن قوة المرونة بين الذرات في البلورات تبلغ حوالي 15 N/m ، كما أن متوسط كتلة الذرة بحدود 60×10^{-27} kg ، ومتوسط المسافة بين الذرات حوالي 10^{-10} m ، لذا نجد أن أعظم تردد مسموح به في هذه البلورات يساوي 5×10^{12} Hz تقريباً . نستنتج أيضاً أنه إذا انتشرت أمواج طويلة الموجة ، أي قصيرة الأرقام الموجية k ، عندئذ تنتهي الدالة $\sin(ks/2)$ إلى $ka/2$ وتصير الترددات المسموح بها معطاة بالعلاقة :

$$(4-92) \quad \omega_n^2 = \frac{4T}{ma} \left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{Tk^2 a}{m}$$

من ثم نجد سرعة الانتشار :

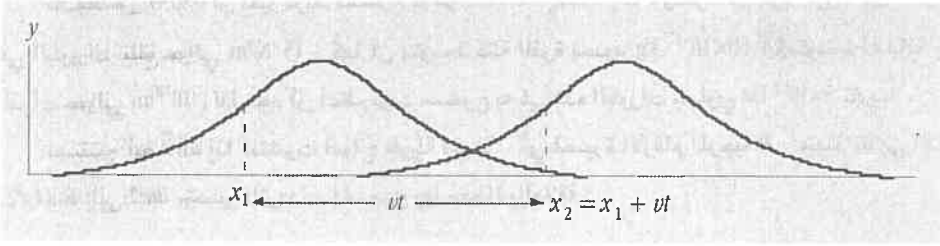
$$(4-93) \quad c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{Ta}{m} = \frac{T}{\rho}$$

وهي نفس العلاقة التي عرفناها سابقاً لسرعة الانتشار !

4-17 أمواج النبضات (Wave Pulses) (اختياري)

ليس من الضروري أن تكون الموجة مؤلفة من قطار أمواج (*wave train*) كأن نربط طرف حبل مشدود برنانة كهربائية تهتز بتردد عال وبشكل مستمر . بل في كثير من الأحيان تتشكل موجة نتيجة انتشار نبضة واحدة في وسط ، ككلمة "السلام عليكم" عند إلقاء التحية ، أو صرخة طالب من الفرع عندما يحل مسألة اهتزازات معقدة ، وهكذا . يمكن تصور ذلك بأن نمسك طرف حبل طويل ونهزه مرة واحدة فقط للأعلى والأسفل ، كما في الشكل (4-14) ، حيث نلاحظ أن نبضة تنتشر على امتداده من اليسار اليمين بسرعة ثابتة بحيث أنه في أي لحظة من الزمن فإن جزءاً محدداً من الحبل يضطرب بينما يبقى بقية الحبل في وضع الاتزان . تستمر النبضة في انتشارها على امتداد الحبل محافظة على شكلها إلى أن تصل لنهايته البعيدة حيث تعاني من انعكاس ما بحسب حالة تلك النهاية سواء كانت حرة أم مقيدة . بالطبع يمكن أن نحصل على نبضة واحدة ، كما شاهدنا في نظرية عرض الطاقة ، من جمع عدد كبير من المتوافقات ، وكما سندرس بالتفصيل في تحليل فورييه في الفصل السادس . تنفيذ دراسة انتشار النبضات لفهم كيف تنتشر أي إشارة كهربائية أو صوتية أو غير ذلك مهما كان شكلها !

لنفترض إذاً أن لدينا حبلًا طويلاً جداً مشدوداً بقوة معينة وأن حركة اهتزازية مؤلفة من نبضة واحدة فقط بدأت عند طرفه بحيث تنتشر عليه بسرعة v اليمين . بعد زمن معين t تكون هذه النبضة قد انتقلت مسافة vt بحيث تبقى لها نفس الصورة تماماً مع انزياح مركز النبضة بهذه المسافة ، كما في الشكل (4-14).



الشكل (14-4)

إذا افترضنا أن معادلة النبضة في اللحظة $t=0$ كانت معطاة بالعلاقة :

$$(94-4) \quad y(t=0) = f(x)$$

فإن الإزاحة التي كانت في الموضع x_1 في لحظة ما ستصير بعد زمن t في الموضع :

$$x_2 = x_1 + vt$$

وتصير معادلة النبضة في هذه اللحظة مماثلة لما كانت عليه في اللحظة $t=0$ (المعادلة 94-4) باستثناء أن نقطة المبدأ للموضع x تغيرت بمقدار vt .

نعبر عن هذا رياضياً بالقول إن الإزاحة المستعرضة من أجل أي قيمة لـ x و t هي :

$$(95-4) \quad y(x, t) = f(x - vt)$$

بنفس الشكل تماماً نكتب معادلة النبضة عندما تنتشر اليسار في أي موضع x وفي أي لحظة t بالعلاقة :

$$(96-4) \quad y(x, t) = g(x + vt)$$

وليس لشكل الاقتران f أو g أهمية كبيرة طالما أن y يكتب كدالة لـ $x \pm vt$ بحيث تنتشر النبضة بسرعة ثابتة v وتحافظ على شكلها خلال الانتقال .

فإذا افترضنا مثلاً أن شكل النبضة يعطى بالعلاقة :

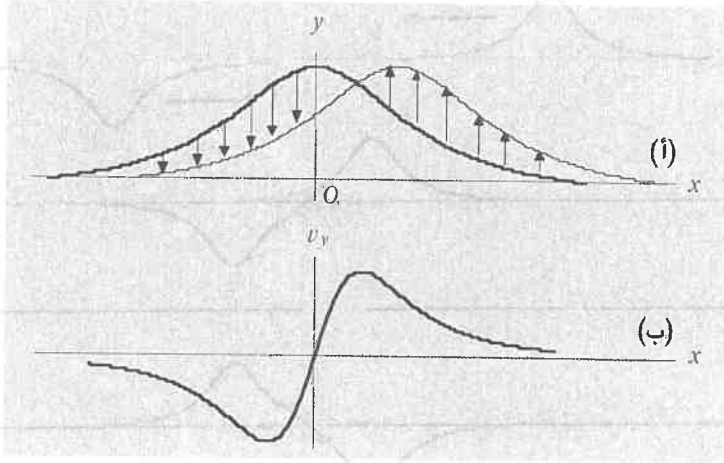
$$(97-4) \quad y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (x - vt)^2}$$

فإننا نلاحظ من الشكل (15-4) كيف يكون شكل النبضة في اللحظة $t=0$ وبعد برهة قصيرة ، إذ تكون ذروتها على ارتفاع b مارة من الموضع $x=0$ في اللحظة $t=0$ ، بينما تتناقص لنصف ذلك عند الموضع $x=vt \pm b$ ثم يصير ارتفاعها أقل من 10% من القيمة العظمى عند $|x-vt| > 3b$. يمكن كتابة عدد من الاقترانات سواء كانت جيبية أو أسية أو اقترانات قوى أو غيرها التي تحقق تحقق هذه الخواص طالما أنها كلها تتحرك من اليسار لليمين بنفس السرعة الثابتة v بحيث تتحقق العلاقة (95-4) أو (96-4) .
تكون سرعة الاهتزاز للأعلى والأسفل لأي نقطة من النبضة (أي السرعة المستعرضة *transverse velocity*) معطاة بالعلاقة :

$$(98-4) \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

حيث نستخدم المشتقات الجزئية لأن y تتغير مع كل من x و t . نستنتج مباشرة أن v_y تتغير مع هذين المتحولين أيضاً ، فنجد للنبضة المعطاة بالعلاقة (97-4) مثلاً أن :

$$(99-4) \quad v_y = \frac{2b^3(x-vt)v}{[b^2+(x-vt)^2]^2}$$



الشكل (15-4)

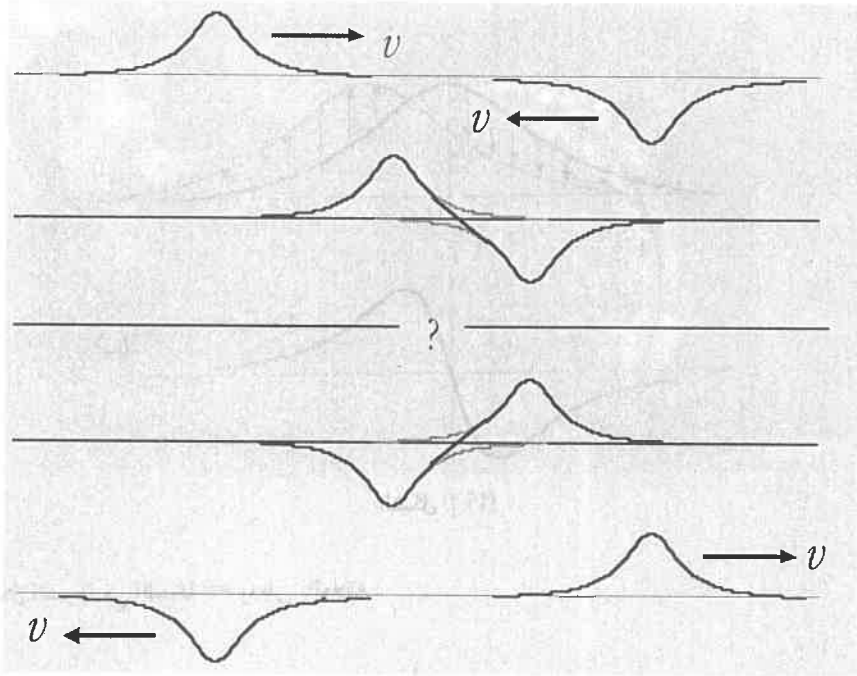
أي أن شكل السرعة في اللحظة $t=0$ يعطى بالعلاقة :

$$(100-4) \quad v_y(x, 0) = \frac{2b^3 vx}{(b^2 + x^2)}$$

يوضح الشكل (4-15 ب) شكل السرعة في تلك اللحظة ، ونلاحظ منها كيف تؤدي سرعة النبضة لتغيير إزاحة مواضع النبضة بالاتجاه الموجب أو السالب بحسب كون السرعة موجبة أو سالبة . يمكن البرهان بسهولة أنه إذا كانت النبضة ممثلة رياضياً بإحدى العلاقتين (4-94) أو (4-95) فإنها ستحقق المعادلة الموجية (4-9) . يترك للطالب التحقق من ذلك .

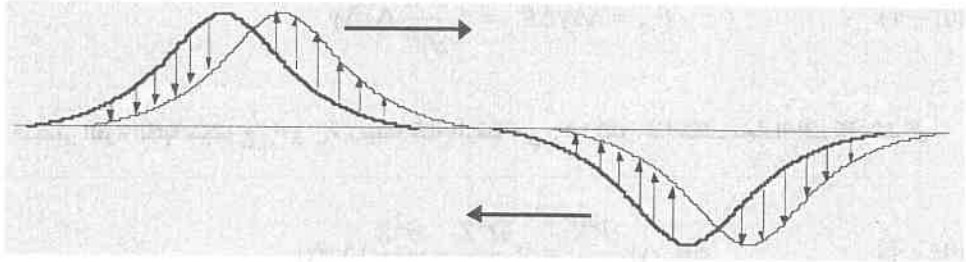
4 - 18 تراكب النبضات

درسنا في الفقرة السابقة كيف تتحرك نبضة وحيدة ، إلا أهم خواص النبضات أنه يمكن لنبضتين متحركتين باتجاهين متعاكسين أن تمر كل واحدة من خلال الأخرى وتنفذ من اللقاء محافظة على هويتها الأصلية تماماً . هذا دليل جلي على تطبيق مبدأ التراكب بشكل فعال . فنلاحظ في الشكل (4-16) كيف تتداخل نبضتان مثنائتان تماماً تتحركان باتجاهين متعاكسين على حبل مشدود ، فنلاحظ أنه في لحظة من اللحظات سيصير شكل الحبل أفقياً تماماً ثم تظهر النبضتان ثانية كأنهما أفنتا بعضهما لفترة زمنية معينة ، وهذا بالفعل ما حصل ! إلا أننا نعلم أن كل نبضة تحمل طاقة موجبة حتماً ، ولا يمكن أن تفني الطاقة نفسها ! لذا تعود النبضتان للحياة ثانية بعد برهة قصيرة .



الشكل (4-16)

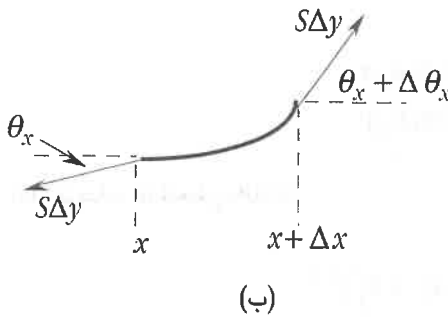
نتساءل هنا مالذي احتفظت به كل نبضة في ذاكرتها لتعود كما كانت تماماً ؟ إنها سرعة كل جزء من النظام التي تعتبر مسؤولة عن هذه العودة ، إذ أن سرعة أجزاء الحبل لحظة اختفاء الحركة الكلية للنبضتين لاتلغي بعضها أبداً بل على العكس تتراكم في نفس الاتجاه تماماً . يوضح الشكل (17-4) جهة سرعة أجزاء نبضة مثلثية تنتشر اليمين بسرعة v ، حيث نلاحظ أن نصفها الأيمن يتحرك للأعلى ونصفها الأيسر يتحرك للأسفل تماماً مثل نبضة سالبة لكن تنتشر اليسار ! مما يعني أن حاصل سرع هاتين النبضتين عندما تلتقيان لاتلغي بعضها بل على العكس تجتمع سوية ، وخلال فترة تلاقي النبضتين تتحول كل الطاقة فيهما إلى طاقة حركية فقط . عندما تنتهي مرحلة اللقاء بينهما تعود كل واحدة إلى ماكانت عليه تماماً وتعود الطاقة لتتقسم إلى طاقة حركية وطاقة كامنة ناتجة عن انزياح الحبل للأعلى أو للأسفل !



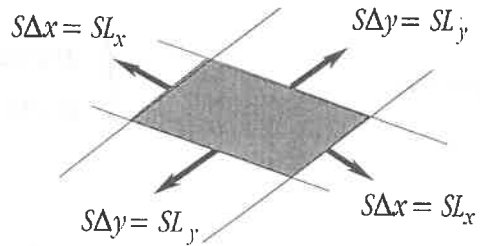
الشكل (17-4)

4- 19 الأمواج في بعدين أو ثلاثة أبعاد (Waves in 2 & 3 dimensions)

سنعتبر في هذه الفقرة انتشار الأمواج في بعدين أو ثلاثة أبعاد كاهتزاز غشاء مطاطي رقيق أو سطح فقاعة صابون كبيرة . فإذا اعتبرنا رقعة صغيرة مستطيلة الشكل أبعادها Δx و Δy وكتلتها $\sigma \Delta x \Delta y$ ، كما في الشكل (4-18)، وخاضعة لتوتر سطحي S ناتج عن قوة شد بوحدة الطول (كقوة التماسك الجزيئي) والتي تؤثر عمودياً على أي خط في هذا السطح . ولذلك تكون القوة المؤثرة على السطح العنصري $\Delta x \Delta y$ باتجاه المستوي xz هي $S \Delta y$ وباتجاه المستوي yz هي $S \Delta x$.



(ب)



(i)

الشكل (18-4)

يوضح الشكل (18-4 ب) منظراً جانبياً للرقعة حيث نلاحظ أن القوة المستعرضة الناتجة عن انحناء الرقعة في المستوي xz هي :

$$(101-4) \quad F_{xz} = S\Delta y\Delta\theta_x = S\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\Delta x\Delta y$$

كما أن الرقعة منحنية باتجاه المستوي yz أيضاً والقوة في ذلك الاتجاه هي :

$$(102-4) \quad F_{yz} = S\Delta y\Delta\theta_y = S\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\Delta x\Delta y$$

فتصير القوة الكلية مجموع F_{xz} و F_{yz} ، بينما كتلة الرقعة هي $\sigma\Delta x\Delta y$ ، لذا نكتب معادلة الحركة بالشكل :

$$(103-4) \quad \sigma\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = S\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)\Delta x\Delta y$$

أو

$$(104-4) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \left(\frac{\sigma}{S}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

بالطبع فإن حل المعادلة (104-4) هو من الشكل :

$$(105-4) \quad z(x, y, t) = f(x)g(y)\cos\omega t$$

كما أنه من الواضح أن شكل كل من f و g يجب أن يكون من الشكل :

$$(106-4) \quad \begin{cases} f(x) = A \sin k_x x \\ g(y) = B \sin k_y y \end{cases}$$

أما الترددات ω فتعطى بالعلاقة :

$$(107-4) \quad \omega = \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2} [k_x^2 + k_y^2]^{1/2}$$

حيث تعطى الأطوال الموجية k_x و k_y بالعلاقة :

$$(108-4) \quad k_x = \frac{n_1 \pi x}{L_x} , \quad k_y = \frac{n_2 \pi y}{L_y}$$

الآن : لقد افترضنا أن الغشاء المعتبر يحوي تناظراً مستطيلاً بحيث كان الشد باتجاه x هو نفسه باتجاه y ، لهذا حصلنا على المعادلة (104-4) بدلالة الإحداثيات الديكارتية المناسبة لهذا النوع من التناظر . إلا أنه لو كان للمنظومة تناظراً دائرياً ، كأن نولد الاهتزازات في الغشاء بتحريك نقطة منه بشكل اهتزازي بسيط للأعلى والأسفل بحيث تتولد أمواج دائرية مركزها تلك النقطة ، عندئذ نستخدم الإحداثيات القطبية (r, θ) بدلاً من x و y ، كما نفترض أن التناظر الدائري يجعل الإزاحة Z مستقلة عن الزاوية القطبية θ لتؤول المعادلة (104-4) إلى :

$$(109-4) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

تمثل هذه المعادلة أمواجاً دائرية تنتشر بشكل مستو بدءاً من مركز تشكلها ، كما تتناقص سعتها عكساً مع نصف قطرها . يعطى الحل الكامل لهذه المعادلة بما يسمى دالات بسل الكروية (*Bessel's Functions*) . على بعد كبير من مركز انتشار الأمواج الدائرية ، يصير الحد الثاني في الطرف الأيمن من (109-4) مهملًا لتعود المعادلة وتشبه (104-4) وتصير سعة الاهتزازات ثابتة بعد مسافة معينة ! نكتب أخيراً معادلة الأمواج في ثلاثة أبعاد ، كانتشار موجة صوتية في غرفة بدراناً من نقطة معينة ، فنكتب مباشرة :

$$(110-4) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

حيث يدل Ψ على متغير مناسب للموجة في الفضاء ، كسعة التغير في الضغط في حالة الصوت مثلاً ، الذي يعتمد على الإحداثيات الثلاث x ، y ، و z ، بالإضافة للزمن t . نكتب المعادلة (110-4) بأي إحداثيات سواء كانت ديكارتية ، أم اسطوانية ، أو كروية ، بدلالة مؤثر لابلاس (*Laplacian*) على النحو :

$$(111-4) \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

إذا كان للمنظومة تناظراً كروياً ، كما هو الحال في معظم المنظومات العملية ، عندئذ نستخدم الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) ونلاحظ أن حل (111-4) لا يعتمد إلا على r ، لذا نقول هذه المعادلة إلى :

$$(113-4) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

ومن السهل التأكد أن حلها سيكون أمواجاً توافقية تتناقص سعتها عكساً مع r وفق العلاقة :

$$(114-4) \quad \Psi(r, t) = \frac{C}{r} \sin(\omega t - kr)$$

لهذه العلاقة أهمية كبيرة في نظرية التشتت في الفيزياء الكمية .

4 - 20 أمثلة

مثال 4-20-1 تنتشر موجة ترددها 20 Hz بسرعة 80 m/s . (أ) ما المسافة بين نقطتين إذا كان فرق الطور بين سعتيهما في لحظة ما 30° ؟ (ب) ما فرق الطور لموضعي نقطة بين لحظتين متباعدتين بمقدار 0.01 s ؟
الحل : لنحسب أولاً السرعة الزاوية ω :

$$\omega = 2\pi f = 40\pi \text{ rad / s}$$

ثم نحسب العدد الموجي k من العلاقة :

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{40\pi}{80} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

ثم نكتب معادلة الموجة المنتشرة :

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(40\pi t - \frac{\pi}{2} x)$$

(أ) لحساب المسافة بين نقطتين بينهما فرق في الطور بمقدار $30^\circ = \pi/6$ في لحظة ما t نكتب :

$$\Delta\phi = (40\pi t - \frac{\pi}{2} x_1) - (40\pi t - \frac{\pi}{2} x_2) = \frac{\pi}{6}$$

أي أن :

$$(x_2 - x_1) = 3.33 \text{ m}$$

(ب) لحساب فرق الطور لموضعي نقطة بين لحظتين متباعدتين بمقدار 0.01 s نكتب :

$$\Delta\phi = (40\pi t_1 - \frac{\pi}{2}x) - (40\pi t_2 - \frac{\pi}{2}x) = 40\pi(t_2 - t_1) = 40\pi(0.01) = 0.4\pi \text{ rad}$$

مثل 2-20-4 تنتشر موجتان $y_1 = A\sin(5x - 10t)$ و $y_2 = A\sin(4x - 9t)$. اكتب معادلة الموجة الكلية وجد سرعة الطور والمجموعة .

الحل : نكتب الموجة الكلية :

$$y_T = A[\sin(5x - 10t) + \sin(4x - 9t)] = 2A\sin(4.5x - 9.5t)\cos(0.5x - 0.5t)$$

نلاحظ أن سرعة الطور $v_p = \omega/k$ حيث $\omega = 9 \text{ rad/s}$ و $k = 4.5 \text{ m}^{-1}$ ، أي أن :

$$v_p = \frac{9}{4.5} = 2 \text{ m/s}$$

أما سرعة المجموعة $v_g = \Delta\omega/\Delta k$ ، حيث $\Delta\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ و $\Delta k = 0.5 \text{ m}^{-1}$ ، أي أن :

$$v_g = \frac{0.5}{0.5} = 1 \text{ m/s}$$

مثل 3-20-4 تنتشر الأمواج الكهرومغناطيسية في البلورات بسرعة طور معطاة بالعلاقة :

$$v_p = c \frac{\sin(ka/2)}{(ka/2)}$$

حيث k العدد الموجي ، و a المسافة الذرية للبلورة ، و c ثابت (سرعة الضوء في الفراغ) . ماسرعة المجموعة ومناهيها للأطوال الموجية الطويلة ؟

الحل : نكتب $v_p = \omega/k$ و $v_g = d\omega/dk$ لكن من العلاقة أعلاه فإن :

$$v_p = c \frac{\sin(ka/2)}{(ka/2)} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \frac{2c}{a} \sin(ka/2)$$

أي أن :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \cos(ka/2)$$

الآن : في حالة الأمواج الطويلة فإن k تصير صغيرة مما يجعل سرعة المجموعة تؤول إلى :

$$v_g \rightarrow c$$

مسائل

1-4 تنتشر موجة مستعرضة في وسط وفق العلاقة $y = 0.3 \sin \pi(0.5x - 50t)$ حيث تقدر x و y بالستيمتر و t بالثانية . (أ) ماسعة وتردد وطول ودور الموجة ؟ (ب) ماسرعة الانتشار والعدد الموجي ؟ (ج) ما السرعة العظمى لاهتزاز أي عنصر من الوسط ؟

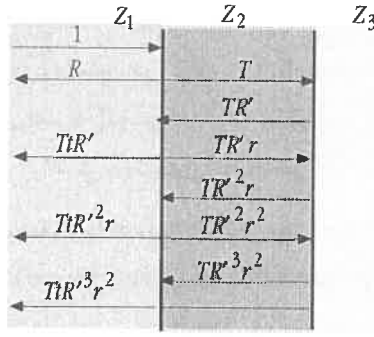
2-4 تنتشر موجة ترددها 20 Hz بسرعة 80 m/s (أ) ما المسافة الفاصلة بين نقطتين فرق الطور بينهما 30° ؟ (ب) ما فرق الطور بين إزاحتين مختلفتين لنفس النقطة بينهما فارق زمني 0.01 s ؟

3-4 يخضع حبل طويل كثافته 0.1 kg/m لشد 50 N وتنتشر فيه موجة بدءاً من إحدى نهايتيه بسعة 0.02 m ودور 0.1 s باتجاه محور السينات الموجب . (أ) ماسرعة الانتشار وطول الموجة ؟ (ب) ما المعادلة الموجية إذا كانت سعة الاهتزاز في اللحظة $t = 0$ عند بداية الحبل 0.01 m وسرعتها سالبة ؟

4-4 تنتشر موجة في حبل طوله 10 m ومشدود بوساطة حمل يعادل 50 ضعفاً من وزنه . (أ) ماسرعة الاهتزاز (ب) إذا كانت المعادلة الموجية تعطى بـ : $y = 0.02 \sin \pi(x - vt)$ فما هي إزاحة نقطة تقع في الموضع $x = 5$ m في اللحظة $t = 0.1$ s ؟

5-4 تقع الكتلة M عند منتصف حبل ممانعته ρc بينما تنتشر فيه موجة اليمين بتردد ω فينعكس جزء منها عند M وينفذ الجزء الآخر . برهن أن معاملي الانعكاس والنفوذ للسعة هما $iq/(1+iq)$ و $1/(1+iq)$ ، على الترتيب ، حيث $q = \omega M/2\rho c$ و $t = (-1)^{1/2}$ ، علماً بأن الشروط الحدودية عند M هي تساوي سعة الموجة على طرفيها والفرق بين القوة المؤثرة على الحبل عند يمينها وعند يسارها يساوي Ma حيث a تسارعها .

6-4 مُدَاخِل فابري - بيرو (Fabre - Perot Interferometer) . تسقط موجة سعتها تساوي الواحد على وسط أول ممانعته Z_1 ووراءه وسط ثان ممانعته Z_2 ووسط ثالث ممانعته Z_3 ، كما في الشكل (4-19) ، (أ) برهن أن سعة الموجة المنعكسة الكلية في الوسط الأول هي : $R + tTR(1 + rR + r^2R^2 + \dots)$ حيث R و R' معاملي الانعكاس عن السطح الفاصل بين الوسط الأول والثاني والوسط الثاني والثالث ، على الترتيب ، و T و t معاملي النفوذ من الوسط الأول للثاني ومن الثاني للأول ، على الترتيب أيضاً . (ب) برهن أن السعة المنعكسة الكلية ستندم إذا كان $R = -R'$ وأنه في تلك الحالة سيكون $Z_2 = Z_1 Z_3$.



الشكل (19-4)

7-4 تنتشر موجة في وسط فيلاحظ أن معادلتها الحركة لنقطتين تقعان عند $x_1=0$ و $x_2=1$ هما $y_1 = 0.2\sin 3\pi t$ و $y_2 = 0.2\sin(3\pi t + \pi/8)$ ، على الترتيب . (أ) ما تردد وطول وسرعة انتشار الموجة ؟ (ب) ما اتجاه الانتشار ؟

8-4 برهن أن الموجة النافذة في المسألة السابقة تتأخر عن الموجة الساقطة بمقدار θ حيث $\tan \theta = q$ وأن الموجة المنعكسة تتأخر بمقدار $\pi/2 + \theta$ عن الموجة الساقطة . برهن أيضاً أن معاملي النفاذ والانعكاس للطاقة هما $\sin^2 \theta$ و $\cos^2 \theta$ ، على الترتيب .

9-4 تولد قوة متغيرة ترددها 5 Hz وسعتها 0.3 N أمواجاً في حبل طويل كثافته 0.01 kg/m . برهن أن معدل انتشار الطاقة على امتداد الحبل هو $3\pi/20$ W وأن سرعة الانتشار هي $30/\pi$ m/s .

10-4 يسقط ضوء طول موجته في الهواء 550 nm من الهواء على الزجاج ($n = 1.5$) . برهن أنه يمكن منع انعكاس هذا الضوء بطلي مادة سمكها 112 nm ومعامل انكسارها 1.22 . (تذكر أن $Z = 1/n$) .

11-4 برهن أن معادلة الأمواج المستقرة $y_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin(\omega_n x/c)$ تحقق المعادلة الموجية المستقلة عن الزمن (*time - independent*) $\partial^2 y / \partial x^2 + k^2 y = 0$.

12-4 تعطى الإزاحة الكلية لنقطة من حبل مشدود بين نقطتين وتنتشر فيه أمواج قادمة ومنعكسة بالعلاقة التالية $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx) + rA \cos(\omega t + kx)$ حيث r معامل الانعكاس للسعة . برهن أنه يمكن كتابة هذه العلاقة على شكل تراكب موجتين $y(x,t) = A(1+r) \cos \omega t \cos kx + A(1-r) \sin \omega t \sin kx$.

13-4 تتألف حزمة أمواج من موجتين متقاربتين بالطول الموجي λ و $\lambda + \Delta \lambda$ حيث $\Delta \lambda / \lambda \ll 1$. برهن أن عدد أطوال الموجة λ الواقعة ضمن صفرين متتاليين على منحنى الغلاف يساوي $\sim \lambda / \Delta \lambda$.

14-4 تعطى سرعة الطور لموجة منتشرة في وسط صلب بالعلاقة $v = c [\sin(ka/2) / (ka/2)]$ حيث k العدد الموجي و c ثابت و a المسافة ما بين الذرات (*interatomic distance*) . برهن أن سرعة المجموعة هي $v_g = c \cos(ka/2)$. ما الحد الأعلى لـ v_g من أجل أمواج طويلة ؟

15-4 يعطى ثابت العزل لغاز عند طول موجي λ بالعلاقة $\epsilon_r = c^2/v^2 = A + B/\lambda^2 - D\lambda^2$ حيث A و B و D ثوابت و c سرعة الضوء في الخلاء و v سرعة الطور . برهن أن $v_g = v(A - 2D\lambda^2) / \epsilon_r$.

16-4 تعطى علاقة التبديد (dispersion relation) للإلكترون في ميكانيك الكم بالعلاقة $\omega^2/c^2 = k^2 + m^2c^2/\hbar^2$ حيث m كتلة الإلكترون، و c سرعة الضوء في الخلاء، و \hbar ثابت بلانك ($\hbar = h/2\pi$)، و k العدد الموجي. برهن أن حاصل ضرب سرعة الطور وسرعة المجموعة $c^2 = v v_g$ (تذكر أن $v = \hbar k/m$ حيث v سرعة الطور). لاحظ أن v قد تصير أكبر من c إلا أن لا يمكن أن تتجاوز c . ما المعنى الفيزيائي لهاتين السرعتين في هذه الحالة؟

17-4 يوضح الشكل (11-4) نبضة طولها الزمني Δt وتتغير وفق العلاقة $y = A \cos \omega_0 t$. برهن أنه إذا أمكن كتابة هذه النبضة بالشكل $y(\omega) = a \cos \omega_1 t + a \cos(\omega_1 t + \delta \omega) + \dots$ فإن التردد يتراوح حول ω_0 وأن مدى الترددات المشاركة بشكل فعال في هذا التراكب يحقق العلاقة $\Delta \omega \Delta t \approx 2\pi$. كرر الحل لنبضة طولها Δx معطاة بالعلاقة $y(x) = A \cos k_0 x$ وبرهن في هذه الحالة أن النبضة متمركزة حول k_0 وأن مدى الأطوال الموجية Δk المشاركة بشكل فعال يحقق العلاقة $\Delta k \Delta x \approx 2\pi$.

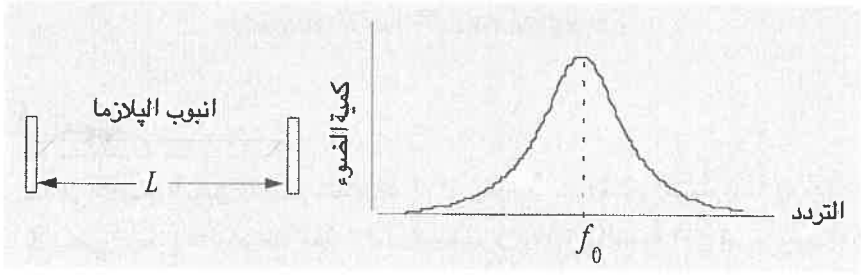
18-4 انتشار الأمواج الكهرمغناطيسية في البلازما الرقيقة (tenuous plasma)

عندما تنتشر أمواج كهرمغناطيسية في غاز من الإلكترونات الحرة والأيونات (يطلق عليه بلازما رقيقة) فإن الإلكترونات تتحرك متأثرة بالمجال الكهربائي لهذه الأمواج بشكل اهتزازي ويتغير العدد الموجي لهذه الأمواج وفق العلاقة:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

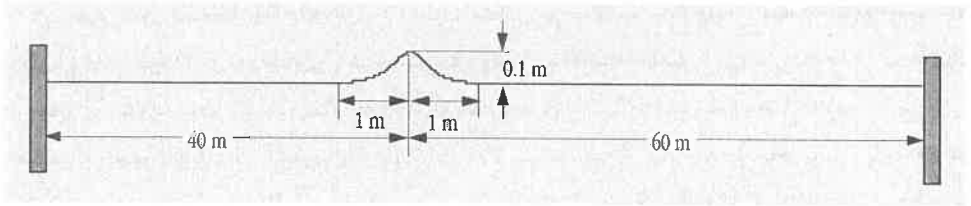
حيث تدعى ω_p تردد البلازما (تساوي $ne^2/m\epsilon_0$ حيث n كثافة الإلكترونات، و m كتلة الواحد، و e شحنته). ما سرعة الطور والمجموعة لهذه الأمواج؟

19-4 يمكن إعداد ليزر بوضع انبوب بلازما داخل فجوة تجاوب ضوئية (optical resonant cavity) مؤلفة من مرآتين متوازيتين ذات عاكسية عالية جداً بحيث تعتبر كل واحدة حائطاً صلباً للأمواج الضوئية الساقطة عليها. كما في الشكل (20-4). الهدف من انبوب البلازما هو إصدار ضوء بوساطة إثارة الحالات الطبيعية للفجوة. (أ) ماهي الترددات الطبيعية لهذه الفجوة؟ (اعتبر المسافة بين المرآتين L و c سرعة الضوء في الفجوة) (ب) بفرض أن انبوب البلازما يصدر ضوءاً طول موجته متمركز عند تردد $f_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz له عرض صغير، كما في الشكل (20-4)، وأن قيمة هذا العرض Δf بحيث أن كل الترددات الطبيعية الممكنة في الفجوة ستكون محصورة حول f_0 في مجال $\pm 1.0 \times 10^9$ Hz فقط. ما عدد الترددات الطبيعية إذا كان $L = 1.5$ m؟ وما أكبر قيمة ممكنة لـ L بحيث لا يكون هناك سوى تردد طبيعي واحد (بحيث يصدر الليزر ضوءاً وحيد اللون)؟ اعتبر سرعة الضوء $c = 3 \times 10^8$ m/s.



الشكل (20-4)

20-4 تنتشر نبضة على حبل مشدود كما هو مبين في الشكل (21-4) بسرعة 40 m/s . (أ) ما أكبر سرعة مستعرضة لجزيئات الحبل (تقريباً) ؟ (ب) ما الشد في الحبل إذا كانت كتلته 2 kg ؟ (ج) اكتب المعادلة الرياضية التي تصف موجة طولها 5 m وسعتها 0.2 m تنتشر اليسار (محور السينات السالب) على حبل طويل جداً من نفس مادة الحبل المذكور أعلاه .

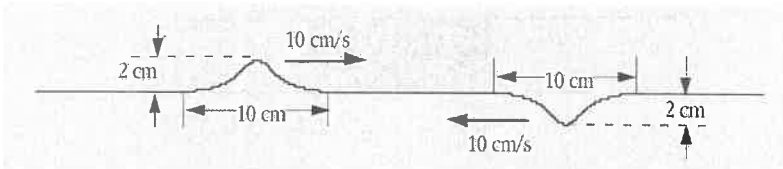


الشكل (21-4)

21-4 تنتشر نبضة على حبل مشدود وفق العلاقة $y(x,t) = b^3 / [b^2 + (x-vt)^2]$ ، حيث $b = 5 \text{ cm}$ و $v = 2.5 \text{ cm/s}$. ارسم $y(x,0)$ و $y(x,0.2 \text{ s})$. استخدم الرسم ل طرح المنحنيين الناتجين للحصول على السرعة المستعرضة بدلالة x في اللحظة $t = 0.1 \text{ s}$ وقارن ماتحصل عليه مع نتيجة الاشتقاق المباشر لـ $y(x,t)$ في اللحظة $t = 0.1 \text{ s}$.

22-4 تنتشر نبضة على حبل مشدود وفق العلاقة : $y(x,t) = b^3 / [b^2 + (2x-vt)^2]$. (أ) ارسم $y(x,0)$ (ب) ما سرعة الانتشار ؟ (ج) ما السرعة المستعرضة لذرات الحبل في اللحظة $t = 0$ ؟

23-4 تنتشر نبضتان متماثلتان باتجاهين متعاكسين على حبل مشدود بحيث أن شكليهما في اللحظة $t = 0$ هما كما في الشكل (22-4) . ارسم بدقة شكل الحبل وتوزع سرع ذراته في اللحظات $t = 1, 1.5, 2 \text{ s}$.



الشكل (22-4)

الأمواج الطولية والصوت

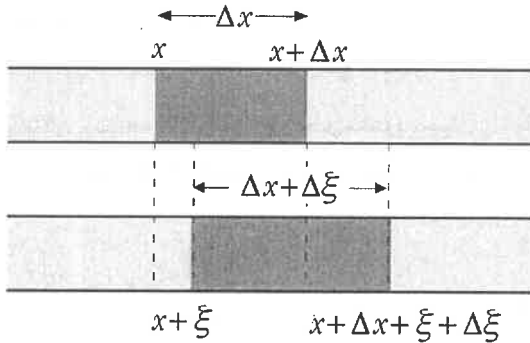
(Longitudinal Waves & Sound)

5-1 تمهيد

درسنا في الفصل السابق الأمواج الميكانيكية بشكل عام وعرفنا الأمواج المستعرضة والطولية ، إلا أن تركيزنا كان على الأمواج المستعرضة فقط . أما الآن فندرس الأمواج الطولية التي تميز إحدى أهم أنواع الأمواج التي تصادفنا في حياتنا اليومية هي الأمواج الصوتية . فندرس في هذا الفصل كيف تنتشر الأمواج الطولية وخواصها وسرعة انتشارها في الغازات والمواد الصلبة . ثم نعتبر الأمواج الصوتية المستقرة في الأنايب الهوائية ، وشروط تحققها ، والنغمات الأساس لها ، ومتوافقاتها .

5-2 المعادلة الموجية

سنقوم الآن باشتقاق المعادلة الموجية لصوت منتشر في غاز ما ، كالهواء ، فنعتبر انبويًا اسطوانياً مملوءاً بالغاز مساحة مقطعه تساوي واحدة المساحات ونميز منطقة منه محصورة بين x و $x + \Delta x$. ثم نفترض أن مصدراً صوتياً وحيد التردد ، كشوكة رنانة أو ماشابه ذلك ، قد أثرت عند طرف هذا الانبوب بحيث تؤدي اهتزازاته لتغيير الضغط في الأنبوب فتنزاح ذرات الغاز عن مواضع اتزانها بمقدار معين يتناسب والتغير في الضغط عندها فتنزاح ذرات الغاز عند الموضع x بمقدار ξ عن متوسط موضع اتزانها (لأنها في حالة حركة عشوائية بسيطة جداً لكن دائمة عند أي درجة حرارة ما عدا الصفر المطلق حيث تصل لحالة السكون المطلق) ، بنفس الشكل تنزاح الذرات الموجودة عند الموضع $x + \Delta x$ عن متوسط موضع اتزانها بمقدار $\xi + \Delta \xi$ ، كما في الشكل (1-5) ، حيث بالغنا جداً في تمثيل إزاحة الذرات المختلفة .



الشكل (1-5)

نلاحظ من الشكل (1-5) أن طول الجزء المعتبر Δx يزداد بمقدار $\Delta \xi$ حيث نكتب :

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

لأن تغير الإزاحة لأي ذرة يعتمد على موضعها على امتداد الأنبوب .
 بالطبع ، فإن انزياح الذرات ناتج عن الفرق في الضغط بين طرفي الجزء المعتبر ، الذي يساوي
 $P_x - P_{x+\Delta x}$ ، حيث نلاحظ أيضاً أن :

$$P_{x+\Delta x} = P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x$$

ومنه :

$$\Delta P_x = P_x - P_{x+\Delta x} = P_x - (P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x) = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x$$

بما أن مساحة مقطع الأنبوب تساوي الواحد لذا تكون محصلة القوة المؤثرة على هذا الجزء هي $F_T = \Delta P_x$ ،
 فنكتب قانون الحركة لهذا الجزء على النحو :

$$F_T = ma$$

بملاحظة أن كتلة هذا الجزء هي $\rho_0 V_0 = \rho_0 (\Delta x)$ بينما يعطى تسارعه بـ :

$$a = \partial^2 \xi / \partial t^2$$

لذلك يؤول قانون الحركة إلى :

$$(1-5) \quad -\frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x = (\rho_0 \Delta x) \partial^2 \xi / \partial t^2$$

الآن : إذا كان حجم الغاز الأصلي في الجزء المعتبر هو V_0 ، وضغطه P_0 ، وكتافته ρ_0 قبل وصول الموجة
 الصوتية إليه ، فإن هذه المقادير ستتغير إلى $V_0 + \Delta V$ ، و $P_0 + \Delta P$ ، و $\rho_0 + \Delta \rho$ ، على الترتيب .
 يطلق على الزيادة النسبية في الحجم $\Delta V/V_0$ اسم التمديدية (dilatation) ويرمز لها بـ δ ، وعلى التغير
 النسبي في الكثافة $\Delta \rho/\rho_0$ التكتفية (condensation) ويرمز لها بـ s .

في الحالة الطبيعية لمعظم الغازات بما فيها الهواء فإن قيمة كل من δ و s لا تتجاوز 10^{-3} للأمواج الصوتية العادية ، حيث لا يتغير الضغط نتيجة لها أكثر من 10^{-10} من الضغط الجوي عند تردد 1000 Hz (حيث لا يزال الصوت مسموعاً) ، مما يعني أن الوسط لا يعاني نتيجة دخول موجة صوتية فيه أكثر من تغيرات صغيرة جداً (فلانتوقع أن تتور عاصفة رياح من حركة الذرات أو أن ينفجر الانبوب لارتفاع الضغط أو تقلص الحجم !!) .
بالفعل فإن بقاء الكتلة ثابتة تعني أن :

$$\rho_0 V_0 = \rho V = \rho_0 V_0 (1 + \delta)(1 + s) \Rightarrow \delta + s \approx 0 \Rightarrow \delta = -s$$

ذلك بإهمال الحد δs لصغره بالمقارنة مع بقية الحدود .

نستدل من كون $\delta = -s$ أن تمددية الغاز في أي منطقة تعاكس تكثيفته تماماً ، فعندما يكون هناك تضغط (*compression*) δ أصغر ما يمكن) فإن التكتفية تصير كبيرة جداً ، بالعكس ففي منطقة تخلخل (*rarefaction*) تصير التكتفية أصغر ما يمكن بينما يزداد الحجم أكبر ما يمكن .
بتعريف المعامل المادي (*Bulk modulus*) للغاز بالعلاقة :

$$B = - \frac{\Delta p}{(\Delta V / V)}$$

الذي يمثل نسبة الإجهاد المؤثر على الغاز إلى انفعال هذا الأخير نتيجة لذلك ، وافترض أن الغاز يتحول بشكل كظوم (*adiabatic*) خلال مرور الموجة الصوتية فيه ، أي لا يتبادل حرارة مع الوسط الخارجي خلال ذلك ، (هذا طبيعي إذ لا يعقل أن تبرد الغرفة أو تسخن خلال محاضرة أو حديث فكاهي !) .
من ثم نكتب معادلة الحالة للغاز بالشكل :

$$PV^\gamma = \text{ثابت}$$

ومنه :

$$V^\gamma dP + \gamma V^{\gamma-1} P dV = 0 \Rightarrow - \frac{\Delta P}{(\Delta V / V)} = \gamma P = B$$

$$\Delta P = -B \delta = B s \text{ أي أن}$$

لكن التمددية δ تمثل معدل تغير الحجم ، أي التغير في الحجم مقسوماً على الحجم الأصلي ، أي أن :

$$\delta = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta x} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -s$$

بما أن $\Delta P = -B \delta$ لذلك يكون :

$$\Delta P = dP = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

وتصير معادلة الحركة (1-5) بالشكل :

$$(2-5) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

هذه هي المعادلة الموجية ، حيث وضعنا :

$$(3-5) \quad c^2 = \frac{B}{\rho_0} = \frac{\gamma P}{\rho_0}$$

إن وحدة c ، كما هو واضح من (3-5) ، هي m/s ، أي سرعة ، فهي تمثل سرعة انتشار الموجة في الغاز . يمكن تعميم العلاقة (2-5) إلى انتشار الأمواج الصوتية في القضبان الصلبة باستبدال معامل يونغ (*Young modulus*) بالمعامل المادي (*Bulk modulus*) B في علاقة السرعة (3-5) لتصير سرعة الانتشار في القضبان الصلبة معطاة بالعلاقة :

$$c^2 = \frac{Y}{\rho}$$

تشبه (2-5) المعادلة الموجية العامة (9-4) أو (17-4) لذلك نضع حلها العام بالشكل :

$$(4-5) \quad \xi = \xi_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

حيث تمثل ξ_0 السعة العظمى لاهتزازات ذرات الغازات عن متوسط مواضع اتزانها ، و k العدد الموجي $2\pi/\lambda$ و ω التردد الزاوي . وكما نعلم فإن $\omega/k = c$ هي سرعة الانتشار . بالطبع فإن (2-5) تمثل موجة تنتشر على امتداد محور السينات الموجب . أما إذا تحركت بالاتجاه السالب فتعطى عندئذ بالعلاقة :

$$(5-5) \quad \xi = \xi_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

من ثم نجد تمددية الغاز وتكثيفته مباشرة بكتابة :

$$(6-5) \quad \delta = -s = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -k \xi_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

3-5 طاقة الأمواج الصوتية

تعطى الطاقة الكلية المحمولة في الأمواج الصوتية بالعلاقة :

$$E = K + U$$

حيث K الطاقة الحركية لجزء الغاز المهتز وتساوي :

$$K = \frac{1}{2}(\rho_0 dx)v^2 = \frac{1}{2}(\rho_0 dx)\xi^2$$

بالتعويض عن ξ من (4-5) وأخذ متوسطها على طول موجة واحد نجد :

$$(7-5) \quad \bar{K} = \frac{1}{4}\rho_0\omega^2\xi_0^2$$

أما طاقة الوضع فتساوي الشغل الذي يبذله الضغط الإضافي ΔP على الغاز لتغيير حجمه خلال انتشار الموجة ، أي أن :

$$U = -\int \Delta dV$$

حيث تدل p على الزيادة في الضغط ، أي $\Delta P = Bs$ ، كما أن $dV = -V_0 ds$ ، لذلك نجد أن :

$$U = -\int_0^s BsV_0 ds = \frac{1}{2}Bs^2V_0$$

بملاحظة أن الحجم الأصلي للجزء المعتبر $V_0 = \Delta x$ والاستفادة من العلاقة (6-5) ، نجد متوسط طاقة الوضع على طول موجة كامل بالشكل :

$$(8-5) \quad \bar{U} = \frac{1}{4}\rho_0\xi_0^2$$

واضح من (7-5) و (8-5) و (4-5) أن متوسط طاقة الحركة تساوي متوسط طاقة الوضع ومجموعهما هو :

$$(9-5) \quad \bar{E} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2$$

4-5 شدة الصوت

شدة الأمواج الصوتية هي معدل الطاقة المتدفقة عبر وحدة المساحة وتساوي :

$$I = \bar{E} \times c = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 \xi_0^2 \quad (10-5)$$

حيث تدل $Z = \rho_0 c$ في العلاقة السابقة على **الممانعة الصوتية المميزة** (*specific accoustical impedance*) التي تماثل ممانعة الأوساط الصلبة عند انتشار أمواج مستعرضة ، كما درسنا في الفصل السابق .
تبلغ أدنى شدة يمكن للأذن الإنسانية سماعها حوالي $I_0 = 10^{-12}$ watt/m² وتنسب لها بقية الشدات التي نصادفها في حياتنا اليومية من خلال ما يسمى **مستوى الشدة** (*intensity level*) ، التي يرمز لها بـ β ، وتعطى بالعلاقة :

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (11-5)$$

تعطى وحدة β بالديسيبل (db) .

نلاحظ من العلاقة (11-5) أنه عندما $I=I_0$ فإن $\beta=0$ db ، وعندما $I=100 I_0$ فإن $\beta=20$ db ، وعندما $I=1000 I_0$ فإن $\beta=30$ db ، وهكذا دواليك .
نعطي في الجدول 1 شدات بعض الأصوات المختلفة التي نصادفها في حياتنا اليومية .

I/I_0	مستوى الشدة	الصوت
10^0	0	حدود السمع الدنيا
10^1	10	حفيف ورق الشجر
10^4	40	غرفة جلوس عادية
10^5	50	قاعة محاضرات
10^6	60	محاضرة حضارية
10^7	70	شارع مزدحم
10^{12}	120	حدود السمع العليا
10^{13}	130	محرك طائرة نفاثة
10^{14}	140	حدود الألم
10^{16}	160	تمزق طبل الأذن
10^{20}	200	محرك صاروخ مركبة فضائية

الجدول 1 : شدة الصوت لبعض الأصوات الشائعة

5-5 انعكاس ونفوذ الأمواج الصوتية

عندما تصل موجة صوتية لحاجز فاصل بين وسطين مختلفين بالمانعة فإن جزءاً منها ينعكس وآخر ينفذ بحسب قيمة ممانعة كل وسط .

تخضع الأمواج المختلفة لشروط حدودية عند السطح الفاصل هي :

أ - شرط حركي : استمرارية السرعة ، أي يجب أن يكون :

مجموع سرعة الذرات في الموجة القادمة والمنعكسة = سرعة الذرات في الموجة النافذة

$$(12-5) \quad \xi_i + \xi_r = \xi_t$$

ب - شرط تحريكي : استمرارية فرق الضغط ، أي يجب أن يكون :

فرق الضغط الناتج عن الموجة القادمة والمنعكسة = فرق الضغط الناتج عن الموجة النافذة

$$(13-5) \quad \Delta p_i + \Delta p_r = \Delta p_t$$

بوضع :

$$\Delta P = B s = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} = -B(-ik\xi_0 e^{j(\omega t - kx)}) = \frac{Bk}{\omega} (i\omega\xi_0 e^{j(\omega t - kx)}) = \frac{Bk}{\omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{Bk}{\omega} \dot{\xi}$$

وملاحظة أن $B = \rho c^2$ و $\omega/k = c$ ، تؤول العلاقة السابقة إلى :

$$\Delta P = \rho c \dot{\xi}$$

فيصير الشرط التحريكي على النحو :

$$\rho_1 c_1 \dot{\xi}_i - \rho_1 c_1 \dot{\xi}_r = \rho_2 c_2 \dot{\xi}_t$$

أو :

$$(14-5) \quad Z_1 \dot{\xi}_i - Z_1 \dot{\xi}_r = Z_2 \dot{\xi}_t$$

بحل العلاقتين (12-5) و (14-5) نجد :

$$(15-5) \quad \begin{cases} \frac{p_r}{p_i} = -\frac{Z_1 \xi_r}{Z_1 \xi_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{p_t}{p_i} = \frac{Z_2 \xi_t}{Z_1 \xi_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases}$$

نستنتج من (15-5) أنه إذا كانت $Z_1 > Z_2$ فإن سرعة اهتزازات الذرات في الموجة القادمة والمنعكسة متوافقتان في الطور بينما يكون الفرق في الضغط الصوتي متعاكسين في الطور مما يؤدي لعقدة في الضغط في الأمواج المستقرة . أما إذا كان $Z_1 < Z_2$ عندئذ تصير السرعتان متعاكستين في الطور وفرق الضغط متوافقين . أما بالنسبة للأمواج النافذة فتكون السرعة وفرق الضغط متوافقة في الطور مع الموجة القادمة دائماً .

يجدر ذكره هنا أن الممانعة الصوتية المميزة للهواء تختلف بشكل كبير جداً عن الأوساط الصلبة أو المائعة لذلك فإن وصول موجة صوتية إلى حاجز فاصل بين الهواء ووسط كهذا يؤدي لانعكاس كلي للصوت تقريباً بغض النظر عن الجهة الآتي منها مما يجعل استخدام الأمواج الصوتية في أجهزة الإرسال والكشف تحت الماء ذات استخدامات محدودة فعلاً .

من جهة أخرى يمكن حساب نسبة كل من الشدة المنعكسة والنافذة إلى الشدة القادمة من العلاقتين (10-5)

و (15-5) فنجد :

$$(16-5) \quad \begin{cases} \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \\ \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}$$

حيث نستنتج بسهولة أن :

$$(17-5) \quad I_i = I_r + I_t$$

وهذا أكيد من مبدأ حفظ الطاقة بالطبع !

5-6 الأمواج الصوتية المستقرة (Standing Waves)

تتشكل الأمواج المستقرة في الأنابيب الهوائية عندما تتداخل الموجة القادمة والمنعكسة عند نهاية الأنبوب حيث نميز حالتين :

أ- نهاية مغلقة : أي أن الممانعة $Z_2 = \infty$ فنجد من (5-15) أن :

$$\dot{\xi}_i = -\dot{\xi}_r \Rightarrow \xi_i = -\xi_r$$

أي أن الموجة القادمة والمنعكسة متعاكستان في الطور بمقدار π ، فإذا كتبنا :

$$\xi_i = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$$

و

$$\xi_r = -\xi_0 \sin(\omega t + kx)$$

عندئذ تصير الموجة الكلية عند أي نقطة من الوسط هي :

$$\xi_T = \xi_0 [\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)]$$

أي أن :

$$(18-5) \quad \xi_T = 2\xi_0 \cos \omega t \sin kx$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن هناك نقاطاً من الأنبوب ستبقى ساكنة مع مرور الزمن هي تلك المحققة للعلاقة :

$$\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi$$

من ثم نجد النقاط التي تبقى ساكنة دائماً في المواضع :

$$(19-5) \quad x = \frac{n\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

تسمى هذه النقاط عقداً ، كما أسلفنا . أما البطنون ، أي نقاط الاهتزاز الأعظم ، فنجدتها في المواضع :

$$\sin kx = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

أي عند المواضع :

$$(20-5) \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

نستنتج مما تقدم أن شرط تشكل أمواج مستقرة ذات طول موجي معين في انبوب هوائي مغلق عند نهايته هو أن يكون طوله محققاً للعلاقة :

$$(21-5) \quad L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

بنفس الطريقة نلاحظ أنه إذا انعكست الأمواج الصوتية عند نهاية مفتوحة لانبوب هوائي ، حيث $Z_2 = 0$ ، عندئذ يكون :

$$\xi_i = \xi_r \Rightarrow \xi_i = \xi_r$$

وتصير الموجة الكلية عند أي نقطة من الوسط معطاة بـ :

$$\xi_T = \xi_0 [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)]$$

أي أن :

$$(22-5) \quad \xi_T = 2\xi_0 \sin \omega t \cos kx$$

من ثم نجد مواضع العقد بوضع :

$$\cos kx = 0 \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2k}$$

أي عند النقاط :

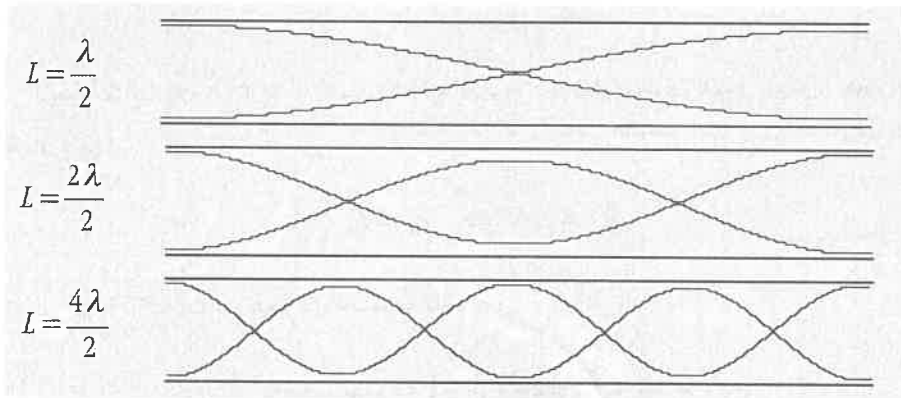
$$(23-5) \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$(24-5) \quad x = n \frac{\lambda}{2}$$

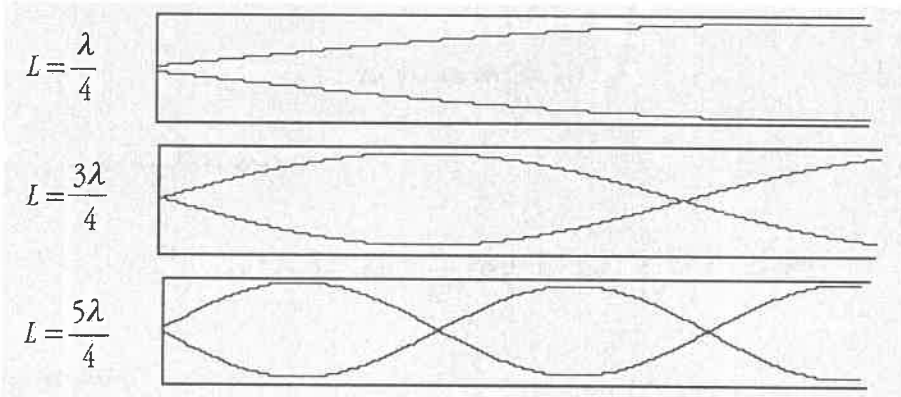
نجد أيضاً أن شرط تكون أمواج صوتية مستقرة في انبوب كهذا هو أن يكون طوله محققاً للعلاقة :

$$(25-5) \quad L = n \frac{\lambda}{2}$$

توضح الأشكال (2-5) بعض المتوافقات التي تتشكل في هذين النوعين من الأنابيب الهوائية .



انبوب مفتوح الطرفين



انبوب مفتوح من طرف واحد

الشكل (2-5)

7-5 المتوافقات في الأمواج الصوتية المستقرة (Harmonics)

وجدنا في الفقرة السابقة أن الأمواج الصوتية المستقرة تتشكل في انبواب هوائي مغلق أو مفتوح إذا حقق طول علاقة معينة . فإذا كان مفتوحاً فيجب أن يكون :

$$L = \frac{n}{2} \lambda$$

حيث $n = 0, 1, 2, \dots$. نلاحظ من العلاقة السابقة أن هناك أمواجاً ذات طول موجي محدد يمكن أن تتراكب بشكل مستقر (لنسمع نغمات موسيقية لاضوضاء مزعجة) في انبواب ثابت الطول (كالتالي) بحيث يجب أن يكون طول هذه الأمواج :

$$\lambda = \frac{2L}{n} = \frac{c}{f}$$

حيث c سرعة انتشار الأمواج و f ترددها .
أي أن الترددات الممكنة تراكبها في هذا الأنبوب هي تلك المحققة للعلاقة :

$$(26-5) \quad f_n = n \left(\frac{c}{2L} \right) = (n+1) f_0$$

حيث جعلنا n في الطرف الأيمن تتغير بدءاً من 0 بدلاً من 1 .
يسمى $f_0 = c/2L$ التردد الأساس (fundamental frequency) ، و $f_1 = 2f_0$ المتوافقة الأولى (first harmonics) ، و $f_2 = 3f_0$ المتوافقة الثانية (second harmonics) ، وهكذا دواليك .
بنفس الشكل نعرف التردد الأساس والمتوافقات العليا للأمواج الصوتية المنتشرة في انبواب هوائي مغلق من أحد طرفيه بالعلاقة : (تحقق من هذا) :

$$(29-5) \quad f_n = (2n+1) \frac{c}{4L} = (2n+1) f_0$$

فالتردد الأساس هو $f_0 = c/4L$ والمتوافقات هي $f_1 = 3f_0$ و $f_2 = 5f_0$ وهكذا .

مسائل

- 1-5 برهن أن متوسط السرعة الحرارية لجزيئات غاز درجة حرارته T تساوي سرعة الصوت تقريباً .
- 2-5 برهن أن فرق الضغط الإضافي لأمواف صوتية مستوى شدتها 120 db (حدود الألم) في هواء كثافته 1.29 kg/m³ ، يبلغ حوالي 6.5×10^{-1} ضغط جوي ، مع العلم أن سرعة الصوت في الهواء حوالي 330 m/s .
- 3-5 برهن أن السعة العظمى لجزيئات الهواء في أمواف صوتية عالية الشدة عند حدود الألم لاتتجاوز 3×10^{-1} m من أجل ترددات بحدود 500 Hz .
- 4-5 برهن السعة العظمى لجزيئات الهواء لاتتجاوز 10^{-10} m لأمواف صوتية منخفضة الشدة عند حدود السمع (أي $I_0 \cdot 10^{-10}$) عند ترددات 500 Hz .
- 5-5 برهن أن قدرة مضخم صوتي (hi-fi) يعمل في غرفة أبعادها 3×3 m وبشدة $100I_0$ تساوي 10 وات .
- 6-5 برهن أن نسبة السعة العظمى لفرق الضغط لموجتين صوتيتين تنتشر الأولى في الهواء والثانية في الماء بنفس الشدة تساوي 60 .
- 7-5 مامعادلة الأمواف الطولية المتحركة بالاتجاه السالب لمحور السينات بسرعة 3000 m/s وسعة عظمى 3 mm وتردد 5 Hz ؟
- 8-5 مساواة الممانعة في الأمواف الصوتية : كرر الخطوات المتبعة في الفقرة 4-10 لحساب سمك وممانعة الوسط الذي يجب إدخاله بين وسطين بحيث نمنع الانعكاس كلياً علماً بأن فرق الضغط يحل محل الإزاحة في الشروط الحدودية في هذه الحالة . برهن أننا نحصل على نفس النتائج تماماً .
- 9-5 تظهر بعض الأمواف الصوتية في البلازما خصائص صوتية وأخرى كهربائية بحيث تتغير تردداتها مع الطول الموجي وفق علاقة التبيد الآتية : $\omega^2 = \omega_0^2 + 3bT k^2$ ، حيث T درجة حرارة البلازما و ω_0 ثابت يدعى تردد بلازما الإلكترون (*electron plasma frequency*) و b ثابت بولتزمان للغازات و k العدد الموجي . برهن أن حاصل ضرب سرعة الطور وسرعة المجموعة لهذه الأمواف ترتبط بالطاقة الحرارية للإلكترونات في البلازما معتبراً معادلة الحالة هي $PV = RT$.
- 10-5 اعتبر أموافاً طولية معطاة بالعلاقة $\xi = \xi_0 \cos 2\pi(x - vt)$ تنتشر على طول عمود كثافته الطولية ρ ومساحة مقطعه S ومعامل يونغ لمرونته Y . برهن أن الإجهاد في العمود ناتج عن الأمواف فقط ، وأن كثافة الطاقة الحركية هي $\frac{1}{2} \rho S (\partial \xi / \partial t)^2$ وأن كثافة طاقة الوضع هي $\frac{1}{2} Y S (\partial \xi / \partial x)^2$. استغف من هاتين النتيجةين لبرهان أن الطاقة الحركية أو طاقة الوضع لواحدة الطول الموجي من العمود تساوي $\frac{1}{4} (\rho S \lambda) u_0^2$ ، حيث u_0 السرعة العظمى للجزيئات $(\partial \xi / \partial t)$.

تحليل فورييه

(Fourier Analysis)

1-6 تمهيد ، سلسلة فورييه (Fourier Series)

سندرس في هذا الفصل ببعض التفصيل مبدأ التراكب (*Superposition Principle*) ، الذي تعرضنا له في الفصل الأول والرابع ، حيث وجدنا أن جمع عدة حركات اهتزازية أو أمواج ذات ترددات مختلفة يعطي حركة اهتزازية أو موجية مغلقة ذات سعة عظيمة متغيرة جيبياً بمعنى أن مجموع حركات جيبيية هو حركة جيبيية أيضاً . لذا يمكن أن نعكس ذلك ونقول إن كل حركة جيبيية هي مجموع عدد من الحركات الجيبية . هذه هي روح مبدأ فورييه . سنعمم في هذا الفصل نتيجتنا هذه لأي حركة دورية (*periodic*) أي تكرر نفسها ، ولو كانت غير جيبيية ، وإلى حركات غير دورية .

لقد وجدنا في الفصل السابق أنه يمكن أن تتشكل أمواج مستقرة في حبل مشدود من طرفيه شريطة أن تحقق تردداتها العلاقة (4-48) ، ولو ضربنا طرف الحبل بطريقة ما (كما يفعل عازف العود مثلاً) للاحظنا أن شكله سيتشوه قطعاً ولا يماثل أي منحنى جيبى ، إلا أن هذا الشكل سيكون مجموع منحنيات جيبيية مؤلفة من التردد الأساس ومتوافقاته .

تحدث الاهتزازات في الحبل بشكل مستقل عن بعضها . هذا ما يمكن استنتاجه من المعادلة الموجية التي تحوي الإزاحة اللحظية الكلية y فقط ومشتقاتها دون أن تحوي مراتب عليا لـ y (y^2 أو y^3 ، الخ) مما يجعلها خطية بحيث نكتب المعادلة الموجية :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

على الشكل :

$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2 + \dots)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (y_1 + y_2 + \dots)}{\partial x^2}$$

أي أنه يمكن تحليل الحركة إلى مركباتها المختلفة y_1 و y_2 ، الخ . يمكن التأكد من استقلال الحركات المختلفة عن بعضها بإمسك الحبل من نقطة تمثل عقدة لإحدى الأمواج المنتشرة فيه ، عندئذ تختفي كل الأمواج باستثناء هذه الموجة لأن هذه النقطة لم تكن لتتحرك بسببها أصلاً لأنها عقدة فيها . أي أن انتشار هذه الموجة مستقل عن انتشار بقية الأمواج .

يشكل مبدأ الاستقلال الخطي للحالات الطبيعية في المنظومات المهتزة ركناً أساساً لتحليل الحركات المركبة ويدعى مبدأ تحليل فورييه (Fourier Analysis) .
 لفهم هذا المبدأ الهام نفترض أن هناك حبل مشدود من طرفيه تنتشر فيه أمواج مستقرة معادلة كل منها :

$$(1-6) \quad y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

عندئذ تكون معادلة الحركة لنقطة منه تصل إليها كل الأمواج هي :

$$(2-6) \quad y(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

لو نظرنا إلى الحبل في لحظة ما t_0 عندئذ تصير الكميات $\cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$ أعداداً ثابتة لتؤول (2-6) إلى :

$$(3-6) \quad y(x, t) = \sum_n B_n \sin(k_n x)$$

حيث وضعنا :

$$(4-6) \quad B_n = A_n \cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$$

من ثم نقول إنه يمكن وصف أي شكل يأخذه الحبل في لحظة ما t_0 بين النقطتين $x=0$ و $x=L$ بمجموع لانهائي من المنحنيات الجيبية من الشكل (3-6) طالما أن الشروط الحدودية $y(0)=y(L)=0$ محققة .
 من جهة أخرى ، لو نظرنا إلى إحدى نقاط الحبل فقط ، أي ثبتنا $x=x_0$ للاحظنا أنها تهتز تحت تأثير مجموع حركات جيبية بحيث يتغير بعدها عن وضع الاتزان وفق العلاقة :

$$(5-6) \quad y(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

حيث وضعنا :

$$(6-6) \quad C_n = A_n \sin(k_n x_0)$$

تمثل العلاقة (3-6) الحركة الموجية في المجال المكاني (space domain) ، بينما تمثل (5-6) الموجة في المجال الزماني (time domain) .

تكمُن أهمية التركيب المستقل للأمواج في أنه يمكن معرفة سعَات الأمواج المختلفة ، أي تحليل الحركة إلى مركباتها المختلفة ، بواسطة طرق تحليل فورييه .
فإذا كانت الحركة الكلية في الحبل في لحظة ما معطاة بالعلاقة :

$$(7-6) \quad y(x) = \sum_n B_n \sin(k_n x) = \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

وأردنا أن نجد سعة إحدى الأمواج المنتشرة ولتكن تلك ذات التردد n_1 ، عندئذ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\sin(n_1\pi x/L)$ ونكامل على طول الحبل ، أي من $x=0$ إلى $x=L$ ، فنجد :

$$(8-6) \quad \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx$$

بالاستفادة من العلاقة المثلثية المعروفة :

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right]$$

يصير التكامل أعلاه :

$$(9-6) \quad \int_0^L \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{n - n_1}{2L} \pi x\right) - \cos\left(\frac{n + n_1}{2L} \pi x\right) \right] dx$$

يترك للطالب أن يتحقق من أن نتيجة التكامل السابق ستكون مساوية للصفر من أجل كل قيم n باستثناء n_1 ،
عندها نكتب (8-6) بالشكل :

$$(10-6) \quad \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L B_{n_1} \sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx$$

بإجراء هذا التكامل نجد :

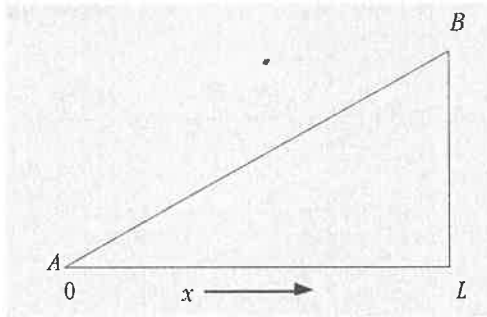
$$(11-6) \quad \int_0^L j(x) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L}\right) dx = \frac{B_{n_1} L}{2}$$

أي أن :

$$(12-6) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L j(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx$$

من أجل أي قيمة لـ n . بذلك نستطيع أن نجد سعة أي حالة طبيعية لحركة مركبة معطاة بالعلاقة $j(x)$.
يمكن أن نطبق ماتقدم على مثل سهل إذ نفترض أن عازف عود يضرب طرف وترٍ بريشة بحيث يصير شكله في تلك اللحظة كما هو موضح بالشكل (1-6) ، أي يتبع العلاقة الخطية :

$$(13-6) \quad j(x) = \alpha x$$



الشكل (1-6)

حيث افترضنا أنه على الرغم من أن الوتر مثبت من طرفيه إلا أن النقطة B في الشكل (1-6) قريبة جداً من طرفه بحيث يكون بعدها عن A مساوياً لطول الوتر L .

نتساءل هنا : هل يمكن أن نجد مجموع حركات جيبيية تعطي الخط المستقيم (13-6) ؟

للإجابة على هذا السؤال نكتب :

$$(14-6) \quad j(x) = \alpha x = \sum B_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

ثم نحسب الأمثال B_n من (12-6) فنكتب :

$$(15-6) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

بإجراء التكامل بالتجزئة نجد :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{2\alpha}{L}\right) \left[x \left(-\frac{L}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \int_0^L \left(-\frac{L}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

نلاحظ مباشرة أن نتيجة التكامل المحدد في الطرف الأيمن تساوي الصفر ، وتؤول B_n إلى :

$$(16-6) \quad B_n = \left(-\frac{2\alpha L}{\pi}\right) \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

فإذا كانت n زوجية فإن :

$$(17-6) \quad B_n = -\frac{2\alpha L}{n\pi}$$

وإذا كانت فردية فإن :

$$(18-6) \quad B_n = \frac{2\alpha L}{n\pi}$$

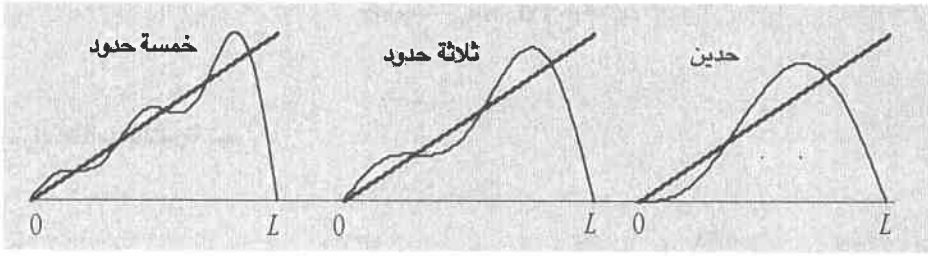
يمكن دمج هاتين العلاقتين سوياً بالشكل :

$$(19-6) \quad B_n = (-1)^{n+1} \frac{2\alpha L}{n\pi}$$

ثم نكتب (14-6) على النحو :

$$(20-6) \quad y(x) = \frac{2\alpha L}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \dots \right]$$

يوضح الشكل (2-6) كيف نحصل على تقريب ممتاز للحبل عندما تغير مجموع الحدود من اثنين إلى خمسة ، على الرغم من أن شكل الوتر يختلف كلياً عن الحركة الجيبية وخاصة أن أحد طرفيه بعيد جداً عن الصفر .



الشكل (2-6)

2-6 تعميم سلسلة فورييه للحركات الدورية

افترضنا في الفقرة السابقة أن أمواجاً مستقرة من الشكل (7-6) تنتشر على امتداد حبل مشدود ، ونعمم فيمالي طرق تحليل فورييه لأي حركة دورية $f(x)$ تكرر نفسها بشكل منتظم خلال فترات زمانية أو مكانية متساوية ، أي أن :

$$(21-6) \quad f(x) = f(x \pm \alpha)$$

ينص تحليل فورييه على أنه يمكن كتابة الحركة السابقة على شكل سلسلة :

$$(22-6) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

أو

$$(23-6) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nx - \delta_n)$$

حيث

$$(24-6) \quad C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$$

$$(25-6) \quad \tan \delta_n = \frac{B_n}{A_n}$$

يمكن كذلك كتابة (22-6) بالشكل :

$$(26-5) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{inx}$$

حيث :

$$(27-6) \quad 2D_n = A_n - iB_n \quad (n \geq 0)$$

و

$$(28-6) \quad 2D_n = A_n + iB_n \quad (n < 0)$$

كما فعلنا سابقاً ، يمكن تحديد الثابتين A_n و B_n من العلاقتين :

$$(29-6) \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n\pi x \, dx$$

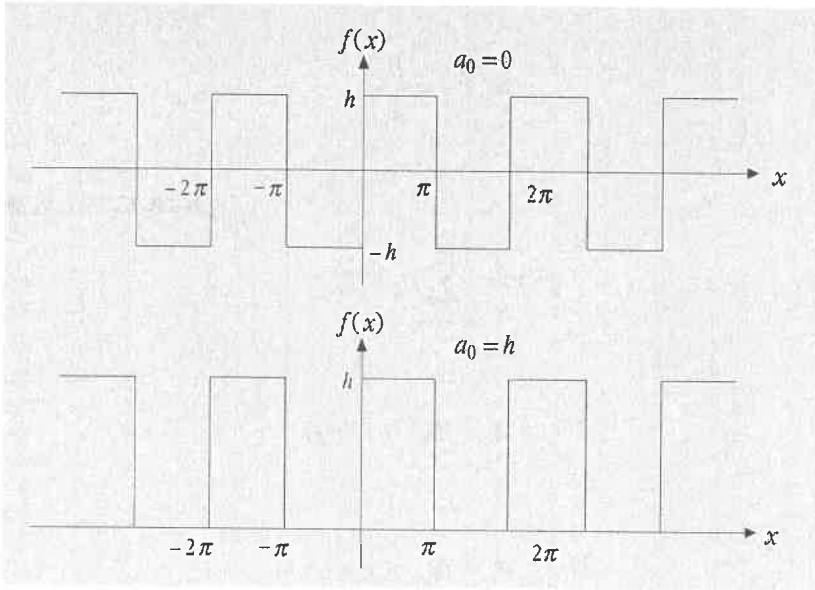
و

$$(30-6) \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n\pi x \, dx$$

نحدد a_0 بوضع $n=0$ في العلاقات السابقة ، فنجد :

$$(31-6) \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

نلاحظ أن a_0 تمثل متوسط قيمة المنحنى $f(x)$ خلال دور كامل ، أي المستوى المستمر (*d.c level*) الذي تتراكب فوقه مركبات الجيب (sine) وجيب التمام (cos) . يمكن تغيير هذا المستوى المستمر برفع أو خفض المحور ox ، كما في الشكل (4-6) .



الشكل (4-6)

نلاحظ من السلسلة (22-6) أنها تتألف من مجموع جيوب التمام (cos) وهي اقترانات زوجية (even) ، ومن حدود جيوية (sin) وهي اقترانات فردية (odd) . [sin(x) = -sin(-x)] ، [cos(x) = cos(-x)] . بالطبع يمكن كتابة أي اقتران $f(x)$ على شكل مجموع جزء زوجي وآخر فردي ، أي أن :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

حيث نلاحظ أن الحد الأول من الطرف الأيمن يمثل اقتراناً زوجياً ، بينما يمثل الحد الثاني اقتراناً فردياً . نستنتج من ذلك أن حدود جيب التمام (cos) في (22-6) تمثل الجزء الزوجي من $f(x)$ بينما تمثل حدود الجيب (sin) الجزء الفردي منه . فإن حوت سلسلة فورييه لاقتران ما حدود جيب التمام فقط فهذا يعني أنه زوجي ، وإن حوت حدود الجيب فقط فهذا يعني أنه فردي .

يمكن جعل اقتران ما فردياً أو زوجياً فقط بنقل محور الصادات ، كما في الجزء الأعلى من الشكل (4-6) حيث نلاحظ أن الموجة المربعة (square wave) فردية ، أما إذا سحبنا المحور oy ، كما في الجزء الأسفل من الشكل (4-6) فتصير زوجية .

نكتب الحالة الفردية للموجة المربعة بالعلاقة :

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x < \pi \\ -h & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

عندئذ يمكن البرهان بسهولة على أن سلسلة فورييه لها في هذه الحالة تعطي بالعلاقة : (برهن ذلك)

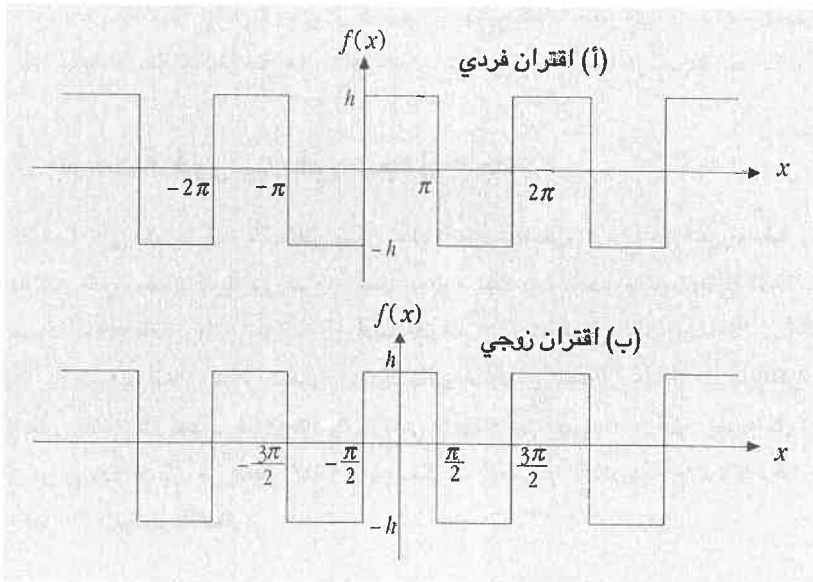
$$(32-6) \quad f(x) = \frac{4h}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$

أما في الحالة الزوجية فنكتب $f(x)$ بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x < \pi/2 \\ -h & \pi/2 < x < 3\pi/2 \\ h & 3\pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

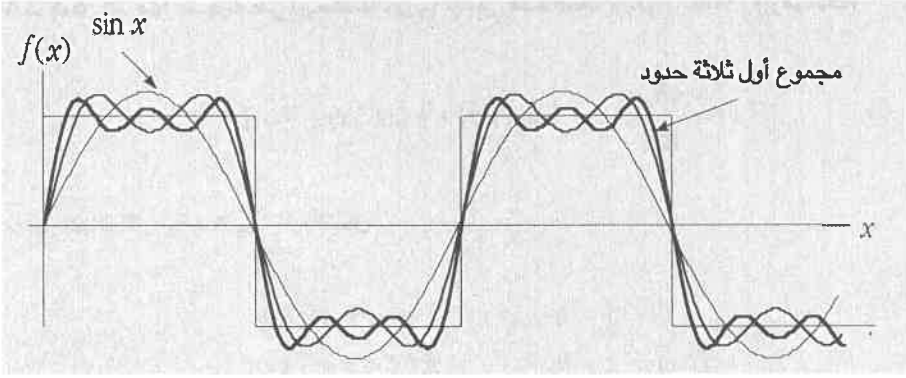
يمكن البرهان كذلك أن سلسلة فورييه لهذه الدالة تكتب بالشكل : (برهن ذلك)

$$(33-6) \quad f(x) = \frac{4h}{\pi} \left[\cos x - \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) - \dots \right]$$



الشكل (4-6)

بأخذ الحدود الأولى من السلسلة (32-6) ورسمها فوق الموجة المربعة الموضحة في الجزء العلوي من الشكل (4-6) نجد الشكل (5-6) .



الشكل (5-6)

نلاحظ من الشكل (5-6) أن الحد الأول ($\sin(x)$) ، أي المتوافقة الأساس ، يعطي تردد الموجة المربعة أما المتوافقات العليا فتجعل المنحنى الجيبي مربعاً ، وكلما زاد عددها كلما صار الطرف الشاقولي أكثر حدة ، أي أن المتوافقات ذات الترددات العليا مسؤولة عن حدة أطراف الموجة المربعة .

تستخدم الموجة المربعة لفحص تجاوب المضخمات (*amplifiers*) للترددات المختلفة . فعندما يستقبل مضخمٌ موجةً كهذه فإنه يحللها بشكل سلسلة فورييه ثم يقوم بجمع المركبات المختلفة لبنائها ثانية . فإن كانت النتيجة موجة مربعة تماماً فهذا يدل على أن المضخم يستطيع التعامل مع كل الترددات بنفس الشكل ، وإن كان طرف الموجة المربعة الناتجة غير حاد تماماً فهذا يعني أن فاعلية المضخم محدودة عند الترددات العالية .

3-6 سلسلة فورييه في مجال محدد

افتراضنا حتى الآن أن الحركات التي يمكن تحليلها بوساطة طرق فورييه هي الدورية فقط ، إلا أنه يمكن تعميم النتائج التي توصلنا إليها لأي حركة ضمن مجال محدود إذا كانت مستمرة وقابلة للاشتقاق فيه بحيث يمكن نشرها خلاله فقط . فإذا افترضنا أن لدينا اقتراناً $f(x)$ معرفاً في المجال $-1/2 \leq x \leq 1/2$ ، كما في الشكل (6-6) ، يتغير خلاله بشكل منطقي ، عندئذ يمكن تمثيله في المجال $0 \leq x \leq +1/2$ باقتران جيب تمام (\cos) يكرر نفسه كل نصف مجال كاقتران زوجي ، أو اقتران جيب (\sin) يكرر نفسه كل نصف مجال كاقتران فردي . إلا أن كلاً من هذين الاقترانين لن يمثل $f(x)$ خارج المجال $0 \leq x \leq +1/2$ ، أما داخل المجال المذكور فإن $f(x)$ يكتب بالشكل :

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

حيث يدل $f_e(x)$ على الجزء الزوجي (*cosine*) من $f(x)$ بينما يدل $f_o(x)$ على الجزء الفردي (*sine*) منه . بما أن متغير أي اقتران لجيب التمام (\cos) أو الجيب (\sin) يجب أن يكون مقدراً بالراديان بينما تدل x في $f(x)$ على قيمة مقدرة بالمتر ، لذا يجب تحويلها إلى راديان بواسطة التحويل $x \rightarrow 2\pi x/l$ بحيث أنه في

كل مرة تتغير x بمقدار l تتغير الزاوية بمقدار 2π . وبذلك نمثل الاقتران $f(x)$ بسلسلة من الشكل :

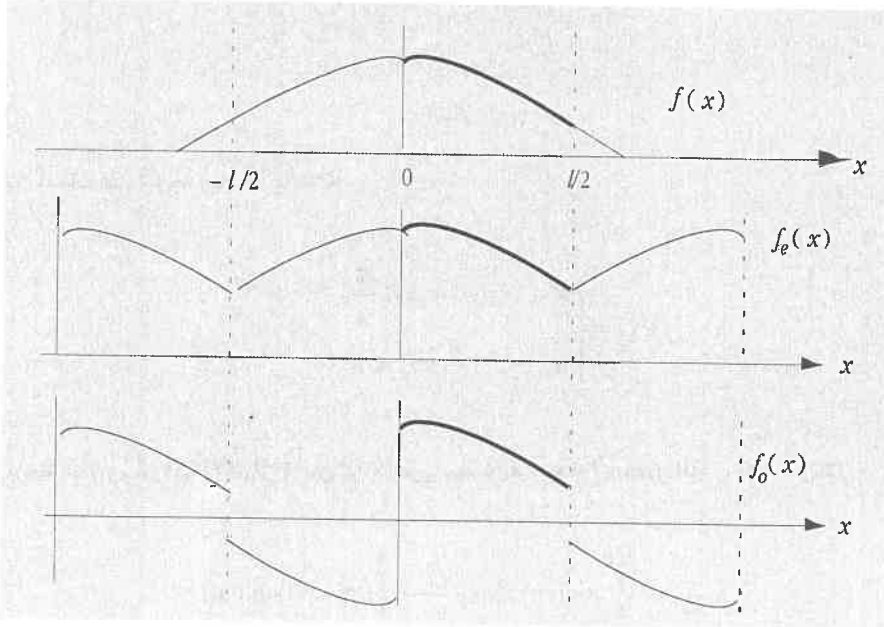
$$(34-6) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)$$

حيث نكتب الجزء الزوجي منه على النحو :

$$(35-6) \quad f_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{l}$$

والجزء الفردي :

$$(36-6) \quad f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nx}{l}$$



الشكل (6-6)

نحسب الثوابت a_n و b_n من العلاقتين :

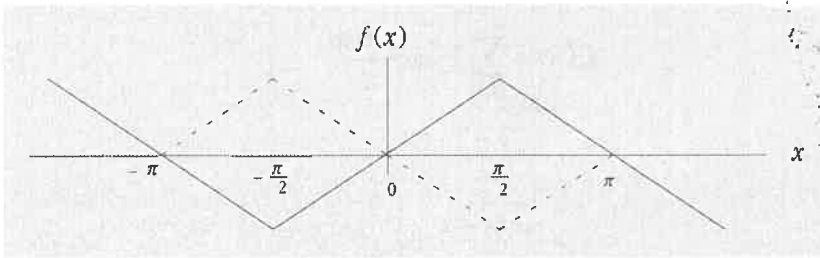
$$(37-6) \quad a_n = \frac{1}{(l/2)} \int_{-l/2}^{+l/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) dx$$

و

$$(38-6) \quad b_n = \frac{1}{(l/2)} \int_{-l/2}^{+l/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) dx$$

وإذا تابعنا تغيرات $f_0(x)$ و $f_1(x)$ خارج المجال $0 \leq x \leq +l/2$ فإننا نلاحظ أنهما لا يمثلان $f(x)$ بتاتاً!

يمكن تطبيق ماتقدم على حركة موجية على شكل أسنان المنشار ، كما هو موضح بالشكل (7-6).



الشكل (7-6)

حيث نصف هذه الموجة رياضياً بالعلاقة :

$$(39-6) \quad f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & (\frac{\pi}{2} < x < \pi) \end{cases}$$

فنلاحظ مباشرة أن هذا الاقتران فردي لذا لا تحوي سلسلة فورييه له إلا حدود الجيب (sin) ، ونكتب :

$$b_n = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin nxdx + \frac{1}{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nxdx$$

ومنه :

$$b_n = \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

نستنتج أن $b_n = 0$ من أجل قيم n الزوجية لذلك تؤول سلسلة فورييه لهذه الحركة إلى :

$$(40-6) \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right)$$

نلاحظ هنا أنه عندما $x = \pi/2$ فإن $f(x) = \pi/2$ ونحصل من (40-6) على :

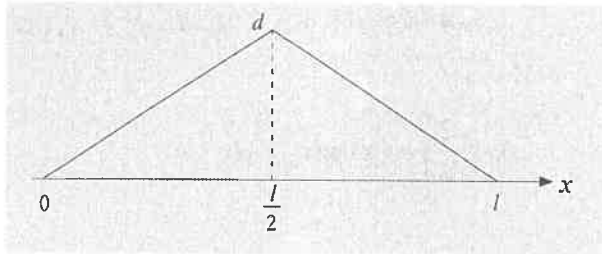
$$(41-6) \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

6-4 تطبيق سلسلة فورييه على حبل مشدود

لنفترض أن لدينا حبلًا طوله l مشدود من طرفيه وأننا رفعناه من منتصفه مسافة d ليصير شكله مشابه لموجة أسنان المنشار ، خلال المجال من 0 إلى π ، الممثل بسلسلة فورييه ذات حدود الجيب (sin) فقط ، كما في الشكل (8-6) . بإفلات منتصفه يهتز الحبل بحالاته الطبيعية التي كتبنا معادلتها بالشكل :

$$(42-6) \quad y_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x$$

حيث $\omega_n = n\pi c/l$ تردد الحالات الطبيعية .



الشكل (8-6)

وتكون السعة الكلية التي تمثل شكل الحبل في اللحظة t معطاة بالعلاقة :

$$(43-6) \quad y = \sum y_n = \sum (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x$$

حيث نلاحظ أن الشروط الحدودية عند $x=0$ و $x=l$ تضمن وجود الحد $\sin k_n x$ فقط ، أما الحركة الاهتزازية

المتغيرة مع الزمن فتعطي الحدين $B_n \sin \omega_n t$ و $A_n \cos \omega_n t$ اللذان تظهر أهميتهما عندما ندرس الشروط الحدودية المتعلقة بالزمن .

إذا كتبنا السعة الكلية في اللحظة $t=0$:

$$(44-6) \quad y_0(x) = \sum y_n(x) = \sum A_n \sin k_n x$$

والسرعة اللحظية عندما $t=0$:

$$v_0(x) = \frac{\partial y_0(x)}{\partial t} = \sum \dot{y}_n(x)$$

أي أن :

$$(45-6) \quad v_0(x) = \sum (-A_n \omega_n \sin \omega_n t + B_n \omega_n \cos \omega_n t) \sin k_n x \Big|_{t=0}$$

أو :

$$(46-6) \quad v_0(x) = \sum B_n \omega_n \sin k_n x$$

نكون قد حددنا السعة والسرعة اللحظيتين عندما $t=0$ على شكل سلسلتي فورييه .

نلاحظ أنه إذا كان الحبل ساكناً في اللحظة $t=0$ فإن $v_0(x)=0$ وتصير كل الأمثال B_n معدومة بينما تبقى الأمثال A_n فقط . أما إذا كان الحبل وقتها مهتزاً بدءاً من الوضع الأفقي أي $y_0(x)=0$ فإن الأمثال A_n تنعدم وتصير أمثال سلسلة فورييه هي $\omega_n B_n$.

يمكن تحديد كل من A_n و B_n بالاستفادة من (44-6) و (46-6) فنجد :

$$(47-6) \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin k_n x \, dx$$

و

$$(48-6) \quad \omega_n B_n = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \sin k_n x \, dx$$

كما نعلم فإن طاقة كل حالة طبيعية للحبل تعطى بالعلاقة :

$$(49-6) \quad E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

فإذا افترضنا أن الحبل المشدود المُبعد عن وضع الاتزان قد أفلت من السكون في اللحظة $t=0$ ، أي $v_0(x)=0$ عندئذ تؤول E_n إلى :

$$(50-6) \quad E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 A_n^2$$

حيث تنعدم كل الأمثال B_n .

تكون الطاقة الاهتزازية الكلية للحبل بعد إفلاته مساوية $\sum E_n$ للحالات الطبيعية المتواجدة في الاهتزازة . يمكن حساب هذه الطاقة بكتابة معادلة أي نقطة من الحبل في اللحظة $t=0$ ، كما فعلنا في الفقرة 1 ، (انظر الشكل (8-6)) :

$$(51-6) \quad \begin{cases} y_0(x) = \left(\frac{2d}{l}\right)x & (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ y_0(x) = \left(\frac{2d}{l}\right)(l-x) & (\frac{l}{2} \leq x \leq l) \end{cases}$$

عندئذ نجد :

$$(52-6) \quad A_n = \frac{8d}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن $A_n=0$ لكل قيم n الزوجية ، أي أن المتوافقات الزوجية معدومة . هذا يعني أن مركز الحبل ، الذي يجب أن يكون عقدة للمتوافقات الزوجية ، سيهتز يوماً بعد إفلاته . تكون إزاحة الحبل في اللحظة $t=0$ مساوية لمجموع المتوافقات المسموح بها ، أي أن :

$$(53-6) \quad y_0(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} y_n(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

حيث :

$$(54-6) \quad A_n = \frac{8d}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

وتكون طاقة الحالة الطبيعية ذات الترتيب n معطاة بالعلاقة :

$$(55-6) \quad E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 A_n^2 = \frac{64 d^2 m \omega_n^2}{4(n^2 \pi^2)}$$

من ثم تصير الطاقة الاهتزازية الكلية للحبل هي :

$$(56-6) \quad E = \sum_{n=1,3,5,\dots} E_n = \frac{16d^2 m}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\omega_n^2}{n^4} = \frac{16d^2 c^2 m}{\pi^2 l^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}$$

حيث وضعنا :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

بحسب العلاقة (41-6) فإن :

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

لذلك تؤول الطاقة الكلية للحبل المهتز في اللحظة $t=0$ إلى :

$$(57-6) \quad E = \frac{2mc^2 d^2}{l^2} = \frac{2Td^2}{l}$$

حيث $T = \rho c^2$ هو الشد في الحبل .

نستنتج مما تقدم أنه يمكن تمثيل الحبل بسلسلة حدود جيب (sine) يعطي كل واحد منها إحدى الحالات الطبيعية المسموح بها في الحبل عندما يُترك ليهتز . ونستفيد من مفهوم الحالات الطبيعية لإيجاد الطاقة الكلية للحبل بجمع طاقات الحالات الطبيعية المختلفة التي يجب أن تساوي طاقة وضع الحبل قبل إفلاته تماماً (برهن ذلك) .

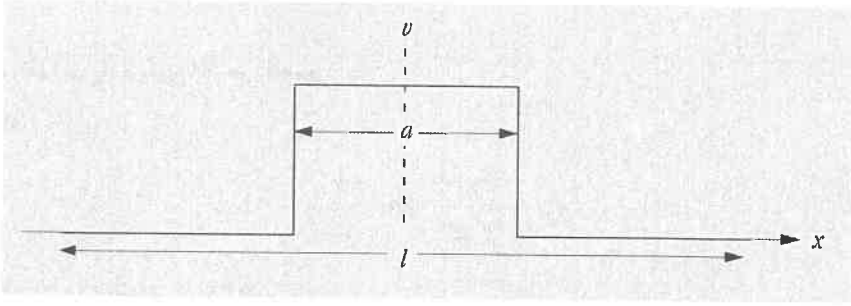
تحدد الشروط الحدودية ماهي الحالات الطبيعية المسموحة في الحبل ، فلو أننا ضربناه بمطرقة بموضع معين عندئذ تختفي المتوافقات التي تحوي عقداً عند نقطة الضرب ، كما هي الحال في حبلنا المشدود أعلاه . يصمم البيانو عادة بحيث تقع المطرقة عند مسافة تساوي $1/7$ من طول الوتر مما يؤدي لاختفاء المتوافقة السابعة والتي تتراكب عادة مولدة مؤثرات شاذة بالنسبة لبقية المتوافقات .

5-6 سلسلة فورييه لنبضة مربعة على حبل

لنفترض الآن أن سعة الحبل الذي درسناه في الفقرة السابقة كانت تساوي الصفر في اللحظة $t=0$ بينما سرعته $v_0(x)=\Delta=\partial y_0(x)/\partial t$ غير معدومة ، كأن نضرب الحبل المشدود من طرفيه بمطرقة عند منتصفه فتكون سعته لحظة الضرب مساوية للصفر بينما تتغير سرعته وفق العلاقة :

$$(58-6) \quad v_0(x) = \begin{cases} 0 & \left| x - \frac{l}{2} \right| \geq \frac{a}{2} \\ v & \left| x - \frac{l}{2} \right| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

أي أنها مربعة الشكل ، كما هو موضح بالشكل (9-6) .



الشكل (9-6)

تعطى سلسلة فورييه لهذا الاقتران بالعلاقة :

$$(59-6) \quad v_0(x) = \sum_n j_n = \sum_n \omega_n B_n \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

حيث :

$$(60-6) \quad \omega_n B_n = \frac{2}{l} \int_{l/2-a/2}^{l/2+a/2} v \sin \frac{\omega_n x}{c} dx$$

أي أن :

$$(61-6) \quad \omega_n B_n = \frac{4v}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi a}{2l}$$

نلاحظ مباشرة أن $\omega_n B_n = 0$ من أجل قيم n الزوجية لأنه لا يمكن لمركز النبضة أن يكون ساكناً في أي لحظة ، مما يعني عدم وجود أي متوافقة زوجية على الإطلاق .
ثم نكتب السرعة بالشكل :

$$(62-6) \quad v_0(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4v}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{2l} \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

وتكون طاقة المتوافقة n هي :

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{4} m \omega_n^2 B_n^2$$

لأن كل الثوابت A_n تساوي الصفر بالطبع .
كما تؤهل E_n إلى :

$$(63-6) \quad E_n = \frac{4mv^2}{n^2\pi^2} \sin^2 \frac{n\pi a}{2l}$$

بتعويض التردد الأساس $\omega_1 = \pi c/l$ نكتب :

$$(64-6) \quad n = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\omega_n l}{\pi c}$$

فتصير طاقة المتوافقة n هي :

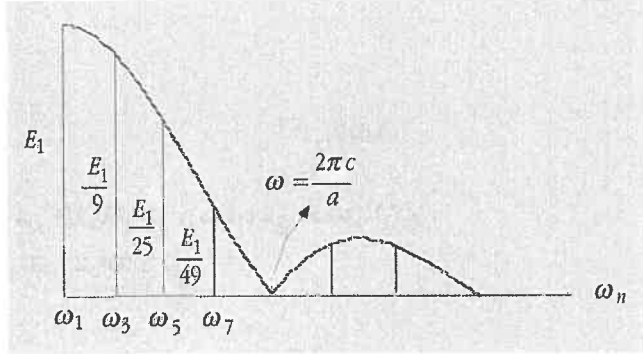
$$(65-6) \quad E_n = \frac{4mv^2 c^2}{l^2 \omega_n^2} \sin^2 \frac{\omega_n a}{2c}$$

نلاحظ من (64-6) أن ω_n تتناسب طردياً مع ترتيب المتوافقة n مما يعني أن طاقة هذه المتوافقة تتناسب عكساً مع n^2 وتتناقص مع ازدياد تردد المتوافقة . يمكن توضيح ذلك بكتابة (65-6) بالشكل :

$$(66-6) \quad E_n = \frac{mv^2 a^2}{l^2} \frac{\sin^2 \omega_n a / 2c}{(\omega_n a / 2c)^2} = \frac{mv^2 a^2}{l^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

حيث وضعنا $\alpha = \omega_n a / 2c$.

يوضح الشكل (11-6) طيف طاقة المتوافقات المختلفة بدلالة التردد ω_n حيث يظهر شكل الغلاف $\sin^2 \alpha / \alpha^2$ لقيم طاقات المتوافقات المختلفة .



الشكل (11-6)

نلاحظ من العلاقة (66-6) أن طاقة المتوافقة تتناقص مع مربع ترتيبها بحيث أنه إذا كانت طاقة التردد الأساس هي E_1 عندئذ يكون $E_3 = E_1 / 9$ و $E_5 = E_1 / 25$ ، وهكذا دواليك ، مما يعني أن الجزء الأعظم من الطاقة يكمن في المتوافقات الأولى ذات الترددات المنخفضة .
نحصل على أول صفر في الغلاف $\sin^2 \alpha / \alpha^2$ عندما :

$$\alpha = \frac{\omega a}{2c} = \pi$$

أي أن عرض التردد المركزي للنبضة ، الذي يحوي معظم الطاقة ، يساوي :

$$\omega \approx \frac{2\pi c}{a}$$

يدعى هذا المدى من المتوافقات " العرض الطيفي " (spectral width) للنبضة ويكتب بالشكل :

$$(67-6) \quad \Delta\omega \approx \frac{2\pi c}{a}$$

بكتابة " العرض المكاني " (spatial width) للنبضة a على الشكل Δx تؤهل (67-6) إلى :

$$(68-6) \quad \Delta x \Delta\omega \approx 2\pi c$$

فكلما صغر عرض النبضة كلما كبر مدى تردداتها لإبقاء الطاقة محصورة داخل النبضة المستطيلة للسرعة .
الآن : بما أن c هي سرعة الموجة على الحبل ، أي أن $\Delta x/c$ تحدد زمن بقاء النبضة ، مما يعني أن :

$$(69-6) \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$$

أو :

$$(70-6) \quad \Delta\omega\Delta f \approx 1$$

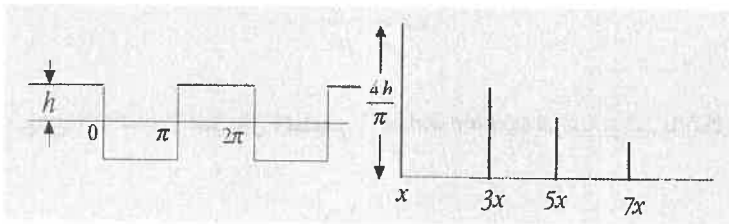
هذه هي نظرية عرض الفرقة التي درسناها في الفصل الرابع .
نلاحظ أن ترددات المتوافقات هي :

$$(71-6) \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

أي أن πcl يمثل عرض المتوافقة . فإذا صار طول الحبل كبيراً جداً وينتهي إلى ∞ ، بحيث تصير النبضة معزولة وغير دورية ، عندئذ يصير العرض صغيراً جداً بحيث يصير مشتقاً وتتحول سلسلة فورييه إلى تكامل فورييه الذي سندرسه في فقرة تالية .

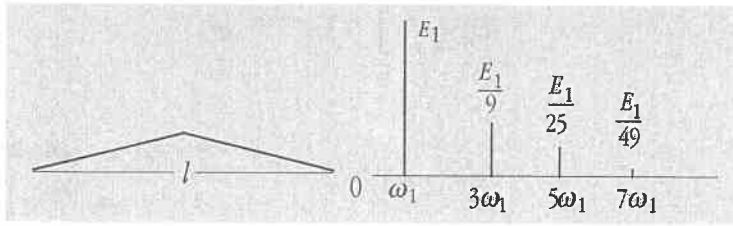
6-6 طيف سلسلة فورييه (Spectrum of Fourier Series)

نلاحظ أن سعة المركبات الناتجة عن سلسلة فورييه للدالة المربعة المعطاة بالعلاقة (6-32) تتناقص مع تردد كل مركبة بشكل متدرج بحيث يمكن رسم سعة كل مركبة بدلالة ترددها ، كما هو موضح بالشكل (6-12) .



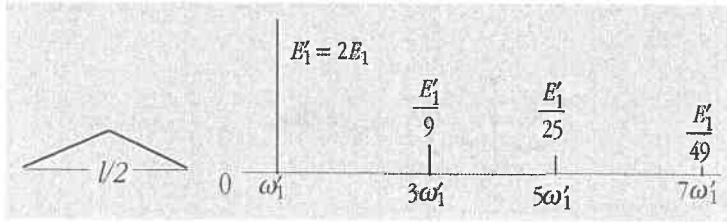
الشكل (6-12)

بنفس الشكل يمكن تمثيل طاقات الحبل المشدود بين نقطتين ، المعطى بالعلاقة (6-55) ، بدلالة ترددات المركبات المختلفة ، كما في الشكل (6-13) .



الشكل (13-6)

نلاحظ هنا أنه لو تغير طول الحبل إلى النصف تماماً فإن طاقته الكلية لا تتغير إلا أن تردد كل مركبة يتضاعف بحيث يتضاعف المدى بين كل تردد والذي يليه ، كما يوضح الشكل (14-6) .



الشكل (14-6)

نستنتج مما تقدم أنه كلما كانت الطاقة محدودة في منطقة صغيرة كلما كان مدى الترددات اللازم لتمثيلها أكبر ، والعكس بالعكس .

7-6 تكاملات فورييه (Fourier Integrals)

وجدنا سابقاً أنه يمكن تمثيل أي دالة $f(x)$ على شكل مجموع من الشكل :

$$(72-6) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jnx}$$

حيث $2D_n = A_n - iB_n$ من أجل $n \geq 0$ ، و $2D_n = A_n + iB_n$ من أجل $n < 0$.
 باستخدام الزمن كمتحول بدلاً من الموضع ، أي بإجراء التحويل $x \rightarrow \omega t$ ، تقول (72-6) إلى :

$$(73-6) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega t}$$

حيث نجد الأمثال D_n بالعلاقة :

$$(74-6) \quad D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

حيث T دور الدالة $f(t)$ و $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
بتعويض D_n في (73-6) نجد :

$$(75-6) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{+in\omega t}$$

فإذا وضعنا $\omega = 2\pi\nu_0$ حيث تدل ν_0 على التردد الأساس للمركبات (73-6) عندئذ تصير (73-6) بالشكل :

$$(76-6) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in 2\pi\nu_0 t} dt \right] e^{+in 2\pi\nu_0 t}$$

الآن : إذا صارت الدالة $f(t)$ غير دورية ، أي أن دورها ∞ ، $T \rightarrow \infty$ ، عندئذ يصير التردد الأساس $\nu_0 = 1/T$ يصير صغيراً جداً بحيث نضع $d\nu \rightarrow \nu_0$ بينما يؤول حاصل الضرب $n\nu_0 \rightarrow \nu$ ، من أجل قيم كبيرة لـ n الذي يتغير بشكل مستمر من $-\infty$ إلى $+\infty$.
من ثم تصير العلاقة (76-6) على النحو :

$$(77-6) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right] e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

نكتب العلاقة (77-6) بالشكل :

$$(78-6) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

حيث وضعنا :

$$(79-6) \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

تسمى العلاقة (79-6) تحويل فورييه (Fourier Transform) العلاقة (78-6) .

نستنتج مما تقدم أنه عندما تكون الدالة $f(t)$ دورية لها دور محدود T ، عندئذ نحللها بسلسلة مؤلفة من حدود متتالية لانهاية العدد من الشكل :

$$(80-6) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_n e^{in\omega t}$$

وتعطي الأمثال D_n بالعلاقة :

$$(81-6) \quad D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

ويكون لهذه السلسلة ترددات يختلف كل واحد عن الذي يليه بمقدار محدد غير معدوم .
أما إذا كان $f(t)$ غير دوري أي أن دوره لانهاية ، فنمثله عندئذ بتكامل وليس بمجموع من الشكل :

$$(82-6) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

حيث تعطي الأمثال $F(\nu)$ بالعلاقة :

$$(83-6) \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

نلاحظ هنا أن تمثيل الدالة قد تحول إلى تكامل مستمر على كل الترددات الممكنة ذات القيم المستمرة بحيث لا يختلف أي تردد عن الذي يليه بقيمة محددة بل بشكل مستمر .

6-8 تحويلات فورييه (Fourier Transforms)

وجدنا سابقاً أن تحويل فورييه لدالة غير دورية $f(t)$ يكتب بالشكل :

$$(84-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \\ F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \end{array} \right.$$

نلاحظ من هاتين العلاقتين أن تكاملاً بالنسبة لأحد المتحولين t أو v يعطي دالة في المتحول الآخر . كما نلاحظ أن كلا المتغيرين يظهر في التكامل كعامل ضرب في مرفوع الأس ، ويجب أن تكون نتيجة هذا الضرب بدون أبعاد دوماً .

يدعى أي زوجين يحققان هذه الخاصة زوجي فورييه (Fourier pair) نرى هنا مباشرة أنه :

إذا كان $F(v)$ هو تحويل فورييه لـ $f(t)$ فإن $f(-v)$ هو تحويل فورييه لـ $F(t)$

بحيث أنه إذا كان لدينا تحويل فورييه لدالة معينة بالنسبة للزمن فإننا نستطيع التعبير عنها كطيف للترددات ، إذا كان التحويل بدلالة التردد فنعتبر عنه كطيف في الزمن t .

بنفس الشكل نلاحظ أن توزعاً معيناً لدالة معينة بالنسبة للموضع x يمثل بطيف للأعداد الموجية $k=2\pi/\lambda$. إذا استخدمنا ω بدلاً من v في التحويلات (84-6) عندئذ نستنتج أنه إذا كان $f(t)$ زوجياً فنكتب :

$$(85-6) \quad f(t) = \int_0^{+\infty} F(v) \cos 2\pi vt \, dv$$

$$(86-6) \quad F(v) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi vt \, dt$$

إذا كان $f(t)$ فردياً عندئذ نستبدل $\sin 2\pi vt$ بـ $\cos 2\pi vt$ في العلاقتين السابقتين .

نلاحظ أن تحويلات فورييه لدالة زوجية أو فردية لاتحوي إلا الترددات الموجبة فقط وأن تحويل فورييه

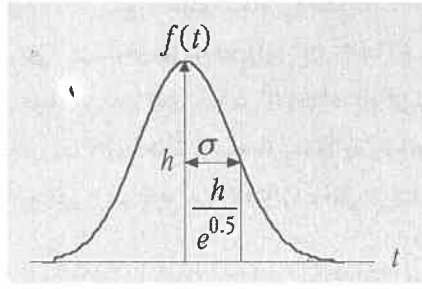
دالة زوجية أو فردية حقيقي وزوجي ، بينما تحويل فورييه لدالة فردية هو تخيلي وفردية .

كمثال على تحويلات فورييه نعتبر دالة الخطأ (Error function) ، التي يطلق عليها اسم التوزيع

لجاوسي (Gaussian distribution) ، وتعطى بالعلاقة :

$$(87-6) \quad f(t) = he^{-t^2/2\sigma^2}$$

وضح الشكل (15-6) تغيرات $f(t)$ بدلالة الزمن .



الشكل (15-6)

من ثم نجد تحويل فورييه للتوزيع الجاوسي بكتابة :

$$(88-6) \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h e^{-t^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\nu t} dt$$

أو :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h e^{-(t^2/2\sigma^2 - 2i\pi\nu t + 2\pi^2\nu^2\sigma^2)} e^{-2i\pi^2\nu^2\sigma^2} dt$$

$$= h e^{-2i\pi^2\nu^2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/\sqrt{2\sigma} + i\sqrt{2}\pi\nu)^2} dt$$

وبما أن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

وبوضع :

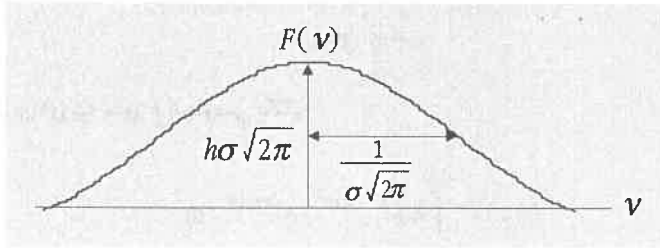
$$x = \frac{t}{\sqrt{2\sigma}} + i\sqrt{2}\pi\nu\sigma$$

نجد :

$$(89-6) \quad F(\nu) = h\sqrt{2\pi} \sigma e^{-2\pi^2\nu^2\sigma^2}$$

يمثل $F(\nu)$ توزيعاً جاوسياً أيضاً ولكن في مجال الترددات ν

يوضح الشكل (16-6) تغيرات $F(\nu)$ مع ν حيث نلاحظ أنه كلما كانت النبضة ضيقة في المجال الزمني (أي أن σ صغيرة) كلما كان مدى تردد تحويل فورييه لها (أي $(\sigma)^{-1}$) عريضاً . فلو كان هناك نبضة تمتد زمنياً لفترة طويلة فإنها تكون مؤلفة من عدد قليل جداً من الترددات (أو أن ترددات تحويل فورييه لها محصورة بين قيمتين متقاربتين) . بالعكس إذا كانت النبضة محددة زمنياً بفترة قصيرة جداً فإن مدى تردداتها يكون كبيراً جداً . هذا يذكرنا طبعاً بمجموع عدد كبير من الاهتزازات التي درسناها في الفصل الأول .



الشكل (16-6)

مسائل

1-6 برهن أن سلسلة فورييه لمقوم نصف الموجة (*half-wave rectifier*) الذي يلغي النصف السالب من موجة جيبية خالصة $y = h \sin x$ تعطى بالعلاقة :

$$y = \frac{h}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{1.2} \sin x - \frac{2}{1.3} \cos 2x - \frac{2}{3.5} \cos 4x - \frac{2}{5.7} \cos 6x - \dots \right)$$

2-6 برهن أنه يمكن تمثيل الدالة $f(x) = x^2$ في المجال $\pm\pi$ بالسلسلة :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx$$

3-6 استخدم نتيجة المسألة السابقة لبرهان أن :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2)$$

حيث يطلق على $\zeta(2)$ اسم دالة زيتا لريمان (*Riemann zeta function*) . (مساعدة : ضع $x = \pi$)

4-6 حدد سلسلة فورييه لـ $f(x) = \pi^2 - x^2$ في المجال $[-\pi, \pi]$. استخدم السلسلة الناتجة لبرهان أن :

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

