الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام زايد
YEAR OF ZAYED

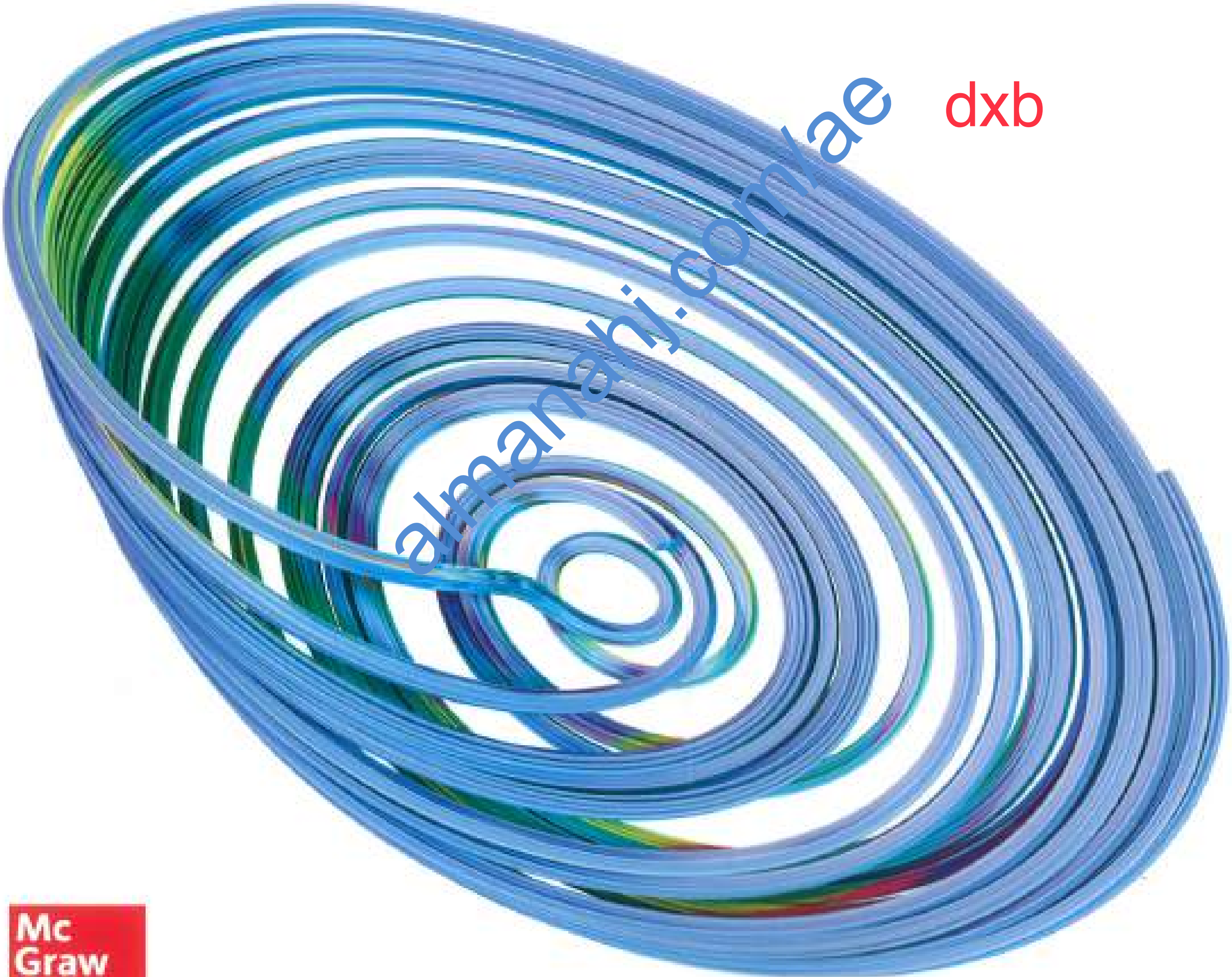
الرياضيات
2018 - 2019

12

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة



McGraw Hill Education

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 12 مجلد 1

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال الألفيّة الثالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

كتيب الطالب

المؤلفون

يضمن مؤلفونا الرواد أن برامج McGraw-Hill الخاصة بالرياضيات منظمة بشكل رأسي حقيقي بواسطة البداية مع النهاية في النجاح المقلي في الجبر 1 وما بعده، بواسطة "التخطيط الخلفي" للمحتوى من برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامجنا الرياضية موضحة بشكل جيد في نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرواد

ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.

مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

جوانب الخبرة، استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير المفاهيم، تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

جلبرت جاي كويفاس، حاصل على درجة الدكتوراه.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة، تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات تمثيلية رياضية

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

جوانب الخبرة، فهم وتطبيق الاحتمالية، والإحصائيات، وتعليم مدرس الرياضيات

كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابل هيل
تشابل هيل، نورث كارولينا

جوانب الخبرة، عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرامج

لواجين براين

مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.

المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي

مؤلف مشارك

فايكن هوفيسبيان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايتيه، كاليفورنيا

جاي مكتاي

مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند

الوحدة 1 تمهيدات

الوحدة 2 النهايات والاتصال

الوحدة 3

3 التفاضل

الوحدة 4 تطبيقات الاشتقاق

الوحدة 5 التكامل

الوحدة

6 تطبيقات التكامل المحدود

الوحدة 7 طرائق التكامل

كتيب الطالب

المراجع

الوحدة

1

تمهيدات

نقدّم في هذه الوحدة مجموعةً من الموضوعات المألوفة. وفي المقام الأول تلك التي نعدّها أساسيةً لدراسة التفاضل والتكامل. وفي حين أننا لا نعتزم أن تشكّل هذه الوحدة مراجعةً شاملةً لرياضيات ما قبل التفاضل والتكامل، فإننا سعينا إلى تسليط الأضواء على بعض الرموز والمصطلحات الموحّدة التي نستخدمها في هذا الكتاب.

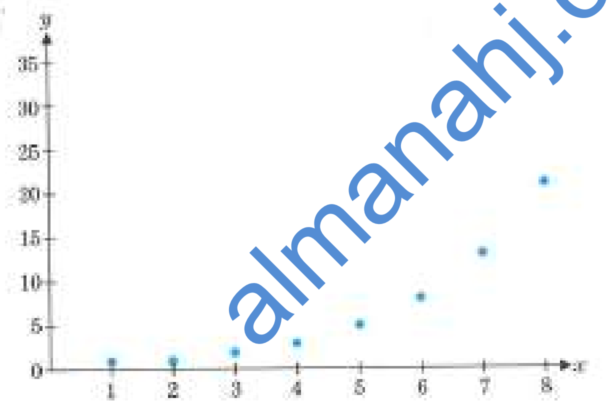
أثناء نموّ حيوان النوتيلاس، يحيط نفسه بصدفةٍ حلزونية الشكل. وتعتمد هذه الهندسة البديعة على كمّ لا يستهان به من المفاهيم الرياضية. ينمو النوتيلاس بطريقةٍ تحافظ أبعاده وفقها على نسب كلية ثابتة. ونقصد بذلك أنه إن رسمت مستطيلًا يحيط بالصدفة، فتبقى نسبة طوله إلى عرضه ثابتة.

ثمّة العديد من الطرق لتمثيل هذه الخاصية رياضيًا. ندرس في الإحداثيات القطبية (التي نعرضها في الوحدة 9) الحلزونات اللوغاريتمية التي تتميز بخاصية النمو الثابت لزاويتها. ويقابل ذلك ثبات نسب أبعاد صدفة النوتيلاس. باستخدام المفاهيم الأساسية في الهندسة، يمكنك تقسيم المستطيل المحيط بالصدفة إلى سلسلة من المربعات كما يوضّح الشكل. تشكّل الأطوال النسبية للمربعات متتالية فيبوناتشي الشهيرة، ....,8 ,5 ,3 ,2 ,1 ,1 ، حيث يساوي كل عدد في المتتالية مجموعة العددين السابقين له.

تتميّز متتالية فيبوناتشي بقائمة مذهلة من الخواص المثيرة للاهتمام. (ابحثوا على شبكة الإنترنت لتعرفوا تمامًا ماذا نقصد!) تقابل الأعداد الموجودة في المتتالية ظواهر مذهلة في الطبيعة، كعدد بتلات الزنبق (3) والحوذان (5) والقطيفة (13) ونبات حشيشة الحمى (34). ورغم أن الطريقة المستخدمة لتوليد متتالية فيبوناتشي بسيطة، فمن المفيد أيضًا التفكير في كيفية التعبير عنها على صورة دالة. إن تعيين النقاط المتعددة الأولى من المتتالية على مستوٍ إحداثي (كما هو موضّح في الشكل 1.1 على الصفحة التالية) لا بدّ أن يظهر تمثيلًا بيانيًا ينحني نحو الأعلى، كمنحنى لقطع مكافئ أو منحنى أسي.


صدفة النوتيلاس

ثمّة جانبان في هذه المسألة يشكّلان موضوعين هامين في إطار التفاضل والتكامل، يتجلى أحدهما في أهمية البحث عن أنماط تساعدنا في وصف العالم على نحو أفضل. أما الموضوع الثاني، فيتمثل بالتفاعل المتبادل بين التمثيلات البيانية والدوال. ومن خلال ربط تقنيات الجبر مع الصور المرئية التي تقدّمها التمثيلات البيانية، ستحسّن من قدرتك على حل مسائل في الرياضيات من الحياة اليومية بصورة كبيرة.



الشكل 1.1
متتالية فيبوناتشي

الدرس 1-1 كثيرات الحدود والدوال النسبية

نظام الأعداد الحقيقية والمتباينات

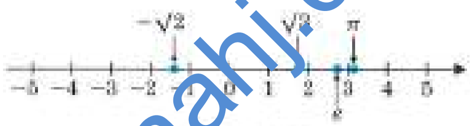
تبدأ حساب التفاضل والتكامل انطلاقًا من نظام الأعداد الحقيقية، حيث سنركّز على الخواص ذات الأهمية الخاصة بالنسبة إلى حساب التفاضل والتكامل.

تتألف مجموعة الأعداد الصحيحة من الأعداد الكلية والمعكوس الجمعي لكل عدد، $\dots 0, \pm1, \pm2, \pm3$. إنّ العدد النسبي هو عدد من الصيغة $\frac{p}{q}$، حيث إنّ p و q عددان صحيحان و $q \neq 0$ على سبيل المثال، $\frac{2}{3}$، $-\frac{7}{3}$ و $\frac{27}{125}$ جميعها أعداد نسبية. لاحظ أنّ كل عدد صحيح n هو عدد نسبي أيضًا، بما أننا نستطيع كتابته على صورة ناتج قسمة عددين صحيحين، $n = \frac{n}{1}$.

إنّ **الأعداد غير النسبية** هي كل الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها بالصيغة $\frac{p}{q}$، حيث p و q عددان صحيحان. تذكر أنّ الأعداد النسبية لها امتدادات عشرية منتهية أو دورية. على سبيل المثال $\frac{1}{6} = 0.16666\bar{6}$، $\frac{1}{8} = 0.125$، $\frac{1}{3} = 0.3333\bar{3}$ و $\frac{1}{2} = 0.5$ جميعها نسبية. وعلى النقيض من ذلك، للأعداد غير النسبية امتدادات عشرية غير دورية وغير منتهية. فعلى سبيل المثال، نورد أدناه ثلاثة أعداد غير نسبية مألوفة مع امتداداتها العشرية،

$$\sqrt{2} = 1.41421\,35623\dots,$$
$$\pi = 3.14159\,26535\dots,$$
و
$$e = 2.71828\,18284\dots.$$

نتصوّر أنّ الأعداد الحقيقية أعدادًا مرتبةً على طول خط الأعداد الموضح في الشكل 1.2 (الأعداد الحقيقية). ويشار إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$.



الشكل 1.2
خط الأعداد الحقيقية

بالنسبة للعددين الحقيقيين a وb حيث $a < b$ نعرّف الفترة المغلقة $[a, b]$ على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية بين a وb بما فيها a وb (النقطتان الطرفيتان). أي إنّ:

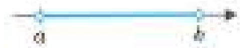
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

الشكل 1.3
فترة مغلقة

كما هو موضّح في الشكل 1.3، حيث تشير الدوائر الممتلئة إلى أنّ a وb تقعان في $[a, b]$.

وبصورة مشابهة، تمثّل الفترة المفتوحة (a, b) مجموعة الأعداد بين a وb ولكنها لا تشمل النقطتين الطرفيتين a وb، أي إنّ:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$



الشكل 1.4
فترة مفتوحة

كما هو موضّح في الشكل 1.4 حيث تشير الدوائر الفارغة إلى أنّ a وb ليستا محتويتين في (a, b). وبصورة مشابهة، نرمز إلى المجموعة $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ بالفترة (a, ∞) و$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ بـ $(-\infty, a)$. في كلتا الحالتين، من الضروري إدراك أنّ ∞ و$-\infty$ ليستا عددين حقيقيين وأننا نستخدم هذا الرمز بقصد السهولة لا أكثر.

لا بدّ أنك الآن على معرفة جيدة بالخواص التالية للأعداد الحقيقية.

النظرية 1.1

إذا كان a وb عددين حقيقيين و $a < b$، فإنّ

(i) لأي عدد c حقيقي $a + c < b + c$
(ii) لأي عددين حقيقيين c و d . إذا كان $c < d$، فإنّ $a + c < b + d$
(iii) لأي عدد c حقيقي $c > 0, a \cdot c < b \cdot c$
(iv) لأي عدد حقيقي $c < 0, a \cdot c > b \cdot c$

ملحوظة 1.1

نحتاج إلى الخواص المعطاة في النظرية 1.1 لحل المتباينات. لاحظ أنّ الجزء (i) ينصّ على أنك تستطيع جمع الكمية نفسها إلى كلا طرفي متباينة. وينص الجزء (iii) على أنك تستطيع ضرب كلا طرفي متباينة بعدد موجب أيضًا. ينص الجزء (iv) على أنك إذا ضربت كلا طرفي متباينة بعدد سالب، فإن ذلك يعكس إشارة التباين.

وسنوضّح طريقة استخدام النظرية 1.1 لحل متباينة بسيطة.

المثال 1.1 حلّ متباينة خطية

حُل المتباينة الخطية $2x + 5 < 13$

الحل يمكننا استخدام الخواص الواردة في النظرية 1.1 لإيجاد x. بطرح 5 من كلا الطرفين، نحصل على

$$(2x + 5) - 5 < 13 - 5$$

أو

$$2x < 8$$

وبقسمة كلا الطرفين على 2، نحصل على

$$x < 4$$

نكتب حل المتباينة في أغلب الأحيان على صورة فترة. وفي هذه الحالة، نحصل على الفترة $(-\infty, 4)$ ■

يمكنك التعامل مع المتباينات الأكثر تعقيدًا بالطريقة نفسها.

المثال 1.2 حلّ المتباينات ثنائية الأطراف

حل المتباينة ثنائية الطرف $6 < 1 - 3x \leq 10$

الحل أولًا، عليك أن تدرك أنّ هذه المسألة تتطلب إيجاد قيم x بحيث يكون

$$6 < 1 - 3x \quad \text{و} \quad 1 - 3x \leq 10$$

من الأكثر كفاءة العمل على حل المتباينتين معًا. أولًا، اطرح العدد 1 من كل حدّ لتحصل على

$$6 - 1 < (1 - 3x) - 1 \leq 10 - 1$$

أو

$$5 < -3x \leq 9$$

والآن، بالقسمة على -3، ولكن توخَّ الحذر. بما أنّ $-3 < 0$ تنعكس إشارة التباين لدينا

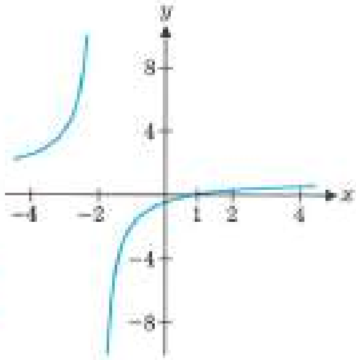
$$\frac{5}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{9}{-3}$$

أو

$$-\frac{5}{3} > x \geq -3$$

نكتب هذا في العادة بالصورة $-3 \leq x < -\frac{5}{3}$

أو نكتبه فترة بالصورة $[-3, -\frac{5}{3})$



الشكل 1.5

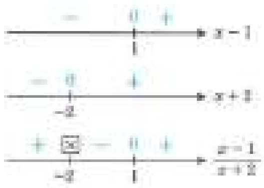
$y = \frac{x-1}{x+2}$

ستحتاج في الغالب إلى حلّ متباينات تضمّ كسورًا. وسنقدّم مثالًا نموذجيًا عن ذلك في ما يلي.

المثال 1.3 حل متباينة تتضمن كسرًا

حل المتباينة $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

الحل يبين الشكل 1.5 التمثيل البياني للدالة، حيث يبدو أنّ الشكل يشير إلى أنّ الحلّ يضم كل قيم $x < -2$ و $x \geq 1$ اقرأ المتباينة بعناية. الآن أنه ثمة طرقٌ ثلاث فقط لتحقيقها، إما أن يكون البسط والمقام موجبين، أو أن يكونا سالبين، أو أن يكون البسط صفرًا. ولتوضيح ذلك، نرسم خطي أعدادٍ لكلٍ من الحدّين، مع الإشارة إلى الفواصل التي يكون فيها كل حد موجبًا أو سالبًا أو صفرًا ونرسم خط أعداد ثالثًا نشير فيه إلى إشارة ناتج القسمة، وذلك كما هو موضّح في الهامش. وضعنا في المستقيم الثالث قيمةً لـ "$\boxed{\times}$" فوق -2 للإشارة إلى أنّ ناتج القسمة غير معرّف عند $x = -2$ ومن هذا المستقيم الأخير يمكن أن نرى أنّ ناتج القسمة ليس سالبًا حين $x < -2$ أو $x \geq 1$ نكتب الحلّ بصيغة فترة على النحو $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. لاحظ أنّ هذا الحل يتفق مع ما يظهره الشكل 1.5



بالنسبة إلى متباينات كثيرات حدود من الدرجة الثانية أو من درجة أعلى، فإنّ تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل وتحديد أين تكون فيها العوامل المفردة موجبة أو سالبة، كما في المثال 1.4، سيوصلنا إلى حل.

المثال 1.4 حلّ متباينة تربيعية

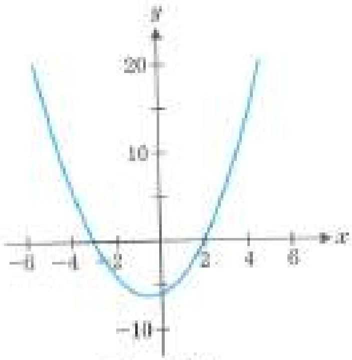
أوجد حلّ المتباينة التربيعية

$$x^2 + x - 6 > 0 \tag{1.1}$$

الحل يبيّن في الشكل 1.6 تمثيلًا بيانيًا لكثيرة حدود تقع على يسار المتباينة. وبما أن كثيرة الحدود يمكن تحليلها إلى العوامل فإن (1.1) يكافئ

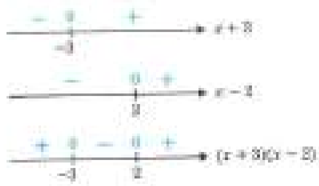
$$(x+3)(x-2) > 0 \qquad (1.2)$$

يمكن لهذا أن يحدث بطريقتين اثنتين فحسب، حين يكون كلا العاملين موجبًا أو حين يكونان سالبين. كما في المثال 1.3، نرسم خطي أعداد لكلا العاملين على حدة، ونشير فيهما أين يكون كل منهما موجبًا أو سالبًا أو يساوي الصفر، وستخدم هذين الرسمين لرسم خط أعداد ثالث يمثّل ناتج الضرب. وتبيّن هذين الشكلين في الهامش. لاحظ أن خط الأعداد الثالث يشير إلى أن ناتج الضرب موجب عندما $x < -3$ أو $x > 2$ تدوّن ذلك كفترة بالصورة $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$. ■



الشكل 1.6

$y = x^2 + x - 6$



ستتذكر بلا شك التعريف الموحّد التالي.

التعريف 1.1

إن **القيمة المطلقة** لعدد حقيقي x تساوي $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

تحقق من قراءة التعريف 1.1 على النحو الصحيح. إذا كان x سالبًا، فإن $-x$ موجب. وهذا ينصّ على أنه $|x| \geq 0$ لكل الأعداد الحقيقية x فعلى سبيل المثال، وباستخدام التعريف، يكون

$$|-4| = -(-4) = 4$$

لاحظ أنه لأي عددين حقيقيين a وb

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

وذلك بالرغم من أن

$$|a + b| \neq |a| + |b|$$

بصورة عامة. (للتحقق من ذلك، خذ ببساطة $a = 5$ و$b = -2$ واحسب كلتا الكميتين.) ولكن، الصحيح دائمًا هو

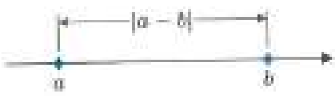
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ويشار إلى هذه العلاقة باسم **المتباينة المثلثية**.

إن تفسير العلاقة $|a - b|$ على أنها المسافة بين a وb (أطلع على الملاحظة في الهامش) مفيدٌ بالتحديد لحل المتباينات التي تتضمن قيمًا مطلقة. نقترح أن تستخدم هذا التفسير حين يكون ذلك ممكنًا لقراءة ما تعنيه المتباينة، لا أن تتبع إجراء ما فحسب للوصول إلى حل.

ملاحظات

لأي عددين حقيقيين a وb، تعطي العلاقة $|a - b|$ المسافة بين a و b. (انظر الشكل 1.7)



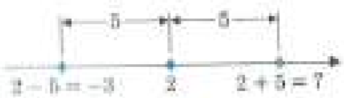
الشكل 1.7

المسافة بين a و b

المثال 1.5 حلّ متباينة تتضمن قيمة مطلقة

أوجد حلّ المتباينة $|x - 2| < 5 \qquad (1.3)$

الحل استغرق أولًا بضع لحظات في قراءة ما تنص عليه هذه المتباينة. بما أن $|x - 2|$ تعطي المسافة من x إلى 2، فإن (1.3) تنص على أن المسافة من x إلى 2 يجب أن تكون أصغر من 5. ولذلك، أوجد كل الأعداد x التي تبعد عن 2 مسافة أصغر من 5. نشير إلى مجموعة كل الأعداد التي تقع ضمن مسافة تبعد 5 وحدات عن العدد 2 في الشكل 1.8. يمكنك الآن قراءة الحل مباشرة من الشكل: $-3 < x < 7$ أو وفق صيغة الفترة: $(-3, 7)$. ■



الشكل 1.8

$|x - 2| < 5$

يمكن حلّ الكثير من المتباينات التي تتضمن قيمًا مطلقة ببساطة عبر قراءة المتباينة على النحو الصحيح، كما في المثال 1.6

المثال 1.6 حل متباينة تتضمن قيمة مطلقة لمجموع

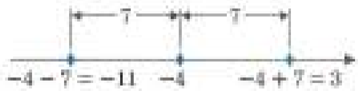
أوجد حلّ المتباينة

$$|x+4| \le 7$$

الحل لاستخدام تفسيرنا للمسافة، فإن علينا كتابة (1.4) بالصورة (1.4)

$$|x-(-4)| \le 7$$

ويشير هذا إلى أنّ المسافة من x إلى -4 أقل من أو تساوي 7. نوضّح الحل في الشكل 1.9، ومنه ينتج أنّ $-11 \le x \le 3$ أو $[-11, 3]$.



الشكل 1.9
$|x+4| \le 7$

تذكّر أنه لأي عدد حقيقي $r > 0$، تكافئ $|x| < r$ المتباينة التالية التي لا تضم قيمًا مطلقة:

$$-r < x < r$$

في المثال 1.7، نستخدم ذلك لإعادة النظر في المتباينة الواردة في المثال 1.5.

المثال 1.7 طريقة بديلة لحل المتباينات

أوجد حلًا للمتباينة $|x-2| < 5$

الحل يكافئ هذا متباينة ثنائية الطرف

$$-5 < x-2 < 5$$

بإضافة 2 إلى كلّ حدّ نحصل على الحل

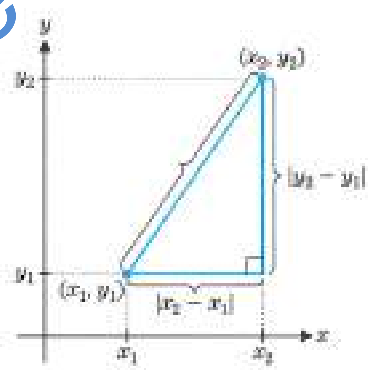
$$-3 < x < 7$$

والذي يمكن كتابته أيضًا وفق صيغة الفترة $(-3, 7)$ كما سبق وأشرنا.

تذكّر أنّ المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي نتيجة بسيطة لنظرية فيثاغورس المعطاة بالصيغة.

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

نوضّح ذلك في الشكل 1.10



الشكل 1.10
المسافة

المثال 1.8 استخدام قانون المسافة

أوجد المسافة بين النقطتين $(1, 2)$ و $(3, 4)$.

الحل إنّ المسافة بين $(1, 2)$ و $(3, 4)$ تساوي

$$d\{(1, 2), (3, 4)\} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

معادلات المستقيمات

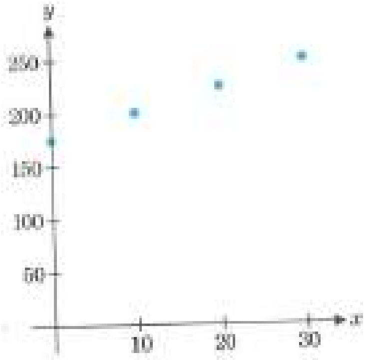
تجري الحكومة إحصاءً سكانيًا على مستوى البلاد كلّ 10 سنوات لتحديد تعداد السّكان. نوضّح البيانات الخاصة بتعداد السّكان خلال العديد من العقود الأخيرة في الجدول المرفق.

العام	تعداد السّكان
1960	179,323,175
1970	203,302,031
1980	226,542,203
1990	248,709,873

من صعوبات تحليل هذه البيانات أنّ الأعداد كبيرة جدًا. ويمكن الحدّ من وطأة هذه المشكلة من خلال **تحويل** البيانات. يمكننا تبسيط بيانات الأعوام عبر تعريف x على أنه عدد الأعوام منذ العام 1960. وبالتالي فإن العام 1960 يقابل $x = 0$ والعام 1970 يقابل $x = 10$ وهكذا. يمكن تبسيط بيانات التعداد السّكاني عبر تقريب الأعداد إلى أقرب مليون. نوضّح بيانات التحويل في الجدول المرافق. ونبيّن أيضًا مخطط تشتت لنقاط البيانات هذه في الشكل 1.11.

x	y
0	179
10	203
20	227
30	249

قد يبدو أن النقاط في الشكل 1.11 تشكّل خطًا مستقيمًا. (استخدم المسطرة وتحقق بنفسك). لتحديد إذا كانت النقاط في الواقع على استقامة واحدة (تدعى النقاط التي تقع على مستقيم واحد **النقاط المستقيمة**)، فيمكن أن نفكّر في نمو التعداد السكاني في كل من العقود المشار إليها من عام 1960 إلى عام 1970، كان النمو يساوي 24 مليونًا. (أي لتنتقل من النقطة الأولى إلى الثانية، عليك أن تزيد x بمقدار 10 وتزيد y بمقدار 24). وعلى النحو نفسه، من العام 1970 إلى العام 1980، كان النمو يساوي 24 مليونًا. لكن من العام 1980 إلى العام 1990، كان النمو يساوي 22 مليونًا فقط. وبما أنّ معدّل النمو ليس ثابتًا، فلا تقع نقاط البيانات على مستقيمٍ واحد. وينطوي هذا البرهان على مفهوم الميل المألوف.



الشكل 1.11
بيانات التعداد السكاني

التعريف 1.2

الحل $x_1 \neq x_2$ فإنّ **ميل** المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يساوي العدد

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.5}$$

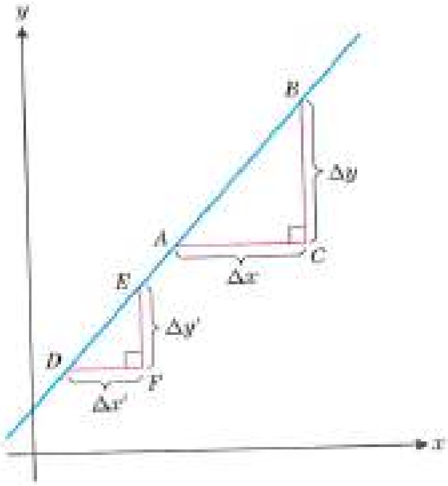
حين يكون $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$ فإن المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يكون **رأسيًا** ويكون الميل غير معرّف.

نصف الميل في أغلب الأحيان على أنه "التغيّر في y مقسومًا على التغيّر في x" ويكتب بالصورة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$،

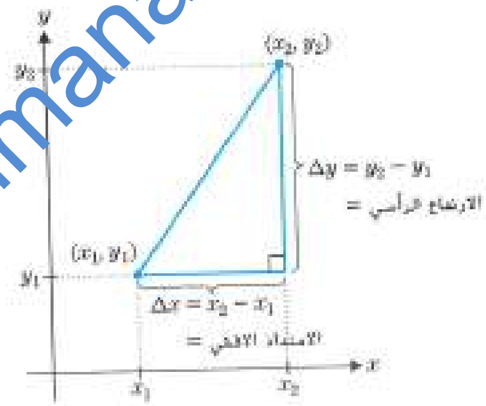
أو بصورةٍ أبسط $\frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$ (انظر الشكل 1.12a).

بالإشارة إلى الشكل 1.12b (والذي يكون فيه للمستقيم ميلٌ موجب)، لاحظ أنه لكل أربع نقاط A، B، D وE واقعة على المستقيم، يكون المثلثان القائمان ΔABC و ΔDEF متشابهين. تذكّر في المثلثات المتشابهة، يجب أن تكون الأضلاع المتناظرة فيها متناسبة. وفي هذه الحالة يكون:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$



الشكل 1.12b
المثلثات المتشابهة والميل



الشكل 1.12a
الميل

وبذلك فإن الميل هو نفسه بغض النظر عن النقاط المختارة على المستقيم. لاحظ أن أي مستقيم يكون **أفقيًا** إذا كان ميله صفرًا فقط.

المثال 1.9 إيجاد ميل مستقيم

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (2, 5) و(4, 3).

الحل من (1.5)، نحصل على

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{2-4}=\frac{2}{-2}=-1$$ ■

المثال 1.10 استخدام الميل لتحديد ما إذا كانت النقاط (مستقيمة) تقع على مستقيم واحد.

استخدم الميل لتحدد ما إذا كانت النقاط (1,2)، (3,10)، (4,14) مستقيمة.

الحل لاحظ أولًا أنّ ميل المستقيم المار بالنقطتين (1,2) و(3,10) يساوي

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{10-2}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

وبطريقة مشابهة، فإنّ ميل المستقيم المار بالنقطتين (3,10) و(4,14) يساوي

$$m_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{14-10}{4-3}=4$$

وبما أنّ الميلين متساويان، فلا بدّ أنّ النقاط مستقيمة. ■

تذكر أنك إذا كنت تعلم ميل مستقيم ونقطة يمرّ بها المستقيم، فإن لديك ما يكفي من المعلومات لتمثيله بيانيًا. والطريقة الأسهل لتمثيل مستقيم بيانيًا هي تحديد نقطتين ورسم مستقيم يمرّ بهما. وفي هذه الحالة، لا حاجة لك إلا أن تجِد النقطة الثانية.

المثال 1.11 تمثيل مستقيم بيانيًا

إذا كان لدينا مستقيم يمرّ بالنقطة (2, 1) وميله $\frac{2}{3}$ أوجد نقطةً ثانيةً على المستقيم ومن ثمّ مثله بيانيًا.

الحل بما أنّ الميل يعطى بالمعادلة $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$، فإننا نأخذ $m=\frac{2}{3}$، $y_1=1$ و$x_1=2$ كي نحصل على

$$\frac{2}{3}=\frac{y_2-1}{x_2-2}$$

ولك الحرية في اختيار الإحداثي x الخاص بالنقطة الثانية. على سبيل المثال، لإيجاد النقطة الواقعة عند $x_2=5$ عوّض هذه القيمة وأوجد الحل من

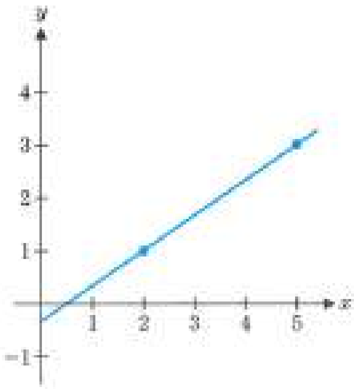
$$\frac{2}{3}=\frac{y_2-1}{5-2}=\frac{y_2-1}{3}$$

نحصل على $2=y_2-1$ أو $y_2=3$ وبالتالي فإن نقطة ثانية هي (5, 3). إنّ التمثيل البياني للمستقيم موضّح في الشكل 1.13a. من الطرق البديلة لإيجاد نقطة ثانية هي استخدام الميل

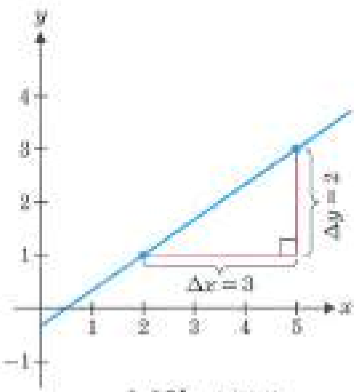
$$m=\frac{2}{3}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

يُفهم من الميل $\frac{2}{3}$ أننا إذا انتقلنا مسافة ثلاث وحدات أفقيًا إلى اليمين، فيجب أن ننتقل مسافة وحدتين رأسيًا إلى أعلى كي نبقى على المستقيم، وذلك كما هو موضّح في الشكل 1.13b. ■

في المثال 1.11، كان اختيار $x=5$ عشوائيًا تمامًا، حيث يمكنك اختيار أي قيمة تريدها لـ x لإيجاد نقطة ثانية. وعلاوة على ذلك، بما أنّ x يمكن أن تساوي أي عددٍ حقيقي، يمكنك أن تترك x كمتغير وأن تكتب معادلة تحققها أي نقطة (x, y) على المستقيم.



الشكل 1.13a
التمثيل البياني للمستقيم



الشكل 1.13b
استخدام الميل لإيجاد نقطة ثانية

في الحالة العامة لمستقيم يمرّ بالنقطة (x_0, y_0) وميله m فإنه يكون لدينا من (1.5)

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \qquad (1.6)$$

بضرب كلا طرفي (1.6) بـ$(x - x_0)$ فإننا نحصل على

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

أو

صيغة النقطة والميل

$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad (1.7)$$

يطلق على المعادلة (1.7) اسم **صيغة النقطة والميل**

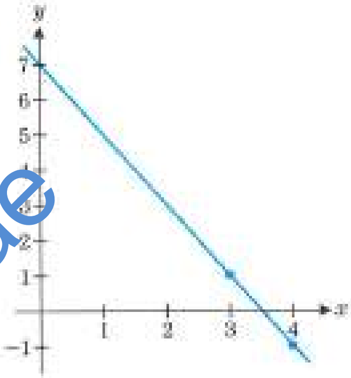
المثال 1.12 إيجاد معادلة مستقيم بدلالة نقطتين

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3,1) و(4, -1) ومثله بيانيا.

الحل من (1.5) يساوي الميل $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-1-1}{4-3} = m$ وباستخدام (1.7) عند الميل $m = -2$ والإحداثي $x_0 = 3$ والإحداثي $y_0 = 1$ فإننا نحصل على معادلة المستقيم،

$$y = -2(x - 3) + 1 \qquad (1.8)$$

لتمثيل المستقيم بيانيا، حدّد النقطتين $(3, 1)$ و$(4, -1)$ ويمكنك حينها رسم المستقيم الظاهر في الشكل 1.14 بسهولة.



الشكل 1.14
$y = -2(x - 3) + 1$

على الرغم من أنّ صيغة النقطة والميل للمعادلة هي في أغلب الأحيان الطريقة الأكثر ملاءمة من حيث التعامل، فقد يكون من الأكثر ملاءمة أحيانًا استخدام **صيغة الميل والمقطع**. وتأخذ هذه الصيغة الشكل

$$y = mx + b$$

وفيها m هو الميل و b هو المقطع من المحور y (أي المكان الذي يقطع فيه التمثيل البياني المحور y). في المثال 1.12، فإنك تضرب ببساطة (1.8) لتحصل على $y = -2x + 6 + 1$ أو

$$y = -2x + 7$$

وكما ترى من الشكل 1.14، يقطع التمثيل البياني المحور y عند $y = 7$

تقدّم النظرية 1.2 نتيجة مألوفة عن توازي المستقيمات وتعامدها.

النظرية 1.2

يكون مستقيمان (غير رأسيين) **متوازيين** إذا كان لهما الميل نفسه. وأي مستقيمين رأسيين هما متوازيان حكمًا. يكون مستقيمان (غير رأسيين) ميلاهما m_1 و m_2 **متعامدين** عندما يساوي ناتج ضرب ميليهما -1 (أي $m_1 \cdot m_2 = -1$). كذلك فإن أي مستقيمين أحدهما رأسي والثاني أفقي هما متعامدان حكمًا.

بما أننا نستطيع قراءة الميل من معادلة مستقيم، فمن السهل تحديد الحالات التي يكون فيها المستقيمان متوازيين أو متعامدين. ونوضح ذلك في المثالين 1.13 و1.14.

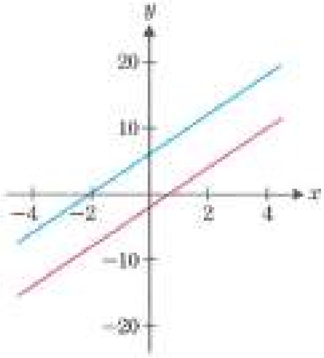
المثال 1.13 إيجاد معادلة مستقيم موازٍ

أوجد معادلة مستقيم موازٍ لـ $y = 3x - 2$ ويمرّ بالنقطة $(-1, 3)$

الحل من السهل قراءة ميل المستقيم من المعادلة: $m = 3$ إذًا تكون معادلة المستقيم الموازي هي:

$$y = 3[x - (-1)] + 3$$

أو ببساطة $y = 3x + 6$. يبين الشكل 1.15 التمثيل البياني لكلا المستقيمين



الشكل 1.15
المستقيمان المتوازيان

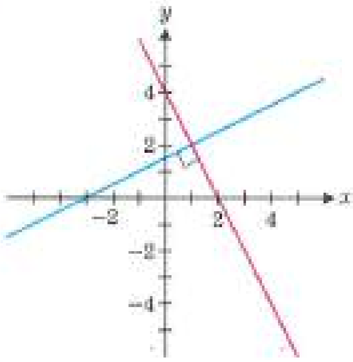
المثال 1.14 إيجاد معادلة مستقيم عمودي

أوجد معادلة مستقيم عمودي على $y = -2x + 4$ ويقطع المستقيم عند النقطة $(1,2)$

الحل إنّ ميل $y = -2x + 4$ يساوي -2 وحينها يكون ميل المستقيم العمودي $\frac{1}{2} = -1/(-2)$. بما أن المستقيم يجب أن يمرّ بالنقطة $(1,2)$، فإن معادلة المستقيم العمودي هي

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{أو} \quad y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2$$

يبين الشكل 1.16 التمثيل البياني للمستقيمين



الشكل 1.16
المستقيمان المتعامدان

نعود الآن إلى هذا المثال التمهيدي الفرعي ونستخدم معادلة مستقيم لتقدر التعداد السكاني في عام 2000.

المثال 1.15 استخدام مستقيم للتنبؤ بالتعداد السكاني

من بيانات التعداد السكاني الخاصة بإحصاء عدد السكان خلال الأعوام 1960 و1970 و1980 و1990 في المثال 1.8 تنبأ بالتعداد السكاني للعام 2000.

الحل نبدأ في هذا المثال الفرعي بتبيان أنّ النقاط الموجودة في الجدول المقابل ليست مستقيمة. بيد أن هذه النقاط شبه مستقيمة. إذًا لِمَ لا نستخدم الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين الأخيرتين $(20, 227)$ و $(30, 249)$ (المقابلتين للتعدادين السكانيين في العامين 1980 و1990) للتنبؤ بالتعداد السكاني عام 2000؟ (هذا مثالٌ بسيطٌ لإجراءٍ أكثر عمومية يدعى **الاستكمال**). يساوي ميل المستقيم الذي يصل بين نقطتي البيانات

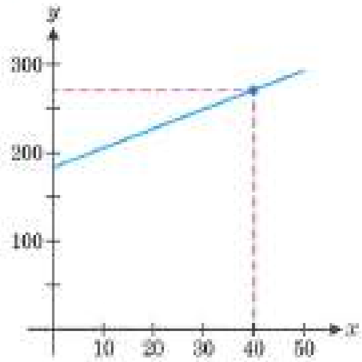
$$m = \frac{249 - 227}{30 - 20} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

وبالتالي فإن معادلة المستقيم

$$y = \frac{11}{5}(x - 30) + 249$$

انظر الشكل 1.17 لتعاين التمثيل البياني للمستقيم. إذا اتّبعنا هذا المستقيم وصولاً إلى النقطة المقابلة لـ $x = 40$ (العام 2000)، فإننا نحصل على التعداد السكاني المتوقع

$$\frac{11}{5}(40 - 30) + 249 = 271$$



الشكل 1.17
التعداد السكاني

بالتالي، يبلغ التعداد السكاني المتنبأ به 271 مليون نسمة. إنّ العدد الفعلي الذي أشار إليه إحصاء السكان عام 2000 كان يساوي 281 مليون نسمة، وهذا يشير إلى أنّ تعداد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية كان ينمو بمعدل أسرع بين عامي 1990 و2000 بالمقارنة مع العقد السابق.

الدوال

لأي مجموعتين جزئيتين A وB من خط الأعداد الحقيقية، نورد التعريف التالي:

لاحظ أنّه يمكن تعريف كثيرة الحدود لجميع قيم x على الأعداد الحقيقية بكامله. علاوة على ذلك، عليك إدراك أنّ التمثيل البياني لكثيرة الحدود الخطية (الدرجة 1) $f(x) = ax + b$ هو خط مستقيم.

المثال 1.17 عينات لكثيرات حدود

نورد في ما يلي أمثلة عن كثيرات حدود،

$f(x) = 2$ كثيرة حدود من الدرجة 0 أو ثابت

$f(x) = 3x + 2$ كثيرة حدود من الدرجة 1 أو خطية

$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$ كثيرة حدود من الدرجة 2 أو تربيعية

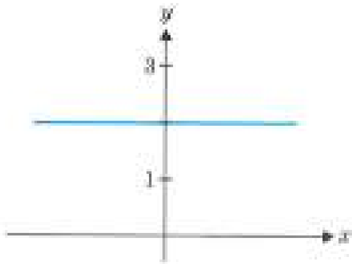
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو تكعيبية

$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

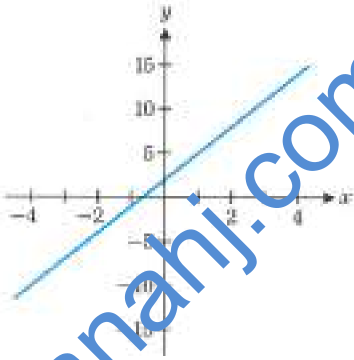
و

$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

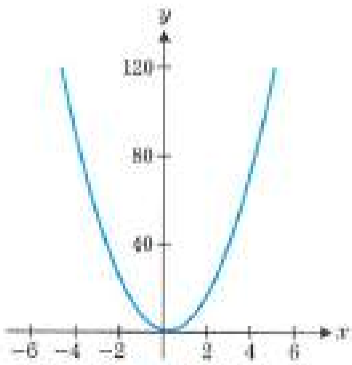
نعرض في الأشكال 1.20a–1.20f التمثيلات البيانية لهذه الدوال الست.



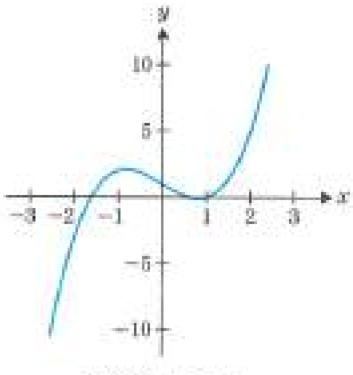
الشكل 1.20a
$f(x) = 2$



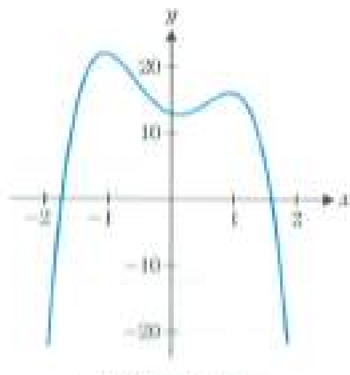
الشكل 1.20b
$f(x) = 3x + 2$



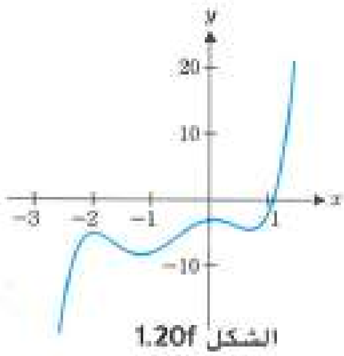
الشكل 1.20c
$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$



الشكل 1.20d
$f(x) = x^3 - 2x + 1$



الشكل 1.20e
$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$



الشكل 1.20f
$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$

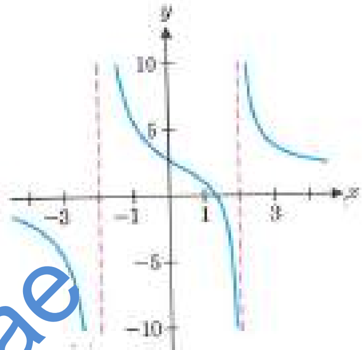
التعريف 1.5

تدعى أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث أن p وq كثيرتا حدود، **بالدالة النسبية**.

لاحظ بما أنّ $p(x)$ و$q(x)$ كثيرتا حدود، فيمكن تعريف كلتيهما لكل x. وبذلك يمكن تعريف الدالة النسبية $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ لكل قيم x حيث ان $q(x) \neq 0$



الشكل 1.21

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4}$$

المثال 1.18 الدالة النسبية البسيطة

أوجد مجال الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4}$

الحل لدينا هنا $f(x)$ دالة نسبية. يبين الشكل 1.21 التمثيل البياني. ويتألف مجالها من قيم التي تجعل المقام لا يساوي الصفر. لاحظ أنّ

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

بالتالي، المقام يساوي الصفر عندما $x = \pm 2$ فقط. وهذا يشير إلى أنّ مجال f هو

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$ ■

تعرّف دالة **الجذر التربيعي** بالطريقة المعتادة. عندما نكتب $y = \sqrt{x}$ فإننا نقصد أنّ y هو العدد الذي من أجله $y^2 = x$ و$y \geq 0$. وبالتحديد، $\sqrt{4} = 2$ انتبه إلى عدم كتابة عبارات خاطئة مثل $\sqrt{4} = \pm 2$. وبالتحديد، انتبه من كتابة

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

بما أنّ $\sqrt{x^2}$ تطلب إيجاد العدد غير السالب الذي مربعه x^2 فإننا نبحث عن $|x|$ وليس عن x يمكن القول إنّ

$$\sqrt{x^2} = x \text{ فقط، إذا } x \geq 0$$

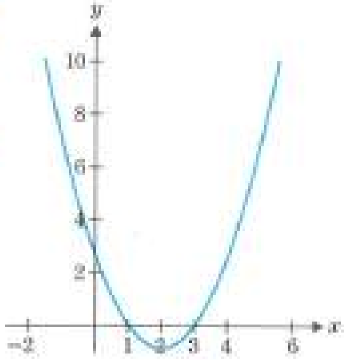
وبصورة مشابهة، لكل عدد صحيح $n \geq 2$، $y = \sqrt[n]{x}$ عندما $y^n = x$، حيث n عدد زوجي، $x \geq 0$ و$y \geq 0$.

المثال 1.19 إيجاد مجال دالة تضم جذرًا تربيعيًا أو تكعيبيًا

أوجد المجال لكل من $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و$g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

الحل بما أنّ الجذور الزوجية معرّفة فقط لكل القيم غير السالبة، فإنّ $f(x)$ معرّفة فقط لكل $x^2 - 4 \geq 0$. لاحظ أنّ هذا يكافئ أن يكون لدينا $x^2 \geq 4$ حيث يحدث ذلك عندما $x \geq 2$ أو $x \leq -2$ وبالتالي فإن مجال f هو $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ ومن ناحية أخرى، الجذور الفردية معرفة لكل القيم الموجبة والسالبة. نتيجة لذلك، إنّ مجال g هو الأعداد الحقيقية كاملة $(-\infty, \infty)$.

تجد أنّه من المفيد في أغلب الأحيان تسمية نقاط التقاطع وغيرها من النقاط الهامة في التمثيل البياني، ويتطلب إيجاد هذه النقاط حل المعادلات. يدعى حل المعادلة $f(x) = 0$ **صفرًا** للدالة f أو جذرًا للمعادلة $f(x) = 0$. لاحظ أنّ صفر الدالة f يقابل نقطة تقاطع مع المحور x للتمثيل البياني الخاص بـ $y = f(x)$. ■



الشكل 1.22

$y = x^2 - 4x + 3$

المثال 1.20 إيجاد الأصفار بالتحليل إلى العوامل

أوجد كل نقاط التقاطع مع المحورين x وy للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

الحل لإيجاد نقطة التقاطع مع المحور y، تضع $x = 0$ لتحصل على

ولإيجاد نقاط التقاطع مع المحور x تحلّ المعادلة $f(x) = 0$ وفي هذه الحالة، يمكننا أن تحلل إلى العوامل لتحصل على

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$$

يمكنك الآن قراءة الصفرين، $x = 1$ و$x = 3$، كما هو محدد في الشكل 1.22.

لسوء الحظ، لا يكون التحليل إلى العوامل بهذه السهولة دائمًا. وبالطبع، لكل دالة تربيعية من الصورة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(لكل $a \neq 0$)، يعطى الحل (الحلول) من خلال **القانون العام**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المثال 1.21 إيجاد الأصفار باستخدام القانون العام

أوجد أصفار $f(x) = x^2 - 5x - 12$.

الحل قد لا يحالفك الحظ كثيرًا في محاولة تحليل هذه العلاقة إلى العوامل. ولكن لدينا من الدالة التربيعية

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

بالتالي، يعطى الحلّان من خلال $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 6.772$ و $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2} \approx -1.772$. (لا غرابة في أنك لم تستطع تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل!)

عادة ما يكون إيجاد أصفار كثيرات الحدود درجتها أعلى من 2 ودوال أخرى أكثر صعوبة. بل يكون مستحيلًا في بعض الأحيان. على الأقل يمكنك دائما إيجاد تقريب لأي صفر (أصفار) عبر استخدام تمثيل بياني للاقتراب من النقطة (النقاط) التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور x. وذلك وفق ما سنبيّنه عما قريب. لكن ثمة مسألة أساسية أكثر، ألا وهي تحديد عدد الأصفار التي تضمها دالةٌ ما بصورة عامة. ليس من طريقة للإجابة عن هذا السؤال بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل. ولكن في حالة كثيرات الحدود، تزودنا النظرية 1.3 (الناتجة عن النظرية الأساسية للجبر) بفكرة.

النظرية 1.3

للدوال التي درجتها n يوجد على الأكثر n صفرًا متمايزًا أو مختلفًا.

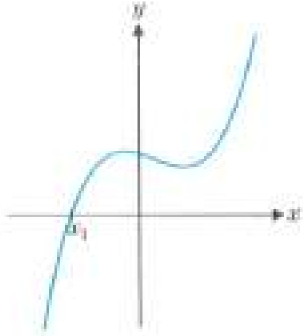
ملحوظة 1.3

قد يكون لكثيرات الحدود أيضًا أصفار أعداد مركبة على سبيل المثال، للدالة $f(x) = x^2 + 1$ أصفار أعداد مركبة فقط $x = \pm i$ حيث إنّ i هي الوحدة التخيلية المُعرفة من خلال $i = \sqrt{-1}$، سنحصر اهتمامنا في دراستنا هذه على الأصفار الحقيقية.

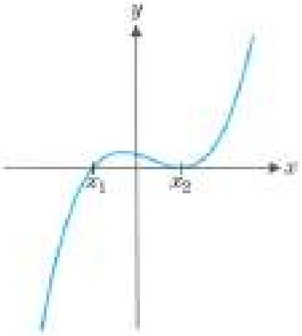
لاحظ أنّ النظرية 1.3 لا تخبرنا بعدد الأصفار التي تضمها كثيرة حدود ما. بل إنّ العدد الأقصى من الأصفار المتمايزة (أي المختلفة) هو الدرجة نفسها. قد يكون لكثيرة الحدود التي درجتها n أي عدد من الأصفار الحقيقية المتمايزة او المختلفة يتراوح بين 0 و n صفرًا حقيقيًا مختلفًا. لكن، يجب أن تضم كثيرات الحدود ذوات الدرجة الفردية على الأقل صفرًا حقيقيًا واحدًا. على سبيل المثال، في حالة كثيرة حدود تكعيبية، فإن لدينا واحدًا من ثلاثة احتمالات، كما هو موضّح في الأشكال 3.23a، 3.23b، 3.23c. وهذه هي التمثيلات البيانية للدوال.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(x^2 - 3x + 3)$$
$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$
$$h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x-1)(x-3)$$

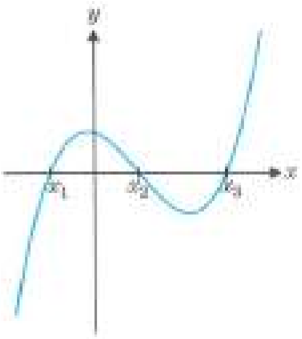
على التوالي. لاحظ أنك يمكن أن ترى من خلال التحليل الى العوامل مكان تواجد الأصفار (وعددها).



الشكل 1.23a
صفر واحد

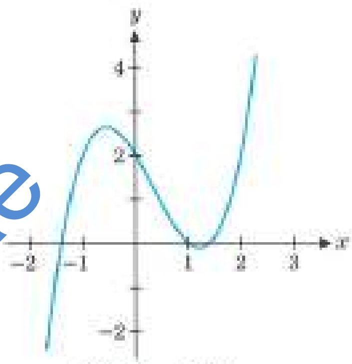


الشكل 1.23b
صفران اثنان



الشكل 1.23c
ثلاثة أصفار

توضّح النظرية 1.4 أهمية العلاقة بين عوامل كثيرات الحدود وأصفارها.



الشكل 1.24a
$y = x^3 - x^2 - 2x + 2$

النظرية 1.4 (نظرية العامل)

لأي دالة كثيرة الحدود f، فإن $f(a) = 0$ إذا وفقط إذا كان $(x - a)$ عاملاً للدالة $f(x)$.

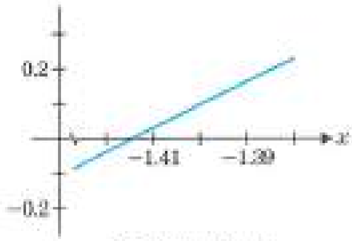
المثال 1.22 إيجاد أصفار كثيرة حدود تكعيبية

أوجد أصفار $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

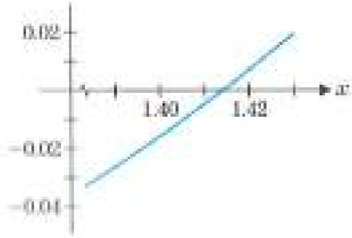
الحل من خلال حساب $f(1)$ يمكنك أن ترى أن أحد أصفار هذه الدالة هو $x = 1$ ولكن ما عدد الأصفار الأخرى؟ يبيّن التمثيل البياني للدالة (انظر الشكل 1.24a) أن ثمة صفران آخران للدالة f أحدهما بجوار -1.5 والآخر بجوار $x = 1.5$ تستطيع إيجاد هذين الصفرين بصورة أكثر دقة عبر استخدام حاسبة بيانية لتكبير موضعيهما (كما هو موضّح في الشكلين 1.24b و1.24c). يتضح من خلال تكبير هذه التمثيلات البيانية أن الصفرين المتبقيين لـ f يقعان بجوار $x = 1.41$ و$x = -1.4$. يمكنك إجراء هذه التقديرات على نحو أكثر دقة عبر التكبير بصورة إضافية. يمكن لمعظم الحاسبات البيانية وأجهزة الحاسوبية الجبرية إيجاد الأصفار التقريبية باستخدام برنامج «حل» مدمج. نقدم في الوحدة 3 طريقة متعددة الاستخدامات (تدعى طريقة نيوتن) لإيجاد تقريبات دقيقة إلى الأصفار. إن الطريقة الوحيدة لإيجاد الحل الدقيق هي تحليل التعبير إلى عوامل (إما باستخدام القسمة المطولة أو المركّبة). لدينا هنا

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2) = (x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

ومنها يمكن أن ترى أن الصفرين هما $x = 1$، $x = \sqrt{2}$ و$x = -\sqrt{2}$. ■



الشكل 1.24b
تكبير لإظهار الصفر بجوار
$x = -1.4$



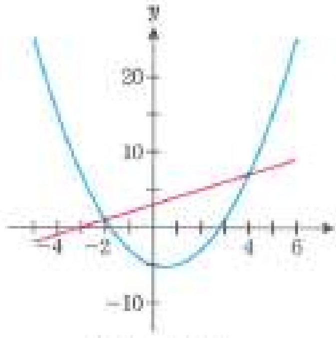
الشكل 1.24c
تكبير لإظهار الصفر بجوار
$x = 1.4$

تذكّر أنه لإيجاد نقاط تقاطع منحنيين معرّفين بـ $y = f(x)$ و$y = g(x)$، فإننا نضع لإيجاد الإحداثيات x لأي نقاط تقاطع.

المثال 1.23 إيجاد نقاط تقاطع مستقيم مع قطع مكافئ

أوجد نقاط تقاطع القطع المكافئ $y = x^2 - x - 5$ والمستقيم $y = x + 3$.

الحل يبيّن تمثيل المنحنيين (انظر الشكل 1.25 في الصفحة التالية) وجود نقطتي تقاطع إحداهما بجوار $x = -2$ والأخرى بجوار $x = 4$.



الشكل 1.25

$y = x + 3$ و $y = x^2 - x - 5$

ولتحديد هاتين النقطتين بدقة، نساوي بين الدالتين ونحل لإيجاد

$$x^2 - x - 5 = x + 3$$

يعطينا طرح $(x + 3)$ من كلا الطرفين

$$0 = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

وهذا يشير إلى أن الحلّين بالضبط هما $x = -2$ و$x = 4$. تحسب قيمتي y المقابلتين من معادلة المستقيم $y = x + 3$ (أو معادلة القطع المكافئ). نقطتا التقاطع هما إذًا $(-2, 1)$ و$(4, 7)$ لاحظ أن هاتين النقطتين متوافقتان مع نقطتي التقاطع المبينتين في الشكل 1.25.

ولسوء الحظ، لن يكون بالإمكان على الدوام حل المعادلات بالضبط، كما فعلنا في الأمثلة 1.20–1.23. ستستكشف بعض خيارات التعاطي مع مسائل أكثر تعقيدًا في القسم 0.2.

التمارين 1.1

تمارين كتابية

1. إذا كان ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين A وB يساوي ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين B وC، فاشرح السبب في أن النقاط A، B وC هي مستقيمة.

2. إذا لم ينجح المنحنى في اختبار المستقيم الرأسي، فإن ذلك المنحنى ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة. اشرح هذه النتيجة من خلال تعريف الدوال.

3. ينبغي ألا تكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع بصورة آلية. قارن الصيغ التالية للمستقيم نفسه: $y = 2.4(x - 1.8) + 0.4$ و$y = 2.4x - 3.92$ على افتراض أن $x = 1.8$ فأي معادلة تفضل استخدامها لحساب y وماذا لو أعطيت $x = 0$ أو $x = 8$ فهل ثمة أي أفضلية لمعادلة على الأخرى؟ هل بوسعك قراءة الميل بسرعةٍ من أي من المعادلتين؟ اشرح السبب في عدم كون أي صيغةٍ من صيغتي المعادلة -أفضل-.

4. لفهم التعريف 1.1، حريّ بك أن تعتقد أنّ $|x| = -x$ لكل القيم السالبة لـ x. باستخدام $x = -3$ بمثابة مثال، اشرح بالكلمات السبب في أن الضرب x بـ -1 يعطي النتيجة نفسها لأخذ القيمة المطلقة لـ x.

في التمارين 1-10، أوجد حلّ المتباينة.

1. $3x + 2 < 8$
2. $3 - 2x < 7$
3. $1 \le 2 - 3x < 6$
4. $-2 < 2x - 3 \le 5$
5. $\frac{x+2}{x-4} \ge 0$
6. $\frac{2x+1}{x+2} < 0$
7. $x^2 + 2x - 3 \ge 0$
8. $x^2 - 5x - 6 < 0$
9. $|x + 5| < 2$
10. $|2x + 1| < 4$

في التمارين 11-14، حدّد ما إذا كانت النقاط مستقيمة.

11. $(2, 1), (0, 2), (4, 0)$
12. $(3, 1), (4, 4), (5, 8)$
13. $(4, 1), (3, 2), (1, 3)$
14. $(1, 2), (2, 5), (4, 8)$

في التمارين 15-18، أوجد (a) المسافة بين النقطتين، و(b) ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين المعطيتين، و(c) معادلة للمستقيم الذي يمرّ بالنقطتين.

15. $(1, 2), (3, 6)$
16. $(1, -2), (-1, -3)$
17. $(0.3, -1.4), (-1.1, -0.4)$
18. $(1.2, 2.1), (3.1, 2.4)$

في التمارين 19-22، أوجد نقطةً ثانيةً على المستقيم الذي ميله m وتقع عليه النقطة P ومثّل المستقيم وأوجد معادلةً له.

19. $m = 2, P = (1, 3)$
20. $m = 0, P = (-1, 1)$
21. $m = 1.2, P = (2.3, 1.1)$
22. $m = -\frac{1}{4}, P = (-2, 1)$

في التمارين 23-28، حدّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك.

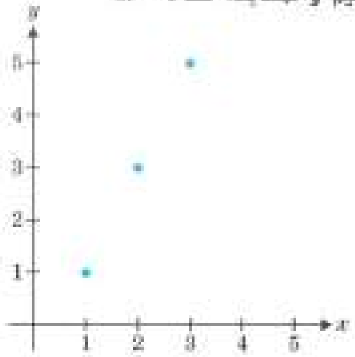
23. $y = 3(x - 1) + 2$ and $y = 3(x + 4) - 1$
24. $y = 2(x - 3) + 1$ and $y = 4(x - 3) + 1$
25. $y = -2(x + 1) - 1$ and $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3$
26. $y = 2x - 1$ and $y = -2x + 2$
27. $y = 3x + 1$ and $y = -\frac{1}{3}x + 2$
28. $x + 2y = 1$ and $2x + 4y = 3$

في التمرينات 29-32، أوجد معادلة مستقيم يمرّ بالنقطة المعطاة إضافةً إلى (a) مستقيم موازٍ و(b) آخر عمودي على المستقيم المعطى.

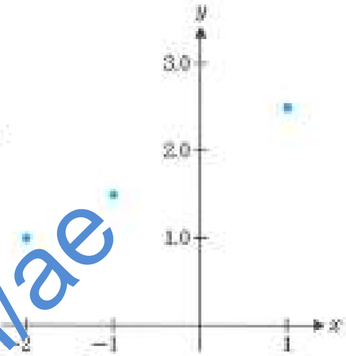
29. $y = 2(x + 1) - 2$ at $(2, 1)$
30. $y = 3(x - 2) + 1$ at $(0, 3)$
31. $y = 2x + 1$ at $(3, 1)$
32. $y = 1$ at $(0, -1)$

في التمرينين 33 و 34، أوجد معادلةً للمستقيم الذي يمرّ بالنقاط المعطاة واحسب الإحداثي y للنقطة الواقعة على المستقيم والمقابلة لــ $x = 4$.

33.

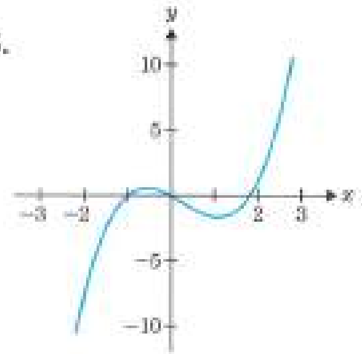


34.

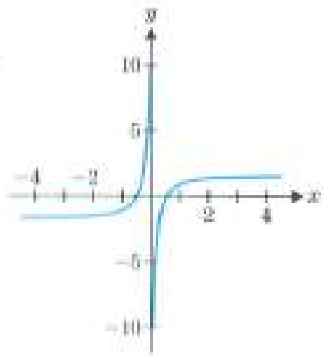


في التمارين 38-35، استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى تمثيل بياني لدالة.

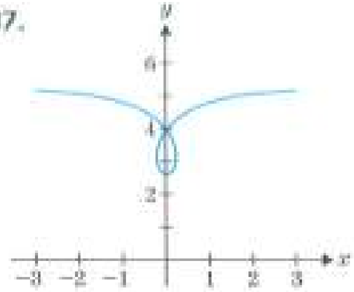
35.



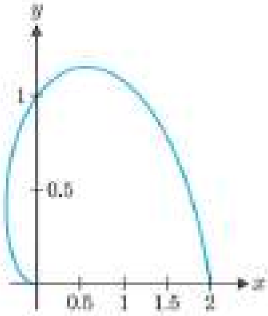
36.



37.



38.



في التمارين 42-39، حدّد ما إن كانت الدالة المعطاة كثيرة الحدود أو نسبية أو كلتيهما، أو غير ذلك.

39. $f(x) = x^3 - 4x + 1$

40. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 1}{x^4 - 1}$

41. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x + 1}$

42. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

في التمارين 48-43، أوجد مجال الدالة.

43. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

44. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

45. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 5}$

46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$

47. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + x - 6}$

في التمرينين 49 و 50، أوجد قيم الدالة المحددة.

49. $f(x) = x^2 - x - 1;\quad f(0), f(2), f(-3), f(1/2)$

50. $f(x) = \dfrac{3}{x};\quad f(1), f(10), f(100), f(1/3)$

في التمرينين 51 و 52، نقدّم شرحًا موجزًا لحالة ما. اذكر مجالاً معقولاً للمتغيّر المحدد.

51 يرغب ببيع قطعة حلوى جديدة؛ x = عدد قطع الحلوى المُباعة في الشهر الأول.

52 يرغب ببناء مصف للسيارات فوق قطعة أرض بعداها $200'$ في $200'$؛ x = عرض المصف (بالأقدام).

في التمرينات 56-53، ناقش ما إذا كنت تعتقد أنّ y ستكون دالّة لـ x.

53. y = الدرجة التي تحصّلها في امتحان، x = عدد ساعات دراستك

54. y = احتمال الإصابة بسرطان الرئة، x = عدد السجائر المدخّنة في اليوم

55. y = وزن أحد الأشخاص، x= عدد دقائق التمرين كل يوم

56. y = سرعة سقوط جسم، x = وزن الجسم

57. يبيّن الشكل A سرعة أحد الدرّاجين بالنسبة للزمن. بالنسبة إلى لأجزاء المستوية من هذا التمثيل البياني، ما الذي يحدث لسرعة الدرّاج؟ ما الذي يحدث لسرعة الدراج عندما يصعد المنحنى ا لبياني للأعلى؟ أو يهبط للأسفل؟ حدّد أجزاء المنحنى البياني المقابلة لصعود الدراج إلى أعلى التلة وتلك المقابلة لهبوطه إلى أسفلها.

الشكل A
سرعة الدراج

58. يبيّن الشكل B تعداد سكان بلد صغير بدلالة الزمن. وخلال المدة الزمنية المبينة، عانى ذلك البلد من تدفق اللاجئين ومن الحرب ومن الطاعون. حدّد هذه الأحداث الهامة.

الشكل B
تعداد السكان

في التمارين 64-59، أوجد كل نقاط تقاطع التمثيل البياني المعطى.

59. $y = x^2 - 2x - 8$
60. $y = x^2 + 4x + 4$
61. $y = x^3 - 8$
62. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
63. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$
64. $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4}$

في التمارين 72-65، حلّل إلى عوامل و/أو استخدم القانون العام لإيجاد كل أصفار الدالة المعطاة.

65. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
66. $f(x) = x^2 + x - 12$
67. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
68. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
69. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
70. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
71. $f(x) = x^6 + x^3 - 2$
72. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

في التمرينين 73 و 74، أوجد كل نقاط التقاطع.

73. $y = x^2 + 2x + 3$ و $y = x + 5$
74. $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = 2x^2 + x - 6$

تطبيقات

75. تعطى درجة غليان الماء (بالفهرنهايت) عند الارتفاع h (المقدّر بآلاف الأقدام فوق مسطح البحر) بالعلاقة $B(h) = -1.8h + 212$. أوجد h كي يغلي الماء عند °98.6. لماذا تعدّ هذا الارتفاع خطرًا على البشر؟

76. قيس معدّل دوران كرة جولف تضرب بواسطة عصًا ذات رأس معدني على أنّه 9100 rpm لكل كرة قيمة انضغاطها 120 و 10000 rpm لكل كرة قيمة انضغاطها 60. يستخدم معظم لاعبي الجولف كراتٍ قيمة انضغاطها 90. إذا كان معدّل دوران الكرة تابعًا لقيمة الانضغاط، أوجد معدّل دوران كرة قيمة انضغاطها 90. يستخدم لاعبو الجولف المحترفون في أغلب الأحيان كراتٍ قيمة انضغاطها 100. قدر معدّل دوران كرة قيمة انضغاطها 100.

77. يعتمد معدّل صرير صرصار على درجة الحرارة. إذ يصدر أحد أنواع صراصير الأشجار صريرًا بتواتر 160 مرة في الدقيقة عند درجة الحرارة 79°F و100 مرة في الدقيقة عند درجة الحرارة 64°F. أوجد دالةً خطيةً تربط درجة الحرارة بصرير الصرصار.

78. عند وصف طريقة قياس درجة الحرارة عبر عدّ مرّات صرير الصرصار، تقترح معظم الأدلة عدّ مرّات الصرير خلال 15 ثانية. استخدم التمرين 77 لتفسير السبب في اعتبار هذه الطريقة ملائمة.

79. لعب أحد الأشخاص لعبةً حاسوبية عدة مرات. وتبين الإحصاءات أنّه قد فاز 415 مرة وخسر 120 مرة. وسُجلت النسبة المئوية للفوز على أنها 78%. فكم مرة متتالية عليه الفوز لرفع النسبة المئوية المسجلة للفوز إلى 80%؟

تمارين استكشافية

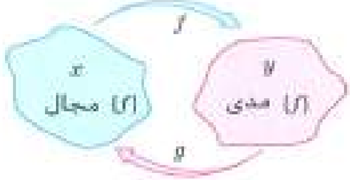
1. افترض أنّ لديك آلةً تكبّر الصور الفوتوغرافية بصورةٍ تناسبية. على سبيل المثال، يمكن أن تكبّر الآلة صورة مقاسها 6×4 إلى 12×8 عبر مضاعفة العرض والارتفاع. يمكنك تشكيل صورةٍ مقاسها 10×8 عبر اقتصاص بوصةٍ واحدةٍ من كل ضلع. اشرح طريقة تكبير صورة مقاسها $3\frac{1}{2} \times 5$ إلى 10×8. يعود أحد الأصدقاء من اسكتلندا وبحوزته صورةٌ بعداها $3\frac{1}{2} \times 5$ يظهر فيها وحش بحيرة لوخ نيس لمسافة $\frac{1}{4}''$ من الخارج على الجهة اليمنى. إذا استخدمت الإجراء الخاص بك للتكبير إلى 10×8، فهل سيشمل القصّ وحش البحيرة؟

2. حلّ المعادلة $|x-2| + |x-3| = 1$ (إرشاد: الحلّ غير مألوف من حيث احتوائه على أكثر من عددين فقط). ثم حلّ المعادلة $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$. (إرشاد: إذا قمت بالتعويض على نحو صحيح، فبإمكانك استخدام حلّك الخاص بالمعادلة السابقة).

الدوال العكسية

ثمة عددٌ هائلٌ من المسائل العكسية. فعلى سبيل المثال، في مخطط القلب الكهربائي (EKG)، تستخدم قياسات النشاط الكهربائي على سطح الجسم خلال الاستدلال من شيء ما حول النشاط الكهربائي على سطح القلب. ويشار إلى هذا المثال على أنه مسألةٌ معكوسة، وذلك نظرًا إلى أنّ الأطباء يحاولون تحديد قيم الدخل (أي النشاط الكهربائي على سطح القلب) عبر مراقبة قيم الخرج (النشاط الكهربائي المقيس على سطح الصدر).

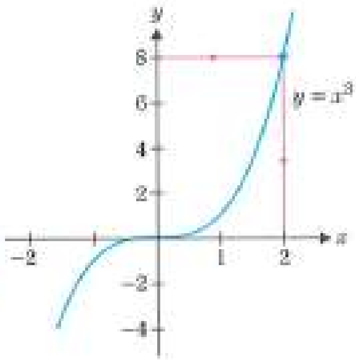
في هذه الفقرة، نقدّم تعريف الدالة المعكوسة. وفكرة الدوال المعكوسة بسيطةٌ للغاية. لدينا قيمةٌ معطاةٌ للخرج (أي قيمة تقع ضمن مدى دالةٍ معطاة)، ونرغب بإيجاد قيمة الدخل (القيمة الواقعة ضمن المجال) التي أعطت قيمة الخرج تلك. أي إذا كان لديك مدى $y \in (f)$ أوجد المجال $x \in (f)$ الذي من أجله $y = f(x)$ (انظر الشكل التوضيحي للدالة العكسية g المبين في الشكل 1.26).



الشكل 1.26

$g = f^{-1}$

على سبيل المثال، افترض أنّ $f(x) = x^3$ و $y = 8$ فهل تستطيع إيجاد قيمة لـ x تحقق $x^3 = 8$؟ أي هل تستطيع إيجاد القيمة x المقابلة لـ $y = 8$؟ (انظر الشكل 1.27). إن حل هذه المسألة المحددة بطبيعة الحال هو $x = \sqrt[3]{8} = 2$، وبصورة عامة إذا كان $x^3 = y$ فإن $x = \sqrt[3]{y}$، وفي ضوء ذلك، نقول إن الدالة التكعيبية هي معكوس $f(x) = x^3$.



الشكل 1.27

إيجاد قيمة x المقابلة لـ $y = 8$

المثال 2.1 دالتان تعكس كلٌّ منهما أثر الأخرى

إذا كان $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^{1/3}$ أوضح أنّ

$$f(g(x)) = x \text{ و } g(f(x)) = x$$

لجميع قيم x

الحل لكل الأعداد الحقيقية x لدينا

$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

و

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$ ■

لاحظ في المثال 2.1 أنّ أثر f يبطل أثر g والعكس. نأخذ هذا المبدأ على أنه تعريف الدالة العكسية.

ملحوظة 2.1

انتبه جيداً إلى الرمز. لاحظ أنّ $f^{-1}(x)$ لا تعني $\frac{1}{f(x)}$. حيث نكتب المعكوس الضربي لـ $f(x)$ بالصيغة

$$\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

التعريف 2.1

افترض أنّ لـ f و g المجالين A و B على الترتيب، وأنّ $f(g(x))$ معرّفة لكل قيم $x \in B$ وأنّ $g(f(x))$ معرّفة لكل قيم $x \in A$ إذا كان

$f(g(x)) = x$، لكل قيم $x \in B$، و

$g(f(x)) = x$، لكل قيم $x \in A$،

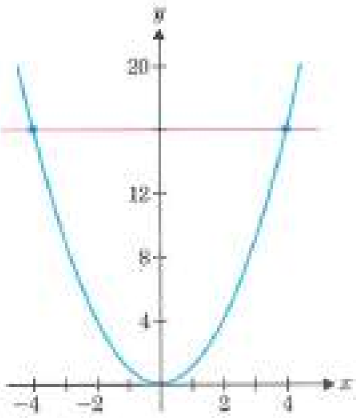
فإننا نقول إنّ g هي الدالة **المعكوسة** لـ f ونكتب بالصيغة $g = f^{-1}$ وبصورة مكافئة، f هي الدالة المكسية لـ g، $f = g^{-1}$.

لاحظ أنّ الكثير من الدوال المألوفة ليس لها دوال عكسية.

المثال 2.2 الدوال التي ليس لها دوال عكسية

أوضح أنّ الدالة $f(x) = x^2$ ليس لها دالة عكسية في الفترة $(-\infty, \infty)$

الحل لاحظ أنّ $f(4) = 16$ و $f(-4) = 16$ أي أنه توجد قيمتان لـ x تعطيان قيمة y نفسها. بالتالي، إذا كان علينا تعريف معكوس للدالة f فكيف سنعرّف $f^{-1}(16)$؟ انظر في التمثيل البياني لـ $y = x^2$ (انظر الشكل 1.28) لكي ترى ما هي المسألة.

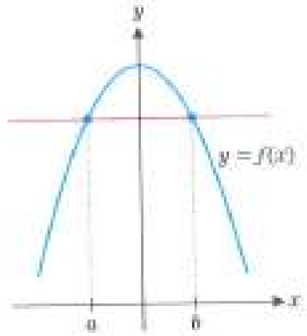


الشكل 1.28

$y = x^2$

من أجل كل $y > 0$ هناك قيمتان لـ x يكون من أجلهما $y = x^2$ ونظرًا إلى ذلك، فليس للدالة معكوس ■

ولكن $f(x) = x^2$ يغرينا أن نستبق الأمور بالقول إنّ الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هي معكوس الدالة $f(x)$ لاحظ أنّه بالرغم من أنّ $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ لجميع قيم $x \geq 0$ (أي لجميع قيم x في المجال $g(x)$) فإنّه من غير الصحيح عمومًا أن يكون $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ وفي الواقع، تنطبق هذه المساواة فقط لكل $x \geq 0$ ولكن للدالة $f(x) = x^2$ المحصورة في المجال $x \geq 0$ يكون لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



الشكل 1.29

$f(a) = f(b)$ من أجل $a \neq b$

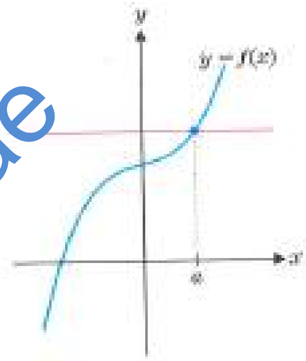
إذا لا تنجح f في اختبار المستقيم الأفقي وبالتالي ليس فيها دالة واحد إلى واحد.

التعريف 2.2

تدعى الدالة f بأنها دالة **واحد لواحد** حين يكون كل عنصر في المدى $y \in \{f\}$ مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال $x \in \{f\}$ بحيث يتحقق عندها $y = f(x)$

ملحوظة 2.2

لاحظ أنّ التعريف المكافئ للدالة واحد لواحد هو التالي. نقول عن دالة $f(x)$ أنها دالة واحد لواحد إذا كانت المساواة $f(a) = f(b)$ عندما $a = b$ فقط. ويعد هذا التعريف في أغلب الأحيان مفيدًا من أجل البراهين التي تنطوي على دوال واحد لواحد.



الشكل 1.30

يقطع كل مستقيم أفقي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر. وبالتالي تنجح الدالة f في اختبار المستقيم الأفقي وهي دالة واحد لواحد.

من المفيد أن نفكّر بمفهوم واحد لواحد بدلالة التمثيلات البيانية. لاحظ أنّ الدالة f تعد دالة واحد لواحد إذا كان كل مستقيم أفقي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة على الأكثر فقط. ويشار إلى هذا باسم **اختبار المستقيم الأفقي**. ونوضّح ذلك في الشكلين 1.29 و1.30. ينبغي أن تبدو النتيجة التالية الآن منطقية.

النظرية 2.1

يكون للدالة f دالة عكسية إذا وفقط إذا كانت الدالة واحد لواحد.

وتنصّ هذه النظرية ببساطة أنه لكل دالة واحد لواحد دالة عكسية وأن كل دالة لها دالة عكسية هي دالة واحد لواحد. ولكنها لا تخبرنا عن طريقة إيجاد الدالة العكسية. وبالنسبة للدوال البسيطة جدًا، يمكننا إيجاد المعكوس عبر حل المعادلات.

المثال 2.3 **إيجاد دالة عكسية**

أوجد معكوس الدالة $f(x) = x^3 - 5$

الحل لاحظ أنه من غير الواضح تمامًا من التمثيل البياني (انظر الشكل 1.31) إن كانت الدالة f تنجح في اختبار المستقيم الأفقي. لإيجاد الدالة العكسية، اكتب $y = f(x)$ وحلها لإيجاد x (أي حل لإيجاد قيمة الدخل x التي تعطي قيمة الخرج الملحوظة y). لدينا

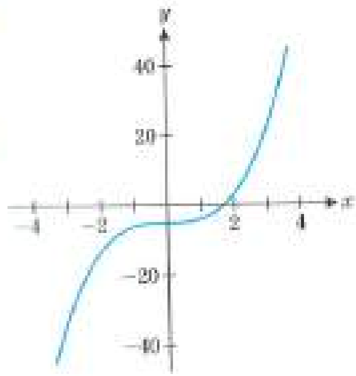
$$y = x^3 - 5$$

إن إضافة 5 إلى الطرفين وأخذ الجذر التكعيبي يعطيانا

$$(y + 5)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x$$

وبالتالي، $x = f^{-1}(y) = (y + 5)^{1/3}$ يعطينا عكس المتغيرين x و y

$$f^{-1}(x) = (x + 5)^{1/3}$$ ■



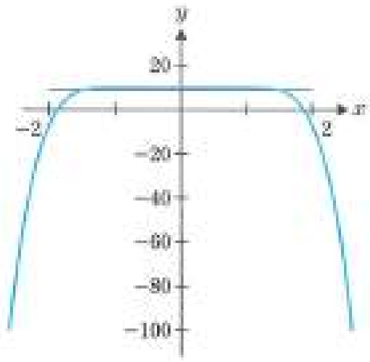
الشكل 1.31

$y = x^3 - 5$

المثال 2.4 **دالة ليست واحدًا لواحد**

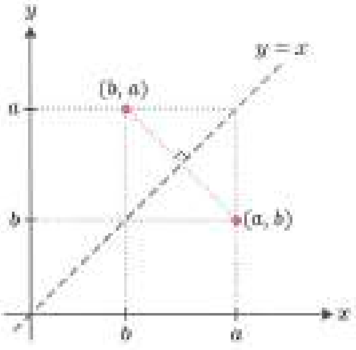
وضّح أنه لا يوجد للدالة $f(x) = 10 - x^4$ دالّة عكسية.

الحل يمكنك أن ترى من الرسم البياني (انظر الشكل 1.32) أن f ليست دالة واحد لواحد؛ على سبيل المثال، $f(1) = f(-1) = 9$ وبالنتيجة، ليس للدالة f دالّة عكسية. ■



الشكل 1.32

$y = 10 - x^4$



الشكل 1.33

العكس بالنسبة لـ $y = x$

حتى إن لم نستطع صراحةً إيجاد دالة عكسية، فيمكن أن نمثّل ذلك بيانيًا. لاحظ أنه إذا كانت (a, b) نقطة على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ وكان للدالة f دالّة عكسية، f^{-1} وبما أنّ

$$b = f(a)$$

فيكون لدينا

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

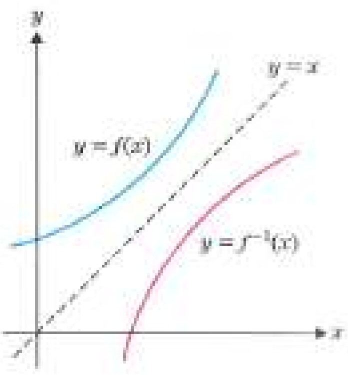
أي إنّ (b, a) نقطة تقع على التمثيل البياني لـ $y = f^{-1}(x)$ وهذا يخبرنا بالكثير عن الدالة العكسية. وبالتحديد، يمكننا الحصول على الفور على أي عدد من النقاط على التمثيل البياني $y = f^{-1}(x)$ عبر تحديده ببساطة. إضافة إلى ذلك، لاحظ أنّ النقطة (b, a) هي معكوس النقطة (a, b) بالنسبة للمستقيم $y = x$ (انظر الشكل 1.33). يتبع ذلك أنه عند إعطاء التمثيل البياني لأي دالة واحد لواحد، فيمكنك رسم التمثيل البياني لدالتها العكسية ببساطة عبر عكس التمثيل البياني بكامله بالنسبة للمستقيم $y = x$.

نوضّح في المثال 2.5 تماثل دالة ومعكوسها.

المثال 2.5 **التمثيل البياني لدالة ومعكوسها**

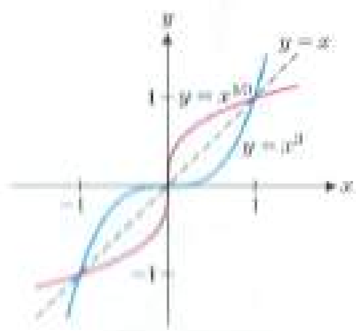
ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $f(x) = x^3$ ومعكوسها.

الحل من المثال 2.1، إنّ الدالة العكسية لـ $f(x) = x^3$ هي $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ لاحظ تماثل الرسمين الظاهرين في الشكل 1.34. ■



الشكل 1.35

التمثيلان البيانيان لـ f و f^{-1}



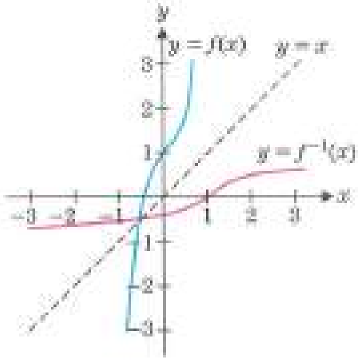
الشكل 1.34

$y = x^{1/3}$ و $y = x^3$

الرياضيات اليوم

كيم روسمو (1955−) عالم جريمة كنديّ طوّر خوارزمية الاستهداف الجغرافي الجنائي التي تحدد المنطقة الأكثر احتمالاً لإقامة القتلة المتسلسلين والمغتصبين وغيرهم من المجرمين. خدم روسمو مدة 21 عامًا في دائرة شركة فانكوفر، وقد تتلمذ على يد الأستاذين بول وباتريشيا براتنغهام من جامعة فراسر، وقد طوّر الأستاذان نظرية نمط الجريمة التي تتنبأ بمواقع الجرائم في ضوء أماكن إقامة المجرمين وعملهم ولهوهم. بينما عكس روسمو نموذجهما واستخدم مواقع الجرائم لتحديد المكان الأرجح لإقامة المجرمين. وقد قامت أحداث الحلقة الأولى من مسلسل *Numbers* على عمل روسمو.

في معظم الأحيان، لا نستطيع إيجاد صيغة للدالة العكسية وعلينا أن نقبل ببساطة بمعرفة أن هناك دالة عكسية فحسب. لاحظ أننا نستطيع استخدام مبدأ التماثل المبيّن أعلاه باختصار لرسم التمثيل البياني لدالة عكسية، وذلك حتى إن لم تكن لدينا صيغة تلك الدالة. (انظر الشكل 1.35).



الشكل 1.36

$y = f^{-1}(x)$ و $y = f(x)$

المثال 2.6 رسم التمثيل البياني لدالة عكسية مجهولة

ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $f(x) = x^5 + 8x^3 + x + 1$ ومعكوسها.

الحل على الرغم من أننا غير قادرين على إيجاد صيغة للدالة العكسية، فإننا نستطيع رسم تمثيل بياني لـ f^{-1} بسهولة. نأخذ ببساطة التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ ونعكسه بالنسبة للمستقيم $y = x$ كما هو موضّح في الشكل 1.36. (عندما سنقدم المعادلات الوسيطية في القسم 9.1، سنطّلع على طريقة ذكية لرسم هذا التمثيل البياني بواسطة حاسبة التمثيل البياني). ■

التمارين 1.2

كتابة التمارين

1. اشرح بالكلمات (وبصورة) السبب في صحة الآتي: إذا كانت الدالة $f(x)$ متزايدة لكل قيم x، إذا كان $x_2 > x_1$ فإن $f(x_2) > f(x_1)$، وبالتالي للدالة f دالة عكسية.
2. افترض أن التمثيل البياني لدالة ينجح في اختبار المستقيم الأفقي. اشرح لماذا تعلم أن للدالة دالة عكسية (معرفة على مدى الدالة).
3. يعمل الرادار من خلال ارتداد ذبذبة كهرمغناطيسية عالية التردد عن جسم متحرك، ومن ثم قياس تشتّت الذبذبة عند ارتدادها. اشرح لِمَ تعدّ هذه مسألة معكوسة عبر تحديد الدخل والخرج.
4. لكلّ مرضٍ بشري مجموعةٌ من الأعراض المرافقة له. يحاول الأطباء حل مسألة معكوسة: فمن خلال الأعراض المعطاة يحاولون تحديد المرض المسبب للأعراض. اشرح السبب في أنّ هذه المسألة ليست مسألة معكوس جيدة التعريف (أي إنه من غير الممكن منطقيًا على الدوام التعرّف على الأمراض بصورة صحيحة من الأعراض فحسب).

في التمرينات 1-4، بيّن أنّ $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ من أجل كل قيم x.

1. $f(x) = x^5$ و $g(x) = x^{1/5}$
2. $f(x) = 4x^3$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3}$
3. $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$
4. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x}$ $(x \neq 0, x \neq -2)$

في التمرينات 5-12، حدّد ما إن كان للدالة دالةٌ عكسية (أو أنها دالة واحد لواحد). فإن كان ذلك، أوجد الدالة العكسية ومثل بيانيًا الدالة الأصلية والعكسية.

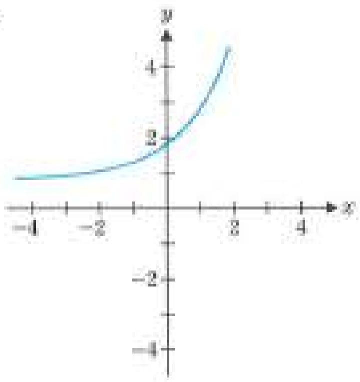
5. $f(x) = x^3 - 2$
6. $f(x) = x^3 + 4$
7. $f(x) = x^5 - 1$
8. $f(x) = x^3 + 4$
9. $f(x) = x^4 + 2$
10. $f(x) = x^4 - 2x - 1$
11. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

في التمرينات 13-18، افترض أنّ للدالةِ دالةً عكسية. أوجد قيم الدالة المحددة بدون الحل لإيجاد الدالة العكسية.

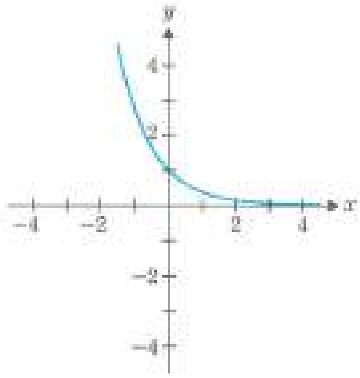
13. $f(x) = x^3 + 4x - 1$, (a) $f^{-1}(-1)$, (b) $f^{-1}(4)$
14. $f(x) = x^3 + 2x + 1$, (a) $f^{-1}(1)$, (b) $f^{-1}(13)$
15. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$, (a) $f^{-1}(-5)$, (b) $f^{-1}(5)$
16. $f(x) = x^5 + 4x - 2$, (a) $f^{-1}(38)$, (b) $f^{-1}(3)$
17. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$, (a) $f^{-1}(4)$, (b) $f^{-1}(2)$
18. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$, (a) $f^{-1}(3)$, (b) $f^{-1}(1)$

في التمرينات 19-22، استخدم التمثيل البياني المعطى لتمثيل الدالة العكسية بيانيًا.

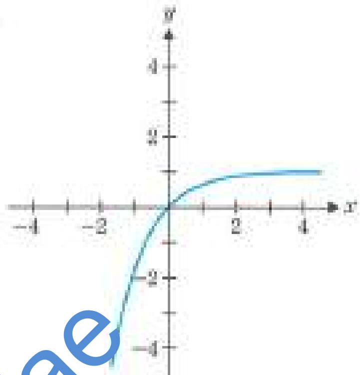
19.



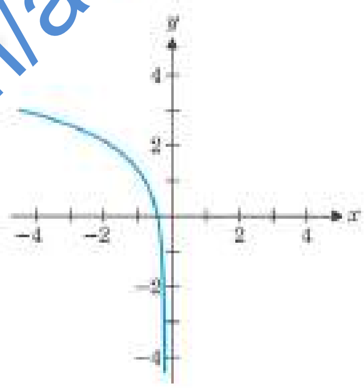
20.



21.



22.



في التمرينات 26-23، افترض أنّ للدالة f دالةً عكسية واشرح سبب صحة العبارة.

23. إذا كان مدى الدالة f هو كل قيم $y > 0$، فإن مجال الدالة f^{-1} هو جميع قيم $x > 0$.

24. إذا كان التمثيل البياني للدالة f يتضمن النقطة (a, b) فإن التمثيل البياني للدالة f^{-1} سيتضمن النقطة (b, a).

25. إذا كان التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم $y = 3$، إذًا $f^{-1}(x)$ ليست معرفةً عند $x = 3$.

26. إذا كان مجال الدالة f كل الأعداد الحقيقية، فإن مدى الدالة f^{-1} هو جميع الأعداد الحقيقية.

في التمرينات 36-27، استخدم تمثيلًا بيانيًا لتحديد ما إن كانت الدالة دالة واحد لواحد. ففي حال كانت كذلك، مثّل الدّالة العكسيّة.

27. $f(x) = x^3 - 5$

28. $f(x) = x^3 - 3$

29. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

30. $f(x) = x^3 - 2x - 1$

31. $f(x) = x^5 - 3x^3 - 1$

32. $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

34. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

تتضمن التمارين 46-37 دوال معكوسة على مجالاتٍ مقيّدة.

37. وضّح أنّ $f(x) = x^2\ (x \geq 0)$ و $g(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ دالتان متعاكستان. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

38. وضّح أنّ $f(x) = x^2 - 1\ (x \geq 0)$ و $g(x) = \sqrt{x+1}\ (x \geq -1)$ دالتان متعاكستان. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

39. مثّل بيانيًا $f(x) = x^2$ من أجل $x \leq 0$ وتحقق من أنها دالة واحد لواحد. ثم أوجد معكوسها. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

40. مثّل بيانيًا $f(x) = x^2 + 2$ من أجل $x \leq 0$ وتحقّق من أنها دالة واحد لواحد. ثم أوجد معكوسها. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

41. مثّل الدالة $f(x) = (x-2)^2$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

42. مثّل الدالة $f(x) = (x+1)^4$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

43. مثّل الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

44. مثّل الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

45. مثّل الدالة $f(x) = \sin x$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

46. مثّل الدالة $f(x) = \cos x$ وأوجد فترة تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة المعكوسة المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

تطبيقات

في التمارين 52-47، ناقش ما إذا كانت للدالة الموصوفة دالة عكسية.

47. يتغيّر دخل إحدى الشركات مع الزمن.

48. يتغيّر طول شخص مع الزمن.

49. عند إسقاط كرة، يتغيّر ارتفاعها مع الزمن.

50. عند رمي كرة إلى الأعلى، يتغير ارتفاعها مع الزمن.

51. يعتمد ظلّ جسم على شكله ثلاثي الأبعاد.

52. يعتمد عدد السعرات الحرارية المحروقة على مدى سرعة جريان الشخص.

53. افترض أن مديرك قد أخبرك أنك نلت زيادة في الراتب بنسبة 10%. وفي الأسبوع التالي، أعلن مديرك أنه نظرًا إلى ظروف خارجة عن إرادته، سيُقتطع من رواتب جميع الموظفين نسبة 10%. فهل أنت ميسور الحال بالدرجة نفسها التي كنت عليها منذ أسبوعين؟ أوضح أن الزيادة بنسبة 10% والتخفيض بنسبة 10% ليستا عمليتين معكوستين. أوجد معكوس إضافة 10%. (إرشاد: لإضافة 10% إلى كمية ما، يمكنك ضرب تلك الكمية بـ 1.10)

54. افترض أنّ أحد الموظفين نال زيادة في الراتب بنسبة 6% مع علاوة قدرها AED 500. أوجد مطلوب هذا الأجر في الحالات التالية. (a) أتت الزيادة بنسبة 6% قبل العلاوة. (b) أتت الزيادة بنسبة 6% بعد العلاوة.

تمارين استكشافية

1. أوجد كل قيم k التي تجعل $f(x) = x^3 + kx + 1$ دالة واحد لواحد

2. أوجد كل قيم k التي تجعل $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 1$ دالة واحد لواحد

الدرس 1-3

الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

يتضمن عدد كبير من الظواهر التي تواجهها في حياتك اليومية أمواجًا. فعلى سبيل المثال، تُنقل الموسيقى من المحطات الإذاعية على هيئة موجاتٍ كهرمغناطيسية، حيث يترجم مستقبل المذياع لديك هذه الموجات الكهرمغناطيسية وبسبب اهتزاز غشاءٍ رقيقٍ داخل مكبرات الصوت، والتي بدورها تشكّل موجات ضغطٍ في الهواء. وعندما تبلغ هذه الموجات أذنيك، فإنك تسمع الموسيقى من مذياعك. (انظر الشكل 1.37). كلٌّ من هذه الموجات موجةٌ دورية، ويقصد بذلك أنّ الشكل الأساسي للموجة يتكرر مرارًا وتكرارًا. يستلزم التوصيف الرياضي لهذه الظاهرة استخدام الدوال الدورية. وأكثر هذه الدوال شيوعًا الدوال المثلثية. نذكّرك أولًا بتعريف أساسي

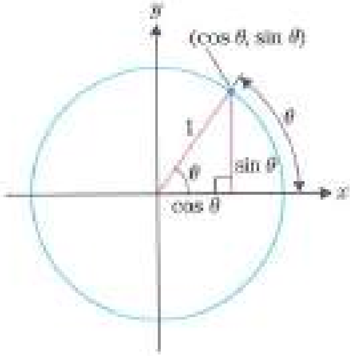
الشكل 1.37
المذياع وموجات الصوت

ملاحظات
عندما نناقش الزمن الدوري لدالة فإننا نركز في أغلب الأحيان على الزمن الدوري الأساسي.

التعريف 3.1
تكون الدالة f دورية و زمنها الدوري T إذا كان

$$f(x+T)=f(x)$$

لكل قيم x بحيث يكون x و $x+T$ في مجال f. وتدعى أصغر قيمة $T>0$ لهذا العدد بالزمن الدوري الأساسي.



الشكل 1.38
تعريف $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ، $\cos\theta = x$
و $\sin\theta = y$

ثمّة العديد من الطرق المتكافئة لتعريف دوال الجيب وجيب التمام. وثمّة أن نؤكد على تعريف بسيط يمكنك من خلاله استنباط الكثير من الخواص الأساسية لهذه الدوال بسهولة. بالإشارة إلى **الشكل 1.38**، ابدأ برسم دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$. لتكن θ الزاوية المعاكسة (بعكس اتجاه عقارب الساعة) من المحور الموجب x إلى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطة الأصل والنقطة (x, y) على الدائرة. وهنا نقيس θ بالقياس الدائري (الراديان) بدلالة طول القوس المحدد في الشكل. بالإشارة إلى **الشكل 1.38** من جديد، نعرّف $\sin\theta$ على أنه الإحداثي y للزاوية الواقعة على الدائرة و $\cos\theta$ على أنه الإحداثي x لتلك النقطة. ينتج من هذا التعريف أنّ $\sin\theta$ و $\cos\theta$ دالتان معرّفتان لكل قيم θ بحيث يكون لكلّ منهما المجال $-\infty < \theta < \infty$ ، في حين أن مدى كل من هاتين الدالتين هو الفترة $[-1, 1]$

ملحوظة 3.1

نقيس الزوايا دائمًا بالقياس الدائري بوحدة الـ(*radian*) ما لم يذكر خلاف ذلك.

لاحظ أنه بما أنّ محيط دائرة $(C = 2\pi r)$ نصف قطرها وحدة واحدة يساوي 2π ، نستنتج بأنّ $360°$ تقابل 2π راديان. وبالمثل، فإن $180°$ تقابل π *rad* ، و $90°$ تقابل $\pi/2$ *rad* . وهكذا. في الجدول المرفق، ندرج بعض الزوايا الشائعة التي تقاس بالدرجات، جنبًا إلى جنب مع قياساتها المقابلة بوحدة الـ(*radian*).

الزاوية بالدرجات	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
الزاوية بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

النظرية 3.1

الدوال $f(\theta) = \sin\theta$ و $g(\theta) = \cos\theta$ تمثل دوال دورية، ودورها 2π

البرهان

بالرجوع إلى **الشكل 1.38**، بما أنّ الدائرة الكاملة تساوي 2π *rad* . فإن إضافة 2π إلى أي زاوية سوف تأخذك في دورة كاملة حول الدائرة وتعود إلى النقطة نفسها (x, y) وهذا يؤدي إلى أن

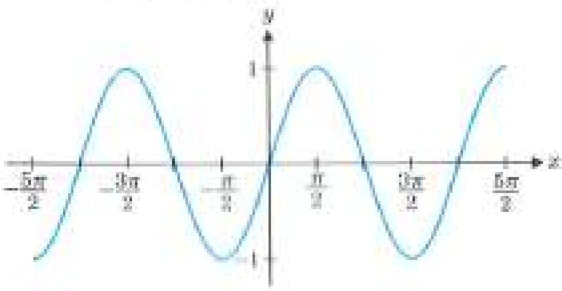
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

و

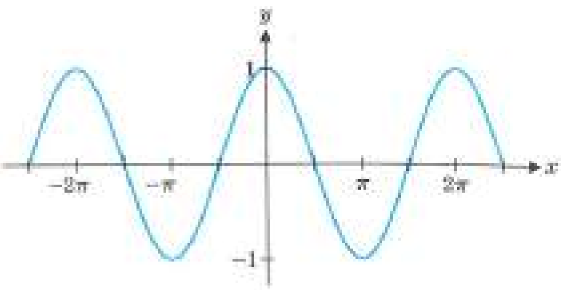
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

لكل قيم θ تكون 2π هي أصغر زاوية موجبة تحقق هذه النظرية.

من معرفتك بالتمثيلات البيانية لـ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ الموضحة في الشكلين 3.51a و 3.51b على الترتيب.



الشكل 1.39a
$y = \sin x$



الشكل 1.39b
$y = \cos x$

لاحظ أنه يمكنك إجراء انسحاب للتمثيل البياني لـ $y = \sin x$ إلى اليمين أو اليسار وتحصل على صورة طبق الأصل من التمثيل البياني لـ $y = \cos x$. وبالتحديد لدينا العلاقة

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

يبين الجدول المرفق بعض القيم الشائعة للجيب وجيب التمام. لاحظ أنه يمكن قراءة العديد من تلك القيم مباشرة من الشكل 1.38.

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

مثال 3.1 حل المعادلات التي تحتوي على الـ sin و الـ cos

أوجد جميع حلول المعادلات $2\sin x - 1 = 0$ (a) و $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ (b)

الحل (a) لاحظ بأن $2\sin x - 1 = 0$ إذا كانت $2\sin x = 1$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$ من دائرة الوحدة. نجد أن $x = \frac{1}{2}$ إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$ بما أن $\sin x$ لها دورة 2π. فالحلول الإضافية هي $\frac{\pi}{6} + 2\pi, \frac{5\pi}{6} + 2\pi, \frac{\pi}{6} + 4\pi$ وهكذا. إن إحدى الطرق الملائمة لتوضيح أنه يمكن إضافة أي مضاعف عددي صحيح لـ 2π لأي من الحلين تتمثل بكتابة $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$. لأي عدد صحيح n قد يبدو الجزء (b) صعبًا في البداية. ولكن لاحظ بأنه يبدو كمعادلة تربيعية تستخدم $\cos x$ بدلاً من x باستخدام هذه المعلومة، يمكنك تحليل الطرف الأيسر إلى العوامل لتحصل على

$$0 = \cos^2 x - 3\cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$$

ينتج من ذلك أن $\cos x = 1$ أو $\cos x = 2$ بما أن $-1 \le \cos x \le 1$ لكل قيم x فالمعادلة $\cos x = 2$ ليس لها حل. ولكننا نحصل على $\cos x = 1$ إذا كانت $x = 0, 2\pi$ أو أي مضاعف عدد صحيح لـ 2π يمكننا تلخيص كل الحلول من خلال كتابة $x = 2n\pi$. لأي عدد صحيح n ■

نقوم الآن بإعطاء تعريفات للدوال المثلثية الأربع المتبقية.

ملاحظة 3.2

بدلاً من كتابة $(\sin\theta)^2$ أو $(\cos\theta)^2$، فإننا نستخدم الرمز $\sin^2\theta$ و $\cos^2\theta$ على الترتيب. وإضافة إلى ذلك، فإننا غالباً ما نحذف الأقواس ونكتب، على سبيل المثال، $\sin 2x$ بدلاً من $\sin(2x)$

التعريف 3.2

دالة الظل معرفة كما يلي $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

دالة ظل التمام معرفة كما يلي $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

دالة القاطع معرفة كما يلي $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

دالة قاطع التمام معرفة كما يلي $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

ملاحظة 3.3

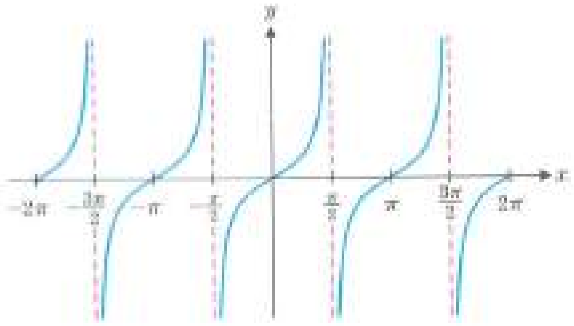
تحتوي معظم الآلات الحاسبة على مفاتيح للدوال $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ ولكن ليس للدوال المثلثية الثلاث الأخرى. ويعكس هذا الدور الرئيس الذي تؤديه $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ في التطبيقات. لحساب قيم الدالة للدوال المثلثية الثلاث الأخرى، يمكنك ببساطة استخدام المتطابقات

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$، $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ و $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

التمثيلات البيانية لهذه الدوال موضحة في الأشكال 1.40a و 1.40b و 1.40c و 1.40d لاحظ مواقع خطوط التقارب الرأسية في كل تمثيل بياني. في دوال التمام $\cot x$ و $\csc x$ ينتج عن القسمة على $\sin x$ خطوط تقارب رأسية عند $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ وهكذا (حيث $\sin x = 0$). من أجل $\tan x$ و $\sec x$ ينتج عن القسمة على $\cos x$ خطوط تقارب رأسية عند $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$ وهكذا (حيث $\cos x = 0$) بمجرد انتهائك من تحديد خطوط التقارب الرأسية، سيصبح رسم التمثيلات البيانية سهلاً نسبيًا.

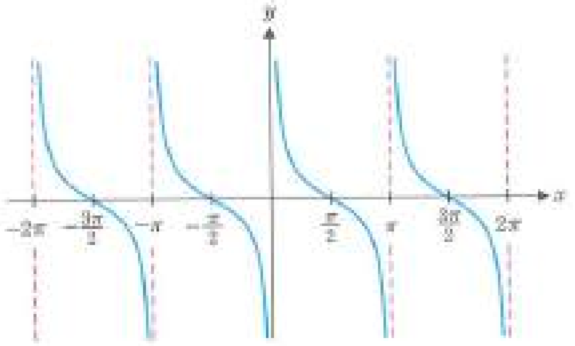
لاحظ بأنّ $\tan x$ و $\cot x$ دوال دورية دورتها π بينما $\sec x$ و $\csc x$ دوال دورية دورتها 2π.

من المهم تعلم تأثير التعديلات البسيطة على هذه الدوال. ونقدم بعض الأفكار هنا وفي التمرينات.



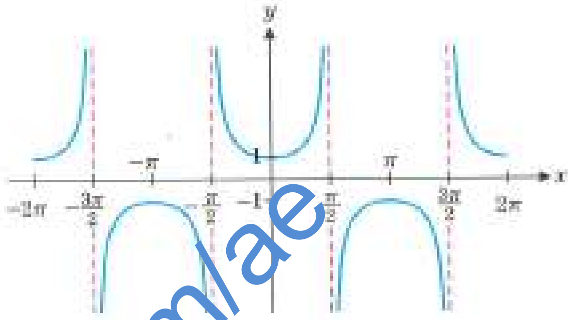
الشكل 1.40a

$y = \tan x$



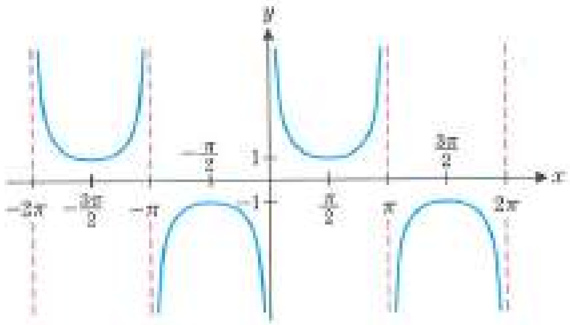
الشكل 1.40b

$y = \cot x$



الشكل 1.40c

$y = \sec x$

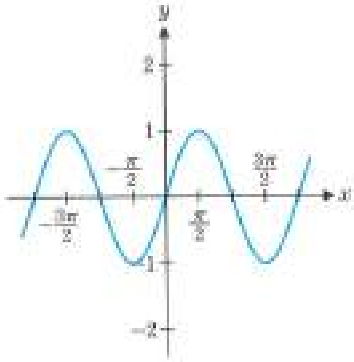


الشكل 1.40d

$y = \csc x$

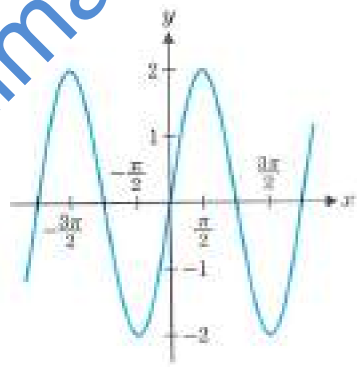
مثال 3.2 تبديل السعة والدورة

مثّل $y = 2 \sin x$ و $y = \sin 2x$ بيانيًا ووضّح طريقة اختلاف كل منهما عن التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ (انظر الشكل 1.41a).



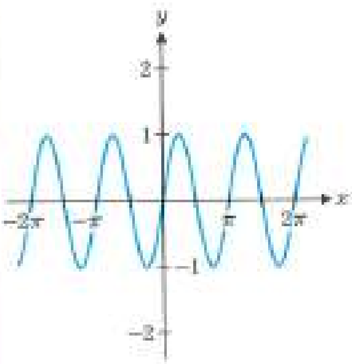
الشكل 1.41a

$y = \sin x$



الشكل 1.41b

$y = 2 \sin x$



الشكل 1.41c

$y = \sin (2x)$

الحل التمثيل البياني لـ $y = 2 \sin x$ موضح في الشكل 1.41b. لاحظ أن هذا التمثيل البياني مماثل للتمثيل البياني لـ $y = \sin x$ ما عدا أن قيم y تتذبذب بين -2 و 2 بدلاً من -1 و 1 ثم. التمثيل البياني لـ $y = \sin 2x$ موضح في الشكل 1.41c. في هذه الحالة، إن التمثيل البياني مشابه للتمثيل البياني لـ $y = \sin x$ ما عدا أن الدورة π بدلاً من 2π (بحيث تحدث التذبذبات أسرع مرتين). ■

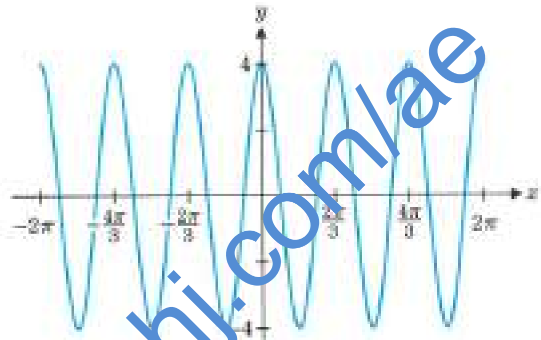
يمكن تعميم النتائج في المثال 3.2. لكل $A > 0$ يتذبذب التمثيل البياني لـ $y = A\sin x$ بين $y = -A$ و $y = A$ وفي هذه الحالة، تسمى A **سعة** المنحنى الجيبي. لاحظ أنه لكل ثابت موجب c فإن دورة $y = \sin cx$ هي $2\pi/c$ وعلى نحو مماثل، من أجل الدالة $y = A\cos cx$ تكون السعة A وتكون الدورة $2\pi/c$

يمكن استخدام دوال الجيب وجيب التمام لنمذجة موجات الصوت. تمثل النغمة الصافية (فكّر في الشوكة الرنانة) موجة ضغط تصفها الدالة الجيبية $y = A\sin ct$ (نستخدم هنا المتغير t نظرًا إلى أن ضغط الهواء يمثل دالة زمنية). تحدد السعة A إلى أي مدى يبدو الصوت مرتفعًا وتحدد الدورة طبقة صوت النغمة. في هذا الإطار، سيكون من الملائم الحديث عن التكرار $f = c/2\pi$. كلما ارتفع التكرار ارتفعت معه طبقة صوت النغمة. (يقاس التكرار بالهرتز، حيث كل 1 هيرتز يساوي 1 دورة في الثانية الواحدة). لاحظ بأن التكرار هو ببساطة المعكوس الضربي للدورة.

مثال 3.3 إيجاد السعة والدورة والتكرار

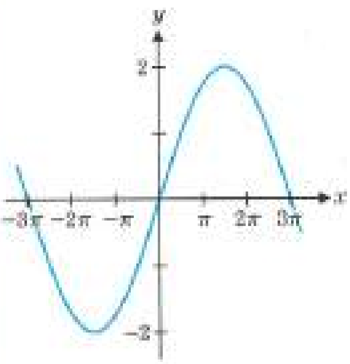
أوجد السعة والدورة والتكرار لكل من $f(x) = 4\cos 3x$ (a) و $g(x) = 2\sin(x/3)$ (b)

الحل (a) للدالة $f(x)$ السعة تساوي 4 والدورة تساوي $2\pi/3$ والتكرار يساوي $3/(2\pi)$. (انظر الشكل 1.42a) (b) من أجل $g(x)$ السعة تساوي 2 والدورة تساوي $2\pi/(1/3) = 6\pi$ والتكرار يساوي $1/(6\pi)$ (انظر الشكل 1.42b)



الشكل 1.42a

$y = 4\cos 3x$



الشكل 1.42b

$y = 2\sin(x/3)$

يوجد عدد هائل من القوانين أو **المتطابقات** التي قد تكون مفيدة في التعامل مع الدوال المثلثية. ينبغي أن تلاحظ أنه – ومن تعريف $\sin\theta$ و $\cos\theta$ (انظر الشكل 1.38) فإن نظرية فيثاغورس تعطينا المتطابقة المعروفة

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

نظرًا إلى أن وتر المثلث المشار إليه يساوي 1. وهذا صحيح بالنسبة لأي زاوية θ. بالإضافة إلى ذلك،

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \text{ و } \cos(-\theta) = \cos\theta$$

تنظم لائحة متطابقات مهمة في النظرية 3.2

النظرية 3.2

لأي عددين حقيقيين α و β، نحصل على المتطابقات التالية.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad (3.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (3.2)$$

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (3.3)$$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (3.4)$$

من المتطابقات الأساسية الملخصة في النظرية 3.2 يمكن استخلاص عدة متطابقات أخرى مفيدة. سنستخلص اثنين من تلك المتطابقات في المثال 3.4

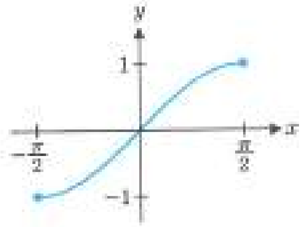
مثال 3.4 اشتقاق متطابقات مثلثية جديدة

اشتق المتطابقتين $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

الحل يمكن الحصول على هاتين المتطابقتين من القانونين (3.1) و(3.2) على الترتيب، من خلال استبدال $\alpha = \theta$ و $\beta = \theta$ وبدلاً من ذلك، يمكن الحصول على متطابقة $\cos 2\theta$ من خلال طرح المعادلة (3.3) من المعادلة (3.4). ■

الدوال المثلثية المعكوسة

نقوم الآن بتوسيع مجموعة الدوال المتاحة لك بتعريف معكوس الدوال المثلثية. من أجل البدء، انظر إلى التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ (انظر الشكل 1.41a) لاحظ بأنه لا يمكننا تعريف دالة معكوسة، لأن $\sin x$ لا تمثل واحد إلى واحد. ورغم أنّ دالة الجيب ليس لها دالة عكسية، يمكننا تعريف واحدة بتعديل مجال الجيب. تقوم بذلك عن طريق اختيار جزء من المنحنى يجتاز اختبار المستقيم الأفقي. إذا قيدنا المجال بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فعندها تكون $y = \sin x$ دالة واحد لواحد (انظر الشكل 1.43) ومن ثم، يكون لها معكوس. وهكذا نعرّف دالة **معكوسة الجيب** كما يلي



الشكل 1.43
$y = \sin x$ on $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = \sin^{-1} x \text{ إذا وفقط إذا كان } \sin y = x \text{ و } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \tag{3.5}$$

اقرأ هذا التعريف كما يلي: إذا كانت $y = \sin^{-1} x$ فعندها تكون y هي الزاوية (بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$) التي تحقق $\sin y = x$ لاحظ أنه كان بإمكانا اختيار أي فترة تكون $\sin x$ عندها دالة واحد لواحد. لكن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي الأكثر ملاءمة. للتحقق من أن هذه دوال معكوسة، لاحظ أنّ

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \text{ لكل قيم } x \in [-1, 1]$$

و

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \text{ لكل قيم } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{3.6}$$

اقرأ المعادلة (3.6) بحرص شديد. إنها لا تقول بأن $\sin^{-1}(\sin x) = x$ لكل قيم x. وبدلاً من ذلك، فقط تلك القيم المقيدة بالمجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ على سبيل المثال، $\sin^{-1}(\sin \pi) \neq \pi$ بما أنّ

$$\sin^{-1}(\sin \pi) = \sin^{-1}(0) = 0$$

ملاحظة 3.4

غالبًا ما يستخدم علماء الرياضيات الرمز $\arcsin x$ بدلاً من $\sin^{-1} x$ ويقرأ المتعلمون $\sin^{-1} x$ "معكوس $\sin x$" أو "قوس $\sin x$" بشكل تبادلي.

مثال 3.5 قيمة دالة معكوس الجيب

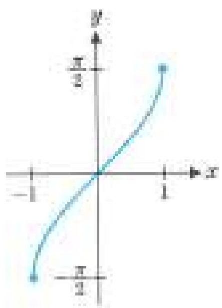
أوجد قيمة (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

الحل (a) نبحث عن الزاوية θ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ والتي تكون عندها $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ لاحظ أنه بما أنّ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. يكون لدينا $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ (b). لاحظ أنّ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ و $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بالتالي،

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad ■$$

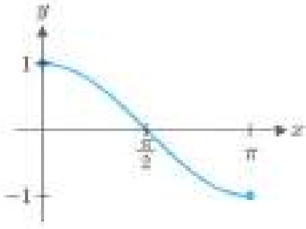
من خلال المثال 3.5 قد تعتقد أن (3.5) طريقة ملتوية لتعريف دالة. إذا كان هذا ما اعتقدته، فقد فهمت الفكرة بالضبط. في الواقع، نحن نريد أن نؤكد أن ما نعرفه عن دالة معكوس الجيب ناتج أساسًا من الإشارة إلى دالة الجيب.

تذكر من مناقشتنا في القسم 0.3 أنه يمكننا رسم تمثيل بياني لـ $y = \sin^{-1} x$ بواسطة عبر عكس التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (من الشكل 1.43) من خلال المستقيم $y = x$ (انظر الشكل 1.44).



الشكل 1.44
$y = \sin^{-1} x$

بالانتقال إلى $y = \cos x$. نلاحظ أن تقييد المجال في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ كما فعلنا مع دالة معكوس الجيب.



الشكل 1.45
$y=\cos x$ on $[0,\pi]$

لن ينفع هذا الأمر؟) إن أبسط طريقة لجعل $\cos x$ واحد لواحد تتمثل في تقييد مجالها في الفترة $[0,\pi]$ (انظر الشكل 1.45). ونتيجة لذلك، نعرّف دالة **معكوس جيب التمام** كما يلي

$y=\cos^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $\cos y=x$ و $0\le y\le\pi$

لاحظ هنا أنه لدينا

$$\cos(\cos^{-1}x)=x \text{ لكل قيم } x\in[-1,1]$$

و

$$\cos^{-1}(\cos x)=x \text{ لكل قيم } x\in[0,\pi]$$

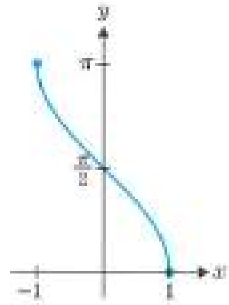
كما هو الحال مع تعريف معكوس الجيب، فمن المفيد التفكير في $\cos^{-1}x$ على أنها تلك الزاوية θ في $[0,\pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos\theta=x$. كما هو الحال مع $\sin^{-1}x$، فمن الشائع استخدام $\cos^{-1}x$ و $\arccos x$ بشكل متبادل.

مثال 3.6 قيمة دالة معكوس جيب التمام

أوجد قيمة (a) $\cos^{-1}(0)$ و (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل لحل الفرع (a)، ستحتاج لإيجاد تلك الزاوية θ في $[0,\pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos\theta=0$. ليس من الصعب رؤية أنّ $\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$. إذا حسبت هذا على آلتك الحاسبة وحصلت على 90، فآلتك الحاسبة في وضع الدرجات. في هذه الحالة، فينبغي لك تغييرها فورًا لوضع التقدير بالراديان (**rad**). ولحل الفرع (b)، ابحث عن الزاوية $\theta\in[0,\pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. لاحظ أنّ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$. ونتيجة لذلك،

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$ ■



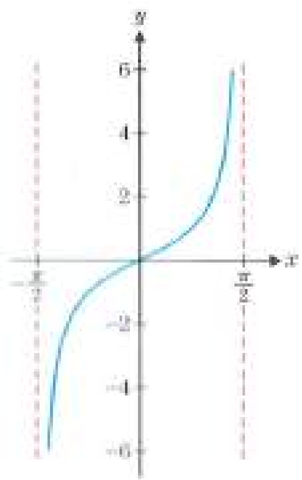
الشكل 1.46
$y=\cos^{-1}x$

مرة أخرى، نحصل على التمثيل البياني لهذه الدالة المعكوسة بواسطة عكس التمثيل البياني لـ $y=\cos x$ في الفترة $[0,\pi]$ (الموضحة في الشكل 1.45) من خلال المستقيم $y=x$ (انظر الشكل 1.46).

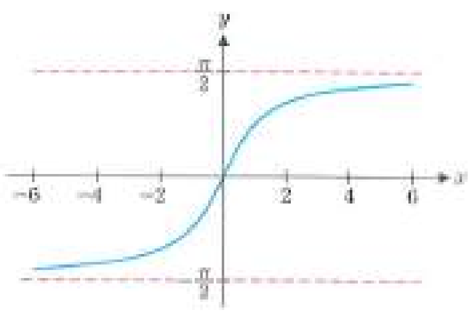
ويمكننا تعريف معكوسات كل من الدوال المثلثية الأربعة المتبقية بطرق مشابهة. للدالة $y=\tan x$ نقيد المجال في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ فكّر لماذا لم نقم بتضمين النقطتين الطرفيتين لهذه الفترة (انظر الشكل 1.47). بعد أن قمت بذلك، سترى بسهولة أننا نعرّف دالة **معكوس الظل** كما يلي

$y=\tan^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $\tan y=x$ و $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

عندها، يمكن إيجاد التمثيل البياني لـ $y=\tan^{-1}x$ كما هو موضح في الشكل 1.48 بواسطة عكس التمثيل البياني في الشكل 1.47 من خلال المستقيم $y=x$.



الشكل 1.47
$y=\tan x$ on $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



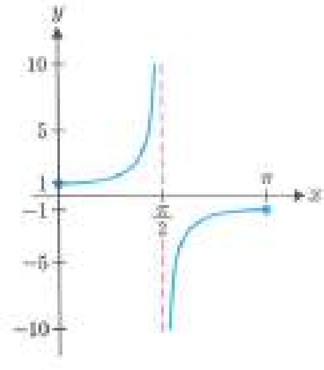
الشكل 1.48
$y=\tan^{-1}x$

مثال 3.7 إيجاد قيمة معكوس الظل

أوجد قيمة $\tan^{-1}(1)$.

الحل يجب أن نبحث عن الزاوية θ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والتي تكون عندها $\tan\theta = 1$. وذلك غاية في السهولة. بما أن $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ و $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، يكون لدينا $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. ■

ننتقل الآن إلى تحديد معكوس $\sec x$ أولاً. ينبغي التنويه، توجد طرق متعددة معقولة يمكننا من خلالها تقييد المجال بشكل مناسب. ويتباين المؤلفون في اختيارهم لطريقة التقييد. وقد اخترنا (بصورة تعسفية نوعًا ما) تقييد المجال ليكون $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ولكن لماذا لم نستخدم كل $[0, \pi]$؟ تحتاج فقط للتفكير في تعريف $\sec x$ لترى لم احتجنا إلى استبعاد القيمة $x = \frac{\pi}{2}$ انظر الشكل 1.49 من أجل التمثيل البياني لـ $\sec x$ عند هذا المجال. (لاحظ خط التقارب الرأسي عن $x = \frac{\pi}{2}$) بالتالي، نعرّف دالة **معكوس القاطع** كما يلي

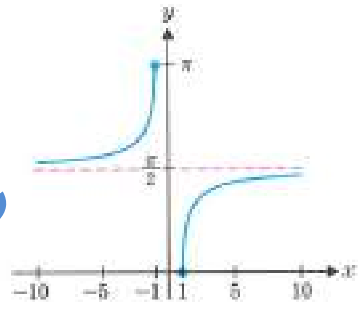


الشكل 1.49

$y = \sec x$ on $[0, \pi]$

$y = \sec^{-1} x$ إذا وفقط إذا كان $\sec y = x$ و $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

يوضح الشكل 1.50 التمثيل البياني لـ $\sec^{-1} x$



الشكل 1.50

$y = \sec^{-1} x$

مثال 3.8 إيجاد قيمة معكوس القاطع

أوجد قيمة $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.

الحل يجب أن نبحث عن الزاوية θ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ والتي تكون عندها $\sec\theta = -\sqrt{2}$. لاحظ أولاً أنه إذا $\sec\theta = -\sqrt{2}$، عندها $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. بما أن $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ تقع في الفترة $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ فيكون $\sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$ ■

لا تشتمل الآلات الحاسبة عادة على دوال $\sec x$ أو $\sec^{-1} x$ في هذه الحالة، يجب عليك تحويل قيمة القاطع المطلوبة لتصبح قيمة قاطع الجيب ونستخدم معكوس قاطع الجيب، كما فعلنا في المثال 3.8.

سنلخص المجال والمدى لكل واحدة من الدوال المثلثية المعكوسة الرئيسية الثلاث في الهامش.

ملاحظة 3.5

يمكننا وبطريقة مماثلة تحديد معكوسات $\cot x$ و $\csc x$، بسبب ندرة استخدام هذه الدوال، فسنحذفها هنا وندرسها في التدريبات.

في العديد من التطبيقات، نكون بحاجة لحساب طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية باستخدام طول ضلع آخر وزاوية **حادة** (أي زاوية قياسها بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ راديان). يمكننا أن نفعل هذا بسهولة إلى حد ما، كما في المثال 3.9.

مثال 3.9 إيجاد ارتفاع برج

يقف شخص على بعد 100 m من قاعدة برج ويكون قياس الزاوية ممتده من الأرض إلى قمة البرج 60° (انظر الشكل 1.51). (a) أوجد ارتفاع البرج. (b) ما قياس الزاوية إذا كان الشخص يبعد 200 m عن القاعدة؟

الحل لحل الجزء (a)، نحول 60° أولاً لتصبح بالراديان،

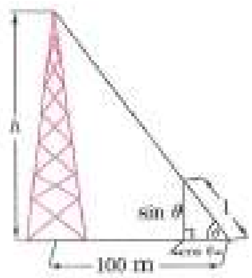
$$60° = 60\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radians}$$

نعلم أن قاعدة المثلث في الشكل 1.51 تساوي 100 m يجب علينا الآن حساب ارتفاع البرج h باستخدام المثلثات المتشابهة الموضحة في الشكل 1.51. نجد

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{h}{100}$$

إذًا فارتفاع البرج

$$h = 100\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 100\tan\theta = 100\tan\frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3} \approx 173 \text{ m}$$



الشكل 1.51

ارتفاع برج

من أجل الجزء (b)، تعطينا المثلثات المتشابهة في الشكل 1.51

$$\tan\theta = \frac{h}{200} = \frac{100\sqrt{3}}{200} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$، يكون

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.7137 \text{ rad}$$ (حوالي 41 درجة) ■

في المثال 3.10، نقوم بتبسيط التعابير التي تشمل كلًا من الدوال المثلثية والدوال المثلثية المعكوسة.

مثال 3.10 تبسيط التعابير التي تحتوي على دوال مثلثية معكوسة

بسِّط $\sin(\cos^{-1}x)$ (a) و $\tan(\cos^{-1}x)$ (b)

الحل لا تبحث عن صيغة غامضة لمساعدتك. فكر في البداية في $\cos^{-1}x$ زاوية أسميها θ تكون عندها $x = \cos\theta$. أولًا، عُد بعين الاعتبار الحالة التي تكون عندها $x > 0$. بالنظر إلى الشكل 1.52، رسمنا مثلثًا قائم الزاوية وتره 1 وزاوية مجاورة θ. إذًا، ومن تعريف sine و cosine، نعرف أن قاعدة المثلث $\cos\theta = x$ والارتفاع $\sin\theta$. وبحسب نظرية فيثاغورس

$$\sin(\cos^{-1}x) = \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$$

انتظروا لم ننته بعد من الجزء (a). يوضح الشكل 1.52 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. لكن وبحسب التعريف فإن $\theta = \cos^{-1}x$ يمكن أن تتراوح بين 0 وحتى π. هل تتغير إجابتنا إذا كانت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$؟ لنتأكد من أنها لا تتغير. لاحظ أنه إذا كانت $0 \le \theta \le \pi$، تكون $\sin\theta \ge 0$ وبحسب متطابقة فيثاغورس $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ نجد أن

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

بما أن $\sin\theta \ge 0$، يجب أن يكون

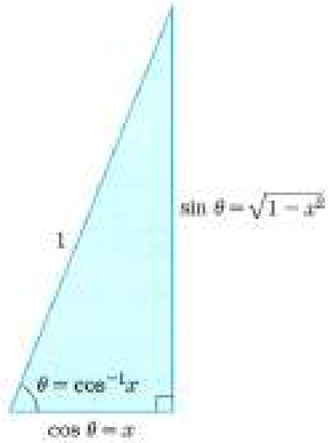
$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$$

لكل قيم x

من أجل الجزء (b)، يمكنك أن ترى من الشكل 1.52 أن

$$\tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

لاحظ بأن هذه المتطابقة الأخيرة صحيحة، سواء كانت $x = \cos\theta$ موجبة أو سالبة. ■



الشكل 1.52

$\theta = \cos^{-1}x$

التمارين 1.3

تمارين كتابة

1. يشكّل كثير من الطلاب استخدام الدرجات لقياس الزوايا ولا يفهمون سبب تعلمهم القياس بالراديان. كما نوقش في النص، يقيس الراديان المسافة مباشرة على طول دائرة الوحدة، وتمثل المسافة جانبًا مهمًا في العديد من التطبيقات. بالإضافة إلى ذلك، سنرى لاحقًا أن الكثير من قوانين حساب التفاضل والتكامل تكون أبسط بصيغة الراديان منها بالدرجة. بصرف النظر عن الاعتياد، ناقش كل مزايا الدرجة عن الراديان بالموازنة. أيهما أفضل؟

2. يمثل طالب $f(x) = \cos x$ بيانيًا على حاسبة بيانية ويحصل على ما يبدو أنه خط مستقيم عند الارتفاع $y = 1$ بدلًا من منحنى الـ cosine المعتاد. وبعد التحقق، تكتشف أن الحاسبة تبين نافذة التمثيل البياني $-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10$ وأنها في وضع الدرجات. اشرح الخطأ الذي حدث وطريقة تصحيحه.

3. إن الدوال المعكوسة ضرورية من أجل حل المعادلات. إن المدى المقيد الذي كان علينا أن نستخدمه لتعريف معكوسات الدوال المثلثية يقيد أيضًا فائدتها في حل المعادلات. اشرح طريقة استخدام $\sin^{-1}x$ لإيجاد كل حلول المعادلة $\sin u = x$

4. ناقش طريقة حساب $\csc^{-1} x$، $\sec^{-1} x$ و $\cot^{-1} x$ على حاسبة تتضمن دوال من أجل $\cos^{-1} x$، $\sin^{-1} x$ و $\tan^{-1} x$ فقط.

5. في المثال 3.3، $f(x) = 4\cos 3x$ لها دورة $2\pi/3$ و $g(x) = 2\sin(x/3)$ لها دورة 6π. اشرح لم يكون للمجموع $h(x) = 4\cos 3x + 2\sin(x/3)$ دورة 6π.

6. أعط مدى لـ $\sec^{-1} x$ يكون مختلفًا عن ذلك المعطى في النص. أيّ من قيم x ستجعل قيمة $\sec^{-1} x$ تتغير؟ باستخدام المناقشة حول الحاسبة في التمرين 4، أعط سببًا واحدًا لاختيارك هذا المدى.

في التمرينين 1 و 2، حول القياس المعطى بالراديان إلى درجات.

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$
2. (a) $\frac{3\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{7}$ (c) 2 (d) 3

في التمرينين 3 و 4، حول القياس المعطى بالدرجات إلى راديان.

3. (a) 180° (b) 270° (c) 120° (d) 30°
4. (a) 40° (b) 80° (c) 250° (d) 390°

في التمرينات من 5 إلى 14، أوجد كافة حلول المعادلة المعطاة.

5. $2\cos x - 1 = 0$
6. $2\sin x + 1 = 0$
7. $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$
8. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$
9. $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$
10. $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$
11. $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$
12. $\sin 2x - \cos x = 0$
13. $\cos^2 x + \cos x = 0$
14. $\sin^2 x - \sin x = 0$

في التمرينات من 15 إلى 24، ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة.

15. $f(x) = \sin 2x$
16. $f(x) = \cos 3x$
17. $f(x) = \tan 2x$
18. $f(x) = \sec 3x$
19. $f(x) = 3\cos(x - \pi/2)$
20. $f(x) = 4\cos(x + \pi)$
21. $f(x) = \sin 2x - 2\cos 2x$
22. $f(x) = \cos 3x - \sin 3x$
23. $f(x) = \sin x \sin 12x$
24. $f(x) = \sin x \cos 12x$

في التمرينات من 25 إلى 32، حدد السعة والدورة والتردد.

25. $f(x) = 3\sin 2x$
26. $f(x) = 2\cos 3x$
27. $f(x) = 5\cos 3x$
28. $f(x) = 3\sin 5x$
29. $f(x) = 3\cos(2x - \pi/2)$
30. $f(x) = 4\sin(3x + \pi)$
31. $f(x) = -4\sin x$
32. $f(x) = -2\cos 3x$

في التمرينات من 33 إلى 36، أثبت صحة المتطابقة المثلثية المعطاة.

33. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
34. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
35. (a) $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ (b) $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$
36. (a) $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ (b) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

في التمرينات من 37 إلى 46، أوجد قيمة الدالة المعكوسة عبر رسم دائرة وحدة وتحديد الزاوية الصحيحة وإيجاد قيمة الزوج المرتب على الدائرة.

37. $\cos^{-1} 0$
38. $\tan^{-1} 0$
39. $\sin^{-1}(-1)$
40. $\cos^{-1}(1)$
41. $\sec^{-1} 1$
42. $\tan^{-1}(-1)$
43. $\sec^{-1} 2$
44. $\csc^{-1} 2$
45. $\cot^{-1} 1$
46. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

1. برهن أنه لثابت ما β،

$$4\cos x - 3\sin x = 5\cos(x + \beta)$$

ثم، أوجد تقديرًا لقيمة β.

2. برهن أنه لثابت ما β،

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x + \beta)$$

ثم، أوجد تقديرًا لقيمة β.

في التمرينات من 49 إلى 52، حدد ما إذا كانت الدالة دورية. وإذا كانت دورية، أوجد الدورة (الأساسية) الأصغر.

49. $f(x) = \cos 2x + 3\sin \pi x$
50. $f(x) = \sin x - \cos\sqrt{2}x$
51. $f(x) = \sin 2x - \cos 5x$
52. $f(x) = \cos 3x - \sin 7x$

في التمرينات من 53 إلى 56، استخدم مدى θ لتحديد قيمة الدالة المشار إليها.

53. $\sin\theta = \frac{1}{3}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$؛ أوجد $\cos\theta$.
54. $\cos\theta = \frac{4}{5}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$؛ أوجد $\sin\theta$.
55. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$؛ أوجد $\cos\theta$.
56. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$؛ أوجد $\tan\theta$.

في التمرينات من 57 إلى 64، استخدم مثلثًا لتحويل كل تعبير إلى أبسط صورة. وحيثما أمكن، اذكر مدى الذي ينطبق عليه التبسيط.

57. $\cos(\sin^{-1} x)$
58. $\cos(\tan^{-1} x)$
59. $\tan(\sec^{-1} x)$
60. $\cot(\cos^{-1} x)$
61. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$
62. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$
63. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$
64. $\csc\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$

في التمرينات من 65 إلى 68، استخدم حاسبة التمثيل البياني أو الحاسوب لتحديد عدد حلول كل معادلة، وتقدير الحلول عدديًا (x مقدرة بالراديان).

65. $2\cos x = 2 - x$

66. $3\sin x = x$

67. $\cos x = x^2 - 2$

68. $\sin x = x^2$

التطبيقات

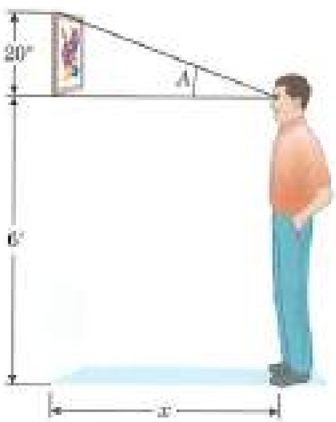
69. يقيس شخص يجلس على بعد ميلين من موقع إطلاق صاروخ زاوية قياسها $20°$ درجة فوق الموقع الحالي. فما مقدار ارتفاع الصاروخ؟

70. شجرة طولها 6ft على بعد 4ft من قاعدة عمود إنارة وتصنع ظلًا طوله قدمان. فما ارتفاع عمود الإنارة؟

71. يقف مسّاح على بعد 80ft قاعدة مبنى حكومي ويقيس من مكانه زاوية قياسها $50°$ درجة إلى قمة البرج . يكتشف المسّاح أن مركز البرج يقع على مسافة 20ft داخل الجزء الأمامي للهيكل. أوجد المسافة من الأرض إلى قمة البرج.

72. افترض أنّ المسّاح في التمرين 71 قدّر أن مركز البرج يقع بين $20'$ و $21'$ داخل الجزء الأمامي للهيكل. حدد عدد الأقدام الاضافية على ارتفاع البرج.

73. صورة معلقة في معرض فني لها إطار بارتفاع $20''$، ويرتفع الجزء السفلي من الإطار 6ft فوق سطح الأرض. يقف شخص ترتفع عيناه 6 أقدام عن سطح الأرض على مسافة x مترا من الجدار. لتكن A الزاوية المحصورة بين الشعاع من عين الشخص إلى الجزء السفلي من الإطار والشعاع من عين الشخص إلى الجزء العلوي من الإطار. اكتب A كدالة لـ x ومثّل $y = A(x)$ بيانيًا.



74. تهدف لعبة الجولف إلى ضرب كرة لتدخل في حفرة قطرها 4.5in افترض أنّ لاعب جولف يقف على بعد $x$ft من الحفرة ويحاول ضرب الكرة لتسقط فيها يتمثل التقريب الأول لهامش خطأ الضربة في قياس الزاوية A التي يشكلها الشعاع من الكرة إلى الحافة اليمنى للحفرة والشعاع من الكرة إلى الحافة اليسرى من الحفرة. أوجد A كدالة لـ x.

75. في دارة التيار المتردد، يعطى الجهد بالعلاقة $v(t) = v_p \sin(2\pi ft)$ حيث تمثل v_p ذروة الجهد وتمثل f التردد بالهرتز Hz. يقيس مقياس جهد كهربائي في الواقع متوسط الجهد (ويدعى جذر متوسط مربع القيمة) ويساوي $v_p/\sqrt{2}$. إذا كان للجهد سعة 170 ودورة $\pi/30$، فأوجد التردد وقم بقياس الجهد.

76. يقوم مشغّل أسطوانات قديم بتدوير الأسطوانات بسرعة $33\frac{1}{3}$ rpm (دورة في الدقيقة). ما دورة التدوير (مقدرة بالدقيقة)؟ ما دورة أسطوانة سرعتها 45-rpm؟

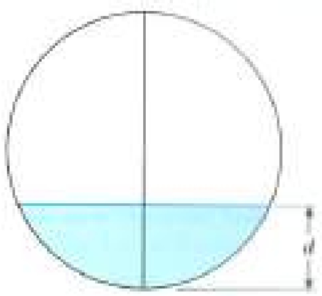
77. لنفترض أنّ مبيعات تذاكر إحدى شركات الطيران (بآلاف الدراهم) تعطى بالعلاقة $s(t) = 110 + 2t + 15\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$ حيث تقاس t بالشهور. ما الظاهرة من الحياة اليومية التي يمكن أن تتسبب بتقلّب مبيعات التذاكر متمذجة بدالة الـ sin؟ بناءً على إجابتك، ما الشهر الذي يقابل $t = 0$؟ بصرف النظر عن التقلبات الموسمية، ما مقدار زيادة مبيعات شركة الطيران سنويًا؟

78. يبدأ مدوزنو آلات البيانو عادة بضرب شوكة رنانة، ثم ضرب مفتاح البيانو المقابل لها. إذا كان لكل من الشوكة الرنانة ونغمة البيانو تكرار مقداره 8، يكون الصوت الناتج $\sin 8t + \sin 8t$ مثّل ذلك بيانيًا. إذا كان البيانو غير مدوزن قليلًا على تكرار 8.1، فالصوت الناتج $\sin 8t + \sin 8.1t$ مثّل ذلك بيانيًا واشرح طريقة تمكن مدوزن البيانو من سماع الفرق الضئيل في التكرار.

تمرينات استكشافية

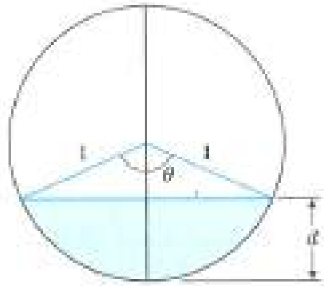
1. قام الفيزيائي فيليب موريسون في كتابه رنين الحقيقة (The Ring of Truth) بإجراء تجربة لتقدير محيط الأرض. في ولاية نبراسكا قاس الزاوية إلى نجمة ساطعة في السماء، ثم قاد 370 ميل جنوبًا إلى ولاية كانساس وقاس الزاوية الجديدة للنجمة. أظهرت بعض الحسابات الهندسية أنّ الفارق بين الزاويتين - والذي يساوي $5.02°$ درجة يساوي الزاوية من مركز الأرض إلى الموقعين في نبراسكا وكانساس. لو كانت الأرض كروية تمامًا (وهي ليست كذلك) وكان محيط جزء الدائرة الذي يبلغ قياسه $5.02°$ درجة يساوي 370 ميل قدّر محيط الكرة الأرضية. استندت هذه التجربة إلى تجربة مماثلة قام بها العالم اليوناني القديم إراتوستينس. عرف الإغريق القدماء والإسبان أيام كولومبس أنّ الأرض كانت كروية وكان الاختلاف في ما بينهم حول المحيط فقط. دافع كولومبس عن رقم يساوي حوالي نصف القيمة الفعلية، وذلك لأنه لم تكن هناك سفينة قادرة على البقاء في المياه فترة طويلة بما يكفي للإبحار طوال المسافة الحقيقية.

2. لدينا خزان نفط ذو مقطع عرضي دائري موضوع على جانبه، ويجري إدخال عصا في فتحة من الجزء العلوي لقياس عمق d الوقود في الخزان. وبناءً على هذا القياس، يتمثل الهدف في حساب النسبة المئوية للوقود المتبقي في الخزان.



لتبسيط العمليات الحسابية، نفترض أنّ الدائرة دائرة وحدة مركزها في $(0, 0)$ ورسم أنصاف الأقطار التي تمتد من نقطة الأصل إلى الجزء العلوي من الوقود.

تساوي مساحة الوقود في الأسفل مساحة جزء الدائرة المحصور بأنصاف الأقطار ناقص مساحة المثلث المشكل فوق الوقود في الشكل.



ابدأ بالمثلث، الذي تساوي مساحته نصف القاعدة مضروبة بالارتفاع. اشرح لم يساوي الارتفاع $1 - d$. اعثر على مثلث قائم الزاوية في الشكل (يوجد اثنان منهما) يكون له وتر قياسه 1 (نصف قطر الدائرة) وضلع رأسي طوله $1 - d$. يساوي طول الضلع الأفقي نصف قاعدة المثلث الأكبر. أوضح أن هذا يساوي $\sqrt{1-(1-d)^2}$. تساوي مساحة جزء الدائرة $\pi\theta/2\pi = \theta/2$، حيث θ هي الزاوية في الجزء العلوي من المثلث. أوجد هذه الزاوية كدالة لـ d. (إرشاد: ارجع إلى المثلث قائم الزاوية المستخدم أعلاه ذو الزاوية العليا $\theta/2$.) ثم أوجد المساحة المملوءة بالوقود واقسم على π لإيجاد جزء الخزان المملوء بالوقود.

3. يمكن أن تكون رسومات الحاسوب مضللة. ينجح هذا التمرين بأفضل شكل باستخدام التمثيل البياني "المتقطع" أنماط القراءة غير متصلة). مثّل $y = \sin x^2$ مستخدمًا نافذة تمثيل بياني يمثّل كل بيكسل فيها خطوة بمقدار 0.1 بالاتجاه x أو y. يجب أن تحصل على الانطباع بأن موجه تتذبذب بسرعة متزايدة وأنت تتحرك إلى اليسار واليمين. الآن، غيّر نافذة التمثيل البياني بحيث يصبح منتصف الشاشة الأصلية (في الغالب $x = 0$) في أقصى يسار الشاشة الجديدة. من المرجح أن ترى ما يبدو أنه خليط عشوائي من النقاط. تابع تغيير التمثيل البياني بزيادة قيم x. صف الأنماط أو غياب الأنماط الذي تراه. من المفترض أن تجد نمطًا يبدو وكأنه منحنيان من النقاط عبر أعلى وأسفل الشاشة، ونمطًا آخر يشبه الموجه الجيبية الأصلية. لكل نمط تجده، اختر النقاط المجاورة التي لها إحداثيات a و b. ثم غيّر التمثيل البياني بحيث تصبح $a \le x \le b$ ثم أوجد الجزء المفقود من التمثيل البياني. تذكّر أنه سواء كانت النقاط متصلة أم لا. فإن تمثيلات الحاسوب البيانية تهمل جزءًا من التمثيل. وتكمن مهمتك في تحديد ما إذا كان الجزء المتروك مهمًا أم لا.

الدرس

1-4 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

تتكاثر بعض أنواع البكتيريا بسرعة كبيرة. ويحتمل أنك قد اكتشفت ذلك إذا سبق لك أن أصبت بالتهاب في جرح أو في الحلق. في الظروف المناسبة، ستتضاعف عدد البكتيريا في بعض المواقع خلال أقل من ساعة. في هذا القسم، سنناقش بعض الدوال التي يمكن استخدامها لنمذجة مثل هذا النمو السريع.

لنفترض أن هناك في البداية 100 بكتيريا في موقع معين ويتضاعف عددها كل ساعة. استخدم دالة العدد $P(t)$ ، حيث تمثّل t الزمن (بالساعات) وشكّل الساعة عند الوقت $t = 0$. بما أنّ العدد المبدئي يساوي 100، يكون $P(0) = 100$، وبعد ساعة واحدة، تضاعف العدد إلى 200، بحيث يصبح $P(1) = 200$. وبعد ساعة أخرى، سيتضاعف العدد مرة أخرى إلى 400، ليصبح $P(2) = 400$، وهكذا.

لحساب عدد البكتيريا بعد 10 ساعات، يمكن أن تقوم بحساب العدد بعد 4 ساعات و5 ساعات وهكذا . أو يمكنك استخدام الاختصار التالي. لإيجاد $P(1)$، ضاعف العدد الأولي، بحيث تكون $P(1) = 2 \cdot 100$. لإيجاد $P(2)$، ضاعف العدد الأولي عند الزمن $t = 1$ بحيث تكون $P(2) = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 2^2 \cdot 100$. وبالمثل، $P(3) = 2^3 \cdot 100$. يؤدي بنا هذا النمط إلى

$$P(10) = 2^{10} \cdot 100 = 102{,}400.$$

لاحظ أنه يمكن نمذجة العدد بواسطة الدالة

$$P(t) = 2^t \cdot 100.$$

ندعو $P(t)$ دالة أسية لأن المتغير t أس. هناك سؤال مهم هنا، ما مجال هذه الدالة؟ حتى الآن، انحصر استخدامنا بقيم الأعداد الصحيحة، t ولكن ما قيم t الأخرى التي تجعل $P(t)$ ذات معنى؟ من المؤكد أنّ الأسس النسبية ذات معنى، كما هو الحال مع، $P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100$ حيث $2^{1/2} = \sqrt{2}$ يخبرنا هذا بأن عدد البكتيريا في الموقع بعد نصف ساعة يساوي تقريبًا

$$P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100 = \sqrt{2} \cdot 100 \approx 141.$$

من السهل تفسير الأسس الكسرية كجذور. فعلى سبيل المثال،

$$x^{1/2} = \sqrt{x},$$
$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x},$$
$$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2,$$
$$x^{3.1} = x^{31/10} = \sqrt[10]{x^{31}}$$

وهكذا، لكن ماذا عن الأسس غير النسبية؟ من المؤكد أن تعريفها أكثر صعوبة، ولكنها تؤدي المطلوب منها بالضبط. على سبيل المثال، بما أن π بين 3.14 و 3.15، تقع 2^{π} بين $2^{3.14}$ و $2^{3.15}$ بهذه الطريقة. تُعرَّف 2^x لكل x غير نسبي من أجل ملء الفجوات في التمثيل البياني $y = 2^x$ لـ x غير نسبي. أي، إذا كانت x وكانت $a < x < b$ للأعداد النسبية a و b، فإنّ $2^a < 2^x < 2^b$

إذا أردت لسبب من الأسباب إيجاد عدد البكتيريا بعد π ساعة، يمكنك استخدام آلتك الحاسبة أو كمبيوترك لإيجاد العدد التقريبي:

$$P(\pi) = 2^{\pi} \cdot 100 \approx 882$$

من أجل التسهيل، سنقوم الآن بتلخيص القواعد المعتادة للأسس.

قواعد الأسس (من أجل $x, y > 0$)

- لأية أعداد صحيحة m و n ($n \geq 2$)،

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

- لأية أعداد حقيقية p،

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p, \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p} \quad \text{و} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$$

- لأية أعداد حقيقية p و q،

$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

- لأية أعداد حقيقية p و q،

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q} \quad \text{و} \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$$

طوال دراستك لحساب التفاضل والتكامل، ستحتاج لأن تكون قادرًا على التحويل بسرعة في ما بين الصورة الأسيّة والصورة الكسرية أو الجذرية.

مثال 4.1 تحويل التعابير إلى الصورة الأسيّة

حوّل كل تعبير إلى الصيغة الأسيّة: (a) $3\sqrt{x^5}$، (b) $\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$، (c) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$ و (d) $(2^x \cdot 2^{3+x})^2$

الحل في الحالة (a)، كل ما عليك فعله هو ترك 3 وتحويل الأس:

$$3\sqrt{x^5} = 3x^{5/2}$$

في الحالة (b)، استخدم أسًا سالبًا لتكتب x في البسط.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 5x^{-1/3}$$

في الحالة (c)، افصل الثوابت من المتغيّرات أولًا ثم حوّل إلى أبسط صورة.

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^{1/2}} = \frac{3}{2}x^{2-1/2} = \frac{3}{2}x^{3/2}$$

في الحالة (d)، قم بالعمليات داخل الأقواس أولًا ثم قم بالتربيع.

$$(2^x \cdot 2^{3+x})^2 = (2^{x+3+x})^2 = (2^{2x+3})^2 = 2^{4x+6}$$ ■

بشكلٍ عام، لدينا التعريف التالي

التعريف 4.1

من أجل الثوابت $a \neq 0$ و $b > 0$ تسمى الدالة $f(x) = a \cdot b^x$ دالة أسيّة. هنا، يسمى b الأساس وتسمى x الأس.

يجب الحرص على التمييز بين الدوال الجبرية مثل $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^{2/3}$ والدوال الأسيّة. في الدوال الأسيّة مثل $h(x) = 2^x$، يكون المتغير هو الأس (وهو سبب التسمية) بدلاً من الأساس. لاحظ أيضاً أنّ مجال الدوال الأسيّة هو خط الأعداد الحقيقية بأكمله، $(-\infty, \infty)$، بينما يكون المدى هو الفترة المفتوحة $(0, \infty)$، بما أنّ $b^x > 0$ لكل قيم x.

بينما يمكن استخدام أي عدد حقيقي موجب كأساس لدالة أسيّة، توجد ثلاثة أسس هي الأكثر شيوعاً في الممارسة العملية. ينشأ الأساس 2 بطبيعة الحال عند تحليل العمليات التي تتضاعف على فترات منتظمة (مثل البكتيريا في بداية هذا القسم). إنّ نظام العد القياسي الذي نستخدم هو نظام عد العشرات (10)، ولذلك يشيع استخدام هذا الأساس. ولكن الأساس الأكثر فائدة إلى حدٍ بعيد هو العدد غير النسبي e. مثل π، إنّ العدد e يُستخدم في عدد مذهل من الحسابات المهمة. نعرّف e بالعلاقة

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \qquad (4.1)$$

لاحظ أنّ المعادلة (4.1) تحوي اثنين على الأقل من أوجه القصور المهمة. الأول، لم نبين إلى الآن ما يعنيه الرمز $\lim\limits_{n \to \infty}$. أما الثاني، فإنّ السبب الذي يجعل أي شخص يعرّف عدداً بمثل تلك الطريقة الغريبة غير واضح.

يكفي في الوقت الراهن القول إنّ المعادلة (4.1) تعني أنه يمكن تقريب e بحساب قيم $(1 + 1/n)^n$ لكل قيم n الكبيرة، وأنه كلما زادت قيمة n اقترب التقريب من القيمة الحقيقية لـ e. بالتحديد، إذا نظرت إلى متتالية الأعداد $(1 + 1/2)^2, (1 + 1/3)^3, (1 + 1/4)^4$ وهكذا دواليك، فإنها ستصبح بالتدريج أكثر قرباً إلى العدد غير النسبي e.

للحصول على فكرة عن قيمة e، احسب مجموعة من هذه الأعداد:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.5937\ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.7169\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10{,}000}\right)^{10{,}000} = 2.7181\ldots$$

وهكذا، يجب عليك حساب ما يكفي من هذه القيم لإقناع نفسك بأن الأعداد القليلة الأولى من التمثيل العشري لـ e ($e \approx 2.718281828459\ldots$) صحيحة.

مثال 4.2 حساب القيم الأسيّة

قرّب e^4 و $e^{-1/5}$ و e^0.

الحل باستخدام الآلة الحاسبة، نجد أن

$$e^4 = e \cdot e \cdot e \cdot e \approx 54.598$$

من القواعد المعتادة للأسس،

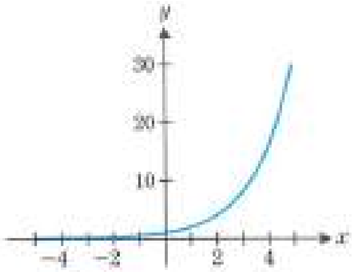
$$e^{-1/5} = \frac{1}{e^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 0.81873$$

(على الآلة الحاسبة، من الملائم استبدال $-1/5$ بـ -0.2). أخيراً، $e^0 = 1$ ■

مثال 4.3 رسم التمثيلات البيانية الأسيّة

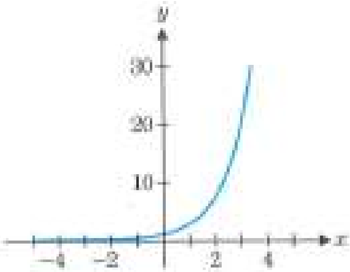
ارسم التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة $y = 2^x$، $y = e^x$، $y = e^{2x}$، $y = e^{x/2}$، $y = (1/2)^x$ و $y = e^{-x}$.

الحل باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب، يجب أن تحصل على تمثيلات بيانية مماثلة لما يلي:



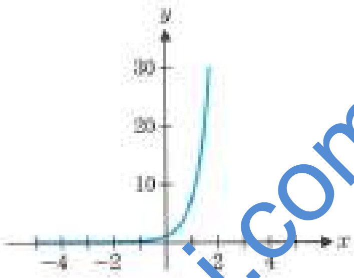
الشكل 1.53a

$y = 2^x$



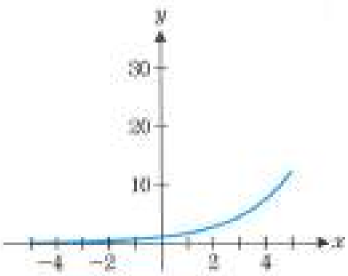
الشكل 1.53b

$y = e^x$



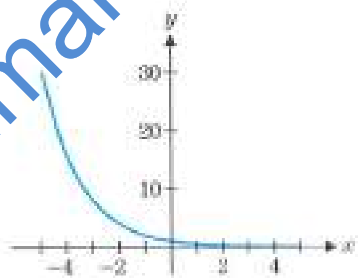
الشكل 1.54a

$y = e^{2x}$



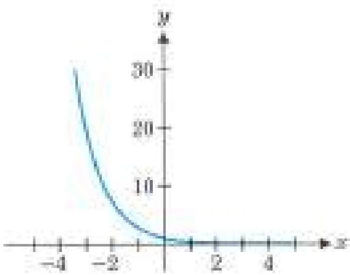
الشكل 1.54b

$y = e^{x/2}$



الشكل 1.55a

$y = (1/2)^x$



الشكل 1.55b

$y = e^{-x}$

لاحظ أن كلاً من التمثيلات البيانية في الأشكال 1.53a و1.53b و1.54a و1.54b تبدأ قريبة جداً من المحور x (عند القراءة من اليسار إلى اليمين)، وتمرّ من النقطة $(0, 1)$ ثم ترتفع ارتفاعاً حاداً. وهذا صحيح بالنسبة لكل الدوال الأسيّة التي فيها الأساس أكبر من 1 ومعامل إيجابي في الأس. لاحظ أنه كلما ازداد الأساس $(e > 2)$ أو كلما ازداد المعامل في الأس $(2 > 1 > 1/2)$ ازدادت سرعة ارتفاع التمثيل البياني إلى اليمين (وانخفاضه إلى اليسار). لاحظ أنّ التمثيلات البيانية في الشكلين 1.55a و1.55b تمثّل الصورة المعكوسة على المحور y للشكلين 1.53a و1.53b، على الترتيب. ترتفع التمثيلات البيانية عندما تتحرك باتجاه اليسار وتنخفض نحو المحور x عندما تتحرك باتجاه اليمين. تجدر الإشارة إلى أنه وفق قواعد الأسس، $(1/2)^x = 2^{-x}$ و $(1/e)^x = e^{-x}$. ■

في الأشكال من 1.53 إلى 1.55، كل دالة أسيّة تمثّل دالة واحد لواحد، مما يحتّم أن لها دالة عكسية. تعرّف الدوال اللوغاريتمية بأنها معكوسات الدوال الأسيّة.

التعريف 4.2

لأيّ عدد موجب $b \neq 1$، تُعرّف الدالة اللوغاريتمية التي أساسها b، وتكتب $\log_b x$، بالعلاقة

$$y = \log_b x \text{ إذا وفقط إذا كان } x = b^y$$

أي أنّ لوغاريتم $\log_b x$ يعطي الأس الذي يجب رفع الأساس b إليه للحصول على العدد المعطى x. على سبيل المثال،

$$\log_{10} 10 = 1 \quad (\text{since } 10^1 = 10),$$
$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\text{since } 10^2 = 100),$$
$$\log_{10} 1000 = 3 \quad (\text{since } 10^3 = 1000)$$

وهكذا، إنّ قيمة $\log_{10} 45$ أقل وضوحًا من القيم الثلاث السابقة، ولكن الفكرة نفسها، أنت بحاجة للعثور على العدد y بحيث تكون $10^y = 45$. الجواب يقع بين 1 و 2. ولكن لتكون أكثر دقة، ستحتاج إلى استخدام التجربة والخطأ. ستحصل على $\log_{10} 45 \approx 1.6532$.

لاحظ من التعريف 4.2 أنه ومن أجل أي أساس $b > 0$ $(b \neq 1)$ إذا كان $y = \log_b x$ فإن $x = b^y > 0$ أي أنّ مجال $f(x) = \log_b x$ هو الفترة $(0, \infty)$ وبالمثل، فمدى f هو مستقيم الأعداد الحقيقية بأكمله، $(-\infty, \infty)$.

كما هو الحال مع الدوال الأسيّة، يتوضّح أن قيم الأساس الأكثر فائدة هي 2 و 10 و e. نختصر $\log_{10} x$ عادةً لتصبح $\log x$. وبنفس الطريقة، نختصر $\log_e x$ عادة لتصبح $\ln x$ (اختصار لمصطلح لوغاريتم طبيعي).

مثال 4.4 إيجاد قيم اللوغاريتمات

من دون استخدام الآلة الحاسبة، حدّد $\log(1/10)$، $\log(0.001)$، $\ln e$ و $\ln e^3$.

الحل بما أنّ $1/10 = 10^{-1}$، $\log(1/10) = -1$. بالمثل، بما أنّ $0.001 = 10^{-3}$، نجد أنّ $\log(0.001) = -3$. بما أنّ $\ln e = \log_e e^1$، $\ln e = 1$. وبالمثل، $\ln e^3 = 3$. ■

نود أن نؤكد على العلاقة العكسية التي يحددها التعريف 4.2. ونقصد بذلك أنّ b^x و $\log_b x$ دوال متعاكسة لكل $b > 0$ $(b \neq 1)$.

بالتحديد، من أجل الأساس e، لدينا

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ لكل } x \quad \text{و} \quad \ln(e^x) = x \text{ لكل } x} \qquad (4.2)$$

نوضّح هذا على النحو التالي. فلتكن

$$y = \ln x = \log_e x$$

بحسب التعريف 4.2، نجد أنّ

$$x = e^y = e^{\ln x}$$

يمكن أن نستخدم هذه العلاقة بين اللوغاريتمات الطبيعية والأسس لحل المعادلات التي تحتوي على اللوغاريتمات والأسس، كما هو الحال في المثالين 4.5 و 4.6.

مثال 4.5 حل معادلة لوغاريتمية

حل المعادلة $\ln(x + 5) = 3$ لكل x.

الحل بأخذ الأس لطرفي المعادلة وكتابة الأشياء بترتيب عكسي (من أجل السهولة)، نجد أنّ

$$e^3 = e^{\ln(x+5)} = x + 5$$

من (4.2). طرح 5 من كلا الطرفين يعطينا

$$e^3 - 5 = x \quad ■$$

مثال 4.6 حل معادلة أسيّة

حل المعادلة $e^{x+4} = 7$ لكل x.

الحل بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين وكتابة الأشياء بترتيب عكسي (من أجل التبسيط)، نجد من (4.2) أنّ

$$\ln 7 = \ln(e^{x+4}) = x + 4.$$

طرح 4 من كلا الطرفين يعطينا

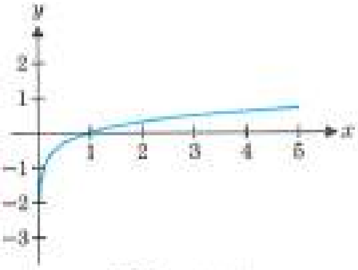
$$\ln 7 - 4 = x$$ ■

كما هو الحال دائمًا، توفّر التمثيلات البيانية ملخصات مرئية ممتازة لأهم خصائص الدالة.

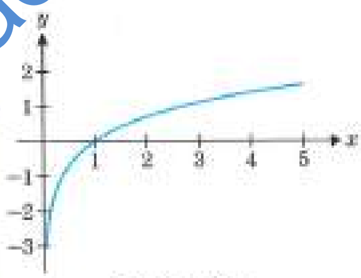
مثال 4.7 تمثيل اللوغاريتمات بيانيًا

ارسم التمثيلات البيانية لـ $y = \log x$ و $y = \ln x$. وناقش خصائص كل منها بإيجاز.

الحل من الآلة الحاسبة أو الكمبيوتر، ستحصل على التمثيلات البيانية المشابهة للموجودة في الأشكال 1.56a و1.56b. لاحظ أنه يجب أن يكون لكلا التمثيلين البيانيين خط تقارب عند $x = 0$ (لماذا؟). عبر المحور x عند $x = 1$ وزيادة تدريجية جدًا بزيادة x. وليس للتمثيلين البيانيين أي نقاط على يسار المحور y، لأن $\log x$ و $\ln x$ محددان فقط لـ $x > 0$. إنّ التمثيلين البيانيين متشابهان جدًا، بالرغم من عدم تطابقهما. ■



الشكل 1.56a
$y = \log x$



الشكل 1.56b
$y = \ln x$

تتضمن النظرية 4.1 ملخصًا للخصائص الممثلة بيانيًا.

نظرية 4.1

لأي أس موجب $b \neq 1$

(i) $\log_b x$ يُحدد فقط لـ $x > 0$.

(ii) $\log_b 1 = 0$

(iii) إذا كانت $b > 1$ فإن $\log_b x < 0$ لكل $0 < x < 1$ و $\log_b x > 0$ لكل $x > 1$.

البرهان

(i) لاحظ أنه بما أنّ $b > 0$، تكون $b^y > 0$ لأي y. ما يعني أنّه إذا كان $\log_b x = y$، فإن $x = b^y > 0$.

(ii) وبما أنّ $b^0 = 1$ لأي عدد $b \neq 0$، $\log_b 1 = 0$ (أي الأس الذي قمت برفع الأساس b إليه للحصول على العدد 1 هو 0).

(iii) سنُبرهن ذلك كتمرين. ■

تشترك كل اللوغاريتمات في مجموعة الخصائص المحدّدة الواردة في النظرية 4.2.

نظرية 4.2

لأي أساس موجب $b \neq 1$ وأي أعداد موجبة x و y، يكون،

(i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

(ii) $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$

(iii) $\log_b(x^y) = y \log_b x$

كما هو الحال مع معظم القواعد الجبرية، فإن كل خاصية من هذه الخصائص يمكنها تبسيط الحسابات بشكل كبير عند تطبيقها.

مثال 4.8 تبسيط التعابير اللوغاريتمية

اكتب كلًّا مما يلي في صورة لوغاريتم منفرد: (a) $\log_2 27^x - \log_2 3^x$ و (b) $\ln 8 - 3\ln(1/2)$.

الحل أولًا، لاحظ أنه يوجد أكثر من ترتيب يمكن العمل به لحل كل مسألة. بالنسبة إلى الجزء (a)، لدينا $27 = 3^3$، وكذلك، $27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$. ذلك يعطينا

$$\log_2 27^x - \log_2 3^x = \log_2 3^{3x} - \log_2 3^x$$
$$= 3x\log_2 3 - x\log_2 3 = 2x\log_2 3 = \log_2 3^{2x}$$

بالنسبة للجزء (b)، لاحظ أنّ $8 = 2^3$ و $1/2 = 2^{-1}$. إذن،

$$\ln 8 - 3\ln(1/2) = 3\ln 2 - 3(-\ln 2)$$
$$= 3\ln 2 + 3\ln 2 = 6\ln 2 = \ln 2^6 = \ln 64$$

في بعض الحالات، يكون من المفيد استخدام قواعد اللوغاريتمات لتبسيط تعبير محدد، كما في المثال 4.9.

مثال 4.9 بسط التعبير اللوغاريتمي

استخدم قواعد اللوغاريتمات لتبسيط التعبير $\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right)$.

الحل من النظرية 4.2، لدينا

$$\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right) = \ln(x^3y^4) - \ln(z^5) = \ln(x^3) + \ln(y^4) - \ln(z^5)$$
$$= 3\ln x + 4\ln y - 5\ln z$$

باستخدام قواعد الأسس واللوغاريتمات، يمكننا إعادة صياغة أي دالة أسيّة كدالة أسيّة لها الأساس e على النحو التالي. لأي أساس $a > 0$ لدينا

$$\boxed{a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}} \qquad (4.3)$$

ينتج ذلك من النظرية 4.2 (iii) ونجد أن $y = e^{\ln y}$ لكل $y > 0$.

مثال 4.10 إعادة صياغة الدالة الأسيّة كدالة أسيّة لها الأساس e

أعد صياغة الدوال الأسيّة 2^x، 5^x و $(2/5)^x$ كدوال أسيّة لها أساس e.

الحل من (4.3)، لدينا

$$2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\ln 2},$$
$$5^x = e^{\ln(5^x)} = e^{x\ln 5}$$

و

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{\ln[(2/5)^x]} = e^{x\ln(2/5)}$$

بما أنه يمكننا إعادة صياغة دالة أسيّة لها أساس موجب في ما يتعلق بدالة أسيّة لها الأساس e فإنه يمكننا إعادة صياغة أي لوغاريتم في ما يتعلق باللوغاريتمات الطبيعية، على النحو التالي. سنوضّح في ما بعد أنّ

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}\text{، إذا } b > 0\text{، } b \neq 1 \text{ و } x > 0} \qquad (4.4)$$

افترض أنّ $y = \log_b x$ إذن بالتعريف 4.2، يصبح لدينا $x = b^y$. عند بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي هذه المعادلة، نحصل بناء على النظرية 4.2 (iii) على

$$\ln x = \ln(b^y) = y\ln b$$

بقسمة كلا الطرفين على $\ln b$ (حيث $b \neq 1$، $\ln b \neq 0$) نحصل على

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

لتكون (4.4).

تُعتبر المعادلة (4.4) مفيدة في حساب اللوغاريتمات ذات الأساسات التي تختلف من e أو 10. وهذا ضروري لأن الآلة الحاسبة الخاصة بك تحتوي، على الأرجح، على مفاتيح لـ $\ln x$ و $\log x$ فقط. ولتوضيح هذه الفكرة نناقش المثال 4.11.

مثال 4.11 تقريب قيمة اللوغاريتمات

قم بتقريب قيمة $\log_7 12$

الحل من (4.4)، لدينا

$$\log_7 12 = \frac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1.2769894$$

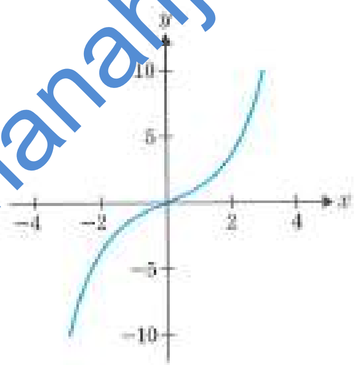
قوس جيت واي

الدوال الزائدية

يوجد تركيبان خاصان من الدوال الأسية، يُطلق عليهما دوال الجيب الزائدي (Hyperbolic Sine) وجيب التمام الزائدي (Hyperbolic Cosine). ولهذه الدوال تطبيقات هامة. على سبيل المثال، تم بناء قوس جيت واي في ميزوري على شكل تمثيل بياني لجيب تمام زائدي. (انظر الصورة الموجودة في الهامش). تُحدد دالة الجيب الزائدي [التي يرمز لها بـ $\sinh(x)$] ودالة جيب التمام الزائدي [التي يُرمز لها بـ $\cosh(x)$] بالمعادلات

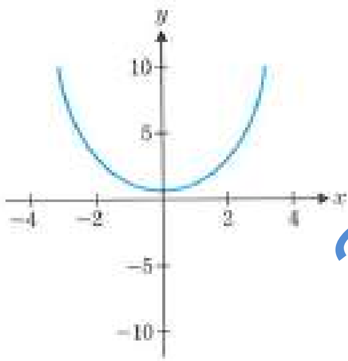
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ و } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

التمثيلات البيانية لتلك الدوال موضحة في الأشكال 1.57a و1.57b. غالبا ما يكون استخدام الدوال الزائدية (بما في ذلك دالة الظل الزائدي $\tanh x$، المحددة بالطريقة المعتادة) مريحًا عند حل المعادلات. سنكتفي الآن بالتحقق من العديد من الخصائص الأساسية التي تحققها الدوال الزائدية بالتوازي مع نظائرها المثلثية.



الشكل 1.57a

$y = \sinh x$



الشكل 1.57b

$y = \cosh x$

مثال 4.12 حساب قيم الدوال الزائدية

احسب $f(0)$، $f(1)$ و $f(-1)$. وحدد طريقة مقارنة $f(x)$ و $f(-x)$ لكل دالة: (a) $f(x) = \sinh x$ و (b) $f(x) = \cosh x$

الحل بالنسبة للجزء (a)، لدينا $\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$. لاحظ أن هذا يعني أنّ $\sinh 0 = \sin 0 = 0$. كذلك، لدينا $\sinh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1.18$، بينما $\sinh(-1) = \frac{e^{-1} - e^1}{2} \approx -1.18$. لاحظ أنّ $\sinh(-1) = -\sinh 1$. في الحقيقة، وبالنسبة لأي x،

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -\sinh x$$

[تنطبق القاعدة نفسها على دالة الجيب، $\sin(-x) = -\sin x$] بالنسبة للجزء (b). لدينا

$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$. لاحظ أنّ هذا يعني أنّ $\cosh 0 = \cos 0 = 1$. كذلك،

لدينا $\cosh 1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \approx 1.54$ بينما $\cosh(-1) = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \approx 1.54$. لاحظ أنّ

$\cosh(-1) = \cosh 1$. في الحقيقة، وبالنسبة لأي x

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

[تنطبق القاعدة نفسها على دالة الـ cosine، $\cos(-x) = \cos x$] ■

ملاءمة المنحنى للبيانات

أنت على دراية بفكرة أنّ نقطتين تحددان خطًا مستقيمًا. وكما نلاحظ في المثال 4.13، فإن النقطتين ستحددان أيضًا الدالة الأسيّة.

مثال 4.13 مطابقة البيانات لمنحنى الدالة الأسيّة

أوجد الدالة الأسيّة من الصورة $f(x) = ae^{bx}$ التي تمر بالنقطتين $(0, 5)$ و $(3, 9)$.

الحل يجب أن نجد الحل للحصول على a و b باستخدام خواص اللوغاريتمات والدوال الأسية. أولًا، إذا كان للتمثيل البياني أن يمرّ بالنقطة $(0, 5)$، فإن ذلك يعني

$$5 = f(0) = ae^{b \cdot 0} = a$$

لذلك $a = 5$ بعد ذلك، وإذا كان للتمثيل البياني أن يمرّ بالنقطة $(3, 9)$، يجب أن يكون لدينا

$$9 = f(3) = ae^{3b} = 5e^{3b}$$

لإيجاد الحل للحصول على b نقسم كلا طرفي المعادلة على 5 ونأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، ما يعطينا الناتج

$$\ln\left(\frac{9}{5}\right) = \ln e^{3b} = 3b$$

من (4.2). أخيرًا، تعطينا القسمة على 3 قيمة b.

$$b = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

بناءً عليه، $f(x) = 5e^{\frac{1}{3}\ln(9/5)x}$. ■

العام	عدد سكان
1790	3,929,214
1800	5,308,483
1810	7,239,881
1820	9,638,453
1830	12,866,020
1840	17,069,453
1850	23,191,876
1860	31,443,321

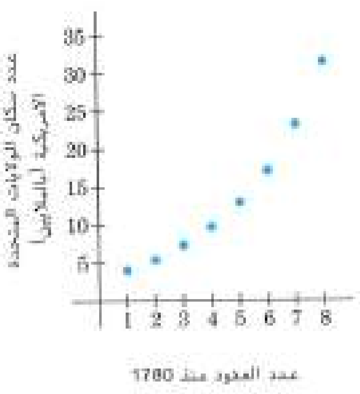
تأمل بيانات عدد سكان الولايات المتحدة منذ 1790 حتى 1860، الواردة في الجدول المرفق. يمكن الاطلاع على مخطط لنقاط البيانات في الشكل 1.58 (حيث يمثل المقياس الرأسي عدد السكان بالمليون). يوضح ذلك أنّ عدد السكان كان في زيادة، مع تضاعف الزيادات في كل عقد. إذا رسمت منحنى تخيليًا خلال هذه النقاط، من المحتمل أن تحصل على صورة لقطع مكافئ أو ربما النصف الأيمن لمكعب أو دالة أسيّة. وإليك السؤال: هل من الأفضل تمثيل هذه البيانات باستخدام الدالة التربيعية أم الدالة التكعيبية أم الدالة الأسيّة أم ماذا؟

يمكننا استخدام خصائص اللوغاريتمات من النظرية 4.2 للمساعدة في تحديد ما إذا كان من الأفضل تمثيل مجموعة محددة من البيانات بواسطة دالة كثيرة الحدود أم دالة أسيّة. على النحو التالي، افترض أنّ البيانات تأتي بالفعل من دالة أسيّة. لتكن، $y = ae^{bx}$ (أي أنّ البيانات تقع على التمثيل البياني لهذه الدالة الأسيّة). إذن،

$$\ln y = \ln(ae^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx$$

إذا رسمت تمثيلًا بيانيًا جديدًا، حيث يوضّح المحور الأفقي قيم x ويوضّح المحور الرأسي قيم $\ln y$ فإن التمثيل البياني سيكون $\ln y = bx + c$ (حيث الثابت $c = \ln a$). من ناحية أخرى، افترض أنّ البيانات أتت بالفعل من دالة كثيرة الحدود. إذا كان $y = bx^n$ (لأي n)، فلاحظ أنّ

$$\ln y = \ln(bx^n) = \ln b + \ln x^n = \ln b + n \ln x$$



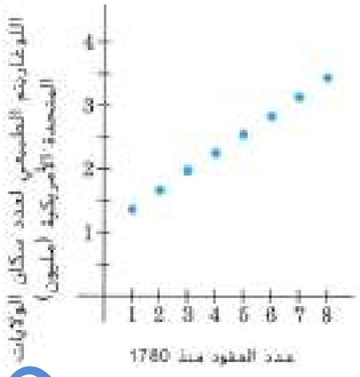
الشكل 1.58

في هذه الحالة، سيبدو التمثيل البياني للمحورين الأفقي والرأسي الموافق لـ x و $\ln y$ على التوالي مثل التمثيل البياني للوغاريتم $\ln y = n \ln x + c$ وهذه التمثيلات البيانية شبه اللوغاريتمية (أي التمثيلات البيانية لـ $\ln y$ مقابل x) تسمح لنا بتمييز التمثيل البياني للدالة الأسيّة من التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود، تصبح التمثيلات البيانية خطوطًا مستقيمة، بينما تصبح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود (من الدرجة $1 \geq$) منحنيات لوغاريتمية. وعادةً ما يستخدم العلماء والمهندسون التمثيلات البيانية شبه اللوغاريتمية لمساعدتهم في فهم الظواهر الفيزيائية ممثلة ببعض البيانات.

مثال 4.14 استخدام التمثيل البياني شبه اللوغاريتمي لتعريف نوع الدالة

حدد إذا ما كان عدد سكان الأمم المتحدة منذ 1790 حتى 1860 يتزايد كدالة أسيّة أم كثيرة الحدود.

الحل كما ذكر سالفًا، تكمن الخدعة في رسم تمثيل بياني شبه لوغاريتمي. أي أنه بدلًا من رسم مخطط لـ $(1, 3.9)$ بوصفها نقطة البيانات الأولى، ارسم مخططًا لـ $(1, \ln 3.9)$ وهكذا. يرد المخطط شبه اللوغاريتمي لمجموعة البيانات هذه في الشكل 1.59. بالرغم من أن النقاط ليست مستقيمة بالضبط (كيف تثبت ذلك؟)، إلا أنّ التمثيل البياني جدًا إلى الخط المستقيم يتقاطع مع محور $\ln y$ عند القيمة 1 وميله 0.3. تستنتج من ذلك أنه من الأنسب تمثيل عدد السكان بواسطة دالة أسيّة. وسيكون النموذج الأسي $y = P(t) = ae^{bt}$، حيث يمثّل t عدد العقود منذ 1780. وهنا، يكون b المنحنى ويكون $\ln a$ تقاطع $\ln y$ الخط في التمثيل البياني شبه اللوغاريتمي. أي أنّ، $b \approx 0.3$ و $\ln a \approx 1$ (لماذا؟). لذلك $a \approx e$. إذن، يتم تمثيل عدد السكان بواسطة $P(t) = e \cdot e^{0.3t}$ مليون. ■



الشكل 1.59

التمارين 1.4

تمارين الكتابة

1. بدءًا من خلية واحدة، تكون الإنسان بفضل 50 جيلًا من الانقسامات الخلوية. اشرح لماذا بعد انقسامات n توجد خلايا 2^n. خمّن عدد الخلايا الموجودة بعد 50 انقسامًا، ثم احسب 2^{50}. ناقش باختصار كيفية زيادة الدوال الأسيّة بسرعة.

2. اشرح سبب تشابه الرسوم البيانية لـ $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. قارن بين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ لـ $x = \frac{1}{2}$، $x = 1$، $x = 2$، $x = 3$ و $x = 4$. بشكل عام، أي الدوال أكبر لقيم x الكبيرة؟ لقيم x الصغيرة؟

4. قارن بين $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ لـ $x = -2$، $x = -\frac{1}{2}$، $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$. بشكل عام، أي الدوال أكبر لقيم x السالبة؟ لقيم x الموجبة؟

في التمرينات 1–6، حول كل تعبير أسي إلى صورة كسرية أو جذرية.

1. 2^{-3} 2. 4^{-1} 3. $3^{1/2}$
4. $6^{2/5}$ 5. $5^{1/3}$ 6. $4^{-2/3}$

في التمرينات 7–12، حول كل تعبير إلى صورة أسيّة.

7. $\frac{1}{x^2}$ 8. $\sqrt[3]{x^2}$ 9. $\frac{2}{x^3}$
10. $\frac{4}{x^2}$ 11. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 12. $\frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

في التمرينات 13–16، أوجد القيمة الصحيحة للتعبير الموضح دون استخدام آلة حاسبة.

13. $4^{3/2}$ 14. $8^{2/3}$ 15. $\frac{\sqrt{8}}{2^{1/2}}$ 16. $\frac{2}{(1/3)^2}$

في التمرينات 17–20، استخدم آلة حاسبة أو كمبيوتر لتقدير كل قيمة.

17. $2e^{-1/2}$ 18. $4e^{-2/3}$
19. $\frac{12}{e}$ 20. $\frac{14}{\sqrt{e}}$

في التمرينات 26–21، ارسم التمثيلات البيانية للدوال الموضّحة وقارن التمثيلات البيانية.

21. $f(x) = e^{2x}$ and $g(x) = e^{3x}$
22. $f(x) = 2e^{x/4}$ and $g(x) = 4e^{x/2}$
23. $f(x) = 3e^{-2x}$ and $g(x) = 2e^{-3x}$
24. $f(x) = e^{-x^2}$ and $g(x) = e^{-x^2/4}$
25. $f(x) = \ln 2x$ and $g(x) = \ln x^2$
26. $f(x) = e^{2\ln x}$ and $g(x) = x^2$

في التمرينات 36–27، قم بحل المعادلة الموضحة للحصول على x.

27. $e^{2x} = 2$
28. $e^{4x} = 3$
29. $e^x(x^2 - 1) = 0$
30. $xe^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$
31. $4\ln x = -8$
32. $x^2 \ln x - 9\ln x = 0$
33. $e^{2\ln x} = 4$
34. $\ln(e^{2x}) = 6$
35. $e^x = 1 + 6e^{-x}$
36. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2$

في التمرينات 37 و38، استخدم تعريف اللوغاريتم لتحديد القيمة.

37. (a) $\log_3 9$ (b) $\log_4 64$ (c) $\log_3 \frac{1}{27}$
38. (a) $\log_4 \frac{1}{16}$ (b) [illegible] (c) $\log_9 3$

في التمرينات 39 و 40، استخدم المعادلة (4.4) لتعريف القيمة.

39. (a) [illegible] 7 (b) $\log_4 60$ (c) $\log_3 \frac{1}{24}$
40. (a) $\log_4 \frac{1}{10}$ (b) $\log_4 3$ (c) $\log_9 8$

في التمرينات 46–41، أعد صياغة التعبير كلوغاريتم منفرد (واحد).

41. $\ln 3 - \ln 4$
42. $2\ln 4 - \ln 3$
43. $\frac{1}{2}\ln 4 - \ln 2$
44. $3\ln 2 - \ln \frac{1}{2}$
45. $\ln \frac{3}{4} + 4\ln 2$
46. $\ln 9 - 2\ln 3$

في التمرينات 50–47، أوجد دالة بالشكل $f(x) = ae^{bx}$ باستخدام قيم الدالة الموضحة.

47. $f(0) = 2, f(2) = 6$
48. $f(0) = 3, f(3) = 4$
49. $f(0) = 4, f(2) = 2$
50. $f(0) = 5, f(1) = 2$

في التمرينات 54–51، ارجع إلى الدوال الزائدية.

51. بيّن أن مدى الـ cosh هو $\cosh x \geq 1$ وأنّ مدى الـ sinh هو مجمل خط الأعداد.

52. بيّن أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ لكل x

53. أوجد كل حلول $\sinh(x^2 - 1) = 0$

54. أوجد كل حلول $\cosh(3x + 2) = 0$

التطبيقات

مطعم للوجبات السريعة يعطي لكل عميل تذكرة مباراة، ومع كل تذكرة، يكون لدى العميل فرصة 1 في الـ 10 للفوز بوجبة مجانية. إذا كنت ذهبت إلى المطعم 10 مرات، فقيم فرصك في الفوز بوجبة مجانية واحدة على الأقل. الاحتمال الدقيق هي $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$ احسب هذا العدد وقارنه بتخمينك.

56. في التمرين 55، إذا كان لديك 20 تذكرة بفرصة 1 في الـ 20 للفوز، فهل تتوقع زيادة أم انخفاض احتمال فوزك مرة واحدة على الأقل؟ احسب الاحتمال $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$ لتكتشف ذلك.

57. بشكل عام، إذا كان لديك n فرصة للفوز بـ 1 في الـ n فرصة في كل محاولة، فإن احتمال الفوز مرة واحدة على الأقل هي $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. بما أنّ n يزداد، فما هو العدد الذي يقترب منه هذا الاحتمال؟ (إرشاد. هناك سبب جيد لوجود هذا السؤال في هذا القسم!)

58. إذا كان $y = a \cdot x^m$، بيّن أنّ $\ln y = \ln a + m\ln x$. إذا كان $v = \ln y$ و $u = \ln x$ و $b = \ln a$، بيّن أنّ $v = mu + b$. اشرح السبب في أنّ التمثيل البياني لـ v كدالة لـ u سيكون خطًا مستقيمًا. يُطلق على هذا التمثيل البياني مخطط لوغاريتم-لوغاريتم لـ y و x.

59. للبيانات المعطاة، احسب $v = \ln y$ و $u = \ln x$، وارسم النقاط (u, v). أوجد الثوابت m و b بحيث $v = mu + b$ واستخدم نتائج التمرين 58 لإيجاد ثابت a بحيث $y = a \cdot x^m$.

x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
y	14.52	17.28	20.28	23.52	27.0	30.72

60. كرر التمرين 59 للبيانات المعطاة.

x	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
y	9.37	10.39	11.45	12.54	13.66	14.81

61. قم بإنشاء مخطط لوغاريتم– لوغاريتم (انظر التمرين 58) لبيانات سكان الولايات المتحدة في المثال 4.14. مقارنةً بالمخطط شبه اللوغاريتم للبيانات في الشكل 1.59، هل يبدو المخطط لوغاريتم– لوغاريتم خطيًا؟ بناءً على ذلك، هل من الأفضل تمثيل بيانات السكان بواسطة دالة أسيّة أم دالة كثيرة الحدود (ذات قوة جبرية)؟

62. قم بإنشاء مخطط شبه لوغاريتم للبيانات في التمرين 59، مقارنةً بمخطط لوغاريتم– لوغاريتم الذي أنشأته بالفعل، هل يبدو هذا المخطط خطيًا؟ بناءً على ذلك، هل من الأفضل تمثيل هذه البيانات بواسطة دالة أسيّة أم دالة ذات قوة جبرية؟

63. يحدد تركيز $[H^+]$ أيونات الهيدروجين الحرة في المحلول الكيميائي درجة حموضة pH المحلول، على النحو المحدد بـ $pH = -\log[H^+]$ أوجد $[H^+]$ إذا كان pH يساوي (a) 7 و(b) 8 و(c) 9. لكل زيادة في pH بمقدار 1، ما هو العامل الذي يغير $[H^+]$؟

64. تُعتبر العصارة المعدية حمضًا بـ pH يبلغ 2.5 تقريبًا. يُعتبر الدم قلويًا بـ pH يبلغ 7.5 تقريبًا. قارن بين تركيزات أيونات الهيدروجين في المادتين (انظر التمرين 63).

65. تُحدد قوة ريختر M لزلزال ما من حيث الطاقة E بالجول المتحررة بسبب الزلزال، باستخدام $\log_{10} E = 4.4 + 1.5M$ أوجد طاقة الزلزال بالقوى (a) 4 و (b) 5 و (c) 6. لكل زيادة في M بمقدار 1، ما هو العامل الذي يغيّر E ؟

66. يُحدد مستوى ديسبل للضوضاء من حيث شدة I الضوضاء، باستخدام $dB = 10 \log (I/I_0)$. هنا، $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ هي شدة الصوت المسموع بالكاد. احسب مستويات شدة الأصوات بقوة (a) $dB = 80$ و (b) $dB = 90$ و (c) $dB = 100$. لكل زيادة بمقدار 1 ديسبل، ما هو العامل الذي يغيّر I؟

67. يبلغ طول قوس 630 m ويبلغ عرضه 630 m. (يعتقد أغلب الناس أنه يبدو طوله أكبر من عرضه). نموذج واحد لمخطط القوس هو $y = 757.7 - 127.7 \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right)$ لـ $y \geq 0$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتقريب تقاطعات x و y وحدد إذا ما كانت القياسات الأفقية والرأسية للنموذج صحيحة أم لا.

68. لتمثيل مخطط قوس باستخدام قطع مكافئ، يمكنك البدء بـ $y = -c(x + 315)(x - 315)$ لثابت ما c. اشرح سبب إعطاء ذلك التقاطعات x الصحيحة. حدد الثابت c الذي يعطي y تقاطعًا قدره 630. ارسم cos المكافئ والزائدي في التمرين 67 على المحاور نفسها. هل التمثيلات البيانية متطابقة تقريبًا أم مختلفة جدًا؟

69. في البيانو القياسي، يحدث A أسفل C الأوسط موجة صوتية تكرارها 220Hz (دورة في الثانية). تكرار A الأعلى بمقدار الجواب 440Hz. بشكل عام، ينتج عن مضاعفة التكرار نفس نغمة الجواب الأعلى. أوجد الصيغة الأسيّة للتكرار f كدالة لعدد الجوابات x أعلى A الموجود أسفل C الأوسط.

70. توجد 12 نغمة في الجواب بالبيانو القياسي. C الأوسط عبارة عن 3 نغمات فوق A (انظر التمرين 69). إذا تم ضبط النغمات بالتساوي، فهذا يعني أن C الأوسط أعلى من A بربع جواب. استخدم $x = \frac{1}{4}$ في صيغتك من التمرين 69 لتقدير تردد C الأوسط.

تمرينات استكشافية

1. مثّل $y = x^2$ و $y = 2^x$ بيانيًا وقرب الحلين الموجبين للمعادلة $x^2 = 2^x$. مثّل $y = x^3$ و $y = 3^x$ بيانيًا، وقرب الحلين الموجبين للمعادلة $x^3 = 3^x$. اشرح لماذا $x = a$ ستكون دائمًا حلًا لـ $x^a = a^x$ و $a > 0$. ما هو المختلف بشأن دور $x = 2$ كحل لـ $x^2 = 2^x$ مقارنة بدور $x = 3$ كحل لـ $x^3 = 3^x$؟ لتحديد قيمة a التي يحدث عندها التغيير، قم بحل $x^a = a^x$ بيانيًا للحصول على $a = 2.1, 2.2, \ldots, 2.9$، ولاحظ أن $a = 2.7$ و $a = 2.8$ يعملان بشكل مختلف. استمر في تضييق فاصل التغيير عن طريق اختبار $a = 2.71, 2.72, \ldots, 2.79$. ثم خمن القيمة الدقيقة لـ a.

2. مثّل $y = \ln x$ بيانيًا وصف السلوك بالقرب من $x = 0$. ثم مثّل $y = x \ln x$ بيانيًا وصف السلوك بالقرب من $x = 0$. كرر ذلك لـ $y = x^2 \ln x$ و $y = x^{1/2} \ln x$ و $y = x^a \ln x$ لمجموعة مختلفة من الثوابت الموجبة a. لأن المعادلة -تزيد عن حدها- عند $x = 0$ فإننا نفترض أن $y = \ln x$ لها موضع تفرد عند $x = 0$ ويكون ترتيب موضع التفرد عند $x = 0$ لدالة ما $f(x)$ هو القيمة الأصغر لـ a بحيث لا يكون $y = x^a f(x)$ موضع تفرد عند $x = 0$. حدد ترتيب موضع التفرد عند $x = 0$ بالنسبة لـ (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ و (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و (c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. كلما ارتفع ترتيب موضع التفرد، كلما كان موضع التفرد «سيئًا». بناءً على عملك، ما مدى سوء موضع التفرد لـ $y = \ln x$ عند $x = 0$؟

الدرس 1-5 تحويلات الدوال

أنت الآن على علم بقائمة طويلة من الدوال، كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية والأسية واللوغاريتمية. من أحد أهم أهداف هذا المقرر فهم خصائص هذه الدوال بصورة أكمل. وستقوم، إلى حد كبير، ببناء فهمك عن طريق دراسة بعض الخصائص الهامة للدوال.

فنحن نتوسع في قائمة الدوال الخاصة بنا من خلال الجمع بينها. وسنبدأ بطريقة مباشرة بالتعريف 5.1.

التعريف 5.1

افترض أنّ f و g عبارة عن دالتين بمجالات D_1 و D_2، على التوالي. تُحدد الدوال $f+g$، $f-g$ و $f \cdot g$ عن طريق

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

لكل x في $D_1 \cap D_2$ (أي $x \in D_1$، و $x \in D_2$). تُحدد الدالة $\frac{f}{g}$ عن طريق

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

لكل x في $D_1 \cap D_2$ بحيث $g(x) \neq 0$.

في المثال 5.1، سندرس تركيبات مختلفة لعدة دوال بسيطة.

المثال 5.1 تركيب الدوال

إذا كانت $f(x) = x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ فحدد الدوال $f+g$ ، $3f-g$ و $\frac{f}{g}$ مع ذكر مجال كل منها.

الحل أولًا، لاحظ أن مجال f هو خط الأعداد ومجال g هو $x \geq 1$. الآن،

$$(f+g)(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$$

و

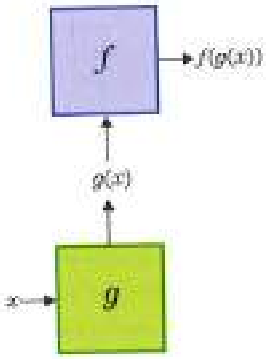
$$(3f-g)(x) = 3(x-3) - \sqrt{x-1} = 3x - 9 - \sqrt{x-1}$$

لاحظ أن مجال $(f+g)$ و $(3f-g)$ هو $\{x|x \geq 1\}$ و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}}$$

المجال هو $\{x|x > 1\}$، حيث أضفنا القيد $x \neq 1$ لتجنب القسمة على 0. ■

التعريف 5.1 والمثال 5.1 يبينان لنا كيفية عمل متسلسلة حسابية باستخدام الدوال. العمل على دوال لا تستجيب مباشرة إلى التسلسل الحسابي هو تركيب لدالتين.



$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

التعريف 5.2

تركيب الدوال f و g، المكتوب بالشكل $f \circ g$ ، عن طريق

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لكل x حيث x في مجال g و $g(x)$ في مجال f .

تركيب دالتين عبارة عن عملية من خطوتين، على النحو المشار إليه سالفًا في المخطط الهامشي. فانتبه لملاحظة ما يقوله هذا التعريف. لا سيما، لـ $f(g(x))$ التي يجب تعريفها، ستحتاج أولًا إلى تعريف $g(x)$، من ثم يجب أن تكون x في مجال g بعد ذلك، يجب تعريف f عند النقطة $g(x)$ لذلك يجب أن يكون العدد $g(x)$ في مجال f.

المثال 5.2 إيجاد تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$، فحدد الدوال $f \circ g$ و $g \circ f$ مع ذكر مجال كل منها.

الحل أولًا، لدينا

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2})$$
$$= (\sqrt{x-2})^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$$

من المغري كتابة أن مجال $f \circ g$ هو مجمل الخط الفعلي، ولكن انظر بمزيد من العناية. ولاحظ أنه بالنسبة لتكون x في مجال g، يجب أن يكون لدينا $x \geq 2$ إنّ مجال f هو مجمل خط الأعداد، من ثم فلا يضيف ذلك المزيد من القيود على مجال $(f \circ g)$، وبالرغم من أن التعبير النهائي $x - 1$ يحدد لكل x، إلا أنّ مجال $(f \circ g)$ هو $\{x \mid x \geq 2\}$.

بالنسبة للتركيب الثاني،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$$
$$= \sqrt{(x^2+1) - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

يتطلب الجذر التربيعي الناتج $x^2 - 1 \geq 0$ أو $|x| \geq 1$، وبما أنّ الدالة الداخلية f تحدد لكل x، فإن مجال $g \circ f$ هو $\{x \mid |x| \geq 1\}$، الذي نكتبه عند تدوين الفترة كـ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ■

بتقدمك في التفاضل والتكامل، ستحتاج في كثير من الأحيان إلى إدراك أن الدالة المعطاة عبارة عن تركيب لدوال أبسط.

المثال 5.3 تحديد تركيبات الدوال

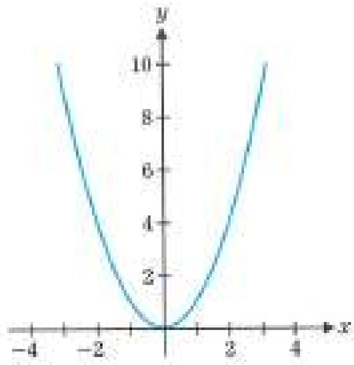
حدد الدوال f و g بحيث يمكن كتابة الدالة المعطاة كـ $(f \circ g)(x)$ لكل من (a) $\sqrt{x^2+1}$ و (b) $(\sqrt{x}+1)^2$ و (c) $\sin x^2$ و (d) $\cos^2 x$. لاحظ أنه توجد أكثر من إجابة محتملة لكل دالة.

الحل (a) لاحظ أن x^2+1 توجد داخل الجذر التربيعي. إذن، فالخيار الأول هو أن يكون لديك $g(x) = x^2+1$ و $f(x) = \sqrt{x}$.

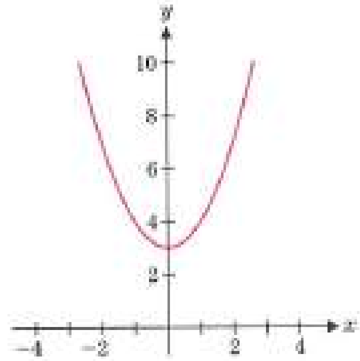
(b) هنا، $\sqrt{x}+1$ يوجد داخل التربيع. إذن، فالخيار الأول هو $g(x) = \sqrt{x}+1$ و $f(x) = x^2$.

(c) يمكن إعادة كتابة الدالة كـ $\sin(x^2)$ مع وجود x^2 بوضوح داخل دالة الجيب. إذن، $g(x) = x^2$ و $f(x) = \sin x$ هو الخيار الأول.

(d) الدالة كما وردت باختصار لـ $(\cos x)^2$. إذن، فالخيار الأول هو $g(x) = \cos x$ و $f(x) = x^2$.



الشكل 1.60a
$y = x^2$



الشكل 1.60b
$y = x^2 + 3$

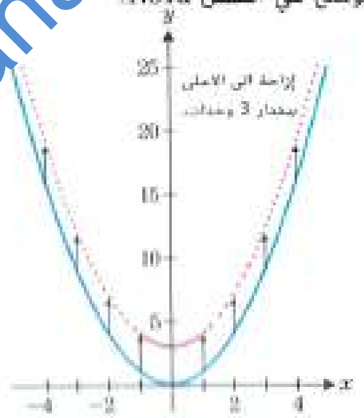
بشكل عام، من الصعب تقريبًا أخذ التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$ وإنتاج التمثيل البياني $f(g(x))$. إذا كانت إحدى الدوال f و g خطية. مع ذلك، يوجد إجراء بياني بسيط لتمثيل التركيب بيانيًا. بحيث تُستكشف **التحويلات الخطية** في بقية هذا القسم.

الحالة الأولى هي أخذ التمثيل البياني لـ $f(x)$ وإنتاج التمثيل البياني لـ $f(x)+c$ لثابت ما c. ينبغي أن تتمكن من استنتاج النتيجة العامة من المثال 5.4.

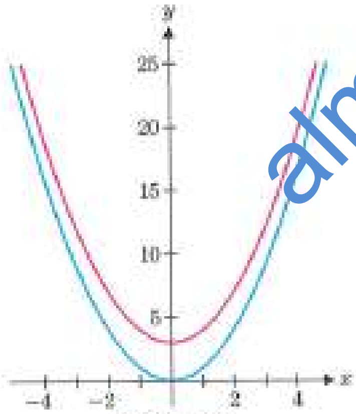
المثال 5.4 الإزاحة الرأسية لتمثيل بياني

مثّل $y = x^2$ و $y = x^2+3$ بيانيًا، وقم بالمقارنة بين التمثيلات البيانية.

الحل قد تتمكن من رسم ذلك يدويًا. ينبغي أن تحصل على تمثيلات بيانية مشابهة للتمثيلات البيانية الموجودة في الأشكال 1.60a و 1.60b. يبين كلا الشكلين قطوعًا مكافئة تفتح لأعلى. يتمثل الاختلاف الرئيسي الواضح في أن x^2 له تقاطع y قيمته 0 و x^2+3 له تقاطع y قيمته 3. في الحقيقة، وبالنسبة لأي قيمة معطاة لـ x، سيتم رسم النقطة الموجودة على التمثيل البياني $y = x^2+3$ أعلى بمقدار 3 وحدات عن النقطة المطابقة على التمثيل البياني $y = x^2$. وهذا موضح في الشكل 1.61a.



الشكل 1.61a
إزاحة التمثيل إلى الأعلى



الشكل 1.61b
$y = x^2$ و $y = x^2 + 3$

في الشكل 1.61b، يتضح أن التمثيلان البيانيان على المحاور نفسها. للعديد من الأشخاص، لا يبدو التمثيل البياني العلوي مشابهًا للتمثيل البياني السفلي وذلك لأن السفلي قد تحرك 3 وحدات. إلا أن هذا مجرد خداع بصري يؤسف له. عادةً ما يقدر البشر المسافة بين المنحنيات، من الناحية العملية، على أنها أقصر مسافة بين المنحنيات. وبالنسبة لهذه القطوع المكافئة، تكون أقصر مسافة رأسية عند $x = 0$ إلا أنها تصبح أفقية على نحو متزايد عندما تتحرك بعيدًا عن المحور y وتقاس المسافة البالغة 3 بين القطوع المكافئة رأسيًا.

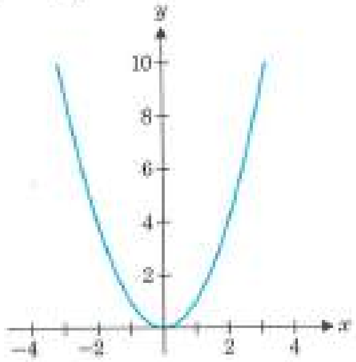
بشكل عام، يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x) + c$ مشابهًا للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ بعد إزاحته إلى أعلى (إذا كان $c > 0$) أو إلى أسفل (إذا كان $c < 0$) بمقدار $|c|$ وحدات. عادة ما نشير إلى $f(x) + c$ بوصفه ازاحة رأسية (الأعلى أو لأسفل بمقدار $|c|$ وحدات).

سنتكشف في المثال 5.5 ما يحدث إذا ما أضفنا ثابتًا إلى x.

المثال 5.5 الإزاحة الأفقية

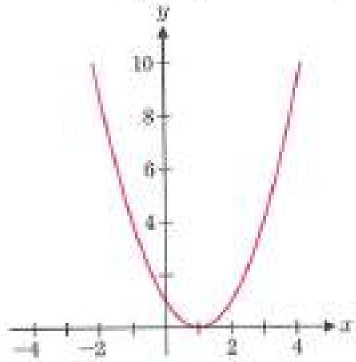
قارن بين التمثيلات البيانية لـ $y = x^2$ و $y = (x-1)^2$

الحل التمثيلات البيانية موضحة في الأشكال 1.62a و 1.62b على التوالي.



الشكل 1.62a

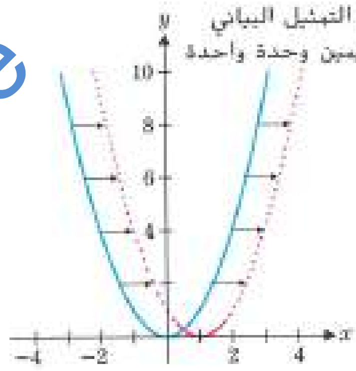
$y = x^2$



الشكل 1.62b

$y = (x-1)^2$

لاحظ أنّ التمثيل البياني لـ $y = (x-1)^2$ يبدو مشابهًا للتمثيل البياني لـ $y = x^2$، إلا أنه انتقل بمقدار وحدة واحدة نحو اليمين. وهذا أمر معقول للسبب التالي. اختر قيمة لـ x، لنقل $x = 13$. قيمة $(x-1)^2$ عند $x = 13$ هي 12^2، نفس قيمة x^2 نفسها عند $x = 12$، وحدة واحدة جهة اليسار. لاحظ أنّ هذا النمط نفسه يستمر لأي x تقوم باختياره. ويتضح ذلك من المخطط المتراكب للدالتين (انظر الشكل 1.63).



الشكل 1.63

إزاحة التمثيل إلى اليمين

بشكل عام، وبالنسبة لـ $c > 0$ يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x-c)$ هو التمثيل البياني نفسه لـ $y = f(x)$ بعد إزاحته بمقدار c وحدة جهة اليمين. وبالمثل، (مرة أخرى، بالنسبة لـ $c > 0$)، تحصل على التمثيل البياني لـ $y = f(x+c)$ بتحريك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ جهة اليسار بمقدار c وحدة. عادة ما نشير إلى $f(x-c)$ و $f(x+c)$ بوصفهما **الإزاحة الأفقية** (اليمنى واليسرى، على التوالي، بمقدار c وحدة).

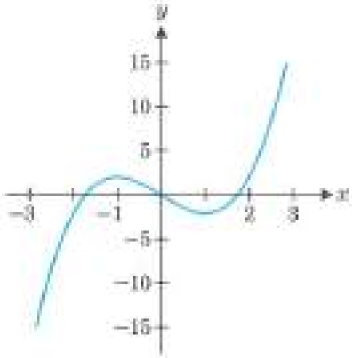
لتفادي اللبس في ما يتعلق بطريقة ازاحة التمثيل البياني لـ $y = f(x)$، ركّز على ما يجعل البرهان (المقدار داخل الأقواس) صفر. بالنسبة لـ $f(x)$، هذا هو $x = 0$، ولكن بالنسبة لـ $f(x-c)$ يجب أن يكون لديك $x = c$ للحصول على $f(0)$ (أي تكون قيمة y هي نفسها قيمة $f(x)$ عندما $x = 0$). هذا يعني أن النقطة الموجودة في التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ عند $x = 0$ تطابق النقطة الموجودة على التمثيل البياني لـ $y = f(x-c)$ عند $x = c$.

المثال 5.6 مقارنة بين الإزاحة الرأسية والأفقية

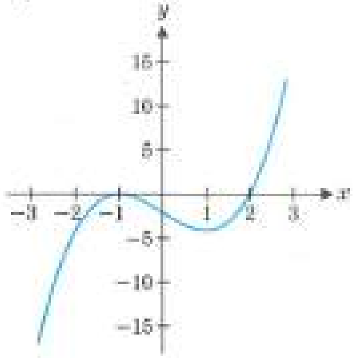
للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضح في الشكل 1.64a، ارسم التمثيلات البيانية لـ $y = f(x) - 2$ و $y = f(x-2)$

الحل لتمثيل $y = f(x) - 2$ بيانيًا، قم فقط بإزاحة التمثيل البياني الأصلي لأسفل بمقدار وحدتين، كما هو موضح في الشكل 1.64b. لتمثيل $y = f(x-2)$ بيانيًا، قم فقط بإزاحة

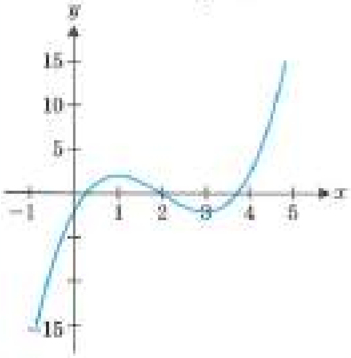
التمثيل البياني الأصلي جهة اليمين بمقدار وحدتين (بحيث يتطابق $x = 0$ المقطع من محور x عند $x = 0$ في التمثيل البياني الأصلي مع المقطع مع محور x عند $x = 2$ في التمثيل البياني المزاح. كما هو موضح في الشكل 1.64a.



الشكل 1.64a
$y = f(x)$



الشكل 1.64b
$y = f(x) - 2$



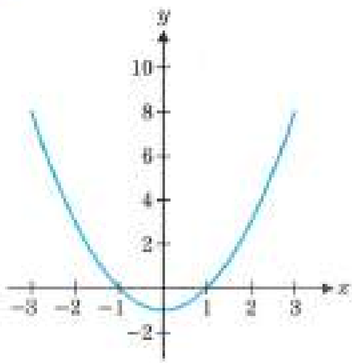
الشكل 1.64c
$y = f(x - 2)$

يستكشف المثال 5.7 أثر ضرب / قسمة x أو y في / على ثابت.

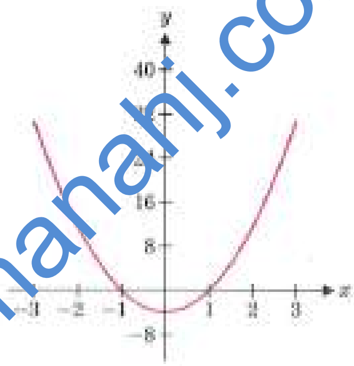
5.7 مقارنة بعض التمثيلات البيانية المرتبطة

قارن التمثيلات البيانية لـ $y = x^2 - 1$، $y = 4(x^2 - 1)$ و $y = (4x)^2 - 1$.

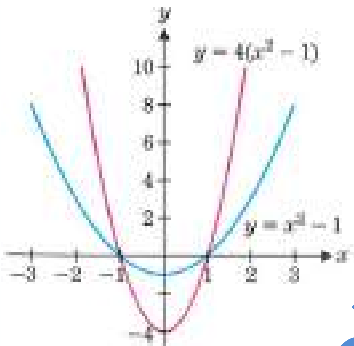
الحل التمثيلات البيانية موضحة في الأشكال 1.65a و 1.65b على التوالي.



الشكل 1.65a
$y = x^2 - 1$



الشكل 1.65b
$y = 4(x^2 - 1)$

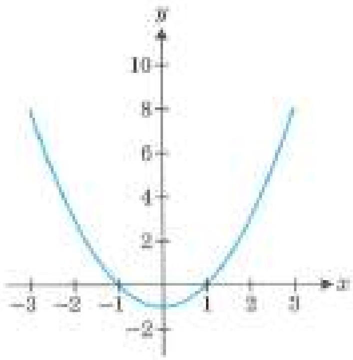


الشكل 1.65c
$y = x^2 - 1$ و $y = 4(x^2 - 1)$

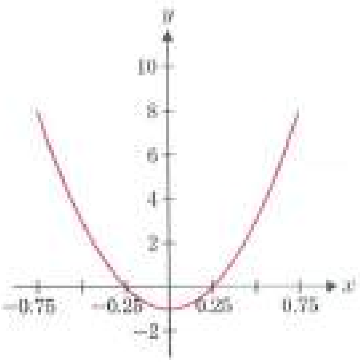
فتبدو التمثيلات البيانية متطابقة إلى أن تقارن المقاييس على المحور y. فالمقياس في الشكل 1.65b أكبر بأربعة أضعاف، مما يعكس ضرب الدالة الأصلية في 4. ويبدو التأثير مختلفاً عند تخطيط الدالة على المقياس نفسه، كما هو الحال في الشكل 1.65c. هنا، يبدو القطع المكافئ $y = 4(x^2 - 1)$ أقل سمكًا وذو مقطع مع محور y مختلف. لاحظ أنّ المقاطع لمحور x لا تتغير. (لماذا ذلك؟)

التمثيلات البيانية لـ $y = x^2 - 1$ و $y = (4x)^2 - 1$ موضحة في الأشكال 1.66a و 1.66b، على التوالي (في الصفحة التالية).

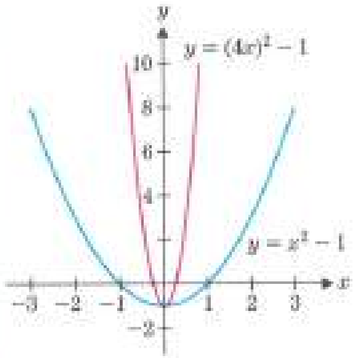
هل يمكنك تحديد الفرق هنا؟ في هذه الحالة، تغير مقياس x الآن، بالعامل نفسه وهو 4 كما هو الحال في الدالة لمشاهدة ذلك. لاحظ أنه باستبدال $x = 1/4$ في $(4x)^2 - 1$ ينتج $(1)^2 - 1$ تمامًا كما هو الحال عند استبدال $x = 1$ في الدالة الأصلية. وعند الرسم على نفس مجموعة المحاور (كما في الشكل 1.66c)، يبدو القطع المكافئ $y = (4x)^2 - 1$ أقل سمكًا. هنا تكون المقاطع مع محور x مختلفة، ولكن المقاطع مع محور y تكون متشابهة.



الشكل 1.66a
$y = x^2 - 1$



الشكل 1.66b
$y = (4x)^2 - 1$



الشكل 1.66c
$y = x^2 - 1$ و $y = (4x)^2 - 1$

يمكننا تعميم الملاحظات المذكورة في المثال 5.7. قبل قراءة الشرح، جرب ذكر قاعدة عامة لنفسك. كيف ترتبط التمثيلات البيانية لـ $y = cf(x)$ و $y = f(cx)$ بالتمثيل البياني لـ $y = f(x)$؟

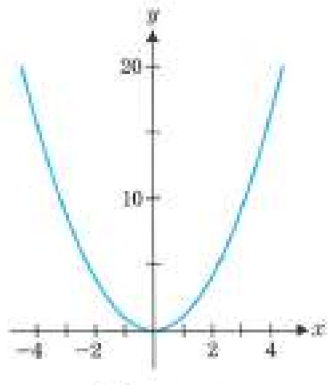
بناءً على المثال 5.7، لاحظ أنه للحصول على التمثيل البياني لـ $y = cf(x)$ لثابت ما $c > 0$ يمكنك أخذ التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ وضرب المقياس على محور y في c وللحصول على التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ لثابت ما $c > 0$ يمكنك أخذ التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ وضرب المقياس على محور x في $1/c$.

يمكن الجمع بين هذه القواعد الأساسية لفهم التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا.

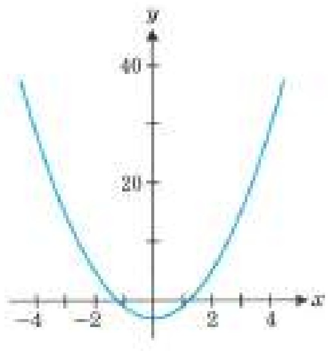
المثال 5.8 الإزاحة والتمدد

صف كيفية الحصول على التمثيل البياني لـ $y = 2x^2 - 3$ من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الحل يمكنك الحصول من x^2 إلى $2x^2 - 3$ عن طريق الضرب في 2 ثم طرح 3. فيما يتعلق بالتمثيل البياني يكون لذلك أثر ضرب المقياس y في 2 ثم تحريك الرسم البياني لأسفل بمقدار 3 وحدات (انظر التمثيلات البيانية في الأشكال 1.67a و 1.67b).



الشكل 1.67a
$y = x^2$



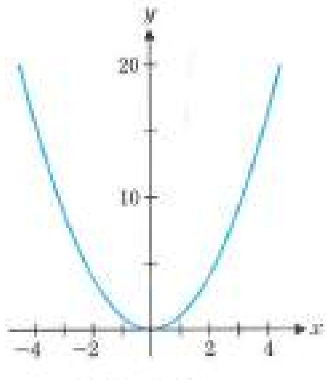
الشكل 1.67b
$y = 2x^2 - 3$

المثال 5.9 الإزاحة في كلا اتجاهي x و y

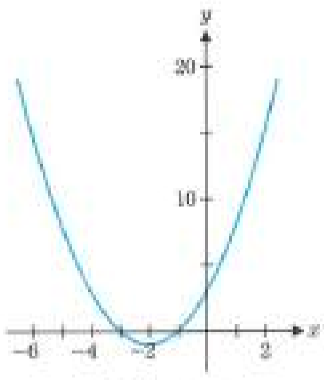
صف طريقة الحصول على التمثيل البياني لـ $y = x^2 + 4x + 3$ من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الحل يمكننا ربط ذلك مرة أخرى (والتمثيل البياني لكل معادلة تربيعية) بالتمثيل البياني لـ $y = x^2$. يجب أولاً أن **نكمل المربع**. تذكر أسس هذه العملية. خذ معامل x، واقسم على 2 $(4/2 = 2)$ ثم قم بتربيع النتيجة $(2^2 = 4)$. أضف واطرح هذا الرقم ثم، أعد صياغة الحدود كمربع كامل. لدينا

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$



الشكل 1.68a
$y = x^2$



الشكل 1.68b
$y = (x + 2)^2 - 1$

لتمثيل هذه الدالة بيانيًا، خذ القطع المكافئ $y = x^2$ (انظر الشكل 1.68a) ازاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين جهة اليسار ووحدة واحدة لأسفل. (انظر الشكل 1.68b).

يلخص الجدول التالي اكتشافاتنا في هذا القسم.

تحويلات $f(x)$

التحويل	الشكل	الأثر على التمثيل البياني
الإزاحة الرأسية	$f(x) + c$	$\lvert c \rvert$ وحدة لأعلى $(c>0)$ أو الأسفل $(c<0)$
الإزاحة الأفقية	$f(x + c)$	$\lvert c \rvert$ وحدة جهة اليسار $(c>0)$ أو اليمين $(c>0)$
المقياس الرأسي	$cf(x)(c > 0)$	ضرب المقياس الرأسي في c
المقياس الأفقي	$f(cx)(c > 0)$	قسمة المقياس الأفقي على c

ستستكشف تحويلات إضافية في التمرينات.

التمرين 1.5

تمرينات الكتابة

1. قد يكون المجال المفيد للمثال 5.2 محيرًا. فكّر في التناظر التالي. افترض أنّ لديك رحلة بالطائرة من نيويورك إلى لوس أنجلوس مع التوقف لإعادة التزود بالوقود في ميناپوليس. فإذا كان الطقس السيئ قد أغلق المطار في ميناپوليس، اشرح سبب إلغاء الرحلة (أو إعادة توجيهها على الأقل) حتى إذا كان الطقس جيدًا في نيويورك ولوس انجلوس.

2. اشرح سبب كون التمثيلات البيانية لـ $y = 4(x^2 - 1)$ و $y = (4x)^2 - 1$ في الأشكال 1.65c و 1.66c "أقل شمولاً" من التمثيل البياني لـ $y = x^2 - 1$.

3. كما هو موضح في المثال 5.9، يمكن استخدام استكمال التربيع لإعادة صياغة أي دالة تربيعية بالشكل $a(x - d)^2 + e$. وباستخدام قواعد التحويل في هذا القسم، اشرح لماذا يعني ذلك أن القطوع المكافئة (ذات $a > 0$) ستبدو متشابهة في الأساس.

4. اشرح لماذا يتم الحصول على التمثيل البياني لـ $y = f(x + 4)$ بتحريك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ أربع وحدات جهة اليسار، بدلاً من جهة اليمين.

في التمرينات 1-6، أوجد التركيب $f \circ g$ و $g \circ f$، وحدد المجالات الخاصة بها.

1. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

2. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = \sqrt{x + 1}$

3. $f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x$

4. $f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad g(x) = \ln x$

5. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sin x$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = x^2 - 2$

في التمرينات 7-16، أوجد تركيب $f(x)$ و $g(x)$، وحدد المجالات الخاصة بها.

7. $\sqrt{x^4 + 1}$ 8. $\sqrt[3]{x + 3}$ 9. $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

10. $\dfrac{1}{x^2} + 1$ 11. $(4x + 1)^2 + 3$ 12. $4(x + 1)^2 + 3$

13. $\sin^3 x$ 14. $\sin x^3$ 15. e^{x^2+1} 16. e^{4x-2}

في التمرينات 17-22، حدد الدوال $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ بحيث تساوي الدالة المعطاة $[f \circ (g \circ h)](x)$.

17. $\dfrac{3}{\sqrt{\sin x + 2}}$ 18. $\sqrt{e^{4x} + 1}$

19. $\cos^3(4x - 2)$ 20. $\ln\sqrt{x^2 + 1}$

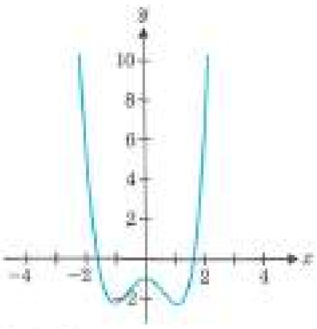
21. $4e^{x^2} - 5$ 22. $[\tan^{-1}(3x + 1)]^2$

في التمرينات 23-30، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المُشار إليها بيانيًا.

23. $f(x) - 3$ 24. $f(x + 2)$ 25. $f(x - 3)$

26. $f(x) + 2$ 27. $f(2x)$ 28. $3f(x)$

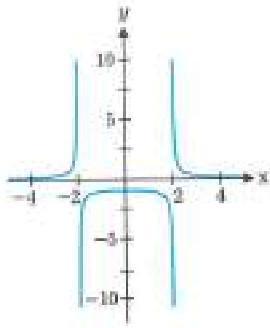
29. $-3f(x) + 2$ 30. $3f(x + 2)$



التمثيل البياني للتمارين 23-30

في التمرينات 38-31، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المُشار إليها بيانيًا.

31. $f(x-4)$
32. $f(x+3)$
33. $f(2x)$
34. $f(2x-4)$
35. $f(3x+3)$
36. $3f(x)$
37. $2f(x)-4$
38. $3f(x)+3$



التمثيل البياني لتمارين 38-31

في التمرينات 44-39، أكمل التربيع واشرح طريقة تحويل التمثيل البياني لـ $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة.

39. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
40. $f(x) = x^2 - 4x + 4$
41. $f(x) = x^2 + 2x + 4$
42. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
43. $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$
44. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

في التمرينات 48-45، مثل الدالة المعطاة بيانيًا وقارنها بالتمثيل البياني لـ $y = x^2 - 1$.

45. $f(x) = -2(x^2 - 1)$
46. $f(x) = -3(x^2 - 1)$
47. $f(x) = -3(x^2 - 1) + 2$
48. $f(x) = -2(x^2 - 1) - 1$

في التمرينات 52-49، مثل الدالة المعطاة بيانيًا وقارنها بالتمثيل البياني لـ $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$.

49. $f(x) = (-x)^2 - 2(-x)$
50. $f(x) = -(-x)^2 + 2(-x)$
51. $f(x) = (-x+1)^2 + 2(-x+1)$
52. $f(x) = (-3x)^2 - 2(-3x) - 3$

53. بناءً على التمرينات 48-45، اذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ إلى التمثيل البياني لـ $y = cf(x)$ بالنسبة لـ $c < 0$.

54. بناءً على التمرينات 52-49، اذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ إلى التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ بالنسبة لـ $c < 0$.

55. ارسم التمثيل البياني لـ $y = |x|^3$. اشرح سبب تطابق التمثيل البياني لـ $y = |x|^3$ مع التمثيل البياني $y = |x|^3$ الموجود على يمين من المحور y.

بالنسبة لـ $y = |x|^3$ صف طريقة مقارنة التمثيل البياني الموجود على يسار المحور y مع التمثيل البياني الموجود على يمين المحور y. بشكل عام، صف طريقة رسم التمثيل البياني لـ $y = f(|x|)$ بفرض التمثيل البياني لـ $y = f(x)$.

56. بالنسبة لـ $y = x^3$، صف طريقة مقارنة التمثيل البياني الموجود على يسار المحور y مع التمثيل البياني الموجود على يمين المحور y. بيّن أنه بالنسبة لـ $f(x) = x^3$، لدينا $f(-x) = -f(x)$. بشكل عام، إذا كان لديك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ على يمين المحور y و $f(-x) = -f(x)$ لكل x، صف كيفية تمثيل $y = f(x)$ بيانيًا على يسار المحور y.

57. تكرارات الدوال ضرورية في تطبيقات متنوعة. لتكرار $f(x)$، ابدأ بالقيمة الأولية x_0 واحسب $x_1 = f(x_0)$ و $x_2 = f(x_1)$ و $x_3 = f(x_2)$ وهكذا دواليك. على سبيل المثال، باستخدام $f(x) = \cos x$ و $x_0 = 1$ وتكون التكرارات هي $x_1 = \cos 1 \approx 0.54$ و $x_2 = \cos x_1 \approx \cos 0.54 \approx 0.86$ و $x_3 \approx \cos 0.86 \approx 0.65$ وهكذا دواليك. استمر في حساب التكرارات وبيّن أنها تقترب أكثر فأكثر من 0.739085. ثم اختر x_0 الخاص بك (أي رقم تريده) وبيّن أن التكرارات مع هذا x_0 الجديد تقارب أيضًا 0.739085.

58. بالإشارة إلى التمرين 57، بيّن أنه يمكن كتابة تكرارات الدالة كـ $x_1 = f(x_0)$ و $x_2 = f(f(x_0))$ و $x_3 = f(f(f(x_0)))$ وهكذا دواليك. مثّل $y = \cos(\cos x)$ و $y = \cos(\cos(\cos x))$ و $y = \cos(\cos(\cos(\cos x)))$ بيانيًا. ينبغي أن يتزايد وجه الشبه بين التمثيلات البيانية والخط الأفقي. استخدم نتيجة التمرين 57 لتحديد خط التحديد.

59. احسب عدة تكرارات لـ $f(x) = \sin x$ (انظر التمرين 57) باستخدام مجموعة من قيم البدء. ماذا يحدث للتكرارات على المدى الطويل؟

60. كرر التمرين 59 لـ $f(x) = x^2$.

61. في الحالات حيث تكرر تكرارات الدالة (انظر التمرين 57) رقمًا واحدًا، نطلق على هذا الرقم نقطة ثابتة. اشرح لماذا يجب أن تكون أي نقطة ثابتة حلًا للمعادلة $f(x) = x$. أوجد كل النقاط الثابتة لـ $f(x) = \cos x$ عن طريق حل المعادلة $\cos x = x$. قارن نتائجك بنتائج التمرين 57.

62. أوجد كل النقاط الثابتة لـ $f(x) = \sin x$ (انظر التمرين 61). قارن نتائجك بنتائج التمرين 59.

تمرينات استكشافية

1. لقد استكشفت كيف يمكن لاستكمال التربيع أن يحول أي دالة تربيعية إلى الشكل $y = a(x-d)^2 + e$. استنتجنا أن كل القطوع المكافئة ذات $a > 0$ تبدو متشابهة. لمعرفة أن نفس الجملة ليست صحيحة بالنسبة للدوال كثيرة الحدود التكعيبية، مثل $y = x^3$ و $y = x^3 - 3x$ بيانيًا. في هذا التمرين، ستستخدم استكمال التكعيب لتحديد عدد التمثيلات البيانية التكعيبية المختلفة الموجودة لمعرفة ما قد يبدو عليه "استكمال المكعب". بيّن أولًا أن $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ استخدم هذه النتيجة لتحويل التمثيل البياني لـ $y = x^3$ إلى التمثيلات البيانية لـ (a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و (b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$. بيّن أنه لا يمكنك الحصول على تحويل بسيط إلى $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. مع ذلك بيّن أنه يمكن الحصول على $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ $y = x^3 + x$ باستخدام التحويلات الأساسية. بيّن أن العبارة التالية صحيحة. يمكن الحصول على أي مكعب ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) باستخدام التحويلات الأساسية من $y = ax^3 + kx$ بالنسبة الثابت k نفسه.

2. في العديد من التطبيقات، من الضروري أخذ مقطع من التمثيل البياني (على سبيل المثال، بعض البيانات) وبسطها من أجل التوقعات أو التحليلات الأخرى. على سبيل المثال، افترض أنّ لديك إشارة إلكترونية تساوي $f(x) = 2x$ بالنسبة لـ $0 \le x \le 2$. للتنبؤ بقيمة الإشارة عند $x = -1$، فقد ترغب في معرفة إذا ما كانت الإشارة دورية أم لا. إذا كانت الإشارة دورية، فبيّن لماذا سيكون $f(-1) = 2$ تنبؤًا جيدًا. في بعض التطبيقات، قد تفترض أن الدالة متساوية، أي، $f(x) = f(-x)$ لكل x. في هذه الحالة، أنت تريد $f(x) = 2(-x) = -2x$ لـ $-2 \le x \le 0$. مثّل الامتداد المتساوي بيانيًا لـ $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } -2 \le x \le 0 \\ 2x & \text{if } 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

أوجد الامتداد المتساوي لـ (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, 0 \le x \le 2$ و (b) $f(x) = e^{-x}, 0 \le x \le 2$.

3. وعلى غرار الامتداد المتساوي المذكور في التمرين الاستكشافي 2، تتطلب التطبيقات في بعض الأحيان أن تكون الدالة فردية، أي $f(-x) = -f(x)$. فبالنسبة لـ $f(x) = x^2$ و $0 \le x \le 2$ يتطلب الامتداد الفردي أنه بالنسبة لـ $-2 \le x \le 0$ و $f(x) = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2$ بحيث $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{if } -2 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{if } 0 \le x \le 2 \end{cases}$ مثّل $y = f(x)$ بيانيًا وناقش طريقة إدارة النصف الأيمن من التمثيل البياني، بيانيًا، للحصول على النصف الأيسر من التمثيل البياني. أوجد الامتداد الفردي لـ (a) $f(x) = x^2 + 2x, \ 0 \le x \le 2$ و (b) $f(x) = e^{-x} - 1, 0 \le x \le 2$.

تمرينات المراجعة

تمرينات كتابة

تتضمن القائمة التالية مصطلحات المعرفة ونظريات واردة في هذا الفصل. بالنسبة لكل مصطلح أو نظرية، (1) اذكر تعريف أو عبارة دقيقة، (2) اذكر معنى المصطلح أو النظرية بعبارات عامة، و (3) صف أنواع المسائل ذات الصلة بالمصطلح أو النظرية.

ميل الخط	خطوط متوازية	خطوط متعامدة
مجال	المقطع	أصفار الدالة
نافذة التمثيل البياني	الحد الأقصى المحلي	خط تقارب رأسي
دالة عكسية	دالة فردية	دالة دورية
دالة الجيب	دالة جيب التمام	دالة قوس جيب الزاوية
e	دالة أسية	لوغاريتم
تركيب		

صح أم خطأ

اذكر إذا ما كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة وبيّن السبب باختصار. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" عن طريق تعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. بالنسبة للتمثيل البياني، يمكنك حساب الميل باستخدام أي نقطتين والحصول على القيمة نفسها.
2. يجب أن تمرّ كل التمثيلات البيانية باختبار الخط الرأسي.
3. للدالة التكعيبية تمثيلًا بيانيًا بحد أقصى محلي وحد أدنى محلي.
4. إذا لم يكن للدالة حد أقصى أو أدنى محلي، فإنها تكون فردية.
5. يمكن الحصول على التمثيل البياني لمعكوس f عن طريق عكس التمثيل البياني لـ f عبر $y = x$ القطري.
6. إذا كانت f عبارة عن دالة مثلثية، فإن حل المعادلة $f(x) = 1$ هو $f^{-1}(1)$.
7. الدوال الأسية واللوغاريتمية هي معكوس بعضها البعض.
8. للدوال التربيعية رسومات بيانية مثل القطع المكافئ $y = x^2$.

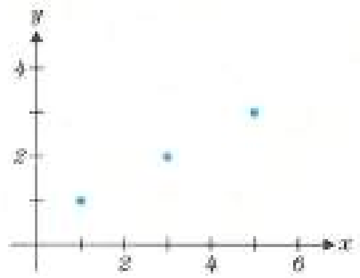
في التمرينين 1 و 2، أوجد ميل المستقيم من خلال النقاط المحددة.

1. $(2, 3), (0, 7)$
2. $(1, 4), (3, 1)$

في التمرينين 3 و 4 حدد ما إذا كانت الخطوط متوازية أو متعامدة أو غير ذلك.

3. $y = 3x + 1$ and $y = 3(x - 2) + 4$
4. $y = -2(x + 1) - 1$ and $y = \frac{1}{2}x + 2$

5. حدد ما إذا كانت النقاط $(1, 2)$ و $(2, 4)$ و $(0, 6)$ تشكل رؤوس المثلث قائم الزاوية.
6. تمثل البيانات التعداد السكاني في أوقات مختلفة. ارسم النقاط وناقش أي أنماط وتوقع التعداد السكاني في المرة القادمة. $(0, 2100)$ و $(1, 3050)$ و $(2, 4100)$ و $(3, 5050)$.
7. أوجد معادلة المستقيم من خلال النقاط المحددة في الرسم البياني التالي واحسب الإحداثي y المناسب لـ $x = 4$.



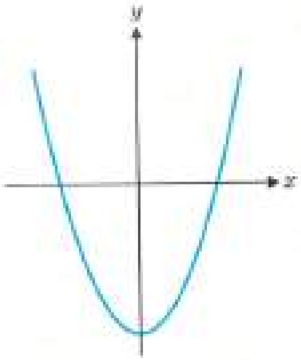
8. بالنسبة إلى $f(x) = x^2 - 3x - 4$، احسب $f(0)$، $f(2)$ و $f(4)$.

في التمرينين 9 و 10، أوجد معادلة المستقيم من خلال الميل والنقطة المذكورين.

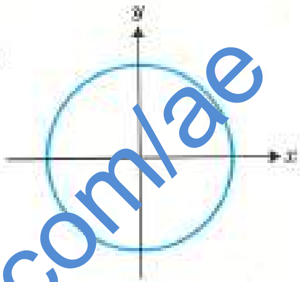
9. $m = -\frac{1}{3}$, $(-1, -1)$ 10. $m = \frac{1}{4}$, $(0, 2)$

في التمرينين 11 و 12، استخدم اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى هو الرسم البياني للدالة.

11.



12.



في التمرينين 13 و 14، أوجد مجال المعادلة المعطاة.

13. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 14. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2}$

في التمرينات 15-28، ارسم بيانيًا القيعان المبينة ونقاط التقاطع وخطوط التقارب.

15. $f(x) = x^2 + 2x - 8$ 16. $f(x) = x^3 - 6x + 1$

17. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ 18. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$

19. $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$ 20. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

21. $f(x) = \sin 3x$ 22. $f(x) = \tan 4x$

23. $f(x) = \sin x + 2\cos x$ 24. $f(x) = \sec 2x$

25. $f(x) = 4e^{2x}$ 26. $f(x) = 3e^{-4x}$

27. $f(x) = \ln 3x$ 28. $f(x) = e^{\ln 2x}$

29. حدد كل نقاط التقاطع لـ $y = x^2 + 2x - 8$ (انظر التمرين 15).

30. حدد كل نقاط التقاطع لـ $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (انظر التمرين 17).

31. أوجد كل خطوط التقارب لـ $y = \dfrac{4x}{x+2}$.

32. أوجد كل خطوط التقارب لـ $y = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$.

في التمرينات 33-36، أوجد أو قدّر كل أصفار الدالة المعطاة.

33. $f(x) = x^2 - 3x - 10$ 34. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

35. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 36. $f(x) = x^4 - 3x - 2$

في التمرينين 37 و 38، حدد عدد الحلول.

37. $\sin x = x^3$

38. $\sqrt{x^2+1} = x^2 - 1$

39. يقف مساح على بعد 50 ft من عمود الهاتف ويرصد الزاوية 34 إلى قمة العمود. ما هو طول العمود؟

40. أوجد $\sin \theta$ باعتبار أنّ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\cos \theta = \frac{1}{5}$.

41. حوّل إلى صيغة كسرية أو صيغة جذرية: (a) $5^{-1/2}$ (b) 3^{-2}

42. حوّل إلى صيغة أسية: (a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{3}{x^2}$

43. أعد كتابة $\ln 8 - 2\ln 2$ باعتباره لوغاريتم منفرد.

44. قم بحل المعادلة x، $e^{\ln 4x} = 8$

في التمرينين 45 و 46، قم بحل المعادلة.

45. $3e^{2x} = 8$ 46. $2\ln 3x = 5$

في التمرينين 47 و 48، أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ وحدد مجال كل منها.

47. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

48. $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

في التمرينين 49 و 50، حدد الدوال $f(x)$ و $g(x)$ مثل $(f \circ g)(x)$ التي تساوي الدالة المعطاة.

49. e^{3x^2+1} 50. $\sqrt{\sin x + 2}$

في التمرينين 51 و 52، أكمل المربع واشرح طريقة تحويل الرسم البياني لـ $y = x^2$ إلى الرسم البياني للدالة المعطاة.

51. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 52. $f(x) = x^2 + 4x + 6$

في التمرينات 53–56، حدد ما إذا كانت دالة واحد لواحد أم لا. وإذا كانت دالة واحد لواحد، فاذكر معكوسها.

53. x^3-1 54. e^{-4x} 55. e^{2x^2} 56. x^3-2x+1

في التمرينات 57-60، مثّل بيانيًا المعكوس بدون حله.

57. x^5+2x^3-1 58. x^3+5x+2
59. $\sqrt{x^3+4x}$ 60. e^{x^3+2x}

في التمرينات 61–64، أوجد قيمة الكمية باستخدام دائرة الوحدة.

61. $\sin^{-1}1$ 62. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
63. $\tan^{-1}(-1)$ 64. $\csc^{-1}(-2)$

في التمرينات 65-68، حوّل إلى أبسط صورة التعبير الجذري.

65. $\sin(\sec^{-1}2)$ 66. $\tan(\cos^{-1}(4/5))$
67. $\sin^{-1}(\sin(3\pi/4))$ 68. $\cos^{-1}(\sin(-\pi/4))$

في التمرينين 69 و 70، أوجد كل حلول المعادلة.

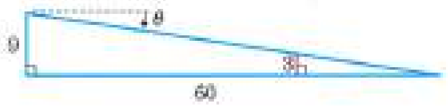
69. $\sin 2x=1$ 70. $\cos 3x=\frac{1}{2}$

تمرينات استكشافية

1. مثّل بيانيًا أي دالة $y=f(x)$ لها معكوس. (حسب اختيارك) مثّل بيانيًا معكوس الدالة $y=f^{-1}(x)$. بعد ذلك مثّل بيانيًا $y=g(x)=f(x+2)$. مثّل بيانيًا $y=g^{-1}(x)$ واستخدم الرسم البياني لتحديد صيغة $g^{-1}(x)$ من حيث $f^{-1}(x)$. كرّر ذلك لـ $h(x)=f(x)+3$ و $k(x)=f(x-4)+5$.

2. في لعبة التنس، تتجاوز رمية الإرسال الشبكة ثم تسقط في المربع الموجود في الجانب الآخر من الشبكة. في هذا التمرين ستكتشف هامش الخطأ لرمية الإرسال الصحيحة.

أولًا، انظر باستقامة لرمية الإرسال (هذا يعني أساسًا أنّ رمية الإرسال تُسدد بقوة غير متناهية) وسددت بنحو 9 أقدام فوق سطح الأرض. حدد نقطة البداية (0, 9). يبعد الجانب الخلفي من مربع الإرسال 60 ft عند (60, 0). يبعد الجزء العلوي من الشبكة حوالي 3 أقدام عن سطح الأرض و39 ft من مستهل ضربة الكرة، عند (39, 3). أوجد زاوية رمية الإرسال (أي الزاوية التي تقاس أفقيًا) والمثلث الذي شكلته النقاط (0, 9) و (0, 0) و (60, 0). وبطبيعة الحال، فغالبًا ما تنحني رمية الإرسال لأسفل بسبب الجاذبية. بتجاهل مقاومة الهواء، فإن مسار الكرة التي سددت نحو الزاوية θ والسرعة الأولية v ft/s هو $y=-\frac{16}{(v\cos\theta)^2}x^2-(\tan\theta)x+9$. لتُسدد في الجانب الخلفي من خط الإرسال، فإنك تحتاج $y=0$ عندما $x=60$. عوّض في هذه القيم بالإضافة إلى $v=120$، اضرب في $\cos^2\theta$ واستبدل $\sin\theta$ بـ $\sqrt{1-\cos^2\theta}$. استبدل $\cos\theta$ بـ z يعطيك معادلة جبرية في z. قدّر بالعدد z. وبالمثل، عوّض $x=39$ و$y=3$ وأوجد المعادلة لـ $w=\cos\theta$. قدّر بالعدد w. ينتج هامش الخطأ لرمية الإرسال من $\cos^{-1}z<\theta<\cos^{-1}w$.



3. غالبًا ما يقول لاعبو كرة البيسبول أن رمية الكرة السريعة بشكل غير معتاد ترتفع أو تقفز حتى تصل إلى القاعدة. وأحد تفسيرات هذا الخطأ هو عدم قدرة اللاعبين على تتبع الكرة في مسارها إلى القاعدة، ويعوض اللاعب ذلك بالتنبؤ بمسار الكرة عند وصولها إلى القاعدة. افترض أنّ ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة هو بالقدم $h=-(240/v)^2+6$ لسرعتها v ft/s (تضع الجاذبية في الاعتبار في هذه المعادلة وليس مقاومة الهواء). في منتصف الطريق إلى القاعدة، فإن الارتفاع يكون $h=-(120/v)^2+6$ بالقدم قارن ارتفاعات منتصف الطريق لرمية الكرة و $v=132$ و $v=139$ (حوالي 90 و95 kmph على التوالي). هل يتمكن اللاعب ضارب الكرة من تحديد فروق كثيرة بينها؟ والآن قارن بين الارتفاعات عند القاعدة. لماذا يعتقد اللاعب ضارب الكرة أنّ الرمية الأسرع تقفز يمين القاعدة. كم قدمًا تقفزها الرمية الأسرع؟

الوحدة

2 النهايات والاتصال

عندما تدخل غرفة مظلمة، تتكيّف عيناك على المستوى المنخفض من الضوء بزيادة حجم حدقة العين، ليسمح بدخول مزيد من الضوء إلى العين ويجعل رؤية الأجسام من حولك أمرًا سهلًا. وبالعكس، عندما تدخل غرفة مضاءة بشكل جيد، تنقبض الحدقة مما يقلّل من مقدار الضوء الذي يدخل العين حيث يؤثر الضوء الشديد على وظائف جهازك البصري.

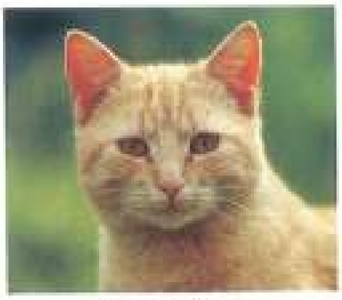
وقد درس العلماء هذه الآلية بإجراء التجارب ومحاولة العثور على الوصف الرياضي لهذه النتائج. وفي هذه الحالة، قد ترغب

في تمثيل حجم الحدقة كدالة لمقدار الضوء الموجود. وستكون الخاصيتان الأساسيتان لهذه النمذجة الرياضية

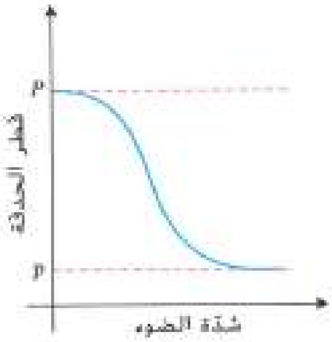
1. كلما تزايد مقدار الضوء (x)، تتناقص حدقة العين (y) حتى القيمة الصغرى p.

2. كلما تناقص مقدار الضوء (x)، تتزايد حدقة العين (y) حتى القيمة العظمى P.

يوجد العديد من الدوال التي تتمتع بهاتين الخاصيتين، ولكن يوضح أحد التمثيلات البيانية المحتملة لمثل هذه الدالة في الشكل 2.1 (راجع المثال 3.11 للمزيد) في هذه الوحدة. نطور مفهوم النهاية والذي يمكن استخدامه لوصف الخواص مثل المذكورة أعلاه. تعتبر النهايات المفهوم الأساسي للتفاضل والتكامل وتعتبر بمثابة الخيط الذي يربط عمليًا كل موضوعات التفاضل والتكامل التي ستدرسها. وسيكون لاستثمار الوقت في دراسة النهايات بمثابة الآن مردودًا رائعًا للغاية طوال الفترة المتبقية من دراستك للتفاضل والتكامل وما بعد ذلك.


حدقة صغيرة


حدقة كبيرة

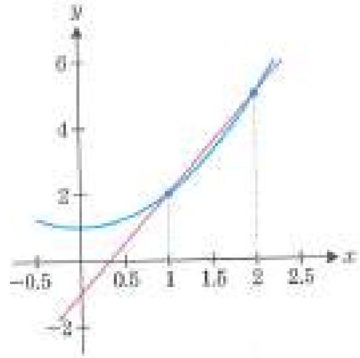


الشكل 2.1
حجم الحدقة

2-1 مراجعة موجزة عن التفاضل والتكامل: المماسات وطول المنحنى

في هذا الدرس، نتناول النهايات بين رياضيات ما قبل التفاضل والتكامل وحساب التفاضل والتكامل من خلال التحقق في العديد من المسائل الهامة التي تتطلب استخدام التفاضل والتكامل. تذكر أن ميل المستقيم هو التغير في y مقسومًا على التغير في x. ويبقى لهذا الكسر القيمة نفسها بغض النظر عن أي نقطتين نستخدمهما لحساب الميل. فعلى سبيل المثال، تقع النقاط $(0, 1)$ و $(1, 4)$ و $(3, 10)$ جميعًا على المستقيم $y = 3x + 1$ نفسه. ويمكن الحصول على قيمة الميل 3 من أي نقطتين من هذه النقاط. فعلى سبيل المثال،

$$m = \frac{4-1}{1-0} = 3 \qquad \text{أو} \qquad m = \frac{10-1}{3-0} = 3$$



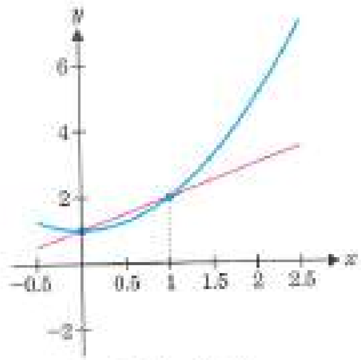
الشكل 2.2a
المستقيم القاطع: الميل = 3

إننا نعمل في التفاضل والتكامل على تعميم هذه المسألة لإيجاد الميل للمنحنى عند نقطة. على سبيل المثال، لنفترض أننا نرغب في إيجاد ميل المنحنى $y = x^2 + 1$ من النقطة $(1,2)$. قد تفكر في اختيار نقطة ثانية على القطع المكافئ، مثل $(2,5)$. ويعد ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين (ويطلق عليه **المستقيم القاطع**، انظر الشكل 2.2a) سبيل الحساب. لدينا

$$m_{\text{sec}} = \frac{5-2}{2-1} = 3$$

ومع ذلك، باستخدام النقطتين $(0,1)$ و $(1,2)$، نحصل على ميل مختلف (انظر الشكل 2.2b).

$$m_{\text{sec}} = \frac{2-1}{1-0} = 1$$



الشكل 2.2b
المستقيم القاطع: الميل = 1

وبوجه عام، فإن ميل المستقيمات القاطعة التي تجمع نقاط مختلفة على المنحنى ليست لها القيمة نفسها، كما هو موضح في الشكلين 2.2a و2.2b.

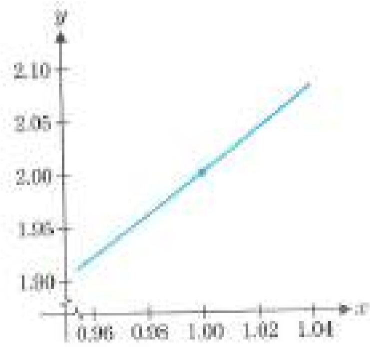
إذًا، ما الذي نعنيه بميل المنحنى عند نقطة؟ يمكن تصور الإجابة من خلال تكبير الرسم البياني والتركيز على النقطة المحددة. في هذه الحالة، بالتركيز على النقطة $(1, 2)$. ينبغي أن تحصل على شكل التمثيل البياني كذلك الموجود في الشكل 2.3، والذي يشبه خطًا مستقيمًا. في الحقيقة، كلما قربت الصورة، أصبح المنحنى مستقيمًا بشكل أكبر. ومن ثم، إليك استراتيجية الحل. حدد عدة نقاط على القطع المكافئ تكون كل منها أقرب إلى النقطة $(1, 2)$ من التي تسبقها. احسب ميل المستقيمات التي تمر بالنقطة $(1, 2)$ وكل نقطة من النقاط. وكلما اقتربت النقطة الثانية من النقطة $(1, 2)$، كان الميل المحسوب أقرب إلى الإجابة التي تنشدها.

على سبيل المثال، فإن النقطة $(1.5,3.25)$ على القطع المكافئ قريبة من $(1, 2)$. وميل المستقيم الذي يصل بين هذه النقاط يساوي:

$$m_{\text{sec}} = \frac{3.25-2}{1.5-1} = 2.5$$

والنقطة $(1.1,2.21)$ أقرب بكثير إلى النقطة $(1,2)$. وميل المستقيم القاطع الذي يصل بين هاتين النقطتين يساوي:

$$m_{\text{sec}} = \frac{2.21-2}{1.1-1} = 2.1$$



الشكل 2.3
$y = x^2 + 1$

وبالاستمرار بهذه الطريقة، نحصل على تقديرات متتالية أفضل للميل كما هو موضح في المثال 1.1.

المثال 1.1 تقدير ميل المنحنى

قدّر ميل $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$.

الحل نركز على النقطة ذات الإحداثيات $x = 1$ و $y = 1^2 + 1 = 2$. لتقدير الميل، اختر عددًا من النقاط بالقرب من $(1, 2)$ واحسب ميل المستقيمات القاطعة التي تصل هذه النقاط بالنقطة $(1, 2)$. (أوضحنا عينة على المستقيمات القاطعة في الأشكال 2.2a و 2.2b). باختيار النقاط عندما $x > 1$ (قيم x من 2 و 1.1 و 1.01) والنقاط عندما $x < 1$ (قيم x من 0 و 0.9 و 0.99)، نحسب قيم y المقابلة باستخدام $y = x^2 + 1$ والحصول على قيم الميل الموضحة في الجدول التالي.

النقطة الثانية	m_{sec}
$(2, 5)$	$\frac{5-2}{2-1} = 3$
$(1.1, 2.21)$	$\frac{2.21-2}{1.1-1} = 2.1$
$(1.01, 2.0201)$	$\frac{2.0201-2}{1.01-1} = 2.01$

النقطة الثانية	m_{sec}
$(0, 1)$	$\frac{1-2}{0-1} = 1$
$(0.9, 1.81)$	$\frac{1.81-2}{0.9-1} = 1.9$
$(0.99, 1.9801)$	$\frac{1.9801-2}{0.99-1} = 1.99$

يلاحظ أنه في كل من العمودين، كلما اقتربت النقطة الأخرى من النقطة $(1, 2)$، اقتربت قيمة ميل القاطع من القيمة 2. ويكون التقدير المنطقي لميل المنحنى في النقطة $(1, 2)$ هو 2. ■

سنطور أسلوبًا قويًا وبسيطًا في الوقت ذاته لحساب قيم الميل بالضبط. وسنرى أنه في بعض الأحيان تقترب المستقيمات القاطعة من مستقيم (المماس) ميله يمثل ميل المنحنى نفسه عند هذه النقطة. لاحظ أن هذا يميز مسائل التفاضل والتكامل عن مسائل الجبر المقابلة. تحتوي مسائل التفاضل والتكامل على مفهوم النهاية. فبينما يمكننا حاليًا أن نقدر فقط ميل المنحنى مستخدمين عددًا من القيم التقريبية المتتالية، ستسمح لنا النهاية بحساب الميل بدقة.

المثال 1.2 تقدير ميل المنحنى

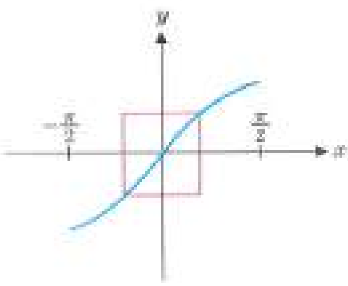
قدّر ميل $y = \sin x$ عند $x = 0$.

الحل ويعتبر هذا مسألة هامة للغاية، وهي مسألة سنعود لتناولها لاحقًا. أما الآن، اختر عددًا من النقاط بالقرب من $(0, 0)$ واحسب ميل المستقيمات القاطعة التي تصل هذه النقاط بالنقطة $(0, 0)$. ويوضّح الجدول التالي مجموعة من الاحتمالات.

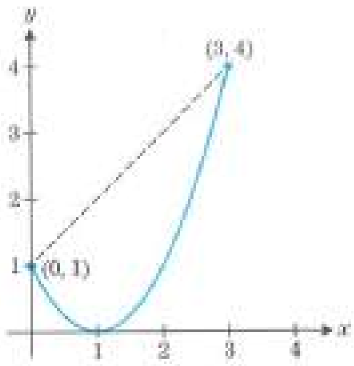
النقطة الثانية	m_{sec}
$(1, \sin 1)$	0.84147
$(0.1, \sin 0.1)$	0.99833
$(0.01, \sin 0.01)$	0.99998

النقطة الثانية	m_{sec}
$(-1, \sin(-1))$	0.84147
$(-0.1, \sin(-0.1))$	0.99833
$(-0.01, \sin(-0.01))$	0.99998

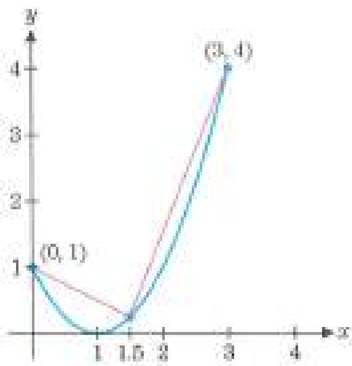
لاحظ أنه كلما زاد اقتراب النقطة الأخرى من $(0, 0)$، نجد أن ميل القاطع (m_{sec}) اقتربت قيمته أكثر من العدد 1. ويكون التقدير الجيد لميل المنحنى في النقطة $(0, 0)$ هو 1. وبالرغم من أننا لا نملك حاليًا وسيلة لحساب الميل بدقة، فإن ذلك يتفق مع التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ في الشكل 2.4. ولاحظ أنه بالقرب من $(0, 0)$، يشبه التمثيل البياني $y = x$ خطًا مستقيمًا بميل 1. ■



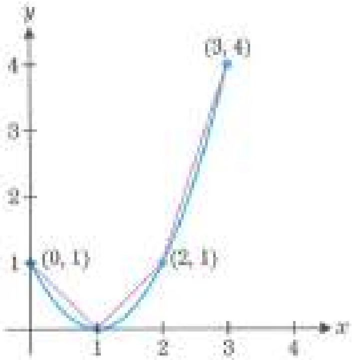
الشكل 2.4
$y = \sin x$



الشكل 2.5a
$y = (x-1)^2$



الشكل 2.5b
قطعتان مستقيمتان



الشكل 2.5c
ثلاث قطع مستقيمة

المسألة الثانية اللتي تتطلب إستخدام التفاضل والتكامل هي حساب المسافة على طول مسار منحنى. وبالرغم من أن هذه المسألة تعتبر أقل أهمية من مثالنا الأول (تاريخيًا وفي تطور علم التفاضل والتكامل) فهي توفر مؤشرًا جيدًا على الحاجة للرياضيات بخلاف الجبر البسيط. وينبغي أن تنتبه لأوجه الشبه بين تطور هذه المسألة وعملنا السابق على الميل.

تذكر أن المسافة (الخط المستقيم) بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

على سبيل المثال، فإن المسافة بين النقطتين $(1, 0)$ و$(4, 3)$ هي

$$d\{(0, 1), (3, 4)\} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24264.$$

وعلى الرغم من ذلك، لا يعتبر ذلك الوسيلة الوحيدة التي قد ترغب في حساب المسافة بين نقطتين بها. على سبيل المثال، لنفترض أنك تحتاج إلى قيادة السيارة من $(0,1)$ إلى $(3,4)$ على طول طريق على شكل المنحنى $y = (x-1)^2$ (انظر الشكل 2.5a). في هذه الحالة، لن تهتم بمسافة الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين، بل ستهتم فقط بالمسافة التي تحتاج إلى قطعها على طول المنحنى (طول القوس على المنحنى).

لاحظ أنه لا بد أن تكون المسافة على طول المنحنى أكبر من $3\sqrt{2}$ (طول الخط المستقيم). وبالحصول على قرينة من مسألة الميل، يمكننا وضع استراتيجية للحصول على قيم متتالية مقدرة ومتزايدة الدقة. وبدلًا من استخدام قطعة مستقيمة واحدة للحصول على تقريب لـ $3\sqrt{2}$، يمكننا استخدام قطع مستقيمة. كما في الشكل 2.5b. لاحظ أن مجموع طولي القطعتين المستقيمتين يبدو تقريبًا أفضل للطول الفعلي للمنحنى من مسافة الخط المستقيم لـ $3\sqrt{2}$. وهذه المسافة هي

$$\begin{aligned} d_2 &= d\{(0, 1), (1.5, 0.25)\} + d\{(1.5, 0.25), (3, 4)\} \\ &= \sqrt{(1.5-0)^2 + (0.25-1)^2} + \sqrt{(3-1.5)^2 + (4-0.25)^2} \approx 5.71592. \end{aligned}$$

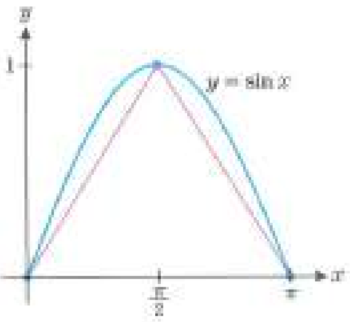
ربما تكون متقدمًا عنا بكثير الآن. إذا كان تقريب طول المنحنى بقطعتين مستقيمتين يقدم تقريبًا مقبولًا، فلم لا نستخدم ثلاث نقاط أو أربعًا أو أكثر؟ باستخدام القطع المستقيمة الثلاث الموضحة في الشكل 2.5c، نحصل على تقريب أفضل

$$\begin{aligned} d_3 &= d\{(0, 1), (1, 0)\} + d\{(1, 0), (2, 1)\} + d\{(2, 1), (3, 4)\} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 5.99070. \end{aligned}$$

لاحظ أنه كلما زاد عدد القطع المستقيمة التي نستخدمها، كان التقريب أفضل. وستصبح هذه العملية أقل صعوبة مع تطوير مفاهيم التكامل. أما الآن، فسنذكر عددًا من التقديرات المتتالية الأفضل (الناتجة عن استخدام النقاط على المنحنى بإحداثيات x متساوية المسافة) في الجدول المجاور. ويقترح الجدول أن طول المنحنى يساوي تقريبًا 6.1 (وهي قيمة تختلف كثيرًا من مسافة الخط

عدد القطع المستقيمة	المسافة
1	4.24264
2	5.71592
3	5.99070
4	6.03562
5	6.06906
6	6.08713
7	6.09711

المستقيم في 4.2). إذا واصلنا هذه العملية باستخدام المزيد من القطع المستقيمة، فسيكون مجموع أطوالهم قريبًا من الطول الفعلي للمنحنى (أي حوالي 6.126). وكما هو الحال مع مسائل حساب ميل المنحنى، يتم حساب طول القوس كنهاية.



الشكل 2.6a
تقدير المنحنى باستخدام قطعتين مستقيمتين

المثال 1.3 تقدير طول قوس على المنحنى

قدر طول قوس المنحنى $y = \sin x$ بالفترة $0 \leq x \leq \pi$ (انظر الشكل 2.6a).

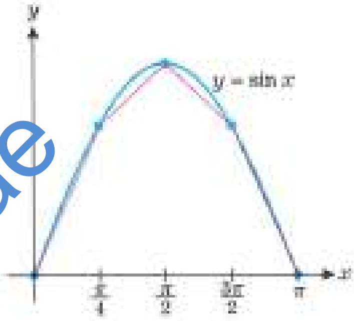
الحل نقاط أطراف المنحنى في هذه الفترة هما $(0, 0)$ و$(\pi, 0)$. والمسافة بين هاتين النقطتين هي $d_1 = \pi$. إن النقطة على التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ المقابلة لنقطة المنتصف للفترة $[0,\pi]$ هي $(\pi/2, 1)$. والمسافة من $(0, 0)$ إلى $(\pi/2, 1)$ زائد المسافة من $(\pi/2, 1)$ إلى $(\pi, 0)$ (الموضحة في الشكل 2.6a) هي

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} \approx 3.7242.$$

باستخدام النقاط الخمس $(0, 0)$ و $(\pi/4, 1/\sqrt{2})$ و $(\pi/2, 1)$ و $(3\pi/4, 1/\sqrt{2})$ و $(\pi, 0)$ (أي أربع قطع مستقيمة كما هو موضح في الشكل 2.6b)، يساوي مجموع أطوال هذه القطع المستقيمة

$$d_4 = 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.7901.$$

وباستخدام تسع نقاط (أي ثماني قطع مستقيمة)، سنحتاج إلى حاسبة وبعض الصبر لحساب المسافة التقريبية البالغة 3.8125 وستجد جدولًا يوضح مزيدًا من القيم التقريبية. في هذه المرحلة، سيكون من المعقول تقدير طول منحنى الجيب للفترة $[\pi,0]$ بأكثر قليلًا من 3.8. ■



الشكل 2.6b
تقدير المنحنى باستخدام أربع قطع مستقيمة

مجموع الأطوال	عدد القطع المستقيمة
3.8125	8
3.8183	16
3.8197	32
3.8201	64

ما وراء القوانين

في عملية تقدير كل من ميل المنحنى وطوله، ننفذ بعض عمليات التقريب (خط مستقيم) الواضحة بشكل معقول ونحاول تحسين هذه القيم التقريبية بطريقة منهجية. وفي كل حالة، كلما كانت القطعة المستقيمة أقصر اقتربت القيم التقريبية من القيمة المنشودة. ويتلخص جوهر ذلك بمفهوم النهاية، وهو ما يفصل رياضيات ما قبل التفاضل والتكامل عن التفاضل والتكامل. وفي البداية، قد تبدو فكرة النهايات ذات أهمية عملية طفيفة، حيث إننا لا نحسب في هذه الأمثلة الحل الدقيق. في الوحدات القادمة، سنجد طرقًا مختصرة وبسيطة بشكل مدهش للإجابات الدقيقة.

التمارين 2.1

تمارين الكتابة

1. لتقدير ميل $f(x) = x^2 + 1$ عند $x = 1$، ستحسب قيم الميل لعدة مستقيمات قاطعة. لاحظ أن $y = x^2 + 1$ بشكل منحنى. اشرح سبب أنه سيكون للمستقيم القاطع الذي يصل بين $(1, 2)$ و $(1.1, 2.21)$ ميلًا أكبر من المنحنى. ناقش كيف يكون ميل المستقيم القاطع الذي يصل بين $(1, 2)$ و $(0.9, 1.81)$ مقارنة بميل المنحنى.

2. اشرح السبب في أن كل قيمة تقريبية لطول القوس في المثال 1.3 أقل من طول القوس الفعلي.

في التمارين 1 إلى 6، قدّر ميل $y = f(x)$ عند $x = a$ (كما في المثال 1.1).

1. $f(x) = x^2 + 1$, (a) $a = 1$ (b) $a = 2$

2. $f(x) = x^3 + 2$, (a) $a = 1$ (b) $a = 2$

3. $f(x) = \cos x$, (a) $a = 0$ (b) $a = \pi/2$

4. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, (a) $a = 0$ (b) $a = 3$

5. $f(x) = e^x$, (a) $a = 0$ (b) $a = 1$

6. $f(x) = \ln x$, (a) $a = 1$ (b) $a = 2$

في التمارين 7 إلى 12، قدّر طول المنحنى $y = f(x)$ في الفترة المحددة باستخدام (a) $n = 4$ و (b) $n = 8$ قطع مستقيمة. (c) إذا تمكنت من برمجة حاسبة أو حاسب آلي، استخدم n أكبر وخمن الطول الفعلي للمنحنى.

7. $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$

8. $f(x) = \sin x, 0 \le x \le \pi/2$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, 0 \le x \le 3$

10. $f(x) = 1/x, 1 \le x \le 2$

11. $f(x) = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$

12. $f(x) = x^3 + 2, -1 \le x \le 1$

تناقش التمارين 13 إلى 16 المسألة الخاصة بإيجاد مساحة منطقة.

13. ارسم القطع المكافئ $y = 1 - x^2$ وظلل المنطقة فوق المحور x بين $x = -1$ و $x = 1$ (a) ارسم المستطيلات التالية.
(1) بارتفاع $f(-\frac{3}{4})$ وعرض $\frac{1}{2}$ ويمتد من $x = -1$ إلى $x = -\frac{1}{2}$
(2) بارتفاع $f(-\frac{1}{4})$ وعرض $\frac{1}{2}$ ويمتد من $x = -\frac{1}{2}$ إلى $x = 0$.
(3) بارتفاع $f(\frac{1}{4})$ وعرض $\frac{1}{2}$ ويمتد من $x = 0$ إلى $x = \frac{1}{2}$.
(4) بارتفاع $f(\frac{3}{4})$ وعرض $\frac{1}{2}$ ويمتد من $x = \frac{1}{2}$ إلى $x = 1$
احسب مجموع مساحات المستطيلات.
(b) اقسم الفترة $[-1, 1]$ إلى 8 أجزاء وأنشئ مستطيلات بالطول المناسب لكل فترة جزئية. أوجد مجموع مساحات المستطيلات. مقارنة بالقيمة التقريبية في الجزء (a). اشرح السبب الذي تتوقع من أجله أن تكون هذه قيمة تقريبية أفضل للمساحة الفعلية تحت القطع المكافئ.

14. استخدم حاسبة أو حاسبًا آليًا لمقارنة القيمة التقريبية للمساحة في التمرين 13 باستخدام (a) 16 مستطيلًا (b) 32 مستطيلًا (c) 64 مستطيلًا. وباستخدام هذه الحسابات لتخيل القيمة الدقيقة للمساحة تحت القطع المكافئ.

15. استخدم أسلوب التمرين 13 لتقدير المساحة وفوق $y = \sin x$ وأعلى المحور x بين $x = 0$ و $x = \pi$.

16. استخدم أسلوب التمرين 13 لتقدير المساحة تحت $y = x^2$ وفوق المحور x بين $x = 0$ و $x = 1$.

17. قدّر طول المنحنى $y = \sqrt{1 - x^2}$ لـ $0 \le x \le 1$ مع (a) $n = 4$ و (b) $n = 8$ قطع مستقيمة. اشرح السبب في أن الطول الفعلي يساوي $\pi/2$. ما مدى دقة تقديراتك؟

18. قدّر طول المنحنى $y = \sqrt{9 - x^2}$ لـ $0 \le x \le 3$ مع (a) $n = 4$ و (b) $n = 8$ قطع مستقيمة. اشرح السبب في أن الطول الفعلي يساوي $3\pi/2$. كيف يكون تقدير π من الجزء (b) من التمرين مقارنة بالتقدير الناتج عن الجزء (b) من التمرين 17؟

تمارين استكشافية

1. في هذا التمرين، ستتعلم طريقة حساب ميل المنحنى عند نقطة مباشرة. افترض أنك تود معرفة ميل $y = x^2$ عند $x = 1$. يمكنك البدء بحساب قيم ميل المستقيمات القاطعة التي تصل بين النقطة $(1, 1)$ والنقاط القريبة. على فرض أنّ النقاط القريبة لها إحداثيات x، $1 + h$، حيث إنّ h عدد صغير (موجب أو سالب). اشرح السبب في أن إحداثيات y المقابلة تساوي $(1 + h)^2$، وبرهن أنّ ميل القاطع هو $\frac{(1+h)^2 - 1}{1 + h - 1}$ وأنه يمكن أن يُبسّط إلى $2 + h$. بينما يقترب h من القيمة 0، يقدر هذا الميل بميل المماس. افترض أنّ h يقترب من 0، برهن أنّ ميل المماس يساوي 2. وبالمثل، برهن أنّ ميل $y = x^2$ عند $x = 2$ يساوي 4 وأوجد ميل $y = x^2$ عند $x = 3$. وبناء على إجاباتك، تخيّل قانونًا لميل $y = x^2$ عند $x = a$ لأي قيمة محددة لـ a.

مفهوم النهاية

في هذا الدرس، نطور مفهوم النهايات باستخدام لغة متداولة وتوضيح الفكرة باستخدام بعض الأمثلة البسيطة. ويبدو المفهوم سهل الاستيعاب من الناحية البديهية، ولكن يكون أصعب في التحديد من الناحية الدقيقة. ونقدم التعريف الدقيق للنهايات في الدرس 2.6. فهناك، تعرّف النهايات بعناية وبتفصيل مستفيض. ويعتبر المفهوم غير الرسمي للنهايات والذي نقدمه ونعمل عليه في الدروس 2.3 و 2.4 و 2.5 كافيًا لجميع الأغراض.

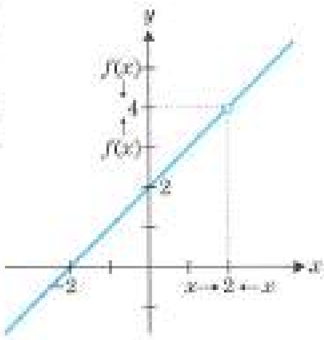
افترض أنّ الدالة f معرفة لجميع قيم x في الفترة المفتوحة التي تحتوي على a، باستثناء $x = a$. إذا تمكنا من أن تجعل قيمة $f(x)$ عشوائيًا أقرب إلى العدد L (أي بأقرب قيمة تود أن تساويها) بأن تجعل x قريبة إلى حد كبير من a (على ألا تساوي a)، فيمكننا القول أنّ L هي نهاية $f(x)$، عندما تقترب x من a، ونكتب $\lim_{x \to a} f(x) = L$. على سبيل المثال، لدينا $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$، وحيث إنه كلما اقتربت x من 2، فإن x^2 تقترب أكثر من 4.

ادرس الدوال

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ و } g(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}.$$

لاحظ أن كلًا من الدالتين غير معرفة عند $x = 2$. إذًا، ما الذي يعنيه ذلك بخلاف أنه لا يمكنك التعويض بـ 2 لـ x؟ ودائمًا ما نجد تلميحات هامة حول سلوك الدالة من التمثيل البياني. (انظر الشكلين 2.7a و2.7b).

لاحظ أنّ التمثيلات البيانية لهاتين الدالتين تبدو مختلفة بالقرب من $x = 2$. وبالرغم من أنه لا يمكننا قول أي شيء عن قيمة هذه الدوال عند $x = 2$ (حيث إنها خارج مجال كلتا الدالتين) يمكننا دراسة سلوكهما بالقرب من هذه النقطة. وهذا ما ستساعدنا فيه النهايات.



الشكل 2.7a

$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

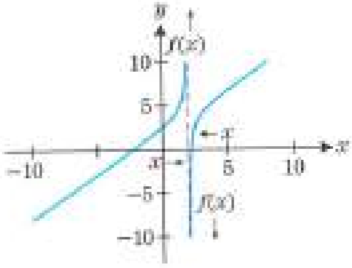
المثال 2.1 إيجاد قيمة النهايات

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

الحل أولاً، بالنسبة للدالة $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$، نحسب بعض قيم الدالة عندما تكون x قريبة من 2 في الجداول التالية.

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001



الشكل 2.7b
$y = \dfrac{x^2-5}{x-2}$

لاحظ أنه مع تحركك لأسفل العمود الأول من الجدول، تقترب قيم x من 2، ولكنها جميعها أصغر من 2. ونستخدم الرمز $x \to 2^-$ للإشارة إلى أنّ x تقترب من 2 من جهة *اليسار*. لاحظ أن الجدول والتمثيل البياني يوضحان انه كلما اقتربت x أكثر نحو العدد 2 (على أن تكون $x < 2$)، تقترب $f(x)$ أكثر من 4. وفي ضوء هذه المعطيات، نقول إنّ **نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار هي 4**، ونكتب

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

ونستخدم الرمز $x \to 2^+$ للإشارة إلى أنّ x تقترب من 2 من جهة *اليمين*. ونحسب بعضًا من هذه القيم في الجدول الثاني.

يقترح الجدول والتمثيل البياني أنه بينما تقترب x أكثر إلى 2 (على أن تكون $x > 2$)، تقترب $f(x)$ أكثر من 4. وفي ضوء هذه المعطيات، نقول إن **نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليمين هي 4**، ونكتب

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

ونطلق على $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **نهايات أحادية الطرف**. حيث إنّ النهايتين أحاديتي الطرف لـــ $f(x)$ متساويتان، نلخّص نتائجنا بأن نقول

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

يُعدّ الغرض من مفهوم النهايات المذكور هنا هو تتبّع سلوك الدالة بالقرب من بعض النقاط محل الاهتمام ولكن ليس عند هذه النقطة نفسها. وأخيرًا، نلاحظ أنه يمكننا أيضًا تحديد هذه النهاية جبريًا على النحو التالي. لاحظ أنه حيث إن للتعبير في البسط عوامل $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$، يمكننا كتابة

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \quad \text{حذف العامل } (x-2)$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 \quad \text{عندما تقترب } x \text{ من } 2\text{، } (x+2) \text{ تقترب من } 4$$

حيث يمكننا حذف العامل $(x-2)$ لأنه في النهاية $x \to 2$، x قريبة من 2، ولكن $x \neq 2$، وبالتالي فإنّ $x - 2 \neq 0$. ■

x	$g(x)=\dfrac{x^2-5}{x-2}$
1.9	13.9
1.99	103.99
1.999	1003.999
1.9999	10,003.9999

المثال 2.2 النهايات غير الموجودة

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{x-2}$

الحل كما في المثال 2.1، نعتبر النهايات أحادية الطرف لـ $g(x)=\dfrac{x^2-5}{x-2}$، على أنها $x\to 2$. بناء على التمثيل البياني في الشكل 2.7b وجدول القيم التقريبية للدالة الموضح جانبًا.

لاحظ أنه بينما تقترب x أكثر من العدد 2 (على أن تكون $x<2$)، تزداد $g(x)$ بدون حد. حيث إنه لا يوجد عدد تقترب منه $g(x)$، نقول إن النهاية $g(x)$ عندما x تقترب من 2 من جهة اليسار غير موجودة ونكتب

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) \quad \text{غير موجودة.}$$

x	$g(x)=\dfrac{x^2-5}{x-2}$
2.1	−5.9
2.01	−95.99
2.001	−995.999
2.0001	−9995.9999

بالمثل، يقترح التمثيل البياني وجدول قيم الدالة لـ $x>2$ (الموضح في الهامش) أن $g(x)$ يتناقص بدون حدود بينما تقترب x من 2 من اليمين. وحيث إنه لا يوجد عدد تقترب منه $g(x)$ نقول إن

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) \quad \text{غير موجودة.}$$

وأخيرًا، حيث إنه لا يوجد قيمة مشتركة للنهايات أحادية الطرف $g(x)$ (في الحقيقة كلتا النهايتان غير موجودتين)، نقول إن

$$\lim_{x\to 2} g(x) \quad \text{غير موجودة.}$$

قبل الانتقال، لا بد أن نلخص ما ذكرناه بشأن النهايات.

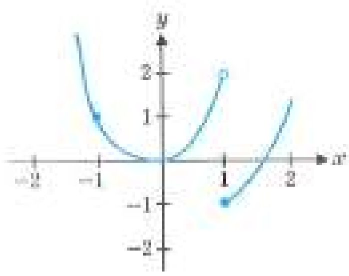
> تكون النهاية موجودة إذا وفقط إذا كانت النهايتين أحاديتي الطرف موجودتين ومتساويتين. أي إنّ،
>
> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ لعدد ما L إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

بعبارة أخرى، يمكننا أن نقول إن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ إذا كان بإمكاننا أن نجعل $f(x)$ بأقرب قيمة ممكنة لـ L بأن نجعل x تقترب إلى حد كبير من a على كلا طرفي a، دون أن تساويه. لاحظ أنه يمكننا التفكير في النهايات من وجهة نظر بيانية بحتة، كما في المثال 2.3.

المثال 2.3 تحديد النهايات بيانيًا

استخدم التمثيل البياني في الشكل 2.8 لتحديد $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

الحل بالنسبة للنهاية $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$، ندرس قيم y عندما تقترب x أكثر من 1، على أن تكون $x<1$. أي أننا نتتبع التمثيل البياني باتجاه $x=1$ من جهة اليسار ($x<1$). لاحظ أن النقاط النهائية للتمثيل البياني تقع في الدائرة المفتوحة عند النقطة $(1\,,2)$. وبالتالي نقول $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$. بالنسبة للنهاية $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$، نتتبع التمثيل البياني باتجاه $x=1$ من جهة اليمين ($x>1$). في هذه الحالة، لاحظ أن النقاط الطرفية للتمثيل البياني تقع في الدائرة الممتلئة عند النقطة $(1\,,-1)$. لهذا السبب نقول إن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$. وحيث إن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$، نقول إن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة. وأخيرًا، لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$، وحيث إن التمثيل البياني يقترب من قيمة y التي تساوي العدد 1 عندما تقترب x من -1 على طرفيه اليمين واليسار. ■



الشكل 2.8

$y=f(x)$

المثال 2.4 النهايات التي يختصر فيها عاملين

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x+9}{x^2-9}$.

الحل ندرس التمثيل البياني (انظر الشكل 2.9) ونحسب بعض قيم الدوال لـ x بالقرب من -3. بناء على هذا الدليل العددي والبياني، فمن المنطقي أن نتخيل أن

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}$$

لاحظ أيضاً أن

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-3)} \quad \text{اختصار العامل } (x+3)$$

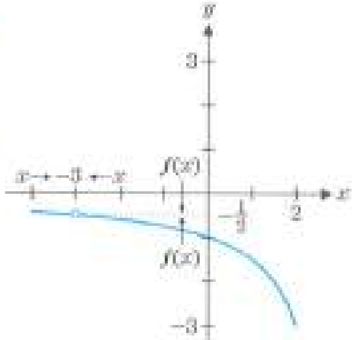
$$= \lim_{x\to -3^-} \frac{3}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

نظرًا إلى أن $(x-3) \to -6$ عندما $x \to -3$. يكون اختصار العامل $(x+3)$ ممكنًا حيث إنه في النهاية بينما تقترب $x \to -3$ تكون x قريبة من -3، ولكن $x \neq -3$ وبالتالي $x+3 \neq 0$. وبالمثل،

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}$$

وأخيرًا، حيث إن الدالة تقترب من القيمة نفسها بينما تقترب $x \to -3$ من الطرفين اليمين واليسار (أي أن النهايتين أحاديتي الطرف متساويتان)، نقول

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}$$ ■



الشكل 2.9
$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x+9}{x^2-9} = -\dfrac{1}{2}$

x	$\dfrac{3x+9}{x^2-9}$
−2.9	−0.508475
−2.99	−0.500835
−2.999	−0.500083
−2.9999	−0.500008

x	$\dfrac{3x+9}{x^2-9}$
−3.1	−0.491803
−3.01	−0.499168
−3.001	−0.499917
−3.0001	−0.499992

وفي المثال 2.4، توجد النهاية حيث توجد النهايتان أحاديتا الطرف وتتساويان. في المثال 2.5، لا يوجد أي من النهايتين أحاديتي الطرف.

المثال 2.5 النهاية غير الموجودة

حدد ما إذا كانت $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x+9}{x^2-9}$ موجودة أم لا.

الحل نرسم أولاً التمثيل البياني (انظر الشكل 2.10) ونحسب بعض قيم الدوال لـ x القريبة من 3.

بناء على الدليل العددي والجبري، يبدو أنه بينما تقترب $x \to 3^+$ فإن $\dfrac{3x+9}{x^2-9}$ تتزايد بدون حدود وبالتالي،

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3x+9}{x^2-9} \quad \text{غير موجودة}$$

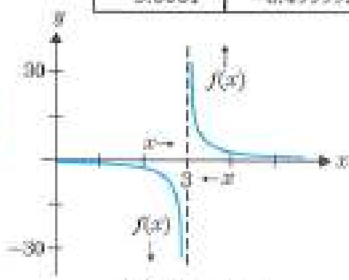
وبالمثل، من التمثيل البياني وجدول القيم لـ $x < 3$، يمكننا أن نقول

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x+9}{x^2-9} \quad \text{غير موجودة}$$

حيث إنه لا يوجد أي من النهايتين أحاديتي الطرف، نقول إن

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9} \quad \text{غير موجودة}$$

ونأخذ هنا كلتا النهايتين أحاديتي الطرف بغرض الاكتمال. وبالطبع ينبغي أن تتذكر دائمًا أنه إذا لم يوجد أي من النهايتين أحاديتي الطرف، فلن توجد نهاية. ■



الشكل 2.10
$y = \dfrac{3x+9}{x^2-9}$

x	$\dfrac{3x+9}{x^2-9}$
3.1	30
3.01	300
3.001	3000
3.0001	30,000

x	$\dfrac{3x+9}{x^2-9}$
2.9	−30
2.99	−300
2.999	−3000
2.9999	−30,000

لا يمكن حل العديد من النهايات باستخدام الطرق الجبرية. وفي هذه الحالات، يمكننا تقريب النهاية باستخدام الدليل العددي والبياني كما ترى في المثال 2.6.

المثال 2.6 تقريب قيمة النهاية

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

الحل يعكس بعض النهايات التي درسناها سابقًا، لا يوجد طريقة جبرية لتحول هذا التعبير إلى أبسط صورة. وبالرغم من ذلك، لا نزال بإمكاننا رسم التمثيل البياني (انظر الشكل 2.11) وحساب بعض قيم الدالة.

x	$\frac{\sin x}{x}$
0.1	0.998334
0.01	0.999983
0.001	0.99999983
0.0001	0.9999999983
0.00001	0.999999999983

x	$\frac{\sin x}{x}$
−0.1	0.998334
−0.01	0.999983
−0.001	0.99999983
−0.0001	0.9999999983
−0.00001	0.999999999983

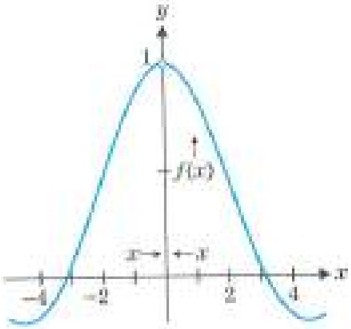
يقودنا التمثيل البياني وجدول القيم إلى التخمينات التالية:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

والتي من خلالها نتصور أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(في الوحدة 2، سندرس هذه النهايات بعناية أكبر ونبرهن على أن هذه التصورات صحيحة). ■

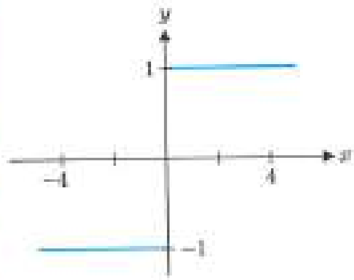


الشكل 2.11

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ملاحظة 2.1

يعتبر حساب النهايات بحاسبة أو حاسوب أمرًا غير موثوق. وستخدم التمثيلات البيانية وجداول القيم فقط كدليل (قوي) يشير لما يمكن أن تساويه الإجابة المحتملة. وللتأكد، نحتاج للحصول على تحقق دقيق من صحة تصوراتنا. وستكتشف ذلك في الدروس 2.3 إلى 2.7.



الشكل 2.12a

$y=\frac{x}{|x|}$

المثال 2.7 الحالات التي لا تتفق فيها النهايات أحادية الطرف

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$.

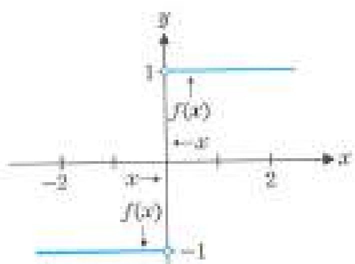
الحل إن التمثيل البياني المتولد من الحاسوب في الشكل 2.12a غير كامل، حيث إن $\frac{x}{|x|}$ غير محددة عند $x=0$. إذًا لا يوجد نقطة عند $x=0$. يوضح التمثيل البياني في الشكل 2.12b الدوائر الفارغة عند تقاطعات التصفين للتمثيل البياني مع المحور y. لدينا أيضًا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} && \text{بما أن } |x|=x \text{ عندما } x>0\\ &= \lim_{x\to 0^+}1\\ &=1\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x} && \text{بما أن } |x|=-x \text{ عندما } x<0\\ &= \lim_{x\to 0^-}-1\\ &=-1\end{aligned}$$

ينتج من ذلك أن $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ غير موجودة، حيث إن النهايتين أحاديتي الطرف غير متساويتين. ينبغي عليك أن تتذكر أيضًا أن هذه الملاحظة تتفق تمامًا مع ما نراه في التمثيل البياني. ■



الشكل 2.12b

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ غير موجودة

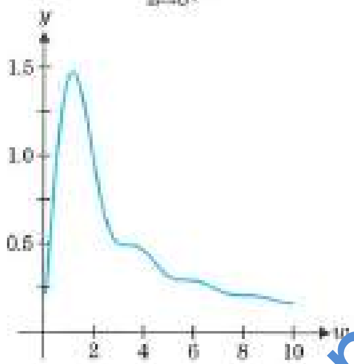
المثال 2.8 نهاية تصف حركة رمية بيسبول

تعتبر رمية الكرة بمفاصل اصبعين من اليد في لعبة البيسبول من أروع الضربات المثيرة. ويصف الرماة هذه الرمية للكرة بأنها تتحرك يسارًا ثم يمينًا ثم أعلى ثم أسفل. وتكون السرعة العادية لهذه الرمية 60 mph ، ويمكن الحصول على موقع الكرة الأيسر/الأيمن (بالقدم) بينما تعبر قاعدة الملعب من خلال

$$f(\omega) = \frac{1.7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\sin(2.72\omega)$$

(مقتبسة من البيانات التجريبية من كتاب واتس وباهيل Keeping Your Eye on the Ball) حيث تمثل ω السرعة الدورانية للكرة بالقياس الدائري لكل ثانية وحيث يقابل $f(\omega) = 0$ منتصف قاعدة الملعب. ويعرف بين محترفي اللعبة من الرماة في البيسبول أنه كلما صغرت دوراتها، كانت الرمية أفضل. للتحقق من هذه النظرية، تعتبر نهاية $f(\omega)$ عندما $\omega \to 0^+$ كما هو الحال دائمًا، تنظر في التمثيل البياني (ندرس الشكل 2.13) ونستخلص جدولًا لقيم الدالة. ويقترح الدليل $\lim_{\omega \to 0^+} f(\omega) = 0$.

ω	$f(\omega)$
10	0.1645
1	1.4442
0.1	0.2088
0.01	0.021
0.001	0.0021
0.0001	0.0002



الشكل 2.13
$y = \frac{1.7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\sin(2.72\omega)$

وتشير النهاية إلى أنّ رمية الكرة المثيرة التي لا يوجد بها دوران لا تتحرك على الإطلاق (وبالتالي يسهل ضربها). وفقًا لواتس وباهيل، ينتج معدل الدوران البطيء للغاية بحوالي 1 إلى 3 قياس دائري في الثانية الواحدة أفضل رمية (أي أكثر حركة). انظر مرة أخرى إلى الشكل 2.13 لتقنع نفسك بأن هذا الأمر يبدو منطقيًا تمامًا. ■

التمارين 2.2

تمارين الكتابة

1. افترض أن معلمك يقول إنّ "النهاية هي التوقع لما ستكون عليه قيمة $f(a)$". ناقش صحة هذه العبارة. ماذا يعني ذلك؟ هل تقدم وجهة نظر هامة؟ هل هناك أي معلومات مضللة بها؟ ضع الجملة بالخط البائل مع وصفك الخاص لما تكون عليه النهاية.

2. في المثال 2.6، نخمن أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ناقش قوة الدليل لهذا التخمين. وإن كان من الصحيح أنّ $\frac{\sin x}{x} = 0.998$ لـ $x = 0.00001$ فكم سيضعف ذلك الحالة التي بين أيدينا؟ هل يمكن أن يكون الدليل البياني والعددي مقنعين تمامًا؟

3. لقد لاحظنا أنّ $\lim_{x \to a} f(x)$ لا يعتمد على القيمة الفعلية لـ $f(a)$، أو إذا كانت $f(a)$ موجودة أم لا. من ناحية المبدأ، تكون الدوال مثل $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 13, & x = 2 \end{cases}$ "عادية" مثل الدوال $g(x) = x^2$. ومع وضع هذا في الحسبان، اشرح السبب وراء أهمية إستقلال مفهوم النهايات عن كيفية تحديد $f(a)$ (أو إذا كانت محددة أم لا).

4. يعتبر أكثر النهايات شيوعًا والذي نواجهه في حياتنا اليومية هو حدود السرعة. اذكر كيف يكون هذا النوع من النهايات مختلف تمامًا عن النهايات التي ناقشناها.

في التمارين من 1 إلى 6، استخدم الدليل العددي والبياني لتخمين القيم لكل نهاية. وإذا أمكن، استخدم التحليل إلى العوامل للتحقق من صحة تخمينك

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$

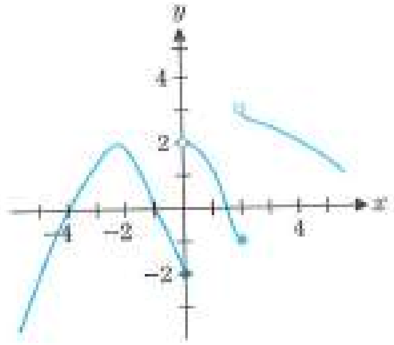
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{x^2-5x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{x^2+2x}$

في التمرينين 7 و8، حدد كل نهاية أو اذكر عدم وجودها في كلٍ مما يلي:



7. (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

8. (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ (h) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

9. ارسم التمثيل البياني لـ $f(x)=\begin{cases} 2x\ , & x<2 \\ x^2\ , & x\ge 2\end{cases}$
وحدد كل نهاية فيما يلي:
(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

10. ارسم التمثيل البياني لـ $f(x)=\begin{cases} x^2-1\ , & x<0 \\ 0\ , & x=0 \\ \sqrt{x+1}-2\ , & x>0\end{cases}$
وحدد كل نهاية فيما يلي:
(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

11. أوجد قيمة $f(1.01)$، $f(1.1)$، $f(1.5)$ و $f(1.001)$ وخمن قيمة لـ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ للدالة $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. أوجد قيمة $f(0.99)$، $f(0.9)$، $f(0.5)$ و $f(0.999)$ وخمن قيمة لـ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ للدالة $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. هل توجد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$؟

12. أوجد قيمة $f(-1.01)$، $f(-1.1)$، $f(-1.5)$ و $f(-1.001)$ وخمن قيمة لـ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ للدالة $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$. أوجد قيمة $f(-0.99)$، $f(-0.9)$، $f(-0.5)$ و $f(-0.999)$ وخمن قيمة لـ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ للدالة $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$. هل توجد $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$؟

في التمارين من 13 إلى 22، استخدم الدليل العددي والبياني لتصور إن كانت النهاية عند $x=a$ موجودة أم لا. إذا كانت الإجابة لا، اذكر ما يحدث عند $x=a$ بيانيًا.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sin x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|}{x^2-1}$

في التمارين من 23 إلى 26، ارسم التمثيل البياني للدالة بالخواص المذكورة.

23. $f(-1)=2, f(0)=-1, f(1)=3$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة.

24. $f(x)=1$ لـ $-2\le x\le 1$، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=1$.

25. $f(0)=1$، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$، $f(0)=1$، $f(2)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة.

27. احسب $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$، $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2-4}$ والنهايات المماثلة للتحقق من التالي. افترض أنّ $f(x)$ و $g(x)$ هي كثيرات حدود حيث إنّ $g(a)=0$ و $f(a)\neq 0$. ما الذي يمكنك تخمينه بشأن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$؟

28. احسب $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}$، $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x}$ والنهايات المماثلة للتحقق من التالي. افترض أنّ $f(x)$ و $g(x)$ هي دوال حيث إنّ $f(a)=0$ و $g(a)\neq 0$. ما الذي يمكنك تخمينه بشأن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$؟

29. فكّر في الحجج التالية بشأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{x}$. أولًا، بينما يقترب $x>0$ من 0، $\dfrac{\pi}{x}$ يزداد بدون حد، حيث إنّ $\sin t$ يتضاءل بزيادة t، فإنّ النهاية غير موجودة. ثانيًا، بأخذ $x=1, 0.1, 0.01$ وما إلى ذلك، نحسب $\sin\pi=\sin 10\pi=\sin 100\pi=\cdots=0$ وبالتالي تساوي النهاية 0. أي من الحجج تبدو أفضل بالنسبة لك؟ اشرح ذلك. استكشف النهايات وحدد أي الإجابات صحيحة.

30. لـ $f(x)=\dfrac{x}{x^2+0.000001}$، احسب $f(0.1)$، $f(0.01)$ و $f(0.001)$. بناءً على هذه القيم، ما التخمين المنطقي لـ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$؟ احسب مزيدًا من قيم الدالة وراجع تخمينك.

31. (a) قدر عدديًا $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}$. لاحظ أن قيم الدالة لـ $x>0$ تتزايد بينما تتناقص x. أما عندما $x>0$ فتتزايد قيم الدالة عندما تتزايد x.

اشرح السبب في أنّ ذلك يشير إلى أنه إذا وجدت $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}$ فستكون بين قيم الدالة لـ x الموجبة والسالبة. قرّب هذه النهاية الصحيحة إلى ثمانية أرقام.

(b) اشرح الخطأ في المنطق التالي: عندما $x \to 0$، فمن الواضح أنّ $(1+x) \to 1$. حيث أنّ 1 مرفوعًا إلى قوة أسية يساوي 1 دائمًا، فإنّ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to0}(1)^{1/x} = 1$

32. قدّر عدديًا $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sec x}$. حاول تقدير $\lim\limits_{x\to0^-} x^{\sec x}$ عدديًا. إذا واجه الحاسوب صعوبة في إيجاد قيمة الدالة لـ x السالبة، فاشرح السبب.

33. اذكر مثالًا على دالة f بحيث يوجد $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ولا يوجد $f(0)$. اذكر مثالًا على دالة g بحيث يوجد $g(0)$ ولا يوجد $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

34. اذكر مثالًا على دالة f بحيث يوجد $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ويوجد $f(0)$ ولكن $\lim\limits_{x\to0} f(x) \neq f(0)$.

تطبيقات

35. يتم الحصول على ميل المماس للمنحنى $y = \sqrt{x}$ عند النقطة $x = 1$ من خلال $m = \lim\limits_{h\to0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$، قدّر الميل m. مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانيًا والمستقيم ذا الميل m والمار عبر بالنقطة $(1, 1)$.

36. يتم الحصول على السرعة المتجهة لجسم يتحرك $\sqrt{x}$ ميلًا في x ساعات عند علامة $x = 1$ ساعة من خلال $v = \lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. قدّر النهاية.

37. في الشكل 2.13، يوضح الموقع النهائي لكرة مقذوفة عند الزمن $t = 0.68$ كدالة لمعدل الدوران المحوري ω. وينبغي أن يقرر الرامي عند الزمن $t = 0.4$ أن يحرك مضربه أم لا. وعند $t = 0.4$، يتم الحصول على موقع الكرة الأيمن/الأيسر من خلال $h(\omega) = \frac{1}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\sin(1.6\omega)$. مثّل $h(\omega)$ بيانيًا ثم قارن بالشكل 2.13. تصور نهاية $h(\omega)$ حيث $\omega \to 0$ لـ $\omega = 0$. هل توجد أي أوجه اختلاف في موقع الكرة بين ما يراه الرامي عند $t = 0.4$ وبين ما يحاول ضربه عن $t = 0.68$؟

38. تم رمي قذيفة كرة بمسكة مختلفة عن المذكورة في المثال 2.8 ويمكن تمثيل موقعها الأيمن/الأيسر بينما تعبر قاعدة الملعب من خلال $f(\omega) = \frac{0.625}{\omega^2}\left[1 - \sin\left(2.72\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. استخدم الدليل البياني والعددي لتخمين $\lim\limits_{\omega\to0^+} f(\omega)$.

39. يفرض موقف سيارات رسومًا AED 2 للساعة أو جزء من الساعة، مع حد أقصى للتكلفة AED 12 لليوم بأكمله. إذا كان $f(t)$ يساوي إجمالي فاتورة موقف السيارات لعدد t ساعات، ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $y = f(t)$ بحيث $0 \le t \le 24$. حدد النهايات $\lim\limits_{t\to3.5} f(t)$ و $\lim\limits_{t\to4} f(t)$، إن وجدتا.

40. لموقف السيارات المذكور في التمرين 39، حدد جميع قيم a حيث $0 \le a \le 24$ وبحيث لا تكون $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ موجودة. ناقش بإيجاز تأثير ذلك على استراتيجية إيقاف السيارة (على سبيل المثال، هل يوجد أوقات تكون على عجلة لتحريك سيارتك أو أوقات لا يهم إن حركت سيارتك أم لا؟).

تمارين استكشافية

1. في موقف مماثل للمذكور في المثال 2.8، يمكن تمثيل الموقع الأيمن/الأيسر لقذيفة كرة من خلال $P = \frac{5}{8\omega^2}(1 - \cos 4\omega t)$، حيث إنّ t هو الزمن بالثواني $(0 \le t \le 0.68)$ و ω هو معدل الدوران المحوري بالقياس الدائري بالثانية. في المثال 2.8، اخترنا قيمة محددة لـ t وأوجدنا قيمة النهاية بينما $\omega \to 0$. وبينما يمتحنا ذلك بعض المعطيات حول معدلات الدوران المحوري الناتجة عن الضربات التي يصعب صدها، تنبثق صورة أفضل بينما ننظر على P بمجالها بالكامل. اجعل $\omega = 10$ ومثّل الدالة $\frac{1}{160}(1 - \cos 40t)$ بيانيًا لـ $0 \le t \le 0.68$. تخيل النظر إلى رامٍ من أعلى وحاول تصور كرة بيسبول تبدأ من يد الرامي عند $t = 0$ وتصل في النهاية إلى الرامي عند $t = 0.68$. كرر ذلك مع $\omega = 0.1, \omega = 1, \omega = 5$ وأي قيم لـ ω تعتقد أنها مثيرة للاهتمام. أي قيم ω تنتج رميات يصعب صدها؟

2. في هذا التمرين، ستعتمد النتائج التي تحصل عليها على دقة الحاسوب أو حاسبتك. ستستكشف $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$. ابدأ بالعمليات الحسابية المقدمة في الجدول (قد تختلف إجاباتك).

x	$f(x)$
0.1	−0.499583 . . .
0.01	−0.49999583 . . .
0.001	−0.4999999583 . . .

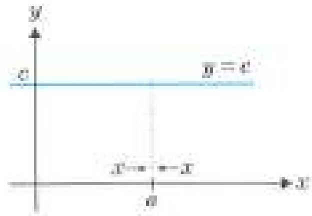
اذكر بأقصى دقة ممكنة النمط الموضح هنا. ما الذي تتوقعه لـ $f(0.0001)$ و $f(0.00001)$؟ هل يمنحك الحاسوب أو حاسبتك هذه الإجابة؟ إذا واصلت تجربة القوى الأسية للعدد 0.1 (0.000001 و0.0000001 وهكذا)، يجب أن تحصل في النهاية على نتيجة من −0.5. هل تعتقد أن هذه الإجابة الدقيقة الصحيحة أم تم تقريب الإجابة؟ لماذا يكون التقريب أمرًا لا مفر منه؟ يبدو أنّ −0.5 هي القيمة الدقيقة للنهاية. ومع ذلك، إذا واصلت إيجاد قيمة الدالة عند قيم أصغر من x، ستجد في النهاية قيمة دالة تساوي 0. وسنناقش هذا الخطأ في الدرس 2.7. أما الآن، أوجد قيمة $\cos x$ عند القيمة الحالية لـ x وحاول أن تشرح من أين يأتي العدد 0.

حساب النهايات

والآن، لديك فكرة عن ما تعنيه النهاية، لذا نحتاج إلى وضع بعض القواعد لحساب نهايات الدوال البسيطة. وسنبدأ بنهايتين بسيطتين.

لأي ثابت c وأي عدد حقيقي a

$$\lim_{x \to a} c = c. \qquad (3.1)$$



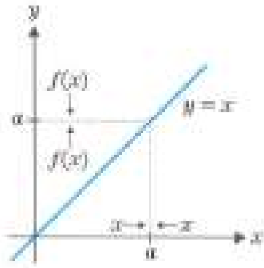
الشكل 2.14
$\lim_{x \to a} c = c$

بعبارة أخرى، تكون نهاية أي ثابت هي الثابت نفسه. ولا يعتبر هذا مفاجئاً حيث إنّ الدالة $f(x) = c$ لا تعتمد على x وبالتالي، تبقى كما هي عندما $x \to a$ (انظر الشكل 2.14). ومن النهايات البسيطة الأخرى ما يلي.

لأي عدد حقيقي a

$$\lim_{x \to a} x = a. \qquad (3.2)$$

لا يعتبر هذا مفاجئًا، حيث أنه عندما $x \to a$ سيقترب x من a (انظر الشكل 2.15). تأكد من أن تصل لدرجة جيدة من الإجادة لرمز النهاية وتتمكن من التعرف على مدى وضوح النهايات في (3.1) و(3.2)، ولتقدر بساطتها. نستخدمهم باستمرار في إيجاد النهايات الأكثر تعقيدًا. ونحتاج أيضًا إلى القواعد الأساسية الموجودة في النظرية 3.1.



الشكل 2.15
$\lim_{x\to a} x = a$

النظرية 3.1

افترض أنّ $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وافترض أنّ c هو أي ثابت. إذًا سيتطبق ما يلي:

(i) $\lim_{x\to a}[c \times f(x)] = c \times \lim_{x\to a} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

(iv) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (بشرط $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$).

برهان النظرية 3.1 يتطلب التعريف الرسمي للنهايات الذي تمت مناقشته بالدرس 2.6. وينبغي عليك أن تفكر في هذه القواعد على أنها نتائج منطقية، بشرط اكتسابك للفهم البديهي لماهية النهايات. اقرأ ذلك لفظيًا. على سبيل المثال، ينص الجزء (ii) على ان النهاية لناتج جمع (أو لناتج فرق) يساوي ناتج جمع (أو ناتج فرق) النهايات، *إذا كانت* النهايات موجودة. فكر في ذلك على النحو التالي. عندما تقترب x من a، تقترب $f(x)$ من L وتقترب $g(x)$ من M، فينبغي أن يقترب $f(x) + g(x)$ من $L + M$.

لاحظ أنه بتطبيق الجزء (iii) من النظرية 3.1 بحيث $g(x) = f(x)$ نعرف أنه عندما تكون $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة،

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^2 = \lim_{x\to a}[f(x) \times f(x)]$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^2$$

وبالمثل، لأي عدد صحيح موجب n يمكننا تطبيق الجزء (iii) من النظرية 3.1 بشكل متكرر للحصول على

(3.3)

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

(انظر التمرينين 61 و62).

(3.4)

لاحظ أنه إذا كان $f(x) = x$ لكل عدد صحيح $n > 0$ وأي عدد حقيقي a فإن:

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

أي أنه لحساب النهاية لأي قوة موجبة لـ x، تقوم ببساطة بالتعويض عن قيمة x التي يتم الاقتراب منها.

مثال 3.1 إيجاد نهاية كثيرة حدود

طبّق قواعد النهايات لإيجاد $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 4)$

الحل لدينا

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4) = \lim_{x\to 2}(3x^2) - \lim_{x\to 2}(5x) + \lim_{x\to 2} 4$$ بناءً على النظرية (ii) 3.1

$$= 3\lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + 4$$ بناءً على النظرية (i) 3.1

$$= 3 \times (2)^2 - 5 \times 2 + 4 = 6.$$ بناءً على (3.4)

مثال 3.2 إيجاد نهاية دالة نسبية

طبّق قواعد النهايات لإيجاد $\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 2}$

الحل لدينا

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x+4}{x^2-2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^3-5x+4)}{\lim_{x\to 3}(x^2-2)}$$ بناءً على النظرية (iv) 3.1

$$= \frac{\lim_{x\to 3} x^3 - 5\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 4}{\lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 2}$$ بناءً على النظرية (i) 3.1 و (ii)

$$= \frac{3^3 - 5 \times 3 + 4}{3^2 - 2} = \frac{16}{7}$$ بناءً على (3.4)

ربما قد لاحظت أنه في الأمثلة 3.1 و3.2، انتهى الأمر ببساطة بالتعويض عن قيمة x. بعد اتخاذ العديد من الخطوات الوسيطة. في المثال 3.3، الأمر ليس بهذه البساطة.

مثال 3.3 إيجاد نهاية بالتحليل إلى العوامل

أوجد قيمة $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$

الحل لاحظ أن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x} \neq \frac{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(1-x)}$$

بما أن نهاية المقام صفرًا. (تذكر أن نهاية ناتج القسمة هو ناتج قسمة النهايات فقط عند وجود النهايتين وتكون نهاية المقام ليست صفرًا). ويمكننا حل هذه المسألة بملاحظة أن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$ تحليل البسط وإخراج العدد -1 عامل مشترك من المقام

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{-1} = -2$$ تبسيط وتعويض $x = 1$

حيث يكون حذف العامل $(x-1)$ ممكنًا لأنه في النهاية عندما $x \to 1$، تقترب x من 1، ولكن $x \neq 1$ وبالتالي $x - 1 \neq 0$

النظرية 3.2 توضح أن نهاية كثيرات الحدود هي ببساطة قيمة كثيرات الحدود عند هذه النقطة؛ أي أنه لإيجاد نهاية كثيرة حدود نعوض ببساطة عن القيمة التي تقترب منها x.

النظرية 3.2

لأي كثيرة حدود $p(x)$ وأي عدد حقيقي a،
$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

البرهان

افترض أن $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 0$
$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$
إذًا، من النظرية 3.1 ومن النتيجة (3.4)،
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)\\ &= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0\\ &= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = p(a). \quad \blacksquare\end{aligned}$$
من هنا يصبح إيجاد قيمة نهاية كثيرات الحدود سهلاً. ويتم إيجاد قيمة العديد من النهايات الأخرى بالسهولة نفسها.

النظرية 3.3

افترض أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$ وأن n هو أي عدد صحيح موجب. إذًا،
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$
حيث إنه لكل n زوجي، نفترض أن $L > 0$.

يُقدَّم برهان النظرية 3.3 في الملحق A. لاحظ أن هذه النتيجة تذكر أنه يمكننا (تحت الشروط الموضحة في الفرضية) أن ندخل النهايات "داخل" الجذور النونية n. ويمكننا بعدها استخدام قواعدنا القائمة لحساب النهايات بالداخل.

مثال 3.4 إيجاد قيمة نهاية الجذر النوني لكثيرة حدود

أوجد قيمة $\lim_{x\to 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$

الحل من نظريتي 3.2 و3.3، لدينا
$$\lim_{x\to 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x} = \sqrt[5]{\lim_{x\to 2}(3x^2 - 2x)} = \sqrt[5]{8} \quad \blacksquare$$

مثال 3.5 إيجاد نهاية بتنسيب المقام أو البسط

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

الحل أولاً، لاحظ أن كلا البسط والمقام يقتربان من 0 عندما يقترب x من 0. وبعكس المثال 3.3، لا يمكننا تحليل البسط إلى العوامل. ومع ذلك، يمكننا تنسيب البسط على النحو التالي:
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}\\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

ملحوظة 3.1

بشكل عام، في الحالة التي تكون فيها النهايات لكل من البسط والمقام تساوي 0، ينبغي أن تحاول تبسيط التعبير جبرًا إلى أبسط صورة للحصول على اختصارات كنا سنفعل في الأمثلة 3.3 و3.5.

ومع المساواة الأخيرة إذا كان $x \neq 0$ (كما هو الحال عندما $x \to 0$). إذًا، لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

بذلك فإننا لا نقتصر على مناقشة الدوال الجبرية فقط (أي تلك التي يمكن بناؤها باستخدام الجمع والطرح والضرب والقسمة، والأسية، وأخذ الجذر النوني n). نضع النتيجة التالية الآن، بدون برهان.

النظرية 3.4

لأي عدد حقيقي a، لدينا:

(i) $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$,

(ii) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$,

(iii) $\lim_{x\to a}e^x=e^a$

(iv) $\lim_{x\to a}\ln x=\ln a$, لكل $a>0$.

(v) $\lim_{x\to a}\sin^{-1}x=\sin^{-1}a$, لكل $-1<a<1$,

(vi) $\lim_{x\to a}\cos^{-1}x=\cos^{-1}a$, لكل $-1<a<1$,

(vii) $\lim_{x\to a}\tan^{-1}x=\tan^{-1}a$, لكل $-\infty<a<\infty$

(viii) إذا كانت p كثيرة حدود و $\lim_{x\to p(a)}f(x)=L$، فإن $\lim_{x\to a}f(p(x))=L$.

لاحظ أن نظرية 3.4 تنص على أنّ نهايات الـ sine والـ cosine والدالة الأسية واللوغاريتم الطبيعي والـ $\sin^{-1}$ والـ $\cos^{-1}$ والـ $\tan^{-1}$ يمكن إيجاد قيمتها ببساطة عن طريق التعويض. وسنجد مناقشة أكثر تفصيلًا للدوال التي تتمتع بهذه الخاصية (يطلق عليها الدوال المتصلة) في القسم 2.4

مثال 3.6 إيجاد قيمة نهاية معكوس دالة مثلثية

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

الحل من أجزاء النظرية 3.4 (v) و (viii)، لدينا

$$\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

يوجد الكثير من النهايات التي يمكننا حسابها باستخدام القواعد الأولية. ويمكن إيجاد قيمة العديد من النهايات باستخدام التحليل بعناية مما يتطلب دائمًا منهجية غير مباشرة. على سبيل المثال، فكّر في المسألة في المثال 3.7.

مثال 3.7 نهاية ناتج ضرب ليس بناتج ضرب النهايات

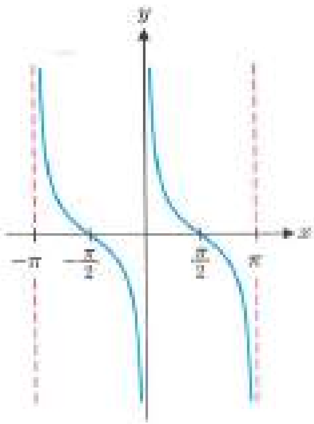
أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}(x\cot x)$.

الحل قد يكون رد فعلك الأول أن تقول أن نهاية ناتج ضرب لا بد أن تكون ناتج ضرب النهايات:

$$\lim_{x\to 0}(x\cot x)=\left(\lim_{x\to 0}x\right)\left(\lim_{x\to 0}\cot x\right) \quad \text{غير صحيح}$$

$$=0\cdot ?=0 \qquad (3.5)$$

حيث وضعنا علامة استفهام "?" فربما لا تعرف ما يجب أن تفعله في $\lim_{x\to 0}\cot x$. حيث إنّ النهاية الأولى هي 0، هل نحتاج إلى القلق بشأن النهاية الثانية؟ تكمن المشكلة هنا في أننا نحاول تطبيق نتيجة النظرية 3.1 في حالة لا تتحقق فيها الفرضية. بوجه خاص، تنص النظرية 3.1 أن نهاية ناتج الضرب هي ناتج ضرب النهايات ذات الصلة إذا وجدت النهايات. يقترح التمثيل البياني في الشكل 2.16 أنّ $\lim_{x\to 0}\cot x$ غير موجودة. ينبغي أن تحسب بعض قيم الدوال كذلك لإقناع نفسك بأن هذه هي الحالة بالفعل. حيث إنّ المعادلة (3.5) لا تنطبق



الشكل 2.16

$y=\cot x$

وحيث أنه لا يبدو أن أي من القواعد يمكن تطبيقها، نرسم تمثيلًا بيانيًا (انظر الشكل 2.17) ونحسب بعض قيم الدوال. بناء على هذه، نتصور أن

$$\lim_{x\to 0}(x\cot x) = 1$$

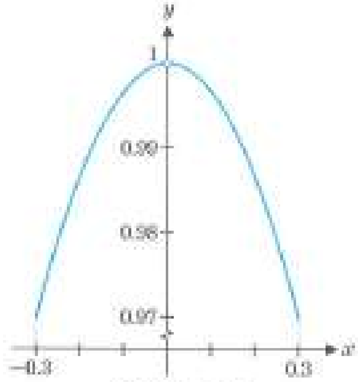
أي أن النهاية لا تساوي 0 على الإطلاق. كما كنت تشك في البداية. يمكنك أن تفكر في النهاية كذلك على النحو التالي

$$\lim_{x\to 0}(x\cot x) = \lim_{x\to 0}\left(x\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cos x\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

حيث إنّ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ وحيث إننا استخدمنا التخمين الذي وضعناه في المثال 2.6 بأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. (تحقق من صحة التخمين الأخير في القسم 2.6 باستخدام نظرية الشطيرة والتي تلي ذلك.) ■



الشكل 2.17
$y = x\cot x$

x	$x\cot x$
± 0.1	0.9967
± 0.01	0.999967
± 0.001	0.99999967
± 0.0001	0.9999999967
± 0.00001	0.999999999967

وبعد هذه النقطة، سنقدم أداة تساعد على تحديد عدد من النهايات الهامة.

النظرية 3.5 (نظرية الشطيرة)

افترض أنّ

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

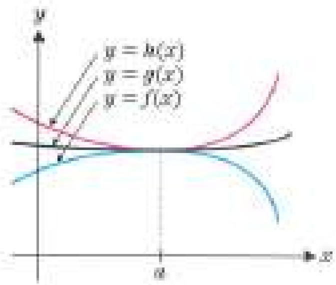
لكل x في الفترة (c, d) ما عدا النقطة $a \in (c, d)$ وأنّ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

ولعدد L. إذًا، يكون

كما أنّ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

نقدّم برهان النظرية 3.5 في الملحق A، حيث إنها تعتمد على التعريف الدقيق للنهايات والموجود في الدرس 2.6. وعلى الرغم من ذلك، إذا راجعت الشكل 2.18، فسترى بوضوح أنه إذا كانت $g(x)$ تقع بين $f(x)$ و $h(x)$ ما عدا عند a نفسها وكان لكل من $f(x)$ و $h(x)$ قيمة النهاية نفسها عندما $x \to a$ نفسها، فإنّ $g(x)$ تنحصر بين $f(x)$ و $h(x)$، وبالتالي فيجب أن تكون نهايتها L. يتمثل التحدي في استخدام نظرية الشطيرة في إيجاد الدوال الملائمة f و h التي تحدّ الدالة g من الأعلى والأسفل، على التوالي، ولها قيمة النهاية نفسها عندما $x \to a$.



الشكل 2.18
نظرية الشطيرة

مثال 3.8 استخدام نظرية الشطيرة للتحقق من صحة نهاية

حدد قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

الحل قد يكون رد فعلك الأول أن تلاحظ أنّ نهاية ناتج ضرب قد تكون ناتج ضرب النهايات،

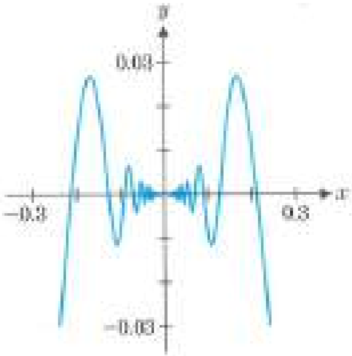
$$\lim_{x\to 0}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \stackrel{?}{=} \left(\lim_{x\to 0}x^2\right)\left[\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{غير صحيح} \qquad (3.6)$$

ومع ذلك، فإن التمثيل البياني لـ $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ الموجود في الشكل 2.19 يوضّح أنّ $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ يتذبذب ذهابًا وإيابًا بين -1 و 1. إضافة إلى ذلك، كلما اقترب x من 0، زادت سرعة التذبذب. ينبغي أن تحسب بعض قيم الدوال كذلك لإقناع نفسك بأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة. إذًا المعادلة (3.6) لا تنطبق وحيث يبدو عدم إمكانية تطبيق أي من القواعد، نرسم تمثيلًا بيانيًا ونحسب بعض قيم الدوال.

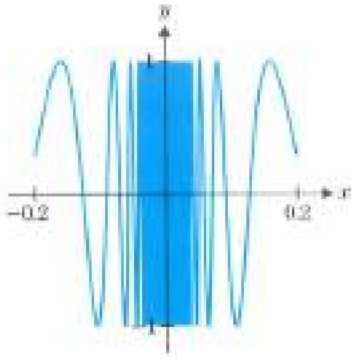
ملحوظة 3.1

تنطبق نظرية الشطيرة على النهايات أحادية الطرف.

يظهر التمثيل البياني لـ $y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في الشكل 2.20 وجدول قيم الدوال الموضح في الهامش.



الشكل 2.20
$y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



الشكل 2.19
$y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$x^2 \cos(1/x)$
± 0.1	-0.008
± 0.01	8.6×10^{-5}
± 0.001	5.6×10^{-7}
± 0.0001	-9.5×10^{-9}
± 0.00001	-9.99×10^{-11}

يشير التمثيل البياني وجدول قيم الدالة إلى التخمين

$$\lim_{x \to 0}\left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

الذي نثبته باستخدام نظرية الشطيرة. أولاً، علينا إيجاد الدالتين f و h بحيث يكون

$$f(x) \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le h(x)$$

لجميع القيم التي يكون عندها $x \neq 0$ يكون $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$ ونتذكر أن

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

لجميع القيم التي يكون عندها $x \neq 0$ وإذا ضربنا (3.7) في x^2 (لاحظ بما أن $x^2 \ge 0$)، فإن عملية الضرب هذه تُبقي على المتباينات كما هي، لذا سنحصل على

$$-x^2 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

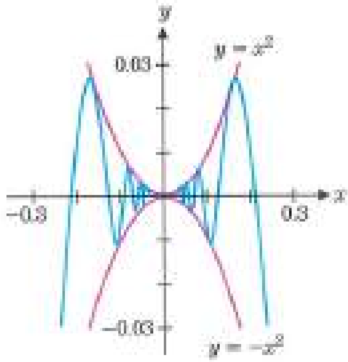
لجميع القيم التي يكون عندها $x \neq 0$ ويوضح هذه المتباينة في الشكل 2.21. وفضلاً عن ذلك،

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$$

لذا فإنه يتبين لنا الآن من نظرية الشطيرة أنّ

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

أيضًا، كما كنا قد خمّنا من قبل. ■



الشكل 2.21
$y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$، $y = x^2$ و $y = -x^2$

ما وراء الصيغ

لتحليل النهاية في المثال 3.8، لم نتمكن من تطبيق قواعد النهايات المنصوص عليها في النظرية 3.1. لذا فقد لجأنا إلى طريقة غير مباشرة لإيجاد النهايات. ويُشار في بعض الأحيان إلى هذه العملية البارعة المتقنة من التمثيلات البيانية الموثقة بالحسبان وما يتبعه من تحليل بأنها **قاعدة الثلاثة**. (حيث تشير هذه الاستراتيجية التي تستخدم في مواجهة المسائل إلى أنّ على المرء أن ينظر إلى المسائل من زاوية بيانية وعددية وتحليلية). في حالة المثال 3.8، يشير العنصر الأول والثاني من هذه "القاعدة" (وهما التمثيلات البيانية في الشكل 2.20 والجدول المرفق لقيم الدالة) إلى تخمين مقبول، بينما العنصر الثالث يقدم لنا تحققًا رياضيًا دقيقًا من صحة التخمين. ما الأوجه التي تشير إلى أنّ هذا يبدو مثل المنهج العلمي؟

غالبًا ما يتم تعريف الدوال بتعابير مختلفة في فترات مختلفة. وتعد هذه الدوال **متعددة التعريف** مهمة. سيتم مناقشتها في المثال 3.9.

مثال 3.9 نهاية الدالة متعددة التعريف

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث تُعرّف f كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\cos x + 1, & x < 0 \text{ عندما} \\ e^x - 4, & x \geq 0 \text{ عندما} \end{cases}$$

الحل بما أن f تعرّف بتعابير مختلفة عندما يكون $x < 0$ وعندما يكون $x \geq 0$ علينا أن نأخذ في الحسبان النهايات أحادية الطرف. حيث إن

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 2\cos x + 1) = 2\cos 0 + 1 = 3$$

وبحسب النظرية 3.4، نجد أيضًا أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x - 4) = e^0 - 4 = 1 - 4 = -3$$

بما أن النهايات أحادية الطرف مختلفة، فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة. ■

ونختم هذا الدرس بمثال عن استخدام النهايات في حساب السرعة. في الدرس 2.1، نرى أن الجسم الذي يتحرك في خط مستقيم، يُحدّد موقعه عند الزمن t بالدالة $f(t)$ وتكون سرعته اللحظية عند الزمن $t = 1$ (أي السرعة اللحظية عند اللحظة $t = 1$. تقابل السرعة المتوسطة في فترة زمنية) معطاة بالنهاية.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

مثال 3.10 إيجاد نهاية تصف السرعة اللحظية

افترض أن الدالة التي تحدد موقعًا لجسم ما عند الزمن t (بالثواني) تتمثل بـ

$f(t) = t^2 + 2$ (قدم)

أوجد السرعة اللحظية للجسم عند الزمن $t = 1$

الحل بالنظر إلى ما قد تعلمناه للتو عن النهايات، فإن حل هذه المسألة يعد الآن سهلًا. حيث إن

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - 3}{h}$$

وفي حين أننا لا نستطيع ببساطة أن نعوض عن h بالعدد 0 (لماذا؟)، بإمكاننا أن نكتب

$$\lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{h} \quad \text{تفكيك الحد المربع}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{1} = 2. \quad \text{اختصار العامل المشترك } h$$

إذًا فإن السرعة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن $t = 1$ هي 2 قدم بالثانية. ■

اليوم في الرياضيات

مايكل فريدمان (-1951)
عالم رياضيات أمريكي كان السبّاق إلى حل واحدة من أكثر المسائل شهرة في الرياضيات، وهي حدسية بوانكاريه رباعية الأبعاد. ويقول مايكل فريدمان، وهو الحائز على ميدالية فيلدز، التي ترقى في مجال الرياضيات إلى مستوى جائزة نوبل: "يأتي الكثير من قوة الرياضيات من عملية الجمع بين رؤى من فروع مختلفة لهذا الفرع من المعرفة. فالرياضيات بوصفها أسلوب تفكير لا تمثل مجموعة مختلفة من الموضوعات إلى حد بعيد. لذا فإنه من الممكن تطبيقها على أي فرع من فروع المعرفة." ويرى مايكل فريدمان في الرياضيات مجالًا مفتوحًا للبحث، قائلًا: "ليس من الضروري أن تكون ذا باع طويل في مجال ما كي تسهم في تقدمه."

التمارين 4.3

تمارين كتابية

1. انطلاقًا من معرفتك بالتمثيلات البيانية لكثيرات الحدود، اشرح لماذا تعتبر المعادلتان (3.1) و (3.2) والنظرية 3.2 واضحة.

2. اشرح نظرية الشطيرة بجملة واحدة أو اثنتين. استخدم مثالًا من الحياة اليومية (مثلًا كأن تضع دوالّ تمثّل مواقع ثلاثة أشخاص وهم يسيرون) لإثبات صحتها.

3. لا بدّ من تفسير الدوالّ متعددة التعريف بدقة. في المثال 3.9، اشرح لماذا تكون $\lim_{x\to 1} f(x) = e - 4$ و $\lim_{x\to -2} f(x) = 5 + 2\cos 2$، لكننا نحتاج إلى نهايات أحادية الطرف لإيجاد قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. في المثال 3.8 اشرح لماذا ليس من الجيد بما يكفي أن نقول، بما أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$، فإنّ $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x) = 0$.

في التمارين 1-28، أوجد قيمة النهاية المشار إليها، إذا وُجدت. على فرض أنّ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. $\lim_{x\to 0}(x^2 - 3x + 1)$

2. $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2x+1}$

3. $\lim_{x\to 0} \cos^{-1}(x^2)$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{x-5}{x^2+4}$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

7. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-2x+1}}{x^2 + x}$

12. $\lim_{x\to 0} x^3 \csc^2 x$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x+9}}$

15. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$

16. $\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$

17. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2 - 1}\right)$

18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|}\right)$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^x}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin |x|}{x}$

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$، حيث $f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x < 2 \\ x^2 & ; \quad x \ge 2 \end{cases}$

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$، حيث $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3x + 1 & ; \quad x \ge -1 \end{cases}$

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$، حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3 & ; \quad -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$، حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3 & ; \quad -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$

25. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$

26. $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$

27. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x}$

29. استخدم أدلة عددية وبيانية لتخمين قيمة $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنك على صواب: عرّف الدالتين f و h ووضّح بيانيًا أنّ $f(x) \le x^2 \sin(1/x) \le h(x)$ وعلّل أنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$.

30. لماذا لا نستطيع استخدام نظرية الشطيرة كما في المثال 29 لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$؟ استكشف هذه النهاية بيانيًا.

31. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0^+} [\sqrt{x}\cos^2(1/x)] = 0$. وعرّف الدالتين f و h ووضّح بيانيًا أنّ $f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$ لجميع قيم $x > 0$ وعلل أنّ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

32. افترض أنّ $f(x)$ محدودة، بمعنى أن هناك M ثابتة بحيث تكون $|f(x)| \le M$ لجميع قيم x. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

في التمرينات 33-36، استخدم دالة الموقع المعطاة $f(t)$ لإيجاد السرعة اللحظية عند الزمن $t = a$.

33. $f(t) = t^2 + 2, a = 2$

34. $f(t) = t^2 + 2, a = 0$

35. $f(t) = t^3, a = 0$

36. $f(t) = t^3, a = 1$

37. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$، أوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ سريعًا.

38. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ سريعًا.

39. إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; \quad x < a \\ h(x) & ; \quad x > a \end{cases}$ لكثيرتي الحدود $g(x)$ و $h(x)$، وضّح السبب وراء أنّ $\lim_{x\to a^-} f(x) = g(a)$ وحدّد $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x < a \\ c & , \quad x = a \\ h(x) & , \quad x > a \end{cases}$$

40. اشرح طريقة تحديد $\lim_{x\to a} f(x)$ إذا علمت أن g و h كثيرتا حدود.

41. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1)$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-2}{x^2+1}$

42. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

(a) $\lim_{x\to -1}[(x+1)\sin x]$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{xe^x}{\tan x}$

في التمرينات 43–46، استخدم $\lim_{x\to a} f(x) = 2$، $\lim_{x\to a} g(x) = -3$ و $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ لتحديد النهاية، إن أمكن.

43. $\lim_{x\to a}[2f(x) - 3g(x)]$

44. $\lim_{x\to a}[3f(x)g(x)]$

45. $\lim_{x\to a} \frac{[f(x)]^2}{g(x)}$

46. $\lim_{x\to a} \frac{2f(x)h(x)}{f(x) + h(x)}$

في التمرينين 47 و 48، احسب نهاية $p(x) = x^2 - 1$.

.47 $\lim_{x \to 0} p(p(p(p(x))))$ .48 $\lim_{x \to 0} p(3 + 2p(x - p(x)))$

.49 أوجد كل الأخطاء في المعادلات الآتية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \infty = 0.$$

.50 أوجد كل الأخطاء في المعادلات الآتية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0} = 1$$

.51 أعط مثالاً للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ ولا توجد $\lim_{x \to 0} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} g(x)$.

.52 أعط مثالَ للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ ولا توجد واحدة على الأقل من $\lim_{x \to 0} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} g(x)$

.53 إذا وُجدت $\lim_{x \to a} f(x)$ ولم توجد $\lim_{x \to a} g(x)$ فهل يكون من الصواب دومًا أنّ $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ غير موجودة؟ اشرح ذلك.

.54 هل ما يلي صواب أم خطأ؟ إذا كانت $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة، فعندها تكون $\lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x)}$ غير موجودة. اشرح ذلك.

في التمارين 60–55، استخدم الأدلة العددية لتخمين قيمة النهاية إن وُجدت. تحقّق من إجابتك باستخدام نظام الجبر الحاسوبي (CAS). إذا كنت لا توافق، فأي من إجابتك صحيح؟

55. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$
56. $\lim_{x \to 0} e^{1/x}$
57. $\lim_{x \to 0^+} x^{-x^2}$
58. $\lim_{x \to 0^+} x^{\ln x}$
59. $\lim_{x \to 0} \tan^{-1} \frac{1}{x}$
60. $\lim_{x \to 0} \ln \left| \frac{1}{x} \right|$

.61 إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = L$ استخدم النظرية 3.1 لإثبات أنّ $\lim_{x \to a} [f(x)]^3 = L^3$ ووضّح أيضًا أنّ $\lim_{x \to a} [f(x)]^4 = L^4$.

.62 استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أنّ $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ لأي عدد صحيح موجب n.

.63 يُرمز لدالة أكبر عدد صحيح بـ $f(x) = [x]$ وهي تساوي أكبر عدد صحيح يكون أصغر من x أو مساويًا لها. وبذلك يكون $[3] = 3$ و $[2.3] = 2, [-1.2] = -2$ على الرغم من الحقيقة الأخيرة، وضّح أنّ $\lim_{x \to 3} [x]$ غير موجودة.

.64 استكشف وجود $\lim_{x \to 1} [x]$ (a) و $\lim_{x \to 1.5} [x]$ (b) و $\lim_{x \to 1.5} [2x]$ (c) و (d) $\lim_{x \to 1} (x - [x])$

تطبيقات

.65 افترض أنّ القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة موضّح ب

$$T(x) = \begin{cases} 0.14x \ , & 0 \le x < 10{,}000 \\ 1500 + 0.21x \ , & 10{,}000 \le x \end{cases}$$

احسب $\lim_{x \to 0^+} T(x)$. لماذا تعدّ هذا جيدًا؟ احسب $\lim_{x \to 10{,}000} T(x)$، لماذا تعدّ هذا سيئًا؟

.66 افترض أنّ القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن نسبة الالتزام الضريبي تبلغ 12% على أول $20,000 من الأرباح الخاضعة للضريبة و 16% على الباقي. أوجد الثابتين a و b لدالة الضريبة

$$T(x) = \begin{cases} a + 0.12x \ , & x \le 20{,}000 \\ b + 0.16(x - 20{,}000) \ , & x > 20{,}000 \end{cases}$$

بحيث توجد $\lim_{x \to 0^+} T(x) = 0$ و $\lim_{x \to 20{,}000} T(x)$، لماذا من المهم أن يكون هاتان النهايتان موجودتين؟

تمارين استكشافية

.1 تعرف القيمة $x = 0$ بأنها الصفر المُكرر n مرة $(n \ge 1)$ للدالة f إذا كانت $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ موجودة وغير صفرية ولكن $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = 0$، وضّح أنّ $x = 0$ صفر مُكرر مرتين عندما يكون $x^2, x = 0$ صفر مُكرر 3 عندما يكون x^3 و $x = 0$ صفر مُكرر أربع مرات عندما يكون x^4 بالنسبة لكثيرات الحدود. ما الذي تصفه تكرر؟ والسبب في أنّ التعريف ليس بالبساطة التي نتطلع إليها هو أنه يجب أن يسري على الدوال غير كثيرات الحدود أيضًا. أوجد تكرار $x = 0$ عندما يكون $f(x) = \sin x; f(x) = x \sin x; f(x) = \sin x^2$. إذا ثبت أنّ $x = 0$ صفر مُكرر m مرة لـ $f(x)$ ومُكرر n مرة لـ $g(x)$ ماذا يمكن أن تقول عن تكرار $x = 0$ لـ $f(x) + g(x)? f(x) \cdot g(x)? f(g(x))?$؟

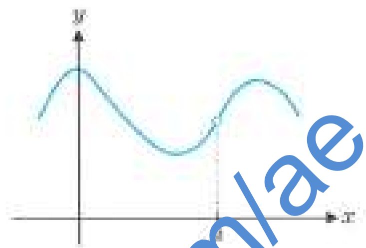
.2 لقد خمّنا أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. خمّن قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\sin cx}{x}$ للقيم مختلفة لـ c مرة باستخدام الأدلة البيانية والعددية. إذا علمت أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin cx}{cx} = 1$ عندما تكون أي ثابت $c \ne 0$ يثبت أنّ تخمينك صحيح ثم أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin cx}{\sin kx}$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\tan cx}{\tan kx}$ للعددين c و $k \ne 0$

الدرس

2-4 الاتصال ونتائجه

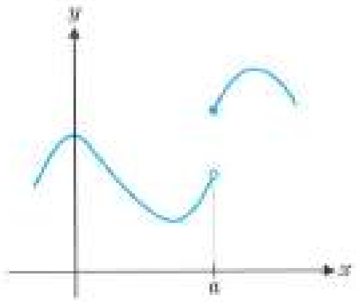
إذا ما تم إخبارنا بأنّ آلة استمرت بالعمل على نحو متواصل لمدة ستين ساعة، فمعظمنا سيفهم أن معنى ذلك يشير إلى أنّ الآلة بقيت تعمل طيلة ذلك الوقت، بدون أي توقف على الإطلاق ولو للحظة. وبالمثل يمكننا القول إنّ دالة ما متصلة على فترة محددة إذا كان تمثيلها البياني عند تلك الفترة يمكن رسمه بدون انقطاع، بمعنى أن يتم رسمه بدون رفع القلم عن الورقة.

أولًا، ألق نظرة على كل من التمثيلات البيانية الموضحة في الشكلين 2.22a-2.22b لتحديد ما يمنع الدالة من أن تكون متصلة عند النقطة $x = a$.



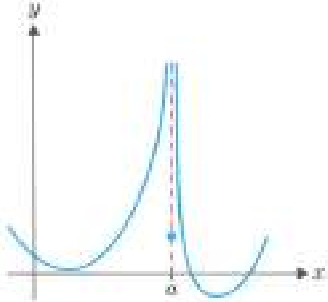
الشكل 2.22a

$f(a)$ غير معرّفة (هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = a$)



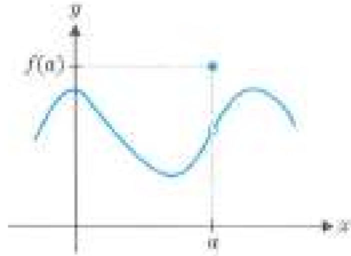
الشكل 2.22b

$f(a)$ معرّفة ولكن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة (وهناك قفزة في التمثيل البياني عند $x = a$)



الشكل 2.22d

$\lim_{x\to a} f(x)$ غير موجودة (الدالة "تشهد ارتفاعًا لافتًا" عندما تقترب x من a).



الشكل 2.22c

$\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و $f(a)$ معرّفة. ولكن $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = a$).

ملحوظة 4.1

كي تكون f متصلة عند $x = a$ فإن التعريف يقول إنه:

(i) يجب أن تكون $f(a)$ معرّفة.

(ii) يجب أن تكون النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة.

(iii) النهاية وقيمة f عند $x = a$ يجب أن تكونا متساويتين.

وعلاوة على ذلك، هذا يشير إلى أن الدالة تكون متصلة عند نقطة ما عندما يمكن حساب نهايتها عند تلك النقطة عن طريق التعويض فيها.

وهذا يشير إلى التعريف التالي للاتصال عند نقطة ما.

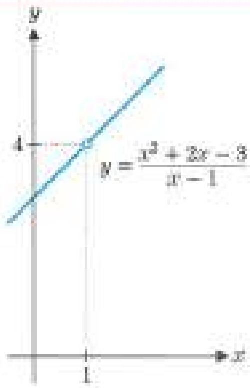
التعريف 4.1

لدالة f معرّفة في فترة مفتوحة تتضمن $x = a$ نقول إنّ f **متصلة** عند a عندما تكون

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

وإلا فإنه يقال أن f **غير متصلة أو منفصلة** عند $x = a$

أيًا كان الغرض، من الأفضل أن تفكر في المفهوم البديهي للاتصال المشار إليه أعلاه. والتعريف 4.1 عندئذ سيكون نابعًا ببساطة من فهمك البديهي للمفهوم المذكور آنفًا.



الشكل 2.23

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

المثال 4.1 إيجاد مكان اتصال الدالة النسبية

حدّد أين تكون $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ متصلة.

الحل لاحظ أنّ

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1} \quad \text{حلل البسط إلى العوامل}$$

$$= x + 3, \text{ for } x \neq 1 \quad \text{حذف العوامل المشتركة}$$

ويبين هذا أنّ التمثيل البياني لـ f هو خط مستقيم، فيه تجويف عند $x = 1$ كما هو موضح في الشكل 2.23. لذا فإنّ f متصلة عند $x \neq 1$ ■

المثال 4.2 إزالة فجوة من التمثيل البياني

قم بتوسيع الدالة من المثال 4.1 لجعلها متصلة في كل مكان عبر تعريفها عند نقطة واحدة.

الحل في المثال 4.1، رأينا أن الدالة متصلة عند $x \neq 1$ وهي غير معرّفة عند $x = 1$. لذا، سنفترض أننا سنمضي قُدُمًا في تعريفها على النحو التالي. لنفترض أنّ

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

بالنسبة لعدد حقيقي a

لاحظ أنّ $g(x)$ معرف لجميع قيم x وتساوي $f(x)$ لجميع قيم $x \neq 1$. لدينا هنا

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1}(x+3) = 4$$

لاحظ أننا إذا اخترنا أن يكون $a = 4$ فعندها يكون لدينا

$$\lim_{x\to1} g(x) = 4 = g(1)$$

وعندئذ، تكون g متصلة عندما يكون $x = 1$.

لاحظ أن التمثيل البياني لـ g هو ذاته التمثيل البياني لـ f الذي شاهدته في الشكل 2.23، مع وجود فارق وحيد هو أننا الآن نشمل النقطة $(1, 4)$. (انظر الشكل 2.24). لاحظ أيضا أن هناك طريقة بسيطة جدا لكتابة $g(x)$. (فكّر في هذا الأمر) ■

لاحظ أنه في المثال 4.2، عند اختيار أي قيمة لـ a غير $a = 4$، تكون g غير متصلة عند $x = 1$. وبما أنه يكون بوسعنا إزالة الانفصال بكل بساطة عبر إعادة تعريف الدالة عند تلك النقطة، نقول إن الانفصال في هذه الحالة **قابل للإزالة**. ولكن ليست جميع الانفصالات قابلة للإزالة. أمعن النظر في الشكلين 2.22b و 2.22c بعناية وأقنع نفسك بأن الانفصال الذي في الشكل 2.22c قابل للإزالة، بينما الانفصالان اللذان في الشكلين 2.22b و 2.22d غير قابلين للإزالة. بإيجاز، للدالة f انفصال غير قابل للإزالة عند $x = a$ إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ غير موجودة.

المثال 4.3 الدوالّ التي لا يمكن تمديدها على نحو متصل

اشرح كيف أنّ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (a) و $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) لا يمكن توسيعهما إلى دالة متصلة في كل مكان.

الحل (a) لاحظ من الشكل 2.25a (وأنشئ جدولًا لقيم الدالة أيضا) أنّ النهاية $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$ غير موجودة

وبالتالي، بغض النظر عن طريقة معرفة $f(0)$، فإن f لن تكون متصلة عند $x = 0$.

(b) وبالمثل، لاحظ أنّ $\lim_{x\to0} \cos(1/x)$ غير موجودة، ويرجع ذلك إلى التذبذب اللانهائي لـ $\cos(1/x)$ حيث x تقترب من 0. (انظر الشكل 2.25b) لاحظ مرة أخرى أنه بحكم أن النهاية غير موجودة، فليست هناك طريقة لإعادة تعريف الدالة عند $x = 0$ لجعلها متصلة هناك. ■

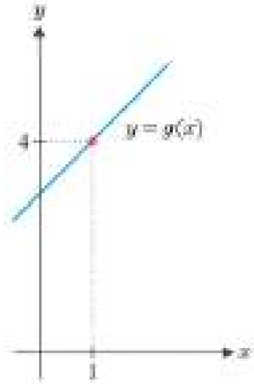
من خلال تجربتك مع التمثيلات البيانية لبعض الدوال الشائعة، يجب ألا تمثّل النتيجة التالية مفاجأة لك.

النظرية 4.1

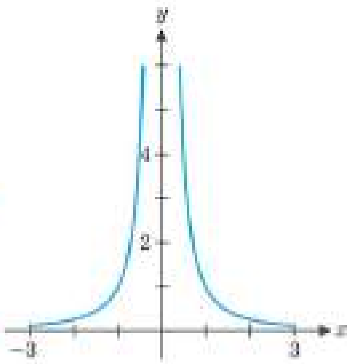
جميع كثيرات الحدود متصلة على جميع مجالها. وبالإضافة إلى ذلك فإنّ $\sin x, \cos x, \tan^{-1} x$ و e^x متصلة على جميع مجالها، و $\sqrt[n]{x}$ متصلة لجميع قيم x، عندما يكون n فردًا ولجميع القيم $x > 0$، عندما يكون n زوجيا. كما نجد أنّ $\ln x$ متصلة لجميع القيم $x > 0$ و $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ متصلتان عند $-1 < x < 1$.

ملحوظة 4.2

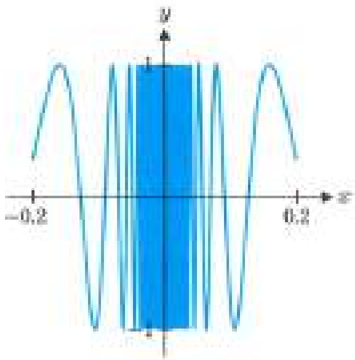
يجب أن تحرص على عدم الخلط بين مسألة اتصال دالة عند نقطة ما وكونها ببساطة معرّفة عند تلك النقطة، حيث يمكن تعريف دالة ما عند نقطة ما دون أن تكون متصلة عندها. (أعد النظر إلى الأشكال 2.22b و 2.22c و 2.22d)



الشكل 2.24
$y = g(x)$



الشكل 2.25a
$y = \frac{1}{x^2}$



الشكل 2.25b
$y = \cos(1/x)$

البرهان

لقد ثبت لنا بالفعل (في النظرية 3.2) أنه لأي كثيرة حدود $p(x)$ وأي عدد حقيقي a،

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

ونجد من خلالها أنّ p متصلة عند $x = a$. كما يرجع باقي النظرية إلى النظريتين 3.3 و 3.4 بالطريقة ذاتها. ■

يمكننا من خلال هذه الدوالّ المتصلة الأساسية أن نكوّن مجموعة كبيرة من الدوالّ المتصلة، وذلك باستخدام النظرية 4.2.

النظرية 4.2

على فرض أنّ f و g متصلتان عند $x = a$. ويكون عندها ما يلي صحيحًا:

(i) $(f \pm g)$ متصلة عند $x = a$

(ii) $(f \cdot g)$ متصلة عند $x = a$

(iii) (f/g) متصلة عند $x = a$ إذا كانت $g(a) \neq 0$

الأمر ببساطة أن النظرية 4.2 تقول إنّ مجموع أي دالتين متصلتين أو الفرق بينهما أو ناتج ضربهما يكون متصلاً. في حين أن ناتج قسمة دالتين متصلتين يكون متصلا عند أي نقطة لا يكون فيها المقام صفرًا.

البرهان

(i) إذا كانت f و g متصلتين عند $x = a$، فيكون

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \quad \text{من النظرية 3.1}$$

$$= f(a) \pm g(a) \quad \text{بما أنّ } f \text{ و } g \text{ متصلتان عند } a$$

$$= (f \pm g)(a)$$

بحكم القواعد العادية للنهايات. وهكذا فإنّ $(f \pm g)$ أيضًا متصلة عند $x = a$.

لقد تمّ إثبات الجزأين (ii) و (iii) بالطريقة ذاتها ولكن تركهما ليكونا تمرينين. ■

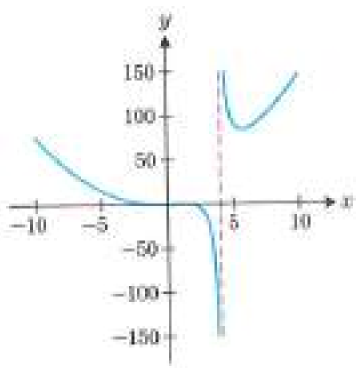
المثال 4.4 اتصال الدوال النسبية

حدّد أين تكون f متصلة، عندما تكون $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4}$.

الحل هنا، f ناتج قسمة كثيرتي حدود (وبالتالي متصلتان). هذا الرسم البياني للدالة المشار إليها في الشكل 2.26 يشير إلى خط تقارب رأسي عند $x = 4$، ولكنه لا يشير إلى أي انفصال. من النظرية 4.2، f ستكون متصلة عند جميع قيم x حيث لا يكون المقام صفرًا، حيث يكون

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) \neq 0$$

وهكذا، فإنّ f متصلة حيث يكون $x \neq -1, 4$. (فكّر لما لم تر أي شيء مميز يتعلق بالرسم البياني عند $x = -1$.) ■



الشكل 2.26

$y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4}$

ومع إضافة النتيجة من النظرية 4.3، تكون لدينا جميع الأدوات الأساسية التي تلزم لإنشاء اتصال لمعظم الدوال الأولية.

النظرية 4.3

افترض أنّ $\lim_{x\to a} g(x) = L$ و f دالة متصلة عند L. فيكون.

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

لاحظ أنه إذا كانت f متصلة. فعندها يمكن أن نجد النهاية "للداخل". ويجب أن يكون هذا منطقيًا. بما أنّ $g(x) \to L$، $x \to a$. وهكذا $f(g(x)) \to f(L)$ لأنّ f متصلة عند L.

النتيجة 4.1

افترض أنّ g متصلة عند a و f متصلة عند $g(a)$. بالتالي. فإن التركيب $f \circ g$ متصل عند a.

البرهان

من النظرية 4.3. لدينا

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$$= f(g(a)) = (f\circ g)(a) \quad \text{لأن } g \text{ متصلة عند } a \quad \blacksquare$$

المثال 4.5 الاتصال لدالة مركبة

حدّد أين تكون $h(x) = \cos(x^2 - 5x + 2)$ متصلة.

الحل لاحظ أنّ

$$h(x) = f(g(x))$$

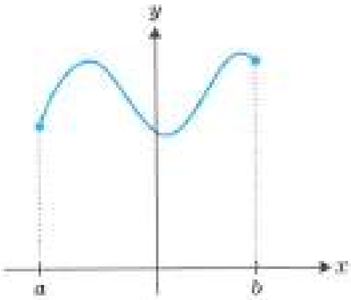
حيث تكون $g(x) = x^2 - 5x + 2$ و $f(x) = \cos x$. لأن كلًا من f و g متصلتان لكل قيم x. فإن h متصلة لكل قيم x. بحسب النتيجة 4.1. ■

التعريف 4.2

إذا كانت f متصلة عند كل نقطة في فترة مفتوحة (a, b)، كما في الشكل 2.27. نقول إنّ f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$. إذا كانت f متّصلة في الفترة المفتوحة (a, b) و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

أخيرًا. إذا كانت f متصلة عند جميع قيم $(-\infty, \infty)$، نقول ببساطة إنّ f متّصلة. (وذلك عندما لا تحدّد فترة. فنعني متصلة في كل مكان)



الشكل 2.27
f متّصلة على الفترة $[a, b]$

لكثير من الدوال. يُعدّ أمرًا بسيطًا تحديد الفترات التي تكون الدالة متصلة عندها. توضّح ذلك في المثال 2.6.

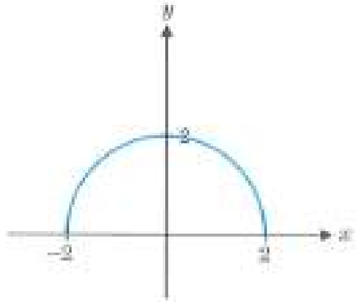
المثال 4.6 الاتصال على فترة مغلقة

حدّد الفترة (الفترات) حيث تكون f متصلة. إذا كان $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

الحل أولًا لاحظ أن f معرّفة على $-2 \le x \le 2$ فقط. ثانيًا، لاحظ أن f هي تركيب لدالتين وبالتالي، فهي متصلة لكل قيم x التي يكون عندها $4 - x^2 > 0$. نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالة في الشكل 2.28. بما أن

$$4 - x^2 > 0$$

بالنسبة إلى $-2 < x < 2$، لدينا f متصلة لكل قيم x في الفترة $(-2, 2)$، بحسب النظرية 4.1 والنتيجة 4.1. وأخيرًا نختبر النقاط الطرفية لرؤية أن $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$ و $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ لتكون f متصلة في الفترة المغلقة $[-2, 2]$ ■



الشكل 2.28
$y = \sqrt{4 - x^2}$

المثال 4.7 فترة الاتصال لدالة اللوغاريتم

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها الدالة $f(x) = \ln(x - 3)$ متصلة.

الحل يتضح من النظرية 4.1 والنتيجة 4.1 أن f متصلة عندما يكون $(x - 3) > 0$ (أي عندما يكون $x > 3$). وهكذا فإن f متصلة في الفترة $(3, \infty)$. ■

تهيمن دائرة الإيرادات الداخلية على بعض الدوال الأكثر إرهاقًا في الوجود. السطور القليلة الأولى من آخر جدول لمعدل الضريبة (الدافعي الضرائب المتفردين) بدا مثل:

المبلغ الخاضع للضريبة فوق	ولكن ليس فوق	التزامك الضريبي هو	ناقص
AED 0	AED 6000	10%	AED 0
AED 6000	AED 27,950	15%	AED 300
AED 27,950	AED 67,700	27%	AED 3654

من أين يأتي العددان AED 300 و AED 3654؟ إذا كتبنا الالتزام الضريبي $T(x)$ على شكل دالة للمبلغ الخاضع للضريبة x (بافتراض أن x يمكن أن يكون أي عدد صحيح وليس مبلغًا بالدولار فحسب)، فإن

$$T(x) = \begin{cases} 0.10x & , \quad 0 < x \le 6000 \\ 0.15x - 300 & , \quad 6000 < x \le 27,950 \\ 0.27x - 3654 & , \quad 27,950 < x \le 67,700 \end{cases}$$

تأكد من أنك تفهم ما نترجمه حتى الآن. لاحظ أنه من المهم أن تكون هذه الدالة متصلة، وفكّر في قضايا العدالة التي من شأنها أن تنشأ لو لم يكن ذلك!

المثال 4.8 اتصال جداول الضريبة الاتحادية

تأكد من أن دالة معدل الضريبة الاتحادية T متصلة عند $x = 27,950$ المشتركة. ثم أوجد a لإكمال الجدول. (استخدم b و c على شكل تمرينين).

المبلغ الخاضع للضريبة فوق	ولكن ليس فوق	التزامك الضريبي هو	ناقص
AED 67,700	AED 141,250	30%	a
AED 141,250	AED 307,050	35%	b
AED 307,050	—	38.6%	c

الحل بالنسبة لـ T لتكون متصلة عند $x = 27,950$، فيجب أن يكون لدينا

$$\lim_{x \to 27,950^-} T(x) = \lim_{x \to 27,950^+} T(x)$$

بما أن الدالتين $0.15x - 300$ و $0.27x - 3654$ متصلتان، يمكننا أن نحسب النهايات أحادية الطرف عبر التعويض $x = 27,950$. بالتالي،

$$\lim_{x \to 27,950^-} T(x) = 0.15(27,950) - 300 = 3892.50$$

و

$$\lim_{x \to 27,950^+} T(x) = 0.27(27,950) - 3654 = 3892.50$$

بما أنّ النهايات أحادية الطرف متساوية وتساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة، فإن $T(x)$ متصلة عند $x = 27,950$.

ونتركها تدريبًا لتوضيح أن $T(x)$ أيضًا متصلة عند $x = 6000$. (لاحظ أنّ الدالة يمكن أن تُكتب رموز يساوي في جميع المتباينات، وسيكون هذا غير صحيح إذا كانت الدالة منفصلة). لإكمال الجدول، نختار a لنحصل على النهايات أحادية الطرف عند $x = 67,700$ كي تتطابق. لدينا

$$\lim_{x \to 67,700^-} T(x) = 0.27(67,700) - 3654 = 14,625$$

في حين

$$\lim_{x \to 67,700^+} T(x) = 0.30(67,700) - a = 20,310 - a$$

لذا، نجعل النهايات أحادية الطرف متساوية للحصول على

$$14,625 = 20,310 - a$$

أو

$$a = 20,310 - 14,625 = 5685 \quad ■$$

يجب أن تبدو النظرية 4.4 نتيجة واضحة لتعريفنا البديهي للاتصال.

النظرية 4.4 (نظرية القيمة الوسطيّة)

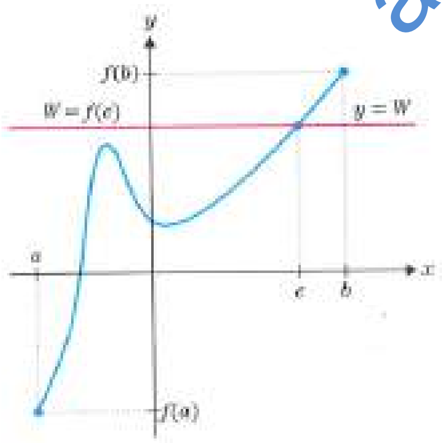
إذا كانت f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ و W هي أي عدد بين $f(a)$ و $f(b)$، فإنّه يوجد عدد واحد على الأقل $c \in [a, b]$ حيث $f(c) = W$.

تقول النظرية 4.4 أنه إذا كانت f متصلة عند $[a, b]$ فإن f ستأخذ كل قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$ مرة واحدة على الأقل. أي أنها، دالة متصلة لا يمكن أن تتجاوز أي أعداد بين قيمها في النقطتين الطرفيتين. ولفعل ذلك يجب أن يقفز التمثيل البياني عبر الخط الأفقي $y = W$، وهو شيء لا يمكن حدوثه في الدوال المتصلة. (انظر الشكل 2.29a). بالطبع، يمكن للدالة أن تتناول قيمة معينة W أكثر من مرة. (انظر الشكل 2.29b). على الرغم من أن هذه التمثيلات البيانية تجعل هذه النتيجة تبدو معقولة، فإن البرهان أكثر تعقيدًا مما قد تتصور. ونحن يجب أن نحيلك إلى حساب التفاضل والتكامل المتقدم.

ملاحظات تاريخية

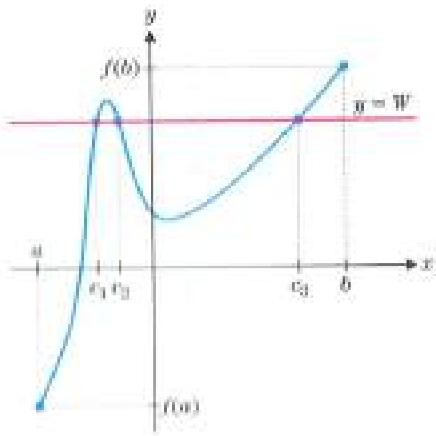
كارل ويرستراس (1815-1897)

عالم رياضيات ألماني أثبت نظرية القيمة الوسطيّة والعديد من النتائج الأساسية الأخرى من حساب التفاضل والتكامل. وكارل ويرستراس معروفًا بكونه مدرسًا ممتازًا حيث نشر طلابه محاضراته في جميع أنحاء أوروبا، بسبب وضوحها وأصالتها. ويعرف أيضًا باسم البارز الراقي. وهو أحد مؤسسي التحليل الرياضي الحديث.



الشكل 2.29a

رسم توضيحي لنظرية القيمة الوسطيّة



الشكل 2.29b

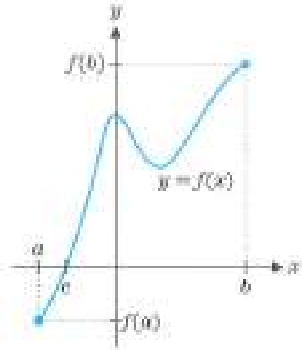
أكثر من قيمة واحدة لـ c

في النتيجة 4.2، نرى تطبيقًا مهمًا لنظرية القيمة الوسطيّة.

النتيجة 4.2

افترض أنّ f متصلة عند $[a, b]$ و $f(a)$ و $f(b)$ لهما اشارات متعاكسة [على سبيل المثال، $f(a) \cdot f(b) < 0$]. ثم إنّ هناك على الأقل عددًا واحدًا $c \in (a, b)$ تكون عنده $f(c) = 0$. (تذكّر أنّ c تكون عند ذلك صفرًا لـ f.)

لاحظ أنّ النتيجة 4.2 ببساطة حالة خاصة من نظرية القيمة الوسطيّة حيث $W = 0$. (انظر الشكل 2.30). نظرية القيمة الوسطيّة والنتيجة 4.2 هما مثالان عن وجود النظريات فهما تخبرانك عن وجود عدد c يحقق بعض الشروط. لكنها لا تخبرك عن ماهية c ذلك.



الشكل 2.30

نظرية القيمة الوسطيّة حيث c هي صفر لـ f

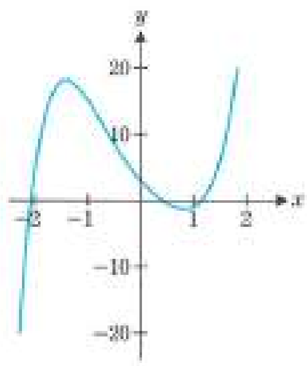
طريقة التنصيف

في المثال 4.9، نرى كيف أنّ النتيجة 4.2 يمكن أن تساعدنا في تحديد مكان أصفار الدالة.

المثال 4.9 إيجاد أصفار الدالة بطريقة التنصيف

أوجد أصفار $f(x) = x^5 + 4x^2 - 9x + 3$.

الحل بما أنّ f هي كثيرة حدود من الدرجة 5، ليس لدينا أي صيغ لإيجاد الأصفار. البديل الوحيد عندها هو تقريب الأصفار. يمكن اتخاذ منزلة ابتدائية جيدة لرسم تمثيل بياني لـ $y = f(x)$ مثال ذلك الذي في الشكل 2.31. هناك ثلاثة أصفار مرئية في الرسم البياني. بما أنّ f كثيرة حدود، فهي متصلة في كل مكان وهكذا تقول النتيجة 4.2 يجب أن يكون هناك صفر في أي فترة تتغير عندها إشارات الدالة. ومن الرسم البياني، يمكنك أن ترى أنه يجب أن يكون هناك أصفار بين -3 و -2، بين 0 و 1 وبين 1 و 2. يمكن أيضًا أن نختم هذا بالإشارة إلى تغيّر إشارات الدالة بين قيم x هذه. على سبيل المثال، $f(0) = 3$ و $f(1) = -1$.



الشكل 2.31

$y = x^5 + 4x^2 - 9x + 3$

في حين أنّ برنامج إيجاد الجذر يمكن أن يوفر تقريبًا دقيقًا من الأصفار، والمسألة هنا ليست صعوبة الحصول على الإجابة بقدر ما هي فهم طريقة إيجاد الإجابة. تشير النتيجة 4.2 إلى طريقة بسيطة وفاعلة تعرف **بطريقة التنصيف**.

وبأخذ منتصف $[0,1]$. يحكم أنّ $f(0.5) \approx -0.469 < 0$ و $f(0) = 3 > 0$. فيجب أن يكون هناك صفر بين 0 و 0.5. وبعد ذلك، منتصف $[0, 0.5]$ هو 0.25 و $f(0.25) \approx 1.001 > 0$. بحيث يكون الصفر في الفترة $(0.5, 0.25)$، ونستمر على هذا النسق حتى تضيق الفترة التي قبلها الصفر، كما موضّح في الجدول التالي:

a	b	$f(a)$	$f(b)$	نقطة المنتصف	f نقطة المنتصف
0	1	3	−1	0.5	−0.469
0	0.5	3	−0.469	0.25	1.001
0.25	0.5	1.001	−0.469	0.375	0.195
0.375	0.5	0.195	−0.469	0.4375	−0.156
0.375	0.4375	0.195	−0.156	0.40625	0.015
0.40625	0.4375	0.015	−0.156	0.421875	−0.072
0.40625	0.421875	0.015	−0.072	0.4140625	−0.029
0.40625	0.4140625	0.015	−0.029	0.41015625	−0.007
0.40625	0.41015625	0.015	−0.007	0.408203125	0.004

متابعة هذه العملية عبر 20 خطوة إضافية تؤدي إلى الصفر التقريبي $x = 0.40892288$، حيث تكون دقيقة لما يقل عن ثماني منازل عشرية. ويمكن العثور على بقية الأصفار بالطريقة ذاتها. ■

وعلى الرغم من أن طريقة التنصيف هي عملية شاقة، فإنها طريقة بسيطة لكنها موثوقة لإيجاد الأصفار المقربة.

التمارين 2.4

تمارين كتابية

1. فكّر بشأن الدوال التالية "من الحياة اليومية". وكل واحدة منها هي دالة في الزمن كمتغير مستقل: ارتفاع كائن يسقط، ومبلغ من المال في حساب مصرفي، ومستوى الكوليسترول في دم شخص، ومقدار تركيز مركّب كيميائي في أنبوب اختبار وآخر قياس لجهاز يقيس مستوى الكوليسترول في دم شخص. أي مما يلي دوال متصلة؟ اشرح إجاباتك.

2. سواء أكانت العملية مستمرة أم لا ليس أمرًا في غاية الوضوح دائمًا. عند مشاهدة التلفزيون أو السينما، يبدو الفعل مستمرًا، وذلك وهم بصري، لأن كلا من الأفلام والتلفزيون تتكون من "لقطات" فردية تتم إعادة تشغيلها بالعديد من اللقطات في الثانية. من أين يأتي وهم الحركة المستمرة؟ وبالنظر إلى أن الشخص العادي يرمش عدة مرات في الدقيقة الواحدة، فهل تصورنا للعالم مستمر في الواقع؟

3. عندما ترسم تمثيلاً بيانيًا للقطع المكافئ $y = x^2$ بقلم رصاص أو قلم حبر، فهل رسمك (على المستوى الجزيئي) في الواقع تمثيل بياني لدالة متصلة؟ هل التمثيل البياني لآلتك الحاسبة أو حاسوبك تمثيل بياني لدالة متصلة؟ هل يمكن أن تحدث معنا مشاكل في تفسير التمثيل البياني بشكل صحيح بسبب هذه القيود؟

4. لكل من التمثيلات في الأشكال 2.22a-2.22d، صف (بيانيًا) ما يمكن أن تبدو عليه صيغة $f(x)$ لإنشاء التمثيل البياني المطلوب.

في التمارين 1-14، حدّد أين تكون f متصلة. إذا كان ممكنًا، توسّع في f كما في المثال 4.2 إلى دالة جديدة متصلة على نطاق أكبر.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+x-2}$
5. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$
6. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x-4}$
7. $f(x) = x^2 \tan x$
8. $f(x) = x \cot x$
9. $f(x) = \ln x^2$
10. $f(x) = 3/\ln x^2$
11. $f(x) = \begin{cases} 2x , & x < 1 \\ x^2 , & x \ge 1 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} , & x \ne 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 , & x \le -1 \\ x^2+5x , & -1 < x < 1 \\ 3x^3 , & x \ge 1 \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} 2x , & x \le 0 \\ \sin x , & 0 < x \le \pi \\ x-\pi , & x > \pi \end{cases}$

في التمارين 15-20، وضّح لماذا لا تعد كل دالة متصلة عند قيم x المعطاة بالإشارة إلى أي من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف 4.1 لم يتم مراعاته.

15. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ عند $x = 1$
16. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ عند $x = 1$
17. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ عند $x = 0$
18. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{e^x-1}$ عند $x = 0$
19. $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x < 2 \\ 3 , & x = 2 \\ 3x-2 , & x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$
20. $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x < 2 \\ 3x-2 , & x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$

في التمارين 21-28، حدّد الفترات التي تكون عندها f متصلة.

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$
22. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$
25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$
26. $f(x) = \ln(\sin x)$
27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$
28. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

29. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة موضح بـ

$$T(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 0 \\ 0.14x , & 0 < x < 10{,}000 \\ c + 0.21x , & 10{,}000 \le x. \end{cases}$$

حدّد الثابت c الذي يجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم x. قدّم سببًا منطقيًا لكون أن هذه الدالة يجب أن تكون متصلة.

30. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن نسبة الالتزام الضريبي تبلغ 12% على أول AED 20,000 من الأرباح الخاضعة للضريبة و 16% على الباقي. أوجد الثابتين a و b للدالة الضريبية

$$T(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 0 \\ a + 0.12x , & 0 < x \le 20{,}000 \\ b + 0.16(x-20{,}000) , & x > 20{,}000 \end{cases}$$

بحيث تكون $T(x)$ متصلة لجميع قيم x.

31. في المثال 4.8، أوجد b و c لإكمال الجدول.

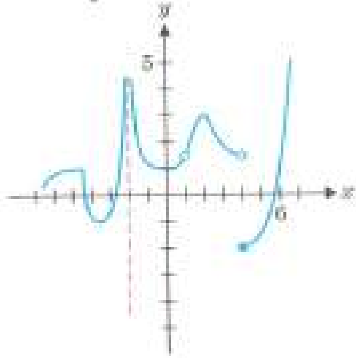
32. في المثال 4.8، وضّح أن $T(x)$ متصلة عند $x = 6000$.

في التمارين 33-36، استخدم نظرية القيمة الوسطية للتحقق من أنّ $f(x)$ لها صفر في الفترة المعطاة. ثم استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها 1/32 والتي تحتوي على الصفر.

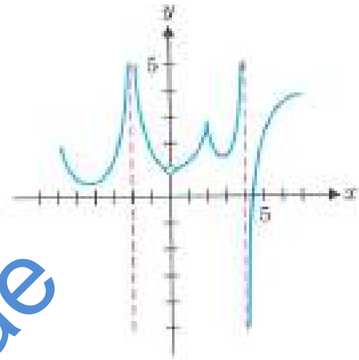
33. $f(x) = x^2 - 7$, (a) $[2, 3]$; (b) $[-3, -2]$
34. $f(x) = x^3 - 4x - 2$, (a) $[2, 3]$; (b) $[-1, 0]$
35. $f(x) = \cos x - x$, $[0, 1]$
36. $f(x) = e^x + x$, $[-1, 0]$

في التمرينين 37 و 38، استخدم التمثيل البياني المعطى لتعريف جميع الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة.

37.



38.



في التمارين 39-41، حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

39. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ b\cos x, & x>0\end{cases}$

40. $f(x)=\begin{cases}ae^x+1, & x<0\\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2\\ x^2-x+b, & x>2\end{cases}$

41. $f(x)=\begin{cases}a(\tan^{-1}x+2), & x<0\\ 2e^{bx}+1, & 0\le x\le 3\\ \ln(x-2)+x^2, & x>3\end{cases}$

42. أثبت النتيجة 4.1.

الدالة متصلة من اليمين عند $x=a$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ في التمرينين 43 و 44، حدّد ما إذا كانت $f(x)$ متصلة من اليمين عند $x=2$

43. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 3x-3, & x>2\end{cases}$

44. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 3, & x=2\\ 3x-3, & x>2\end{cases}$

45. حدّد ما معنى أن تكون الدالة متصلة من اليسار عند $x=a$ وحدّد أيًا من الدوال في التمرينين 43 و 44 متصلة من اليسار عند $x=2$

46. افترض أنّ $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ و $h(a)=0$ حدّد ما إذا كان كل من العبارات التالية صحيح دائمًا، خاطئ دائمًا، أو ربما يكون صحيحًا / ربما يكون خاطئًا. اشرح ما يلي. (a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ غير موجودة. (b) $f(x)$ ليست متصلة عند $x=a$

47. افترض أنّ $f(x)$ متصلة عند $x=0$. أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0$

48. عكس التمرين 47 ليس صحيحًا. أي أنّ الحقيقة $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0$ لا تضمن تكون $f(x)$ متصلة عند $x=0$. أوجد مثالاً مضادًا لإيجاد دالة f بحيث أنّ $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0$ و $f(x)$ ليست متصلة عند $x=0$

49. إذا كانت $f(x)$ متصلة عند $x=a$، أثبت أنّ $g(x)=|f(x)|$ متصلة عند $x=a$

50. حدّد ما إذا كان عكس التمرين 49 صحيحًا. وهو أنه إذا كانت $|f(x)|$ متصلة عند $x=a$ فهل من الضروري أن يكون صحيحًا أن $f(x)$ يجب أن تكون متصلة عند $x=a$؟

51. افترض أنّ $f(x)$ دالة متصلة عند $x\ge a$ وحدّد $h(x)=\max\limits_{a\le t\le x} f(t)$ أثبت أنّ $h(x)$ متصلة عندما $x\ge a$. فهل يكون هذا صحيحًا دون افتراض أنّ $f(x)$ متصلة؟

52. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{إذا كان } x\ne 0\\ 4, & \text{إذا كان } x=0\end{cases}$ و $g(x)=2x$ وضح أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))\ne f\left(\lim\limits_{x\to 0} g(x)\right)$

53. افترض أنّ $f(x)$ دالة متصلة لها أصفار متتالية عند $x=a$ و $x=b$ وهي $f(a)=f(b)=0$ و $f(x)\ne 0$ عند $a<x<b$. وافترض أيضًا أنّ $f(c)>0$ لعدد ما c بين a و b. استخدم نظرية القيمة الوسطية لشرح أنّ $f(x)>0$ لجميع قيم $a<x<b$

54. لكل $f(x)=2x-\dfrac{400}{x}$، لدينا $f(-1)>0$ و $f(2)<0$. هل تضمن نظرية القيمة الوسطية وجود صفر للدالة $f(x)$ بين $x=-1$ و $x=2$ ما الذي يحدث إذا جربت طريقة التنصيف؟

55. أثبت أنه إذا كانت f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $f(a)>a$ و $f(b)<b$ فعندها يكون لـ f نقطة ثابتة [حل لـ $f(x)=x$] في الفترة (a,b)

56. اثبت الجزأين الأخيرين في النظرية 4.2.

57. مثل $f(x)=\dfrac{|x^3-3x^2+2x|}{x^3-3x^2+2x}$ بيانيًا وحدد جميع الأعداد الحقيقية x التي تكون فيها f غير متصلة.

58. استخدم طريقة التنصيف لتقدير الصفرين الآخرين في المثال 4.9.

التطبيقات

59. إذا دفعت صندوقًا ثقيلًا برفق على الأرض، فلن يحدث أي شيء في البداية بسبب قوة الاحتكاك الساكنة التي تعترض الحركة. إذا دفعت بقوة كافية، فسيبدأ الصندوق في الحركة بالرغم من وجود قوة احتكاك تعترض الحركة. افترض أن لديك المعطيات التالية حول قوة الاحتكاك. حتى 100 رطل، تتساوى قوة الاحتكاك مع القوة التي تبذلها على الصندوق. أما أكثر من 100 رطل، فسيتحرك الصندوق وستساوي قوة الاحتكاك 80 رطلاً. ارسم تمثيلًا بيانيًا للاحتكاك كدالة للقوة المبذولة بناء على المعطيات. أين يكون التمثيل البياني غير متصل؟ ما الأهمية الفيزيائية لهذه النقطة؟

هل تعتقد أن قوة الاحتكاك يجب أن تكون في الحقيقة متصلة؟ عدّل التمثيل البياني ليكون متصلاً بينما تبقى معظم الخواص المذكورة في المعطيات موجودة.

60. افترض أن راتب عامل يبدأ من AED 40,000 مع زيادة AED 2000 كل ثلاثة أشهر. مثّل دالة $s(t)$ الراتب بيانيًا. ولماذا تكون دالة غير متصلة؟ كيف تُقارن بالدالة $f(t) = 40{,}000 + \frac{2000}{3}t$ (t بالشهور)؟ لماذا يكون من الأسهل القيام بالحسابات مع $f(t)$ أكثر من $s(t)$؟

61. في صباح يوم الاثنين، غادرت إحدى المديرات في رحلة عمل في الساعة 7:13 a.m، ووصلت إلى وجهتها في الساعة 2:03 p.m. وفي الصباح التالي، غادرت للعودة الى المنزل في الساعة 7:17 a.m، ووصلت في الساعة 1:59 p.m. وقد لاحظت المرأة مصباح إنارة على الطريق وساعة أحد البنوك تتغير من الساعة 10:32 a.m، إلى 10:33 a.m. في كلا اليومين. وبالتالي، فلا بدّ أنها كانت في المكان نفسه وفي الوقت نفسه في اليومين. ولا يصدق رئيسها أن هذه المصادفة غير المحتملة قد تحدث. استخدم نظرية القيمة الوسطيّة لتجادل بأنه يجب أن يكون صحيحًا في نقطة ما من الرحلة، أن المديرة كانت في المكان نفسه وفي الوقت نفسه يومي الاثنين والثلاثاء.

62. افترض أنك تهدئ من سرعة سيارتك للتوقف عند علامة مرور أعلى تل. وقد عادت سيارتك إلى الخلف عدة أقدام ثم سرت بها مارًا بالتقاطع. وقد أوقفك الشرطي لعدم توقفك بشكل كامل. استخدم نظرية القيمة الوسطيّة لتجادل بأنه كانت هناك لحظة من الزمن توقفت فيها سيارتك (بل كانت ثانيتين على الأقل في الحقيقة). ما أوجه الاختلاف بين هذا التوقف والتوقف الذي أراد الشرطي رؤيته؟

63. يُحدد جنس تماسيح الميسيسبي الوليدة من خلال درجة حرارة البيض في العش. ولا ينجح البيض في النمو ما لم تكون درجة الحرارة بين 26°C و 36°C. وينمو جميع الذي تبلغ درجة حرارته ما بين 26°C و 30°C ليصبح إناثًا بينما ينمو البيض الذي تبلغ درجة حرارته ما بين 34°C و 36°C ليصبح ذكورًا. وتقل نسبة الإناث من 100% عند 30°C إلى 0% عند 34°C. إذا كانت $f(T)$ هي نسبة الإناث التي نمت من البيض عن درجة T°C

$$f(T) = \begin{cases} 100 & 26 \le T \le 30 \\ g(T) & 30 < T < 34 \\ 0 & 34 \le T \le 36 \end{cases}$$

لبعض الدوال $g(T)$، اشرح السبب الذي يجعل من المنطقي أن تكون $f(T)$ متصلة. حدد دالة $g(T)$ بحيث تكون $0 \le g(T) \le 100$ لكل $30 \le T \le 34$ وأن تكن الدالة الناتجة $f(T)$ متصلة.
[إرشاد: قد يساعدك رسم تمثيل بياني أولاً وجعل $g(T)$ خطية.]

تمارين استكشافية

1. في النص، ناقشنا استخدام طريقة التنصيف لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات مثل $f(x) = x^3 + 5x - 1 = 0$. يمكننا البدء بملاحظة $f(0) = -1$ و $f(1) = 5$. حيث إنّ $f(x)$ متصلة، وتخبرنا نظرية القيمة الوسطيّة أنه يوجد حل بين $x = 0$ و $x = 1$. بطريقة التنصيف، نخمن نقطة المنتصف $x = 0.5$. هل يوجد أي أسباب للشك في أن الحل في الحقيقة أقرب إلى $x = 0$ من $x = 1$؟
باستخدام قيم الدوال $f(0) = -1$ و $f(1) = 5$، ابتكر طريقتك الخاصة في تخمين موقع الحل. عمم طريقتك لاستخدام $f(a)$ و $f(b)$، حيث تكون قيمة إحدى الدوال موجبة والأخرى سالبة. قارن طريقتك بطريقة التنصيف في المسألة $x^3 + 5x - 1 = 0$ وفي كلٍ من الطريقتين توقف عندما تكون على نسبة 0.001 من الحل $x \approx 0.1984$. أي الطرق كانت أفضل؟ قبل أن تفرط في ثقتك بطريقتك، قارن بين الطريقتين ثانية في $x^3 + 5x^2 - 1 = 0$. هل اقتربت طريقتك من الحل من المحاولة الأولى؟ جرّب إن كان بإمكانك أن تحدد بيانيًا السبب في أن طريقتك تفلح بشكل أفضل مع المسألة الأولى.

2. حدد جميع قيم x التي تكون فيها الدالة متصلة.

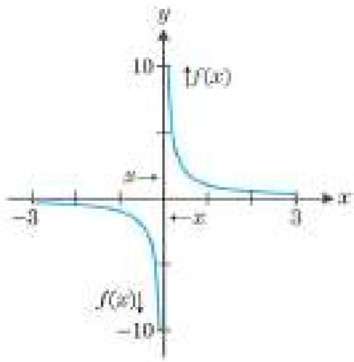
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{غير نسبيّة } x \\ x & \text{نسبيّة } x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{غير نسبيّة } x \\ 4x & \text{نسبيّة } x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \cos 4x & \text{غير نسبيّة } x \\ \sin 4x & \text{نسبيّة } x \end{cases}$$

الدرس 2-5 النهايات التي تتضمن اللانهاية؛ خطوط التقارب

في هذا الدرس، نعيد النظر في بعض مسائل النهايات القديمة لنقدم إجابات أكثر وضوحًا وندرس بعض المسائل المرتبطة.



الشكل 2.32

$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$ and $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

x	$\frac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
0.00001	100,000

x	$\frac{1}{x}$
−0.1	−10
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10,000
−0.00001	−100,000

المثال 5.1 إعادة النظر في النهاية البسيطة

تفحص: $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$.

الحل بالطبع، يمكننا رسم تمثيل بياني (راجع الشكل 2.32) وحساب جدول قيم الدالة بسهولة، عن طريق اليد. (راجع الجداول الموجودة في الهامش).

بينما نقول إن النهايتين $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}$ غير موجودتين، فيرجع ذلك لأسباب مختلفة. وعلى وجه التحديد، عندما يكون $x\to0^+$، يتزايد $\frac{1}{x}$ بدون حدود، بينما عندما يكون $x\to0^-$ يتناقص $\frac{1}{x}$ بدون حدود للإشارة إلى ذلك، نكتب

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad (5.1)$$

و

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty. \qquad (5.2)$$

بشكل بياني، يوضح ذلك أن التمثيل البياني للدالة $y=\frac{1}{x}$ يقترب من الخط الرأسي $x=0$، لأن $x\to0$، كما رأينا في الشكل 2.32. وعندما يحدث ذلك، نقول إن الخط $x=0$ **هو خط تقارب رأسي**. من المهم أن نلاحظ أنه بينما لا توجد النهايتان (5.1) و (5.2)، إلا أننا نقول إنهما تساويان "∞ و $-\infty$ على التوالي، لنكون محددين فقط في ما يتعلق بسبب عدم وجودهما وتمييزًا. في ما يخص النهايتين أحاديتي الطرف (5.1) و (5.2)، فإننا نقول (كما في السابق) إن $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ غير موجودة.

المثال 5.2 الدالة التي تكون نهايتاها أحاديتا الطرف كلتاهما لانهائية

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.

الحل يبدو أن التمثيل البياني (في الشكل 2.33) يشير إلى خط التقارب الرأسي في $x = 0$. من هذا التمثيل والجداول المرفقة، يمكننا أن نرى

x	$\frac{1}{x^2}$
0.1	100
0.01	10,000
0.001	1×10^6
0.0001	1×10^8
0.00001	1×10^{10}

x	$\frac{1}{x^2}$
-0.1	100
-0.01	10,000
-0.001	1×10^6
-0.0001	1×10^8
-0.00001	1×10^{10}

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

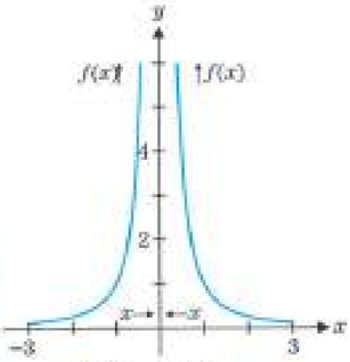
بما أن النهايتين أحاديتي الطرف تتطابقان (أي، تتناهى كلتاهما إلى ∞)، فإننا نقول إن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

تفيد هذه العبارة الموجزة بأن النهاية غير موجودة، ولكن أيضًا يوجد خط تقارب رأسي في $x = 0$، حيثما تكون $f(x) \to \infty$ عندما $x \to 0$ من أي طرف. ■

ملحوظة 5.1

قد يبدو متناقضًا في البداية أن نقول إن $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ غير موجودة ثم نكتب $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. ومع ذلك، لأن ∞ ليست بعدد حقيقي، فلا يوجد تناقض هنا. إننا نقول إن $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ للإشارة إلى أنه عندما $x \to 0^+$ تزيد قيم الدالة دون حدود.



الشكل 2.33

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

ملحوظة 5.2

يحاول علماء الرياضيات نقل أكبر قدر ممكن من المعلومات بأقل عدد ممكن من الرموز. فمثلًا، نفضّل أن نقول إن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ بدلًا من أن نقول إن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ غير موجودة، لأن العبارة الأولى لا تفيد بأنّ النهاية غير موجودة فقط، ولكنها تفيد أيضًا بأن $\frac{1}{x^2}$ تتزايد دون حدود لأن x يقترب من 0، عندما يكون $x > 0$ أو $x < 0$.

المثال 5.3 حالة لا تتطابق فيها النهايات اللانهائية من طرف واحد

أوجد قيمة $\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^3}$.

الحل من التمثيل البياني للدالة في الشكل 2.34، ينبغي أن تحصل على فكرة واضحة جدًا أنّ هناك خط تقارب رأسي عند $x = 5$. ويمكننا التحقق من هذا السلوك جبريًا، من خلال ملاحظة أنه عندما $x \to 5$ ، يقترب المقام من 0، بينما يقترب البسط من 1. وهذا يفيد أنّ الكسر يزيد في القيمة المطلقة، بدون حدود، عندما $x \to 5$. خاصةً،

عندما $x \to 5^+$ ، $(x-5)^3 \to 0$ و $(x-5)^3 > 0$.

نشير إلى إشارة كل عامل من خلال كتابة الإشارة "+" أو "−" فوق أو تحت كل واحد، وهذا يتيح لك أن ترى إشارات الحدود المختلفة بنظرة سريعة. وفي هذه الحالة، تحصل على

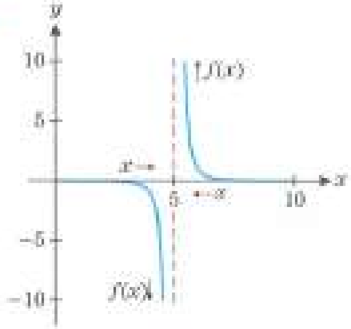
$$\lim_{x\to 5^+} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{+}{(x-5)^3}} = \infty. \quad \text{بما أن } (x-5)^3>0 \text{ عندما } x>5$$

بالمثل، عندما $x \to 5^-$ ، $(x-5)^3 \to 0$ و $(x-5)^3 < 0$.

في هذه الحالة، تحصل على

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{-}{(x-5)^3}} = -\infty. \quad \text{بما أن } (x-5)^3<0 \text{ عندما } x<5$$

في النهاية، نقول أن $\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^3}$ غير موجودة، لأن النهايات أحادية الطرف مختلفة. ■



الشكل 2.34

$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{(x-5)^3} = \infty$

و $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{(x-5)^3} = -\infty$

استنادًا إلى الأمثلة 5.1 و 5.2 و 5.3 ، يمكن تمييز ما إذا كان المقام يتناهى إلى 0 والبسط لا يتناهى، حينها فلن توجد النهاية محل الاستفهام. وفي هذه الحالة، تحدد ما إذا كانت النهاية تتناهى إلى $-\infty$ أو ∞ من خلال دراسة إشارات العوامل المختلفة بعناية.

المثال 5.4 حالة أخرى لا تتطابق فيها النهايات اللانهائية من طرف واحد

أوجد قيمة $\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$

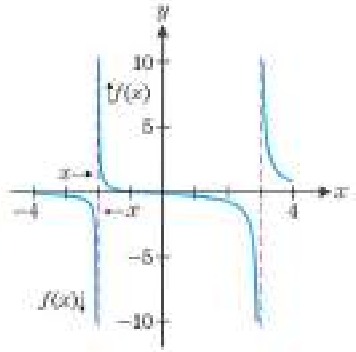
الحل أولًا، لاحظ من التمثيل البياني للدالة الموضح في الشكل 2.35 أنه يبدو وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$. وعلاوة على ذلك، يبدو أن الدالة تتناهى إلى ∞ عندما $x \to -2^+$ ، وإلى $-\infty$ عندما $x \to -2^-$. يمكنك التحقق من هذا السلوك، من خلال ملاحظة أنّ

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\overset{-}{x+1}}{\underset{-\quad +}{(x-3)(x+2)}} = \infty \quad \text{بما أن } (x+1)<0 \text{ و } (x-3)<0 \text{ و } (x+2)>0 \text{ عندما } -2<x<-1$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{\overset{-}{x+1}}{\underset{-\quad -}{(x-3)(x+2)}} = -\infty \quad \text{بما أن } (x+1)<0 \text{ و } (x-3)<0 \text{ و } (x+2)<0 \text{ عندما } x<-2$$

لذلك، هناك بالفعل خط تقارب رأسي عند $x = -2$

و $\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$ غير موجودة. ■



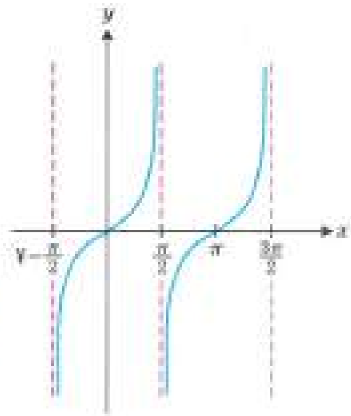
الشكل 2.35

$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$ غير موجودة

المثال 5.5 النهاية التي تتضمن دالة مثلثية

أوجد قيمة $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

الحل يشير التمثيل البياني للدالة الموضحة في الشكل 2.36 إلى أنّ هناك خط تقارب رأسي عند $x = \frac{\pi}{2}$. تحقق من هذا السلوك، من خلال ملاحظة أن



الشكل 2.36

$y = \tan x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{+}{\sin x}}{\underset{+}{\cos x}} = \infty$$ بما أن $0 < \sin x$ و $0 < \cos x$ عندما $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overset{+}{\sin x}}{\underset{-}{\cos x}} = -\infty$$ بما أن $0 < \sin x$ و $\cos x < 0$ عندما $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

لذلك، يكون الخط $x = \frac{\pi}{2}$ هو في الواقع خط تقارب رأسي

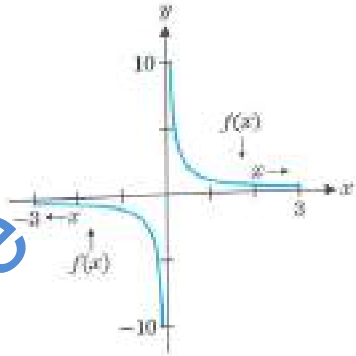
و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ غير موجودة ■

النهايات عند اللانهاية

كما أننا مهتمون بدراسة السلوك النهائي للدالة حيث تتزايد x دون حدود(تكتب $x \to \infty$) أو حيث تتناقص x بدون حدود(تكتب $x \to -\infty$). وبالعودة إلى $f(x) = \frac{1}{x}$ ، يمكننا أن نرى أنه حيث $x \to \infty$ ، $\frac{1}{x} \to 0$ وفي ضوء ذلك، نكتب

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

كذلك $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$



الشكل 2.37

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

لاحظ أنه في الشكل 2.37، يظهر التمثيل البياني أنه يقترب من الخط الأفقي $y = 0$ ، عندما $x \to \infty$ وعندما $x \to -\infty$. وفي هذه الحالة، نسمي $y = 0$ **خطا تقاربيا أفقيا.**

المثال 5.6 إيجاد خطوط التقارب الأفقية

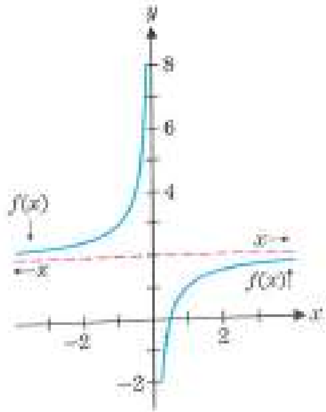
أوجد أي خطوط تقارب أفقية للتمثيل البياني $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

الحل نعرض التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ في الشكل 2.38. بما أن $x \to \pm\infty$ ، $\frac{1}{x} \to 0$ ، نحصل على

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

و $$\lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

وبالتالي، يكون الخط $y = 2$ خط تقارب أفقي.



الشكل 2.38

$\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$

و $\lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$

وكما ترون في النظرية 5.1. سلوك $\frac{1}{x^t}$ ، لأي قوة نسبية موجبة t ، عندما $x \to \pm\infty$ ، هو نفسه الذي لاحظناه للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ إلى حد كبير.

النظرية 5.1

لأي عدد نسبي $t > 0$ ،

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0$$

عندما $x \to -\infty$ ، نفترض أن $t = \frac{p}{q}$ ، حيثما يكون q عددا فرديا.

ملحوظة 5.3

جميع القواعد الأساسية للنهايات المذكورة في النظرية 3.1 تنطبق أيضا على النهايات عندما $x \to \pm\infty$.

يأتي برهان على النظرية 5.1 في الملحق A . تأكد من أن الحجة التالية منطقية بالنسبة لك: حيث $t > 0$. عندما $x \to \infty$ ، كما لدينا أيضا $x^t \to \infty$ ، بحيث يكون $\frac{1}{x^t} \to 0$.

في النظرية 5.2، نرى أنه يسهل تحديد الدالة كثيرة الحدود عند اللانهاية.

النظرية 5.2

للدالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ، $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$، نحصل على

$$\lim_{x \to \infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty \text{ ،} & a_n > 0 \\ -\infty \text{ ،} & a_n < 0 \end{cases}$$

البرهان

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} p_n(x) &= \lim_{x \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= \lim_{x \to \infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) \right] \\ &= \infty, \end{aligned}$$

إذا كان $a_n > 0$ ، بما أن

$$\lim_{x \to \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$$

و $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$. يتم إثبات النتيجة بالمثل لـ $a_n < 0$. ■

لاحظ أنه يمكنك عمل عبارات مماثلة بشأن قيمة $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$ ، ولكن كن حذرًا، ستتغير الإجابة اعتمادًا على ما إذا كان n عددًا زوجيًا أو فرديًا. (نترك ذلك كتمرين).

في المثال 5.7، نرى مرة أخرى ضرورة توخي الحذر عند تطبيق القواعد الأساسية للنهايات (النظرية 3.1)، والتي تنطبق أيضًا على النهايات عندما $x \to \infty$ أو عندما $x \to -\infty$.

المثال 5.7 نهاية ناتج القسمة ليس ناتج قسمة النهايات

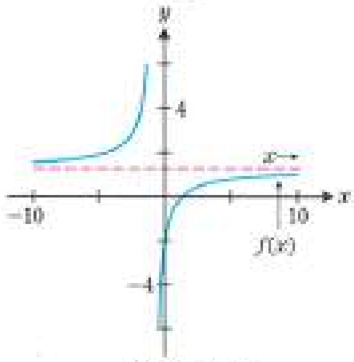
أوجد قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{5x-7}{4x+3}$.

الحل قد يتم حثك على كتابة

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{5x-7}{4x+3} &= \frac{\lim_{x \to \infty} (5x-7)}{\lim_{x \to \infty} (4x+3)} \\ &= \frac{\infty}{\infty} = 1 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

هذا استعمال خاطئ للنظرية 3.1 بما أن النهايات في البسط والمقام غير موجودة.

هذا خطأ!



الشكل 2.39

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x-7}{4x+3} = \frac{5}{4}$$

يشير التمثيل البياني في الشكل 2.39 والجدول المرفق إلى أن القيمة التي تم تخمينها للعدد 1 غير صحيحة. تذكر أنّ نهاية ناتج القسمة هي ناتج قسمة النهايات فقط عند وجود كلا النهايتين (وتكون النهاية في المقام غير صفرية). لأن كلًا من النهايتين الموجودتين في المقام والبسط لانهائية. فهاتان النهايتان غير موجودتان.

ويتضح أنه عندما يكون للنهاية الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ، فيمكن أن تكون القيمة الفعلية للنهاية أي شيء على الإطلاق. ولهذا السبب، تُسمّى $\frac{\infty}{\infty}$ **صيغة غير محددة**. وهذا يعني أنّ قيمة النهاية لا يمكن تحديدها فقط عن طريق ملاحظة أن كلًا من البسط والمقام يتناهى إلى ∞ .

x	$\frac{5x-7}{4x+3}$
10	1
100	1.223325
1000	1.247315
10,000	1.249731
100,000	1.249973

قاعدة الإبهام: عند مواجهة صيغة غير محددة $\frac{\infty}{\infty}$ في حساب نهاية دالة نسبية، اقسم البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير x التي تظهر في المقام.

لدينا هنا

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{5x-7}{4x+3} &= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{5x-7}{4x+3} \cdot \frac{(1/x)}{(1/x)} \right] \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{5 - 7/x}{4 + 3/x} \end{aligned}$$

اضرب البسط و المقام بـ

اضرب بـ

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5 - 7/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}(4 + 3/x)}$$ النظرية 3.1 (iv)

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$

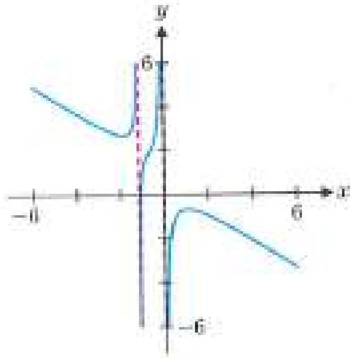
وهو ما يتفق مع ما شاهدناه بيانيًا وعدديًا على حد سواء. ■

في المثال 5.8، نطبق قاعدة الإبهام لمسألة نهاية شائعة.

المثال 5.8 إيجاد خطوط تقاربية مائلة

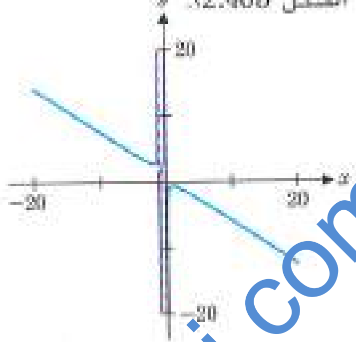
أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}$ وأوجد أي خطوط تقاربية مائلة.

الحل كالعادة، نقوم أولًا بدراسة تمثيل بياني. (انظر الشكل 2.40a). نلاحظ هنا أن التمثيل البياني يبدو أنه يتناهى إلى $-\infty$ عندما $x \to \infty$. وعلاوة على ذلك، نلاحظ خارج الفترة $[-2, 2]$، يبدو التمثيل البياني إلى حد كبير مثل الخط المستقيم. إذا نظرنا إلى التمثيل البياني في إطار أكبر إلى حد ما، يكون هذا الارتباط الخطي أكثر وضوحًا. (انظر الشكل 2.40b).



الشكل 2.40a

$$y = \frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}$$



الشكل 2.40b

$$y = \frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}$$

باستخدام قاعدة الإبهام، نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5}{-6x^2-7x} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}\cdot\frac{(1/x^2)}{(1/x^2)}\right]$$ اضرب البسط و المقام بـ $\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x+5/x^2}{-6-7/x}$$ الضرب بـ $\frac{1}{x^2}$

$$= -\infty,$$

بما أنه عندما $x \to \infty$، يتناهى البسط إلى ∞ ويتناهى المقام إلى -6.

لتوضيح السلوك المبين في الشكل 4.40b، نقوم بإجراء قسمة مطولة.

$$\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9} + \frac{5+49/9x}{-6x^2-7x}$$

بما أن الحد الثالث في هذا الامتداد يتناهى إلى 0 عندما $x \to \infty$، تقترب قيم الدالة من تلك القيم الخاصة بالدالة الخطية

$$-\frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$$

عندما $x \to \infty$. لهذا السبب، يمكننا أن نقول إن التمثيل البياني له **خط تقارب مائل (أو منحرف)** وهو ما يعني أنه بدلًا من الاقتراب من خط رأسي أو أفقي، كما يحدث مع الخطوط التقاربية الرأسية أو الأفقية، يقترب التمثيل البياني من الخط المستقيم المائل $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$. (هذا هو السلوك الذي تراه في الشكل 2.40b). ■

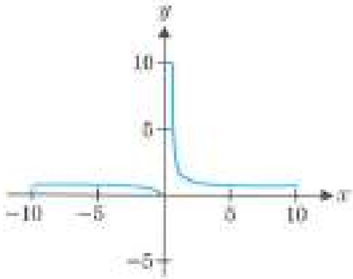
النهايات التي تتضمن دوالًا أسية تكون مهمة للغاية في العديد من التطبيقات.

المثال 5.9 نهايتان لدالة أسية

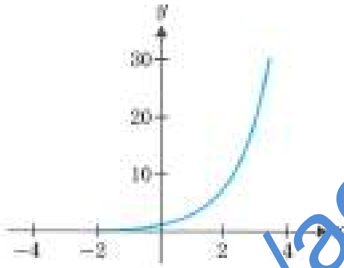
أوجد قيمة $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ و $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$.

الحل يظهر تمثيل بياني تم إنشاؤه بالحاسوب في الشكل 2.41a. بالرغم من أنه تمثيل بياني غير عادي، إلا أنه يبدو أن قيم الدوال تقترب من 0، عندما تقترب x من 0 من اليسار وتتناهى إلى اللانهاية عندما تقترب x من 0 من اليمين. للتحقق من ذلك، تذكر أن $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{t\to -\infty} e^t = 0$. (راجع الشكل 2.41b للاطلاع على تمثيل بياني لـ $y = e^x$.) عند الجمع بين هذه النتائج، نحصل على

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$



الشكل 2.41a
$y = e^{1/x}$.

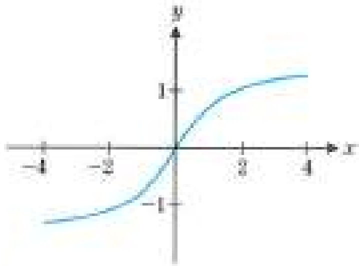


الشكل 2.43b
$y = e^x$.

وبالمثل، $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ و $\lim_{t\to\infty} e^t = \infty$، بحيث

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

كما ترى في المثال 5.10، التمثيلات البيانية لبعض الدوال المثلثية العكسية لها خطوط تقارب أفقية.

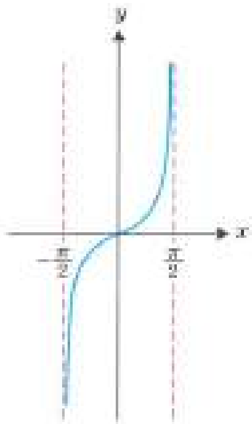


الشكل 2.42a
$y = \tan^{-1} x$

المثال 5.10 نهايتان لدالة مثلثية معكوسة

أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$ و $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x$.

الحل يشير التمثيل البياني $y = \tan^{-1} x$ (الموضح في الشكل 2.42a) إلى وجود خط تقارب أفقي عند $y = -\frac{\pi}{2}$ عندما $x \to -\infty$ عند $y = \frac{\pi}{2}$ عندما $x \to \infty$. يمكننا أن نكون أكثر دقة في هذا الأمر، كما يلي. بالنسبة إلى $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$، نبحث عن الزاوية التي يجب أن تقترب منها θ، عندما يكون $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، بحيث تتناهى $\tan\theta$ إلى ∞. عند الرجوع إلى التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ في الشكل 2.42b، نرى أن $\tan x$ تتناهى إلى ∞ عندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}^-$. وبالمثل، تتناهى $\tan x$ إلى $-\infty$ عندما تقترب x من $-\frac{\pi}{2}^+$، بحيث يكون $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

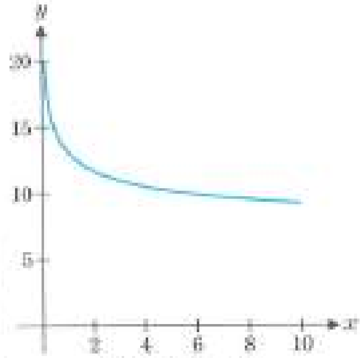


الشكل 2.42b
$y = \tan x$

في المثال 5.11، نفكر في نموذج الحجم لبؤبؤ العينين لأحد الحيوانات. تذكر أنه في الضوء الساطع، يتقلص البؤبؤ لتقليل كمية الضوء التي تدخل العين، بينما في الضوء الخافت، يتمدد البؤبؤ ليسمح بمرور مزيد من الضوء. (راجع مقدمة الوحدة.)

المثال 5.11 إيجاد حجم بؤبؤ العينين لأحد الحيوانات

لنفترض أن قطر بؤبؤ العينين لأحد الحيوانات موضح في $f(x)$ mm ، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العينين. إذا كانت $f(x) = \dfrac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$ ، فأوجد قطر بؤبؤ العينين مع (a) الحد الأدنى من الضوء و (b) الحد الأقصى من الضوء.



الشكل 2.43a

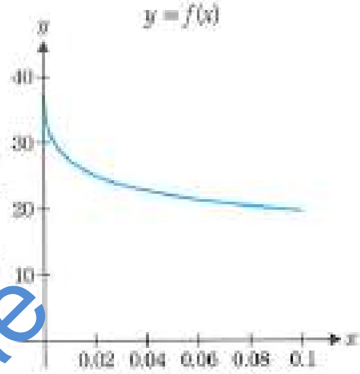
$y = f(x)$

الحل بما أنّ $f(0)$ غير محددة، فإننا نعتبر النهاية في $f(x)$ عندما $x \to 0^+$ (لأن x لا يمكن أن تكون سالبة). يظهر تمثيل بياني تم إنشاؤه بالحاسوب لـ $y = f(x)$ عند $0 \le x \le 10$ في الشكل 2.43a. ويبدو أن قيم y تقترب من 20 عندما تقترب x من 0. نضرب البسط والمقام في $x^{0.4}$ ، لحذف الأسس السالبة، بحيث

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15} = \lim_{x\to 0^+} \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15} \cdot \frac{x^{0.4}}{x^{0.4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{160 + 90x^{0.4}}{4 + 15x^{0.4}} = \frac{160}{4} = 40 \text{ mm}$$

لا يبدو أن هذه النهاية متطابقة مع التمثيل البياني. ومع ذلك، في الشكل 2.43b، قمنا بالتكبير بحيث يكون $0 \le x \le 0.1$ ، مما يجعل نهاية 40 تبدو أكثر منطقية.



الشكل 2.43b

$y = f(x)$

بالنسبة للجزء (b)، نعتبر أن النهاية عندما x تتناهى إلى ∞ . بالنسبة للشكل 2.43a، يبدو أن التمثيل البياني له خط تقارب أفقي عند قيمة أصغر إلى حد ما من 10 = y . نحسب النهاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15} = \frac{90}{15} = 6 \text{ mm}$$

لذلك، يكون بؤبؤ العينين أقل حجم قدره 6 mm ، حيث تتناهى شدة الضوء إلى ∞ . ■

التمارين 4.5

تمارين الكتابة

1. يبدو غريبًا أن نستخدم ∞ في وصف النهايات ولكن لا نقوم بحساب ∞ كعدد حقيقي. ناقش وجود ∞ ، هل هو عدد أم مفهوم؟

2. في المثال 5.7، تعاملنا مع "الصيغة غير المحددة" $\frac{\infty}{\infty}$. عند التفكير في نهاية ∞ على أنها تعني "الحصول على عدد كبير جدًا" ونهاية 0 على أنها تعني "الحصول على عدد قريب جدًا" من 0، اشرح لماذا تُعد الصيغ التالية صيغًا غير محددة، $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ و $\infty - \infty$ و $0 \times \infty$. حدّد ما تمثّله الصيغ المحددة التالية: $\infty + \infty$ و $\infty - \infty-$ و $\infty + 0$ و $0/\infty$.

3. على جهاز الكمبيوتر الخاص بك، ارسم بيانيًا $y = 1/(x-2)$ وابحث عن خط التقارب الأفقي $y = 0$ وخط التقارب الرأسي $x = 2$. ستقوم العديد من أجهزة الحاسوب برسم خط أفقي عند $x = 2$ وستوضح التمثيل البياني أفقيًا بشكل تام عند $y = 0$ لرموز x الكبيرة. هل هذا صحيح؟ مضلل؟ ستقوم معظم أجهزة الحاسوب بحساب مواقع النقاط لرموز x المجاورة وتحاول ربط النقاط بقطعة مستقيمة. لماذا قد ينتج عن ذلك وجود خط رأسي في موقع خط التقارب الرأسي؟

4. يتعلم العديد من الطلاب أنّ خطوط التقارب هي خطوط يجعلها التمثيل البياني أقرب كثيرًا بدون الوصول إليها أبدًا. وهذا ينطبق على العديد من خطوط التقارب، ولكن ليس كلها. اشرح لماذا لا تتقاطع أبدًا خطوط التقارب الرأسية. اشرح لماذا قد تتقاطع خطوط التقارب الأفقية أو المائلة أي عدد من المرات. ارسم مثالًا واحدًا.

في التمارين 1–4، حدّد (a) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ و (b) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و (c) $\lim_{x\to a} f(x)$ (أجب حسب الاقتضاء، بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو غير موجودة).

1. $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-1}, a = 1$

2. $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-1}, a = -1$

3. $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4x+4}, a = 2$

4. $f(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2}, a = -1$

في التمارين 5–22، حدّد كل نهاية (أجب حسب الاقتضاء، بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو غير موجودة).

5. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-4}$

6. $\lim_{x\to -1} (x^2-2x-3)^{-2/3}$

7. $\lim_{x\to 0} \cot x$

8. $\lim_{x\to \pi/2} x \sec^2 x$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$

13. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$

14. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x\sin x)$

15. $\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x^3}$

16. $\lim_{x\to\infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

17. $\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x$

18. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$

19. $\lim_{x\to 0} \sin(e^{-1/x^2})$

20. $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x)$

21. $\lim_{x\to\pi/2} e^{-\tan x}$

22. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

في التمارين 23–28، حدّد كل خطوط التقارب الأفقية والرأسية. ثم لكل جانب من جوانب خط التقارب الرأسي، حدد إذا كانت $f(x)\to\infty$ أم $f(x)\to-\infty$.

23. (a) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$ (b) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$

24. (a) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ (b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

25. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x-3}$

26. $f(x)=\frac{1-x}{x^2+x-2}$

27. $f(x)=\tan^{-1}x-1$

28. $f(x)=\ln(1-\cos x)$

في التمارين 29–32، حدّد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة

29. $y=\frac{x^3}{4-x^2}$

30. $y=\frac{x^2+1}{x-2}$

31. $y=\frac{x^3}{x^2+x-4}$

32. $y=\frac{x^4}{x^3+2}$

33. لنفترض أنّ حجم بؤبؤ عين حيوان محدد يُعطى بالعلاقة $f(x)$ (mm)، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العين. إذا كان $f(x)=\frac{80x^{-0.3}+60}{2x^{-0.3}+5}$، فأوجد حجم بؤبؤ العين عندما لا يوجد ضوء وحجمه مع وجود كمية لانهائية من الضوء.

34. كرّر التمرين 33 مع $f(x)=\frac{80x^{-0.3}+60}{8x^{-0.3}+15}$.

35. قم بتعديل الدالة في التمرين 33 لإيجاد الدالة f بحيث يكون $\lim_{x\to 0^+} f(x)=8$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$.

36. أوجد دالة للشكل $f(x)=\frac{20x^{-0.4}+16}{g(x)}$ بحيث يكون $\lim_{x\to 0^+} f(x)=5$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=4$.

37. لنفترض أن السرعة المتجهة للاعب قفز حر بعد t ثانية بعد القفز موضحة من خلال $v(t)=-\sqrt{\frac{32}{k}}\,\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$. أوجد أقصى سرعة متجهة $k=0.00064$ و $k=0.00128$. بأي عامل يتوجب على لاعب القفز الحر تغيير قيمة k لخفض أقصى سرعة متجهة إلى النصف؟

38. ارسم بيانيًا دالة السرعة المتجهة في التمرين 37 مع $k=0.00016$ (ممثلًا قفزة الرأس أولًا) وقدّر المدة التي استغرقها اللاعب ليصل إلى سرعة تساوي 90% من السرعة المتجهة للنهاية. كرر مع $k=0.001$ (ممثلًا وضع النسر).

في التمارين 39–48، استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين قيمة النهاية المشار إليها.

39. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x^2+3x+3)}$

40. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(1+e^{x})}$

41. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+7}{2x^2+x\cos x}$

42. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7x^2+1}{x^3-x\sin x}$

43. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x+5}{e^{x/2}}$

44. $\lim_{x\to\infty} (e^{x/3}-x^4)$

45. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

46. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{x^2}$

47. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

48. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

في التمرينين 49 و 50، استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين قيمة النهاية المشار إليها. ثم، تحقق من التخمين من خلال إيجاد النهاية بالضبط

49. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x)$ (إرشاد: اضرب واقسم على التعبير المقترن: $\sqrt{4x^2-2x+1}+2x$ وحوّل إلى أبسط صورة).

50. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+4x+7}-\sqrt{5x^2+x+3})$ (راجع الإرشاد للتمرين 49).

51. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث درجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$. حدّد ما إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب أفقي

52. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث درجة (أكبر أس) $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$. حدّد خط التقارب الأفقي في $y=f(x)$.

53. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب مائل $y=x+2$، فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$؟

54. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب أفقي $y=2$، فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$؟

55. أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x)=\frac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي واحد $y=-\frac{1}{2}$ وخط تقارب رأسي واحد بالضبط $x=3$.

56. أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x)=\frac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي واحد $y=2$ واثنان من خطوط التقارب الرأسية $x=\pm 3$.

57. أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x^2 - 3}{g(x)}$ ليس له خط تقارب رأسي وله خط تقارب مائل $y = x$.

58. أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x - 4}{g(x)}$ له اثنان من خطوط التقارب الأفقية $y = \pm 1$ وليس له خطوط تقارب رأسية.

في التمارين 64–59، قم بتسمية العبارة بوصفها صحيحة أو خاطئة (ليست دائمًا صحيحة) للأعداد الحقيقية a و b.

59. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = b$، فإن $\lim_{x \to \infty} [f(x) + g(x)] = a + b$

60. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = b$، فإن $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}$

61. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$

62. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \to \infty} [f(x) + g(x)] = \infty$

63. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 0$

64. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 1$

65. من الصعب جدًا إيجاد عبارات بسيطة في حساب التفاضل والتكامل تكون دائمًا صحيحة، وهذا أحد الأسباب التي تجعل التطور المتأني للنظرية مهمًا للغاية. ربما تكون قد سمعت عن القاعدة البسيطة، لإيجاد خط التقارب الرأسي في $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ما عليك سوى تعيين المقام مساويًا لـ 0 [أي الحل $h(x) = 0$]. أعط مثالًا حيث يكون $h(a) = 0$ ولكن لا يوجد خط تقارب رأسي عند $x = a$.

66. (a) اذكر واثبت نتيجة مشابهة لنظرية 5.2 $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$، حيث n عدد فردي.
(b) اذكر وأثبت نتيجة مشابهة لنظرية 5.2 $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$، حيث n عدد زوجي.

تطبيقات

67. لنفترض أن طول حيوان صغير بعد t أيام من الولادة هو $h(t) = \frac{300}{1 + 9(0.8)^t}$ mm. فما طول الحيوان عند الولادة؟ ما الطول النهائي للحيوان (أي الطول عندما $t \to \infty$)؟

68. لنفترض أن طول حيوان صغير بعد t أيام من الولادة هو $h(t) = \frac{100}{2 + 3(0.4)^t}$ mm. فما طول الحيوان عند الولادة؟ ما الطول النهائي للحيوان (أي الطول عندما $t \to \infty$)؟

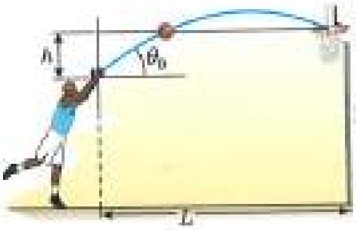
69. لنفترض أن جسمًا له سرعة متجهة أولية $v_0 = 0$ ft/s وكتلة m (ثابتة) يتسارع بقوة ثابتة F رطلًا لـ t ثوانٍ. وفقًا لقوانين نيوتن للحركة، ستكون سرعة الجسم $v_N = Ft/m$. وفقًا لنظرية النسبية لأينشتاين، ستكون سرعة الجسم $v_E = Fct/\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}$، حيث c هي سرعة الضوء. احسب $\lim_{t \to \infty} v_N$ و $\lim_{t \to \infty} v_E$.

70. بعد تناول حقنة، يختلف تركيز الدواء في العضلات وفقًا لدالة الزمن $f(t)$. لنفترض أن t يُقاس بالساعات و $f(t) = e^{-0.02t} - e^{-0.42t}$. أوجد نهاية $f(t)$ على حد سواء عندما $t \to 0$ و $t \to \infty$، وفسّر كلتا النهايتين من حيث تركيز الدواء.

71. تجاهل مقاومة الهواء، أقصى ارتفاع يصل إليه صاروخ تم إطلاقه بسرعة متجهة أولية v_0 هو $h = \frac{v_0^2 R}{19.6R - v_0^2}$ m/s، حيث R هو نصف قطر الأرض. في هذا التمرين، نفسّر هذا كدالة v_0 اشرح لماذا ينبغي تقييد مجال هذه الدالة إلى $v_0 \geq 0$. هناك قيد إضافي. أوجد القيمة (الموجبة) v_e بحيث يكون h غير محدد. ارسم تمثيلًا بيانيًا محتملًا عند h مع $0 \leq v_0 < v_e$ وناقش أهمية خط التقارب الرأسي عند v_e. اشرح لماذا تُسمى v_e **السرعة المتجهة للإفلات.**

تمرينات استكشافية

1. لنفترض أنك تقوم بقذف كرة سلة من مسافة (أفقية) قدرها L قدم، مطلقًا الكرة من موقع يبعد h قدم أسفل السلة. للحصول على حركة مثالية، من الضروري أن تكون السرعة المتجهة الأولية v_0 وزاوية الإطلاق الأولية θ_0 ملبّيتين للمعادلة $v_0 = \sqrt{gL}/\sqrt{2\cos^2\theta_0(\tan\theta_0 - h/L)}$



للقيام برمية حرة، خذ $L = 15$ ft و $h = 2$ ft و $g = 32$ ft/s^2 وارسم تمثيلًا بيانيًا لـ v_0 كدالة لـ θ_0. ما أهمية خطي التقارب الرأسيين؟ اشرح بالمصطلحات المادية نوع التسديدة التي تتوافق مع كل خط تقارب رأسي. قدّر القيمة الصغرى لـ v_0 (أسميها v_{min}). اشرح لماذا من الأفضل أن تقوم بقذف كرة بسرعة متجهة أولية قليلة. هناك ميزة أخرى لهذه السرعة المتجهة الأولية. لنفترض أن السلة قطرها 2 ft والكرة قطرها 1 ft. لعمل رمية حرة، تكون $L = 15$ ft مثالية. ما الحد الأقصى للمسافة الأفقية التي يمكن أن تقطعها الكرة وهي متجهة إلى السلة (دون ضربها في اللوحة الخلفية)؟ ما الحد الأدنى للمسافة الأفقية؟ نسمي هذين العددين L_{min} و L_{max}. أوجد زاوية θ_1 التي تتوافق مع v_{min} و L_{min} وزاوية θ_2 التي تتوافق مع v_{min} و L_{max}. الفرق $|\theta_2 - \theta_1|$ هو الهامش الزاوي للخطأ. وقد وضّح برانكازيو أن هامش الخطأ الزاوي لـ v_{min} أكبر من أي هامش لسرعة متجهة أولية أخرى.

2. في التطبيقات، من الشائع حساب $\lim_{x \to \infty} f(x)$ لتحديد "استقرار" الدالة $f(x)$. فكّر في الدالة $f(x) = xe^{-x}$. عندما $x \to \infty$، يتجه الأول في $f(x)$ إلى ∞، ولكن يتجه العامل الثاني إلى 0. ما دور ناتج الضرب عندما يصغر أحد الحدود ويكبر الحد الآخر؟ ذلك

يعتمد على أي واحد يتغير بشكل أسرع. ما تريد معرفته هو أي حد "المهيمن". استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين قيمة $\lim_{x\to\infty}(xe^{-x})$. ما الحد المهيمن؟ في النهاية $\lim_{x\to\infty}(x^2e^{-x})$. ما الحد المهيمن؟ جرب أيضًا $\lim_{x\to\infty}(x^3e^{-x})$. بناءً على التحقيق، هل دائمًا صحيح أن الدوال الأسية تهيمن على متعددة الحدود؟ حاول تحديد نوع الدالة المهيمنة، متعددة الحدود أم لوغاريتمية.

التعريف الرسمي للنهاية

تذكر أننا نكتب

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

إذا كانت $f(x)$ تقترب كثيرًا من L عندما x يقترب كثيرًا من a . بالرغم من السهولة، إلا أن هذا الوصف يعد غير دقيق، لأنه لبس لدينا تعريف دقيق لما يعنيه معنى "الاقتراب". ومع ذلك، في هذا الدرس ، سنجعل هذا الأمر أكثر دقة وسنبدأ في رؤية كيف ينجح **التحليل الرياضي** (هذا الفرع من الرياضيات الذي يكون فيه حساب التفاضل والتكامل هو الدراسة الأبسط).

إنّ دراسة الرياضيات الأكثر تقدمًا دون فهم التعريف الدقيق للنهاية هي أقرب إلى حد ما من دراسة جراحة المخ بدون تكلف عناء كل هذا العمل الخلفي في الكيمياء والأحياء. في الطب، لا يتم ذلك إلا من خلال دراسة متأنية للعالم المجهري لنجد أن الفهم الأعمق لعالمنا المجهري قد تطور. وبالمثل، في التحليل الرياضي، يتم ذلك من خلال فهم السلوك المجهري للدوال (مثل التعريف الدقيق للنهاية) وهو ما يُحدث فهمًا أعمق للرياضيات.

نبدأ بالدراسة المتأنية للمثال الابتدائي. ينبغي أن تعتقد أن

$$\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$$

إذا طلب منك تفسير معنى هذه النهاية المحددة لطالب زميل، فينبغي عليك تكرار الشرح الأولي الذي استخدمناه حتى الآن، وهو عندما تقترب x كثيرًا من 2 ، فإن $(3x + 4)$ تقترب من 10 وهذا يعني، ينبغي أن نكون قادرين على جعل $(3x + 4)$ أقرب ما يكون إلى 10، من خلال جعل x قريبًا قربًا كافيًا من 2. ولكن هل يمكننا القيام بذلك حقًا؟ مثلًا، هل يمكننا استخدام النهاية $(3x + 4)$ لتكون في مسافة 1 من 10؟ لمعرفة قيم x التي ستضمن ذلك، نكتب متباينة توضح أن $(3x + 4)$ تقع في مجال وحدة واحدة من 10:

$$|(3x + 4) - 10| < 1$$

عند حذف القيم المطلقة، نرى أن هذا مكافئ لـ

$$-1 < (3x + 4) - 10 < 1 \qquad \text{أو}$$

$$-1 < 3x - 6 < 1$$

بما أننا نحتاج إلى تحديد كيف نجعل المتغير x قريب من العدد 2 فإننا نريد أن نعزل $x - 2$ ، بدلًا من x . لذلك، بالقسمة على 3، نحصل على

$$-\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3}$$

أو

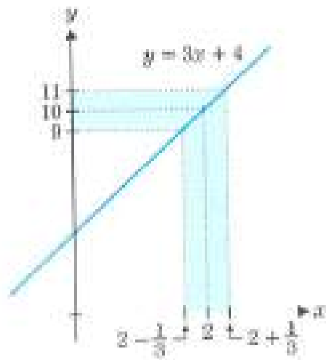
$$|x - 2| < \frac{1}{3} \qquad (6.1)$$

عند عكس الخطوات التي تؤدي إلى المتباينة (6-1)، نرى أنه إذا كان x ضمن مسافة $\frac{1}{3}$ من العدد 2 ، فإن $(3x + 4)$ سيكون ضمن المسافة المحددة (1 من 10)، (راجع الشكل 2.44 للتفسير البياني لذلك). إذن، هل أقنعك هذا أنه يمكنك جعل $(3x + 4)$ أقرب ما تريد من 10؟ ربما لا. ولكن إذا استخدمت مسافة أصغر، ربما ستكون أكثر اقتناعًا

ملاحظات تاريخية

أوغستين لويس كوشي (1789--1857)

عالم رياضيات فرنسي أوجد الدقة في الرياضيات، بما في ذلك التعريف الحديث للنهاية (الصياغة ε-δ الموضحة في هذا الدرس منسوبة إلى العالم ويرستراس). كان كوشي واحدًا من علماء الرياضيات ذوي العلم الغزير في التاريخ، حيث شارك بإسهامات مهمة في نظرية الأعداد والجبر الخطي والمعادلات التفاضلية والفلك والبصريات والمتغيرات المعقدة. كتب أحد زملائه، وهو رجل تعسر عليه فهمه، "كوشي مجنون وليس هناك ما يمكن القيام به عنه. فبالرغم مما توصلنا إليه حاليًا، إلا أنه هو الوحيد الذي يعرف كيف ينبغي أن تتم الرياضيات".



الشكل 2.44

$2 - \frac{1}{3} < x < 2 + \frac{1}{3}$ يضمن أن $|(3x + 4) - 10| < 1$

مثال 6.1 استكشاف نهاية بسيطة

أوجد قيم x التي تكون لها $(3x+4)$ ضمن مسافة $\frac{1}{100}$ من 10 .

الحل إننا نريد

$$|(3x+4)-10| < \frac{1}{100}$$

عند حذف القيم المطلقة، نحصل على

$$-\frac{1}{100} < (3x+4)-10 < \frac{1}{100}$$

أو

$$-\frac{1}{100} < 3x-6 < \frac{1}{100}$$

بالقسمة على 3 نحصل على:

$$-\frac{1}{300} < x-2 < \frac{1}{300}$$

وهذا مكافئ لـ

$$|x-2| < \frac{1}{300}$$ ■

عندما وضحنا في مثال 6.1 أننا يمكن أن نجعل $(3x+4)$ قريبًا بشكل منطقي من 10، فما مدى القرب الذي نحتاجه لنكون قادرين على عمل ذلك؟ الإجابة هي قريبة أعتباطيًا بدرجة يطلبها أي شخص. يمكننا تحقيق ذلك من خلال تكرار الحجج في مثال 6.1، وهذه المرة المسافة غير محددة، تسميها ε (إبسيلون، حيث $\varepsilon > 0$).

مثال 6.2 التحقق من نهاية

لاحظ أنه يمكننا جعل $(3x+4)$ ضمن أي مسافة محددة $\varepsilon > 0$ من 10 (مهما كان ε صغيرًا)، فقط من خلال جعل x قريب بما يكفي من 2.

الحل الهدف من ذلك هو تحديد مدى قيم x التي ستضمن أنّ $(3x+4)$ يبقى ضمن ε من 10. (راجع الشكل 2.45 لرؤية هذا المدى)، لدينا

$$|(3x+4)-10| < \varepsilon,$$

وهذا مكافئ لـ

$$-\varepsilon < (3x+4)-10 < \varepsilon$$

أو

$$-\varepsilon < 3x-6 < \varepsilon$$

بالقسمة على 3 نحصل على:

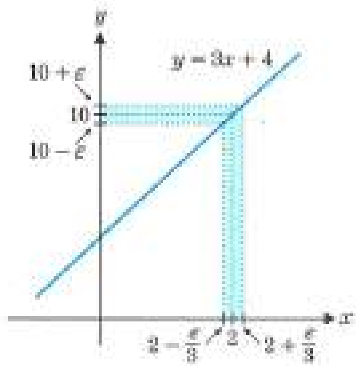
$$-\frac{\varepsilon}{3} < x-2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

أو

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

لاحظ أنّ كل خطوة من الخطوات السابقة مكسية. لذلك فإنّ $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ يعني أيضًا أن $|(3x+4)-10| < \varepsilon$ وهذا يوضح أنه طالما كان x ضمن مسافة $\frac{\varepsilon}{3}$ من 2، فسيكون $(3x+4)$ في حدود المسافة المطلوبة ε من 10. أي إنّ،

$|(3x+4)-10| < \varepsilon$ عندما $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ ■



الشكل 2.45
مدى قيم x التي تحافظ على $|(3x+4)-10| < \varepsilon$

توقف لحظة أو اثنين لتدرك ما فعلناه في مثال 6.2. من خلال استخدام مسافة غير محددة ε ، تحققنا من أنه يمكننا عمل $(3x+4)$ أقرب إلى 10 كما يتم طلبه (أي، القرب اعتباطيًا، سميها $\varepsilon > 0$ كما تريد)، ببساطة من خلال عمل x قريب بما يكفي من 2. وعلاوة على ذلك، فقد وضحنا صراحة ما يعنيه "القرب من 2" في سياق المسألة الحالية. وبالتالي، لا يهم مدى القرب المطلوب لـ $(3x+4)$ إلى 10، فيمكننا تحقيق ذلك ببساطة من خلال أخذ x ليكون في الفترة المحددة.

وبعد ذلك، ندرس هذه الفكرة الأكثر دقة للنهاية في حالة وجود دالة غير معرفة عند النقطة محل الاستفهام.

مثال 6.3 إثبات أنّ النهاية صحيحة

اثبت أنّ $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = 6$

الحل من السهل استخدام القواعد المعتادة للنهايات للوصول إلى هذه النتيجة. ولكنها تعد مسألة أخرى أن نتحقق من أن ذلك صحيح باستخدام الفكرة الجديدة الأكثر دقة للنهاية. وفي هذه الحالة، نريد أن نعرف مدى قرب x الذي يجب أن يكون إلى 1 لضمان أنّ

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

تقع ضمن مسافة غير محددة $\varepsilon > 0$ من 6.

أولًا، لاحظ أنّ f غير معروفة عند $x = 1$. لذلك، فإننا نسعى للوصول إلى مسافة δ (دلتا، $\delta > 0$)، بحيث إذا كان x يبعد ضمن مسافة δ من 1، ولكن $x \neq 1$ (أي، $0 < |x - 1| < \delta$)، فهذا يضمن أنّ $|f(x) - 6| < \varepsilon$

لاحظ أننا قد حددنا أنّ $0 < |x - 1|$ لضمان أنّ $x \neq 1$. وعلاوة على ذلك، $|f(x) - 6| < \varepsilon$ يعادل

$$-\varepsilon < \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} - 6 < \varepsilon$$

عند إيجاد المقام المشترك والطرح في الحد المتوسط، نحصل على

$$-\varepsilon < \frac{2x^2 + 2x - 4 - 6(x - 1)}{x - 1} < \varepsilon \quad \text{أو} \quad -\varepsilon < \frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 1} < \varepsilon$$

بما أن البسط يتحلل إلى عوامل، فهذا يعادل

$$-\varepsilon < \frac{2(x - 1)^2}{x - 1} < \varepsilon$$

بما أن $x \neq 1$، فيمكننا اختصار عوامل $(x - 1)$ لنحصل على

$$-\varepsilon < 2(x - 1) < \varepsilon$$

أو

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2}$$ بالقسمة على 2

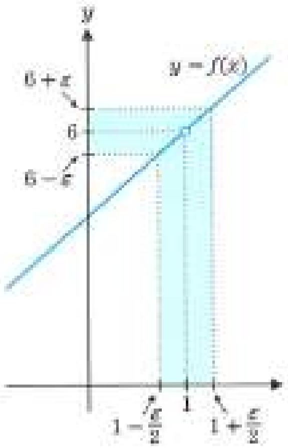
وهو ما يعادل $|x - 1| < \varepsilon/2$. لذلك، عند أخذ $\delta = \varepsilon/2$ وإجراء الحل بترتيب عكسي، نرى أن x المطلوبة لاستيفاء

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

تضمن أن

$$\left| \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} - 6 \right| < \varepsilon$$

نوضح ذلك بيانيًا في الشكل 2.46.



الشكل 2.46

$0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ يضمن أن
$6 - \varepsilon < \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} < 6 + \varepsilon$

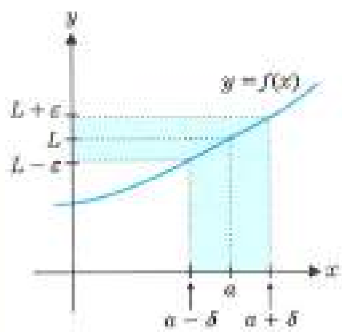
ما رأيناه حتى الآن يدفعنا إلى عمل التعريف العام التالي، الموضح في الشكل 2.47.

التعريف 6.1 (التعريف الدقيق للنهاية)

لدالة f معرفة في بعض الفترات المفتوحة التي تتضمن a (ولكن ليس بالضرورة عند a نفسها)، نقول

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

إذا وجد عدد $\varepsilon > 0$، فهناك عدد آخر $\delta > 0$، بحيث $0 < |x - a| < \delta$ يضمن أنّ $|f(x) - L| < \varepsilon$.



الشكل 2.47

$a - \delta < x < a + \delta$ يضمن أن
$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

لاحظ أن مثال 6.2 يعتبر توضيحا لتعريف 6.1 لـ $\lim_{x\to 2}(3x+4)$ وهناك، وجدنا أن $\delta = \varepsilon/3$ تستوفي التعريف.

ملاحظة 6.1

نريد أن نؤكد على أن هذا التعريف الأساسي للنهاية ليس فكرة جديدة. وإنما، هو عبارة رياضية دقيقة للفكرة الأولية للنهاية التي نوقشت في الدرس 2.2. أيضا، ينبغي أن نشير بكل أمانة إلى أنه من الصعب إيجاد δ صراحة كدالة لـ ε ، لجميع الأمثلة البسيطة ما عدا عدد قليل منها، يجب علينا تعلم كيفية العمل من خلال التعريف، حتى بالنسبة لعدد قليل من المسائل، لتسليط الضوء بشكل أعمق على المفهوم.

يقدم مثال 6.4 تحديا غير متوقع، بالرغم من أنه أكثر تعقيدا بدرجة قليلة من المسائل السابقة.

مثال 6.4 استخدام التعريف الدقيق للنهاية

استخدم التعريف 6.1 لإثبات أن $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

الحل إذا كانت هذه النهاية صحيحة، فإن عند أي $\varepsilon > 0$ معطاة، يجب أن تكون $\delta > 0$ والتي عندما $0 < |x-2| < \delta$ يضمن

$$|x^2-4| < \varepsilon \tag{6.2}$$

لاحظ أن

$$|x^2-4| = |x+2||x-2|$$ التحليل إلى عوامل الفرق بين مربعين

بما أننا مهتمون فقط بما يحدث بالقرب من $x = 2$ ، فإننا نفترض أن x تقع في الفترة $[1, 3]$. وفي هذه الحالة، نحصل على

$$|x+2| \le 5$$ بما أن $x \in [1,3]$

وهكذا، من (6.2)

$$\begin{aligned} |x^2-4| &= |x+2||x-2| \\ &\le 5|x-2| \end{aligned} \tag{6.3}$$

وأخيرا، إذا كنا بحاجة إلى

$$5|x-2| < \varepsilon \tag{6.4}$$

فسيكون لدينا أيضا من (6.3) أن

$$|x^2-4| \le 5|x-2| < \varepsilon$$

بالطبع، (6.4) تعادل

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

في ضوء ذلك، لدينا حاليا اثنان من القيود، أن $|x-2| < 1$ وأن $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ لضمان استيفاء كلا القيدين، نختار $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ (كحد أدنى من بين 1 و $\frac{\varepsilon}{5}$.) عند الحل بترتيب عكسي (راجع الهامش)، نحصل على ذلك لهذا الخيار من δ ،

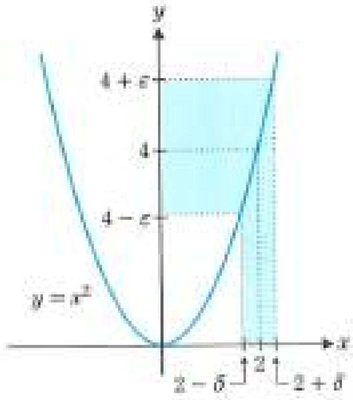
$$0 < |x-2| < \delta$$

سيضمن أن

$$|x^2-4| < \varepsilon$$

كما هو مطلوب، نوضح ذلك في الشكل 2.48. ■

يوضح العمل المقدم في النص أعلاه كيفية تحديد قيمة لـ δ ، البرهان الأساسي للنهاية ينبغي أن يتبع الخطوات المبينة في الهامش.



الشكل 2.48

$0 < |x-2| < \delta$ يضمن أن $|x^2-4| < \varepsilon$

البرهان

دع $\varepsilon > 0$ يكون اعتباطيا. عرِّف $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. إذا كان $0 < |x-2| < \delta$ ، فإن $-1 < x < 3$ ، $|x-2| < 1$ و $|x+2| < 5$ وأيضا، فإن $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$. إذن

$$|x^2-4| = |x-2| \cdot |x+2| < \frac{\varepsilon}{5}(5) = \varepsilon$$ ■

استكشاف تعريف النهاية بيانيًا

كما ترى في مثال 6.4، لا يتم الوصول إلى إيجاد δ عند ε محدد، بسهولة دائمًا. ولكن، يمكننا أن نستكشف التعريف بيانيًا لأي دالة. أولًا، نعيد النظر في مثال 6.4 بيانيًا

مثال 6.5 استكشاف تعريف الدقيق للنهاية بيانيًا

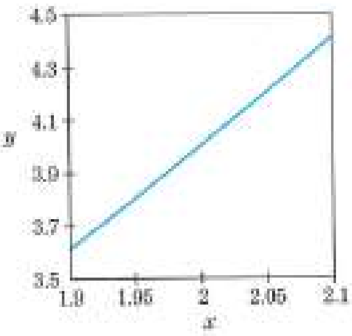
استكشف التعريف الدقيق للنهاية بيانيًا، لـ $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

الحل في مثال 6.4، اكتشفنا أنه لـ $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$.

$0 < |x-2| < \delta$ مما يعني $|x^2-4| < \varepsilon$

يقال ذلك (لـ $\varepsilon \le 5$) إذا قمنا برسم تمثيل بياني لـ $y = x^2$ وتقييد قيم x لتقع في الفترة $\left(2-\dfrac{\varepsilon}{5}, 2+\dfrac{\varepsilon}{5}\right)$. إذًا، قيم y ستقع في الفترة $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$.

خذ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$، على سبيل مثال. إذا قمنا برسم التمثيل البياني في النافذة المحددة من خلال $2-\dfrac{1}{10} \le x \le 2+\dfrac{1}{10}$ و $3.5 \le y \le 4.5$، فلن يظهر التمثيل البياني في الجزء العلوي أو السفلي من الشاشة. (انظر الشكل 2.49). بالطبع، يمكننا رسم نفس الصورة فعليًا لأي قيمة معينة ε، لأن لدينا صيغة واضحة لإيجاد δ عند وجود ε. بالنسبة لمعظم مسائل النهايات، فإننا محظوظين للغاية. ■



الشكل 2.49

$y = x^2$

مثال 6.6 استكشاف تعريف النهاية لدالة مثلثية

أوجد بيانيًا $\delta > 0$ التي تتوافق مع $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ (a) و $\varepsilon = 0.1$ (b) لـ $\lim\limits_{x\to 2} \sin\dfrac{\pi x}{2} = 0$.

الحل تبدو هذه النهاية واضحة بما يكفي. على كل حال، $\sin\dfrac{2\pi}{2} = 0$ و $f(x) = \sin x$ تعد دالة متصلة. ولكن، تمكن التمثيلات البيانية من التحقق من ذلك بعناية. بالنظر إلى أي $\varepsilon > 0$، فإننا نريد إيجاد $\delta > 0$، والتي عندها

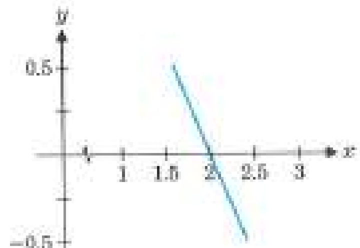
$$0 < |x-2| < \delta$$

$$\left|\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right| < \varepsilon$$

لاحظ أنه لأن ليس لدينا جبر لتبسيط $\dfrac{\pi x}{2}$، فلا يمكننا تحقيق ذلك رمزيًا. بدلًا من ذلك، سنحاول إيجاد δ جبريًا التي تتوافق مع رموز ε المحددة المعطاة. أولًا، بالنسبة إلى $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$، نريد إيجاد $\delta > 0$ الذي إذا كان $0 < |x-2| < \delta$، فإن

$$-\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi x}{2} - 0 < \frac{1}{2}$$

برسم التمثيل البياني لـ $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ لكل $1 \le x \le 3$ ولكل $-\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2}$، نحصل على الشكل 2.50a



الشكل 2.50a

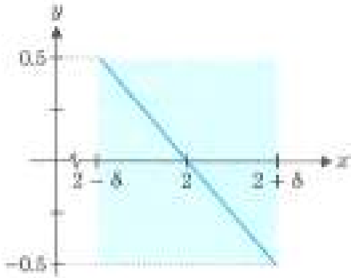
$y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$

إذا كنت تتبع آلة حاسبة أو تمثيلًا بجهاز الكمبيوتر، فستلاحظ أن التمثيل البياني يبقى على الشاشة (أي أن، قيم y تبقى في الفترة $[-0.5, 0.5]$) لكل $x \in [1.666667, 2.333333]$ وبالتالي، قمنا بالتحديد تجريبيًا أنه لكل $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$،

$$\delta = 2.333333 - 2 = 2 - 1.666667 = 0.333333$$

سينجح. (وبالطبع ستنجح أي قيمة δ أصغر من 0.333333). لتوضيح ذلك، نعيد رسم التمثيل البياني السابق، ولكن نقيّد x لتقع في الفترة $[1.67, 2.33]$ (انظر الشكل 2.50b). في هذه الحالة، سيبقى التمثيل البياني على الشاشة على مدى قيم x المعروضة بأكمله. عند أخذ $\varepsilon = 0.1$، نبحث عن فترة لقيم x التي ستضمن أن $\sin \frac{\pi x}{2}$ تبقى بين -0.1 و 0.1. نعيد رسم التمثيل البياني من الشكل 2.50a، مع مدى y في الفترة $[-0.1, 0.1]$ (انظر الشكل 2.51a). ومرة أخرى، يوضّح لنا تتبع التمثيل البياني أن قيم y ستبقى في المدى المطلوب لكل $x \in [1.936508, 2.063492]$ وبالتالي، نكون قد قمنا تجريبيًا بتحديد أن

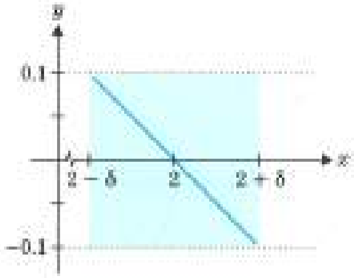
$$\delta = 2.063492 - 2 = 2 - 1.936508 = 0.063492$$



الشكل 2.50b

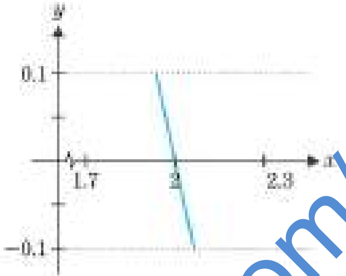
$y = \sin \frac{\pi x}{2}$

سينجح هنا. نعيد رسم التمثيل البياني باستخدام مدى جديد لقيم x (راجع الشكل 2.51a)، لأن التمثيل البياني يبقى في النافذة لجميع قيم x في الفترة المحددة.



الشكل 2.51b

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$



الشكل 2.51a

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$

من المهم أن ندرك أننا لا نثبت أن النهاية الموجودة في الأعلى صحيحة. ولإثبات ذلك، يتطلب منا أن نجد رمزيًا δ لكل $\varepsilon > 0$. والفكرة هنا تكمن في استخدام الرسومات التوضيحية البيانية لتصبح أكثر دراية بالتعريف وما يمثله δ و ε. ■

مثال 6.7 استكشاف تعريف النهاية عندما تكون النهاية غير موجودة

حدّد ما صحة أو عدم صحة $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = 1$

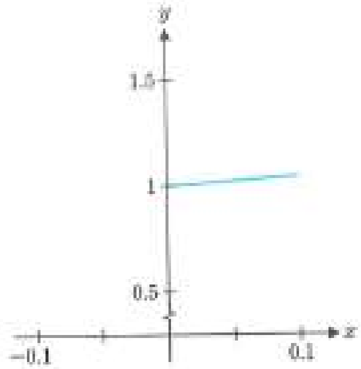
x	$\frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$
0.1	1.03711608
0.01	1.0037461
0.001	1.00037496
0.0001	1.0000375

الحل نقوم أولًا بإنشاء جدول لقيم الدالة. من الجدول وحده، قد نميل إلى تخمين أن النهاية تساوي 1. ولكننا بذلك نرتكب خطأً كبيرًا، لأننا لم نراعِ القيم السالبة لـ x أو نرسم تمثيلًا بيانيًا. الشكل 2.52a يوضح التمثيل البياني الافتراضي المرسوم من خلال نظام الجبر بالحاسوب. في هذا التمثيل البياني، لا تبدو قيم الدوال كثيرًا وكأنها تقترب من 1 عندما $x \to 0$ (على الأقل عندما $x \to 0^-$). نقوم الآن بالتحقق من النهاية بيانيًا عند $\varepsilon = \frac{1}{2}$. وهنا، نحن بحاجة لإيجاد $\delta > 0$ والذي من خلاله يضمن $0 < |x| < \delta$ أن

$$1 - \frac{1}{2} < \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} < 1 + \frac{1}{2}$$

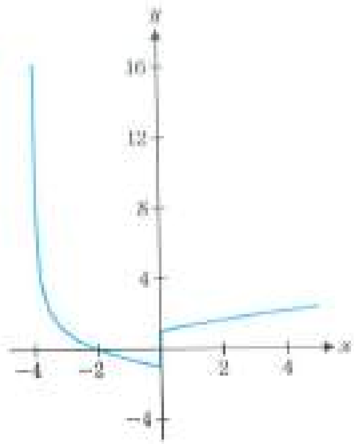
أو

$$\frac{1}{2} < \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} < \frac{3}{2}$$



الشكل 2.52b

$$y = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$$

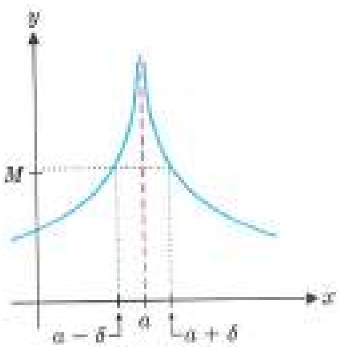


الشكل 2.52a

$$y = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$$

سنقوم بتجريب $\delta = 0.1$ لنرى ما إذا كان هذا صغيرًا بما يكفي. لذلك، فإننا نعين مدى x في الفترة $[-0.1, 0.1]$ والمدى y في الفترة $[0.5, 1.5]$ ونعيد رسم التمثيل البياني في هذه النافذة. (انظر الشكل 2.52b). لاحظ أنه لا توجد أي نقاط مرسومة في النافذة لأي $x < 0$. ووفقًا لهذا التعريف، يجب أن تقع قيم y في الفترة $(0.5, 1.5)$ لجميع قيم x في الفترة $(-\delta, \delta)$. وعلاوة على ذلك، يمكنك أن ترى أنّ $\delta = 0.1$ لا ينجح بوضوح لأن $x = -0.05$ يقع في الفترة $(-\delta, \delta)$ ولكن $f(-0.05) \approx -0.981$ لا يقع في الفترة $(0.5, 1.5)$. يجب أن تقنع نفسك بأنه مهما جعلت δ صغيرًا، فإن هناك x في الفترة $(-\delta, \delta)$ بحيث $f(x) \notin (0.5, 1.5)$. (في الحقيقة، لاحظ أنه لجميع قيم x في الفترة $(-1, 0)$ ، $f(x) < 0$.) وهذا يعني أنه لا يوجد خيار δ يجعل المتباينة المعرّفة صحيحة لـ $\varepsilon = \frac{1}{2}$. وبالتالي، تكون النهاية التخمينية للعدد 1 غير صحيحة.

ينبغي عليك ملاحظة أنه بالرغم من أننا لم نوضح إلا أن النهاية ليست 1، فإن الأمر أكثر تعقيدًا لإظهار أن النهاية غير موجودة. ■



الشكل 2.53

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

النهايات التي تتضمن اللانهاية

تذكر أننا نكتب

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

كلما زادت الدالة بدون حدود عندما $x \to a$. وهذا يعني أنه يمكننا جعل $f(x)$ كبيرًا كما نريد من خلال جعل x قريبًا بما يكفي من a . لذلك، بالنظر إلى أي عدد كبير موجب M ، ينبغي علينا أن نكون قادرين على جعل $f(x) > M$ ، ليكون x قريبًا بما يكفي من a . وهذا يقودنا إلى التعريف التالي.

التعريف 6.2

للدالة f المعرّفة a في بعض الفترات المفتوحة التي تحتوي على a (ولكن ليس بالضرورة تساوي a نفسه)، نقول

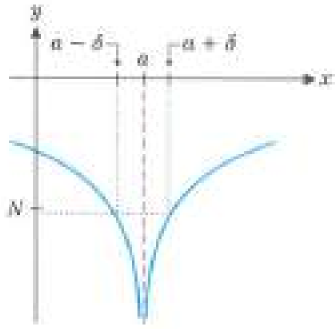
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

إذا أُعطيت $M > 0$ ، فهناك عدد آخر $\delta > 0$ ، بحيث يضمن $0 < |x - a| < \delta$ أنّ $f(x) > M$. (راجع الشكل 2.53 للتفسير البياني لذلك)

وبالمثل، إذا تناقصت $f(x)$ بدون حدود عندما $x \to a$ ، فإن $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. فكر في كيفية جعل ذلك أكثر دقة ثم فكر في التعريف التالي.

اليوم في الرياضيات

بول هالموس (1916-2006) هو عالم رياضيات هنغاري المولد، حظي بسمعة كواحد من أفضل كُتّاب الرياضيات على الإطلاق. بالنسبة إلى هالموس، حساب التفاضل والتكامل لا يأتي بسهولة. ولكنه يأتي بالفهم النابع من لحظة إلهام بعد فترة طويلة من العمل الجاد. "أتذكر وقوفي على السبورة في الحجرة 213 من مبنى الرياضيات مع وارن أمبروز وفجأة فهمت الإبسيلون. وفهمت ما النهايات. وكل هذه الأشياء التي كان الناس يحثون عنها أصبحت واضحة بالنسبة لي.... فأمكنني إثبات النظريات. وبعد ظهر ذلك اليوم أصبحت عالم رياضيات".



الشكل 2.54
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

التعريف 6.3 (التعريف الدقيق للنهاية)

للدالة f المعرفة في فترة مفتوحة تحتوي على a (ولكن ليس بالضرورة تساوي a نفسه). نقول

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

إذا أعطيت عدد $N < 0$ ، فهناك عدد آخر $\delta > 0$ ، يتضمن $0 < |x-a| < \delta$ أن $f(x) < N$.
(راجع الشكل 2.54 للتفسير البياني لذلك.)

من السهل الحفاظ على هذه التعريفات مباشرة إذا كنت تفكر في معناها. يمكنك ألا تحفظهم

مثال 6.8 **استخدام تعريف النهاية عندما تكون النهاية لانهائية**

اثبت أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

الحل لأي عدد (كبير) $M > 0$ نحتاج إلى إيجاد مسافة $\delta > 0$ بحيث إذا كان x ضمن δ من 0 (ولكن لا تساوي 0) إذا

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad (6.5)$$

بما أن كلا من M و x^2 قيم موجبة، فإن (6.5) تكافئ

$$x^2 < \frac{1}{M}$$

عند أخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين وتذكر أن $\sqrt{x^2} = |x|$ ، نحصل على

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

لذلك، لأي $M > 0$ ، إذا أخذنا $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ وأجرينا الحل بترتيب عكسي، نحصل على $0 < |x-0| < \delta$ والذي يتضمن

$$\frac{1}{x^2} > M$$

كما هو المطلوب . لاحظ أن هذا يوضح على سبيل المثال، أنه، لكل $M = 100$ ، $\frac{1}{x^2} > 100$ ، كلما كان $0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$. (تحقق من ذلك، كتمرين)

هناك اثنين من النهايات المتبقية التي لا يزال يتعين وضعها على أساس دقيق. قبل القراءة، حاول معرفة كيف تبدو التعريفات المناسبة لنفسك.

إذا كتبنا $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ، فإننا نعني أن x يتزايد دون حدود، و $f(x)$ يقترب كثيرا من L . وهذا يعني أنه يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من L كما نحب، وذلك من خلال اختيار x كبيرًا بما يكفي. بتعبير أدق، لدينا التعريف التالي.

التعريف 6.4

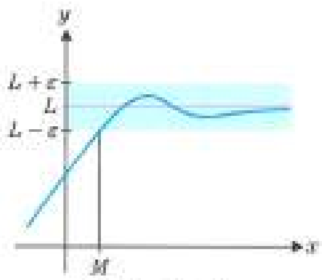
للدالة f المعرّفة على فترة (a, ∞) ، لبعض $a > 0$ ، إذا أعطيت

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

إذا أعطيت أي $\varepsilon > 0$ ، فهناك عدد $M > 0$ ، بحيث $x > M$ يتضمن أن

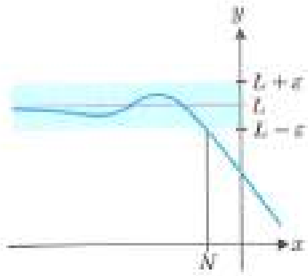
$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(راجع الشكل 2.55 للتفسير البياني لذلك.)



الشكل 2.55
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

وبالمثل، قلنا إن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ يعني أنه كلما تناقص x بدون حدود، فإن $f(x)$ يقترب كثيرًا من L . لذلك، ينبغي علينا أن نكون قادرين على جعل $f(x)$ أقرب إلى L كما هو مطلوب، فقط من خلال جعل x كبيرًا بما يكفي في القيمة المطلقة والسالبة. لدينا التعريف التالي.



الشكل 2.56
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

التعريف 6.5

للدالة f المعرفة على فترة $(-\infty, a)$ ، لبعض قيم $a < 0$ ، فإننا نقول

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

إذا أعطيت أي $\varepsilon > 0$ ، فهناك عدد $N < 0$ ، بحيث $x < N$ يتضمن أن

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(راجع الشكل 2.56 للتفسير البياني لذلك).

نستخدم التعريفين 6.4 و6.5 كما نعمل مع التعريفات 6.1−6.3، كما نرى في مثال 6.9.

مثال 6.7 استخدم تعريف النهاية حيثما تصبح x لانهائية

اثبت أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

الحل هنا، يجب علينا توضيح أنه بالنظر إلى أي $\varepsilon > 0$. يمكننا جعل $\frac{1}{x}$ ضمن مسافة ε من 0 بسهولة من خلال جعل x كبيرًا بما يكفي في القيمة المطلقة والسالبة. لذلك، فإننا نحتاج إلى تحديد قيم x تلك التي

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

أو

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \qquad (6.6)$$

بما أن $x < 0, |x| = -x$ ، (6.6) يصبح

$$\frac{1}{-x} < \varepsilon$$

اقسم كلا الطرفين على ε وقم بالضرب في x (تذكر أن $x < 0$ و $\varepsilon > 0$ ، بحيث يغير ذلك من اتجاه المتباينة)، ونحصل على

$$-\frac{1}{\varepsilon} > x$$

لذلك، إذا أخذنا $N = -\frac{1}{\varepsilon}$ وأجرينا الحل بترتيب عكسي، فإننا نكون قد طبقنا التعريف وبالتالي أثبتنا أن النهاية صحيحة. ■

ملحوظة 6.2

ينبغي عليك توخي الحذر من ملاحظة التشابه بين التعريفات لخمس نهايات قدمناها، وتتعامل كل نهاية مع وصف دقيق لما تعنيه أن تكون "قريبة". ويمثل العمل من خلال هذه التعريفات فائدة كبيرة حتى تتمكن من تقديم مفرداتك الخاصة لكل نهاية. لا تقم بمجرد حفظ التعريفات الأساسية كما ورد هنا، ولكن، قم بالحل لفهم ما تعنيه وتقدير اللغة الدقيقة التي تستخدمها الرياضيات.

إننا لا تستخدم تعريفات النهايات لإثبات كل نهاية تأتي. في الواقع، نستخدمها لإثبات بعض النهايات الأساسية فقط ولإثبات نظرية النهاية التي كنا نستخدمها لبعض الوقت بدون برهان. ويعمل زيادة استخدام هذه النظريات على تقديم مبررات قوية لنهايات جديدة. وكمثال على ذلك، أثبتنا الآن قاعدة النهاية للمجموع.

النظرية 6.1

لأي عدد حقيقي a إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ وكان $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ ، فإن

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

البرهان

بما أن $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ ، فإننا نعلم أنه لأي عدد $\varepsilon_1 > 0$ ، هناك عدد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{يضمن أن} \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon_1 \qquad (6.7)$$

بالمثل، بما أن $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ ، فإننا نعلم أنه لأي عدد $\varepsilon_2 > 0$ ، هناك عدد $\delta_2 > 0$ بحيث

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \text{يضمن أن} \quad |g(x) - L_2| < \varepsilon_2 \qquad (6.8)$$

والآن، من أجل الحصول على

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = (L_1 + L_2)$$

ينبغي أن نوضح أنه لأي عدد $\varepsilon > 0$ ، هناك عدد $\delta > 0$ بحيث

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{يضمن أن} \quad |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &= |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| \\ &\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \end{aligned} \qquad (6.9)$$

من خلال المتباينة المثلثية. بالطبع، يمكن جعل كلا الحدين على الطرف الأيمن من (6.9) صغيرين اعتباطيًا من (6.7) و (6.8). وبشكل خاص، إذا أخذنا $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ ، سنحصل على

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{و} \quad 0 < |x-a| < \delta_2$$

نحصل من (6.7) و (6.8) و (6.9) أن

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

كما هو مطلوب. بالطبع، سيحدث ذلك إذا أخذنا

$$0 < |x-a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \ ■$$

يتم إثبات القواعد الأخرى للنهايات على نحو مماثل، ونبيّنها في الملحق A.

التمارين 2.6

تمارين الكتابة

1. قام إسحق نيوتن عام 1687 في كتابه المتميّز الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية، والذي يقدم العديد من مبادئ حساب التفاضل والتكامل، بوصف النهاية المهمة $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أنها "النهاية التي تتناقص إليها نسب الكميات دون أن تقارب النهاية دومًا، وهي النهاية التي تقترب إليها تلك النسب لتكون أقرب إليها من أي فرق معطى، لكنها لا تتجاوزها، ولا تصل إليها أبدًا حتى تتلاشى الكميات". إذا حدث وأن شعرت بالإرهاق في أي لحظة من كثرة الرموز المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل فما عليك إلا أن تفكر بالطريقة التي قد يبدو عليها عند التعبير عنه بالمفردات! ثم بنقد تعريف نيوتن للنهاية متناولًا الأسئلة المطروحة التالية. ما القيود التي تفرضها عبارة "لا تتجاوزه" و"لا تصل إليه أبدًا" على عملية النهاية أعط مثالًا من نهاية بسيطة، لا تكون بالضرورة بالشكل $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ، بحيث تخالف هذه القيود. أعط وصفك الخاص للنهاية (باللغة العربية)، متجنبًا القيود كتلك التي وضعها نيوتن. لماذا يرى علماء الرياضيات أن تعريف $\varepsilon-\delta$ بسيط وبليغ؟
2. لقد حسبت العديد من النهايات قبل مشاهدة تعريف النهاية. اشرح كيف يمكن لهذا التعريف أن يغيّر و/أو يحسّن من فهمك لعملية النهاية.
3. كل كلمة في التعريف $\varepsilon-\delta$ منتقاة بعناية وموضوعة في الجملة بمكانها الدقيق. صف ما الخطأ في كل من "التعريفات" التالية التي تحوي أخطاء طفيفة (مستخدمًا أمثلة!)
   (a) يوجد هناك $\varepsilon > 0$ على أن يوجد هناك $\delta > 0$ بحيث إنه إذا كان $0 < |x-a| < \delta$ ، فعندها يكون $|f(x) - L| < \varepsilon$.
   (b) لجميع القيم $\varepsilon > 0$ ولجميع القيم $\delta > 0$ ، إذا كان $0 < |x-a| < \delta$ ، فيكون عندها $|f(x) - L| < \varepsilon$
   (c) لجميع قيم $\delta > 0$ يوجد هناك $\varepsilon > 0$ بحيث إنه $0 < |x-a| < \delta$ و $|f(x) - L| < \varepsilon$

4. لكي تكون النهاية موجودة، وبالنظر إلى كلّ $\varepsilon > 0$ ، فإنه يجب أن نكون قادرين على إيجاد $\delta > 0$ بحيث تكون المتباينات ذات الصيغة "إذا كان/فإنّ" صحيحة. لإثبات أنّ النهاية غير موجودة، علينا أن نوجد $\varepsilon > 0$ محدّدة بحيث أنّ المتباينات ذات الصيغة "إذا كان/فإنّ" تكون غير صحيحة لأي اختيار لـ $\delta > 0$. لفهم المنطق وراء المبادلة بين دوري "لكلّ" و "يوجد هناك" ، قم بالقياس بالنسبة للحالة التالية. افترض أنّ العبارة "كل واحد يحبّ أحدًا ما" صحيحة. إذا أردت أن تتحقّق من العبارة، لماذا يتعين عليك أن تتحدّث إلى كل شخص على سطح الأرض؟ ولكن، بافتراض أنّ العبارة غير صحيحة، ماذا ينبغي عليك أن تفعل لتدحضها؟

في التمارين 12−1، أوجد بالرموز δ بدلالة ε .

1. $\lim_{x\to 0} 3x = 0$
2. $\lim_{x\to 1} 3x = 3$
3. $\lim_{x\to 2}(3x+2) = 8$
4. $\lim_{x\to 1}(3x+2) = 5$
5. $\lim_{x\to 1}(3-4x) = -1$
6. $\lim_{x\to -1}(3-4x) = 7$
7. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$
8. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1} = -2$
9. $\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$
10. $\lim_{x\to 1}(x^2-x+1) = 1$
11. $\lim_{x\to 2}(x^2-1) = 3$
12. $\lim_{x\to 0}(x^3+1) = 1$

13. حدّد صيغة لـ δ بدلالة ε لكلّ $\lim_{x\to a}(mx+b)$. (إرشاد: استخدم التمارين 6−1). هل تعتمد الصيغة على قيمة a؟ حاول أن توضح هذه الإجابة بيانيًا.

14. بناء على التمرينين 9 و 11، هل تعتمد قيمة δ على قيمة a حيث يكون $\lim_{x\to a}(x^2+b)$ ؟ حاول أن توضح ذلك بيانيًا.

في التمارين 18−15، حدّد عدديًا وبيانيًا δ المناظرة لـ (a) $\varepsilon = 0.1$ و (b) $\varepsilon = 0.05$ مثّل الدالة بيانيًا في نافذة $\varepsilon - \delta$ [مدى x هو $(a-\delta, a+\delta)$ ومدى y هو $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$] للتحقّق من أنّ اختياراتك موفّقة.

15. $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$
16. $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$
17. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3} = 2$
18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2} = 3$

19. عدّل تعريف $\varepsilon - \delta$ لتعريف النهايتين أحاديتي الطرف $\lim_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

20. أوجد باستخدام الرموز أكبر δ مناظرة لـ $\varepsilon = 0.1$ في تعريف $\lim_{x\to 1^-} 1/x = 1$ وأوجد باستخدام الرموز أكبر δ مناظرة لـ $\varepsilon = 0.1$ في تعريف $\lim_{x\to 1^+} 1/x = 1$. أيّ δ يمكن أن يُستخدم في تعريف $\lim_{x\to 1} 1/x = 1$ ؟ اشرح بإيجاز. ثم أثبت أنّ $\lim_{x\to 1} 1/x = 1$

في التمرينين 21 و 22، أوجد δ المناظرة لـ $M = 100$ أو لـ $N = -100$ (بحسب ما هو ملائم) لكلّ نهاية.

21. (a) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x-1} = \infty$ (b) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x-1} = -\infty$

22. (a) $\lim_{x\to 0^+}\cot x = \infty$ (b) $\lim_{x\to \pi^-}\cot x = -\infty$

في التمارين 26−23، أوجد M أو N المناظرة لـ $\varepsilon = 0.1$ لكلّ نهاية عند اللانهاية.

23. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{x^2+x+1} = 1$
24. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-x^2} = 1$
25. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{4x^2-4} = 0.25$
26. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2+1} = 3$

في التمارين 32−27، أثبت أنّ النهاية صحيحة باستخدام التعريف الملائم (مفترضًا أنّ k عدد صحيح).

27. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+2}-3\right) = -3$
28. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-7)^2} = 0$
29. $\lim_{x\to-3}\dfrac{-2}{(x+3)^4} = -\infty$
30. $\lim_{x\to 7}\dfrac{3}{(x-7)^2} = \infty$
31. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0, \text{ for } k > 0$
32. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{2k}} = 0, \text{ for } k > 0$

في التمارين 36−33، عرّف $\varepsilon > 0$ محدّدة بحيث لا يوجد لها أي $\delta > 0$ تستوفي تعريف النهاية.

33. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{إذا كان } x < 1 \\ x^2+3 & \text{إذا كان } x > 1 \end{cases}$ ، $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{إذا كان } x < 0 \\ -x-2 & \text{إذا كان } x > 0 \end{cases}$ ، $\lim_{x\to 0} f(x) \neq -2$

35. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{إذا كان } x < 1 \\ 5-x^2 & \text{إذا كان } x > 1 \end{cases}$ ، $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$

36. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{إذا كان } x < 2 \\ x^2 & \text{إذا كان } x > 2 \end{cases}$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 1$

37. أثبت النظرية (i) 3.1 .

38. أثبت النظرية (ii) 3.1 .

39. أثبت نظرية الشطيرة، كما هو موضّح في النظرية 3.5 .

40. إذا علمت أنّ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ ، أثبت أنّ $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

41. غسالة معدنية يبلغ نصف قطرها (الخارجي) r بوصة، تزن $2r^2$ أونصة. تقوم شركة بتصنيع غسالات بمقاس بوصتين لعملاء مختلفين لديهم نسب مختلفة من التساهل مع الأخطاء. إذا طلب العميل غسالة وزنها $8 \pm \varepsilon$ أونصة، فما قيمة التساهل مع الأخطاء بالنسبة لنصف القطر؟ بمعنى آخر، أوجد δ بحيث يكون نصف قطر r الذي ضمن حدود الفترة $(2-\delta, 2+\delta)$ يضمن أن يكون الوزن ضمن $(8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$.

42. تقوم شركة لتصنيع الألياف الزجاجية بشحن الزجاج على شكل بليات كروية. فإذا كان يجب أن يكون حجم كل بلية ضمن حدود ε من $\pi/6$ ، فكم يجب أن يكون نصف القطر قريبًا من $1/2$ ؟

تمارين استكشافية

1. في هذا الدرس، لم نقم بعد بحل أي مسألة لم نتمكّن من حلّها مسبقًا في دروس سابقة، والآن سنفعل ذلك، ونحن سنكتشف

دالة غير مألوفة. تذكَّر أنّ الأعداد النسبية يمكن أن تكتب على شكل كسور p/q ، حيث p و q عددان صحيحان. وسنفترض أنّ p/q قد تم تحويلها إلى أبسط صورة عبر القسمة على العوامل المشتركة (على سبيل المثال $1/2$ وليس $2/4$). عرِّف

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x \text{ عدد غير نسبي} \\ 1/q & \text{إذا كان } x = \frac{p}{q} \text{ عدد نسبي} \end{cases}$$

سنحاول أن نبيّن أنّ $\lim_{x \to 2/3} f(x)$ موجودة، بدون تمثيلات بيانية. نحتاج إلى تعريف جيد للإجابة عن هذا السؤال. نحن نعلم أنّ $f(2/3) = 1/3$ ، ولكن تذكَّر أن النهاية مستقلة عن القيمة الفعلية للدالة. ونحتاج إلى أن نفكِّر بقيم x القريبة من $2/3$. وإذا كان هذا الـ x غير نسبي، فإنّ $f(x) = 0$ ، وعندها تكون $\lim_{x \to 2/3} f(x) = 0$ فرضية بسيطة. وسنجربها مع $\varepsilon = 1/6$ ، حيث نرغب بضمان أنّ $|f(x)| < 1/6$ عندما يكون $0 < |x - 2/3| < \delta$. حسنًا، كم من قيم x لها قيمة دالة أكبر من $1/6$ ؟ قيم الدالة الوحيدة الممكنة هي $1/5$ ، $1/4$ ، $1/3$ ، $1/2$ و 1.
قيم x ذات قيمة الدالة $1/5$ هي $1/5$ و $2/5$ و $3/5$ و $4/5$ وهكذا دواليك. أقرب قيم x هذه إلى $2/3$ هي $3/5$. أوجد أقرب x (عدا $x = 2/3$) إلى $2/3$ باستخدام قيمة الدالة $1/4$. كرِّر ذلك مع $f(x) = 1/3$ و $f(x) = 1/2$ و $f(x) = 1$. من بين جميع قيم x الأقرب هذه، ما مدى قرب الأقرب مطلقًا؟ اختر أن تكون δ هذا العدد، وناقش أنّه إذا كان $0 < |x - 2/3| < \delta$ ، فعندها تضمن أنّ $|f(x)| < 1/6$. ناقش أنّ عملية مشابهة يمكن أن توجد δ لأيّ ε .

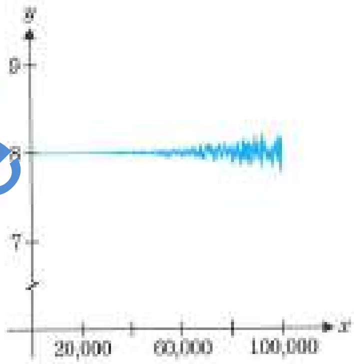
2. اذكر تعريفًا لـ "$f(x)$ متصلة عند $x = a$" باستخدام التعريف 6.1. استخدمه لإثبات أن الدالة في التمرين الاستكشافي 1 متصلة عند كل عدد غير نسبي، وغير متصلة عند كل عدد نسبي.

الدرس 2-7 النهايات وأخطاء فقدان الدلالة

"لا تبد أي اهتمام للرجل الذي خلف الستار..." (مقتبسة من رواية ساحر أوز)

الأشياء ليست دومًا كما تبدو عليه. وعلى الرغم من ذلك، يميل الناس إلى قبول إجابة الحاسوب كأنّها حقيقة لا تقبل الجدل. غير أنّ علينا، عندما نستخدم حاسوبًا (أو آلة حاسبة)، أن نضع في اعتبارنا دائمًا أنّ هذه الأجهزة تؤدي معظم العمليات الحسابية على نحو تقريبي فحسب. وفي معظم الأوقات، لن يسبب لنا هذا أي صعوبة على الإطلاق. ولكن في بعض الأحيان تكون نتائج أخطاء التقريب في سلسلة من العمليات الحسابية كارثية. في هذا الدرس، سوف نستكشف هذه الأخطاء بإيجاز ونتعلم كيف نتعرف إليها ونتفادى الوقوع في بعضها.

سندرس أولًا مثالًا يبدو سهلًا نسبيًا.



الشكل 2.57a

$$y = \frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$$

مثال 7.1 النهاية عند السلوك البياني والعددي غير العادي

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$

الحل للوهلة الأولى، يبدو البسط مثل $\infty - \infty$، وهو غير محدد بينما يمتد المقام إلى ∞ جبريًا. الخطوة الوحيدة المعقولة هي إخراج العامل المشترك من الحد الأول في البسط أولًا. نرسم التمثيل البياني ونحسب بعض قيم الدالة. (لن تقوم جميع الحواسيب وحزم البرمجيات بإنتاج هذه النتائج المتطابقة. ولكن بالنسبة لقيم كبيرة لـ x، يجب أن نرى نتائج مشابهة للنتائج الموضحة هنا). في الشكل 2.57a، تكاد تبدو الدالة ثابتة، إلى أن تبدأ بالتذبذب عند $x = 40{,}000$. لاحظ أنّ الجدول المرفق بقيم الدالة غير متوافق مع الشكل 2.57a

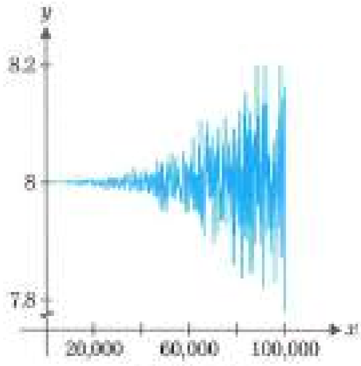
ربما أنك قد تفاجأت بآخر قيمتين في الجدول. حتى تلك النقطة، بدا أن قيم الدالة تستقر على 8.0 بدقة فائقة إذًا. ما الذي حدث هنا وما القيمة الحقيقية للنهاية؟ للإجابة عن هذا السؤال ننظر بإمعان إلى قيم الدالة في الفترة بين $x = 1 \times 10^4$ و $x = 1 \times 10^5$. وإلى اليسار تجد جدولًا موضحًا بمزيد من التفاصيل.

قيم محسوبة خطأ

x	$\frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$
10	8.016
100	8.000016
1×10^3	8.0
1×10^4	8.0
1×10^5	0.0
1×10^6	0.0

x	$\frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$
2×10^4	8.0
3×10^4	8.14815
4×10^4	7.8125
5×10^4	0

في الشكل 2.57b، قمنا بتكبير التمثيل البياني لتوضيح التذبذب الملاحظ بين $x = 1 \times 10^4$ و $x = 1 \times 10^5$. كلما نظرنا إلى هذه النهاية على نحو أعمق، بدا أن التنبؤ بسلوك الدالة يزداد صعوبة. ونستخدم كلمة بدا لأن السلوك المتذبذب الذي نراه ليس سوى وهم ناتج عن الدقة المحدودة للحاسوب المستخدم في تنفيذ الحسابات ورسم التمثيل البياني. ■



الشكل 2.57b

$$y = \frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$$

تمثيل الحاسوب للأعداد الحقيقية

السبب وراء السلوك غير العادي الملاحظ في المثال 7.1 يرجع إلى الطريقة التي تمثّل بها الحواسيب الأعداد الحقيقية. دون الدخول في جميع التعقيدات الحسابية للحاسوب، يكفي أن تفكر في أن الحواسيب والآلات الحاسبة تخزّن الأعداد الحقيقية داخليًا بترميز علمي. على سبيل المثال، العدد 1,234,567 سيتم تخزينه على شكل $1{,}234567 \times 10^6$. يسمى العدد الذي يسبق القوة لـ 10 **بالجزء العشري ويسمى عدد القوة بالأس**. وهكذا فإن الجزء العشري هنا هو 1.234567 والأس هو 6.

جميع أجهزة الحاسوب لها ذاكرة محدودة، وبالتالي فإن لها حدودًا لأحجام الأجزاء العشرية والأس التي يمكن أن تخزنها. (ويعرف هذا **بالدقة المحدودة**). معظم الآلات الحاسبة لها ذاكرة للجزء العشري تبلغ 14 منزلة وللأس تبلغ 3 أرقام. وفي حاسوب ذي 14 منزلة، يشير هذا إلى أن الحاسوب يحتفظ بأول 14 منزلة فقط للتعبير العشري لأي رقم معطى.

مثال 7.2 تمثيل الحاسوب للعدد النسبي

حدّد كيف يتمّ تخزين $\frac{1}{3}$ داخليًا في حاسوب ذي 10 منازل، وكيف يتم تخزين $\frac{2}{3}$ داخليًا في حاسوب ذي 14 منزلة.

الحل في الحاسوب ذي 10 منازل، $\frac{1}{3}$ يتم تخزينها داخليًا على شكل $\underbrace{.3333333333}_{\text{10 أرقام}} \times 10^{-1}$

وفي الحاسوب ذي 14 منزلة، $\frac{2}{3}$ يتم تخزينها على شكل $\underbrace{.66666666666667}_{\text{14 رقم}} \times 10^{-1}$ ■

بالنسبة لمعظم الأغراض، لا تمثل هذه الدقة المحدودة أي مشكلة. ولكن يؤدي هذا أحيانًا إلى خطأ كارثي. في المثال 7.3، نطرح عددين قريبين نسبيًا ونفحص الخطأ الكارثي.

مثال 7.3 طرح الحاسوب لعددين قريبين

قارن القيمة الدقيقة لـ

$$1.\underbrace{0000000000000}_{\text{13 صفر}}4 \times 10^{18} - 1.\underbrace{0000000000000}_{\text{13 صفر}}1 \times 10^{18}$$

مع النتيجة التي تحصل عليها من آلة حاسبة أو حاسوب بجزء عشري ذي 14 منزلة.

الحل لاحظ أن

$$1.\underbrace{0000000000000}_{\text{13 صفر}}4 \times 10^{18} - 1.\underbrace{0000000000000}_{\text{13 صفر}}1 \times 10^{18} = 0.\underbrace{0000000000000}_{\text{13 صفر}}3 \times 10^{18}$$
$$= 30{,}000. \qquad (7.1)$$

ومع ذلك، إذا تم تنفيذ هذا الحساب على حاسوب أو آلة حاسبة بجزء عشري ذي 14 منزلة (أو أقل)، فإن كلا العددين على الجانب الأيسر من (7.1) يخزنهما الحاسوب على شكل 1×10^{18} وهكذا، فإن الفرق الذي يتم حسابه يكون 0. جرّب هذا الحساب بنفسك الآن. ■

مثال 7.4 طرح آخر لعددين "قريبين"

قارن القيمة الدقيقة لـ

$$\underbrace{1.0000000000000}_{\text{13 صفر}}6 \times 10^{20} - \underbrace{1.0000000000000}_{\text{13 صفر}}4 \times 10^{20}$$

مع النتيجة التي تحصل عليها من آلة حاسبة أو حاسوب بجزء عشري ذي 14 منزلة.

الحل لاحظ أنّ

$$\underbrace{1.0000000000000}_{\text{13 صفر}}6\times10^{20} - \underbrace{1.0000000000000}_{\text{13 صفر}}4\times10^{20} = \underbrace{0.0000000000000}_{\text{13 صفر}}2\times10^{20}$$
$$= 2{,}000{,}000$$

ومع ذلك، إذا تم تنفيذ هذا الحساب على آلة حاسبة بجزء عشري ذي 14 منزلة، فإن العدد الأول يتم تمثيله على شكل $1.0000000000001 \times 10^{20}$ في حين أن العدد الثاني يمثّله 1.0×10^{20}. نظرًا إلى الدقة المحدودة والتقريب. إذا يتم احتساب الفرق بين القيمتين على شكل $0.0000000000001 \times 10^{20}$ أو 10,000,000، وهو مرة أخرى خطأ فادح جدًا. ■

في المثالين 7.3 و 7.4، نشهد خطأ فادحًا ناجمًا عن طرح عددين أرقامهما المهمة متقاربة جدًا من بعضها. ويعرف هذا النوع من الخطأ بأنه **خطأ فقدان أرقام مهمة أو بواسطة خطأ فقدان الدلالة**. هذه الأخطاء دقيقة، وغالبًا ما تكون كارثية. بالعودة الآن إلى المثال 7.1، سنرى أن هذا النوع من الخطأ هو الذي تسبّب بالسلوك غير العادي الذي لاحظناه من قبل.

مثال 7.5 خطأ فقدان الدلالة

في المثال 7.1، درسنا الدالة $f(x) = \dfrac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3}$.

نفّذ حساب $f(5 \times 10^4)$ بخطوة واحدة كما لو كان حاسوب ذو 14 منزلة سينفذها.

الحل لدينا

$$\begin{aligned} f(5\times10^4) &= \frac{[(5\times10^4)^3+4]^2 - (5\times10^4)^6}{(5\times10^4)^3} \\ &= \frac{(1.25\times10^{14}+4)^2 - 1.5625\times10^{28}}{1.25\times10^{14}} \\ &= \frac{(125{,}000{,}000{,}000{,}004)^2 - 1.5625\times10^{28}}{1.25\times10^{14}} \\ &= \frac{(1.25\times10^{14})^2 - 1.5625\times10^{28}}{1.25\times10^{14}} = 0 \end{aligned}$$

بما أنّ 125,000,000,000,004 مقرّب إلى 125,000,000,000,000.

لاحظ أنّ المتهم الحقيقي هو هنا ليس التقريب 125,000,000,000,000، ولكن حقيقة أنّ التقريب تلاه طرح قيمة مساوية تقريبًا. وعلاوةً على ذلك، لاحظ أنّ هذه المشكلة ليست فريدة من نوعها عند الحساب العددي للنهايات. ■

ملحوظة 7.1

إذا كان ذلك ممكنًا، تجنب طرح القيم المتساوية تقريبًا. في بعض الأحيان، يمكن تحقيق ذلك من خلال بعض التلاعب الجبري بالدالة.

في حالة الدالة من المثال 7.5، يمكننا تجنّب الطرح وبالتالي، تجنّب خطأ فقدان الدلالة عن طريق إعادة كتابة الدالة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^3+4)^2 - x^6}{x^3} \\ &= \frac{(x^6+8x^3+16) - x^6}{x^3} \\ &= \frac{8x^3+16}{x^3} \end{aligned}$$

حيث تخلصنا من الطرح. باستخدام هذا التعبير الجديد (وما يعادله) للدالة، يمكننا حساب جدول قيم الدالة بصورة موثوقة.

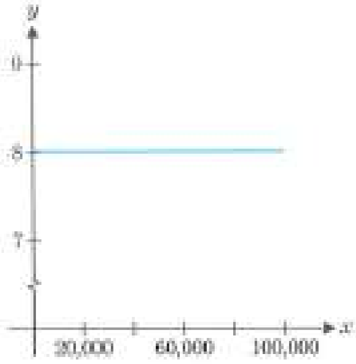
لاحظ أيضًا أننا إذا أعدنا رسم التمثيل البياني في الشكل 2.57a باستخدام التعبير الجديد (شاهد الشكل 2.58)، فلن نجد التذبذب الموجود في الشكلين 2.57a و 2.57b.

من التعبير المكتوب، نحصل بسهولة على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+4)^2-x^6}{x^3}=8$$

وهي تتماشى مع الشكل 2.58 والجدول المصحح لقيم الدالة.

في المثال 7.6، ندرس خطأ فقدان الدلالة الذي يحدث عندما تكون x قريبة من 0.



الشكل 2.58

$$y=\frac{8x^3+16}{x^3}$$

x	$\frac{8x^3+16}{x^3}$
10	8.016
100	8.000016
1×10^3	8.000000016
1×10^4	8.00000000002
1×10^5	8.0
1×10^6	8.0
1×10^7	8.0

مثال 7.6 فقدان الدلالة الذي يتضمن دالة مثلثية

أوجد قيمة $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}$

الحل كالمعتاد، ننظر إلى الرسم البياني (شاهد الشكل 2.59) وبعض قيم الدالة.

x	$\frac{1-\cos x^2}{x^4}$
0.1	0.499996
0.01	0.5
0.001	0.5
0.0001	0.0
0.00001	0.0

x	$\frac{1-\cos x^2}{x^4}$
−0.1	0.499996
−0.01	0.5
−0.001	0.5
−0.0001	0.0
−0.00001	0.0

كما في المثال 7.1، لاحظ أن قيم الدالة تبدو أنها تقترب من 0.5، ثم فجأة تأخذ انحطاطًا قفزيًا إلى 0.0 من جديد. نشهد خطأ فقدان الدلالة في هذه الحالة تحديدًا. يحدث هذا لأننا نطرح قيمًا متساوية تقريبًا ($\cos x^2$ و 1). ومرة أخرى يمكننا تفادي الخطأ عن طريق التخلص من الطرح. لاحظ ذلك

$$\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot\frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2}$$

الضرب البسيط والمقام بـ $(1+\cos x^2)$

$$=\frac{1-\cos^2(x^2)}{x^4(1+\cos x^2)}$$

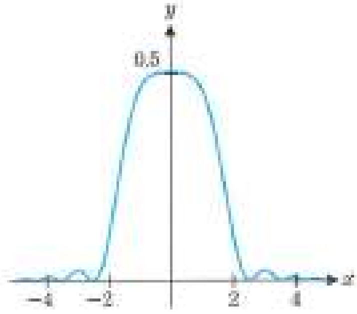
$1-\cos^2(x^2)=\sin^2(x^2)$

$$=\frac{\sin^2(x^2)}{x^4(1+\cos x^2)}$$

ولأن هذا التعبير الأخير (المكافئ) لم تتم الإشارة فيه إلى الطرح، يجب أن نكون قادرين على استخدامه بصورة موثوقة لتوليد القيم دون مخافة الوقوع في خطأ فقدان الدلالة. وباستخدام هذا لحساب قيم الدالة، نحصل على الجدول المرفق.

وباستخدام التمثيل البياني والجدول الجديد، نخمّن أنّ

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\frac{1}{2}$$



الشكل 2.59

$$y=\frac{1-\cos x^2}{x^4}$$

وضرض هنا مثالًا واحدًا أخيرًا، حيث يحدث خطأ فقدان الأهمية، رغم عدم الإشارة بوضوح إلى وجود الطرح.

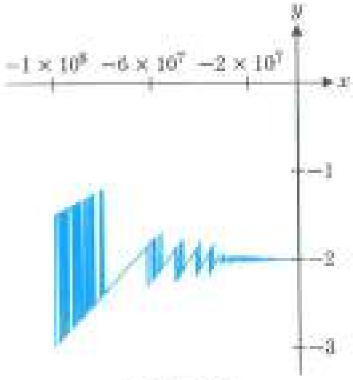
x	$\frac{\sin^2(x^2)}{x^4(1+\cos x^2)}$
±0.1	0.499996
±0.01	0.4999999996
±0.001	0.5
±0.0001	0.5
±0.00001	0.5

مثال 7.7 خطأ فقدان الدلالة الذي يتضمن ناتج جمع

أوجد قيمة $\lim_{x\to-\infty}x[(x^2+4)^{1/2}+x]$

الحل في البداية قد تفكر بأنه بعدم الإشارة إلى الطرح (بوضوح)، فلن يكون هناك خطأ فقدان دلالة. نقوم أولًا برسم تمثيل بياني (شاهد الشكل 2.60) ثم نحسب جدولًا للقيم.

x	$x\left[(x^2+4)^{1/2}+x\right]$
-100	-1.9998
-1×10^3	-1.999998
-1×10^4	-2.0
-1×10^5	-2.0
-1×10^6	-2.0
-1×10^7	0.0
-1×10^8	0.0



الشكل 2.60

$y = x[(x^2+4)^{1/2}+x]$

يجب أن تلاحظ القفزة المفاجئة في قيم الجدول، والتذبذب الحاد في التمثيل البياني. وبالرغم من أن الطرح ليس مشارًا إليه هنا بوضوح، فإن هناك طرحًا بالفعل، حيث لدينا $x < 0$ و $(x^2+4)^{1/2} > 0$. ويمكننا أن نتعامل مع هذا مرة أخرى ببعض المعالجات الجبرية، على النحو التالي:

اضرب البسط والمقام بالمرافق

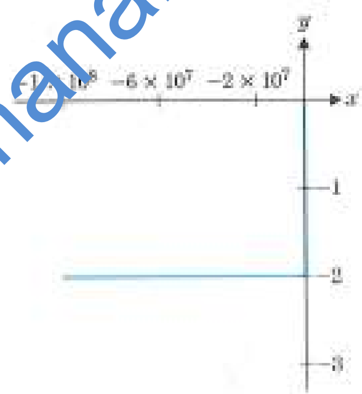
$$x\left[(x^2+4)^{1/2}+x\right] = x\left[(x^2+4)^{1/2}+x\right]\frac{\left[(x^2+4)^{1/2}-x\right]}{\left[(x^2+4)^{1/2}-x\right]}$$

بسّط البسط

$$= x\frac{\left[(x^2+4)-x^2\right]}{\left[(x^2+4)^{1/2}-x\right]}$$

$$= \frac{4x}{\left[(x^2+4)^{1/2}-x\right]}$$

نستخدم التعبير الأخير لإنشاء رسم بياني في النافذة ذاتها كذلك المستخدم في الشكل 2.60 ولإنشاء جدول القيم المرفق. في الشكل 2.61، يمكننا رؤية أنّه لا يوجد من التذبذبات الحادة التي شهدناها في الشكل 2.60 والرسم البياني يبدو خطًا أفقيًا.



x	$\dfrac{4x}{\left[(x^2+4)^{1/2}-x\right]}$
-100	-1.9998
-1×10^3	-1.999998
-1×10^4	-1.99999998
-1×10^5	-1.9999999998
-1×10^6	-2.0
-1×10^7	-2.0
-1×10^8	-2.0

الشكل 2.61

$y = \dfrac{4x}{[(x^2+4)^{1/2}-x]}$

وعلاوة على ذلك، فإن القيم المعروضة في الجدول لم تعد تظهر قفزة مفاجئة تدل على وجود خطأ فقدان الدلالة. يمكننا الآن أن نخمّن بثقة أنّ

$$\lim_{x\to-\infty} x[(x^2+4)^{1/2}+x] = -2 \quad ■$$

ما وراء الصيغ

في الأمثلة 7.7–7.5، أوضحنا الحسابات التي حدثت فيها أخطاء فادحة لفقدان الدلالة. وفي كل حالة عرضنا كيف تمكنّا أن نعيد كتابة التعبير لتفادي هذا الخطأ. ولم نعرض إجراءً عامًا للتعرف إلى مثل هذه الأخطاء وإصلاحها. وبدلًا من ذلك، نأمل أنه من خلال رؤية عدد قليل من هذه الأخطاء الطفيفة، ورؤية كيفية إصلاح حتى عدد محدود منها، ستصبح مستخدمًا ذكيًا للتكنولوجيا وأكثر تشككًا بها.

التمارين 2.7

تمارين كتابية

1. الحذر مهم في استخدام التكنولوجيا، وكذلك التكرار مهم. ويعتقد أن هذه الخاصية في بعض الأحيان سلبية (مضيعة للوقت، لا لزوم لها)، ولكن دورها الإيجابي هو واحد من الدروس المستفادة من هذا الدرس. ونقصد بالتكرار، استكشاف مسألة باستخدام الأدوات البيانية والعددية والرمزية. لم يُعد من المهم استخدام طرق متعددة؟

2. متى يتوجب عليك النظر إلى التمثيل البياني؟ وأن تحسب قيم الدالة؟ وأن تقوم بالإجراءات الرمزية؟ وبإثبات $\delta-\varepsilon$؟ وإعطاء الأولوية للتقنيات في هذه الوحدة.

3. النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ مهمة. بالنسبة إلى دالة معينة f و a محددة، يمكننا أن نحسب جدولًا من قيم الكسر بالنسبة لقيم أصغر لـ h. لماذا علينا أن نكون حذرين من أخطاء فقدان الدلالة؟

4. لقد قمنا بتنسيب البسط في المثال 7.7، والقاعدة القديمة في تنسيب المقام يقصد منها تقليل نسبة الأخطاء الحسابية. لمعرفة لماذا قد نحتاج للجذر التربيعي في البسط، افترض أنه يمكنك الحصول على منزلة عشرية واحدة فقط من الدقة، بحيث يكون $\sqrt{3}\approx 1.7$ قارن بين $\frac{6}{1.7}$ و $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ثم قارن بين $2(1.7)$ و $\frac{6}{\sqrt{3}}$ أي من التقديرات التقريبية يمكن أن تنفذه ذهنيًا؟

في التمارين 12–1، (a) استخدم التمثيلات البيانية والعددية لتخمين قيمة النهاية. (b) أوجد تمثيلًا بيانيًا على حاسوب أو على آلة حاسبة يظهر فيه خطأ فقدان الدالة. (c) أعد كتابة الدالة بحيث تتجنب خطأ فقدان الدلالة.

1. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$
2. $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$
3. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}\right)$
4. $\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x^4+8}-x^2\right)$
5. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+2}\right)$
6. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^3+8}-x^{3/2}\right)$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{12x^2}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^3}{x^6}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^4}{x^8}$
11. $\lim_{x\to\infty} x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$
12. $\lim_{x\to\infty} x^{2/3}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-3}\right)$

في التمرينين 13 و 14، قارن بين النهايات لإظهار الأخطاء الصغيرة التي يمكن أن تكون لها عواقب كارثية.

13. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ و $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2.01}{x-1}$

14. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ و $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4.01}$

15. قارن بين $f(x)=\sin \pi x$ و $g(x)=\sin 3.14x$ لكل من $x=1$ (راديان)، $x=10$ و $x=100$ و $x=1000$.

16. إذا كنت تستطيع الوصول إلى نظام حاسوب جبري، فقم باختباره على النهايات في الأمثلة 7.1 و 7.6 و 7.7. بناءً على هذه النتائج، هل تعتقد أن نظامك الحاسوبي الجبري يجري حسابات دقيقة أم تقديرات عددية؟

في التمرينين 17 و 18، قارن بين الإجابة الدقيقة وأخرى تم الحصول عليها من حاسوب ذي جزء عشري من ست منازل.

17. $(1.000003-1.000001)\times 10^7$

18. $(1.000006-1.000001)\times 10^7$

تمارين استكشافية

1. كما أننا عرضة للوقوع في أخطاء التقريب عند استخدام الحسابات المنشأة بالحاسوب، فنحن عرضة للأخطاء في التمثيلات البيانية المنشأة بالحاسوب أيضًا. حيث إن الحاسوب يقوم بحساب قيم الدالة قبل أن يقرر أين يتم تعيين نقاط التمثيل البياني. قم بتمثيل $y=\sin x^2$ بيانيًا (تمثيل بياني حيث النقاط غير متصلة - أي مخطط نقاط هو الأفضل). يجب أن تشاهد التذبذبات التي تتوقعها من دالة الجيب، ولكن مع كون التذبذبات تزداد سرعة كلما صارت x أكبر. حرك نافذتك الخاصة بالتمثيل البياني إلى اليمين عدة مرات. عند نقطة ما، سيصبح المخطط الوضوحًا جدًا وغير قابل للقراءة تقريبًا. واعتمادًا على التكنولوجيا الخاصة بك، قد ترى

أنماطًا معينة في المخطّط. هل هذه الأنماط حقيقية أم وهم؟ لشرح ما يجري، تذكر أن التمثيل البياني بالحاسوب عبارة عن مجموعة محدودة من البكسلات، مع كون كل بكسل يمثل x واحدة و y واحدة . افترض أن الحاسوب يعين النقاط عند $x = 0$ و $x = 0.1$ و $x = 0.2$ وهكذا دواليك. قيم y ستكون عندها $\sin 0^2$ و $\sin 0.1^2$ و $\sin 0.2^2$ وهكذا دواليك. استكشف ما الذي يحدث بين $x = 15$ و $x = 16$. احسب جميع النقاط $(15, \sin 15^2)$، $(15.1, \sin 15.1^2)$ وهكذا دواليك. لو كنت ستمثل هذه النقاط بيانيًا، فما النمط الذي سيظهر؟ لتفسير هذا النمط، ناقش أن هناك ما يقرب من نصف فترة منحنى الجيب مفقودة بين كل نقطة معينة. أيضًا، استكشف ما الذي يحدث بين $x = 31$ و $x = 32$.

تمارين المراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدّم تعريفًا أو عبارة دقيقة، (2) اذكر ما تعنيه عمومًا (3) صف أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

- الخط القاطع Secant line
- نهاية Limit
- لا نهائي Infinite limit
- نهاية أحادية الطرف One-sided limit
- متصل Continuous
- فقدان الدلالة Loss-of-significance
- قابل للإزالة Removable
- خط تقارب أفقي Horizontal asymptote
- خطأ error
- انفصال discontinuity
- نظرية الشطيرة Squeeze Theorem
- خط تقارب مائل Slant asymptote
- خط تقارب رأسي Vertical asymptote
- طول القطعة المستقيمة Length of segment
- قيمة متوسطة Intermediate Value
- طريقة التنصيف Method of bisections
- قطعة مستقيمة Segment
- نظرية Theorem
- ميل منحنى Slope of curve

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خاطئة، فحاول أن "تصححها" عبر تعديل العبارة المعطاة لإنشاء عبارة جديدة تكون صحيحة.

1. في حساب التفاضل والتكامل، غالبًا ما يتم حل المسائل عن طريق تقريب الحل أولًا ومن ثم تحسين التقريب.
2. إذا كان $f(1.1) = 2.1$، $f(1.01) = 2.01$ وهكذا، فعندها يكون $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \times g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]$.
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
5. إذا كان $f(2) = 1$ و $f(4) = 2$، هناك x بين 2 و 4 بحيث يكون $f(x) = 0$.
6. بالنسبة إلى أي كثيرة حدود $p(x)$، فإنّ $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$.
7. إذا كانت $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ لكثيرتي الحدود p و q عند $q(a) = 0$، لذا يكون للدالة f خط تقارب رأسي عند $x = a$.
8. عادةً ما تكون أخطاء التقريب الصغيرة ذات تأثير محدود على الحساب.
9. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

في التمرينين 1 و 2، قدّر عدديًا ميل $y = f(x)$ عند $x = a$.

1. $f(x) = x^2 - 2x, a = 2$
2. $f(x) = \sin 2x, a = 0$

في التمرينين 3 و 4، قدّر عدديًا طول المنحنى باستخدام $n = 4$ (a) و $n = 8$ (b) حيث n عدد القطع المستقيمة وإحداثيات x التي تفصل بينها مسافات متساوية.

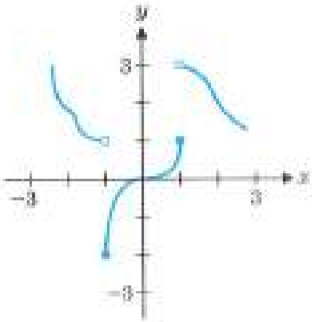
3. $f(x) = \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
4. $f(x) = x^2 - x, 0 \le x \le 2$

في التمارين 5-10، استخدم الأدلة العددية والبيانية لتخمين قيمة النهاية.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} x^2}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x^2}$
7. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{|x+2|}$
8. $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{1/x}$
9. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$
10. $\lim_{x\to\infty} x^{2/x}$

في التمرينين 11 و 12، عرّف النهايات من التمثيل البياني لـ f.

11. (a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} f(x)$
12. (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 2} f(x)$



13. حدد نقاط عدم الاتصال في الدالة الممثلة بيانيًا أعلاه.
14. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة f حيث يكون $f(-1) = 0$، $f(0) = 0$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$.

في التمارين 36-15، أوجد قيمة النهاية. أجب بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو بعبارة لا يوجد.

15. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$
16. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$
17. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^4 + 2x^2}}$
18. $\lim_{x \to 0} e^{-\cot x}$
19. $\lim_{x \to 0} (2 + x)\sin(1/x)$
20. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$
21. $\lim_{x \to 2} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{إذا كان } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{إذا كان } x \geq 2 \end{cases}$
22. $\lim_{x \to 1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{إذا كان } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{إذا كان } x \geq 1 \end{cases}$
23. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}{x}$
24. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{10 - x} - 3}$
25. $\lim_{x \to 0} \cot(x^2)$
26. $\lim_{x \to 1} \tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1}\right)$
27. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x + 1}$
28. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$
29. $\lim_{x \to \pi/2} e^{-\tan^2 x}$
30. $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2}$
31. $\lim_{x \to \infty} \ln 2x$
32. $\lim_{x \to 0^+} \ln 3x$
33. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2 + 3x - 5}$
34. $\lim_{x \to -2} \frac{2x}{x^2 + 3x + 2}$
35. $\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/x}$
36. $\lim_{x \to 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$

37. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 0$

38. استخدم نظرية القيمة المتوسطة للتحقق من أنّ $f(x) = x^3 - x - 1$ لها صفر في الفترة $[1, 2]$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $1/32$ تحتوي على صفر.

في التمارين 42-39، أوجد جميع نقاط عدم الاتصال وحدّد أي منها قابل للإزالة.

39. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$
40. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$
41. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$
42. $f(x) = x \cot x$

في التمارين 46-43، أوجد جميع الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة.

43. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$
44. $f(x) = \ln(3x - 4)$
45. $f(x) = \sin(1 + e^x)$
46. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

في التمارين 54-47، حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والأفقية والمائلة.

47. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
48. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$
49. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
50. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$
51. $f(x) = 2e^{1/x}$
52. $f(x) = 3\tan^{-1} 2x$
53. $f(x) = \frac{3}{e^x - 2}$
54. $f(x) = 3\ln(x - 2)$

في التمرينين 55 و 56، (a) استخدم الأدلة البيانية والعددية لتخمين قيمة النهاية المشار إليه. (b) أوجد تمثيلًا بيانيًا على حاسوب أو على آلة حاسبة يظهر فيه خطأ فقدان الدلالة. (c) أعد كتابة الدالة بحيث تتجنب خطأ فقدان الدلالة.

55. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$
56. $\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

تمارين استكشافية

1. لكلّ $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6}$ نفّذ ما يلي. (a) أوجد جميع قيم x التي تكون عندها f غير متصلة. (b) حدد أي قيمة في (a) هي نقطة انفصال قابل للإزالة. بالنسبة لهذه القيمة، أوجد نهاية f حيث x تقترب من هذه القيمة. مثّل جزءًا من التمثيل البياني لـ f قرب قيمة x هذه التي تبين سلوك الدالة. (c) بالنسبة للقيمة التي في الجزء (a) غير القابل للإزالة، أوجد النهايتين أحاديتي الطرف ومثّل التمثيل البياني لـ f قرب قيمة x هذه. (d) أوجد $\lim_{x \to \infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ومثّل الجزء من التمثيل البياني f الذي يتوافق مع هذه القيم. (e) صل بين قطع التمثيل البياني أبسط ما يمكن. إن كان ممكنًا، قارن بين تمثيلك البياني وتمثيل منشأ بالحاسوب.

2. افترض أنّ $f(t)$ تمثّل ثمن توقيع شخص مشهور في زمن t (سنوات بعد 2000). فسّر كلًا مما يلي (على نحو مستقل) بمصطلحات عامة. (a) خط تقارب أفقي $y = 1000$ و (b) خط تقارب رأسي عند $t = 10$ و (c) $\lim_{t \to 4^-} f(t) = 500$ و $\lim_{t \to 4^+} f(t) = 800$ و (d) $\lim_{t \to 6} f(t) = 950$

الوحدة 3

التفاضل

تعتبر مسابقة الماراثون إحدى أشهر مسابقات العدو، وهي تمتد إلى مسافة 26mile و385yards فاز ستيفانو بالديني، من إيطاليا، بالماراثون الأولمبي لعام 2004 في مدة زمنية قدرها 2:10:55. باستخدام القانون المعروف باسم "المعدّل يساوي المسافة مقسومة على الزمن"، يمكننا حساب متوسط سرعة بالديني:

$$\frac{26 + \frac{385}{1760}}{2 + \frac{10}{60} + \frac{55}{3600}} \approx 12.0 \text{ mph}$$

يبيّن ذلك أن متوسط سرعة بالديني أقل من 5 دقائق لكل ميل عبر مسافة تمتد على 26mile ومع ذلك، فاز جوستن جاتلين من الولايات المتحدة الأمريكية بسباق العدو لمسافة 100m في 9.85 ثوانٍ. كما فاز شاون كراوفورد من الولايات المتحدة الأمريكية بسباق العدو لمسافة 200m في 19.79 ثانية. بلغت متوسطات سرعات أولئك العدائين

$$\frac{\frac{100}{1610}}{\frac{9.85}{3600}} \approx 22.7 \text{ mph} \quad \text{،} \quad \frac{\frac{200}{1610}}{\frac{19.79}{3600}} \approx 22.6 \text{ mph.}$$

نظرًا لأن هاتين السرعتين أكبر بكثير من سرعة عدّاء الماراثون، فإن الفائزين بهذه المسابقات يُطلق عليهم "أسرع أشخاص في العالم".

يمكن عمل ربط مهم باستخدام تجربة فكرية. إذا كان الشخص نفسه قد ركض مسافة 200m في 19.79 ثانية مع إنهاء أول 100m خلال 9.85 ثوانٍ. فقارن بين متوسط سرعات المائة متر الأولى والثانية. في المائة متر الثانية، تكون المسافة التي تم ركضها $200 - 100 = 100$ متر والزمن $19.79 - 9.85 = 9.94$ ثوانٍ. إذًا، تكون السرعة المتوسطة هي

$$\frac{200 - 100}{19.79 - 9.85} = \frac{100}{9.94} \approx 10.06 \text{ m/s} \approx 22.5 \text{ mph}$$

لاحظ أن حساب السرعة باستخدام وحدة m/s هو نفسه مثل الحساب الذي يجب أن نستخدمه للميل بين النقطتين (100, 9.85) و(200,19.79). الربط بين الميل والسرعة (وكميات أخرى مهمة) موضح في هذه الصفحة.

الدرس

3-1 المماسات والسرعة المتجهة

يحمل المقلاع التقليدي صخرة على طرف حبله، بحيث نقوم بتدويره في حركة دائرية ثم تحرره. عندما تحرر الحبل، في أي اتجاه ستنطلق الصخرة؟ تم توضيح منظر رأسي لهذا في الشكل 5.1. يعتقد العديد من الأشخاص خطأً أن الصخرة ستتبع مسارًا منحنيًا، ولكن أول قانون للحركة قد وضعه نيوتن يخبرنا بأن المسار يكون مستقيمًا إذا تم النظر إليه من الأعلى. في الواقع، تسلك الصخرة مسارًا على طول المماس مع الدائرة عند نقطة الإطلاق. هدفنا في هذا الدرس هو توسيع فكرة المماس لكي تشمل المزيد من المنحنيات العامة.

الشكل 3.1
مسار الصخرة

لجعل مناقشتنا أكثر تحديدًا، على فرض أننا نريد إيجاد المماس للمنحنى $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(1, 2)$ (انظر الشكل 3.2). يلامس المماس المنحنى بالقرب من نقطة التماس. بكلمات أخرى، مثل المماس إلى الدائرة، للمماس هذا الاتجاه نفسه مثل المنحنى عند نقطة التماس. لاحظ أننا إذا قمنا بالتكبير بشكل كافٍ، يبدو التمثيل البياني أنه يقترب أكثر لينطبق مع المماس. في الشكل 3.3، توضح تمثيلًا بيانيًا لـ $y = x^2 + 1$ والذي تم تكبيره في مربع مستطيل صغير نشار إليه في الشكل 3.2. والآن نختار نقطتين من المنحنى، على سبيل المثال $(1, 2)$ و$(3, 10)$، ونحسب ميل الخط الذي يربط بين هاتين النقطتين. يُطلق على مثل هذه الخطوط اسم القاطع، ويُرمز لميل القاطع بـ m_{sec}.

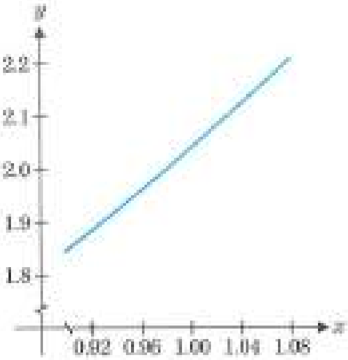
$$m_{sec} = \frac{10 - 2}{3 - 1} = 4$$

تحذير

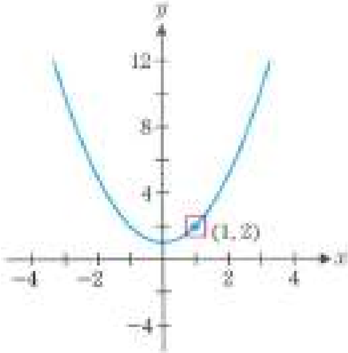
لاحظ أن "المحاور" التي تمت الإشارة إليها في الشكل 3.3 لا تتقاطع مع نقطة الأصل. نحن نوفرها فقط كإرشاد لك إلى المقياس المستخدم لتصميم الشكل.

معادلة القاطع التي يتم تحديدها باستخدام

$$\frac{y-2}{x-1}=4$$



الشكل 3.3
$y = x^2 + 1$

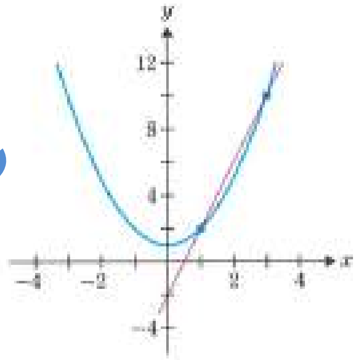


الشكل 3.2
$y = x^2 + 1$

ومنه نستنتج:

$$y = 4(x-1)+2$$

ما يمكن ملاحظته في الشكل 3.4a هو أن القاطع لا يبدو كثيرًا انه مماس.



الشكل 3.4a
القاطع الذي يربط بين (1, 2) و (3, 10)

مع اتباع هذا الإجراء، سنأخذ النقطة الثانية لتكون أقرب قليلًا من نقطة التماس. ليكن عند (2, 5). يعطي ذلك ميل القاطع بالصيغة:

$$m_{sec}=\frac{5-2}{2-1}=3$$

وتكون معادلة هذا القاطع $y = 3(x-1)+2$، كما هو موضح في الشكل 3.4b. يشبه ذلك المماس بشكل أكبر ولكن ليس بالضبط. سنقوم باختيار النقطة الثانية لتكون أقرب إلى نقطة التماس. ليكن (1.05, 2.1025). ينبغي أن يعطينا هذا تقريبًا أفضل. في هذه الحالة، فإنه لدينا

$$m_{sec}=\frac{2.1025-2}{1.05-1}=2.05$$

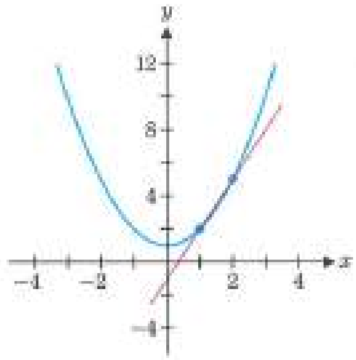
تكون معادلة هذا القاطع $y = 2.05(x-1)+2$. إلا أن ما يمكن ملاحظته في الشكل 3.4c هو أن القاطع يبدو كثيرًا انه مماس، حتى عند التكبير لدرجة كبيرة، كما هو موضح في الشكل 3.4d. سنتابع ذلك الإجراء.

عن طريق حساب ميل القاطع الذي يربط بين $(1, 2)$ والنقطة غير المحددة$(1+h, f(1+h))$ ، لقيمة h حيث h لها قيمة صغيرة جدًا تقترب من الصفر (لكن $h \neq 0$) . يكون ميل هذا القاطع

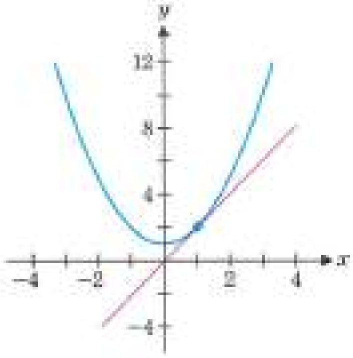
$$m_{sec} = \frac{f(1+h) - 2}{(1+h) - 1} = \frac{[(1+h)^2 + 1] - 2}{h}$$

$$= \frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} \qquad \text{اضرب واختصر}$$

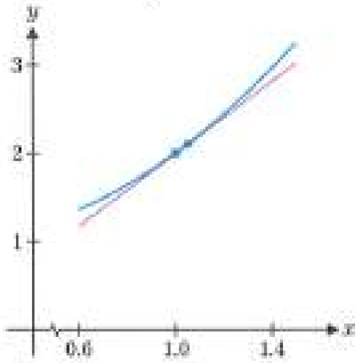
$$= \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h \qquad \text{ضع العامل المشترك } h \text{ واختصر}$$



الشكل 3.4b
القاطع الذي يربط بين
$(2, 5)$ و $(1, 5)$



الشكل 3.4c
القاطع الذي يربط بين
$(1.05, 2.1025)$ و $(1, 2)$

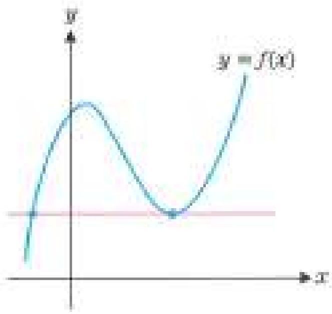


الشكل 3.4d
القاطع عن قرب

لاحظ أنه كلما اقترب h من 0، اقترب ميل القاطع من 2، والذي نعرّفه بأنه ميل المماس.

ملاحظة 1.1

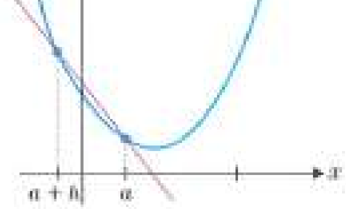
ينبغي أن نذكر ملاحظة أخرى انتقالًا إلى الحالة العامة للمماسات. على عكس الحالة بالنسبة للدائرة، قد تتقاطع المماسات مع المنحنى عند أكثر من نقطة كما هو مبين في الشكل 3.5.



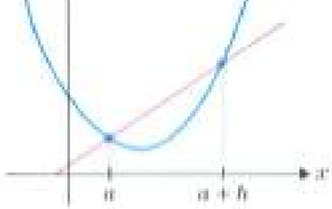
الشكل 3.5
يقطع المماس المنحنى في أكثر من نقطة واحدة

الحالة العامة

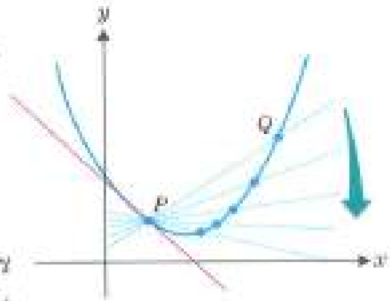
لإيجاد ميل المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$ ، اختر نقطتين أولًا على المنحنى. تكون إحدى النقطتين هي نقطة التماس، $(a, f(a))$. عيّن الإحداثي x للنقطة الثانية $x = a + h$، بعدد صغير ما h $(h \neq 0)$. يكون إذًا الإحداثي y المقابل هو $y = f(a + h)$. من الطبيعي أن تفكر في h على أنه موجب، كما هو موضح في الشكل 3.6a. إلا أن h قد يكون سالبًا أيضًا، كما يبين الشكل 3.6b.



الشكل 3.6b
قاطع $(h < 0)$



الشكل 3.6a
قاطع $(h > 0)$



الشكل 3.7
اقتراب الخطوط القاطعة من المماس عند النقطة P

ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$ و $(a+h, f(a+h))$ يُعطى بالصيغة

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.1}$$

لاحظ أن التعبير في (1.1) (يُسمى **فرق ناتج القسمة**) يعطي ميل القاطع لأي نقطة ثانية نختارها (لأي قيمة حيث $h \neq 0$). تذكر أنه من أجل الحصول على تقريب أفضل للمماس، سنأخذ النقطة الثانية لتكون أقرب إلى نقطة التماس، والتي بدورها تجعل h أقرب إلى 0. يبيّن الشكل 3.7 ذلك الإجراء، حيث قمنا بتعيين عدد من الخطوط القاطعة حيث. لاحظ أنه كلما اقتربت النقطة Q من النقطة P (مثلاً عندما يكون $h \to 0$)، اقتربت الخطوط القاطعة من المماس عند P.

نحن نعرّف ميل المماس على أنه نهاية ميول الخطوط القاطعة في الصيغة (1.1) كلما تحركت h إلى 0، متى وُجدت هذه النهاية.

تعريف 1.1

الميل $m_{\tan}$ للمماس على منحنى $y = f(x)$ عند $x = a$ يُعطى بالصيغة

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.2}$$

بشرط وجود النهاية.

يمثّل المماس الخط المار بالنقطة $(a, f(a))$ بميل $m_{\tan}$، والذي يُعطى بالصيغ $m_{\tan} = \frac{y-f(a)}{x-a}$

أو

معادلة المماس

$$\boxed{y = m_{\tan}(x-a)+f(a)}$$

مثال 1.1 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس لـ $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$.

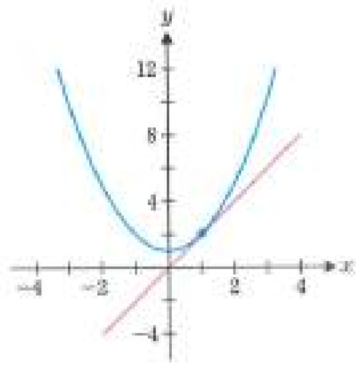
الحل نحسب الميل باستخدام الصيغة (1.2).

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2+1]-(1+1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2+1-2}{h} && \text{اضرب واختصر} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} && \text{ضع العامل المشترك } h \text{ واختصر} \\ &= \lim_{h \to 0}(2+h) = 2 \end{aligned}$$

لاحظ أن النقطة التي تقابل $x = 1$ هي $(1, 2)$ والخط الذي له الميل 2 عند النقطة $(1, 2)$ تحدده المعادلة

$$y = 2(x-1)+2 \text{ أو } y = 2x$$

لاحظ مدى التطابق الوثيق مع الخطوط القاطعة التي حسبناها سابقًا. تبيّن تمثيلاً بيانيًا للدالّة وهذا المماس في الشكل 3.8 ■



الشكل 3.8
$y = x^2 + 1$ والمماس عند $x = 1$

مثال 1.2 المماس للتمثيل البياني لدالّة نسبية

أوجد معادلة المماس للدالّة $y = \frac{2}{x}$ عند $x = 2$

الحل عملًا بالصيغة (1.2)، فإنه لدينا

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h}$$

بما أن $f(2+h) = \frac{2}{2+h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{2-(2+h)}{(2+h)}\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{2-2-h}{(2+h)}\right]}{h}$$

اجمع الكسور واضرب

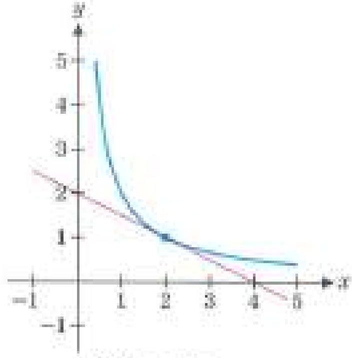
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(2+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

اختصر h

النقطة المقابلة لـ $x = 2$ هي $(2, 1)$، بما أن $f(2) = 1$. تكون معادلة المماس هي:

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1$$

نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالّة والمماس في الشكل 3.9



الشكل 3.9
$y = \frac{2}{x}$ والمماس عند $(2, 1)$

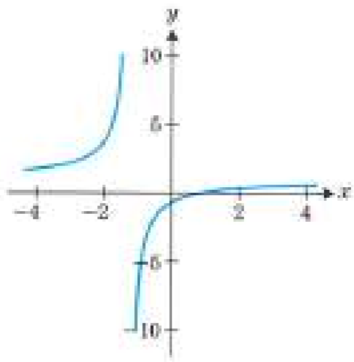
في الحالات التي يتعذر (أو يصعب) فيها تحديد قيمة النهاية لميل المماس، يمكننا تقريب النهاية عدديًا. نوضّح ذلك في المثال 1.3.

مثال 1.3 التقريب البياني والعددي لميل المماس

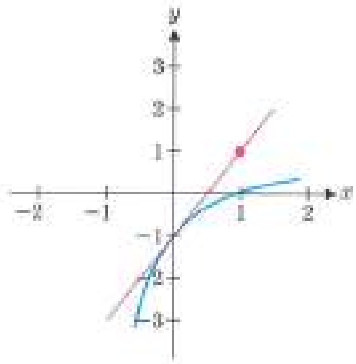
قرّب ميل المماس لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ عند $x = 0$ بيانيًا وعدديًا.

الحل التمثيل البياني لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ موضّح في الشكل 3.10a. نرسم المماس عند النقطة $(0, -1)$ كما في الشكل 3.10b حيث قمنا بالتكبير لتوفير تفاصيل أفضل. لتقريب الميل، نقوم بتقدير إحداثيات نقطة واحدة على المماس على ألا تكون $(0, -1)$. في الشكل 3.10b، يبدو أن المماس يمر بالنقطة $(1, 1)$. يكون تقدير الميل إذًا هو $m_{tan} \approx \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$. لتقريب الميل عدديًا، نقوم باختيار عدة نقاط قريبة من $(0, -1)$ ونحسب ميول الخطوط القاطعة. على سبيل المثال، عند تقريب قيم y لأربع منازل عشرية، نحصل على

m_{sec}	النقطة الثانية	m_{sec}	النقطة الثانية
$\frac{-3-(-1)}{-0.5-0} = 4.0$	$(-0.5, -3)$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$(1, 0)$
$\frac{-1.2222-(-1)}{-0.1-0} = 2.222$	$(-0.1, -1.2222)$	$\frac{-0.8182-(-1)}{0.1-0} = 1.818$	$(0.1, -0.8182)$
$\frac{-1.0202-(-1)}{-0.01-0} = 2.02$	$(-0.01, -1.0202)$	$\frac{-0.9802-(-1)}{0.01-0} = 1.98$	$(0.01, -0.9802)$



الشكل 3.10a
$y = \frac{x-1}{x+1}$



الشكل 3.10b
المماس

في كلا العمودين، كلما اقتربت النقطة الثانية من $(0, -1)$، اقترب ميل القاطع إلى 2. إذًا يكون التقدير المعقول لميل المماس عند النقطة $(0, -1)$ هو 2.

السرعة المتجهة

توصف السرعة المتجهة غالبًا على أنها كمية تحدد السرعة والاتجاه لجسم ما. لاحظ أنه إذا كانت سيارتك لا تشتمل على عداد سرعات، فإنه يمكنك تحديد سرعتك باستخدام القانون المعروف

$$\text{المسافة} = \text{المعدل (السرعة)} \times \text{الزمن} \qquad (1.3)$$

باستخدام القانون (1.3)، يمكنك إيجاد المعدل (السرعة) ببساطة عن طريق قسمة المسافة على الزمن. بينما يشير المعدل في القانون (1.3) إلى السرعة المتوسطة خلال مدة زمنية، فنحن نهتم بالسرعة في لحظة معينة. ينبغي أن توضح القصة التالية الفرق.

في نقاط المرور، يسأل ضباط الشرطة عادة السائقين إذا ما كانوا يعرفون السرعة التي كانوا يسيرون بها. لنفترض أن الإجابة التالية وردت من سائق شديد الحماس، والذي قد يجيب أن خلال 3 أعوام وشهرين و7 أيام و5 ساعات و45 دقيقة ماضية، قطعوا مسافة 45,259.7 ميلًا. لذا، فإن سرعتهم كانت

$$\text{المعدل (السرعة)} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{45{,}259.7 \text{ ميلًا}}{27{,}917.75 \text{ ساعة}} \approx 1.62118 \text{ mph}$$

بالطبع لن يتبهر معظم ضباط الشرطة بهذا التحليل. ولكن لماذا يعتبر خطأ؟ بينما لا يوجد شيء خطأ في القانون (1.3) أو الحساب، فمن المعقول الجدال في عدم صحة النتائج ما لم يتول أحد غيرهم قيادة السيارة طيلة فترة الأعوام الثلاثة.

على فرض أن السائق اقترح الفرضية التالية عوضًا عن ذلك: "أنا غادرت المنزل في 6:17 P.M. وقطعت 17 ميلًا بالضبط حتى اللحظة التي أوقفتني فيها في الساعة 6:43 P.M. لذلك، كانت سرعتي هي

$$\text{المعدل (السرعة)} = \frac{17 \text{ ميلًا}}{26 \text{ دقيقة}} \times \frac{60 \text{ دقيقة}}{1 \text{ ساعة}} \approx 39.2 \text{ mph}$$

وهذا أدنى من الحد الأقصى للسرعة البالغ 45 mph."

بينما يعد هذا تقديرًا أفضل بكثير للسرعة المتجهة عن 1.6 mph التي تم حسابها سابقًا، فإنها لا تزال سرعة متجهة متوسطة باستخدام مدة زمنية طويلة للغاية.

بصفة أعم، على فرض أن الدالة $s(t)$ تعطي الموقع الذي تحرك منه جسم ما في الزمن t، وسلك خطًا مستقيمًا. بمعنى أدق، $s(t)$ تعطي الإزاحة (**المسافة الموجهة**) من نقطة مرجعية ثابتة، بحيث يعني $s(t) < 0$ أن الجسم يقع $|s(t)|$ بعيدًا عن النقطة المرجعية، ولكن في الاتجاه السالب. إذًا، بالنسبة للمدتين الزمنيتين a وb (حيث $a < b$)، فإن $s(b) - s(a)$ تعطي المسافة الموجهة بين الموقعين $s(a)$ و $s(b)$. إذًا **السرعة المتجهة المتوسطة** v_{avg} تحددها

$$\boxed{v_{avg} = \frac{\text{المسافة الموجهة}}{\text{الزمن}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}} \qquad (1.4)$$

مثال 1.4 إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة

موقع السيارة بعد t دقائق من القيادة في خط مستقيم تحدده

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t^3, \quad 0 \le t \le 4$$

حيث s يُقاس بالأميال و t بالدقائق. أوجد السرعة المتجهة في فترة زمنية طولها دقيقتان $t = 2$

الحل لحساب المتوسط على مدى دقيقتين من $t = 2$ إلى $t = 4$، نجد من خلال الصيغة (1.4) أن

$$\begin{aligned} v_{avg} &= \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} \approx \frac{2.6667 - 1.3333}{2} \\ &\approx 0.6667 \text{ mi/min} \\ &\approx 40 \text{ mph} \end{aligned}$$

بالطبع، الفترة البالغ طولها دقيقتين تعد طويلة نسبيًا. نظرًا لأن السيارات قد تزيد السرعة وتبطئها بشكل كبير خلال دقيقتين. وسنحصل على التقريب المعدل عن طريق إيجاد المتوسط في خلال دقيقة واحدة.

$$v_{avg} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} \approx \frac{2.25 - 1.3333}{1}$$
$$\approx 0.91667 \text{ mi/min}$$
$$\approx 55 \text{ mph}$$

رغم أن التقدير الأخير يعد بالتأكيد أفضل من الأول، فإنه يمكننا القيام بما هو أفضل. كلما قمنا بتقصير الفترة الزمنية أكثر وأكثر، ينبغي أن تقترب السرعة المتجهة المتوسطة أكثر وأكثر من السرعة المتجهة في اللحظة $t = 2$ يستند ذلك إلى المنطق بأنه إذا حسبنا السرعة المتجهة المتوسطة على الفترة الزمنية $[2, 2 + h]$ (حيث $h > 0$) ثم جعلنا $h \to 0$. فإن السرعات المتجهة المتوسطة الناتجة ينبغي أن تقترب أكثر وأكثر من السرعة المتجهة في اللحظة $t = 2$.

لدينا
$$v_{avg} = \frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{s(2 + h) - s(2)}{h}$$

يبين الجدول الموضح سلسلة من السرعات المتجهة المتوسطة. حيث $h > 0$ بنتائج مشابهة إذا سمحنا بأن يكون h سالبًا. يبدو أن السرعة المتجهة المتوسطة تقترب من ميل واحد/دقيقة (60 mph). عندما يكون $h \to 0$

h	$\frac{s(2 + h) - s(2)}{h}$
1.0	0.9166666667
0.1	0.9991666667
0.01	0.9999916667
0.001	0.999999917
0.0001	1.0
0.00001	1.0

هذا يرشدنا إلى صياغة التعريف التالي.

تعريف 1.2

إذا كان $s(t)$ يمثل موقع جسم ما بالنسبة إلى مكان ثابت في الزمن t عندما تحرك الجسيم في اتجاه خط مستقيم، فإذًا **السرعة اللحظية** في الزمن $t = a$ تحدده الصيغة

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{(a + h) - a} = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h} \qquad (1.5)$$

بشرط وجود النهاية. **السرعة** هي القيمة المطلقة للسرعة المتجهة.

ملاحظات

(أ) لاحظ إذًا أنه، على سبيل المثال، إذا كان t تقاس بالثواني و $s(t)$ تقاس بالأقدام، إذًا السرعة المتجهة (المتوسطة أو اللحظية) تقاس بالقدم لكل ثانية (ft/s). (ب) عندما نستخدم مصطلح السرعة المتجهة بدون قيد أو شرط، فإنه يشير إلى السرعة المتجهة اللحظية.

مثال 1.5 إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية

على فرض أن ارتفاع جسم يسقط بعد t ثانية من سقوطه من ارتفاع 64 قدمًا، تمثله المعادلة $s(t) = 64 - 16t^2$ بالقدم. أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1$ و $t = 2$ والسرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.5$ و $t = 2$ والسرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.9$ و $t = 2$ والسرعة المتجهة اللحظية عند الزمن $t = 2$

الحل السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1$ و $t = 2$ هي

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1)^2]}{1} = -48 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.5$ و $t = 2$ هي

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.5)}{2 - 1.5} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1.5)^2]}{0.5} = -56 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.9$ و $t = 2$ هي

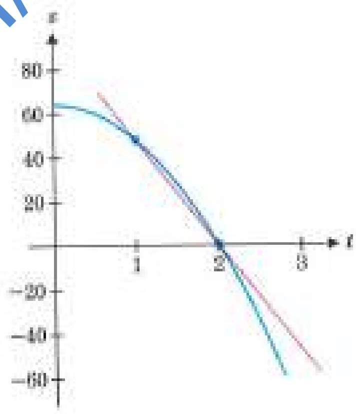
$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.9)}{2 - 1.9} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1.9)^2]}{0.1} = -62.4 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة اللحظية هي نهاية السرعات المتجهة المتوسطة. عملاً بالصيغة (1.5)، يكون لدينا،

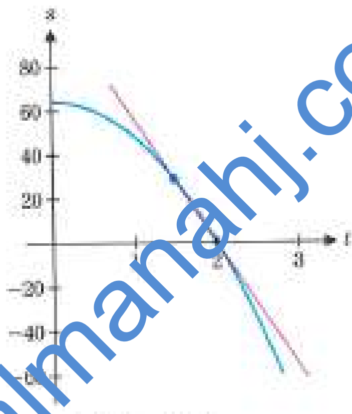
$$
\begin{aligned}
v(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(2+h)-s(2)}{(2+h)-2}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[64-16(2+h)^2]-[64-16(2)^2]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[64-16(4+4h+h^2)]-[64-16(2)^2]}{h} && \text{اضرب واختصر}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-64h-16h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-16h(h+4)}{h} && \text{ضع العامل المشترك } h \text{ واختصر}\\
&= \lim_{h\to 0}[-16(h+4)] = -64 \text{ ft/s}
\end{aligned}
$$

تذكر أن السرعة المتجهة تشير إلى كل من السرعة والاتجاه. في هذه المسألة، $s(t)$ يقيس الارتفاع فوق سطح الأرض. لذا، السرعة المتجهة السالبة تشير إلى أن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (أو الهابط). سرعة الجسم عند معلَم الثانية "2" تكون إذاً 64 ft/s. ■

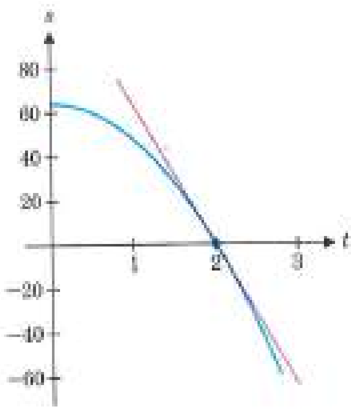
لاحظ أن صيغة السرعة المتجهة اللحظية (1.5) وصيغة ميل المماس (1.2) متطابقتان. لتوثيق الارتباط أكثر، نقوم بتمثيل دالّة الموقع $s(t) = 64 - 16t^2$ بيانيًا حيث $0 \leq t \leq 3$ من المثال 1.5. السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = 1$ و $t = 2$ تقابل ميل القاطع بين النقطتين عند $t = 1$ و $t = 2$ (انظر الشكل 3.11a). وعلى نحو مماثل، السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = 1.5$ و $t = 2$ تعطي ميل القاطع المقابل (انظر الشكل 3.11b). أخيرًا، السرعة المتجهة اللحظية عند الزمن $t = 2$ تقابل ميل المماس عند $t = 2$ (انظر الشكل 3.11c).



الشكل 3.11a
القاطع بين $t = 1$ و $t = 2$



الشكل 3.11b
القاطع بين $t = 1.5$ و $t = 2$



الشكل 3.11c
المماس عند $t = 2$

السرعة المتجهة هي معدل (بدقة أكبر، معدل التغير اللحظي للموقع بدلالة الزمن). بصفة عامة،

متوسط معدل التغير لدالّة ما بين $x = a$ و $x = b$ $(a \neq b)$ تمثله الصيغة

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

صيغة معدل التغير اللحظي للدالّة $f(x)$ عند $x = a$ هي

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

بشرط وجود النهاية. وحدات معدل التغير اللحظي هي وحدات f مقسومة على (أو لكل من) وحدات x. ينبغي أن تنظر إلى هذه النهاية باعتبارها ميل المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$.

مثال 1.6 تفسير معدلات التغير

إذا كانت الدالّة $f(t)$ تمثل تعداد سكان مدينة ما بملايين الأشخاص بعد t أعوام من الأول من يناير عام 2000، فسّر كلًا من الكميات التالية بافتراض أنها تساوي الأعداد المعلومة. (a) $\frac{f(2)-f(0)}{2}=0.34$ ، (b) $f(2)-f(1)=0.31$ و (c) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0.3$

الحل بما أن $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو متوسط معدل تغير الدالّة f بين a و b فالتعبير (a) يخبرنا أن متوسط معدل التغير للدالّة f بين $a=0$ و $b=2$ هو 0.34. وهذا يعني نمو التعداد السكاني للمدينة بمعدل متوسط 0.34 مليون نسمة لكل عام بين 2000 و2002. وعلى نحو مماثل، التعبير (b) هو متوسط معدل التغير بين $a=1$ و $b=2$ مما يشير إلى نمو التعداد السكاني للمدينة بمعدل متوسط 0.31 مليون نسمة على أساس سنوي في 2001. وأخيرًا، التعبير (c) يمثل معدل التغير اللحظي لتعداد السكان في الزمن $t=2$ اعتبارًا من الأول من يناير، 2002. كان التعداد السكاني في المدينة ينمو بمعدل 0.3 مليون نسمة لكل عام. ■

قد تكون لاحظت أننا قد أضفنا العبارة "بشرط وجود النهاية" في نهاية تعريفات ميل المماس، والسرعة المتجهة اللحظية، ومعدل التغير اللحظي. ويمثل ذلك أهمية بما أن تلك النهايات المحددة لا تكون موجودة دائمًا كما سنرى في المثال 1.7.

مثال 1.7 تمثيل بياني بدون مماس عند نقطة

حدد إذا ما كان يوجد مماس لـ $y=|x|$ عند $x=0$

الحل من التمثيل البياني في الشكل 3.12، لاحظ أنه مهما قمنا بالتكبير على النقطة $(0,0)$، لن يتغير شكل التمثيل البياني على موضعه. (وذلك أحد أسباب عدم تحديد المماس في الشكل 3.12) فإن هذا يشير إلى أن المماس غير موجود. علاوة على ذلك، إذا كان h هو أي عدد موجب، فميل القاطع المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(h,|h|)$ يكون 1. ومع ذلك، القاطع المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(h,|h|)$ لأي عدد سالب h يكون له الميل -1. بتحديد $f(x)=|x|$ واعتبار النهايات من جهة واحدة. إذا كان $h>0$ فإذًا $|h|=h$ وبالتالي

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

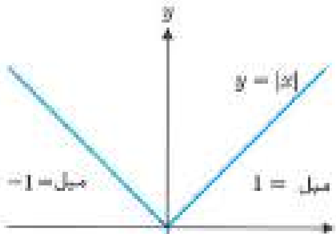
من ناحية أخرى، إذا كان $h<0$ فإذًا $|h|=-h$ (تذكر أنه إذا كان $h<0$ فإن $-h>0$). وبالتالي

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

بما أن النهايات من الجهتين تكون مختلفة، نستنتج أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$ غير موجودة

وذلك يشير إلى أن المماس غير موجود. ■



الشكل 3.12
$y=|x|$

تمارين 3.1

تمارين كتابية

1. بصفة عامة، السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما لا يمكن حسابها بشكل مباشر، وعملية النهاية هي الطريقة الوحيدة لحساب السرعة المتجهة في لحظة معينة من دالّة الموقع المرتبطة به. مع أخذ ذلك في الاعتبار، كيف يحسب عداد السرعات في السيارة السرعة؟ (إرشاد: ابحث عن هذا الموضوع في كتاب مرجعي أو على الإنترنت).

2. ابحث في وسائل الإعلام، واكتشف مراجع إلى خمسة معدلات مختلفة على الأقل. لقد عرّفنا معدل التغير على أنه نهاية فرق خارج قسمة الدالّة. اذكر الدالّة الأساسية في أمثلتك الخمسة بأكبر قدر ممكن من

الدقة. هل المعدل تُعطى كنسبة مئوية أم عدد؟ في حساب التفاضل والتكامل، تحسب عادةً المعدلات باعتبارها أعدادًا. هل هذا يتسق مع الاستخدام القياسي؟

3. ارسم التمثيل البياني لدالّة تكون غير متصلة عند $x = 1$. ثم ارسم التمثيل البياني لدالّة تكون متصلة عند $x = 1$ ولكن ليس لها مماس عند $x = 1$. في كلتا الحالتين، فسّر سبب عدم وجود مماس عند $x = 1$.

في التمارين 1-8، استخدم التعريف 1.1 لإيجاد معادلة المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$. مثّل $y = f(x)$ والمماس بيانيًا للتحقق من حصولك على المعادلة الصحيحة.

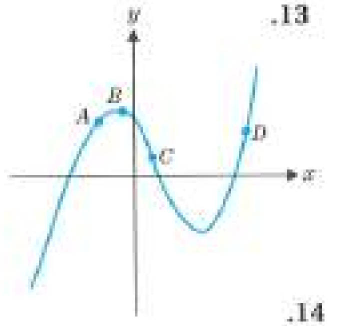
1. $f(x) = x^2 - 2, a = 1$
2. $f(x) = x^2 - 2, a = 0$
3. $f(x) = x^2 - 3x, a = -2$
4. $f(x) = x^3 + x, a = 1$
5. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, a = 1$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, a = 0$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}, a = -2$
8. $f(x) = \sqrt{x+3}, a = 1$

في التمارين 9-12، احسب ميل القاطع بين النقاط عند (a) $x = 1$ و $x = 2$، (b) $x = 2$ و $x = 3$، (c) $x = 1.5$ و $x = 2$، (d) $x = 2$ و $x = 2.5$، (e) $x = 1.9$ و $x = 2$، (f) $x = 2$ و $x = 2.1$، (g) واستخدم الأجزاء (a)–(f) والحسابات الأخرى عند الحاجة لتقدير ميل القاطع عند $x = 2$.

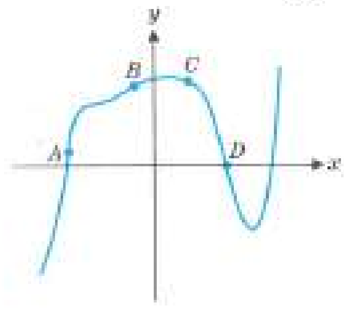
9. $f(x) = x^3 - x$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
11. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
12. $f(x) = e^x$

في التمرينين 13 و14، نظّم لائحة للنقاط A، و B، و C، و D تمثل اشارات قيم الميل اشارات قيم للمماسات.

.13



.14



في التمارين 15-18، استخدم دالّة الموقع s (بالأمتار) لإيجاد السرعة المتجهة عند الزمن $t = a$ ثانية.

15. $s(t) = -4.9t^2 + 5$, (a) $a = 1$; (b) $a = 2$
16. $s(t) = 4t - 4.9t^2$, (a) $a = 0$; (b) $a = 1$
17. $s(t) = \sqrt{t + 16}$, (a) $a = 0$; (b) $a = 2$
18. $s(t) = 4/t$, (a) $a = 2$; (b) $a = 4$

في التمارين 19-22، تمثل الدالّة موقع جسم ما بالتقدم عند الزمن t ثانية. أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين (a) $t = 0$ و $t = 2$، (b) $t = 1$ و $t = 2$، (c) $t = 1.9$ و $t = 2$، (d) $t = 2$ و $t = 1.99$، و (e) قدّر السرعة المتجهة اللحظية عند $t = 2$.

19. $s(t) = 16t^2 + 10$
20. $s(t) = 3t^3 + t$
21. $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$
22. $s(t) = 3\sin(t - 2)$

في التمارين 23-26، استخدم البرهان البياني والعددي لشرح سبب عدم وجود مماس للتمثيل البياني للدالّة $y = f(x)$ عند $x = a$.

23. $f(x) = |x - 1|$ عند $a = 1$

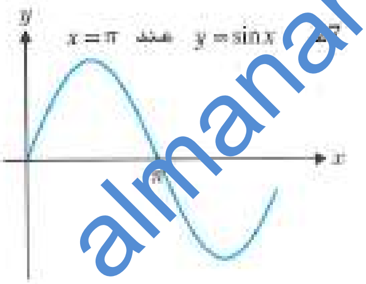
24. $f(x) = \dfrac{4x}{x-1}$ عند $a = 1$

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{إذا كان } x < 0 \\ x + 1 & \text{إذا كان } x \geq 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

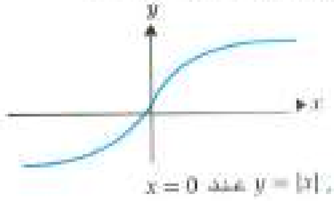
26. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{إذا كان } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{إذا كان } x > 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

في التمارين 27-30، ارسم مماسًا مقبولاً عند النقطة المعلومة أو حدد إذا كان غير موجود.

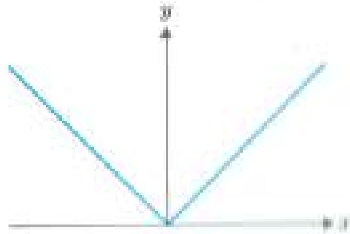
27. $y = \sin x$ عند $x = \pi$



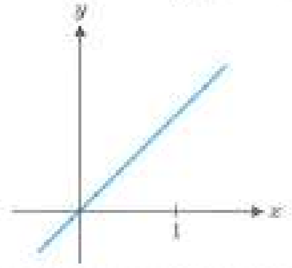
28. $y = \tan^{-1} x$ عند $x = 0$



29. $y = |x|$ عند $x = 0$



30. $x = 1$ عندما $y = x$



في التمرينين 31 و32، فسّر (a) إلى (c) كما في المثال 1.6.

31. على فرض أن $f(t)$ تمثل الرصيد بالدرهم في حساب بنكي بعد t أعوام من الأول من يناير عام 2000.
(a) $\frac{f(4) - f(2)}{2} = 21{,}034$ ، (b) $2[f(4) - f(3.5)] = 25{,}036$ و (c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = 30{,}000$

32. على فرض أن $f(m)$ تمثل قيمة سيارة بالدرهم قطعت مسافة m ألف ميل. (a) $\frac{f(40) - f(38)}{2} = -2103$ ، (b) $f(40) - f(39) = -2040$ و (c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(40 + h) - f(40)}{h} = -2000$

33. في بعض الأحيان، قد تنشأ إجابة صحيحة من اتباع طريقة خاطئة. بالنسبة للدوال التربيعية (لكن بالتأكيد ليس بالنسبة لمعظم الدوال الأخرى)، السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ تساوي السرعتين المتجهتين المتوسطتين عند $t = r$ و $t = s$. لتوضيح ذلك، على فرض أن $f(t) = at^2 + bt + c$ هي دالة المسافة. بيّن أن السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ تساوي $a(s + r) + b$. بيّن أن السرعة المتجهة عند $t = r$ هي $2ar + b$ والسرعة المتجهة عند $t = s$ هي $2as + b$. وأخيرًا، بيّن أن $a(s + r) + b = \frac{(2ar + b) + (2as + b)}{2}$

34. أوجد دالة تكعيبية [جرّب $f(t) = t^3 + \cdots$] والعددين r و s بحيث تكون السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ مختلفة عن متوسط السرعتين المتجهتين عند $t = r$ و $t = s$.

35. (a) أوجد جميع النقاط التي عندها يكون ميل المماس للدالة $y = x^3 + 3x + 1$ يساوي 5.
(b) بيّن أن ميل المماس للدالة $y = x^3 + 3x + 1$ لا يمكن أن يساوي 1 عند أي نقطة.

36. (a) بيّن أن التمثيلين البيانيين لكل من $y = x^2 + 1$ و $y = x$ لا يتقاطعان.
(b) أوجد قيمة x بحيث يكون المماسان على منحنى الدالتين $y = x^2 + 1$ و $y = x$ متوازيين.

37. (a) أوجد معادلة المماس على منحنى $y = x^3 + 3x + 1$ عند $x = 1$.
(b) بيّن أن المماس في الجزء (a) يقطع منحنى $y = x^3 + 3x + 1$ في أكثر من نقطة واحدة.
(c) بيّن أنه لأي عدد c المماس لـ $y = x^2 + 1$ عند $x = c$ لا يقطع $y = x^2 + 1$ إلا عند نقطة واحدة فقط.

38. بيّن أن $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ (إرشاد: ابدأ بـ $h = x - a$.)

تطبيقات

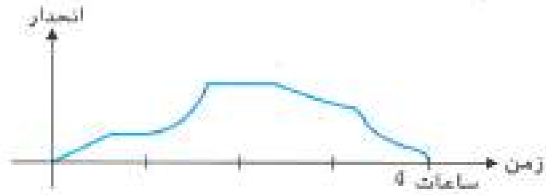
39. يوضح الجدول درجة حرارة تجمد الماء بالدرجات المئوية عند مستويات ضغط مختلفة. قدّر ميل المماس عند $p = 1$ وفسّر النتيجة. قدّر ميل المماس عند $p = 3$ وفسّر النتيجة.

p (atm)	0	1	2	3	4
°C	0	−7	−20	−16	−11

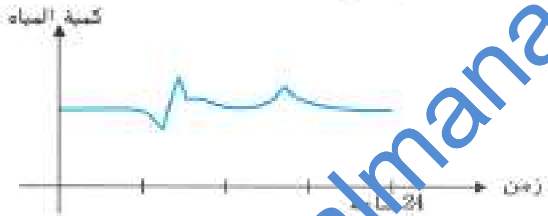
40. يوضح الجدول مدى ركلة كرة قدم انطلقت بزاوية $30°$ فوق المستوى الأفقي بسرعات أولية متعددة. قدّر ميل المماس عند $v = 50$ وفسّر النتيجة.

مسافة	19	28	37	47	58
سرعة	30	40	50	60	70

41. يوضح الجدول ارتفاع شخص ما يتسلق منحدرًا في صورة دالة زمنية. متى بلغ المتسلق القمة؟ متى كان المتسلق يسير بأعلى معدل في طريق الصعود؟ متى كان المتسلق يسير بأعلى معدل في طريق الهبوط؟ ماذا تعتقد حدوثه في الأماكن التي يكون فيها التمثيل البياني مستويًا؟



42. يوضح الجدول كمية المياه في خزان مياه بمدينة ما في صورة دالة زمنية. متى كان الخزان ممتلئًا أكثر؟ فارغًا اقل ما يمكن؟ متى كان الخزان يُملأ بأسرع معدل؟ متى كان الخزان يُفرغ بأسرع معدل؟ ما الوقت من اليوم الذي تعتقد أن مقدار مستوى الماء يمثله؟



43. على فرض أن كوبًا ساخنًا من القهوة تُرك في غرفة لمدة ساعتين. ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لما سوف تبدو عليه درجة الحرارة باعتبارها دالة زمنية. ثم ارسم تمثيلًا بيانيًا لما سوف يبدو عليه معدل التغير لدرجة الحرارة.

44. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل ارتفاع القافز بالحبال. ارسم تمثيلًا بيانيًا للسرعة المتجهة الخاصة بالشخص (استخدم + للسرعة المتجهة تصاعديًا و − للسرعة المتجهة تنازليًا).

تمرينات استكشافية

1. سيارة تسير على طريق في مسار يأخذ الشكل $y = x^3$. كانت تتحرك السيارة من اليسار إلى اليمين عندما أضاءت المصابيح الأمامية للسيارة وجه غزال يقف عند النقطة $(1, \frac{1}{2})$. أوجد مكان السيارة. إذا كانت السيارة تتحرك من اليمين إلى اليسار، فكيف سيتغير هذا الإجابة؟ هل هناك ثمة مكان (x, y) لن تصل إضاءة مصابيح السيارة الأمامية إليه أبدًا (x, y)؟

2. ما السرعة القصوى بالنسبة للأشخاص؟ تم تقدير أن كارل لويس بلغ السرعة القصوى 28 mph عندما فاز بالميدالية الذهبية في دورة الأولمبياد 1992. على فرض أنه لدينا البيانات التالية لعدّاء ما.

الأمتار	الثواني
50	5.16666
56	5.76666
58	5.93333
60	6.1

الأمتار	الثواني
62	6.26666
64	6.46666
70	7.06666

نحن نريد تقدير السرعة القصوى. يمكننا البدء بحساب $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{100\text{ m}}{10\text{ s}} = 10\text{ m/s}$، ولكن هذه هي السرعة المتوسطة على مدى السباق بأكمله. وليست السرعة القصوى. على فرض أننا نريد حساب متوسط السرعات باستخدام قياسين متجاورين فقط (على سبيل المثال، 50 m، 56 m). كرر ذلك مع جميع الأزواج الستة المتجاورة وأوجد أكبر سرعة (إذا كنت تريد التحويل إلى mph، فاقسم على 0.447).

لاحظ أن جميع المدد الزمنية هي في الأصل مضاعفات 1/30، مما يوضح قاعدة التقاط الفيديو لـ 30 إطارًا لكل ثانية. يوضع ذلك في الاعتبار. لم من المثير للشك أن تكون جميع المسافات من الأعداد الكلية؟ لمعرفة كم قد يؤثر هذا على حساباتك، غيّر بعض المسافات. مثلًا، إذا غيّرت 60 m إلى 59.8 m فكيف ستتغير الحسابات التي أجريتها لمتوسط السرعة المتجهة؟ تتمثل إحدى طرق تحديد مكان وقوع الخطأ، في النظر إلى نمط السرعات المتوسطة المتجهة. هل تبدو منطقية؟ في الأماكن حيث يبدو النمط مثيرًا للشك، جرّب تعديل المسافات وتصميم نمط أكثر واقعية. جرب أن تعرض المنظور الكمي على تحليلك للأخطاء. ما أعلى (أدنى) ذروة يمكن أن تصل إليها السرعة؟

الاشتقاق

في الدرس 1—3، تحققنا من مفهومين يبدو أنهما غير مترابطين: ميل المماس والسرعة المتجهة. ويتم التعبير عن كلتيهما بدلالة النهاية نفسها. وفي ذلك إشارة إلى قدرة علم الرياضيات؛ حيث يتم وصف مفهومين غير مترابطين بالتعبير الرياضي نفسه. كما نبين أن في تلك النهاية المعينة إفادة كبيرة حتى أنها تحمل اسمًا خاصًا.

تعريف 2.1

مشتقة الدالّة f عند النقطة $x = a$ تُعرّف كما يأتي،

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (2.1)$$

بشرط وجود النهاية. إذا كانت النهاية موجودة، فإننا نقول إن f تكون **قابلة للاشتقاق** عند $x = a$

صيغة أخرى من (2.1) هي،

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (2.2)$$

(انظر التمرين 38 في الدرس 1—3).

مثال 2.1 إيجاد المشتقة عند نقطة

احسب مشتقة الدالّة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند $x = 1$.

الحل من (2.1)، فإننا لدينا

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(1+h)^3 + 2(1+h) - 1] - (3 + 2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (2 + 2h) - 1 - 4}{h}$$

اضرب ثم اختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{11h + 9h^2 + 3h^3}{h}$$

ضع العامل المشترك ثم اختصر

$$= \lim_{h \to 0} (11 + 9h + 3h^2) = 11. \quad ■$$

على فرض أن في المثال 2.1 كان ينبغي أيضًا إيجاد $f'(2)$ و $f'(3)$ بدلًا من تكرار حساب النهاية المطلوب لإيجاد كل من $f'(2)$ و $f'(3)$ في المثال 2.2. سنقوم بحساب المشتقة بدون تحديد قيمة لـ x. مما يعطينا دالّة يمكن منها حساب $f'(a)$ لأي من قيم a وذلك بمجرد التعويض عن a بـ x.

مثال 2.2 إيجاد المشتقة عند نقطة غير محددة

أوجد مشتقة الدالّة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند القيمة غير المحددة لـ x. ثم أوجد قيمة المشتقة عند $x = 1$، $x = 2$ و $x = 3$.

الحل من خلال استبدال a محل x وفقًا لتعريف المشتقة (2.1). يكون لدينا

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^3 + 2(x+h) - 1] - (3x^3 + 2x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (2x + 2h) - 1 - 3x^3 - 2x + 1}{h}$$ اضرب واختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2h}{h}$$ ضع العامل المشترك h واختصر

$$= \lim_{h \to 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2 + 2)$$

$$= 9x^2 + 0 + 0 + 2 = 9x^2 + 2.$$

لاحظ أنه في هذه الحالة، لدينا مشتقة دالّة جديدة، $f'(x) = 9x^2 + 2$. وبمجرد التعويض بـ x سنحصل على $f'(1) = 9 + 2 = 11$ (كما حصلنا في المثال 2.1)، $f'(2) = 9(4) + 2 = 38$ و $f'(3) = 9(9) + 2 = 83$. ■

يقودنا المثال 2.2 إلى التعريف التالي.

تعريف 2.2

مشتقة الدالّة f هي الدالّة f' التي تُعطى بالمعادلة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.3)$$

مجال f' هو مجموعة كل قيم x التي توجد لها هذه النهاية. تُسمى عملية حساب الاشتقاق **بالتفاضل**. بالإضافة إلى ذلك، تكون f قابلة للاشتقاق (التفاضل) على فترة مفتوحة I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I.

في المثالين 2.3 و 2.4، لاحظ أن إيجاد المشتقة يتضمن كتابة تعريف النهاية ثم التوصل لطريقة ما لإيجاد قيمة هذه النهاية (التي تكون في البداية في الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$).

مثال 2.3 إيجاد مشتقة دالّة نسبية بسيطة

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$، فأوجد $f'(x)$

الحل لدينا

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)}{h}$$ بما أن $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]}{h}$$ اجمع الكسور واختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$ اختصر h

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

لذلك $f'(x) = -x^{-2}$ ■

مثال 2.4 مشتقة دالّة الجذر التربيعي

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ (حيث $x \geq 0$)، فأوجد $f'(x)$ حيث $x \geq 0$ وحدد مجالها.

الحل لدينا،

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right)$$ اضرب البسط والمقام بالمرافق $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}$$ اضرب واختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}$$ اختصر h

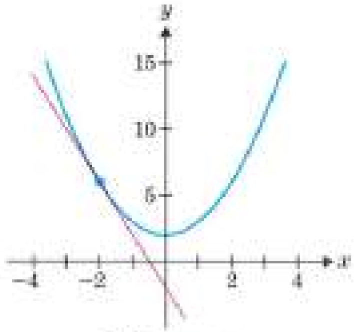
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

لاحظ أن $f'(x)$ تكون معرفة فقط إذا كان $x > 0$. على الرغم من أن $f(x)$ معرفة إذا كان $x \geq 0$ ■

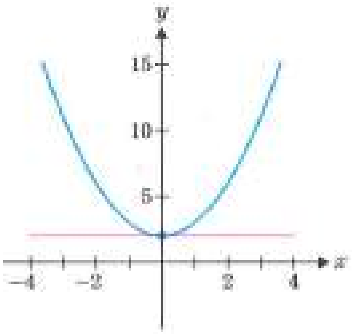
تتخطى فوائد الحصول على دالّة مشتقة مجرد تبسيط حساب الاشتقاق عند نقاط متعددة. كما سنرى لاحقًا، تبدو الدالّة المشتقة بقدر كبير من المعرفة حول الدالّة الأصلية.

ضع في الاعتبار أن قيمة الدالّة المشتقة عند نقطة ما هي ميل المماس عند هذه النقطة. في الأشكال 3.13a–3.13c، قمنا بتمثيل دالة بيانيًا مع المماسات الخاصة بها عند نقاط ثلاث مختلفة. ميل المماس في الشكل 3.13a يكون سالبًا، وميل المماس في الشكل 3.13c يكون موجبًا.



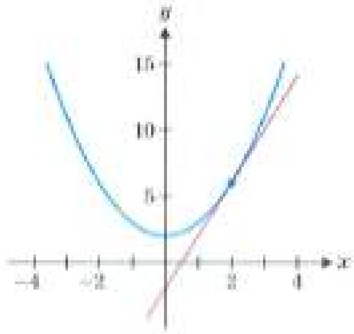
الشكل 3.13a

$m_{tan} < 0$



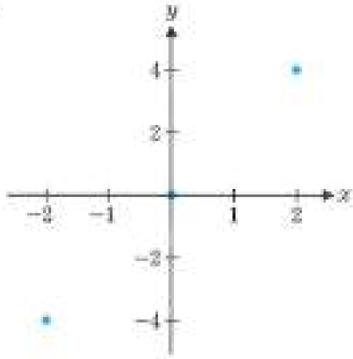
الشكل 3.13b

$m_{tan} = 0$



الشكل 3.13c

$m_{tan} > 0$



الشكل 3.13d

$y = f'(x)$ (النقاط الثلاث)

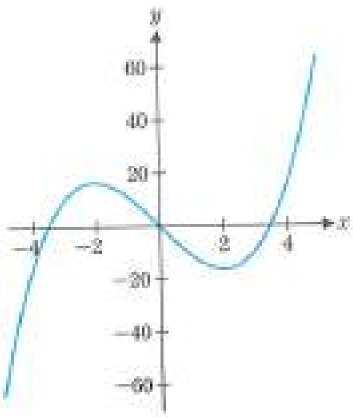
وميل المماس في الشكل 3.13b يكون صفرًا. تعطينا المماسات الثلاثة هذه ثلاث نقاط على التمثيل البياني للدالّة المشتقة (انظر الشكل 3.13d)، عن طريق تقدير قيمة $f'(x)$ عند النقاط الثلاث.

مثال 2.5 رسم التمثيل البياني لـ f' من التمثيل البياني لـ f

من التمثيل البياني لـ f في الشكل 3.14، ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لـ f'.

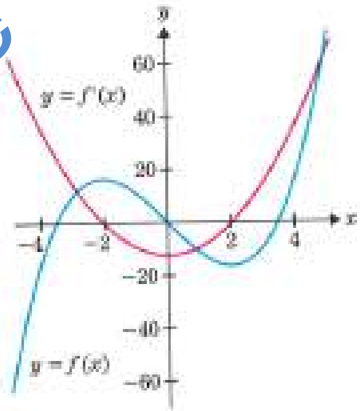
الحل لا داعي للقلق حول القيم الدقيقة لـ $f'(x)$. فنحن لا نرغب سوى في إيجاد الشكل العام لتمثيلها البياني. كما في الأشكال 3.13a–3.13d، سنقوم باختيار بضع نقاط مهمة لتحليلها بعناية. ينبغي أن تركز على أي انفصالات وأماكن حيث يدور التمثيل البياني لـ f.

التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ يصبح افقيًا عند $x = -2$ و $x = 2$ تقريبًا. عند هاتين النقطتين، تكون المشتقة 0. كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين، يتزايد التمثيل البياني حيث يكون $x < -2$، ويتناقص حيث يكون $-2 < x < 2$ ويتزايد مرة ثانية حيث يكون $x > 2$. وهذا يعني أن $f'(x) > 0$ عندما يكون $x < -2$، $f'(x) < 0$ عندما يكون $-2 < x < 2$ وأخيرًا $f'(x) > 0$ عندما يكون $x > 2$. يمكننا الإخبار بالمزيد كذلك. كلما اقترب x من -2 من جهة اليسار، لاحظ أن المماسات تخفف من الانحدار. لذلك، $f'(x)$ تصبح موجبة كلما اقتربت x من -2 من جهة اليسار. عند التحرك إلى اليمين من $x = -2$ يزداد التمثيل البياني في الانحدار حتى قرابة $x = 0$ ثم يصبح أخف انحدارًا حتى يصبح افقيًا عند $x = 2$. لذا، $f'(x)$ تصبح سالبة عند $x = 0$، ثم تكون أقل سلبية عند $x = 2$. أخيرًا، يزداد التمثيل البياني انحدارًا كلما تحركنا إلى اليمين من $x = 2$. إذا جمعنا تلك النقاط معًا، فسيكون لدينا التمثيل البياني المحتمل لـ f' الموضح باللون الأحمر في الشكل 3.15، المرسوم فوق التمثيل البياني لـ f. ■



الشكل 3.14

$y = f(x)$



الشكل 3.15

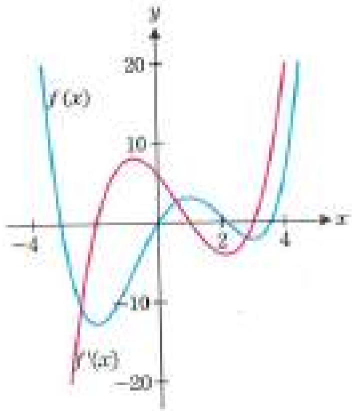
$y = f'(x)$ و $y = f(x)$

من الممتع للاهتمام أكثر أن نسأل عما يبدو عليه التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ إذا عرفنا التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$. نوضح ذلك في المثال 2.6.

مثال 2.6 رسم التمثيل البياني لـ f من التمثيل البياني لـ f'

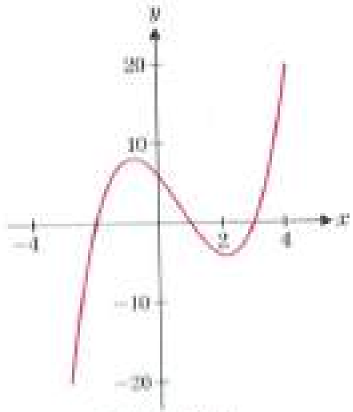
من التمثيل البياني لـ f' في الشكل 3.16، ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لـ f.

الحل نكرر قولنا بأنه لا داعي للقلق بشأن الحصول على القيم الدقيقة للدالّة. بل إننا لا نريد سوى الشكل العام للتمثيل البياني. لاحظ من التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$ أن $f'(x) < 0$ حيث $x < -2$. وبالتالي في هذه الفترة، تكون ميول المماسات لـ $y = f(x)$ سالبة والتمثيل البياني تنازلي على الفترة $(-2, 1)$، $f'(x) > 0$. مما يشير ذلك إلى أن المماسات للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ يكون لها ميل موجب ويكون التمثيل البياني تصاعديًا. علاوة على ذلك، يخبرنا ذلك بأن التمثيل البياني يعكس إتجاهه (أي التحول من التناقص إلى التزايد) عند $x = -2$.



الشكل 3.17

$y = f'(x)$ والتمثيل البياني المعقول لـ $y = f(x)$



الشكل 3.16

$y = f'(x)$

بالإضافة إلى ذلك، يكون $f'(x) < 0$ في الفترة $(1, 3)$، وبالتالي فإن التمثيل البياني تنازلي هنا. أخيرًا، حيث $x > 3$ نحصل على $f'(x) > 0$ وبالتالي فإن التمثيل البياني تصاعدي هنا. ستجد تمثيلًا بيانيًا يشمل جميع تلك السلوكيات بالتركيب على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ في الشكل 3.17 (في الصفحة السابقة). قمنا برسم التمثيل البياني لـ f بحيث لا يكون "الوادي" الصغير على الطرف الأيمن للمحور y على قدر الانحدار نفسه للوادي على الطرف الأيسر من المحور y لسبب ما. انظر بعناية إلى التمثيل البياني لـ $f'(x)$ ولاحظ أن $|f'(x)|$ يصبح أكبر بكثير على الفترة $(-2, 1)$ عن الفترة $(1, 3)$. وهذا يشير إلى أن المماسات وكذلك، التمثيل البياني سيزداد انحدارها على الفترة $(-2, 1)$ عن الفترة $(1, 3)$. ■

رموز الاشتقاق البديلة

نحدد للدالّة المشتقة الرمز f'. توجد رموز أخرى شائعة الاستخدام لـ f'، لكل منها مزايا وعيوب. استخدم أحد مؤسسي حساب التفاضل والتكامل، غوتفريد لايبنتز، الرمز $\frac{df}{dx}$ (رمز لايبنتز) للمشتقة. إذا كتبنا $y = f(x)$ فإن جميع ما يلي تكون بدائل لرمز المشتقة:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

يُطلق على التعبير $\frac{df}{dx}$ **صيغة لايبنتز للتعبير عن مشتقة الدالة f بالنسبة لـــ x** وهو يخبرك بأن تأخذ الاشتقاق من أي تعبير مما يلي.

في الدرس 3.1، لاحظنا أن $f(x) = |x|$ ليس لها مماس عند $x = 0$ (أي أن الدالّة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$)، على الرغم من أنها متصلة دائمًا. وبالتالي، توجد دوال متصلة تكون غير قابلة للاشتقاق. قد تكون تعجبت بالفعل مما إذا كان العكس صحيحًا. أي، هل توجد دوال قابلة للاشتقاق ولا تكون متصلة؟ الإجابة هي "لا"، كما توضحه النظرية 2.1.

النظرية 2.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإن f تكون متصلة عند $x = a$.

البرهان

لكي تكون f متصلة عند $x = a$، نحتاج فقط إلى إثبات أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. ليكن ما يلي:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] \quad \text{اضرب واقسم بـ } (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]\lim_{x \to a}(x - a) \quad \text{النظرية}$$

$$= f'(a)(0) = 0 \quad \text{بما أن } f \text{ قابلة للاشتقاق}$$

قمنا باستخدام التعريف البديل للمشتقة (2.2) الذي ناقشناه سابقًا، بتطبيق النظرية 3.1 في الدرس 1.3. يتبع ذلك الآن ما يلي

$$0 = \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) - f(a),$$

والذي يعطينا النتيجة. ■

لاحظ أن النظرية 2.1 تخبرنا بأنه إذا كانت الدالّة غير متصلة عند نقطة ما، فإذن لن يكون لها مشتقة عند النقطة. وتبين كذلك أن الدوال تكون غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة حيث يكون تمثيلها البياني مشتملًا على رأس مدبب كما هو الحال بالنسبة $f(x) = |x|$ عند $x = a$. (انظر المثال 2.7).

ملاحظات تاريخية

غوتفريد فيلهلم لايبنتز (1646–1716) عالم رياضيات وفيلسوف ألماني قدّم الكثير من الرموز والمصطلحات في حساب التفاضل والتكامل وينسب له (بجانب السيد إسحاق نيوتن) ابتكار حساب التفاضل والتكامل. وكان لايبنتز عبقريًا، فما إن حصل على شهادة القانون، بدأ في نشر أبحاث في علم المنطق والأحكام القضائية في سن 20. وهو أحد رواد عصر النهضة بحق، وله إسهامات مهمة في السياسة والفلسفة وعلم اللاهوت والهندسة واللغويات والجيولوجيا والهندسة المعمارية والفيزياء، كما اشتهر بكونه أعظم المحررين في زمانه. وعلى جانب الرياضيات، فقد استمد لايبنتز العديد من القواعد الأساسية لحساب المشتقات وساعد على تحفيز تطوير حساب التفاضل والتكامل من خلال اتصالاته الواسعة. وكان للرمز البسيط والمنطقي الذي اخترعه الفضل في أن يكون حساب التفاضل والتكامل سهلًا للتناول من قبل قطاع عريض من الجمهور، ولم يتم إحداث إلا تطويرًا بسيطًا لما توصل إليه منذ 300 عام. ومن كلماته، "ميزة الاكتشاف قد تتجلى للمرء في الرموز ولكن الميزة الأعظم تكمن في تعبيرهم بإيجاز عن الشيء بطبيعته الدقيقة...ثم بالطبع يقل جهد التفكير كثيرًا".

مثال 2.7 إثبات أن الدالّة تكون غير قابلة للإشتقاق عند نقطة

أثبت أن

$f(x) = \begin{cases} 4 & , x < 2 \\ 2x & , x \geq 2 \end{cases}$ غير قابلة للإشتقاق عند $x = 2$.

الحل يشير التمثيل البياني (انظر الشكل 3.18) إلى وجود رأس مُدبب عند $x = 2$، لذا قد نتوقع عدم وجود المشتقة. للتحقق من صحة ذلك، نتحقق من المشتقة بإيجاد قيمة النهايات من جهة واحدة. حيث $h > 0$، لاحظ أن $(2 + h) > 2$ وبالتالي $f(2 + h) = 2(2 + h)$. ذلك يعطينا

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(2+h) - 4}{h}$$

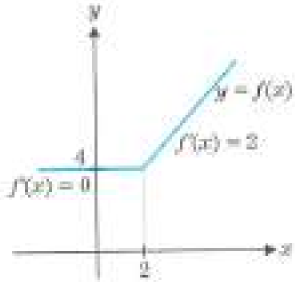
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 2h - 4}{h} \quad \text{اضرب واختصر}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2. \quad h \text{ اختصر}$$

وبالمثل، إذا كان $h < 0$، $(2 + h) < 2$ وبالتالي، $f(2 + h) = 4$ يكون لدينا إذًا

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{4 - 4}{h} = 0$$

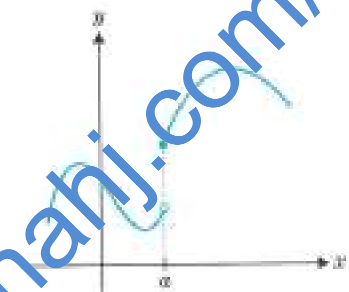
بما أن النهايات من جهة واحدة غير متساوية $(2 \neq 0)$، $f'(2)$ تكون غير موجودة (أي أن f تكون غير قابلة للإشتقاق عند $x = 2$).



الشكل 3.18

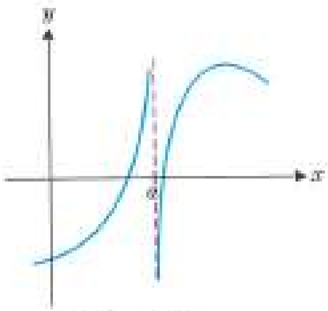
رأس مُدبب

توضح الأشكال 3.19a–3.19d مجموعة متنوعة من الدوال التي لا يوجد $f'(a)$ لها. في كل حالة، فكر في اعتبارك أن المشتقة غير موجودة.



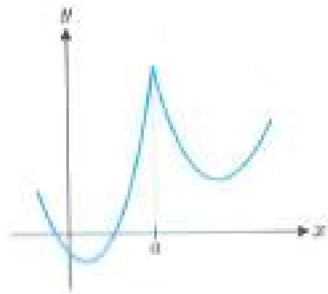
الشكل 3.19a

انفصال قفزي



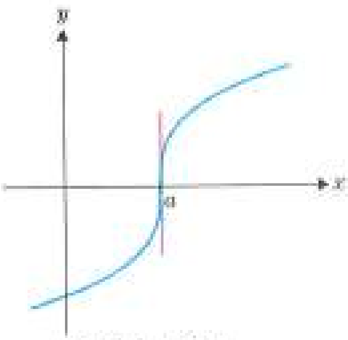
الشكل 3.19b

خط تقارب رأسي



الشكل 3.19c

رأس مُدبب



الشكل 3.19d

مماس رأسي

التفاضل العددي

في حالات عديدة أثناء التطبيقات، يكون من غير الممكن أو العملي حساب المشتقات رمزيًا. يحدث ذلك عادة عندما يكون لديك بعض بيانات فقط أمثلاً. جدول قيم) تمثل دالة مجهولة بشكل تام.

مثال 2.8 تقريب الاشتقاق عدديًا

قدّر مشتقة $f(x) = x^2\sqrt{x^3+2}$ عند $x = 1$ عدديًا.

الحل على الرغم من صعوبة العمل بتعريف النهاية لمشتقة هذه الدالّة، فإن التعريف يخبرنا بأن المشتقة عند $x = 1$ هي نهاية ميول الخطوط القاطعة. سنقوم بحساب بعض مما يلي أدناه.

h	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
0.1	4.7632
0.01	4.3715
0.001	4.3342

h	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
−0.1	3.9396
−0.01	4.2892
−0.001	4.3260

لاحظ أن الميول تبدو متقاربة إلى 4.33 تقريبًا كلما اقترب h من 0. لذلك، نقوم بالتقريب $f'(1) \approx 4.33$ ■

مثال 2.9 تقدير السرعة المتجهة عدديًا

افترض أن متسابقًا قطع المسافات التالية في الأوقات الزمنية المعطاة. قدّر السرعة المتجهة للمتسابق عند الثانية "6.

t(sec)	5.0	5.5	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.5	7.0
$f(t)$ (ft)	123.7	141.01	151.41	154.90	158.40	161.92	165.42	175.85	193.1

الحل السرعة المتجهة اللحظية هي النهاية للسرعة المتجهة المتوسطة كلما تقلصت الفترة الزمنية. نحسب أولاً السرعات المتجهة المتوسطة على أقصر الفترات الزمنية المعطاة، من 5.9 إلى 6.0 ومن 6.0 إلى 6.1

السرعة المتجهة المتوسطة	الفترة الزمنية
35.0 ft/s	(5.9, 6.0)
35.2 ft/s	(6.0, 6.1)

بما أن هذين أفضل تقديرين فرديين متاحين من البيانات، يمكننا قسمة الفرق وتقدير السرعة المتجهة 35.1ft/s. ومع ذلك، توجد معلومات مفيدة في بقية البيانات. استنادًا إلى الجدول المبين، يمكننا استنتاج أن المتسابق كان يبلغ السرعة القصوى عند الثانية "6 تقريبًا. وبالتالي، يمكننا قبول التقدير الأعلى 35.2ft/s. ينبغي التأكيد على أنه لا توجد إجابة صحيحة وحيدة لهذا السؤال، بما أن البيانات غير مكتملة (حيث لا نعلم سوى المسافة فقط في أوقات زمنية ثابتة، بدلاً من سلسلة متصلة من الأوقات الزمنية). ■

ما وراء الصيغ

السرعة المتجهة المتوسطة	الفترة الزمنية
34.78 ft/s	(5.5, 6.0)
34.95 ft/s	(5.8, 6.0)
35.00 ft/s	(5.9, 6.0)
35.20 ft/s	(6.0, 6.1)
35.10 ft/s	(6.0, 6.2)
34.90 ft/s	(6.0, 6.5)

في الدروس 3.8–3.3، ستجد صيغًا عديدة لحساب المشتقات. كلما زادت معرفتك بهذه الصيغ، ضع في اعتبارك أسباب اهتمامنا بالاشتقاق. أوصلتنا دراسات دقيقة أجريت على ميل المماس للمنحنى والسرعة المتجهة لجسم متحرك إلى النهاية نفسها، والتي أطلقنا عليها اسم الاشتقاق. بصفة عامة، تمثل المشتقة معدل التغير في كمية واحدة من حيث كمية أخرى. وقد أوصلتنا دراسة التغير بطريقة كمية إلى تقدم لا حصر له بشكل مباشر في العلوم والهندسة الحديثة.

تمارين كتابية

1. يعد الاشتقاق مهمًا بسبب العديد من الاستخدامات والتفسيرات المختلفة. صِف أربعة جوانب للاشتقاق: بيانيًا (فكّر في المماسات)، ورمزيًا، وعدديًا، ومن حيث التطبيقات.

2. غالبًا ما يستخدم علماء الرياضيات الكلمة "ملساء" لوصف الدوال التي لها خواص معينة. بيانيًا، كيف تكون الدوال القابلة للاشتقاق ملساء أكثر من الدوال التي تكون متصلة ولكن غير قابلة للاشتقاق، أو الدوال التي تكون غير متصلة؟

3. صِف بإيجاز ما تخبرك به المشتقة عن الدالّة الأصلية. على وجه الخصوص، إذا كانت المشتقة موجبة عند نقطة ما، فماذا تعلم عن اتجاه الدالّة عند هذه النقطة؟ ما الذي سيختلف إذا كانت المشتقة سالبة عند نقطة ما؟

4. مشتقة $f(x) = 3x - 5$ هي $f'(x) = 3$. اشرح سبب صحة ذلك بدلالة الميل.

في التمارين 1–4، احسب $f'(a)$ باستخدام النهايتين (2.1) و (2.2).

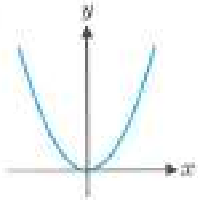
1. $f(x) = 3x + 1, a = 1$
2. $f(x) = 3x^2 + 1, a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{3x + 1}, a = 1$
4. $f(x) = \frac{3}{x+1}, a = 2$

في التمارين 5–12، احسب الدالّة المشتقة f' باستخدام تعريف المشتقة.

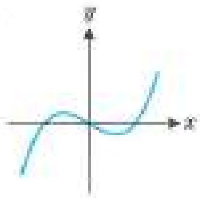
5. $f(x) = 3x^2 + 1$
6. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
7. $f(x) = x^3 + 2x - 1$
8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
9. $f(x) = \frac{3}{x+1}$
10. $f(x) = \frac{2}{2x-1}$
11. $f(t) = \sqrt{3t+1}$
12. $f(t) = \sqrt{2t+4}$

في التمرين 13 و 16، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f لرسم التمثيل البياني لمشتقة الدالة.

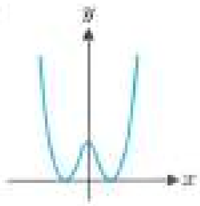
13. (a)



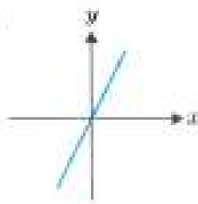
(b)



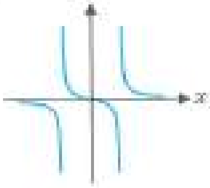
14. (a)



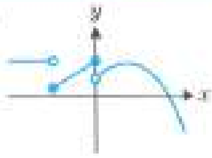
(b)



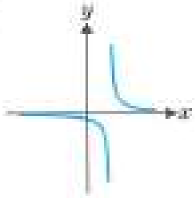
15. (a)



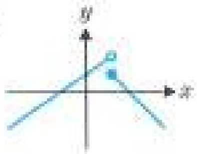
(b)



16. (a)

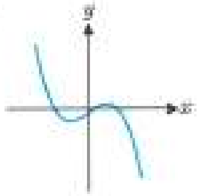


(b)

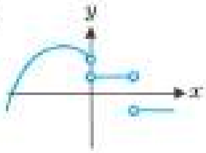


في التمرينين 17 و 18، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f' لرسم تمثيل بياني معقول لدالّة متصلة f.

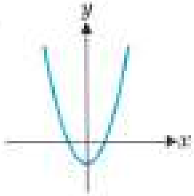
17. (a)



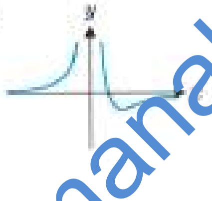
(b)



18. (a)



(b)



في التمارين 19–22، احسب المشتقة في الطرف الأيمن $D_+f(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ والمشتقة في الطرف الأيسر $D_-f(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. هل $f'(0)$ موجودة؟

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x < 0 \\ 3x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ x^3 & , x \geq 0 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ x^2 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$

في التمارين 26–23، قدّر قيمة المشتقة عدديًا.

24. $f'(2)$ لـ $f(x) = xe^{x^2}$

23. $f'(1)$ لـ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

26. $f'(2)$ لـ $f(x) = \ln 3x$

25. $f'(0)$ لـ $f(x) = \cos 3x$

في التمرينين 27 و 28، استخدم المسافات $f(t)$ لتقدير السرعة المتجهة عند $t = 2$.

27.

t	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(t)$	3.1	3.9	4.8	5.8	6.8	7.7	8.5

28.

t	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(t)$	4.6	5.3	6.1	7.0	7.8	8.6	9.3

29. مثّل بيانيًا وحدد جميع قيم x التي عندها تكون f غير قابلة للاشتقاق (a) $f(x) = |x| + |x-2|$، (b) $f(x) = |x^2 - 4x|$

30. مثّل بيانيًا وحدد جميع قيم x التي عندها تكون g غير قابلة للإشتقاق (a) $g(x) = e^{-2/x}$، (b) $g(x) = e^{-2/(x^2-x)}$

31. حيث $f(x) = x^p$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية p بحيث يكون $f'(0)$ موجودًا.

32. حيث $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية a و b بحيث يكون $f'(0)$ موجودًا.

33. أعط مثالاً يوضح أن ما يأتي لا يتحقق لكل الدوال f: إذا كانت $f(x) \leq x$، فإذًا $f'(x) \leq 1$ بالنسبة لكل x.

35. إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $x = a \neq 0$ فأوجد قيمة

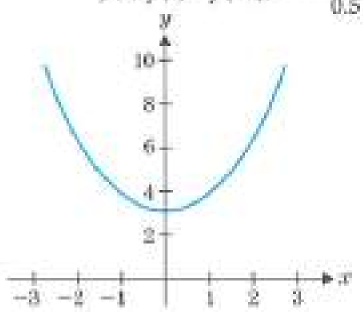
$$\lim_{x \to a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2}$$

36. اثبت أنه إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $x = a$ فإذًا

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + ch) - f(a)}{h} = cf'(a)$$

37. استخدم التمثيل البياني لتنظيم ما يأتي بترتيب تصاعدي:

$f(0), f(0) - f(-1), \dfrac{f(0) - f(-0.5)}{0.5}, f'(0).$



التمرينان 37 و 38

38. استخدم التمثيل البياني لتنظيم ما يأتي بترتيب تصاعدي:

$f(0), f(0) - f(-1), \dfrac{f(0) - f(-0.5)}{0.5}, f'(0).$

39. ارسم التمثيل البياني للدالّة بالخواص التالية:

$f(0) = 1, f(1) = 0, f(3) = 6, f'(0) = 0, f'(1) = -1$ و $f'(3) = 4$.

40. ارسم التمثيل البياني للدالّة بالخواص التالية:

$f(-2) = 4, f(0) = -2, f(2) = 1, f'(-2) = -2, f'(0) = 2$ و $f'(2) = 1$.

41. احسب الدالّة المشتقة للدوال x^2، x^3 و x^4 استنادًا إلى نتائجك. حدد النمط وخمّن صيغة عامة لمشتقة الدالّة x^n.

42. اختبر تخمينك في التمرين 41 على الدالّة $\sqrt{x} = x^{1/2}$ والدالّة $1/x = x^{-1}$.

تطبيقات

43. يوضح الجدول هامش الخطأ بالدرجات لضربات الإرسال في لعبة التنس من ارتفاع x مترًا (البيانات مأخوذة من ع. بيتيث، كلية روتوك) قدّر قيمة مشتقة هامش الخطأ عند $x = 2.5$ وفسّرها من حيث فائدة ضرب الكرة من ارتفاع أكبر.

x الأمتار	2.39	2.5	2.7	2.85	3
هامش الخطأ	1.11	1.29	1.62	1.87	2.12

44. استخدم الجدول في التمرين 43 لتقدير المشتقة عند $x = 2.85$. قارن تقديرك بتقديرك في التمرين 43.

45. تستخدم وكالة حماية البيئة قياس الطن/الميل في الجالون لتقييم كفاءة نقل الحركة في المركبات. (ويعطى تقدير الطن/الميل في الجالون لمركبة من خلال وزن المركبة (مقدرًا بالطن) مضروبًا بتقدير كفاءة استهلاك الوقود في المركبة مقدرة بالميل في الجالون. يعطي الجدول البيانات الخاصة بسيارات جديدة لعدة سنوات. قدّر معدل تغيير الطن/الميل في الجالون خلال (a) عام 1994 و (b) عام 2000. هل تشير تقديراتك إلى أن السيارات تزداد أو تنخفض كفاءتها؟

العام	1992	1994	1996	1998	2000
الطن/الميل في الجالون	44.9	45.7	46.5	47.3	47.7

46. يوضح الجدول التالي قيم كفاءة استهلاك الوقود مقدرة بالميل في الجالون للسيارات من عام 1992 إلى 2000. قدّر معدل التغير مقدرة بوحدة MPG خلال (a) عام 1994 وخلال (b) عام 2000. هل تشير تقديراتك إلى أن كفاءة استهلاك الوقود في السيارات تزداد أو تنخفض؟ بمقارنة إجاباتك بالإجابات في التمرين 45. فما الذي يجب أن يحدث لوزن السيارات المتوسط؟ إذا بقي الوزن ثابتًا. فما الذي تتوقع أن يحدث لاستهلاك الوقود مقدرًا بـ MPG؟

العام	1992	1994	1996	1998	2000
MPG	28.0	28.1	28.3	28.5	28.1

في التمرينين 47 و 48، أعطِ الوحدات الخاصة بدالّة المشتقة.

(a) $f(t)$ تمثل الموقع مقدرًا بالأمتار وعند الزمن t مقدرًا بالثواني

(b) $f(x)$ تمثل الطلب مقدرًا بعدد قطع منتج عندما يساوي السعر x دولارًا.

48. (a) $c(t)$ تمثل الكمية الموجودة لمادة كيميائية مقدرة بالجرامات عند الزمن t دقيقة.

(b) $p(x)$ تمثل الكتلة مقدرة بوحدة kg لـ x m الأولى من أنبوب.

49. لتكن $f(t)$ تمثل قيمة تداول سهم عند الزمن t يومًا. فإذا كانت $f'(t) < 0$. فما الذي يعني ذلك بالنسبة للسهم؟ إذا كنت تحوز على بعض الأسهم من هذا النوع، فهل ينبغي عليك بيع ما بحوزتك أم شراء المزيد؟

50. افترض أن هناك سهمين قيمتا تداولهما $f(t)$ و $g(t)$ حيث $f(t) > g(t)$ و $0 < f'(t) < g'(t)$. فبناء على هذه المعلومات، ما السهم الذي ينبغي عليك شراؤه؟ اشرح بإيجاز.

51. يفترض نمط انتشار أحد الأمراض أن المرض ينتشر في البداية ببطءٍ شديد، ثم يزداد معدل العدوى بصورة تدريجية ليبلغ ذروته، ثم ينخفض من جديد إلى الصفر في دلالةٍ عن نهاية الوباء. إذا كانت $I(t)$ تمثل عدد الأشخاص المصابين عند الزمن t، صمم تمثيلًا بيانيًا لكلٍ من $I(t)$ و $I'(t)$. على فرض أن أولئك المصابين لا يشفون من المرض.

52. يفترض أحد أنماط نمو التعداد السكاني أن النمو يكون سريعًا جدًا في البداية، ثم ينخفض معدل النمو إلى أن يبدأ التعداد السكاني بالتناقص. فإذا كانت $P(t)$ تمثل التعداد السكاني عند الزمن t، صمم تمثيلًا بيانيًا لـ $P(t)$ و $P'(t)$.

53. تفرض شركة الاتصالات الهاتفية درهمًا واحدًا على كل اتصالٍ مدته 20 دقيقة، ثم 10 فلسات في الدقيقة للدقائق الـ 60 التالية و 80 سنتًا في الدقيقة من أجل كل دقيقة إضافية بعد ذلك (أو للجزء من الدقيقة). لتكن $f(t)$ تمثل كلفة الاتصال لمدة t دقيقة مقدرة بالفلس، بحيث $t > 0$. حدد $f'(t)$ بأكمل قدرٍ ممكن.

54. تفرض إحدى الدول ضريبة دخلٍ بنسبة 10% على الـ AED20,000 الأولى للدخل و 16% على الدخل الإضافي فوق AED20,000. لتكن $f(t)$ الضريبة المفروضة من قبل الدولة على مبلغ AEDt من الدخل. حدد $f'(t)$ بأكمل قدرٍ ممكن.

تمارين استكشافية

1. افترض أن هناك دالةً $F(x)$ بحيث $F(1) = 1$ و $F(0) = f_0$، وفيها $0 < f_0 < 1$. فإذا كانت $F'(1) > 1$، وضح بالتمثيل البياني أن للمعادلة $F(x) = x$ حلًا q بحيث $0 < q < 1$. (إرشاد: مثلّ بيانيًا الدالّة إضافةً إلى دالّة $y = x$ معقولة $F(x)$ وابحث عن التقاطعات.) صمم تمثيلًا بيانيًا فيه $F'(1) < 1$ بحيث لا توجد حلولٌ للمعادلة $F(x) = x$ وبحيث $0 < x < 1$. للحلول صلةٌ باحتمال انقراض الحيوانات أو أسماء العائلات. افترض أنك أنت وأسلافك تنجبون أطفالًا تبعًا للاحتمالات التالية: $f_0 = 0.2$ هو احتمال عدم إنجاب أطفال و $f_1 = 0.3$ هو احتمال إنجاب طفلٍ واحدٍ فقط، $f_2 = 0.5$ هو احتمال إنجاب طفلين. عرّف $F(x) = 0.2 + 0.3x + 0.5x^2$ ووضح أن $F'(1) > 1$. أوجد حلّ $F(x) = x$ بين $x = 0$ و $x = 1$. هذا العدد هو احتمال انقراض "نسلك" في وقتٍ ما في المستقبل. أوجد القيم غير الصفرية لـ f_0، f_1 و f_2 بحيث تحقق الدالّة $F(x)$ المقابلة $F'(1) < 1$ وبالتالي فإن احتمال انقراض نسلك هو 1.

2. **لناتج قسمة الفرق التماثلي** لدالّة f يقع مركزها عند $x = a$ الصيغة $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$. إذا كان $f(x) = x^2 + 1$ و $a = 1$.

أوضح أن قسمة الفرق التماثلي بصيغة ميل مستقيمٍ قاطعٍ عند $h = 1$ و $h = 0.5$. بناءً على صورتك، خمّن نهاية ناتج قسمة الفرق التماثلي مع اقتراب h من 0. ثم احسب النهاية وقارن بالمشتقة $f'(1)$ التي تم إيجادها في المثال 1.1. من أجل $h = 1$، $h = 0.5$ و $h = 0.1$. قارن القيم $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ الفعلية لناتج قسمة الفرق التماثلي وناتج قسمة الفرق العادي. على وجه العموم، أي ناتجين لقسمة الفرق يوفّر تقديرًا أفضل للمشتقة؟ بعد ذلك، قارن قيم ناتجي قسمة الفرق عند $h = 0.5$ و $h = -0.5$ بالمشتقة $f'(1)$. فسّر بالتمثيل البياني السبب في أن أحدهما أصغر والآخر أكبر. وقارن متوسط ناتجي قسمة الفرق هذين بناتج قسمة الفرق التماثلي عند $h = 0.5$. استخدم هذه النتيجة لشرح السبب في أن ناتج قسمة الفرق التماثلي قد يوفر تقديرًا أفضل للمشتقة. بعد ذلك، احسب النهاية من نواتج قسمة الفرق التماثلي لـ $f(x) = \begin{cases} 4 & ، x < 2 \\ 2x & ، x \geq 2 \end{cases}$ التي مركزها $a = 2$. تذكّر أننا أوضحنا في المثال 2.7 أن المشتقة $f'(2)$ غير موجودة. وعند هذه المعطيات، ناقش إحدى المشكلات الرئيسة عند استخدام ناتج قسمة الفرق التماثلي للتقدير التقريبي للمشتقات. وأخيرًا، أوضح أنه إذا كانت $f'(a)$ موجودة، إذًا $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$

الدرس 3-3 حساب المشتقات: قاعدة القوة

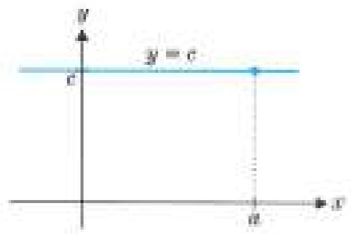
لقد حسبت الآن العديد من المشتقات باستخدام تعريف النهاية. وفي الحقيقة، قد تكون أجريت ما يكفي من الحسابات لتبدأ باستخدام بعض الطرق المختصرة. وستكمل على هذا المنوال في هذا الدرس عبر تطوير بعض القواعد الأساسية.

قاعدة القوة

راجع أولاً تعريف النهاية للمشتقة لحساب مشتقتين بسيطتين جداً.

عند أي ثابت c	$\frac{d}{dx}c = 0$	(3.1)

لاحظ أن (3.1) تنص على أنه عند أي ثابت c ، فإن للمستقيم الأفقي مماس ميله صفر، أي أن المماس لمستقيم أفقي هو المستقيم الأفقي نفسه. انظر الشكل 3.20.



الشكل 3.20
مستقيم أفقي

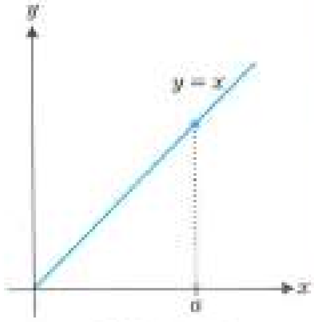
لإثبات المعادلة (5.1)، ليكن $f(x) = c$ ، لجميع قيم x ، من تعريف النهاية، لدينا

$$\frac{d}{dx}c = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

وبصورة مشابهة، لدينا

$\frac{d}{dx}x = 1$	(3.2)

لاحظ أن (5.2) تنص على أن المماس على $y = x$ هو مستقيم ميله واحد أي $y = x$ ، انظر الشكل 3.21، وهذا ليس بالأمر المفاجئ.



الشكل 3.21
المماس مع $y = x$

لإثبات المعادلة (3.2)، نجعل $f(x) = x$. من تعريف النهاية، لدينا

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}1 = 1\end{aligned}$$

يقدم الجدول المبيّن في الهامش قائمة موجزة لمشتقات حُسبت مسبقًا إما بمثابة أمثلة أو في التمارين باستخدام تعريف النهاية لاحظ أن قوّة x في المشتقة أصغر بواحد دائمًا من قوة x في الدالّة الأساسية. وعلاوة على ذلك، فإن معامل x في المشتقة هو نفسه قوة x في الدالّة الأساسية. وهذا يقترح النتيجة التالية.

النظرية 3.1 (قاعدة القوة)
لأي عدد صحيح $n > 0$ ، $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

البرهان

من تعريف النهاية المعطى في المعادلة (3.2). إذا كان $f(x) = x^n$ ، فإن

$$\frac{d}{dx}x^n = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad (3.3)$$

لتقدير النهاية، سوف نحتاج إلى تحويل التعبير الموجود في البسط إلى أبسط صورة. تذكر أن $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ و $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. وبصورة أكثر عمومية، عليك أن تتذكر من خلال نظرية ذات الحدين أنه لأي عدد صحيح موجب n

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \qquad (3.4)$$

بتعويض (3.4) في (3.3)، نحصل على

اختصر العامل x^n

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

حلل الى العوامل h واختصر

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

بما أن كل حد ما عدا الأول له معامل يساوي h ■

من السهل جدا تطبيق قاعدة القوة، كما نرى في المثال 3.1

مثال 3.1 **باستخدام قاعدة القوة**

أوجد مشتقة (a) $f(x) = x^8$ و (b) $g(t) = t^{107}$.

الحل (a) لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^8 = 8x^{8-1} = 8x^7$$

(b) وبصورة مشابهة

$$g'(t) = \frac{d}{dt}t^{107} = 107t^{107-1} = 107t^{106} \quad ■$$

تذكر أننا أوضحنا في الدرس 3.2 أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.5}$$

لاحظ أننا نستطيع إعادة كتابة (3.5) بالصيغة

$$\frac{d}{dx}x^{-1} = (-1)x^{-2}$$

أي أن مشتقة x^{-1} تتبع النمط نفسه في قاعدة القوة التي أشرنا إليها للتو وأثبتناها للأسس الصحيحة الموجبة.

وبصورة مماثلة، استخدمنا في الدرس 3.2 تعريف المشتقة لنبين أن

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{3.6}$$

نستطيع أن نعيد كتابة (3.6) أيضا بالصيغة $\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

بحيث تتبع مشتقة هذه القوة النسبية لـ x النمط نفسه أيضا في قاعدة القوة التي أثبتناها من أجل الأسس الصحيحة الموجبة.

ملحوظة 3.1

كما سوف نرى، فإن قاعدة القوة تنطبق على أي قوة لـ x لن نستطيع إثبات هذه الحقيقة لبعض الوقت الآن، وذلك نظرا إلى أن إثبات القاعدة 3.1 لا يمكن تعميمه لكون التوسع في المعادلة (3.4) لا ينطبق سوى على الأسس الصحيحة الموجبة. ومع ذلك، فسوف نستخدم القاعدة بطلاقة عند أي قوة لـ x. نذكر هذا في النظرية 3.2

النظرية 3.2 **(القاعدة العامة للقوى)**

عند أي عدد حقيقي $r \neq 0$،

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \tag{3.7}$$

إن قاعدة القوة سهلة الاستخدام، كما نرى في المثال 3.2.

مثال 3.2 استخدام القاعدة العامة للقوة

أوجد مشتقة (a) $f(x)=\dfrac{1}{x^{19}}$ ، (b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ و (c) $h(x)=x^{\pi}$

الحل (a) من (3.7) لدينا

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{19}}\right)=\frac{d}{dx}x^{-19}=-19x^{-19-1}=-19x^{-20}$$ ،

(b) إذا كتبنا $\sqrt[3]{x^2}$ بصيغة قوة كسرية لـ x فيمكننا استخدام (3.7) لحساب المشتقة، وذلك على النحو التالي:

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2}=\frac{d}{dx}x^{2/3}=\frac{2}{3}x^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}$$ ،

(c) وأخيرا لدينا

$$h'(x)=\frac{d}{dx}x^{\pi}=\pi x^{\pi-1}$$. ■

لاحظ أن هناك مشكلة معرفية أخرى في المثال 3.2 وتتمثل في تقرير ما الذي يعنيه x^{π} . بما أن الأس ليس كسري، فما الذي نقصده بالضبط عند رفع عدد إلى القوة غير النسبية π ؟

انتبه

تأكد هنا من انك لن تقع في الخطأ المشترك:

$$\frac{d}{dx}x^{-19}\neq-19x^{-18}$$

تخبرك قاعدة القوة أنه يجب طرح العدد 1 من الأس إذا كان موجبا أو سالبا

القواعد العامة للمشتقات

تمنحنا قاعدة القوة فئة كبيرة من الدوال التي يمكننا حساب مشتقاتها بسرعة وبدون استخدام تعريف النهاية وتمنحنا القواعد التالية لجمع المشتقات وطرحها بصورة إضافية عدد المشتقات التي يمكننا حسابها بدون اللجوء إلى التعريف. خذ في الحسبان دائما أن المشتقة هي نهاية؛ فقواعد التفاضل الواردة في النظرية 3.3 تتبع مباشرة القواعد المقابلة الخاصة بالنهايات.

النظرية 3.3

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق عند x وكان c أي ثابت، فإن

(i) $\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$ ،

(ii) $\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=f'(x)-g'(x)$ ،

(iii) $\dfrac{d}{dx}[cf(x)]=cf'(x)$ ،

البرهان

نبرهن فقط الجزء (i) من السؤال، حيث نترك برهان (ii) و (iii) بمثابة تمرينين. افترض أن $k(x)=f(x)+g(x)$

وبالتالي من تعريف نهاية المشتقة (2.3)، نحصل على

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=k'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$ تعريف $k(x)$

$$=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$$ تجميع حدود f وتجميع حدود g

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ النظرية 3.1

$$=f'(x)+g'(x)$$ أعد تجميع المشتقات للدالتين f و g ■

توضح النظرية 3.3 عبر السير في حساب المشتقة خطوةً خطوة، مع عرض جميع التفاصيل.

مثال 3.3 إيجاد مشتقة مجموع

أوجد مشتقة $f(x) = 2x^6 + 3\sqrt{x}$.

الحل لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^6) + \frac{d}{dx}\left(3\sqrt{x}\right) \quad \text{النظرية 3.3 (i)}$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x^6) + 3\frac{d}{dx}(x^{1/2}) \quad \text{النظرية 3.3 (iii)}$$

$$= 2(6x^5) + 3\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \quad \text{قاعدة القوة}$$

$$= 12x^5 + \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad \text{بسّط}$$

مثال 3.4 إعادة كتابة دالّةٍ قبل حساب المشتقة

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$.

الحل نظرًا إلى أننا لا نملك أي قاعدةٍ لحساب مشتقة ناتج قسمة، فسوف نقوم أولًا بإعادة كتابة $f(x)$ عبر التخلص من x في المقام. لدينا

$$f(x) = \frac{4x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = 4x - 3 + 2x^{-1/2}$$

من النظرية 3.3 وقاعدة القوة (3.7)، نحصل على

$$f'(x) = 4\frac{d}{dx}(x) - 3\frac{d}{dx}(1) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = 4 - 0 + 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = 4 - x^{-3/2}$$

مثال 3.5 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس على التمثيل البياني عند $x = 1$ على منحنى $f(x) = 4 - 4x + \dfrac{2}{x}$.

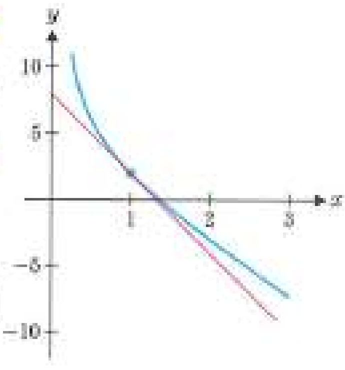
الحل لاحظ أولًا أنّ $f(x) = 4 - 4x + 2x^{-1}$. من النظرية 3.3 وقاعدة القوة، لدينا

$$f'(x) = 0 - 4 - 2x^{-2} = -4 - 2x^{-2}$$

عند $x = 1$ يساوي ميل المماس إذًا $f'(1) = -4 - 2 = -6$. إنّ المستقيم الذي ميله -6 والمار بالنقطة $(1,2)$ المعادلة التالية

$$y - 2 = -6(x - 1)$$

نبيّن تمثيلًا بيانيًا لـ $y = f(x)$ والمماس عند $x = 1$ في الشكل 3.22.



الشكل 3.22
$y = f(x)$ والمماس عند $x = 1$

المشتقات ذات الرتب العليا

من ثمرات وجود دالّة مشتقة هو أننا نستطيع حساب المشتقة من مشتقة أخرى. ومن الواضح أن مثل هذه المشتقات ذات الرتب العليا لها تطبيقاتٌ هامّة.

على فرض أننا قد بدأنا بدالّة f وحسبنا مشتقتها f'. إذًا يمكننا حساب مشتقة f' والتي ندعى المشتقة من الرتبة الثانية لـ f ونكتب على أنها f''. يمكننا حينها حساب مشتقة f'' والتي ندعى المشتقة من الرتبة الثالثة لـ f، ونكتب على النحو f'''. يمكننا الاستمرار في أخذ المشتقات إلى ما لا نهاية. وبعد ذلك، سنبيّن الرموز الشائعة للمشتقات الخمس الأولى لـ f [حيث نفترض أن $y = f(x)$]. لاحظ أننا نستخدم الشَّرط للإشارة إلى المشتقات الثلاث الأولى.

وبالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة أو أكثر، فإننا نكتب رتبة المشتقة بين قوسين. انتبه ألا تخلط بين هذا الرمز وبين الأسس.

الرتبة	المشتقة	تفاضل لايبنتز
1	$y' = f'(x)$	$\frac{df}{dx}$
2	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2f}{dx^2}$
3	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3f}{dx^3}$
4	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4f}{dx^4}$
5	$y^{(5)} = f^{(5)}(x)$	$\frac{d^5f}{dx^5}$

يتم حساب المشتقات ذات الرتب العليا ببساطة عبر حساب عدة مشتقات أولى، كما نرى في المثال 3.6

مثال 3.6 حساب المشتقات ذات الرتب العليا

إذا كانت لديك الدالة $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$.

الحل

لدينا

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + 1) = 12x^3 - 4x$$

إذًا

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(12x^3 - 4x) = 36x^2 - 4$$

$$f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}(36x^2 - 4) = 72x,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4f}{dx^4} = \frac{d}{dx}(72x) = 72,$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5f}{dx^5} = \frac{d}{dx}(72) = 0$$

وهكذا، يتبع من ذلك أن

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n} = 0, \text{ for } n \geq 5$$

التسارع

ما المعلومات التي تقدمها لنا المشتقة من الرتبة الثانية؟ بيانيًا، نحصل على خاصية تدعى التقعر والتي نوضحها بالتفصيل في الوحدة 3. من التطبيقات الهامة للمشتقة من الرتبة الثانية التسارع، والتي سوف نناقشها بإيجاز الآن.

لعلك تملك فكرة عن مصطلح **التسارع**، وهو **المعدّل اللحظي لتغير السرعة**. وبالنتيجة، إذا كانت سرعة جسم عند الزمن تعطى من خلال العلاقة ، فإن التسارع يساوي

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

مثال 3.7 حساب تسارع لاعب القفز الحر

على فرض أن ارتفاع لاعب قفز حر بعد t ثانية من القفز من الطائرة يعطى من خلال العلاقة $f(t) = 640 - 20t - 16t^2$ قدم. أوجد تسارع ذلك الشخص عند الزمن t.

الحل بما أن التسارع هو مشتقة السرعة، فإننا نحسب السرعة المتجهة أولًا:

$$v(t) = f'(t) = 0 - 20 - 32t = -20 - 32t \text{ ft/s}$$

يعطينا حساب مشتقة هذه الدالّة

$$a(t) = v'(t) = -32 \text{ ft/s}^2$$

بما أن المسافة تقاس بالأقدام والزمن يقاس بالثواني، فإن وحدة السرعة المتجهة هي قدم في الثانية، وبالتالي فإن وحدة التسارع هي قدم في الثانية في الثانية، وتكتب بالصيغة ft/s/s وبصورة أكثر شيوعًا تكتب على أنها ft/s^2 (قدم في مربع الثانية)، وهذا يشير إلى أن السرعة المتجهة تتغير بمقدار -32 ft/s كل ثانية وأن السرعة نحو الأسفل (بالاتجاه السالب) تزداد بمقدار 32 ft/s كل ثانية بسبب الجاذبية الأرضية. ■

ما وراء القوانين

إن قاعدة القوة تختصر علينا الكثير خلال حساب الكثير من المشتقات، حيث يسعى علماء الرياضيات دائمًا إلى تسريع العمليات الحسابية وزيادة كفاءتها بالصورة القصوى، فمن خلال تجاوز الخطوات الطويلة وغير الضرورية وتوفير الجهد على أذهانهم، يفرغ علماء الرياضيات أنفسهم لمعالجة المسائل المعقدة بطرق إبداعية. ولكن من المهم أن تتذكر أنه ينبغي البرهان على الطرق المختصرة – كقاعدة القوة– بعناية.

التمارين 3-3

تمارين كتابية

1. اشرح لصديق ليس على معرفة بأمور التفاضل والتكامل طريقة استخدام قاعدة القوة (رياضيًا). قرِّر إن كان من الأفضل تقديم تفسيرات منفصلة حول الأسس الموجبة والسالبة، والأسس الصحيحة وغير الصحيحة، وغيرها من الحالات الخاصة.

2. خلال القرن الثامن عشر، كانت "البراهين" غامضة وفق المعايير الحديثة، ناهيك عن أنها كانت تفتقد إلى الدقة. وفي عام 1734، كتب الأسقف بيركلي المختص في علوم ما وراء الطبيعة مقالة أطلق عليها اسم المحلل وخاطب فيها "عالم رياضيات كافر" (يعتقد أنه إدموند هالي الذي ينسب إليه اسم مذنّب هالي ذائع الصيت). يمكن وصف البرهان المتفق عليه عمومًا لقاعدة القوة من خلال العلاقة:

إذا زيدت x إلى $x+h$، فإن x^n تزداد إلى $(x+h)^n$. وينتج ذلك أن $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = nx^{n-1} + \dfrac{n^2-n}{2}hx^{n-2} + \cdots$. الآن، لنختزل الزيادة h وبالتالي تصبح المشتقة تساوي nx^{n-1}".

اعترض بيركلي على هذا البرهان قائلًا:

"بيد أنه يبدو أن الاستنتاج يفتقد إلى الصحة والشمولية. ذلك أننا إذا اختزلنا الزيادات، فسنهدم بذلك الفرضية السابقة القائلة بأن الزيادة كانت كيانًا موجودًا، أو الفرضية القائلة بأن هناك زيادات في الأصل. حيث يعتمد هذا البرهان على افتراض خاطئ في إعطائه هذه النتيجة وهذه الطريقة في الاستنتاج...طريقة خاطئة. وبلا ريب، حين نفترض اختزال الزيادات، فحري بنا أن نفترض أنه يجب اختزال كل ما ينبع من هذه الفرضية ضمن هذا التبرير".

فهل تعتقد أن اعتراض بيركلي سليم؟ وهل من المقبول من الناحية المنطقية افتراض وجود شيء ما من أجل استنتاج خلاصة، ومن ثم افتراض أن الشيء نفسه غير موجود من أجل تجنب الاضطرار إلى قبول نتائج أخرى؟ ومن الناحية الرياضية، كيف تجملنا النهاية لا نقع في جدلية اعتراض بيركلي على الزيادة h سواء من حيث وجودها أو عدم وجودها؟

3. إن الشرد التاريخي الوارد في التمرين 2 ليس إلا جزءًا من خلاف مستمر بين أشخاص يستخدمون التقنيات في الرياضيات على نحو أعمى بدون إثباتها وبين أولئك الذين يصرّون على البرهان الكامل لها قبل إتاحتها للاستخدام من قبل أي شخص. فإلى أي الفريقين تميل أنت؟ حدّد موقفك بكتابة مقالة عن ذلك، وحاول خلال ذلك استباق ما قد يورده الطرف الآخر من براهين مع تفنيدها.

4. في الحين الذي توجد فيه بين يديك طريقة "سهلة" لحساب مشتقة $f(x) = x^4$، فقد تتساءل عن السبب في رغبتنا بأن تتعلّم الطريقة "الصعبة" لتقديم إجابة عن ذلك، ناقش الطريقة التي يجب أن تتبعها لتجد مشتقة دالّة لم تتعلّم الطريقة المختصرة لاشتقاقها من قبل.

في التمارين 1–14، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$
2. $f(x) = x^9 - 3x^5 + 4x^2 - 4x$
3. $f(t) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$
4. $f(s) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$
5. $f(w) = \dfrac{3}{w} - 8w + 1$
6. $f(y) = \dfrac{2}{y^4} - y^3 + 2$
7. $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$
8. $h(x) = 12x - x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x^2}}$
9. $f(s) = 2s^{3/2} - 3s^{-1/3}$
10. $f(t) = 3t^{\pi} - 2t^{1.3}$
11. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$
12. $f(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
13. $f(x) = x\left(3x^2 - \sqrt{x}\right)$
14. $f(x) = (x+1)(3x^2 - 4)$

في التمارين 15–20، احسب المشتقّة المطلوبة.

15. $f''(t)$ لـ $f(t) = t^4 + 3t^2 - 2$
16. $f'''(t)$ لـ $f(t) = 4t^2 - 12 + \dfrac{4}{t^2}$
17. $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ لـ $f(x) = 2x^4 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
18. $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ لـ $f(x) = x^6 - \sqrt{x}$
19. $f^{(4)}(x)$ لـ $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2/\sqrt{x}$
20. $f^{(5)}(x)$ لـ $f(x) = x^{10} - 3x^4 + 2x - 1$

في التمارين 21–24، استخدم دالّة الموقع المعطاة لإيجاد دالتي السرعة المتجهة والتسارع.

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

24. $s(t) = 10 - \frac{10}{t}$

في التمرينين 25 و 26، تمثل الدالّة المعطاة ارتفاع جسم ما. احسب السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن $t = t_0$. هل يتحرّك الجسم إلى الأعلى أو الأسفل؟

25. $h(t) = -16t^2 + 40t + 5$, (a) $t_0 = 1$ (b) $t_0 = 2$

26. $h(t) = 10t^2 - 24t$, (a) $t_0 = 2$ (b) $t_0 = 1$

في التمارين 27–30، أوجد معادلةَ المماس عند $x = a$ على منحنى $y = f(x)$.

27. $f(x) = x^2 - 2, a = 2$

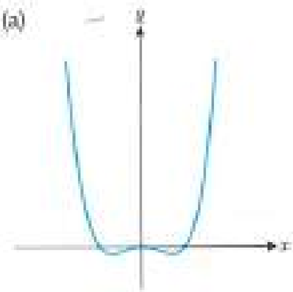
28. $f(x) = x^2 - 2x + 1, a = 2$

29. $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x, a = 4$

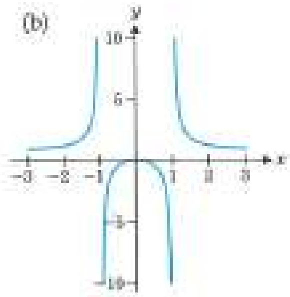
30. $f(x) = 3\sqrt{x} + 4, a = 2$

في التمرينين 31 و 32، استخدم التمثيل البياني لـ f لكي ترسم تمثيلًا بيانيًا لـ f'. (إرشاد: ارسم التمثيل البياني لـ f' أولًا.)

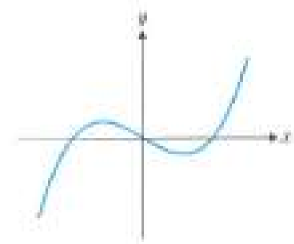
31. (a)



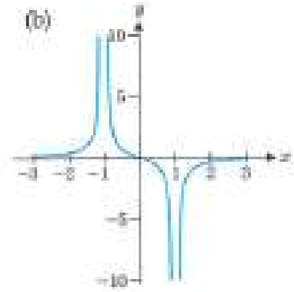
(b)



32. (a)



(b)



في التمرينين 33 و 34، (a) حدّد قيمة (قيم) x التي يكون عندها المماس على منحنى $y = f(x)$ أفقيًا. (b) مثّل الدالة بيانيًا لكل من تلك النقاط. وحدّد الدلالة البيانية لكل من تلك النقاط. (c) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها يقطع المماس على منحنى $y = f(x)$ المحور x عند زاوية قياسها 45°

33. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 - 4x + 2$

في التمرينين 35 و 36، (a) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على منحنى $y = f(x)$. (b) مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد الدّلالة البيانية لكلّ نقطةٍ من تلك النّقاط.

35. (a) $f(x) = x^{2/3}$ (b) $f(x) = |x - 5|$
(c) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

36. (a) $f(x) = x^{1/3}$ (b) $f(x) = |x + 2|$
(c) $f(x) = |x^2 + 5x + 4|$

37. أوجد جميع قيم x والتي يشكّل عندها المماس على منحنى $y = x^3 - 3x + 1$ (a) زاوية قياسها 45° مع المحور x؛ (b) زاوية قياسها 30° مع المحور x. على فرض أن الزاويتين تقاسان باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

38. أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = x^2 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^2 + 3$ (a) متوازيين.

39. أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (بالصيغة $ax^2 + bx + c$) بحيث يكون (a) $f(0) = -2, f'(0) = 2$ و $f''(0) = 3$.
(b) $f(0) = 0, f'(0) =$ و $f''(0) = 1$.

40. أوجد صيغة عامة لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ لـ
(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

41. أوجد مساحة المثلث الذي يحدّه $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 1$. كرّر الأمر نفسه بالنسبة لمثلث يحدّه $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 2$. وضّح أنك تحصل على المساحة نفسها باستخدام المماس على $y = \frac{1}{x}$ عند أيّ قيمة $x = a > 0$.

42. وضّح أن نتيجة التمرين 41 لا تنطبق على $y = \frac{1}{x^2}$. أي أن مساحة المثلث المحدود بـ $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x = a > 0$ لا تعتمد على قيمة a.

43. على فرض أن a عدد حقيقي، وأن f قابلة للاشتقاق لكل قيم $x \geq a$ وأن $g(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$ لكل قيم $x \geq a$. أوجد $g'(x)$ في الحالتين (a) $f'(x) > 0$ و (b) $f'(x) < 0$.

44. على فرض أن a عدد حقيقي، وأن f قابلة للاشتقاق لكل قيم $x \geq a$ وأن $g(x) = \min_{a \leq t \leq x} f(t)$ لكل قيم $x \geq a$. أوجد $g'(x)$ في الحالتين (a) $f'(x) > 0$ و (b) $f'(x) < 0$.

في التمارين 45–48، أوجد دالة مُشتقتها معطاة.

45. $f'(x) = 4x^3$

46. $f'(x) = 5x^4$

47. $f'(x) = \sqrt{x}$

48. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

49. بالنسبة لجميع الحيوانات التي تعيش على اليابسة، تتبع العلاقة من أجل عرض الساق w وطول الجسم b معادلة من الصيغة $w = cb^{3/2}$ لأي ثابت ما $c > 0$. أوضح أنه إذا كانت قيمة b كبيرة بما فيه الكفاية، فإن $w'(b) > 1$. استنتج أنه بالنسبة للحيوانات الكبيرة، يزداد عرض الساق (اللازم لحمل جسم الحيوان) بوتيرة أسرع من طول الجسم. لماذا يفرض ذلك حدًا على حجم جسم الحيوانات التي تعيش على اليابسة؟

50. على فرض أن الدالّة $v(d)$ تمثّل متوسط السرعة بوحدة قياسها m/s للرقم القياسي الخاص بزمن الجري لمسافة d مترًا. فعلى سبيل المثال، إذا كان الزمن الأسرع على الإطلاق لقطع مسافة 200m يساوي 19.32 s، فإن $v(200) = 200/19.32 \approx 10.35$. اشرح ما الذي تمثّله المشتقة $v'(d)$.

51. لتكن الدالّة $f(t)$ تساوي الناتج الإجمالي المحلي (GDP) مقدرًا بمليار دولار في الولايات المتحدة الأمريكية خلال عام t . ويقدّم الجدول التالي العديد من القيم. قدّر وفسّر $f'(2000)$ و $f''(2000)$. [إرشاد: لتقدير المشتقة من الرتبة الثانية، قدّر $f'(1998)$ و $f'(1999)$ وابحث عن اتجاه تتبعه النتائج.]

t	1996	1997	1998	1999	2000	2001
$f(t)$	7664.8	8004.5	8347.3	8690.7	9016.8	9039.5

52. لتكن $f(t)$ الدالّة التي تعطي الوزن المتوسط للسيارات الخفيفة المنتجة محليًا خلال عام t . يعطي الجدول أدناه عدّة قيم لهذا الوزن. قدّر وفسّر $f'(2000)$ و $f''(2000)$.

t	1985	1990	1995	2000
$f(t)$	4055	4189	4353	4619

53. إذا كان الموقع x لجسم عند الزمن t يعطى من خلال $f(t)$ ، حيث $f'(t)$ تمثّل السرعة المتجهة و $f''(t)$ تعطي التسارع. وفقًا لقانون نيوتن الثاني، فإن التسارع يتناسب مع محصّلة القوة المؤثرة على الجسم (والتي تسبب تسارعه). فسّر المشتقة من الرتبة الثانية $f'''(t)$ بدلالة القوة. يطلق مصطلح مشتقة التسارع في بعض الأحيان على $f'''(t)$. اشرح السبب في أن هذا المصطلح ملائم.

54. يصرّح أحد مسؤولي القطاع العام قائلًا: "لقد حققنا انخفاضًا في معدّل زيادة الدّين القومي." فإذا كانت $d(t)$ تمثّل الدّين القومي عند الزمن t مقدرًا بالأعوام. فما هو مشتق $d(t)$ الذي يتم تخفيضه؟ وما الذي يمكنك استنتاجه عن حجم $d(t)$ بحد ذاته؟

تمارين استكشافية

1. تطوف طائرةٌ عند ارتفاع ميلين وعلى مسافة 10 أميال من أحد المطارات، يقع المطار عن النقطة (0, 0) وتبدأ الطائرة بالهبوط عند النقطة (10, 2) إلى أن تصل إلى المطار. صمم تمثيلًا بيانيًا لمسار طيران معقول $y = f(x)$ ، بحيث تمثّل y الارتفاع وتغطي x المسافة الأرضية عن المطار. (فكّر بذلك أثناء الرسم) اشرح ما الذي تمثّله المشتقة $f'(x)$. (إرشاد: إنها ليست السرعة المتجهة.) اشرح السبب في أهمية و/أو ضرورة كون $f'(0) = 0$ ، $f(0) = 0, f(10) = 2$ و $f'(10) = 0$. إن كثيرة الحدود الأبسط التي تحقق هذه الشروط هي كثيرة حدودٍ تكعيبية $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. أوجد قيم الثوابت a, b, c و d لملائمة مسار الطائرة. [إرشاد: ابدأ بوضع $f(0) = 0$ ومن ثم ضع $f'(0) = 0$. قد تحتاج إلى استخدام الحاسوب لحل المعادلة.] مثّل الدالّة الناتجة بيانيًا، فهل تبدو صحيحة؟ على فرض أن قوانين خطوط الطيران تحظر أن تساوي المشتقة $\frac{2}{10}$ أو قيمة أكبر من ذلك، فما المغزى من هذا القانون؟ وضّح أن مسار الطائرة الذي توصّلت إليه غير قانوني. برهن أن جميع مسارات الطيران التي تحقق الشروط الأربعة ليست قانونيةً في حقيقة الأمر. ولذلك، يتعيّن أن يبدأ الهبوط عند مسافة أبعد من 10 أميال من المطار. أوجد مسار الطائرة عند بدء الهبوط على بعد 20 ميلًا مع تحقيق كافة الشروط.

2. في كتاب التسلية الذي عنوانه Surely You're Joking Mr. Feynman، يروي الفيزيائي ريتشارد فينمان تحدٍّ انخرط فيه ضد التكنولوجيا التي كانت رائجةً في عصره (وهي المعداد)، حيث يقوم التحدي على حساب الجذر التكعيبي للعدد 1729.03 واستطاع فينمان أن يأتي بالإجابة 12.002 قبل خبير المعداد الذي استسلم في نهاية المطاف، اعترف فينمان بأن الحظّ قد تدخّل في اختيار العدد 1729.03، فقد كان يعلم أن القدم المكعبة تحتوي على $1728 in^3$ اشرح السبب الذي استدلّ به فينمان من خلال ذلك على أنّ الإجابة أكبر بقليلٍ من 12. وكيف توصّل إلى دقةٍ مقدارها ثلاثة أرقام؟ "لقد تعلّمتُ خلال حساب التفاضل والتكامل أنه بالنسبة للكسور الصغيرة، تساوي الزيادة عن الجذر التكعيبيّ ثلث الزيادة عن العدد الأصلي. فالزيادة 1.03 تشكّل جزءًا واحدًا فقط من 2000 جزءٍ تقريبًا، وبالتالي فإن كلّ ما كان عليّ فعله هو إيجاد الكسر 1/1728، مقسومًا على 3 ومضروبًا بـ 12." ولكي ترى ما فعل، أوجد معادلة المماس على $y = x^{1/3}$ عند $x = 1728$ وأوجد الإحداثي y للمماس عند $x = 1729.03$

الدرس 3-4

قواعد الضرب والقسمة

لقد شرحنا إلى الآن قواعد لحساب مشتقات مجموعة من الدوال، بما فيها الصيغ العامة لمشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما. وفي ضوء ذلك، قد تتساءل ما إن كانت مشتقة ناتج ضرب دالتين تساوي ناتج ضرب مشتقتيهما. سنختبر هذا التخمين بإيراد مثال بسيط.

قاعدة الضرب

ليكن $\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)]$. بدمج الحدّين نحصل على

$$\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] = \frac{d}{dx}x^7 = 7x^6$$

ولكن،

$$\left(\frac{d}{dx}x^2\right)\left(\frac{d}{dx}x^5\right) = (2x)(5x^4)$$

$$= 10x^5 \neq 7x^6 = \frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] \qquad (4.1)$$

يمكنك أن ترى بوضوح الآن من خلال (4.1) أن مشتقة ضرب لا تساوي بصورة عامة ناتج ضرب المشتقات الجزئية. تعطي النظرية 4.1 القاعدة الصحيحة.

النظرية 4.1 (قاعدة الضرب)

افترض أن f و g قابلتان للاشتقاق. إذًا

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (4.2)$$

البرهان

في إطار رغبتنا ببرهان قاعدة عامة، فلا سبيل لنا سوى إلى استخدام تعريف نهاية المشتقة. من أجل $p(x) = f(x)g(x)$

لدينا ،

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \qquad (4.3)$$

لاحظ أن عناصر مشتقتي f و g موجودة، ولكننا بحاجة إلى وضعها بالصيغة الصحيحة. بجمع وطرح $f(x)g(x+h)$ في البسط، يكون لدينا

$$p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

اقسم لجزئين

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}g(x+h)\right] + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ تعريف مشتقة الدالة f و مشتقة الدالة g

ثمة جزئية تقنية دقيقة في الخطوة الأخيرة، فبما أن g قابلة للاشتقاق عند x، تذكّر أنها يجب أيضًا أن تكون متصلة عند x، بحيث يكون $g(x+h) \to g(x)$ عندما $h \to 0$. ■

في المثال 4.1، لاحظ أن قاعدة الضرب تجنبنا القيام بضرب اعتباطي.

مثال 4.1 باستخدام قاعدة الضرب

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (2x^4 - 3x + 5)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$.

الحل على الرغم من أننا يمكن أن نبدأ بضرب التعبير، فإن قاعدة الضرب من شأنها أن تبسط عملنا.

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(2x^4 - 3x + 5)\right]\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\frac{d}{dx}\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$$

$$= (8x^3 - 3)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}\right)$$

مثال 4.2 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس على

$$y = (x^4 - 3x^2 + 2x)(x^3 - 2x + 3)$$

عند $x = 0$

الحل من قاعدة الضرب، لدينا

$$y' = (4x^3 - 6x + 2)(x^3 - 2x + 3) + (x^4 - 3x^2 + 2x)(3x^2 - 2)$$

بإيجاد القيمة عند $x = 0$ يكون لدينا $y'(0) = (2)(3) + (0)(-2) = 6$. للمستقيم الذي ميله 6 والمار بالنقطة $(0, 0)$ [لماذا $(0, 0)$؟] المعادلة $y = 6x$.

قاعدة القسمة

في ضوء معرفتنا بقاعدة الضرب، فقد لا تتوقع أن مشتقة قسمة تساوي قسمة المشتقّتين. ولنتحقّق من الأمر، لنجر تجربة بسيطة. لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$$

في حين أن

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^5)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{5x^4}{2x^1} = \frac{5}{2}x^3 \neq 3x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right)$$

وبما أنه من الواضح أن هاتين الإجابتين ليستا متماثلتين، فذلك يدلّنا على أن مشتقة قسمة لا تساوي بصورة عامة ناتج قسمة المشتقتين. تعطي النظرية 4.2 القاعدة الصحيحة. (4.2)

النظرية 4-2 (قاعدة القسمة)

افترض أن f و g قابلتان للاشتقاق إذًا

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (4.4)$$

بشرط أنّ $g(x) \neq 0$

البرهان

بالنسبة لـ $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ لدينا من تعريف نهاية المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = Q'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h}$$ اجمع الكسور

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$ بسّط

وكما في برهان قاعدة الضرب، نبحث عن الحدّ الصحيح للجمع والطرح ضمن البسط، بحيث نستطيع عزل تعريفي النهاية لـ $f'(x)$ و $g'(x)$، بجمع $f(x)g(x)$ وطرحها، نحصل على

$$Q'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$ جمع الحدّين الأولين والحدّين الآخرين ووضع العامل المشترك بينهما

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x) - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$ حدد مشتقة الدالة لكلٍّ من f و g

حيث استفدنا من الحقيقة القائلة أن g قابلة للإشتقاق لتوضيح أن g متصلة، بحيث يكون $g(x+h) \to g(x)$ عندما $h \to 0$ ■

لاحظ أن البسط في قاعدة القسمة يبدو مشابهًا جدًا لما ورد في قاعدة الضرب، ولكن بوجود إشارة ناقص بين الحدّين. ولهذا السبب، عليك التعامل بحذرٍ شديدٍ مع الترتيب.

مثال 4.3 استخدام قاعدة القسمة

احسب مشتقة $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+1}$.

الحل باستخدام قاعدة القسمة، لدينا

$$f'(x) = \frac{\left[\dfrac{d}{dx}(x^2-2)\right](x^3+1) - (x^2-2)\dfrac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - (x^2-2)(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-x^4+6x^2+2x}{(x^3+1)^2}$$

وفي هذه الحالة، أعدنا كتابة البسط لأن ذلك يبسّط لنا الأمر بصورة دقيقة. ونقوم بهذا الإجراء غالبًا في قاعدة القسمة. ■

بما أننا نملك الآن قاعدة القسمة، فيمكننا تعليل استخدام قاعدة القوة للأسس الصحيحة السالبة. (تذكّر أننا نستخدم هذه القاعدة بدون برهانٍ منذ أن تناولنا الدرس 3.3)

النظرية 4-3 (قاعدة القوة)

لأيّ $n \neq -1$ صحيح فإن

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

البرهان

لقد أثبتنا هذه النظرية سابقًا مع الأسس الصحيحة الموجبة. إذًا، على فرض أنّ $n < 0$ وأنّ $M = -n > 0$. وبالتالي، باستخدام قاعدة القسمة، نحصل على

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-M} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^M}\right) \qquad \text{بما إنّ } x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(1)\right]x^M - (1)\frac{d}{dx}(x^M)}{(x^M)^2} \qquad \text{باستخدام قاعدة القسمة}$$

$$= \frac{(0)x^M - (1)Mx^{M-1}}{x^{2M}} \qquad \text{باستخدام قاعدة القوة بما إنّ } M > 0$$

$$= \frac{-Mx^{M-1}}{x^{2M}} = -Mx^{M-1-2M} \qquad \text{باستخدام قواعد الأسس المعروفة}$$

$$= (-M)x^{-M-1} = nx^{n-1} \qquad \text{بما إنّ } -M = n \qquad \blacksquare$$

كما نرى في المثال 4.4، فمن المفضّل أحيانًا إعادة كتابة دالّةٍ بدلًا من استخدام قاعدة الضرب أو القسمة بصورة تلقائية.

مثال 4.4 حالة لا حاجة فيها لاستخدام قاعدتي الضرب والقسمة

احسب مشتقة $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$.

الحل على الرغم من أنّه قد يكون من المغري استخدام قاعدة الضرب للحد الأول وقاعدة القسمة للحد الثاني، فلاحظ أنه من الأبسط أن نعيد كتابة الدالّة أولًا. يمكننا جمع قوّتي x في الحد الأول، وبما أن الحد الثاني كسرٌ بسطه ثابت، فيمكننا كتابته بصورة أبسط باستخدام أسٍّ سالب. لدينا

$$f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} = x^{3/2} + 2x^{-2}$$

باستخدام قاعدة القوة، فيكون لدينا ببساطة

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} - 4x^{-3} \qquad \blacksquare$$

تطبيقات

ستصادف استخدامات هامة لقاعدتي الضرب والقسمة خلال دراساتك الرياضية والعلمية. وسنبدأ باثنين من التطبيقات البسيطة الآن.

مثال 4.5 استكشاف معدّل تغيّر الإيراد

افترض أنّ سعر مبيع أحد المنتجات في الوقت الحالي يساوي AED25، مع زيادة في السعر بمعدّل AED2 في العام. وعند السعر الحالي، يشتري المستهلكون 150 ألف قطعة. ولكنّ العدد المبيع يتناقص بمعدّل 8 آلاف قطعة في العام. فما معدّل تغيّر الإيراد الإجمالي؟ وهل يتزايد الإيراد الإجمالي أم يتناقص؟

الحل للإجابة عن هذين السؤالين، فإننا بحاجة إلى العلاقة الأساسية

الإيراد = الكمية × السعر

(على سبيل المثال، إذا بعت 10 قطع بسعر AED4 للقطعة الواحدة، فإنك تكسب AED40.) بما أن هاتين الكميتين تتغيران مع الزمن، فإننا نكتب $R(t) = Q(t)P(t)$، حيث $R(t)$ هو الإيراد، و $Q(t)$ هي الكمية

المبيعة و $P(t)$ هي السعر، وكلّها مقدّرة عند الزمن t. ليست لدينا صيغٌ لأيٍّ من هاتين الدالتين، ولكن من خلال قاعدة الضرب، يكون لدينا

$$R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$$

لدينا معلومات عن كلٍّ من الحدود التالية: السعر الابتدائي، $P(0)$، يساوي 25 (درهمًا)، ومعدّل تغيّر السعر يساوي $P'(0) = 2$ (درهمًا في العام) والكمية الابتدائية $Q(0)$، تساوي 150 (ألف قطعة) ومعدّل تغيّر الكمية تساوي $Q'(0) = -8$ (ألف قطعة في العام). لاحظ أن الإشارة السالبة لـ $Q'(0)$ ترمز إلى الانخفاض في Q. بالتالي،

$$R'(0) = (-8)(25) + (150)(2) = 100 \quad \text{ألف درهم في العام}$$

بما أن معدّل التغيّر موجب، فإن الإيراد يتزايد. ■

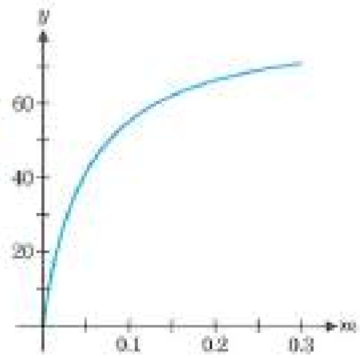
مثال 4.6 استخدام الاشتقاق لتحليل ضربة كرة الجولف

ضُربت كرة جولف كتلتها 0.05 kg بعصًا كتلتها m kg وسرعتها 50 m/s. فكانت سرعتها الابتدائية $u(m) = \frac{83m}{m + 0.05}$ m/s. برهن أنّ $u'(m) > 0$ وفسّر هذه النتيجة بدلالة المصطلحات المستخدمة في رياضة الجولف. قارن $u'(0.15)$ و $u'(0.20)$.

الحل من قاعدة القسمة، يكون لدينا

$$u'(m) = \frac{83(m + 0.05) - 83m}{(m + 0.05)^2} = \frac{4.15}{(m + 0.05)^2}$$

إنّ البسط والمقام موجبان، وبالتالي $u'(m) > 0$. يشير الميل الموجب لجميع المماسات إلى أن التمثيل البياني لـ $u(m)$ ينبغي أن يتزايد من الجهة اليسرى إلى الجهة اليمنى. (انظر الشكل 3.23) وبطريقة أخرى نقول، تزداد $u(m)$ بزيادة m. ويتضح ذلك باستخدام مصطلحات رياضة الجولف (عند تساوي كافة العوامل الأخرى)، أنه كلما ازدادت كتلة العصا، كلما ازدادت السرعة المتجهة للكرة. أخيرًا، نحسب $u'(0.15) = 103.75$ و $u'(0.20) = 66.4$. وهذا يشير إلى أن معدل الزيادة في سرعة الكرة يكون أقلّ بكثير للعصيّ الثقيلة منه للعصيّ الخفيفة. وبما أنّ عملية التحكّم بالعصيّ الثقيلة أكثر صعوبة، فقد لا يعوّض الانخفاض النسبي في معدّل زيادة سرعة الكرة، والناتج من زيادة وزن العصيّ الثقيلة أصلًا، عن تناقص القدرة على التحكّم. ■



الشكل 3.23
$u(m) = \frac{83m}{m + 0.05}$

التمارين 3.4

تمارين كتابية

1. تتيح قاعدتا الضرب والقسمة القدرة على حساب مشتقّات عدد كبير من الدوّال باستخدام الرموز. ولكن الكثير من الحاسبات وجميع أجهزة الحاسوب تقريبًا قادرةٌ على أداء هذا العمل نيابةً عنك. ناقش السبب في ضرورة تعلّم هذه القواعد الأساسية بكلّ الأحوال. (ضع المثال 4.5 بالحسبان.)

2. يعدّ غوتفريد فيلهلم لايبنتز (مع السّير إسحاق نيوتن) مخترع التفاضل والتكامل، وتُنسب الكثير من الطرق الأساسية والرموز المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل إلى لايبنتز. أعدّ لايبنتز قاعدة الضرب عام 1675، وذلك بالصيغة $d(xy) = (dx)y + x(dy)$، ويعطي "بالبرهان" الذي أعدّه في رسالة كتبها عام 1699 من خلال النّص التالي: إذا أردنا إيجاد تفاضل xy فإننا نكتب

$$(x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$$

ولكن $dx\,dy$ مرفوضةٌ هنا لأنّها أصغر بكثير من $x\,dy + y\,dx$ وبالتالي، في أي من الحالات الخاصة، يكون الخطأ أصغر من أي كمية محدودة. أجب عن رسالة لايبنتز برسالة تصف فيها "اكتشافك" الخاص بقاعدة الضرب لـ $d(xyz)$.

3. قد تكون لاحظت أن في المثال 4-1 لم نضرب حدود المشتقّة. فإن أردت حساب $C'(a)$ عند عدد ما a، ناقش إن كان من الأسهل تعويض $x = a$ أولًا ومن ثم تبسيط جميع الحدود أو ضربها ومن ثم تعويض $x = a$.

4. يفضّل الكثير من الطلاب قاعدة الضرب على قاعدة القسمة. تستخدم الكثير من أجهزة الحاسوب فعليًا قاعدة الضرب لحساب مشتقّة $f(x)[g(x)]^{-1}$ بدلًا من تطبيق قاعدة القسمة على $\frac{f(x)}{g(x)}$ (انظر التمرين 34 في الصفحة التالية.) إذا أعطيت تبسيطات المشتقّ الواردة في المثال 4.3، فسّر السّبب في أن قاعدة القسمة قد تكون مفضّلة.

في التمارين 1-16، أوجد مشتقّة كلّ دالّة.

1. $f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$

2. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$

3. $f(x) = (\sqrt{x} + 3x)\left(5x^2 - \frac{3}{x}\right)$

4. $f(x) = (x^{3/2} - 4x)\left(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2\right)$

5. $g(t) = \frac{3t-2}{5t+1}$

6. $g(t) = \frac{t^2+2t+5}{t^2-5t+1}$

7. $f(x) = \frac{3x-6\sqrt{x}}{5x^2-2}$

8. $f(x) = \frac{6x-2/x}{x^2+\sqrt{x}}$

9. $f(u) = \frac{(u+1)(u-2)}{u^2-5u+1}$

10. $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}(u+3)$

11. $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}$

12. $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+5x}$

13. $h(t) = t(\sqrt[3]{t}+3)$

14. $h(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{5}{t^2}$

15. $f(x) = (x^2-1)\frac{x^3+3x^2}{x^2+2}$

16. $f(x) = (x+2)\frac{x^2-1}{x^2+x}$

في التمارين 17-20، أوجد معادلة المماس على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ عند $x = a$.

17. $f(x) = (x^2+2x)(x^4+x^2+1), a = 0$

18. $f(x) = (x^3+x+1)(3x^2+2x-1), a = 1$

19. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}, a = 0$

20. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}, a = 1$

في التمارين 21-24، على فرض أنّ f و g قابلتان للاشتقاق بحيث $f(0) = -1$ و $f(1) = -2$ و $f'(0) = -1$ و $f'(1) = 3$ و $g(0) = 3$ و $g(1) = 1$ و $g'(0) = -1$ و $g'(1) = -2$، أوجد معادلة المماس على التمثيل البياني لـ $y = h(x)$ عند $x = a$.

21. $h(x) = f(x)g(x)$; (a) $a = 0$; (b) $a = 1$

22. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

23. $h(x) = x^2 f(x)$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

24. $h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

25. على فرض أنّ الكمية المبيعة $Q(t)$ من أحد أنواع الدمى عند الزمن t مقدرًا بالسنوات تتناقص بمعدّل 4%، اشرح السبب في أن ذلك يترجم إلى العلاقة $Q'(t) = -0.04Q(t)$. افترض أيضًا أن السعر يزداد بمعدّل 3%، اكتب معادلة مشابهة لـ $P'(t)$ بدلالة $P(t)$. يساوي إيراد الدمية $R(t) = Q(t)P(t)$. بتعويض تعبيري $Q'(t)$ و $P'(t)$ في قاعدة الضرب $R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$ بيّن أنّ الإيراد ينخفض بمعدّل 1%. واشرح السبب في أنّ هذا "واضح".

26. كما في التمرين 25، افترض أنّ الكمية المبيعة تنخفض بمعدّل 4%. فما المعدّل الذي يجب زيادة السعر به للحفاظ على الإيراد ثابتًا؟

27. افترض أنّ سعر إحدى السلع AED20 للقطعة وقد بيعت 20,000 قطعة. فإذا كان السعر يزداد بمعدل AED1.25 في العام الواحد وتزداد الكمية المبيعة بمعدّل 2000 قطعة في العام الواحد، فبأي معدل سيزداد الإيراد؟

28. افترض أنّ سعر القطعة AED14، وأنّه قد بيعت 12,000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكميّة المبيعة بمقدار 1200 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار AED20,000 في العام. فما المعدّل الذي يتعيّن زيادة السعر به لتحقيق هذين الهدفين؟

29. تُضرب كرة بيسبول كتلتها 0.15 kg وسرعتها 45 m/s بمضرب بيسبول كتلته m kg وبسرعة 40 m/s (بعكس اتجاه حركة الكرة). بعد الاصطدام، بلغت السرعة الابتدائية للكرة $u(m) = \frac{82.5m-6.75}{m+0.15}$ m/s. برهن أنّ $u'(m) > 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة البيسبول. قارن $u'(1)$ و $u'(1.2)$.

30. في التمرين 29، إذا كنت كتلة كرة البيسبول M kg وسرعتها 45 m/s وإذا كانت كتلة المضرب 1.05 kg وسرعته 40 m/s، وكانت السرعة الابتدائية للكرة $u(M) = \frac{86.625-45M}{M+1.05}$ m/s احسب $u'(M)$ وفسّر إشارته (موجبة أو سالبة) وفق مصطلحات رياضة البيسبول.

31. من المنطقي أن نفترض في المثال 4.6 أن سرعة عصا الجولف عند صدم الكرة تنخفض بزيادة كتلتها. فإذا كانت سرعة مضربٍ كتلته تساوي $v = 8.5/m$ m/s عند صدم الكرة، فإن السرعة الابتدائية للكرة تساوي $u(m) = \frac{14.11}{m+0.05}$ m/s. وضّح أن $u'(m) < 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة الجولف.

32. في المثال 4.6، إذا كانت كتلة عصا الجولف 0.17 kg وضَربت الكرة بسرعة v m/s، فيكون للكرة السرعة الابتدائية $u(v) = \frac{0.2822v}{0.217}$ m/s. احسب المشتقّة $u'(v)$ وفسّرها.

33. اكتب قاعدة الضرب للدالّة $f(x)g(x)h(x)$. (إرشاد: جمّع أوّل حدّين معًا في البداية.) صِف قاعدة الضرب العامّة لعدد n دالّة. ما هي مشتقّة الضرب $f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_n(x)$؟ كم حدًّا يوجد؟ وكيف يبدو كل حدّ؟

34. استخدم قاعدة الضرب لنبيّن أن مشتقّة $[g(x)]^{-1}$ تساوي $-g'(x)[g(x)]^{-2}$. ثمّ استخدم قاعدة الضرب لحساب مشتقّة $f(x)[g(x)]^{-1}$.

في التمرينين 35 و 36، أوجد مشتقّة كلّ دالّة باستخدام قاعدة الضرب العامة التي وضعت في التمرين 33.

35. $f(x) = x^{2/3}(x^2-2)(x^3-x+1)$

36. $f(x) = (x+4)(x^3-2x^2+1)(3-2/x)$

37. على فرض أنّ g متصلة عند $x = 0$ وعرّف $f(x) = xg(x)$. بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$. وضّح النتيجة عندما $g(x) = |x|$.

38. في التمرين 37، إذا استبدلت $x = 0$ بـ $x = a \neq 0$، فكيف ينبغي أن تعدّل تعريف $f(x)$ كي تضمن أن تكون f قابلةً للاشتقاق؟

39. بالنسبة للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$، برهن أنّ الميل m للمماس على منحنى $y = f(x)$ يستوفي $\frac{-1}{8} \le m \le 1$. مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد نقطتي الميل العظمى والصغرى.

40. لأجل $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، برهن أنّ الميل m للمماس على منحنى $y = f(x)$ يستوفي $0 < m \le 1$. مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد نقطة أكبر ميل.

41. كرّر المثال 4.4 باستخدام CAS. إذا كانت إجابته بالصيغة نفسها مثل الإجابة التي حصلنا عليها في النص، فاشرح طريقة حساب CAS إجابته.

42. استخدم CAS لإيجاد مشتقة $\sin x$. ما الدالّة التي يشبهها ذلك؟ كرّر الأمر مع $2x$ و $3x$. استخدم طرفًا عامة لتخمين مشتقة $\sin kx$ لأي ثابت k.

43. أوجد مشتقة $f(x)=\frac{\sqrt{3x^3+x^2}}{x}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ عند $x>0$ و $\frac{-3}{2\sqrt{3x+1}}$ عند $x<0$. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

44. أوجد مشتقة $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}\left(2x-\frac{2x^2}{x+1}\right)$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع الرقم 2. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

45. لنفرض أن $F(x)=f(x)g(x)$ للدوال القابلة للإشتقاق إلى ما لا نهاية f و g (بمعنى أن $f'(x)$، $f''(x)$، إلخ. موجودين لكل x). وضّح أن $F''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$. احسب $F'''(x)$. قارن بين $F''(x)$ والصيغة ذات الحدين الخاصة بـ $(a+b)^2$ وقارن بين $F'''(x)$ والصيغة الخاصة بـ $(a+b)^3$.

46. باستخدام $F(x)$ المحدد في التمرين 45، احسب $F^{(4)}(x)$ باستخدام حقيقة أن $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

47. استخدم قاعدة ناتج الضرب لتوضيح أنه إذا كان $g(x)=[f(x)]^2$ و $f(x)$ قابلين للإشتقاق، إذًا $g'(x)=2f(x)f'(x)$. يمكن الحصول على ذلك أيضًا باستخدام قاعدة السلسلة التي سنتم مناقشتها في الدرس 3.5.

48. استخدم النتيجة من التمرين 47 وقاعدة ناتج الضرب لتوضيح أنه إذا كان $g(x)=[f(x)]^3$ و $f(x)$ قابلين للإشتقاق، إذًا $g'(x)=3[f(x)]^2f'(x)$. ضع فرضية لمشتق $[f(x)]^n$.

تطبيقات

49. تتأثر كمية **الإنزيم التفارغي** بوجود منشط. إذا كان x هو كمية المنشط وكان f هو كمية الإنزيم، فسيكون أحد نماذج التنشيط التفارغي هو $f(x)=\frac{x^{2.7}}{1+x^{2.7}}$. أوجد $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to\infty}f(x)$ وفسرهما. احسب $f'(x)$ وفسّره.

50. يمكن أيضًا تثبيط إنتاج الإنزيم. وفي هذه الحالة، يتم تمثيل كمية الإنزيم كدالّة لكمية المثبط باستخدام $f(x)=\frac{1}{1+x^{2.7}}$. أوجد وفسر كل من $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to\infty}f(x)$ و $f'(x)$.

51. يتم تصنيف معظم السيارات حسب الكفاءة في استخدام الوقود عن طريق تقدير الأميال لكل جالون أثناء القيادة في المدينة (c) وتقدير الأميال لكل جالون أثناء القيادة على الطريق السريعة (h). تستخدم هيئة الحماية البيئية الصيغة $r=\frac{1}{0.55/c+0.45/h}$ كتصنيف شامل لها لاستخدام الغاز.

a) فكّر في c كمتغير و h كثابت. ووضح أن $\frac{dr}{dc}>0$. فكّر في هذه النتيجة ضوء المسافة بالميل بالنسبة إلى الغاز.

b) فكّر في h كمتغير و c كثابت، ووضح أن $\frac{dr}{dh}>0$

c) وضّح أنه إذا كان $h=c$، إذًا $r=c$.

d) وضّح أنه إذا كان $c<h$، إذًا $c<r<h$. لفعل ذلك، افترض أن c ثابت، و $c<h$. اشرح لماذا تتضمن ناتج الأجزاء (b) و(c) أن $r>c$. ثم وضّح أن $\frac{dr}{dh}<0.45$. اشرح لماذا تكون هذه النتيجة بالتماشي مع نتيجة الجزء (c) تتضمن أن $r<h$.

اشرح لماذا يجب أن تكون ناتج الأجزاء من (a)إلى (d) صحيحة إذا كانت صيغة EPA المضمنة تعد طريقة سهلة للوصول إلى معدلات متوسطة لكل من c و h. لمعرفة شعور معين حول آلية عمل الصيغة، استخدم $c=20$ والتمثيل البياني r كدالّة لـ h. اذكر تعليقك على سبب احتمال استخدام EPA لدالّة معينة يصبح تمثيلها البياني موسطا مثل هذا التمثيل البياني.

تمرينات استكشافية

1. في العديد من الرياضات، يكون الاصطدام بين الكرة والمضرب شيئًا أساسيًا في المباراة. لنفرض أن وزن الكرة هو w والسرعة المتجهة هي v قبل الاصطدام ووزن المضرب (هراوة، مضرب التنس، مضرب الجولف، إلخ) هو W والسرعة المتجهة هي $-V$ قبل الاصطدام (تشير علامة السالب إلى أن المضرب يتحرك في الاتجاه المعاكس للكرة). السرعة المتجهة للكرة بعد الاصطدام ستكون $u=\frac{WV(1+c)+v(cW-w)}{W+w}$، حيث إن الوسيط c الذي يسمى **معامل الاسترداد**، يمثل "ارتدادات" الكرة عند الاصطدام. بمعالجة W كمتغير مستقل (مثل x) والوسائط الأخرى كثوابت، احسب الاشتقاق وتحقق من أن $\frac{du}{dW}=\frac{V(1+c)w+cvw+vw}{(W+w)^2}\geq 0$ لأن كل المعاملات غير سالبة. اشرح لماذا يتضمن ذلك أنه إذا كان ممارس الألعاب الرياضية يستخدم مضربًا أكبر (W أكبر) مع تساوي كل الأشياء الأخرى، فإن سرعة الكرة تزداد. هل هذا يطابق حدسك؟ ما المبرر للتحليل افتراض أن تكون كل الأشياء الأخرى متساوية؟ احسب وفسّر بشكل مشابه كلًا من $\frac{du}{dV}$، $\frac{du}{dv}$، $\frac{du}{dw}$ و $\frac{du}{dc}$.

(إرشاد: يقع الوسيط c بين 0 و 1 علمًا أن 0 يمثل حالة ثبات الكرة، و 1 يمثل حالة السرعة القصوى للكرة.)

2. لنفترض أن لاعب كرة القدم يضرب الكرة بطاقة كافية بحيث تحصل الكرة الثابتة على سرعة ابتدائية قدرها 80 km/h. وضّح أن الضربة بالقوة نفسها على كرة تتحرك مباشرة نحو اللاعب بسرعة 40 km/h سيجعل الكرة تنطلق بسرعة ابتدائية قدرها 100 km/h. (استخدم صيغة الاصطدام في التمرين الاستكشافي 2 مع $c=0.5$ وافترض أن وزن الكرة أكبر قليلًا من وزن لاعب الكرة.) وبصفة عامة، ما تناسب سرعة الكرة القادمة التي تحولها الضربة إلى سرعة إضافية في الاتجاه المعاكس؟

الدرس 3-5 قاعدة السلسلة

لا توجد لدينا حاليًا طريقة لحساب مشتقة دالّة معينة مثل $P(t) = \sqrt{100 + 8t}$، باستثناء تعريف النهاية. ومع ذلك، لاحظ أن $P(t)$ هو ناتج تركيب لدالتين $f(t) = \sqrt{t}$ و $g(t) = 100 + 8t$، لذلك $P(t) = f(g(t))$، حيث يتم حساب كل من $f'(t)$ و $g'(t)$ بسهولة. نحن نطوّر الآن قاعدة عامة لاشتقاق دالتين مركبتين.

ستساعدنا الأمثلة البسيطة التالية على تحديد صيغة قاعدة السلسلة. لاحظ ذلك من قاعدة ناتج الضرب

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^2] = \frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^2+1)]$$

$$= 2x(x^2+1) + (x^2+1)2x$$

$$= 2(x^2+1)2x$$

بالطبع يمكننا كتابة ذلك على شكل $4x(x^2+1)$، ولكن الصيغة غير المبسطة تساعدنا على فهم صيغة قاعدة السلسلة. باستخدام هذه النتيجة وقاعدة ناتج الضرب، لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}[(x^3+1)^3] = \frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^2+1)^2]$$

$$= 2x(x^2+1)^2 + (x^2+1)2(x^2+1)2x$$

$$= 3(x^2+1)^2 2x.$$

نحن نتركها كتمرين مباشر لتوسيع هذه النتيجة إلى

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^4] = 4(x^2+1)^3 2x$$

يجب أن تلاحظ أنه في كل الحالات، قمنا بتصغير الأس، وخفضنا القوة بمقدار واحد ثم ضربنا في $2x$، و مشتقة x^2+1 لاحظ أن بإمكاننا كتابة $(x^2+1)^4$ كدالّة تركيب $f(g(x)) = (x^2+1)^4$، حيث $g(x) = x^2+1$ و $f(x) = x^4$. وفي النهاية، لاحظ أن مشتقة دالّة التركيب هي

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}[(x^2+1)^4] = 4(x^2+1)^3 2x = f'(g(x))g'(x)$$

هذا مثال على قاعدة السلسلة الذي تستخدم الصيغة العامة التالية.

النظرية 5.1 (قاعدة السلسلة)

إذا كانت g قابلة للاشتقاق عند x وكانت f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، إذًا

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))\,g'(x)$$

البرهان

عند تلك النقطة، يمكننا إثبات أن الحالة الخاصة فقط حيث $g'(x) \neq 0$. على فرض أنّ $F(x) = f(g(x))$، إذًا

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$ بما أن $F(x) = f(g(x))$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$ ضرب البسط والمقام بـ $g(x+h)-g(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ تجميع الحدود

$$= \lim_{g(x+h)\to g(x)} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(g(x))g'(x)$$

حيث يكون السطر التالي إلى الأخير صالحًا لأن $h \to 0$، $g(x+h) \to g(x)$ عن طريق اتصال g (تذكر أنه لأن g قابلة للاشتقاق، فإنها متصلة أيضًا). سيطلب منك في التمرين 44 ملء بعض الفراغات في هذا البرهان. وبوجه عام، يجب عليك تحديد لماذا تحتاج إلى $g'(x) \neq 0$ في هذا البرهان. ■

من المفيد في أغلب الأوقات التفكير في قاعدة السلسلة باستخدام صيغة ليبنز. إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$، إذًا $y = f(g(x))$ وتنص قاعدة السلسلة على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad (5.1)$$

حيث يبدو أننا نختزل كل قيم du، حتى وإن لم تكن كسورًا.

ملحوظة 5.1

يجب أن تساعد قاعدة السلسلة على توصيل معنى بديهي كما يلي: نحن نفكر في $\frac{dy}{dx}$ على أنه معدل التغير اللحظي لـ y مع بالنسبة إلى x، كمعدل تغير $\frac{dy}{du}$ لحظي لـ y مع بالنسبة إلى u و $\frac{du}{dx}$ كمعدل للتغير اللحظي لـ u مع بالنسبة إلى x. لذا، إذا كان $\frac{dy}{du} = 2$ (أي أن y يتغير بضعف معدل u) و $\frac{du}{dx} = 5$ (أي أن u يتغير بخمسة أضعاف معدل x)، ويجب أن يوضح ذلك معنى أن y يتغير بمعدل أضعاف $2 \times 5 = 10$ مرة من معدل x. وهكذا، $\frac{dy}{dx} = 10$ مما تنص عليه المعادلة (5.1)

مثال 5.1 استخدام قاعدة السلسلة

اشتق: $y = (x^3 + x - 1)^5$.

الحل بالنسبة إلى $u = x^3 + x - 1$، لاحظ أن $y = u^5$. من النظرية (5.1)، لدينا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^5)\frac{du}{dx} \quad \text{بما أن } y = u^5$$
$$= 5u^4 \frac{d}{dx}(x^3 + x - 1)$$
$$= 5(x^3 + x - 1)^4(3x^2 + 1) \quad ■$$

بالنسبة إلى التركيب $f(g(x))$، تتم الإشارة إلى f غالبًا على أنها الدالة الخارجية وتتم الإشارة إلى g على أنها الدالّة الداخلية. يمكن عرض الاشتقاق مع قاعدة السلسلة $f'(g(x))g'(x)$ على أنه مشتقة الدالّة الخارجية مضروبًا في مشتقة الدالّة الداخلية. في المثال 5.1، الدالّة الداخلية هي $x^3 + x - 1$ (التعبير بين القوسين) والدالّة الخارجية هي u^5.

مثال 5.2 استخدام قاعدة السلسلة مع دالّة الجذر التربيعي

أوجد $\frac{d}{dt}(\sqrt{100 + 8t})$.

الحل على فرض أن $u = 100 + 8t$، ولاحظ أن $\sqrt{100 + 8t} = \sqrt{u}$. ثم من النظرية (5.1)،

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{100 + 8t}) = \frac{d}{dt}(u^{1/2}) = \frac{1}{2}u^{-1/2}\frac{du}{dt}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{100 + 8t}} \frac{d}{dt}(100 + 8t) = \frac{4}{\sqrt{100 + 8t}}$$

لاحظ أن مشتقة الدالة الداخلية هنا هي مشتقة التعبير تحت رمز الجذر التربيعي. ■

أنت الآن في موضع حساب المشتقة لرقم كبير جدًا من الدوال، من طريق استخدام قاعدة السلسلة مع الجمع مع قواعد تفاضل أخرى.

مثال 5.3 مشتقات تتضمن قاعدة السلسلة والقواعد الأخرى

احسب مشتقة $f(x) = x^3\sqrt{4x + 1}$، $g(x) = \frac{8x}{(x^3 + 1)^2}$ و $h(x) = \frac{8}{(x^3 + 1)^2}$

الحل لاحظ الاختلافات في هذه الدوال الثلاث. الدالة الأولى $f(x)$ هي ناتج ضرب دالتين، و $g(x)$ هو ناتج قسمة دالتين و $h(x)$ هو ثابت مقسوم على دالة معينة. وهذا يتطلب منا استخدام قاعدة ناتج الضرب الخاص بـ $f(x)$، وقاعدة ناتج قسمة $g(x)$ وتبسيط قاعدة السلسلة لـ $h(x)$ بالنسبة إلى الدالة الأولى. يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3\sqrt{4x+1}\right) = 3x^2\sqrt{4x+1} + x^3\frac{d}{dx}\sqrt{4x+1} \qquad \text{قاعدة الضرب}$$

$$= 3x^2\sqrt{4x+1} + x^3\frac{1}{2}(4x+1)^{-1/2}\underbrace{\frac{d}{dx}(4x+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}} \qquad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= 3x^2\sqrt{4x+1} + 2x^3(4x+1)^{-1/2} \qquad \text{بسّط}$$

ثم يوجد لدينا

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{8x}{(x^3+1)^2}\right] = \frac{8(x^3+1)^2 - 8x\frac{d}{dx}[(x^3+1)^2]}{(x^3+1)^4} \qquad \text{قاعدة القسمة}$$

$$= \frac{8(x^3+1)^2 - 8x\left[2(x^3+1)\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}}\right]}{(x^3+1)^4} \qquad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{8(x^3+1)^2 - 16x(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4}$$

$$= \frac{8(x^3+1) - 48x^3}{(x^3+1)^3} = \frac{8-40x^3}{(x^3+1)^3}. \qquad \text{بسّط}$$

بالنسبة إلى $h(x)$ لاحظ أنه بدلًا من استخدام قاعدة ناتج القسمة، من الأبسط إعادة كتابة الدالّة بالصيغة $h(x) = 8(x^3+1)^{-2}$ إذًا

$$h'(x) = \frac{d}{dx}[8(x^3+1)^{-2}] = -16(x^3+1)^{-3}\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}} = -16(x^3+1)^{-3}(3x^2)$$

$$= -48x^2(x^3+1)^{-3} \blacksquare$$

في المثال 5.4، نحن نطبق قاعدة السلسلة على دالّة مركبة معينة باستخدام مجموعة من الدوال.

مثال 5.4 مشتقة تتضمن العديد من قواعد السلسلة

أوجد مشتقة $f(x) = (\sqrt{x^2+4} - 3x^2)^{3/2}$.

الحل يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right) \qquad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2+4) - 6x\right] \qquad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}(2x) - 6x\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[x(x^2+4)^{-1/2} - 6x\right] \qquad \text{بسّط}$$

$\blacksquare$

ونستخدم الآن قاعدة السلسلة لحساب مشتقة دالة عكسية مع الأخذ في الحسبان الدالة الأساسية. على فرض أننا نكتب $g(x) = f^{-1}(x)$ إذا كان $g(f(x)) = x$ لكل قيم x

في مجال f و $f(g(x)) = x$ لكل قيم x في مجال g. من هذه المعادلة الأخيرة، على فرض أن f و g قابلتان للاشتقاق، وهذا يتبع

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}(x)$$

ومن قاعدة السلسلة يوجد لدينا الآن

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

وبحل هذا للحصول على $g'(x)$، فإننا نحصل على $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$،

على فرض أننا لن نقسم على الصفر. نؤكد على هذه النتيجة استنادًا إلى النظرية 5.2.

النظرية 5.2

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في أي مكان ولها دالة عكسية $g = f^{-1}$، إذًا

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

لكل x في مجال g، بشرط أن يكون $f'(g(x)) \neq 0$.

كما سنرى في المثال 5.5، ولكي نستخدم النظرية 5.2، يجب علينا التمكن من حساب قيم الدالة العكسية.

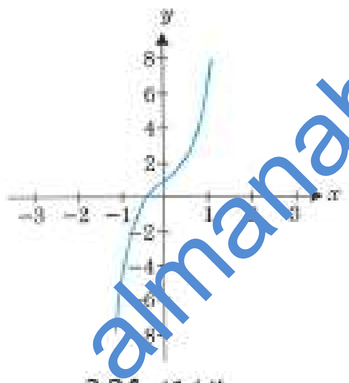
الحياة المعاصرة في الرياضيات

فان تشونغ (—1949)

عالمة رياضيات تايوانية تشتهر بحياة عملية زاخرة بالنجاح في الصناعات الأمريكية والعمل الأكاديمي. تقول فان "عندما تخرجت في تايوان، كان حولي أصدقاء جيدون والكثير من عالمات الرياضيات... يُعد التعلم من أقرانك وليس من معلميك جزءًا كبيرًا من التعليم." وقد كان التعاون صفة مميزة في حياتها العملية. "إن إيجاد المسألة الصحيحة هو في الغالب الجزء الرئيس من العمل على تأسيس الارتباط. وعادة ستعطيك المسألة الجيدة من شخص آخر دفعة في الاتجاه الصحيح والشيء التالي الذي تعرفه، هو أن لديك مسألة جيدة أخرى.

مثال 5.5 مشتقة دالة عكسية

على فرض أن الدالة $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 1$ لها دالة عكسية g، احسب $g'(7)$.



الشكل 3.24

$y = x^5 + 3x^3 + 2x + 1$

الحل أولاً، لاحظ من الشكل 3.24 أن f تبدو كأنها واحد إلى واحد ولذلك، لديها دالة عكسية. من النظرية 5.2، يوجد لدينا

$$g'(7) = \frac{1}{f'(g(7))} \tag{5.2}$$

من السهل حساب $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 2$ ولكن لاستخدام النظرية 5.2 فإننا نحتاج أيضًا إلى $g(7)$. إذا كتبنا $x = g(7)$، إذًا $x = f^{-1}(7)$ لذلك يكون $f(x) = 7$. وبشكل عام، قد يكون حل المعادلة $f(x) = 7$ أكبر من إمكانياتنا في الجبر. (حاول حل $x^5 + 3x^3 + 2x + 1 = 7$ لمعرفة ما نعنيه.) بالمحاولة والخطأ، ليس من الصعب على أي حال أن نجد أن $f(1) = 7$ لذلك $g(7) = 1$. [ضع في حسبانك أنه بالنسبة إلى الدوال العكسية، $f(x) = y$ و $g(y) = x$ يكونان عبارات متساوية.] بالرجوع إلى المعادلة (5.2)، يوجد لدينا الآن

$$g'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{16}$$ ■

لاحظ أن حلنا في المثال 5.5 يعتمد على إيجاد x تكون معادلته $f(x)=7$. هذا المثال الخاص كان قابلا للعمل على حله والخطأ في ذلك، ولكن إيجاد معظم القيم الأخرى قد يكون صعبا قليلا أو من المستحيل حله بعبارة أكثر دقة.

ما وراء الصيغ

إذا كنت تعتقد أن الطريقة المستخدمة في المثال 5.5 غير مباشرة، فحينئذ توجد لديك الفكرة الصحيحة. تعطينا قاعدة السلسلة بشكل خاص وحساب التفاضل والتكامل بشكل عام طرقًا لتحديد الكميات التي لا يمكن حسابها مباشرة. في حالة المثال 5.5، نحن نستخدم خصائص إحدى الدوال لتحديد خصائص دالة أخرى. والأساس في قدرتنا على فعل ذلك هو فهم النظرية وراء قاعدة السلسلة.

تمارين 3.5

تمارين كتابية

1. إذا كان الترس 1 يدور بمعدل 10 rpm وكان الترس 2 يدور بشكل أسرع بمعدل ضعف الترس 1، فما السرعة التي يدور بها الترس 2؟ الإجابة واضحة لمعظم الأشخاص. قم بصياغة هذه المسألة البسيطة كحساب لقاعدة السلسلة واستنتج أن قاعدة السلسلة (في هذا السياق) واضحة.

2. إن التحدي الأكبر في حساب مشتقات $\sqrt{(x^2+4)(x^3-x+1)}$، $x^2+4\sqrt{x^3-x+1}$ و $(x^2+4)\sqrt{x^3-x+1}$ هو معرفة أي قاعدة (ناتج الضرب، السلسلة، إلخ) سيتم استخدامها ومتى يتم ذلك. ناقش الطريقة التي ستتعرف من خلالها أي قاعدة سيتم استخدامها ووقت حدوث ذلك. (إرشاد: فكّر في الترتيب الذي ستتعد به العمليات لحساب قيمة كل دالة لخيار معين لـ x.)

3. من التطبيقات البسيطة لقاعدة السلسلة: إذا كان $g(x)=f(x-a)$ فإن $g'(x)=f'(x-a)$. اشرح هذا المشتقة بيانيا، وكيف يقارن $g(x)$ مع $f(x)$ بيانيا ولماذا توجد علاقة بين ميول المماسات كما يبين القانون؟

4. من التطبيقات البسيطة الأخرى لقاعدة السلسلة، إذا كان $h(x)=f(2x)$ فإن $h'(x)=2f'(2x)$. اشرح هذا المشتقة بيانيا، وكيف يقارن $h(x)$ مع $f(x)$ بيانيا ولماذا توجد علاقة بين ميول المماسات كما يبين القانون؟

في التمارين 1–4، أوجد المشتقة بدون استخدام قاعدة السلسلة.

1. $f(x)=(x^3-1)^2$
2. $f(x)=(x^2+2x+1)^2$
3. $f(x)=(x^2+1)^3$
4. $f(x)=(2x+1)^4$

في التمارين 5–16، اشتق كل دالّة.

5. (a) $f(x)=(x^3-x)^3$ (b) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$
6. (a) $f(x)=(x^3+x-1)^3$ (b) $f(x)=\sqrt{4x-1/x}$
7. (a) $f(t)=t^5\sqrt{t^3+2}$ (b) $f(t)=(t^3+2)\sqrt{t}$
8. (a) $f(t)=(t^4+2)\sqrt{t^2+1}$ (b) $f(t)=\sqrt{t(t^{4/3}+3)}$
9. (a) $f(u)=\dfrac{u^2+1}{u+4}$ (b) $f(u)=\dfrac{u^3}{(u^2+4)^2}$
10. (a) $f(v)=\dfrac{v^2-1}{v^2+1}$ (b) $f(w)=\dfrac{w^2+4}{(w^3)^2}$
11. (a) $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$
12. (a) $g(x)=x^2\sqrt{x+1}$ (b) $g(x)=\sqrt{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)^3}$
13. (a) $h(w)=\dfrac{6}{\sqrt{w^2+4}}$ (b) $h(w)=\dfrac{\sqrt{w^2+4}}{6}$
14. (a) $h(w)=\dfrac{(w^2+4)^5}{8}$ (b) $h(w)=\dfrac{8}{(w^2+4)^5}$
15. (a) $f(x)=(\sqrt{x^2+2}+2x)^{-2}$ (b) $f(x)=\sqrt{x^2+2+2x^{-2}}$
16. (a) $f(x)=\sqrt{4x^2+(8-x^2)^2}$ (b) $f(x)=(\sqrt{4x^2+8}-x^2)^2$

في التمارين 17–22، f لها معكوس g. استخدم النظرية لإيجاد $g'(a)$.

17. $f(x)=x^3+4x-1, a=-1$
18. $f(x)=x^5+4x-2, a=-2$
19. $f(x)=x^5+3x^3+x, a=5$
20. $f(x)=x^3+2x+1, a=-2$
21. $f(x)=\sqrt{x^3+2x+4}, a=2$
22. $f(x)=\sqrt{x^5+4x^3+3x+1}, a=3$

في التمارين 23–26، اذكر اسم الطريقة (قاعدة السلسلة، قاعدة ناتج الضرب، قاعدة ناتج القسمة) التي قد تستخدمها أولا لإيجاد مشتقة الدالة. ثم اذكر أي قاعدة (قواعد) أخرى قد تستخدمها، بالترتيب. لا تحسب المشتقة.

23. $f(x)=\sqrt[3]{x\sqrt{x^4+2x\sqrt[4]{\dfrac{8}{x+2}}}}$
24. $f(x)=\dfrac{3x^2+2\sqrt{x^3+4/x^4}}{(x^3-4)\sqrt{x^2+2}}$
25. $f(t)=\sqrt{t^2+4/t^2}\left(\dfrac{8t+5}{2t-1}\right)^3$

26. $f(t)=\left(3t+\dfrac{4\sqrt{t^2+1}}{t-5}\right)^3$

في التمرينين 27 و 28، أوجد معادلة المماس على التمثيل البياني عند $x=a$ لمنحنى $y=f(x)$.

27. $f(x)=\sqrt{x^2+16}, a=3$

28. $f(x)=\dfrac{6}{x^2+4}, a=-2$

في التمرينين 29 و 30، استخدم دالّة الموقع لإيجاد السرعة المتجهة في الزمن $t=2$. (على فرض أن الوحدات بالأمتار والثواني)

29. $s(t)=\sqrt{t^2+8}$

30. $s(t)=\dfrac{60t}{\sqrt{t^2+1}}$

في التمرينين 31 و 32، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب المشتقة $h(x)=f(g(x))$.

31. $h'(1)$، حيث:

$f'(2)=3, f'(1)=4, g(1)=2, f(1)=3, g'(1)=-2, g(3)=5$

32. $h'(2)$، حيث:

$f'(3)=-3, f'(2)=$[illegible]$, g(2)=3, f(2)=1, g'(1)=2, g'(2)=4$

الدالّة f تكون دالّة زوجية إذا كان $f(-x)=f(x)$ لكل x وتكون دالّة فردية إذا كان $f(-x)=-f(x)$ لكل x. اثبت أن مشتقة دالّة زوجية هي دالة فردية، وأن مشتقة دالة فردية هي دالة زوجية.

إذا كان التمثيل البياني للدالّة القابلة للاشتقاق f متماثلًا حول المستقيم $x=a$، فماذا يمكنك القول عن تماثل التمثيل البياني لـ f'؟

في التمارين 35–38 أوجد المشتقة للدالة f.

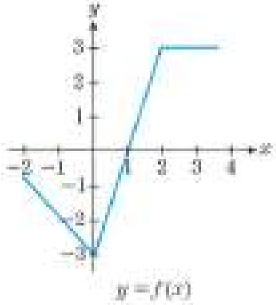
35. (a) $f(x^2)$ (b) $[f(x)]^2$ (c) $f(f(x))$

36. (a) $f(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{f(x)}$ (c) $f(xf(x))$

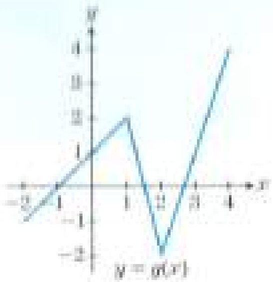
37. (a) $f(1/x)$ (b) $1/f(x)$ (c) $f\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)$

38. (a) $1+f(x^2)$ (b) $[1+f(x)]^2$ (c) $f(1+f(x))$

في التمرينين 39 و 40، استخدم التمثيلات البيانية لإيجاد مشتقة الدالة المركبة عند النقطة إذا كانت موجودة.



$y=f(x)$



$y=g(x)$

39. $f(g(x))$ عند (a) $x=0$ (b) $x=1$ و (c) $x=3$

40. $g(f(x))$ عند (a) $x=0$ (b) $x=1$ و (c) $x=3$

في التمرينين 41 و 42، أوجد المشتقة من الرتبة الثانية لكل دالّة.

41. (a) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ (b) $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}$

42. (a) $h(t)=(t^3+3)^2$ (b) $g(s)=\dfrac{3}{(5^2+1)^2}$

43. (a) أوجد كل قيم x التي تجعل $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}$ غير قابلة للاشتقاق. صف الخاصية في التمثيل البياني التي تمنع وجود المشتقة.

(b) كرر الجزء a بالنسبة لـ $f(x)=\sqrt{x^4-3x^3+3x^2-x}$

ما الخطوات في اللمحة العامة الخاصة بإثبات قاعدة التسلسل التي لم يتم توثيقها بشكل جيد؟ أين استخدمنا افتراض أن $g'(x)\neq 0$؟

في التمارين 45–48، أوجد الدالّة g التي تجعل $g'(x)=f(x)$.

45. $f(x)=(x^2+3)^2(2x)$

46. $f(x)=x^2(x^3+4)^{2/3}$

47. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

48. $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

تمارين استكشافية

1. القانون الثاني لنيوتن والخاص بالحركة هو $F=ma$ حيث m هي كتلة الجسم الذي يخضع للتسارع a بسبب قوة مستخدمة F. هذا القانون دقيق عند السرعات البطيئة. وعند السرعات العالية، نستخدم القانون المقابل من نظرية النسبية لأينشتين، $F=m\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right)$ حيث $v(t)$ هي دالّة السرعة المتجهة و c هي سرعة الضوء. احسب $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right)$ ما الذي يجب إهماله لتبسيط هذا التعبير إلى التسارع $a=v'(t)$ في القانون الثاني لنيوتن؟

2. على فرض أن f هي دالّة حيث $f(1)=0$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ لكل $x>0$.

(a) إذا كان $g_1(x)=f(x^n)$ و بالنسبة إلى $x>0$، فوضّح أن $g_1'(x)=g_2'(x)$. نظرًا لأن $g_1(1)=g_2(1)=0$، هل يمكنك استنتاج أن $g_1(x)=g_2(x)$ لكل $x>0$؟

(b) بالنسبة إلى الدوال الموجبة القابلة للاشتقاق h_1 و h_2، حدد $g_3(x)=f(h_1(x)h_2(x))$ و $g_4(x)=f(h_1(x))+f(h_2(x))$. وضّح أن $g_3'(x)=g_4'(x)$. هل يمكنك استنتاج أن $g_3(x)=g_4(x)$ لكل x؟

(c) إذا كان f لها معكوس g، فأوجد $g'(x)$

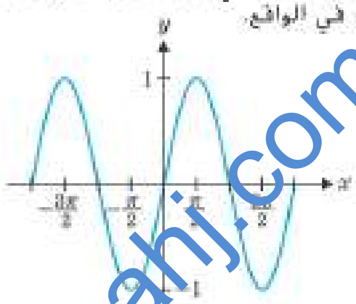
الدرس 3-6 مشتقات الدوال المثلثية

تخيل وجود وزن يتدلى من زنبرك معلق في السقف. (انظر الشكل 3.25). عندما يتحرك الجسم، فإنه سيرتفع إلى أعلى وإلى أسفل في حركات نظامية تقل باستمرار حتى يصبح في حالة سكون مجددًا (اتزان).

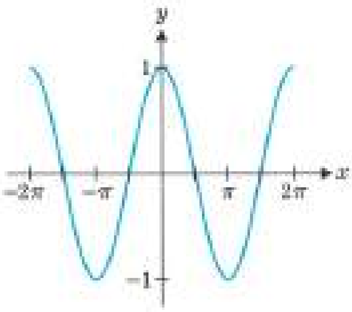
إذا جذبنا الوزن إلى أسفل، فإن حركته الرأسية من موضع اتزانه ستكون سالبة. يتأرجح الوزن بعد ذلك إلى الأعلى حيث تكون الحركة موجبة. ويتأرجح إلى أسفل وتكون حركة سالبة وهكذا. توجد دالتان توضحان هذا النوع من السلوك وهما دالتا الـ sine والـ cosine للزاوية. نحن نحسب مشتقات هذه الدوال والدوال المثلثية الأخرى في هذا الدرس.

الشكل 3.25
نظام الزنبرك–الكتلة

يمكننا تعلم المزيد حول مشتقات $\sin x$ و $\cos x$ من تمثيلاتهم البيانية. من التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ في الشكل 3.26a. لاحظ المماسات الأفقية عند $x = -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2$ و $3\pi/2$ عند قيم x هذه، يجب أن يساوي الاشتقاق 0. للمماسات ميل موجب لـ $-2\pi < x < -3\pi/2$ وميل سالب لـ $-3\pi/2 < x < -\pi/2$ وهكذا. بالنسبة لكل فترة يكون الاشتقاق عندها موجبًا أو (سالبًا) يبدو التمثيل البياني أكثر انحدارًا عند وسط الفترة، على سبيل المثال من $x = -\pi/2$ يصبح التمثيل البياني أكثر انحدارًا حتى يصل إلى $x = 0$ ثم يقل انحداره حتى يستقر عند $x = \pi/2$ يجب أن يبدو الرسم البياني الخاص بالتمثيل البياني للاشتقاق مثل التمثيل البياني في الشكل 3.26b الذي يبدو مثل التمثيل البياني لـ $y = \cos x$ نحن نوضح هنا أن هذا التخمين صحيح في الواقع.



الشكل 3.26a
$y = \sin x$

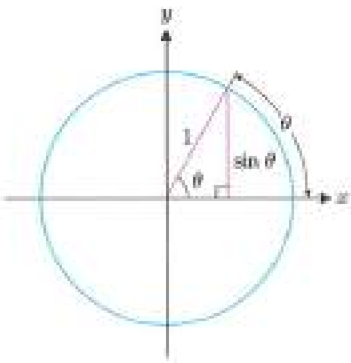


الشكل 5.26b
مشتقة $f(x) = \sin x$

قبل أن ننتقل إلى حساب مشتقات الدوال المثلثية، يجب أولًا الأخذ في الاعتبار نهايات قليلة تشمل الدوال المثلثية. (نحن نشير إلى هذه النتائج على أنها نظريات مثبتة–صغيرة تؤدي إلى بعض النتائج الأكثر أهمية.) ستجد بعد وقت قصير لماذا نضع في اعتبارنا هذا أولًا

> **النظرية 6.1**
>
> $$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0.$$

تبدو هذه النتيجة منطقية بالتأكيد، وخصوصًا عندما نضع في حسباننا التمثيل البياني لـ $y = \sin x$. وفي الواقع، لقد استخدمنا ذلك لبعض الوقت الآن. وذكرنا هذا (بدون برهان) كجزء من النظرية 3.4. ونحن الآن نثبت النتيجة.



الشكل 3.27
تعريف $\sin \theta$

البرهان

بالنسبة إلى $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$، من الشكل 3.27. لاحظ أن

$$0 \le \sin \theta \le \theta \qquad (6.1)$$

بما أن

$$\lim_{\theta \to 0^+} 0 = 0 = \lim_{\theta \to 0^+} \theta \qquad (6.2)$$

تتبع من نظرية الشطيرة، ومن (6.1) و(6.2) أن

$$\lim_{\theta \to 0^+} \sin \theta = 0$$

نحن نتركها كتدريب لتوضيح أن

$$\lim_{\theta \to 0^-} \sin \theta = 0$$

بما أن كلا النهايتين اللذين لهما نهاية واحدة فقط متماثلان، فهذا يتبع

$$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0 \quad \blacksquare$$

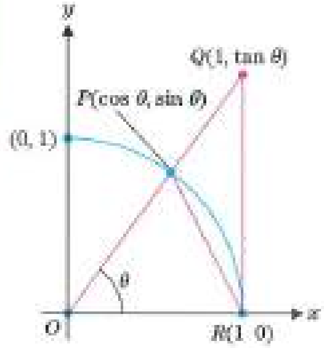
النظرية 6.2

$$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$$

تم تخمين أن تكون النتيجة التالية صحيحة (وفقًا لتمثيل بياني وبعض الحسابات) عندما قدمنا النهايات لأول مرة. يمكننا الآن أن نثبت النتيجة

النظرية 6.3

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



الشكل 3.28

البرهان

على فرض أن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

بالعودة إلى الشكل 3.28 لاحظ أن منطقة القطاع الدائري OPR أكبر من منطقة المثلث OPR، ولكنها أصغر من منطقة المثلث OQR، أي إن

$$0 < \text{مساحة } \Delta OPR < \text{مساحة القطاع الدائري } OPR < \text{مساحة } \Delta OQR \qquad (6.3)$$

يمكنك أيضًا من خلال الشكل 3.29 معرفة أن

$$\text{مساحة القطاع الدائري } OPR = (\text{نصف القطر})^2 \pi \,(\text{الكسر الذي يمثله القطاع من الدائرة})$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(1^2)\pi = \frac{\theta}{2} \qquad (6.4)$$

أيضًا

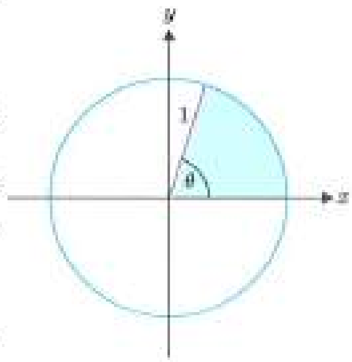
$$\text{مساحة } \Delta OPR = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}(1)\sin\theta \qquad (6.5)$$

و

$$\text{مساحة } \Delta OQR = \frac{1}{2}(1)\tan\theta \qquad (6.6)$$

وهكذا من (6.3)، و(6.4)، و(6.5)، و(6.6) يوجد لدينا

$$0 < \frac{1}{2}\sin\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta. \qquad (6.7)$$



الشكل 3.29

قطاع دائري

إذا قسمنا (6.7) على $\frac{1}{2}\sin\theta$ (لاحظ أن هذا موجب، لذلك لا تتأثر المتباينات)، نحصل على

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

بأخذ المعكوسات الضربية (ومرة أخرى، كل شيء هنا موجب)، نجد

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta. \qquad (6.8)$$

نتركها كتمرين لتوضيح أن المتباينة (6.8) تبقى كما هي إذا كان $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. وفي النهاية، لاحظ أن

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 = \lim_{\theta\to 0} 1.$$

ولذلك تتبع النظرية (6.6) ونظرية الشطيرة التي تنص على أن النظرية

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

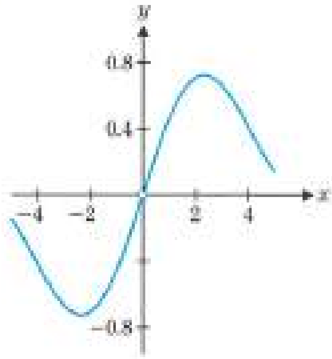
أيضًا. ■

نحتاج إلى نتيجة نهاية إضافية ثانية قبل معالجة مشتقات الدوال المثلثية.

النظرية 6.4

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

بالتحقق من التمثيل البياني لـ $y = \frac{1-\cos x}{x}$ في الشكل 3.30 وجداول قيم الدوال التي تتبعها، يجب أن تكون النتيجة معقولة.



الشكل 3.30

$y = \frac{1-\cos x}{x}$

x	$\frac{1-\cos x}{x}$
0.1	0.04996
0.01	0.00499996
0.001	0.0005
0.0001	0.00005

x	$\frac{1-\cos x}{x}$
−0.1	−0.04996
−0.01	−0.00499996
−0.001	−0.0005
−0.0001	−0.00005

البرهان

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$$ اضرب البسط والمقام في $1+\cos\theta$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$ اضرب البسط والمقام

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$ بما إن $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left[\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right]$$

$$= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$ افصل الحدود لأن النهايتين موجودتين

$$= (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0,$$

كما تم تخمينه. ■

نحن في النهاية في موقع حساب مشتقات دوال الـ sine و الـ cosine.

النظرية 6.1

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

البرهان

من تعريف النهاية للمشتقة. بالنسبة لـ $f(x) = \sin x$، يوجد لدينا

$$\frac{d}{dx}\sin x = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}$$

متطابقات مثلثية $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h - \sin x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}$$

تجميع حدود $\sin x$ و حدود $\sin h$ بشكل منفصل.

$$= (\sin x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + (\cos x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

تحليل الى عامل $\sin x$ من الحد الأول و $\cos x$ من الحد الثاني

$$= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x,$$

من المبرهنتين التابعتين 6.3 و 6.4. ■

ثم نترك إثبات النتيجة التالية كتمرين.

النظرية 6.2

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

اشتقاق الدوال المثلثية الأربعة المتبقية التي تتبع قاعدة ناتج القسمة.

النظرية 6.3

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$$

البرهان

باستخدام قاعدة ناتج القسمة.

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\right](\cos x) - (\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x.$$ ■

تم ترك اشتقاقات الدوال المثلثية المتبقية كتمارين. تم تلخيص اشتقاقات كل الدوال المثلثية أدناه.

$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
$\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

يوضح المثال 6.1 أين تكون قاعدة ناتج الضرب ضرورية.

مثال 6.1 مشتقة قاعدة ناتج الضرب

أوجد مشتقة $f(x) = x^5 \cos x$

الحل من قاعدة ناتج الضرب. لدينا

$$\frac{d}{dx}(x^5\cos x) = \left[\frac{d}{dx}(x^5)\right]\cos x + x^5\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= 5x^4\cos x - x^5 \sin x.$$

مثال 6.2 حساب بعض المشتقات الاعتيادية

احسب مشتقات $(a)\ f(x) = \sin^2 x$ و $(b)\ g(x) = 4\tan x - 5\csc x$

الحل بالنسبة إلى (a)، نعمل أولاً على إعادة كتابة الدالّة على شكل $f(x) = (\sin x)^2$ واستخدام قاعدة السلسلة. نجد

$$f'(x) = (2\sin x)\underbrace{\frac{d}{dx}(\sin x)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = 2\sin x \cos x.$$

بالنسبة إلى (b)، لدينا

$$g'(x) = 4\sec^2 x + 5\csc x \cot x$$

يجب عليك الاهتمام بالتمييز بين التسميات المشابهة التي لها معانٍ مختلفة كليًا، كما توضح في المثال 6.3.

مثال 6.3 مشتقات بعض الدوال المثلثية المتشابهة

احسب اشتقاق $(a)\ f(x) = \cos x^3$، $(b)\ g(x) = \cos^3 x$ و $(c)\ h(x) = \cos 3x$

الحل لاحظ الاختلافات بين هذه الدوال الثلاثة. باستخدام الأقواس المضمنة التي لا يضرنا وضعها، يوجد لدينا $f(x) = \cos(x^3)$، $g(x) = (\cos x)^3$ و $h(x) = \cos(3x)$. بالنسبة إلى (a) يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x^3) = -\sin(x^3)\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = -\sin(x^3)(3x^2) = -3x^2\sin x^3.$$

ثم بالنسبة إلى (b) يوجد لدينا

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x)^3 = 3(\cos x)^2 \underbrace{\frac{d}{dx}(\cos x)}_{\text{مشتقة من الداخل}}$$

$$= 3(\cos x)^2(-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x.$$

وفي النهاية، بالنسبة إلى (c) يوجد لدينا

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 3x) = -\sin(3x)\underbrace{\frac{d}{dx}(3x)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = -\sin(3x)(3) = -3\sin 3x.$$

بالجمع بين القواعد المثلثية وقواعد ناتج الضرب وناتج القسمة والسلسلة، يمكننا ايجاد الاشتقاق للعديد من الدوال المعقدة.

مثال 6.4 مشتقة تشتمل على قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج القسمة

أوجد مشتقة $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

الحل لدينا

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+1}\right)}_{\text{مشتقة من الداخل}} \quad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2(x+1) - 2x(1)}{(x+1)^2} \quad \text{قاعدة ناتج القسمة}$$

$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}$$

مثال 6.5 إيجاد معادلة مماس

أوجد معادلة مماس على منحنى

$y = 3\tan x - 2\csc x$

عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل المشتقة هي:

$$y' = 3\sec^2 x - 2(-\csc x \cot x) = 3\sec^2 x + 2\csc x \cot x.$$

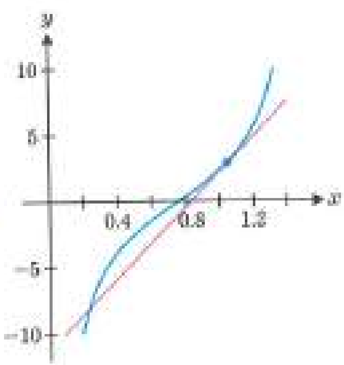
عند $x = \frac{\pi}{3}$، يوجد لدينا

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3(2)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

خط المماس ذي الميل $\frac{40}{3}$ ونقطة المماس $\left(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ معادلته

$$y = \frac{40}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

نحن نبين تمثيلاً بيانيًا للدالة والمماس في الشكل 3.31.



الشكل 3.31
$y = 3\tan x - 2\csc x$
والمماس عند $x = \frac{\pi}{3}$

الشكل 3.32
نظام الزنبرك-الكتلة

تطبيقات

تبرز أهمية الدوال المثلثية بشكل طبيعي إلى حد ما في حل العديد من المسائل الفيزيائية. على سبيل المثال، يمكن توضيح أن الحركة الرأسية لكتلة معينة معلقة من زنبرك. في غياب الاحتكاك (على سبيل المثال، عندما توجد مقاومة للحركة مثل مقاومة الهواء، يتم إلغاؤها)، ويتم حسابها باستخدام

$$u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

حيث $u(t)$ هو التردد، و t هو الزمن و a و b هم الثوابت. (راجع الشكل 3.32 للحصول على تصور لنظام الزنبرك-الكتلة مثل هذا).

مثال 6.6 تحليل نظام الزنبرك-الكتلة

لنفترض أن $u(t)$ يقيس الإزاحة (المقيسة بالبوصة) لكتلة معلقة من زنبرك لمدة t ثانية بعد تحريرها وأن

$$u(t) = 4\cos 2t$$

أوجد السرعة المتجهة في أي زمن t وحدد أقصى سرعة متجهة.

الحل بما أن $u(t)$ يمثل الموقع (الإزاحة)، يتم تحديد السرعة المتجهة باستخدام $u'(t)$. يوجد لدينا

$$u'(t) = 4(-\sin 2t)\cdot 2 = -8\sin 2t$$

حيث يتم قياس $u'(t)$ بالبوصة في الثانية. وبالطبع فإن $2t$ يتذبذب بين -1 و 1 ولذلك، فإن أكبر قيمة يصل إليها $u'(t)$ يمكن أن تكون $-8(-1) = 8$ بوصة في الثانية. يحدث ذلك عندما يكون $\sin 2t, = -1$ وهكذا عند $t = 3\pi/4t, t = 7\pi/4$ وما إلى ذلك. لاحظ أن في هذه الأوقات $u(t) = 0$ لذا تتحرك الكتلة بأسرع شكل عندما تمر من خلال موضع اتزانها. ■

تمارين 3.6

تمارين كتابية

1. يرسم معظم الأشخاص منحنيات sine الزاوية التي تتسم بالانحدار والاستدارة الشديدين ومع الأخذ في الحسبان نتائج هذا الدرس، ناقش الشكل الفعلي لمنحنى sine الزاوية. بالبدء عند (0, 0)، ما مدى الانحدار الذي يجب أن يكون عليه التمثيل البياني؟ ما التمثيل البياني الأكثر انحدارًا الذي يجب رسمه في أي مكان؟ في أي المناطق يكون التمثيل البياني مستقيمًا تقريبًا وأين يكون منحنيًا بدرجة كبيرة؟
2. في الكثير من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، يجعل الحد $\sin x$ الحسابات صعبة. يوجد تبسيط عام وهو استبدال $\sin x$ و x مصحوبًا بتفسير "$\sin x$ يساوي تقريبًا x للزوايا الصغيرة". ناقش هذا التقريب في ضوء المماس مع $y = \sin x$ عند $x = 0$. ما مدى الحجم الصغير للزاوية الصغيرة التي يكون تقريبها جيدًا؟ المماس مع $y = \cos x$ عند $x = 0$ هو ببساطة $y = 1$. ولكن التبسيط "$\cos x$ يساوي 1 تقريبًا لكل الزوايا الصغيرة" لا يتم استخدامه أبدًا. لماذا سيكون هذا التقريب أقل فائدة من $\sin x \approx x$؟
3. استخدم التحليل البياني كما في النص لمناقشة أن مشتقة $\cos x$ هي $-\sin x$.
4. إذا كانت دالّة f قابلة للاشتقاق لها دورة تتكون من P فاشرح لماذا f' أيضًا له دورة تتكون من P.

في التمارين 1–18، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = 4\sin 3x - x$
2. $f(x) = 4x^2 - 3\tan 2x$
3. $f(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$
4. $f(t) = t^2 + 2\cos^2 4t$
5. $f(x) = x\cos 5x^2$
6. $f(x) = x^3 \sec 4x$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{\csc^4 2x}$
9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$
10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$
11. $f(w) = \dfrac{1}{\sin 4w}$
12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$
13. $f(x) = 2\sin 2x\cos 2x$
14. $f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$
15. $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1}$
16. $f(x) =$ [illegible] $\sin x \sec 3x$
17. $f(x) = \sin^3\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$
18. $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3+2x))$

في التمارين 19–22، أوجد مشتقة كل دالّة.

19. (a) $f(x) = \sin x^2$
(b) $f(x) = \sin^2 x$
(c) $f(x) = \sin 2x$
20. (a) $f(x) = \cos\sqrt{x}$
(b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$
(c) $f(x) = \cos\frac{1}{2}x$
21. (a) $f(x) = \sin x^2 \tan x$
(b) $f(x) = \sin^2(\tan x)$
(c) $f(x) = \sin(\tan^2 x)$
22. (a) $f(x) = \sec x^2 \tan x^2$
(b) $f(x) = \sec^2(\tan x)$
(c) $f(x) = \sec(\tan^2 x)$

في التمارين 26–23، أوجد معادلة المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$.

23. $f(x) = \sin 4x, a = \frac{\pi}{8}$

24. $f(x) = \tan 3x, a = 0$

25. $f(x) = x^2 \cos x, a = \frac{\pi}{2}$

26. $f(x) = x \sin x, a = \frac{\pi}{2}$

في التمارين 30–27، استخدم دالّة الموقع لإيجاد السرعة المتجهة في الزمن $t = t_0$. على فرض أن الوحدات بالأقدام والثواني.

27. $s(t) = t^2 - \sin 2t, t_0 = 0$

28. $s(t) = 4 + 3\sin t, t_0 = \pi$

29. $s(t) = \frac{\cos t}{t}, t_0 = \pi$

30. $s(t) = t\cos(t^2 + \pi), t_0 = 0$

31. يهتز زنبرك معلق من السقف إلى أعلى وإلى أسفل. وقد حُدد موقعه الرأسي في الزمن t باستخدام $f(t) = 4\sin 3t$. (a) أوجد السرعة المتجهة للزنبرك في الزمن t. (b) ما أقصى سرعة للزنبرك؟ (c) ما الموضع عندما يصل إلى أعلى سرعة له؟

32. في التمرين 31، (a) متى تكون قيم السرعة المتجهة تساوي 0؟ (b) ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة تساوي 0؟ (c) متى يغير الزنبرك اتجاهاته؟

33. استخدم النهايات الأساسية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ لإيجاد النهايات التالية.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ (b) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{4t}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{5x}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

34. استخدم النهايات الأساسية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ لإيجاد النهايات التالية.

(a) $\lim_{t\to 0} \frac{2t}{\sin t}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

35. إذا كان $f(x) = \sin 2x$، أوجد $f^{(75)}(x)$ و $f^{(150)}(x)$.

36. إذا كان $f(x) = \cos 3x$، أوجد $f^{(77)}(x)$ و $f^{(150)}(x)$.

37. بالنسبة للنظرية التابعة 6.1، وضّح أن $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

38. استخدم النظرية التابعة 6.1 والمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لإثبات النظرية التابعة 6.2

39. استخدم المتطابقة $\cos(x + h) = \cos x\cos h - \sin x\sin h$ لإثبات النظرية 6.2

40. استخدم قاعدة ناتج القسمة لاشتقاق القوانين الخاصة بمشتقات $\csc x$ و $\cot x, \sec x$

41. كرر التمرين 13 باستخدام CAS. إذا لم تكن إجابته بالشكل نفسه لإجابتنا في نهاية الكتاب، فاشرح طريقة حساب CAS إجابته.

42. كرر التمرين 14 باستخدام CAS. إذا لم تكن إجابته تساوي 0، فاشرح طريقة حساب CAS لإجابته.

43. أوجد مشتقة $f(x) = 2\sin^2 x + \cos 2x$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع الرقم 0. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

44. أوجد مشتقة $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\sec x\tan x$ اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

45. بالنسبة للدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ (a) وضّح أن f متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x (إرشاد: ركّز على $x = 0$.) (b) وضّح أن المشتقة $f'(x)$ متصلة.

46. في إثبات $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$، أين تستخدم افتراض أن x يكون في قياس دائري؟ إذا كنت تتمتع بإمكانية الدخول إلى برنامج CAS، فأوجد مشتقة $\sin x°$، واشرح من أين حصلنا على $\pi/180$.

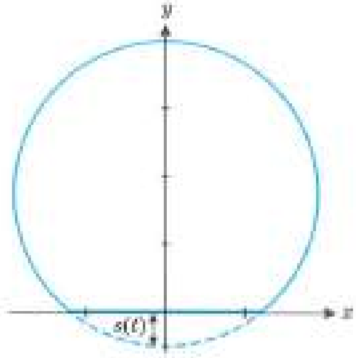
47. ارسم التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ ومماسه عند $x = 0$. جرّب تحديد عدد مرات تقاطعه عن طريق التكبير في التمثيل البياني (ولكن لا تستغرق الكثير من الوقت في عمل ذلك). وضّح أن الـ $f(x) = \sin x$، $f'(x) < 1$ لكل $0 < x < 1$. وضّح لماذا يتضمن هذا أن $\sin x < x$ لكل $0 < x < 1$. استخدم برهانًا مشابهًا لتوضيح أن $\sin x > x$ لكل $-1 < x < 0$. اشرح لماذا يتقاطع $y = \sin x$ مع $y = x$ في نقطة واحدة فقط.

48. بالنسبة إلى القيم الموجبة لـ k، حدد كم عدد المرات التي يتقاطع فيها $y = \sin kx$ مع $y = x$. وعلى وجه الخصوص، ما أكبر قيمة لـ k والتي يوجد تقاطع وحيد لها؟ جرّب تحديد أكبر قيمة لـ k حيث يوجد لها ثلاثة تقاطعات.

تمارين استكشافية

1. للدالّة $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ العديد من الخصائص غير الاعتيادية. وضّح أن f متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ومع ذلك، فإن $f'(x)$ غير متصلة عند $x = 0$. لرؤية ذلك، وضّح أن $f'(x) = -1$ لـ $x = \frac{1}{4\pi}, x = \frac{1}{2\pi}$ وهكذا. ثم وضّح أن $f'(x) = 1$ لـ $x = \frac{1}{3\pi}, x = \frac{1}{\pi}$ وهكذا. اشرح لماذا يثبت ذلك أن $f'(x)$ لا يمكن أن تكون متصلة عند $x = 0$.

2. عندما ترتد كرة، نعتقد غالبًا أن الارتداد يحدث لحظيًا. لا يأخذ ذلك في الحسبان أن الكرة تنضغط بالفعل وتبقى متصلة بالأرض لفترة وجيزة من الزمن. كما هو موضح في كتاب جون ويسون the Science of Soccer (علم كرة القدم)، المقدار s الذي تنضغط فيه الكرة يحقق المعادلة $s''(t) = -\frac{cp}{m}s(t)$، حيث c هو محيط الكرة، p هو ضغط الهواء داخل الكرة و m هو كتلة الكرة.



كرة تنضغط

لنفرض أن الكرة تصدم الأرض في الزمن 0 مع سرعة متجهة قدرها v m/s. ثم $s(0) = 0$ و $s'(0) = v$. وضّح أن $s(t) = \frac{v}{k}\sin kt$ يلبي الشروط الثلاثة $s''(t) = -\frac{cp}{m}s(t)$ و $s(0) = 0$ و $s'(0) = v$ مع $k = \sqrt{\frac{cp}{m}}$ استخدم خصائص دالّة الـ $\sin$ لتوضيح مدة الارتداد وهي $\frac{\pi}{k}$ ثانية وأوجد أقصى قدر للانضغاط. بالنسبة إلى كرة قدم مع القيم $c = 0.7$ m، $p = 0.86 \times 10^5$ N/m^2، $v = 15$ m/s، ونصف القطر $R = 0.112$ m و $m = 0.43$ kg. احسب الارتداد وأقصى قدر للانضغاط.

مع الجمع بين الفيزياء لما قبل الارتداد وأثناءه وبعده، نحصل على ارتفاع مركز كرة نصف قطرها R،

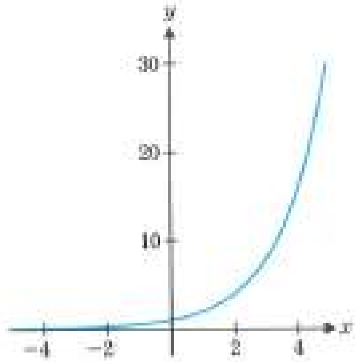
$$h(t) = \begin{cases} -4.9t^2 - vt + R & , \quad t < 0 \\ R - \frac{v}{k}\sin kt & , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{k} \\ -4.9(t - \frac{\pi}{k})^2 + v(t - \frac{\pi}{k}) + R & , \quad t > \frac{\pi}{k}. \end{cases}$$

حدد ما إذا كانت $h(t)$ متصلة لكل قيم t وارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لهذه الدالّة.

الدرس 3-7 اشتقاق الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية هي دوال من بين أكثر الدوال المعروفة التي نقابلها في التطبيقات. نحن نبدأ بتطبيق بسيط في الأعمال.

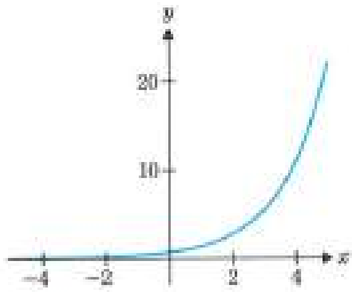
على فرض أن لديك استثمارًا تتضاعف قيمته كل عام. إذا بدأ الاستثمار بمبلغ \$100، فستكون قيمة الاستثمار بعد عام واحد هي \$100(2) أو \$200. بعد عامين، ستكون قيمته هي \$100(2)(2) = \$400 وبعد ثلاث سنوات ستكون قيمته $\$100(2^3) = \$800$. وبصفة عامة، بعد t عامًا، ستكون قيمة استثمارك هي $\$100(2^t)$. وبما أن القيمة تتضاعف كل عام، فيمكنك وصف المعدل العائد على الاستثمار بأنه 100% (ويسمى عادة **النسبة المئوية السنوية للمردود** أو **APY**). بالنسبة إلى طالب يدرس التفاضل والتكامل، لا بد أن يشير المصطلح معدل إلى المشتقة.



الشكل 3.33
$y = 2^x$

نحن نضع في حسباننا أولًا $f(x) = a^x$ بالنسبة لثابت معين $a > 1$ (يسمى **الأساس**). إن التمثيل البياني سيبدو متشابهًا إلى حدٍ ما مع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$، الموضح في الشكل 3.33.

لاحظ أنك حينما تنظر من اليسار إلى اليمين، يرتفع التمثيل البياني. لذلك تكون ميول المماسات، وأيضًا قيم المشتقة موجبة دائمًا. وأيضًا، كلما نظرت إلى أقصى اليمين، كلما زاد انحدار التمثيل البياني وكلما، زادت القيمة الموجبة للمشتقة. وعلى يسار نقطة الأصل، تكون المماسات أفقية تقريبًا، ومن ثم تكون المشتقة موجبة ولكنها قريبة من الصفر. الرسم الخاص بـ $y = f'(x)$ الموضح في الشكل 3.34 متسق مع كل المعلومات أعلاه. (استخدم الحاسوب لإنشاء سلاسل من التمثيلات البيانية لـ $y = a^x$ للعديد من القيم المختلفة لـ a لكل من $0 < a < 1$ و $a > 1$، بالتماشي مع التمثيلات البيانية للمشتقات المقابلة وسيمكنك معرفة نمط معين.) وعلى وجه الخصوص، لاحظ أن رسم المشتقة يمثل بدرجة قريبة التمثيل البياني للدالة نفسها.



الشكل 3.34
مشتقة $f(x) = 2^x$

اشتقاقات الدوال الأسية

يعطينا تعريف النهاية الاعتيادي للمشتقة $f(x) = a^x$ و $a > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \quad \text{من القواعد المستخدمة للأسس}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad \text{تحليل الحدود المشتركة } a^x \qquad (7.1)$$

ولسوء الحظ، لا يوجد لدينا في الوقت الحالي وسائل لحساب النهاية في (7.1). ومع ذلك، على فرض وجود النهاية، ينص (7.1) على أن

$$\frac{d}{dx}a^x = (\text{ثابت})\, a^x \qquad (7.2)$$

وعلاوة على ذلك فإن (7.2) متسق مع ما لاحظناه بيانيًا في الأشكال 3.33 و 3.34. السؤال الذي نواجهه الآن هو، هل النهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

موجودة لكل (أو أي) قيم لـ $a>0$؟ نحن نستكشف هذه النهاية عدديًا في الجدول التالي الخاص بـ $a=2$.

h	$\frac{2^h-1}{h}$
0.01	0.6955550
0.0001	0.6931712
0.000001	0.6931474
0.0000001	0.6931470

h	$\frac{2^h-1}{h}$
−0.01	0.6907505
−0.0001	0.6931232
−0.000001	0.6931469
−0.0000001	0.6931472

يقترح الإثبات العددي أن النهاية في السؤال موجودة وأن

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\approx 0.693147$$

تركناها كتمرين لتوضيح أن الإثبات العددي يقترح أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\approx 1.098612$$

القيم التقريبية لهذه النهايات لا تلفت الانتباه كثيرًا حتى تلاحظ أن

$\ln 2\approx 0.693147$ و $\ln 3\approx 1.098612$

ستجد نتائج مشابهة إذا وضعت في حسابات النهاية الموجودة في (7.1) بالنسبة إلى قيم $a>0$ (جرّب تقدير العديد من تلك القيم بنفسك.) يقترح هذا النتيجة العامة التالية.

النظرية 7.1

بالنسبة إلى أي ثابت $a>0$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a \qquad (7.3)$$

إثبات هذه النتيجة ليس كاملًا، وهذا بسبب أننا لا نعرف طريقة حساب النهاية في (7.1). والآن، يجب أن توافق على الإثباتات العددية والبيانية والبراهين الجبرية (المكتملة تقريبًا) التي تدعم هذا التخمين.

مثال 7.1 إيجاد معدل التغيّر لاستثمار معين

إذا كانت قيمة استثمار معين هي 100 درهم إماراتي تتضاعف كل عام، ستكون القيمة بعد t عام محسوبة باستخدام $v(t)=100\,2^t$. أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغيّر في القيمة.

الحل المعدل اللحظي للتغير هو الاشتقاق

$$v'(t)=100\,2^t\ln 2$$

سيكون معدل التغيّر الصلة هو

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{100\,2^t \ln 2}{100\,2^t} = \ln 2 \approx 0.693$$

سيكون التغير بالنسبة المئوية حوالي 69.3% في العام. هذا مدهش بالنسبة إلى معظم الأشخاص. ستسبب نسبة 69.3% مضاعفة استثمارك في كل عام إذا كانت مركبة "باستمرار". ■

القاعدة الأكثر استخداماً (بدرجة كبيرة) هي العدد غير النسبي e (يحدث بشكل طبيعي). لا بد أن تلاحظ على الفور أهمية هذا الخيار. بما أن $\ln e = 1$، فإن اشتقاق $f(x) = e^x$ في أبسط صورة

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x$$

بالرغم من أن هذه حالة خاصة ببساطة للنظرية 7.1، فهذه النتيجة مهمة بما يكفي بحيث تذكرها كنتيجة مستقلة.

النظرية 7.2

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

من المحتمل أنك ستوافق على أن هذا هو أسهل قانون للاشتقاق يمكن تذكره. في الدرس 3.6 نظرنا إلى نموذج بسيط من اهتزازات كتلة تتعلق من زنبرك. ونوضح الآن مزيداً من مواقف الحياة اليومية بشكل أكبر.

مثال 7.2 قاعدة السلسلة مع الدوال الأسيّة

أوجد مشتقة (a) $f(x) = 3e^{x^2}$، (b) $g(x) = xe^{2/x}$ و (c) $h(x) = 3^{2x^2}$.

الحل (a) من قاعدة السلسلة نحصل على

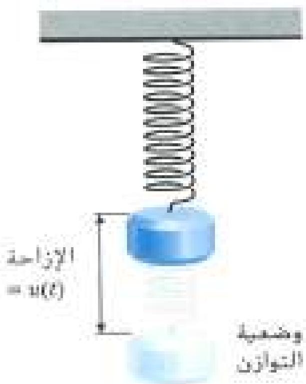
$$f'(x) = 3e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 3e^{x^2}(2x) = 6xe^{x^2}$$

(b) باستخدام قاعدة ناتج الضرب وقاعدة السلسلة، نحصل على

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1)e^{2/x} + xe^{2/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= e^{2/x} + xe^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right) \\ &= e^{2/x} - 2\frac{e^{2/x}}{x} \\ &= e^{2/x}(1 - 2/x) \end{aligned}$$

(c) في النهاية، يوجد لدينا

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3^{2x^2}\ln 3\frac{d}{dx}(2x^2) \\ &= 3^{2x^2}\ln 3\,(4x) \\ &= 4x\,(\ln 3)\,3^{2x^2} \end{aligned}$$ ■



الشكل 3.35

مثال 7.3 إيجاد السرعة المتجهة لكتلة معلّقة

إذا همسنا مخاطلة (أي مقاومة للحركة بسبب الاحتكاك على سبيل المثال) في نموذج نظام الزنبرك-الكتلة، (راجع الشكل 3.35) الإزاحة الرأسية في الزمن t

للكتلة المعلّقة من زنبرك معين يمكن وصفها باستخدام

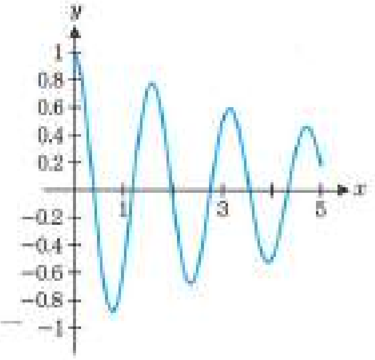
$$u(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\omega t) + Be^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

حيث يكون كل من A، B، α و ω ثوابت. بالنسبة إلى كل من

(a) $u_1(t) = e^{-t}\cos t$ و (b) $u_2(t) = e^{-t/6}\cos 4t$

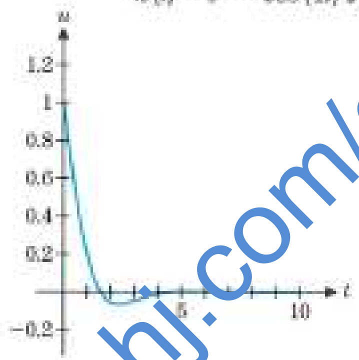
ارسم تمثيلًا بيانيًا لحركة الثقل واحسب السرعة المتجهة عند أي زمن t

الحل الشكل 3.36a يوضح تمثيلًا بيانيًا لـ $u(t) = e^{-t}\cos t$. لاحظ أنه يبدو مهتزًا لفترة قصيرة ثم يتوقف بسرعة عند $u = 0$ (بالرغم من أن التمثيل البياني يستمر في التذبذب، فإن هذه التذبذبات بسيطة جدًا ببساطة حتى تتم رؤيتها باستخدام هذا المقياس عند $t > 5$.) هذا بالضبط هو نوع السلوك الذي تتوقعه من نظام التعليق في سيارتك (نظام مشابه للزنبرك - الكتلة) عندما تصطدم بنتوء في الطريق. إذا كان نظام التعليق لسيارتك يحتاج إلى إصلاح، فربما تحصل على سلوك مشابه بدرجة أكبر لما تم توضيحه في الشكل 3.36b. وهو التمثيل البياني لـ $v(t) = e^{-t/6}\cos(4t)$.



الشكل 3.36b

$y = e^{-t/6}\cos(4t)$



الشكل 3.36a

$u(t) = e^{-t}\cos t$

يتم تحديد السرعة المتجهة للكتلة باستخدام الاشتقاق. وباستخدام قاعدة ناتج الضرب، نحصل على

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-t})\cos t + e^{-t}\frac{d}{dt}(\cos t) \\ &= e^{-t}\frac{d}{dt}(-t)\cos t - e^{-t}\sin t \\ &= -e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

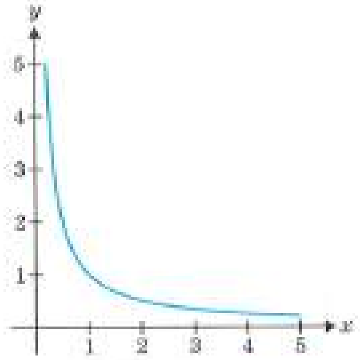
$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-t/6})\cos(4t) + e^{-t/6}\frac{d}{dt}[\cos(4t)] \\ &= e^{-t/6}\frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{6}\right)\cos(4t) + e^{-t/6}[-\sin(4t)]\frac{d}{dt}(4t) \\ &= -\frac{1}{6}e^{-t/6}\cos(4t) - 4e^{-t/6}\sin(4t). \end{aligned}$$

في اللمحة الأولى، قد تبدو قاعدة السلسلة للدوال الأسية مختلفة قليلًا بشكل جزئي لأن ما "بداخل" الدالة الأسية $e^{f(x)}$ هو الأس $f(x)$. احرص على عدم تغيير الأس عند حساب مشتقة دالة أسية.

مشتقة اللوغاريتم الطبيعي

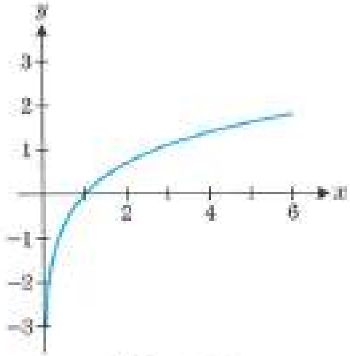
ترتبط دالّة اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ بدرجة قريبة من الدوال الأسية. لقد رأيناها بالفعل ترداد كجزء من قانون الاشتقاق الأسي العام (7.3). إن التمثيل البياني للوغاريتم الطبيعي يبدو مثل الموضّح في الشكل 3.37a.

يتم تعريف الدالّة فقط لـ $x > 0$ وبينما تنظر إلى اليمين يرتفع التمثيل البياني دائمًا. وهكذا، ميول المماسات أيضًا وأيضًا تكون قيم المشتقة موجبة دائمًا. وعلاوة على ذلك، بما أن $x \to \infty$، فإن ميول المماسات تصبح موجبة بدرجة أقل وتبدو أنها تقترب من 0. ومن ناحية أخرى، بما أن x يقترب من 0 لجهة اليمين، فإن التمثيل البياني يصبح أكثر انحدارًا ومن ثم تصبح المشتقة أكبر وأكبر بدون قيود. يتوافق التمثيل البياني في الشكل 3.37b مع كل هذه الملاحظات. هل يبدو هذا التمثيل البياني مثل أي تمثيل بياني لأي دالّة تعرفها؟



الشكل 3.37b

مشتقة $f(x) = \ln x$



الشكل 3.37a

$y = \ln x$

باستخدام تعريف المشتقة، نحصل على ما يلي لـ $f(x) = \ln x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

لسوء الحظ، نحن لا نعرف طريقة لإيجاد قيمة هذه النهاية أو حتى حقيقة ما إذا كانت موجودة أو لا، بالرغم من أنه يمكننا تقريب قيمتها لأي قيمة معلومة لـ x.

ومن ناحية أخرى، تذكر أن بالنسبة إلى $x > 0$ ، $y = \ln x$ إذا كان وفقط إذا $e^y = x$. من النظريتين 5.2 و 7.2 يوجد لدينا ذلك لـ $g(x) = \ln x$ و $f(x) = e^x$ ، $f'(x) = e^x$. وهكذا،

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

والذي يثبت النتيجة التالية.

النظرية 7.3

لكل $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad (7.4)$$

مثال 7.4 مشتقات اللوغاريتميات

أوجد مشتقة ما يأتي: (a) $f(x) = x \ln x$ ، (b) $g(x) = \ln x^3$ و (c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

الحل (a) باستخدام قاعدة ناتج الضرب، نحصل على

$$f'(x) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1$$

(b) يمكننا بالتأكيد استخدام قاعدة السلسلة لاشتقاق $g(x)$ ومع ذلك، باستخدام خصائص اللوغاريتميات، تذكر أن بإمكاننا إعادة كتابة $g(x) = \ln x^3 = 3\ln x$ واستخدام (7.4) ، ونحصل على

$$g'(x) = 3\frac{d}{dx}(\ln x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

(c) باستخدام قاعدة السلسلة $h(x)$، نحصل على

$$h'(x) = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$ ■

وكبديل لتعليم قانون اشتقاق منفصل للدالّة الأسية العامة، لاحظ أنه بالنسبة إلى أي أساس $a > 0$، يمكننا كتابة

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

باستخدام القواعد العادية للأسس واللوغاريتميات. ثم يتبع ذلك

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \times \frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{x\ln a} \times \ln a$$
$$= a^x \times \ln a$$

وهذا يمثل نتيجة النظرية 7.1

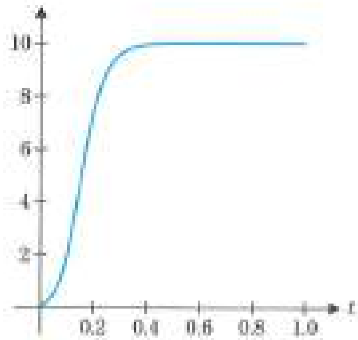
مثال 7.5 تحليل تركيز مادة كيميائية

يتم تحديد التركيز c لمادة كيميائية معيّنة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{10}{9e^{-20t}+1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 10.

الحل قبل حساب المشتقة، انظر بعناية إلى الدالّة c. المتغير المستقل هو t والحد الوحيد الذي يشمل t موجود في هذا المقام. لذا فإننا لا نحتاج إلى استخدام قاعدة ناتج القسمة. وبدلاً من ذلك، اكتب أولاً الدالّة بالصيغة $c(t) = 10(9e^{-20t}+1)^{-1}$ واستخدم قاعدة السلسلة يوجد لدينا

$$c'(t) = -10(9e^{-20t}+1)^{-2}\frac{d}{dt}(9e^{-20t}+1)$$
$$= -10(9e^{-20t}+1)^{-2}(-180e^{-20t})$$
$$= 1800e^{-20t}(9e^{-20t}+1)^{-2}$$
$$= \frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2} > 0$$

بما أن لكل المماسات ميل موجب، فإن التمثيل البياني لـ $y = c(t)$ يرتفع من اليسار إلى اليمين كما هو موضح في الشكل 3.38.



الشكل 3.38
التركيز الكيميائي

بما أن التركيز يزداد في كل الوقت، فإن التركيز يظل دائمًا أقل من القيمة المحددة $\lim_{t\to\infty} c(t)$ والتي يمكن حسابها بسهولة لتصبح

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10}{9e^{-20t}+1} = \frac{10}{0+1} = 10$$ ■

التفاضل اللوغاريتمي

توجد طريقة ممتازة تسمى **التفاضل اللوغاريتمي** تستخدم قواعد اللوغاريتميات للمساعدة على إيجاد مشتقات دوال معينة لا يوجد لدينا لها حاليًا قوانين اشتقاق. على سبيل المثال، لاحظ أن الدالة $f(x) = x^x$ ليست دالة أسية لأن الأساس ليس ثابتًا وليست دالة قوة لأن الأس ليس ثابتًا. في المثال 7.6 نوضح طريقة الاستفادة من خصائص اللوغاريتميات لإيجاد مشتقة دالة مثل تلك.

مثال 7.6 التفاضل اللوغاريتمي

أوجد مشتقة $f(x) = x^x$ لـ $x > 0$.

كما تمت ملاحظته بالفعل، لا تنطبق أي من قواعد الاشتقاق الموجودة لدينا. لقد بدأنا بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي المعادلة $f(x) = x^x$. لدينا

$$\ln[f(x)] = \ln(x^x) = x\ln x$$

من الخصائص المعتادة للوغاريتميات. نقوم الآن بتفاضل كلا الطرفين لهذه المعادلة الأخيرة. باستخدام قاعدة السلسلة على الطرف الأيسر وقاعدة ناتج الضرب على الطرف الأيمن، نحصل على

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = (1)\ln x + x\frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$$

وبالحل لإيجاد $f'(x)$، فإننا نحصل على

$$f'(x) = (\ln x + 1)f(x) = (\ln x + 1)x^x$$

تمارين 3.7

تمارين كتابية

1. التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ تتجه المنحنيات لأعلى في الفترة من $x = -1$ إلى $x = 1$. بتفسير $f'(x) = e^x$ كميول للمماسات وملاحظة أن كلما زاد x زاد e^x، اشرح لماذا يتجه التمثيل البياني لأعلى. بالنسبة إلى القيم الأكبر لـ x يبدو أن التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ يتجه مباشرة لأعلى بدون منحنى. باستخدام المماس، حدد هل هذا صواب أم مجرد خداع بصري.
2. يبدو أن التمثيل البياني لـ $f(x) = \ln x$ يصبح أوسع كلما زاد x. فسّر المشتقة $f'(x) = \frac{1}{x}$ كميول للمماسات لتحديد هل هذا صواب أم مجرد خداع بصري.
3. قارن وقابل بيانيًا بين الدوال x^2، x^3، x^4 و e^x لـ $x > 0$. ارسم التمثيلات البيانية لقيمة x الكبيرة (والتمثيل البياني لقيمة x الكبيرة جدًا) وقارن بين معدلات النمو النسبي للدوال. وبصفة عامة، كيف يمكن مقارنة دالة أسية بكثيرات الحدود؟
4. قارن وقابل بيانيًا بين الدوال $x^{1/2}$، $x^{1/3}$، $x^{1/4}$ و $\ln x$ لـ $x > 1$. ارسم التمثيلات البيانية لقيمة x الكبيرة وقارن بين معدلات النمو النسبي للدوال. وبصفة عامة، كيف يمكن المقارنة بين $\ln x$ و $\sqrt[n]{x}$؟

في التمارين 24–1، اشتق كل دالة.

1. $f(x) = x^3e^x$
2. $f(x) = e^{2x}\cos 4x$
3. $f(t) = t + 2^t$
4. $f(t) = t4^{3t}$
5. $f(x) = 2e^{4x+1}$
6. $f(x) = (1/$[illegible]
7. $h(x) = (1/3)^{x^2}$
8. $h(x) = 4$[illegible]
9. $f(u) = e^{u^2+4u}$
10. $f(u) = 3e^{\tan u}$
11. $f(w) = \dfrac{e^{4w}}{w}$
12. $f(w) = \dfrac{w}{e^{6w}}$
13. $f(x) = \ln 2x$
14. $f(x) = \ln\sqrt{8x}$
15. $f(t) = \ln(t^3 + 3t)$
16. $f(t) = t^3\ln t$
17. $g(x) = \ln(\cos x)$
18. $g(x) = \cos x\ln(x^2 + 1)$
19. (a) $f(x) = \sin(\ln x^2)$ (b) $g(t) = \ln(\sin t^2)$
20. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ (b) $g(t) = \dfrac{\ln\sqrt{t}}{t}$
21. (a) $h(x) = e^x\ln x$ (b) $f(x) = e^{\ln x}$
22. (a) $h(x) = 2^{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

23. (a) $f(x) = \ln(\sin x)$ (b) $f(t) = \ln(\sec t + \tan t)$

24. (a) $f(x) = \sqrt[4]{e^{2x}x^3}$ (b) $f(w) = \sqrt[3]{e^{2w} + w^2}$

في التمارين 25-28، أوجد معادلة المماس على منحنى $y = f(x)$ عند $x = 1$.

25. $f(x) = 3e^{x^2}$

26. $f(x) = 3^{x}$

27. $f(x) = x^2 \ln x$

28. $f(x) = 2\ln x^3$

في التمرينين 29 و 30، أوجد كل قيم x التي يكون المماس على منحنى $y = f(x)$ أفقيًا.

29. (a) $f(x) = xe^{-2x}$ (b) $f(x) = xe^{-3x}$

30. (a) $f(x) = x^2e^{-2x}$ (b) $f(x) = x^2e^{-3x}$

في التمارين 31-34، قيمة الاستثمار في الزمن t تُحدد باستخدام $v(t)$. أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغيّر.

31. $v(t) = 100\ 3^{t}$

32. $v(t) = 100\ 4^{t}$

33. $v(t) = 40\ e^{0.4t}$

34. $v(t) = 60\ e^{-0.2t}$

35. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاثة مرّات كل يوم. أوجد قانونًا للتكاثر بعد t يومًا وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

36. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 500 ويتضاعف كل أربعة أيام. أوجد قانونًا للتكاثر بعد t يومًا وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

37. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{6}{2e^{-8t} + 1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 6 أبدًا.

38. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-10t} + 2}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 5.

في التمارين 39-44 استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد المشتقة.

39. $f(x) = x^{\sin x}$

40. $f(x) = x^{4-x^2}$

41. $f(x) = (\sin x)^{x}$

42. $f(x) = (x^2)^{4x}$

43. $f(x) = x^{\ln x}$

44. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

45. أوجد قيمة a بحيث يكون المماس على منحنى $\ln x$ عند $x = a$ خطًا مستقيمًا يمر بنقطة الأصل. أوجد قيمة a بحيث يكون هذا المماس مع e^{x} عند $x = a$ خطًا مستقيمًا يمر بنقطة الأصل. احسب ميول الخطوط.

46. قدّر النهاية عدديًا في (7.1) عند $a = 3$ وقارن بين إجابتك وبين $\ln 3$. قدّر النهاية عدديًا في (7.1) عند $a = \frac{1}{3}$ وقارن بين إجابتك وبين $\ln \frac{1}{3}$.

47. أوجد مشتقة $f(x) = e^{\ln(-x^2)}$ في برنامج CAS. الإجابة الصحيحة هي أنها غير موجودة. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما. أوجد مشتقة $f(x) = e^{\ln(x^2-4)}$ في برنامج CAS. اشرح لماذا $2x$ يُعد إجابة غير كاملة.

48. أوجد مشتقة $f(x) = \ln\sqrt{4e^{3x}}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\frac{3}{2}$ اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

49. **تقريب بادي** للترتيب (1, 1) لـ e^{x} هو دالّة بالصيغة $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$ وتكون فيها القيم الخاصة بـ $f(0)$ ، $f'(0)$ و $f''(0)$ مطابقة للقيم المقابلة الخاصة بـ e^{x}. أوجد قيم a و b و c التي تجعل $f(0) = 1$ ، $f'(0) = 1$ و $f''(0) = 1$. قارن بين التمثيلات البيانية لكل من $f(x)$ و e^{x}.

50. تقريب تايلور للدرجة الثانية للدالة e^{x} هي دالّة كثيرة الحدود بالصيغة $f(x) = a + bx + cx^2$ تكون فيها قيم $f(0)$ ، $f'(0)$ و $f''(0)$ مطابقة للقيم المقابلة الخاصة بـ e^{x}. أوجد قيم كل من a و b و c. قارن بين التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ ، e^{x} وتقريب بادي للتمرين 49.

51. في الإحصاء، يتم استخدام الدالّة $f(x) = e^{-x^2/2}$ لتحليل كميات عشوائية تشمل توزيعًا على شكل الناقوس. تعطي حلول المعادلة $f''(x) = 0$ لعلماء الإحصاء قياسًا لقابلية تغير الكمية التي يتم تحليلها. أوجد كل الحلول.

52. كرر التمرين 51 مع الدالّة $f(x) = e^{-x^2/8}$. بالمقارنة بين التمثيلات البيانية للدالتين، اشرح لماذا قد تقول أن هذا التوزيع منتشر بدرجة أكبر مقارنة بالتمرين 51.

53. كرر التمرين 51 للدالّة العامة $f(x) = e^{-(x-m)^2/2c^2}$، حيث يكون كل من m و c ثوابت.

54. في التمرين 53، أوجد الحل للمعادلة $f'(x) = 0$. تُعرف هذه الكمية بأنها المنوال (أو المتوسط) للتوزيع.

تطبيقات

55. يتم وصف حركة زنبرك معين باستخدام $f(t) = e^{-t}\cos t$. احسب السرعة المتجهة في الزمن t. ارسم دالّة السرعة المتجهة. متى تكون السرعة المتجهة صفرًا؟ ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا؟

56. يتم وصف حركة زنبرك معين باستخدام $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$. احسب السرعة المتجهة في الزمن t. ارسم دالّة السرعة المتجهة. متى تكون السرعة المتجهة صفرًا؟ ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا؟

57. في التمرين 55، قدّر بيانيًا قيمة $t > 0$ التي يتم الوصول إلى أقصى سرعة متجهة عندها.

58. في التمرين 56، قدّر بيانيًا قيمة $t > 0$ التي يتم الوصول إلى أقصى سرعة متجهة عندها.

59. يتم استخدام **دوال هيل** $f(x) = \dfrac{Ax^{n}}{\theta^{n} + x^{n}}$ للثوابت الموجبة A ، n و θ لوضع نموذج للعديد من العمليات الكيميائية والأحيائية. وضّح أن $f'(x) > 0$ لـ $x > 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. إذا كان $v = \ln\left(\dfrac{f(x)/A}{1 - f(x)/A}\right)$ و $u = \ln x$ فوضح أن v هي دالّة خطية

لـ n. لمعرفة لماذا تُعد هذه الحقائق مهمة، ضع في حسبانك البيانات التالية التي تم جمعها في دراسة عن الارتباط بين الأكسجين والهيموجلوبين. وهنا، يكون x النسبة المئوية للأكسجين في الهواء و y هو النسبة المئوية للهيموجلوبين المتشبع بالأكسجين.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	13	32	52	67	77	84	88	91

ارسم نقاط البيانات هذه. وكما أوضحت بالفعل فإن دوال هيل لها ميل موجب وثبات عند خط التقارب الأفقي. استخدم القيمة المحددة لـ $f(x)$ لشرح السبب في مجموعة البيانات هذه، $A = 100$. ثم بالنسبة إلى كل زوج x-y، احسب u و v كما هو محدد أعلاه. ارسم نقاط u-v ووضح أنها خطية (أو تقريبا خطية تماما). أوجد الميل واستخدم ذلك لتحديد قيم n و B.

60. في أحد كتب *World Almanac* (رزنامة العالم)، ابحث عن سكان الولايات المتحدة حسب العقد (كل عشر سنوات) لأكبر عدد ممكن من السنوات. إذا لم توجد عناوين تشير إلى النمو حسب العقد، سواء عدديًا أو بالنسبة المئوية فاحسبه بنفسك. (إن وجود ورقة بيانات هنا مفيد). للولايات المتحدة فترات نمو خطي وأسي. اشرح لماذا يتوافق النمو الخطي مع زيادة عددية ثابتة. في أي عقد كان النمو العددي ثابتًا (تقريبًا)؟ اشرح لماذا يتوافق النمو الأسي مع زيادة عددية ثابتة. في أي عقد كانت النسبة المئوية للنمو ثابتة (تقريبًا)؟

تمارين استكشافية

1. وجدنا مسبقًا أن e هي نهاية $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$. في هذا الدرس، يتم تحديد e كقيمة خاصة بالأساس a مثل $\frac{d}{dx}a^x = a^x$. يوجد اختلاف بين الخصائص المهمة الأخرى لهذا العدد المهم. نحن نكشف عن إحداها هنا. مثّل بيانيًا الدوال x^2 و 2^x بالنسبة إلى $x > 0$. كم عدد المرات التي تتقاطع فيها؟ مثّل بيانيًا الدوال x^3 و 3^x. بالنسبة إلى $x > 0$، كم عدد المرات التي تتقاطع فيها؟ جرّب استخدام الزوج $x^{2.5}$ و 2.5^x والزوج x^4 و 4^x. ما الذي قد يمثل تخمينًا مقبولًا لعدد التقاطعات $(x > 0)$ للدوال x^a و a^x؟ اشرح لماذا سيكون $x = a$ دائمًا حلًا. في أي ظروف يوجد حل آخر أصغر من a؟ وفي أي ظروف يوجد حل أكبر من a؟ بالتجربة والخطأ، تحقق من أن e هو قيمة a التي يتغير عندها الحل "الآخر".

2. بالنسبة إلى $n = 1$ و $n = 2$ قم باستقصاء حول $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x^n}$ عدديًا وبيانيًا. خمّن قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x^n}$ لأي عدد صحيح موجب n واستخدم تخمينك مع بقية التمرين. بالنسبة إلى $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ e^{-1/x} & , x > 0 \end{cases}$ وضّح أن f قابلة للاشتقاق عند كل x وأن $f'(x)$ متصلة بالنسبة إلى كل x. ثم وضّح أن $f''(0)$ موجود وقارن بين العمل المطلوب لتوضيح أن $f'(x)$ متصلة عند $x = 0$ والعمل المطلوب لتوضيح أن $f''(0)$ موجودة.

3-8 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

قارن بين الدالتين التاليتين اللتين تصفان منحنيات معروفة:

$$y = x^2 + 3 \quad (\text{قطع مكافئ})$$

و

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (\text{دائرة})$$

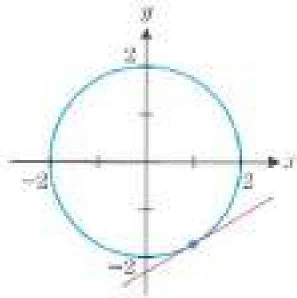
المعادلة الأولى تحدد y كدالّة في x بوضوح لأن بالنسبة إلى كل x تعطي المعادلة قانونًا صريحًا لإيجاد القيمة المقابلة لـ y. ومن ناحية أخرى، لا تحدد المعادلة الثانية دالّة معينة، لأن الدائرة في الشكل 3.39 لا تجتاز اختبار المستقيم الرأسي. ومع ذلك، يمكنك حل وإيجاد دالتين على الأقل يتم تحديدهما ضمنيًا باستخدام المعادلة $x^2 + y^2 = 4$.

على فرض أننا نريد إيجاد ميل المماس على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$. انظر الشكل 3.39. يمكننا التفكير في الدائرة كتمثيل بياني لأنصاف دوائر يتم تحديدها باستخدام $y = \sqrt{4 - x^2}$ و $y = -\sqrt{4 - x^2}$. بما أننا مهتمون بالنقطة $(1, -\sqrt{3})$، فإننا نستخدم المعادلة التي تصف نصف الدائرة السفلي $y = -\sqrt{4 - x^2}$ لحساب المشتقة

$$y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

لذا فإن ميل المماس عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$ سيكون $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

لم يكن هذا الحساب صعبًا بشكل خاص. بالرغم من أننا سنرى قريبًا طريقة أسهل للقيام به. وعلاوة على ذلك، ليس من الممكن دائمًا إيجاد حل لدالّة معينة يتم تعريفها ضمنيًا باستخدام معادلة معطاة.



الشكل 3.39

المماس عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$

وبدلًا من ذلك، على فرض أن المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ تعرّف إحدى الدوال القابلة للاشتقاق أو أكثر للمتغير x، $y = y(x)$. فتكون المعادلة

$$x^2 + [y(x)]^2 = 4 \tag{8.1}$$

عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة (8.1) بالنسبة لـ x، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}\{x^2 + [y(x)]^2\} = \frac{d}{dx}(4)$$

ومن قاعدة السلسلة، $\frac{d}{dx}[y(x)]^2 = 2y(x)y'(x)$ ولذلك يوجد لدينا

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

عند حل هذه المعادلة للحصول على $y'(x)$، نحصل على

$$y'(x) = \frac{-2x}{2y(x)} = \frac{-x}{y(x)}$$

لاحظ أن هنا، يتم التعبير عن المشتقة $y'(x)$ بدلالة كل من x و y. للحصول على الميل عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$، نقوم بتعويض $x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$، بحيث يكون

$$y'(1) = \left.\frac{-x}{y(x)}\right|_{x=1} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن هذا هو الميل نفسه الذي وجدناه مسبقًا عن طريق الحل أولًا للحصول على y بشكل صريح ثم القيام بالاشتقاق. نُطلق على عملية اشتقاق كل من طرفي معادلة معينة بدلالة x ثم الحل للحصول على $y'(x)$ **الاشتقاق الضمني**.

وخلال هذا الدرس، نفترض أن كل معادلة تحدد ضمنيًا إحدى الدوال القابلة للاشتقاق أو أكثر $y = y(x)$. عند مقابلة معادلة مثل تلك، قم باشتقاق كلا الطرفين بالنسبة لـ x، مع مراعاة إدراك أن اشتقاق أي دالة لـ y سيتطلب قاعدة السلسلة.

$$\boxed{\frac{d}{dx}g(y) = g'(y)y'(x).}$$

ثم جمّع أي حدود مع عامل $y'(x)$ في أحد طرفي المعادلة، مع وضع المتبقية في الطرف الآخر من المعادلة ثم أوجد حل $y'(x)$. سنوضح هذه العملية بالأمثلة التالية.

مثال 8.1 إيجاد مماس ضمنيًا

أوجد $y'(x)$ لـ $x^2 + y^3 - 2y = 3$ ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$

الحل نظرًا لأننا لا يمكننا إيجاد حل (بسهولة) لـ y بشكل صريح بدلالة x، فإننا نحسب الاشتقاق ضمنيًا. عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة بالنسبة لـ x، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^3 - 2y) = \frac{d}{dx}(3)$$

وهكذا،

$$2x + 3y^2y'(x) - 2y'(x) = 0$$

وبطرح $2x$ من كلا طرفي المعادلة وأخذ $y'(x)$ كعامل مشترك من الحدين المتبقيين، نحصل على

$$(3y^2 - 2)y'(x) = -2x$$

وبالحل لإيجاد $y'(x)$، فإننا نحصل على

$$y'(x) = \frac{-2x}{3y^2 - 2}$$

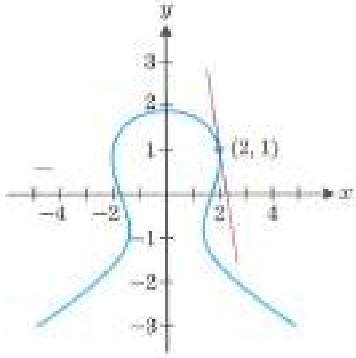
وبتعويض $x = 2$ و $y = 1$، نجد أن ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$ هو

$$y'(2) = \frac{-4}{3-2} = -4$$

وبالتالي فإن معادلة المماس ستكون

$$y - 1 = -4(x - 2)$$

لقد رسمنا تمثيلا بيانيا للمعادلة وللمماس في الشكل 3.40 باستخدام وضع الرسم الضمني الخاص بالحاسوب.



الشكل 3.40
المماس عند النقطة $(2, 1)$

مثال 8.2 إيجاد مماس باستخدام الاشتقاق الضمني

أوجد $y'(x)$ لـ $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$ ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2, -2)$.

الحل عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة بالنسبة لـ x، نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(4 - 4y)$$

وبما أن الحد الأول هو ناتج ضرب x^2 و y^2، فيجب علينا استخدام قاعدة ناتج الضرب. يوجد لدينا

$$2xy^2 + x^2(2y)y'(x) - 2 = 0 - 4y'(x)$$

عند تجميع الحدود التي تشمل $y'(x)$ في أحد الأطراف، نحصل على

$$(2x^2y + 4)y'(x) = 2 - 2xy^2$$

لذا فإن

$$y'(x) = \frac{2 - 2xy^2}{2x^2y + 4}$$

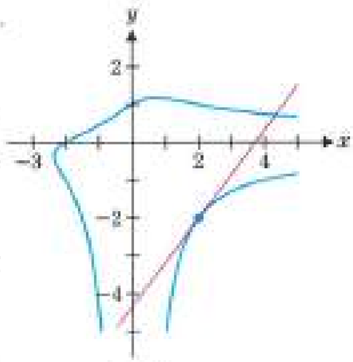
عند تعويض $x = 2$ و $y = -2$، نحصل على ميل المماس.

$$y'(2) = \frac{2 - 16}{-16 + 4} = \frac{7}{6}$$

وفي النهاية يتم تحديد معادلة المماس باستخدام

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2)$$

لقد رسمنا المنحنى والمماس عند $(2, -2)$ في الشكل 3.41 باستخدام وضع الرسم الضمني الخاص بالحاسوب.



الشكل 3.41
المماس عند النقطة $(2, -2)$

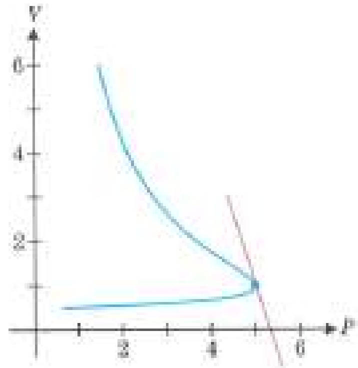
يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد الاشتقاق المطلوب من أي معادلة يمكنك كتابتها فعليًا. سنوضح ذلك في ما بعد لتطبيق معين.

مثال 8.3 معدل تغير الحجم بالنسبة إلى الضغط

في ظل ظروف معينة، تكون معادلة فان دير والز التي تربط بين الضغط P والحجم V لغاز معين هي

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03) = 9.7 \qquad (8.2)$$

على فرض أن المعادلة (8.2) تحدد ضمنيًا الحجم V كدالة للضغط P استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5, 1)$.



الشكل 3.42
مثّل بيانيا معادلة فان دير والز والمماس عند النقطة $(5, 1)$

الحل عند اشتقاق كلا طرفي (8.2) بالنسبة لـ P، نحصل على

$$\frac{d}{dP}[(P+5V^{-2})(V-0.03)]=\frac{d}{dP}(9.7)$$

من قاعدة ناتج الضرب وقاعدة السلسلة، نحصل على

$$\left(1-10V^{-3}\frac{dV}{dP}\right)(V-0.03)+(P+5V^{-2})\frac{dV}{dP}=0$$

عند تجميع الحدود التي تشتمل على $\frac{dV}{dP}$ ، نحصل على

$$[-10V^{-3}(V-0.03)+P+5V^{-2}]\frac{dV}{dP}=0.03-V$$

لذا فإن

$$\frac{dV}{dP}=\frac{0.03-V}{-10V^{-3}(V-0.03)+P+5V^{-2}}$$

يوجد الآن لدينا

$$V'(5)=\frac{0.03-1}{-10(1)(0.97)+5+5(1)}=\frac{-0.97}{0.3}=-\frac{97}{30}$$

(الوحدات بدلالة الحجم لكل وحدة ضغط).

نحن نوضح تمثيلًا بيانيًا لمعادلة فان دير والز، بالتوافق مع المماس مع التمثيل البياني عند النقطة $(5, 1)$ في الشكل 3.42. ■

وبالطبع، بما أن بإمكاننا إيجاد مشتقة واحدة ضمنيًا، يمكننا أيضًا إيجاد المشتقات من الرتبة الثانية وذات الرتب الأعلى ضمنيًا، كما توضح في المثال 8.4 .

مثال 8.4 إيجاد مشتقة من الرتبة الثانية ضمنيًا

أوجد $y''(x)$ ضمنيًا لـ $y^2+2e^{-xy}=6$ ، ثم أوجد قيمة y'' عند النقطة $(0, 2)$.

الحل نحن نبدأ باشتقاق كلا طرفي المعادلة بدلالة x . لدينا

$$\frac{d}{dx}(y^2+2e^{-xy})=\frac{d}{dx}(6)$$

من قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج الضرب، يوجد لدينا

$$2yy'(x)+2e^{-xy}[-y-xy'(x)]=0 \qquad (8.3)$$

لاحظ أننا لسنا بحاجة إلى إيجاد حل لإيجاد $y'(x)$ بإخراج العامل المشترك 2 وإجراء الاشتقاق مرة أخرى، نحصل على

$$y'(x)y'(x)+yy''(x)-e^{-xy}[-y-xy'(x)][y+xy'(x)]$$
$$-e^{-xy}[y'(x)+y'(x)+xy''(x)]=0$$

وبتجميع كل الحدود التي تشمل $y''(x)$ في طرف واحد من المعادلة نحصل على

$$yy''(x)-xe^{-xy}y''(x)=-[y'(x)]^2-e^{-xy}[y+xy'(x)]^2+2e^{-xy}y'(x)$$

وبأخذ العامل المشترك $y''(x)$ على الطرف الأيسر، نحصل على

$$(y-xe^{-xy})y''(x)=-[y'(x)]^2-e^{-xy}[y+xy'(x)]^2+2e^{-xy}y'(x)$$

لذا فإن

$$y''(x)=\frac{-[y'(x)]^2-e^{-xy}[y+xy'(x)]^2+2e^{-xy}y'(x)}{y-xe^{-xy}} \qquad (8.4)$$

لاحظ أن (8.4) تعطينا قانونا (غير محدد إلى حد ما) لـ $y''(x)$ بدلالة x, y و $y'(x)$. إذا كنا نحتاج إلى $y''(x)$ بدلالة x و y فقط، يمكننا فقط حل (8.3) لإيجاد $y'(x)$ والتعويض في (8.4) . ومع ذلك، لسنا بحاجة إلى إجراء ذلك لايجاد $y''(0)$. وبدلًا من ذلك، عوّض أولا $x=0$ و $y=2$ في (8.3) للحصول على $4y'(0)+2(-2)=0$

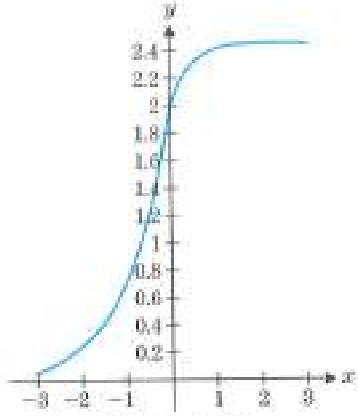
ومن ذلك نستنتج أن $y'(0)=1$ ثم عوّض $x=0$ و $y=2$ و $y'(0)=1$ في (8.4) للحصول على

$$y''(0)=\frac{-1-(2)^2+2}{2}=-\frac{3}{2}$$

انظر الشكل 3.43 لتطّلع على تمثيل بياني لـ $y^2+2e^{-xy}=6$ بالقرب من النقطة $(0,2)$. ■
تذكر أنه عند هذه النقطة، قد أثبتنا قاعدة القوى

$$\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$$

فقط للأسس الصحيحة (ارجع للنظرية 3.1 و 4.3). بالرغم من أننا كنا نستخدم هذه النتيجة بحرية لأي أس حقيقي، r . والآن لقد طورنا اشتقاقًا ضمنيًا وعلى أي حال، توجد لدينا أدوات نحتاج إليها لإثبات قاعدة القوى في حالة وجود أي أس نسبي.



الشكل 3.43
$y^2+2e^{-xy}=6$

النظرية 8.1

لأي أس نسبي، r ، $\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$.

البرهان

على فرض أن r هو أي عدد نسبي. إذًا، $r=\frac{p}{q}$ لبعض الأعداد الصحيحة p و q فلتكن

$$y=x^r=x^{p/q} \tag{8.5}$$

إذًا، برفع كلا طرفي المعادلة (8.5) إلى القوة q، فإننا نحصل على

$$y^q=x^p \tag{8.6}$$

عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة (8.6) بدلالة x ، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}(y^q)=\frac{d}{dx}(x^p)$$

ومن قاعدة السلسلة يوجد لدينا $qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=px^{p-1}$

وبالحل للحصول على $\frac{dy}{dx}$ ، نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}=\frac{px^{p-1}}{q(x^{p/q})^{q-1}} \quad \text{بما أن } y=x^{p/q}$$

$$=\frac{px^{p-1}}{qx^{p-p/q}}=\frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} \quad \text{استخدام قاعدة الأس}$$

$$=\frac{p}{q}x^{p/q-1}=rx^{r-1}, \quad \text{بما أن } \frac{p}{q}=r$$

كما هو مرغوب. ■

مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة

تُعد الدوال المثلثية المعكوسة مفيدة في أي عدد من التطبيقات. نحن نطوّر الآن قواعد اشتقاق لهذه الدوال. يجب عليك الانتباه الشديد للمجالات والمدى لهذه الدوال.

وبوجه خاص، يتم تحديد دالة معكوس sine (أو arcsine) بتعريف مجال sine في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بشكل خاص. وقد حصلنا على

$y = \sin^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

بإجراء الاشتقاق للمعادلة $\sin y = x$ ضمنيًا، نحصل على

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x$$

وهكذا،

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

وبحل ذلك لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ نجد (مع $\cos y \ne 0$) أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

هذا ليس كافيًا بشكل تام، بالرغم من أن ذلك يعطينا المشتقة بدلالة y . لاحظ أن $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ، $\cos y \ge 0$ ومن ثم،

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

وهذا يعطينا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

بالنسبة إلى $-1 < x < 1$ أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1}$$

وبدلًا من ذلك، يمكننا اشتقاق هذا القانون باستخدام النظرية 5.2 في الدرس 3.5.

وبالمثل، يمكننا توضيح أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1 \text{ ل}}$$

لإيجاد $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$ نذكر أن لدينا

$y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

وباستخدام الاشتقاق الضمني، نحصل على

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x$$

وهكذا،

$$(\sec^2 y) \frac{dy}{dx} = 1$$

سنحل هذا لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ للحصول على

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

أي إنّ:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

نترك مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة المتبقية كتمارين. تم تلخيص مشتقات كل الدوال المثلثية الستة المعكوسة هنا.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{عند } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{عند } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \text{عند } |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \text{عند } |x| > 1$$

مثال 8.5 إيجاد مشتقة دالّة مثلثية معكوسة

احسب مشتقة (a) $\cos^{-1}(3x^2)$، و (b) $(\sec^{-1}x)^2$، و (c) $\tan^{-1}(x^3)$.

الحل من قاعدة السلسلة نحصل على

(a)
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(3x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{-6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

(b)
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)^2 = 2(\sec^{-1}x)\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = 2(\sec^{-1}x)\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

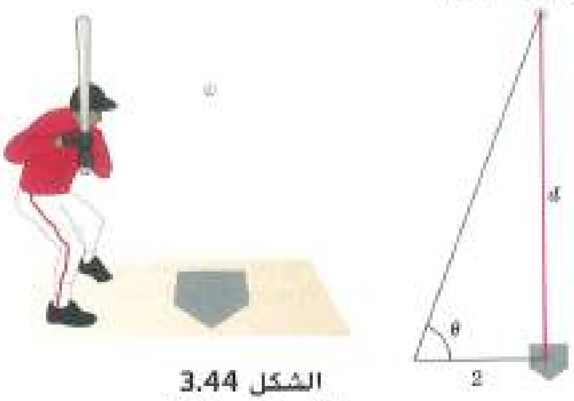
(c)
$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(x^3)] = \frac{1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6}.$$

مثال 8.6 نمذجة معدل التغير في نظر لاعب كرة

من أهم المبادئ الإرشادية لمعظم الرياضات هو "إبقاء النظر إلى الكرة". في البيسبول، يقف ضارب الكرة على بُعد قدمين من اللوح الرئيس بينما يتم إلقاء رمية بسرعة متجهة تصل إلى 130 ft/s (حوالي 90 mph). على فرض أن الكرة تتحرك أفقيًا فقط، ما المعدل الذي تحتاج زاوية نظر ضارب الكرة أن تتغير به لمتابعة الكرة بينما تعبر اللوح الرئيس؟

الحل انظر أولاً إلى المثلث المعروض في الشكل 3.44 (في الصفحة التالية). نشير إلى المسافة من الكرة إلى اللوح الرئيس باستخدام d وزاوية النظر باستخدام θ. نظرًا لأن الزاوية تتغير مع الزمن، فنكتب $d = d(t)$. السرعة المتجهة التي تصل إلى 130 ft/s تعني أن $d'(t) = -130$. [لماذا قد يكون $d'(t)$ سالبًا؟] من الشكل 3.44، لاحظ أن

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{2}\right]$$



الشكل 3.44
نظر ضارب الكرة

سيكون معدل تغير الزاوية

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+\left[\frac{d(t)}{2}\right]^2}\frac{d'(t)}{2}$$

$$= \frac{2d'(t)}{4+[d(t)]^2} \text{ rad/sec}$$

عندما يكون $d(t)=0$ (أي، عندما تعبر الكرة اللوح الرئيس). سيكون معدل التغير هو

$$\theta'(t) = \frac{2(-130)}{4} = -65 \text{ rad/sec}$$

ثمة مشكلة معينة في ذلك وهي أن معظم الأشخاص يمكنهم تعقب الأشياء بدقة فقط بمعدل 3 راديان في الثانية(rad/sec). لذا فإن إبقاء العين على الكرة في هذه الحالة مستحيل فيزيائيًا. (اطلع على كتاب واتس وبيل إبقاء العين على الكرة.) ■

ما وراء القوانين

يتيح لنا الاشتقاق الضمني إيجاد مشتقة القيم معينة حتى لو لم يكن لدينا قانون للدالّة. هذه النتيجة المهمة تعني أن لدينا تقريبًا أي معادلة للعلاقة بين كميتين، ويمكننا إيجاد معدل التغير لإحدى الكميات بالنسبة إلى الأخرى. وهي حالة حيث تتطلب الرياضيات تفكيرًا إبداعيًا لما يتجاوز استذكار القانون.

التمارين 3.8

تمارين كتابية

1. بالنسبة إلى الاشتقاق الضمني، نفترض أن y هي دالّة لـ x ونكتب x لنذكّر أنفسنا بذلك. ومع ذلك، بالنسبة إلى الدائرة $x^2+y^2=1$ ليس من الصحيح أن y هي دالّة لـ x. وبما أن $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ توجد دالتان بالفعل (على الأقل) لـ x تم تعريفهما ضمنيًا. اشرح لماذا لا يمثل هذا تعارضًا فعليًا؛ أي اشرح بدقة لماذا نفترض أننا نعد اشتقاقًا ضمنيًا.

2. لإجراء الاشتقاق الضمني في معادلة معينة مثل $x^2y^2+3=x$ نبدأ باشتقاق كل الحدود، ونحصل على $2xy^2+x^2(2y)y'=1$. يتعلم الكثير من الطلاب القواعد بتلك الطريقة. أعد المشتقات "العادية" لكل الحدود والتثبيت عند y' في كل مرة يتم فيها أخذ مشتقة y. اشرح لماذا يصلح ذلك. وأعد صياغة القاعدة بدقة أكبر وبصيغة أسهل للفهم.

3. في الاشتقاق الضمني، تمثل المشتقة عادة دالّة معينة لكل من x و y، على سبيل المثال، في الدائرة $x^2+y^2=r^2$

يوجد لدينا $y' = -x/y$. إذا أخذنا مشتقة $-x/y$ وعوّضنا أي قيم لـــ x و y ، فهل ستكون المشتقة دائمًا ميلًا للمماس؟ وهكذا، هل توجد أي متطلبات خاصة بتحديد قيم كل من x و y التي يمكن التعويض فيها؟

4. في كل مثال من هذا الدرس، بعدما قمنا باشتقاق المعادلة المعطاة، كان يمكننا إعادة كتابة المعادلة الناتجة بالصيغة $f(x, y)y'(x) = g(x, y)$ بالنسبة إلى بعض الدوال $f(x, y)$ و $g(x, y)$. اشرح لماذا يمكن القيام بذلك دائمًا؛ أي لماذا ينتج عن قاعدة السلسلة دائمًا حد مثل $[y'(x)]^2$ أو $[y'(x)]^2$ ؟

في التمارين 4–1، احسب ميل المماس عند النقطة المحددة بشكل صريح (أوجد حلًا أولًا لـــ y دالّة لـــ x) وضمنيًا.

1. $x^2 + 4y^2 = 8$ at $(2, 1)$

2. $x^2y - 4\sqrt{x} = x^2y$ at $(2, \sqrt{2})$

3. $y - 3x^2y = \cos x$ at $(0, 1)$

4. $y^2 + 2xy + 4 = 0$ at $(-2, 2)$

في التمارين 16–5، أوجد المشتقة $y'(x)$ ضمنيًا.

5. $x^2y^2 + 3y = 4x$

6. $3xy^3 - 4x = 10y^2$

7. $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$

8. $\sin xy = x^2 - 3$

9. $\dfrac{x+3}{y} = 4x + y^2$

10. $3x + y^3 - \dfrac{4y}{x+2} = 10x^2$

11. $e^{x^2y} - e^y = x$

12. $xe^y - 3y\sin x = 1$

13. $y^2\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$

14. $x\cos(x+y) - y^2 = 8$

15. $e^{4y} - \ln(y^2 + 3) = 2x$

16. $e^{x^2}y - 3\sqrt{y^2+2} = x^2 + 1$

في التمارين 22–17، أوجد معادلة المماس عند النقطة المعطاة. إذا كان لديك برنامج CAS سيعمل على التمثيل البياني للمنحنيات ضمنيًا، فارسم المنحنى والمماس.

17. $x^2 - 4y^3 = 0$ عند $(2, 1)$

18. $x^2y^2 = 4x$ عند $(1, 2)$

19. $x^2y^2 = 3y + 1$ عند $(2, 1)$

20. $x^3y^2 = -2xy - 3$ عند $(-1, -3)$

21. $x^4 = 4(x^2 - y^2)$ عند $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

22. $x^4 = 8(x^2 - y^2)$ عند $(2, -\sqrt{2})$

في التمارين 28–23، أوجد المشتقة من الرتبة الثانية $y''(x)$.

23. $x^2y^2 + 3x - 4y = 5$

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

25. $y^2 = x^3 - 6x + 4\cos y$

26. $e^{xy} + 2y - 3x = \sin y$

27. $(y-1)^2 = 3xy + e^{4y}$

28. $(x+y)^3 - e^{x+1} = 3x$

في التمرينين 29 و14، أوجد مجال المعادلة المعطاة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^2 + 1)$ (b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$ (b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ (b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$ (b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

33. (a) $f(x) = 4\sec(x^4)$ (b) $f(x) = 4\sec^{-1}(x^4)$

34. (a) $f(x) = \sin^{-1}(1/x)$ (b) $f(x) = \csc^{-1}x$

---

35. في المثال 8.6، تم التوضيح أن بمرور الزمن ستصل كرة البيسبول إلى اللوح الرئيس، وسيكون معدل دوران نظر اللاعب (θ') سريعًا جدًا بصورة لا يقدر على تعقبها الإنسان. مع العلم بأن أقصى معدل للدوران $\theta' = -3$ قياس دائري (راديان) في الثانية، أوجد d بحيث يكون $\theta' = -3$. وهكذا، أوجد مدى القرب من اللوح حيث يمكن أن يتعقب اللاعب الكرة منه. في إعداد الدوري الرئيس، يجب على اللاعب البدء بالأرجحة عندما تكون الكرة في منتصف الطريق ($30'$) من اللوح الرئيس. كيف يتوافق هذا مع المسافة التي يفقد فيها اللاعب متابعته للكرة؟

36. على فرض أن سرعة ضرب الكرة d' في المثال 8.6 مختلفة. إذًا، سيكون θ' مختلفًا وستتغير قيمة d التي لها $\theta' = -3$. أوجد d كدالّة لـــ d' تتراوح من 30 ft/s (كرة ناعمة وبطيئة) إلى 140 ft/s (كرة سريعة للدوري الرئيس). وارسم التمثيل البياني.

37. في المثال 8.6، كم يبلغ معدل التغير θ' إذا وقف اللاعب على بُعد 3 أقدام من اللوح الرئيس؟

38. كم المسافة التي يجب أن يقف اللاعب عندها بعيدًا عن اللوح الرئيس في المثال 8.6 للوقوف ومتابعة الكرة طوال سيرها؟

في التمرينين 39 و 40، أوجد مواقع كل المماسات الأفقية والرأسية.

39. $x^2 + y^2 - 3y = 0$

40. $x^2 + y^2 - 2y = 3$

---

41. اذكر اسم الطريقة بتحديد هل ستجد المشتقة مباشرة أم ضمنيًا.

(a) $x^2y^2 + 3y = 4x$ (b) $x^2y + 3y = 4x$

(c) $3xy + 6x^2\cos x = y\sin x$ (d) $3xy + 6x^2\cos y = y\sin x$

42. أوجد مشتقة $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ بشكل كامل بقدر الإمكان [إرشاد: جزء من الإجابة هو $f(x)=x$ لـــ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$]. هل يكون $f'(x)=1$ ؟

43. أوجد وحوّل لأبسط صورة مشتقة $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ واستخدم النتيجة لكتابة معادلة تربط بين $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$.

44. أوجد وحوّل لأبسط صورة مشتقة $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. استخدم النتيجة لكتابة معادلة تربط بين $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ و $\tan^{-1}x$.

45. استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد $y'(x)$ لـــ $x^2y - 2y = 4$. وفقًا لهذه المعادلة، لماذا قد تتوقع أن يتم إيجاد المماسات الرأسية عند $x = \pm\sqrt{2}$ والمماسات الأفقية عند $y = 0$ ؟ وضّح أنه لا توجد نقاط لهذه القيم. لمعرفة ماذا يحدث، حل المعادلة الأساسية لـــ y وارسم التمثيل البياني. صف ماذا يحدث عند $x = \pm\sqrt{2}$ و $y = 0$.

46. وضّح أن أي منحنى بالصيغة $xy = c$ لبعض الثوابت c يتقاطع مع أي منحنى بالصيغة $x^2 - y^2 = k$ لبعض الثوابت k عند الزوايا القائمة (وهكذا، تكون المماسات للمنحنيات

عند نقاط التقاطع متعامدة). وفي هذه الحالة، نقول أن عائلة المنحنيات تكون متعامدة.

في التمارين 50–47، وضّح أن عائلة المنحنيات تكون متعامدة. (انظر التمرين 46).

47. $y = \frac{c}{x}$ و $y^2 = x^2 + k$

48. $x^2 + y^2 = cx$ و $x^2 + y^2 = ky$

49. $y = cx^3$ و $x^2 + 3y^2 = k$

50. $y = cx^4$ و $x^2 + 4y^2 = k$

51. وفقًا للتمرينين 49 و 50، خمّن لمعرفة عائلة من الدوال المتعامدة على $y = cx^n$ ، وضّح أن تخمينك صحيح. هل توجد أي قيم n التي يجب استبعادها؟

52. ما الخطأ في الحساب الخاطئ التالي؟

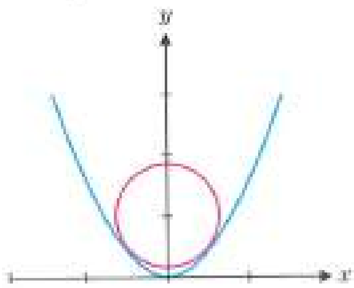
$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \sec^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

53. بالنسبة إلى المنحنيات البيضاوية، توجد طرق جيدة لإيجاد النقاط ذات الإحداثيات النسبية راجع مقالة عزرا بروون *"Three Fermat Trails to Elliptic Curves"* المنشورة في شهر مايو لعام 2000 في صحيفة مجلة الرياضيات في الكلية).

(a) وضّح أن النقاط $(-3, 0)$ و $(0, 3)$ تقع على منحنى بيضاوي يتم تعريفه باستخدام $y^2 = x^3 - 6x + 9$. أوجد الخط الذي يمر بهذه النقاط ووضّح أن الخط يتقاطع مع المنحنى في نقطة أخرى ذات إحداثيات نسبية (عدد صحيح في هذه الحالة).

(b) بالنسبة إلى المنحنى البيضاوي $y^2 = x^3 - 6x + 4$ ، وضّح أن النقطة $(-1, 3)$ تقع على المنحنى. أوجد المماس للمنحنى عند تلك النقطة ووضّح أنها تتقاطع مع المنحنى في نقطة أخرى ذات إحداثيات نسبية.

54. على فرض أن دائرة نصف قطرها هو r ومركزها $(0, c)$ محاطة بالقطع المكافئ $y = x^2$ عند نقطة التماس. يجب أن تكون الميول نفسها. أوجد ميل الدائرة ضمنيًا ووضّح ذلك عند نقطة التماس $y = c - \frac{1}{2}$. ثم استخدم معادلات الدائرة والقطع المكافئ لتوضيح أن $c = r^2 + \frac{1}{4}$



تطبيقات

55. على فرض أنك تضع ملصقات على الحائط. يمتد الإطار من 6 إلى 8 أقدام فوق الأرض. يقف شخص على مسافة x قدمًا من الجدار وينظر إلى الملصق بزاوية رؤية تكون بالشعاع من عين الشخص (5 أقدام فوق الأرض) إلى قمة الإطار والشعاع من عين الشخص إلى الجزء السفلي من الإطار. أوجد قيمة x التي تزيد زاوية الرؤية إلى أقصى حد A .

56. ما الاختلافات في التمرين 55 إذا كانت أعين الشخص فوق الأرض بمقدار 6 أقدام؟

57. على فرض أن لدينا مقلاع (انظر الدرس 3.1) يدور باتجاه معاكس لعقارب الساعة عبر دائرة $x^2 + y^2 = 9$ وتم إطلاق صخرة منه عند النقطة $(2.9, 0.77)$. إذا كانت الصخرة تنطلق لمسافة 300 قدم، فإلى أين ستصل؟ [إرشاد: أوجد المماس عند النقطة $(2.9, 0.77)$، وأوجد النقطة (x, y) على ذلك الخط بحيث تكون المسافة $\sqrt{(x-2.9)^2 + (y-0.77)^2} = 300$.]

تمارين استكشافية

1. يمر خط الملكية لصاحب أرض عبر المسار $y = 6 - x$. يريد صاحب الأرض حفر قناة ري من خزان محاط بالقطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$. يريد صاحب الأرض حفر أقصر قناة ممكنة من الخزان إلى أقرب نقطة للمماس. نحن نستكشف طريقة لإيجاد أفضل مسار. ارسم الخط والقطع الناقص، وارسم مماس إلى القطع الناقص الذي يوازي خط الملكية. على فرض أن القناة يجب أن تبدأ عند نقطة التماس وتسير بشكل متعامد على الخطين. سنبدأ بتحديد النقطة على الطرف الأيمن من القطع الناقص باستخدام مماس يوازي $y = 6 - x$. أوجد ميل المماس إلى القطع الناقص عند (x, y) واجعله مساويًا لـ -1. أوجد حلًا لـ x وعوّض في معادلة القطع الناقص. أوجد حلًا لـ y ولديك النقطة على القطع الناقص التي تبتدأ القناة عندها. أوجد معادلة للمستقيم (الطبيعي) الذي يمر من خلال هذه النقطة ويكون عموديًا على $y = 6 - x$. أوجد التقاطع مع المستقيم الطبيعي و $y = 6 - x$. تنتهي القناة عند هذه النقطة.

2. في هذا التمرين، ستصمم أنت مسرحًا للأفلام مع توفير كل المقاعد التي تتميز برؤية متساوية للشاشة. لنفرض أن الشاشة تمتد رأسيًا من 10 إلى 30 قدمًا فوق الأرض. يبعد الصف الأول مسافة 15 قدمًا عن الشاشة. مهمتك هي تحديد دالة معينة $h(x)$ بحيث إذا كانت المقاعد تبعد عن الشاشة بمقدار x قدمًا وارتفعت بمقدار $h(x)$ فوق مستوى الأرض، تكون الزاوية من الجزء السفلي للشاشة إلى المشاهد إلى أعلى الشاشة هي الزاوية نفسها لمشاهد يجلس في الصف الأول. ستتمكن من إتمام ذلك عند نطاق محدود من قيم x. وبما يتجاوز أقصى حد مثل x أوجد الارتفاع الذي يزيد زاوية الرؤية إلى أقصى حد. [إرشاد: اكتب الزاوية كفرق بين المماسات المعكوسة واستخدم القانون $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.]

الدرس

3-9 دوال القطع الزائد

قوس جيت واي في ميسوري

قوس جيت واي في ميسوري هو أحد الهياكل المعمارية المميزة والمشهورة في الولايات المتحدة الأمريكية. يعتقد معظم الأشخاص أن له ارتفاع أطول من عرضه، ولكن هذا نتيجة خداع بصري. وفي الواقع، فإن عرض القوس وارتفاعه متساويان. ويجد خطأ بسيط غامض في فهم أن القوس على شكل قطع مكافئ. وبالأحرى فإن شكله يتوافق مع التمثيل البياني لدالة الـ Cosine للقطع الزائد ويسمى سلسلي). تم شرح هذه الدالة والدوال الخمس الأخرى للقطع الزائد في هذا الدرس.

دوال القطع الزائد ليست جديدة كليًا، لأنها ببساطة عبارة عن تجميعات لدوال أسية. نحن ندرسها بسبب فائدتها في التطبيقات وملاءمتها في حل المسائل (وبصفة خاصة معادلات التفاضل).

تعرّف دالّة الـ Sine **للقطع الزائد** كما يأتي:

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},}$$

لكل $x \in (-\infty, \infty)$ تعرّف **دالّة القطع الزائد** الـ Cosine كما يأتي:

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},}$$

ومجددًا لكل $x \in (-\infty, \infty)$ سنتركه كتمرين لاستخدام التعريفات للتحقق من صحة التعريف المهم

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{9.1}$$

لكل x . لاحظ أننا إذا أخذنا $x = \cosh u$ و $y = \sinh u$ ثم من (9.1) باستخدام u بدلًا من x نحصل على:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

وهذا ما يجب عليك معرفته كمعادلة للقطع الزائد الأربع المتبقية. هذا التعريف هو مصدر الاسم "قطع زائد" لهذه الدوال. ويجب عليك أيضًا ملاحظة أن بعض التوازي مع الدوال المثلثية وهي $\cos x$ و $\sin x$.

نعرّف دوال القطع الزائد الأربع المتبقية بدلالة دوال Sinh، Cosh، بطريقة تشبه مقابلاتها في الدوال المثلثية. وهكذا نعرّف Tan **القطع الزائد** بالدالّة $\tanh x$، و Cot **القطع الزائد بالدالة** $\coth x$، Sec **القطع الزائد** بالدالة $\operatorname{sech} x$ و Csc القطع الزائد بالدالة $\operatorname{csch} x$ كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x}, & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x}. \end{aligned}}$$

يسهل استخدام هذه الدوال جدًا. ويمكننا تحديد سلوكها بسهولة باستخدام ما نعرفه بالفعل عن الدوال الأسية. لاحظ أولًا أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.}$$

وكذلك، يمكننا إنشاء قوانين المشتقات المتبقية:

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \text{ و}$$

هذه هي كل التطبيقات الأولية لقواعد الاشتقاق السابقة وتم تركها كتمرين.

مثال 9.1 حساب مشتقة دالّة القطع الزائد

حساب مشتقة $f(x) = \sinh^2(3x)$.

الحل من قاعدة السلسلة نحصل على

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sinh^2(3x) = \frac{d}{dx}[\sinh(3x)]^2 \\ &= 2\sinh(3x)\frac{d}{dx}[\sinh(3x)] \\ &= 2\sinh(3x)\cosh(3x)\frac{d}{dx}(3x) \\ &= 2\sinh(3x)\cosh(3x)(3) \\ &= 6\sinh(3x)\cosh(3x) \end{aligned}$$

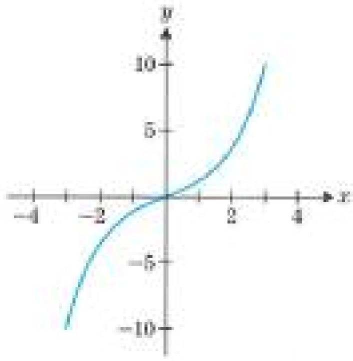
بالنسبة لـ $f(x) = \sinh x$ ، لاحظ أن

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \begin{cases} > 0 & \text{إذا } x > 0 \\ < 0 & \text{إذا } x < 0 \end{cases}$$

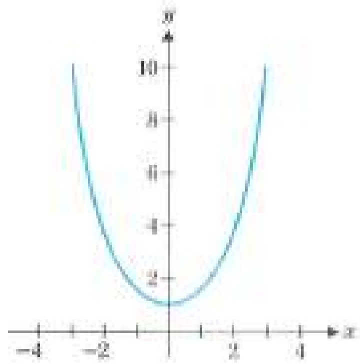
تم ترك هذا كتمرين. بما أن $f'(x) = \cosh x > 0$ ، فإن المماسات على منحنى $y = \sinh x$ لها ميل موجب لكل x . وفي النهاية، يمكنك بسهولة التحقق من أن

$$\lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$$

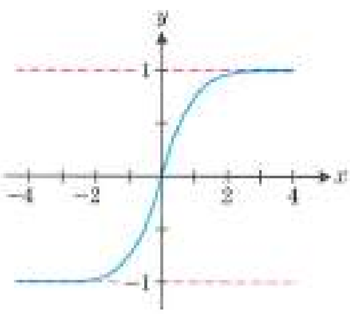
نحن نوضح تمثيلًا بيانيًا لـ $y = \sinh x$ في الشكل 3.45 والتمثيلات البيانية لـ $\cosh x$ و $\tanh x$ موضحة في الأشكال 3.46a و 3.46b على الترتيب.



الشكل 3.45
$y = \sinh x$



الشكل 3.46a
$y = \cosh x$



الشكل 3.46b
$y = \tanh x$

إذا كان السلك أو الشريط المرن (مثل شريط القوة أو شريط الهاتف) معلق بين برجين، فسيتخذ شكل منحنى **سلسلي** (مشتق من الكلمة اللاتينية *catena* وتعني "سلسلة". ويناظر التمثيل البياني لدالّة الـ Cosine القطع الزائد $f(x) = a\cosh(\frac{x}{a})$

دوال القطع الزائد المعكوسة

يجب أن تلاحظ من التمثيلات البيانية لكل من $\sinh x$ و $\tanh x$ أن هذه الدوال هي دوال واحد إلى واحد (وذلك وفقًا لاختبار المستقيم الأفقي). وأيضًا دالّة $\cosh x$ $x \geq 0$ هي دالّة واحد إلى واحد لـ x. وهكذا يمكننا تعريف معكوسات هذه الدوال كما يلي. لكل $x \in (-\infty, \infty)$، فإننا نعرّف معكوس الـ Sine **زاوية القطع الزائد** باستخدام

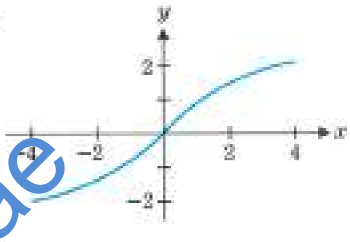
$$y = \sinh^{-1} x \qquad \text{إذا وفقط إذا} \qquad \sinh y = x$$

لكل $x \geq 1$ ، فإننا نعرّف معكوس الـ Cosine **زاوية القطع الزائد** باستخدام

$$y = \cosh^{-1} x \qquad \text{إذا وفقط إذا} \qquad \cosh y = x, \quad \text{و} \quad y \geq 0$$

وفي النهاية، لكل $x \in (-1, 1)$ ، فإننا نعرّف معكوس الـ tan **زاوية القطع الزائد** باستخدام

$$y = \tanh^{-1} x \qquad \text{إذا وفقط إذا} \qquad \tanh\ y = x$$



الشكل 3.47a
$y = \sinh^{-1} x$

يمكن تعريف معكوسات دوال القطع الزائد الثلاثة المتبقية بشكل مشابه. نرسم التمثيلات البيانية لـ $y = \sinh^{-1} x$ ، $y = \cosh^{-1} x$ و $y = \tanh^{-1} x$ في الأشكال 3.47a، 3.47b و 3.47c على الترتيب. وكالعادة، يمكنك الحصول على ذلك عن طريق عكس التمثيل البياني للدالة الأساسية حول المستقيم $y = x$).

يمكننا إيجاد المشتقات لدوال القطع الزائد المعكوسة باستخدام الإشتقاق الضمني، تمامًا مثلما فعلنا مع الدوال المثلثية المعكوسة. بما أنّ

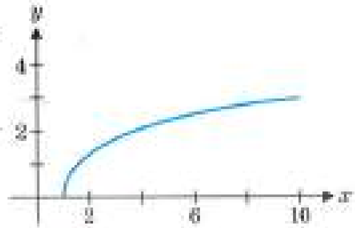
$$y = \sinh^{-1} x \qquad \text{إذا وفقط إذا} \qquad \sinh y = x \tag{9.2}$$

مع اشتقاق كلا الطرفين في هذه المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$\frac{d}{dx}\sinh y = \frac{d}{dx}x$$

أو

$$\cosh y\frac{dy}{dx} = 1$$



الشكل 3.47b
$y = \cosh^{-1} x$

وبالحل للحصول على المشتقة، نجد أن

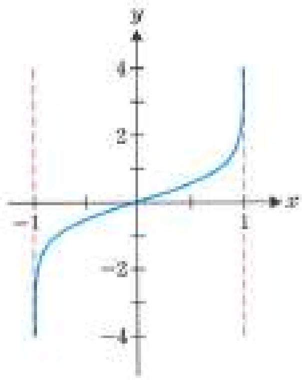
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

وبما أننا نعرف أن

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

من (9.1). وهكذا، لقد وضحنا أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$



الشكل 3.47c
$y = \tan^{-1} x$

لاحظ أن التشابه مع قانون الاشتقاق لـ $\sin^{-1} x$. ويمكننا كذلك صياغة قوانين اشتقاق للدوال الخمس الأخرى المعكوسة للقطع الزائد. يمكن تنظيم لائحة بالمشتقات الباقية.

من أجل الإستكمال

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

وقبل الانتهاء من هذا الدرس، نتمنى التركيز على أن دوال القطع الزائد المعكوسة لها ميزة مهمة عن الدوال العكسية السابقة التي ناقشناها. يوضح ذلك أنه يمكننا إيجاد حل للدوال العكسية بشكل صريح بدلالة المزيد من الدوال الأولية.

مثال 9.2 إيجاد قانون لدالّة قطع زائد معكوسة

أوجد قانونًا صريحًا لـ $\sinh^{-1}x$.

الحل تذكر من (9.2) أن

$$y = \sinh^{-1}x \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad \sinh y = x$$

باستخدام هذا التعريف يوجد لدينا

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \tag{9.3}$$

يمكننا حل هذه المعادلة لإيجاد y كما يلي. أولاً نذكر أيضًا أن

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

والآن، لاحظ أن بإضافة هاتين المعادلتين الأخيرتين واستخدام المتطابقة (9.1)، يوجد لدينا

$$\begin{aligned} e^y &= \sinh y + \cosh y = \sinh y + \sqrt{\cosh^2 y} \\ &= \sinh y + \sqrt{\sinh^2 y + 1} \\ &= x + \sqrt{x^2+1}, \end{aligned}$$

بما أن $\cosh y > 0$

من (9.3) . وفي النهاية، عند أخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين، نحصل على

$$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

وهكذا، وجدنا قانونًا لدالّة Sine القطع الزائد المعكوسة،

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad ■$$

وبالمثل، يمكننا توضيح أن لكل $x \ge 1$ ،

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

ولكل $-1 < x < 1$ ،

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

سنترك ذلك كتمرين لاشتقاق هذه الدوال والدوال المقابلة الخاصة بدوال القطع الزائد المعكوسة المتبقية. توجد نقطة صغيرة في تذكر أي من هذه القوانين. كل ما تحتاجه فقط هو إدراك أن تلك القوانين متوفرة دائمًا عن طريق إجراء بعض عمليات الجبر الأولية.

تمارين كتابية

.1 قارن بين مشتقة الدوال المثلثية ومشتقات دوال القطع الزائد. لاحظ أيضًا أن المتطابقة المثلثية $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ تختلف فقط بإشارة الطرح عن متطابقة القطع الزائد المناظرة $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

.2 وكما تمت ملاحظته في النص، فإن دوال القطع الزائد ليست مجرد دوال جديدة. حيث إنها توفر أسماء لمجموعات مفيدة من الدوال الأسية. اشرح لماذا يكون من المفيد تخصيص أسماء معينة لهذه الدوال بدلًا من تركها كدوال أسية.

.3 صف باختصار التمثيلات البيانية لـ $\sinh x$ و $\cosh x$ و $\tanh x$. أي كثيرات الحدود البسيطة التي تمثلها التمثيلات البيانية لـ $\sinh x$ و $\cosh x$؟

.4 السلسلي (القطع الزائد Cosine) هو شكل ينتج عن سلك معلق لأن ذلك يوزع وزن السلك بالتساوي على أجزاء السلك. ومعرفة هذا، لماذا كان من الجيد بناء قوس جيت واي بهذا الشكل؟ لماذا قد تشك في أن بيض الطيور له الشكل نفسه؟

في التمارين 1-4، ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالّة.

1. $f(x) = \cosh 2x$ 2. $f(x) = \cosh 3x$

3. $f(x) = \tanh 4x$ 4. $f(x) = \sinh 3x$

في التمارين 5-12، أوجد مشتقة كل دالّة.

5. (a) $f(x) = \cosh 4x$ (b) $f(x) = \cosh^4 x$

6. (a) $f(x) = \sinh \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{\sinh x}$

7. (a) $f(x) = \tanh x^2$ (b) $f(x) = (\tanh x)^2$

8. (a) $f(x) = \operatorname{sech} 3x$ (b) $f(x) = \operatorname{csch}^3 x$

9. (a) $f(x) = x^2 \sinh 5x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\operatorname{csch}^2 x}$

10. (a) $f(x) = \dfrac{\cosh 4x}{x+2}$ (b) $f(x) = x^2 \tanh(x^3+4)$

11. (a) $f(x) = \cosh^{-1} 2x$ (b) $f(x) = \sinh^{-1} x^2$

12. (a) $f(x) = \tanh^{-1} 3x$ (b) $f(x) = x^2 \cosh^{-1} 4x$

.13 أثبت كل مشتقة $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ و $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$.

.14 أوجد مشتقة كل دالة $\coth x$ و $\operatorname{sech} x$ و $\operatorname{csch} x$.

.15 باستخدام خصائص الدوال الأسية، اثبت أن $\sinh x > 0$ إذا كان $x > 0$ و $\sinh x < 0$ إذا كان $x < 0$.

.16 اثبت أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

.17 أوجد قانونًا صريحًا، كما في المثال 9.2 لـ $\cosh^{-1} x$.

.18 أوجد قانونًا صريحًا، كما في المثال 9.2، لـ $\tanh^{-1} x$.

.19 أثبت أن $e^x = \cosh x + \sinh x$. في الواقع، ستوضح أن تلك هي الطريقة الوحيدة لكتابة e^x كمجموع للدوال الزوجية والفردية. لرؤية ذلك، على فرض أن $e^x = f(x) + g(x)$ حيث f دالّة زوجية و g دالّة فردية. أثبت أن $e^{-x} = f(x) - g(x)$. عند جمع المعادلات والقسمة على اثنين، استنتج أن $f(x) = \cosh x$. ثم استنتج أن $g(x) = \sinh x$.

.20 أثبت أن $\cosh(-x) = \cosh x$ (أي $\cosh x$ يمثل دالّة زوجية) وأن $\sinh(-x) = -\sinh x$ (أي $\sinh x$ هي دالّة فردية).

.21 أثبت أن $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.

.22 أثبت أن $\tanh x = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

تطبيقات

.23 معادلة عامة بشكل أكبر للشكل السلسلي $y = a\cosh\frac{x}{b}$. أوجد a و b لمطابقة الخصائص التالية لسلك معلق. تكون الأطراف بعيدة بمقدار 40 m وارتفاعها $y = 20\text{m}$ ويكون الارتفاع في المنتصف $y = 10$ m.

.24 الحد الأدنى لارتفاع سلك معلق هو $y = 10$ m. والمسافة بين الأطراف هي 40 m، مع ارتفاع الطرف الأيسر بمقدار 30 m، وارتفاع الطرف الأيمن بمقدار 20 m. أوجد معادلة الشكل السلسلي.

.25 على فرض أنّ السرعة المتجهة الرأسية $v(t)$ لجسم يسقط كتلته m تخضع للجاذبية وسحب الهواء يمكن حسابها بالمعادلة

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)$$

لثابت معين موجب k.

(a) أوجد السرعة المتجهة النهائية عن طريق حساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) أثبت أن جاذبية السرعة المتجهة النهائية (mg) متوازنة بسحب الهواء (kv^2).

.26 اثنان من المظليين في الهواء وزنهما 800 N يسقطان من ارتفاع 1000 m. المحلق الأول يطير في الهواء ورأسه إلى الأمام مع معامل سحب قدره $k = \frac{1}{8}$. المحلق الثاني يطير في الهواء بوضعية النسر الذي يفرد جناحيه مع $k = \frac{1}{2}$. قارن بين السرعتين المتجهتين النهائيتين.

.27 اشتق لوتج وويس المعادلة التالية للسرعة المتجهة الأفقية لمكوك الفضاء أثناء إعادة الدخول $v(t) = 7901\tanh(-0.00124t + \tanh^{-1}(v_0/7901))$ m/s حيث v_0 هي السرعة المتجهة في الزمن $t = 0$. أوجد أقصى عجلة يختبرها المكوك من هذه الحركة الأفقية (أي أكبر قيمة لـ $|v'(t)|$). (إرشاد: الحد الأدنى لقيمة $\cosh x$ هو 1، عندما $x = 0$.)

تمرين استكشافي

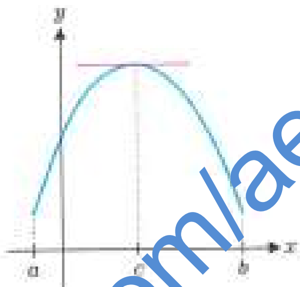
.1 يبلغ طول قوس جيت واي 630 قدمًا ويبلغ ارتفاعه 630 قدمًا. يشبه شكله القطع المكافئ تمامًا. ولكنه سلسلي في الواقع. ستكتشف الاختلاف بين الشكلين في هذا التمرين. أولًا

فكّر في النموذج $y = 757.7 - 127.7\cosh(x/127.7)$ لكل $y \geq 0$. أوجد التقاطعات مع محوري x و y ووضّح أن هذا النموذج يطابق (تقريبًا) قياسات القوس التي تصل إلى 630 قدمًا للعرض و 630 قدمًا للارتفاع. ماذا ستكون 127.7 في النموذج بهذا القياس لكي يطابق القياسات تمامًا؟ والآن، ضع في حسبانك نموذج القطع المكافئ للحصول على التقاطعات مع المحور x $x = -315$ و $x = 315$. اشرح لماذا يجب أن يشمل النموذج الصيغة $y = -c(x + 315)(x - 315)$ لثابت معين موجب c. ثم أوجد c لمطابقة التقاطع المرغوب به مع المحور y ويصل إلى 630. مثّل بيانيًا القطع المكافئ والشكل السلسلي على المحاور نفسها لكل $-315 \leq x \leq 315$. ما الاختلاف بين التمثيلات البيانية؟ قدّر أقصى مسافة بين المنحنيات. لقد اطلع المؤلفون على كتب رياضيات حيث يتم تمثيل القوس عن طريق القطع المكافئ. ما الخطأ في فعل ذلك؟

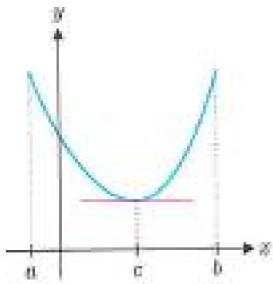
نظرية القيمة المتوسطة

في هذا الدرس، نتناول نظرية القيمة المتوسطة التي تُعد بالغة الأهمية لأننا سنستنبط منها أفكارًا جديدة لعدد من الوحدات المقبلة. وقبل دراسة النتيجة الأساسية، سنطلع على حالة خاصة نطلق عليها نظرية رول.

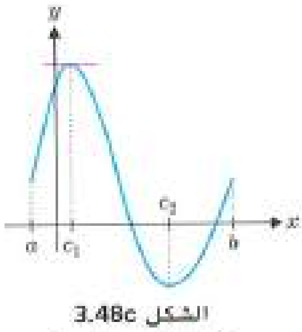
تتسم نظرية رول بالبساطة الشديدة. في أي دالة تكون فيها f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)، وحيث إن $f(a) = f(b)$، فإنه يجب أن تكون هناك نقطة على الأقل بين $x = a$ و $x = b$ بحيث يكون المماس على منحنى $y = f(x)$ أفقيًا. في الأشكال من 3.48a إلى 3.48c، نرسم عددًا من التمثيلات البيانية التي تستوفي المعايير السابقة. لاحظ أن كل تمثيل بياني يوجد فيه على الأقل نقطة واحدة لها مماس أفقي. ارسم التمثيلات البيانية الخاصة بك لتزداد قناعتك أنه في ظل هذه الظروف لا يمكن التوصيل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بدون وجود مماس أفقي واحد على الأقل.



الشكل 3.48a
تمثيل بياني بشكل متزايد في البداية



الشكل 3.48b
تمثيل بياني بشكل متناقص في البداية



الشكل 3.48c
تمثيل بياني بمماسين أفقيين

لاحظ أنه بما أن $f'(x) = 0$ عند مماس أفقي، فإن هذا يعني أنه ثمة نقطة واحدة على الأقل c في (a, b)، حيث $f'(c) = 0$. انظر الأشكال من 3.48a إلى 3.48c.

النظرية 10.1 (نظرية رول)

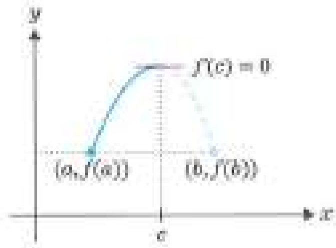
على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$، وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) و $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ حيث إن $f'(c) = 0$.

يعتمد برهان نظرية رول على نظرية القيم القصوى. ونحن حتى الآن نتناول الأفكار الأساسية للبرهان من وجهة نظر التمثيلات البيانية. يقدم الملحق A برهانًا على هذه النظرية. لاحظ أولاً أنه إذا كانت $f(x)$ ثابتة على $[a, b]$، فإن $f'(x) = 0$ بالنسبة لكل قيم x التي تقع بين a و b. من ناحية أخرى، إذا كانت $f(x)$ غير ثابتة على $[a, b]$، فإنه عند النظر من اليسار إلى اليمين يجب على التمثيل البياني أن يبدأ في التناقص أو التزايد. انظر الشكلين 3.49a و 3.49b. وفي حال بدأ التمثيل البياني في التزايد، لاحظ أنه، للعودة إلى المستوى الذي بدأ عنده، يجب أن يتحول في نقطة ما ويبدأ في التناقص. أفكر في الأمر بهذه الطريقة إذا بدأت

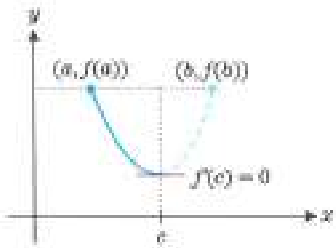
ملاحظات تاريخية

ميشيل رول (1652-1719)
عالم رياضيات فرنسي أثبت صحة نظرية رول في كثيرات الحدود. نشأ رول في بيئة فقيرة واعتمد على نفسه في تعليمه وناضل في عدد متنوع من الوظائف، فعمل محاسبًا وكاتبًا ومعلمًا للصفوف الابتدائية. كان عضوًا فعالاً في الأكاديمية الفرنسية للعلوم، وكان يناقش ألمع العقول في الأكاديمية أمثال ديكارت على فرض أنه إذا كان $a < b$ فإن $-b < -a$. أفيمكننا على سبيل المثال استنتاج أن $-1 < -2$. والغريب أن رول كان مشهورًا برفضه لحساب التفاضل والتكامل المتطور الجديد، وكان تطلق عليه "مجموعة من المغالطات العبقرية".

في تسلق جبل، فإن الارتفاع يزداد؛ وإذا أردت العودة للأسفل إلى نقطة البداية، فسيتوجب عليك التحول عند نقطة ما وعندها سيبدأ الارتفاع في التناقص.)



الشكل 3.49a
يصعد التمثيل البياني ثم يتحول لينحدر إلى المكان الذي بدأ منه.



الشكل 3.49b
ينحدر التمثيل البياني ثم يتحول للصعود إلى المكان الذي بدأ منه.

إذًا ثمة نقطة واحدة على الأقل يتحول عندها التمثيل البياني ويتغير من التزايد إلى التناقص. (انظر الشكل 3.49a). وبالمثل، في الحالة التي يبدأ فيها التمثيل البياني بالتناقص، يجب أن يتحول من التناقص إلى التزايد. (انظر الشكل 3.49b). نطلق على هذه النقطة $x = c$ وبما أننا نعرف أن $f'(c)$ موجودة، فإن $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$ أو $f'(c) = 0$. نريد أن نثبت أن $f'(c) = 0$ كما يتضح من الشكلين 3.49a و3.49b. ولإثبات ذلك، من السهل توضيح أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$. إذا كان من الصحيح افتراض أن $f'(c) > 0$، فيمكن استخدام التعريف البديل للمشتقة الواردة في المعادلة (2.2) من الدرس 2–3، نجد أن

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

يعني ذلك أنه لكل x قريبة بما يكفي من c يكون

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \qquad (10.1)$$

على وجه الخصوص، بالنسبة للتمثيل البياني المتزايد في بدايته، إذا كان $x - c > 0$ (بمعنى أن $x > c$)، فيعني ذلك أن $f(x) - f(c) > 0$ أو $f(x) > f(c)$. وهذا غير ممكن لكل قيم $x > c$ (عندما تكون x قريبة بما يكفي من c) إذا تحول التمثيل البياني عند c وبدأ في التناقص. بالتالي، نستنتج مما سبق أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) > 0$. وبالمثل، يمكننا توضيح أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) < 0$. إذًا $f'(c) = 0$، وهو المطلوب إثباته. تكاد تكون الحالة التي يبدأ التمثيل البياني فيها بالانحدار متطابقة.

سنحاول الآن توضيح استنتاج نظرية رول.

مثال 10.1 توضيح لنظرية رول

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

في الفترة $[0, 1]$.

الحل نثبت أولًا أنه تم استيفاء فرضيات النظرية. f قابلة للاشتقاق ومتصلة لكل قيم x [بما أن $f(x)$ كثيرة حدود وجميع كثيرات الحدود متصلة وقابلة للاشتقاق دائمًا]. كذلك، $f(0) = f(1) = 2$. لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

ثم سنحاول إيجاد قيم c حيث إن

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0$$

وباستخدام القانون العام، نجد أن $c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.5774$ [ليست في الفترة $(0, 1)$]
و $c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42265 \in (0, 1)$. ■

ملاحظة 10.1

نود التأكيد على أن المثال 10.1 هو مجرد مثال لتوضيح نظرية رول. إيجاد العدد (الأعداد) c التي تحقق استنتاج نظرية رول ليس النقطة التي ناقشها. في المقابل، نهتم بنظرية رول بشكل أساسي لأننا نستخدمها لإثبات إحدى النتائج الأساسية لأساسيات حساب التفاضل والتكامل، وهي نظرية القيمة المتوسطة.

رغم أن نظرية رول هي نتيجة بسيطة، إلا أنه يمكننا استخدامها في استنتاج عدد كبير من خصائص الدوال. فنحن نهتم على سبيل المثال بإيجاد الأصفار في الدالّة f (وهي حل المعادلة $f(x)=0$). وعلى وجه الخصوص، عادةً ما يكون من الصعب تحديد عدد الأصفار للدالّة. تكمن فائدة نظرية رول هنا.

النظرية 10.2

إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$، وكانت قابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) ويوجد لـ $f(x)=0$ حلان في $[a, b]$، فإن $f'(x)=0$ لها حل واحد على الأقل في (a, b)

البرهان

هذه حالة خاصة من نظرية رول. حدد الصفرين الموجودين في $f(x)$ إذا كان $x=s$ و $x=t$ حيث $s<t$ بما أن $f(s)=f(t)$، فإن نظرية رول تضمن وجود عدد مثل c بحيث $s<c<t$ (وبالتالي $a<c<b$) حيث $f'(c)=0$ ■

يمكننا ببساطة أن نعمم نتيجة النظرية 10.2، كما هو الحال في النظرية التالية.

النظرية 10.3

لأي عدد صحيح $n>0$، إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) ويوجد لـ $f(x)=0$ n من الحلول بالفترة $[a, b]$، فإن $f'(x)=0$ لها على الأقل $(n-1)$ من الحلول بالفترة (a, b).

البرهان

من النظرية 10.2، بين كل زوج من الحلول لـ $f(x)=0$ يوجد حل واحد على الأقل لـ $f'(x)=0$. في هذه الحالة، هناك حلول متتابعة عددها $(n-1)$ لـ $f(x)=0$ لتعطي النتيجة ذلك. ■

يمكننا استخدام النظرية 10.2 والنظرية 10.3 للتحقق من عدد الأصفار في دالّة ما. لتذكّر أننا ندرس هنا الأصفار الحقيقية فقط لدالّة ما وليس الأصفار المركبة.

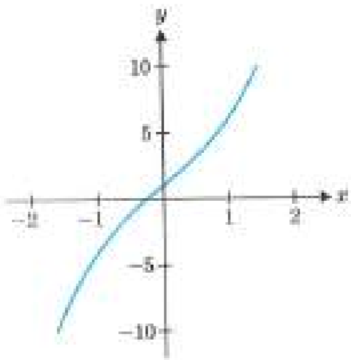
مثال 10.2 تحديد عدد الأصفار لدالّة

أثبت أن $x^3+4x+1=0$ لها حل واحد فقط.

الحل تبدو من الشكل 3.50 النتيجة مقبولة. لكن كيف يمكننا التأكد من عدم وجود أصفار خارج النافذة المعروضة؟ لاحظ أنه للدالّة $f(x)=x^3+4x+1$، فإن نظرية القيمة الوسيطة تضمن وجود حل واحد، حيث إن $f(-1)=-4<0$ و $f(0)=1>0$. كما أن

$$f'(x)=3x^2+4>0$$

لكل قيم x باستخدام نظرية 10.2، إذا كانت $f(x)=0$ لديها حلان، فإن $f'(x)=0$ سيكون لديها حل واحد على الأقل. وبما أن $f'(x)\neq 0$ لكل قيم x، فإنه من الخطأ أن يكون لدى $f(x)=0$ حلان (أو أكثر). إذاً، $f(x)=0$ لديها حل واحد بالضبط. ■



الشكل 3.50
$y=x^3+4x+1$

لقد قمنا الآن بتعميم نظرية رول إلى إحدى أهم النتائج الخاصة بأساسيات حساب التفاضل والتكامل.

النظرية 10.4 (نظرية القيمة المتوسطة)

على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ حيث إن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{10.2}$$

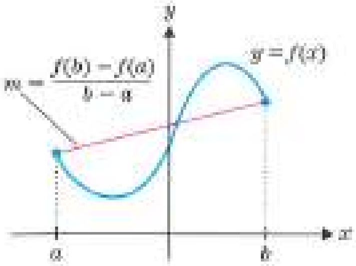
البرهان

لاحظ أن الفرضيات متطابقة بالنسبة لفرضيات نظرية رول. عدا أنه لا يوجد افتراض حول قيم f عند النقطتين الطرفيتين. يمثل التعبير $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ميل القاطع الذي يربط بين النقطتين الطرفيتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$

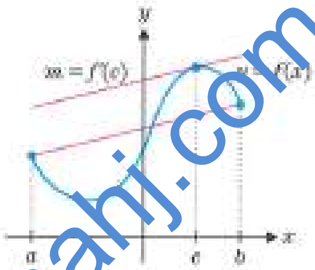
ملاحظة

لاحظ أن الحالة الخاصة التي يكون $f(a) = f(b)$، (10.2) فيها، يصبح الاستنتاج الخاص بنظرية رول أن $f'(c) = 0$

تؤكد النظرية على وجود مماس للمنحنى عند النقطة $x = c$ في (a, b) وله الميل نفسه كالمستقيم القاطع (وبالتالي يوازيه). (انظر الشكلين 3.51 و3.52) إذا أملت رأسك بحيث تظهر القطعة المستقيمة وكأنها أفقية فإن الشكل 3.52 سيأخذ مظهر أشكال نظرية رول (الشكلان 3.49a و3.49b). تكمن فكرة البرهان في إمالة الدالة، ثم تطبيق نظرية رول.



الشكل 3.52
نظرية القيمة المتوسطة



الشكل 3.51
المستقيم القاطع

معادلة القاطع المار بالنقطتين الطرفيتين هي

$$y - f(a) = m(x - a)$$

حيث

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

عرّف الدالة "المائلة" g على أنها الفرق بين f والدالة التي يكون تمثيلها البياني عبارة عن القاطع:

$$g(x) = f(x) - [m(x - a) + f(a)] \tag{10.3}$$

لاحظ أن g متصلة في $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في (a, b) وذلك لأن f لها الخصائص نفسها. علاوة على ذلك،

$$g(a) = f(a) - [0 + f(a)] = 0$$

و

$$g(b) = f(b) - [m(b - a) + f(a)]$$
$$= f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

بما إن $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$

بما أن $g(a) = g(b)$، فإنه باستخدام نظرية رول يمكننا تأكيد وجود عدد c في الفترة (a, b) حيث إن $g'(c) = 0$ وبإجراء إشتقاق لـ (10.3)، نحصل على

$$0 = g'(c) = f'(c) - m \tag{10.4}$$

في النهاية، ننتج حل (10.4) لإيجاد قيمة $f'(c)$

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهو المطلوب ■

قبل استعراضنا لبعض نقاط قوة نظرية القيمة المتوسطة، سنستعرض بإيجاز استنتاجها.

مثال 10.3 توضيح لنظرية القيمة المتوسطة

أوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

في الفترة $[0, 2]$

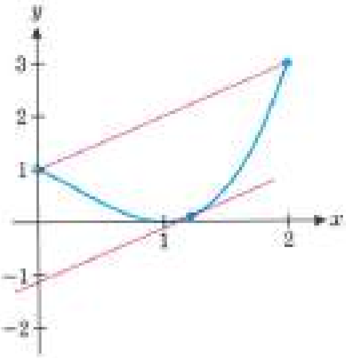
الحل لاحظ أن f متصلة في $[0, 2]$ وقابلة للاشتقاق في $(0, 2)$. تنص نظرية القيمة المتوسطة بعد ذلك على وجود عدد c في $(0, 2)$ يكون فيه

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$

لإيجاد هذا العدد c، نحدد ما يلي

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 1 = 1$$
$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

باستخدام القانون العام، سنوجد $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ في هذه الحالة، حلًا واحدًا وهو $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ موجود في الفترة $(0, 2)$. في الشكل 3.53، توضح التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$، والمستقيم القاطع للنقطتين الطرفيتين لجزء من المنحنى في الفترة $[0, 2]$، والمماس عند $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ ■



الشكل 3.53
نظرية القيمة المتوسطة

إن التوضيح الوارد بالمثال 10.3، الذي أوجدنا فيه العدد c وأكدت نظرية القيمة المتوسطة وجوده، لا يمثل محور اهتمام النظرية. في الحقيقة، عادة ما تبقى قيمة c مجهولة. وتكمن أهمية نظرية القيمة المتوسطة في أنها تربط الفرق بين قيم الدوال بالفرق بين قيم x المتطابقة لها، كما هو الحال في المعادلة (10.5) أدناه.

لاحظ أنه، إذا أخذنا نتيجة نظرية القيمة المتوسطة بعين الاعتبار (10.2) وضربنا الطرفين في الكمية $(b - a)$، فستحصل على

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (10.5)$$

كما تبين أن عددًا كبيرًا من أكثر النتائج أهمية في حساب التفاضل والتكامل أيما في ذلك النتيجة المعروفة بالنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل) يتبع نظرية القيمة المتوسطة. ويدور السؤال حول عدد الدوال التي لها المشتقة نفسها.

تذكر أنه لأي ثابت c يكون

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

ثمة سؤال لم تفكر فيه على الأرجح، وهو: هل من دوال أخرى تكون مشتقتها صفرًا؟ الإجابة هي لا، ويوضح ذلك النظرية 10.5

النظرية 10.5

على فرض أن $f'(x) = 0$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I. فإن $f(x)$ ثابتة في I

البرهان

اختر أي عددين مثل a وb في I حيث $a < b$. بما أن f قابلة للاشتقاق في I و $(a, b) \subset I$ فإن f متصلة في $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في (a, b) باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه بالنسبة للعدد $c \in (a, b) \subset I$،
يكون

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

بما أن $f'(x) = 0$ لجميع قيم $x \in I$، فإن $f'(c) = 0$ وينتج عن ذلك

$$f(b) - f(a) = 0 \quad \text{أو} \quad f(b) = f(a)$$

بما أن a و b هما نقطتين عشوائيتين في I، فإن f ثابتة في I، وهو المطلوب. ■

يرتبط السؤال التالي بالنظرية 10.5. نعلم على سبيل المثال أن

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x$$

ولكن، هل يوجد دوال أخرى لها المشتقة نفسها؟ ينبغي عليك ذكر عدة أمثلة على ذلك. على سبيل المثال $x^2 + 3$ و $x^2 - 4$ لهما المشتقة $2x$. وفي الحقيقة،

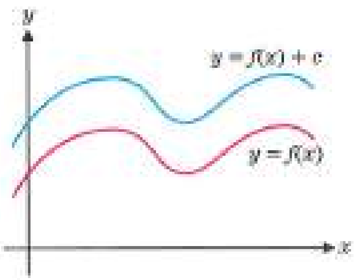
$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

بالنسبة لأي ثابت c. هل يوجد أي دوال لها المشتقة $2x$؟ تنص النتيجة 10.1 على أنه لا وجود لمثل هذه الدوال.

النتيجة 10.1

على فرض أن $g'(x) = f'(x)$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I، فإنه بالنسبة للثابت c،

$$\boxed{g(x) = f(x) + c \text{ لكل } x \in I}$$



الشكل 3.54
تمثيلان بيانيان متوازيان

لاحظ أن النتيجة 10.1 تنص على أنه إذا وجد تمثيلان بيانيان لديهما الميل نفسه عند كل نقطة على فترة ما، فإن التمثيلين البيانيين سيختلفان فقط بالإزاحة الرأسية. (انظر الشكل 3.54).

البرهان

لنعرّف $h(x) = g(x) - f(x)$ إذًا $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$

لكل قيم x في I في النظرية 10.5. يكون $h(x) = c$ للثابت c ثم يتبع ذلك النتيجة بشكل مباشر من تعريف $h(x)$ ■

نجد أن النتيجة 10.1 لها تطبيقات مهمة عندما نحاول عكس عملية الاشتقاق (نطلق على ذلك "الاشتقاق العكسي"). لنلق نظرة على هذا المثال 10.4.

مثال 10.4 إيجاد جميع الدوال التي لها مشتقة معطاة

أوجد جميع الدوال التي مشتقتها تساوي $3x^2 + 1$

الحل نكتب أولاً (من واقع خبرتنا مع الاشتقاقات) دالّة واحدة لها مشتقة صحيحة، $x^3 + x$. ثم، ستخبرنا النتيجة 10.1 أن أي دالّة أخرى لها المشتقة نفسها تختلف عنها بثابت واحد على الأكثر. إذًا، كل دالّة تساوي مشتقتها $3x^2 + 1$ يكون لها الشكل $x^3 + x + c$ بالنسبة للثابت c ■

وكمثال أخير، نوضح طريقة استخدام نظرية القيمة المتوسطة لوضع متباينة ذات فائدة.

مثال 10.5 إثبات متباينة لـ $\sin x$

أثبت أن

$$|\sin a| \le |a| \text{ for all } a$$

الحل أولاً، لاحظ أن $f(x) = \sin x$ متصلة وقابلة للاشتقاق على أي فترة ولكل a.

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|$$

بما أن $\sin 0 = 0$، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه (إذا كان $a \neq 0$)

$$\frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c \qquad (10.6)$$

للعدد c بين a و0. لاحظ أنه، إذا قمنا بضرب الطرفين من (10.6) في a وأخذنا القيم المطلقة، فسوف نحصل على

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c|\,|a - 0| = |\cos c|\,|a| \qquad (10.7)$$

ولكن $|\cos c| \le 1$، لكل الأعداد الحقيقية c إذا باستخدام (10.6)، نجد أن

$$|\sin a| = |\cos c|\,|a| \le (1)\,|a| = |a|$$

وهو المطلوب. ■

أبعد من القوانين

تتسم نظرية القيمة المتوسطة بتعقيدها، لكن تطبيقاتها بعيدة المدى. ورغم أن التوضيح في الشكل 3.52 يجعل النتيجة واضحة، إلا أن نتائج نظرية القيمة المتوسطة، مثل المثال 10.4، ضخمة وليست جميع أجزائها واضحة. على سبيل المثال، يعتمد معظم بنية حساب التفاضل والتكامل الوارد في هذا الكتاب على نظرية القيمة المتوسطة، سواء بطريقة مباشرة أو غير مباشرة. قد يؤدي الفهم الكامل لنظرية حساب التفاضل والتكامل إلى استنتاجات مهمة، ولا سيما عندما يفوق المسائل ما يمكن لحدسك التعامل معه. ما النظريات الأخرى التي علمتها ولا تزال تقدم لك رؤية ثاقبة لما وراء نظريتها الأصلي؟

التمارين 3.10

تمارين كتابية

1. بالنسبة لكل من نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة، على فرض أن f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b). إذا فرضنا أن f قابلة للاشتقاق في $[a, b]$، فإنه لا يجب علينا ذكر الاتصال. اشرح لماذا. لكن وضّح لماذا يستبعد هذا الافتراض $f(x) = x^{2/3}$ في $[0, 1]$ التي تنطبق فيها نظرية القيمة المتوسطة.

2. إحدى نتائج هذا الدرس هي أنه إذا كان $f'(x) = g'(x)$ في الفترة المفتوحة I، فإن $g(x) = f(x) + c$ في I للثابت c. اشرح هذه النتيجة بيانيًا.

3. اشرح النتيجة 10.1 في ما يتعلق بدالتي الموقع والسرعة المتجهة. بمعنى أنه إذا كان لدى جسمين دالة السرعة المتجهة نفسها، فما الذي تعرفه عن المواقع النسبية للجسمين؟

4. يمكن استنباط نظرية رول من نظرية القيمة المتوسطة عبر إثبات $f(a) = f(b)$. نظرًا لذلك، قد يكون من الغريب معرفة أن نظرية رول اسم خاص وجزء في هذا الكتاب. ولتوضيح السبب وراء قيامنا بذلك، سنناقش طرقًا تسهّل فهم نظرية رول أكثر من نظرية القيمة المتوسطة.

في التمارين 6-1، تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة، وجد قيمة c الذي يجعل الاستنتاج الخاص بالنظريتين صحيحًا. اشرح الاستنتاج برسم تمثيل بياني

1. $f(x) = x^2 + 1, [-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 + 1, [0, 2]$
3. $f(x) = x^3 + x^2, [0, 1]$
4. $f(x) = x^3 + x^2, [-1, 1]$
5. $f(x) = \sin x, [0, \pi/2]$
6. $f(x) = \sin x, [-\pi, 0]$

7. أثبت أنّ $x^3 + 5x + 1 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

8. أثبت أنّ $x^3 + 4x - 3 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

9. أثبت أنّ $x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ لها حلان بالضبط.

10. أثبت أنّ $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ لها حلان بالضبط.

11. أثبت أنّ $x^3 + ax + b = 0$ لها حل واحد بالضبط لكل $a > 0$

12. أثبت أنّ $(a > 0, b > 0)$ $x^4 + ax^2 - b = 0$ لها حلان بالضبط.

13. أثبت أنّ $x^5 + ax^3 + bx + c = 0$ لها حل واحد بالضبط لكل من $a > 0, b > 0$

14. أثبت أنّ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (مكعّبة) بها ثلاثة أصفار على الأكثر. أيمكنك استخدام القانون العام؟

في التمارين 15-22، أوجد الدالّة g التي تجعل $g'(x) = f(x)$.

15. $f(x) = x^2$

16. $f(x) = 9x^4$

17. $f(x) = 1/x^2$

18. $f(x) = \sqrt{x}$

19. $f(x) = \sin x$

20. $f(x) = \cos x$

21. $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$

22. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

23. على فرض أن f دالّة قابلة للإشتقاق بحيث $f(0) = f'(0) = 0$ و $f''(0) > 0$. أثبت أنه يوجد ثابت موجب $a > 0$ حيث $f(x) > 0$ لكل قيم x في الفترة $(0, a)$. هل يمكن استنباط أي شيء حول $f(x)$ بالنسبة للقيم x السالبة؟

24. وضّح أنه بالنسبة لأي عددين حقيقيين u و v، $|\cos u - \cos v| \leq |u - v|$

25. أثبت أن $|\sin a| < |a|$ لكل قيم $a \neq 0$. واستخدم النتيجة لتوضيح أن الحل الوحيد للمعادلة $\sin x = x$ هو $x = 0$. ماذا سيحدث إذا حاولت إيجاد جميع نقاط التقاطع باستخدام حاسبة التمثيل البياني؟

26. أثبت أن $|\tan^{-1} a| < |a|$ لكل قيم $a \neq 0$. واستخدم هذه المتباينة لإيجاد جميع حلول المعادلة $\tan^{-1} x = x$.

27. أثبت أن $|\sin^{-1} x| > |x|$ حيث $0 < |x| < 1$.

28. أثبت أن $|\tan x| \geq |x|$ حيث $|x| < \frac{\pi}{2}$

29. إذا كان $f'(x) > 0$ لكل قيم x. فأثبت أن $f(x)$ هي دالّة متزايدة بمعنى أنه إذا كان $a < b$ فإن $f(a) < f(b)$.

30. إذا كان $f'(x) < 0$ لكل قيم x. فأثبت أن $f(x)$ هي دالّة متناقصة بمعنى أنه إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$

في التمارين 31-38، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك.

31. $f(x) = x^3 + 5x + 1$

32. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$

33. $f(x) = -x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

35. $f(x) = e^x$

36. $f(x) = e^{-x}$

37. $f(x) = \ln x$

38. $f(x) = \ln x^2$

39. على فرض أن $s(t)$ تحدّد موقع جسم ما في الزمن t. وإذا كانت s قابلة للإشتقاق في الفترة $[a, b]$، فأثبت أنه عندما $t = c$ تكون السرعة اللحظية عند $t = c$ مساوية للسرعة المتجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$.

40. بدأ عدّاءان سباقًا في الزمن 0. وبعد مرور فترة من الزمن $t = a$ تصدر عدّاء السباق. ولكن المتسابق الثاني نزع منه صدارة السباق بمرور الزمن $t = b$. أثبت أنه عند الزمن $t = c > 0$ كان العدّاءان يجريان بالسرعة نفسها بالضبط.

41. إذا كانت f و g دالّتين قابلتين للإشتقاق في الفترة $[a, b]$ حيث $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$. فأثبت أنه عند نقطة ما في الفترة $[a, b]$، f و g لهما مماسان متوازيان.

42. أثبت أن نتيجة التمرين 41 لا تزال قائمة إذا كان الافتراضان $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$ مستخدمين في المعطى $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$.

في التمارين 43-46، اشرح لم لا يصح استخدام نظرية القيمة المتوسطة. إذا كانت الفرضيات غير صحيحة، فإن النظرية لا تفيدك بأي شيء حول صحة الاستنتاج. في ثلاث أو أربع حالات، وضّح أنه لا توجد قيمة لـ c تجعل نتيجة النظرية صحيحة. في الحالة الرابعة، أوجد قيمة c.

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}, [-1, 1]$

44. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, [-1, 2]$

45. $f(x) = \tan x, [0, \pi]$

46. $f(x) = x^{1/3}, [-1, 1]$

47. في $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{إذا } x \leq 0 \\ 2x-4 & \text{إذا } x > 0 \end{cases}$. وضّح أن f متصلة في الفترة $(0, 2)$ وقابلة للإشتقاق في الفترة $(0, 2)$ ويوجد بها $f(0) = f(2)$. وضّح أنه لا توجد قيمة لـ c تجعل $f'(c) = 0$. ما فرضية نظرية رول غير المستوفاة؟

48. على فرض أن f دالّة قابلة للإشتقاق بحيث $f(0) = f'(0) = 0$. وضّح بالمثال أنه من غير الضروري أن تكون $f(x) = 0$ صحيحة بالنسبة لجميع قيم x. جِد الخطأ في "البرهان" المزيف التالي باستخدام نظرية القيمة المتوسطة حيث $x = a$ و $b = 0$ نجد أن $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. بما أن $f(0) = 0$ و $f'(c) = 0$. كذلك $\dfrac{f(x)}{x} = 0$. إذا $f(x) = 0$.

تمارين استكشافية

1. إذا كانت لديك سرعة متجهة متوسطة بمقدار 60 mph على ساعة واحدة، وحدود السرعة هي 65 mph. فلن تستطيع إثبات أنك لم تتجاوز حدود السرعة. ما أطول فترة زمنية يمكنك استخدامها في حساب المتوسط 60 mph وتضمن عدم تخطي حدود السرعة؟ يمكننا استخدام نظرية القيمة المتوسطة للإجابة عن السؤال، وذلك بعد توضيح سؤالين أساسيين. السؤال الأول، أثبت أننا نحتاج إلى معرفة الحد الأقصى لتسارع السيارة، وأن الحد الأقصى للتسارع الموجب قد يختلف عن الحد الأقصى للتسارع السالب. وفق خبرتك، ما أكبر تسارع (زيادة السرعة) قد تصل إليها سيارتك؟ ما أكبر تباطؤ (خفض السرعة) قد تصل إليه سيارتك؟ ادعم تقديراتك ببعض البيانات الحقيقية (مثل تتحرك سيارتي من 0 إلى 60 في غضون 15 ثانية). أطلق على العدد الأكبر اسم A (استخدم وحدات mph في الثانية). ثم أثبت أن التسارع (مشتقة السرعة المتجهة) ثابت، ثم أثبت أن دالّة السرعة المتجهة هي دالّة خطية. لذلك، إذا كانت

السرعة المتجهة تختلف من 55 mph إلى 65 mph بمعدل تسارع ثابت، فإن السرعة المتجهة المتوسطة ستصبح 60 mph. والآن، طبّق نظرية القيمة المتوسطة على دالّة السرعة المتجهة $v(t)$ في الفترة الزمنية $[0, T]$، حيث تتغير السرعة المتجهة من 55 mph إلى 65 mph بمعدل تسارع ثابت A. إذا $v'(c) = \frac{v(T) - v(0)}{T - 0}$ و $A = \frac{65 - 55}{T - 0}$. ما مدى جودة الضمان؟

2. على فرض إلقاء إحدى الملوثات في بحيرة بمعدل $p'(t) = t^2 - t + 4$ طن في الشهر. وقد بلغ معدل إلقاء هذا الملوث في البحيرة خلال الشهرين الأولين $A = p(2) - p(0)$. باستخدام $c = 1$ (النقطة المتوسطة في الفترة)، قدّر $p(t)$ من خلال تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على $p(t)$ في الفترة $[0, 2]$. للحصول على تقدير أفضل، طبّق نظرية القيمة المتوسطة على الفترات $[0, 1/2]$، $[1/2, 1]$، $[1, 3/2]$ و $[3/2, 2]$. إذا تمكّنت من استخدام CAS، فاحصل على تقديرات أفضل من خلال قسمة الفترة $[0, 2]$ إلى أجزاء أكثر وأكثر. ثم حاول تخمين نهاية التقديرات.

3. تنصّ نتيجة تُعرف باسم نظرية القيمة المتوسطة لكوشي على أنه إذا كان f و g دالتين قابلتين للاشتقاق في الفترة (a, b) ومتصلتين في $[a, b]$، فيوجد عدد c يكون فيه $a < c < b$ و $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

أوجد جميع الأخطاء الموجودة في المحاولة غير الصالحة لإثبات النتيجة، ثم أوجد البرهان الصحيح. المحاولة غير الصالحة: إن فرضيات نظرية القيمة المتوسطة مستوفاة في كلا الدالّتين. لذلك يوجد عدد c يكون فيه $a < c < b$ و $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ و $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$. إذًا $b - a = \frac{f(b) - f(a)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{g'(c)}$ لذلك $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

تمارين مراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية مصطلحات المعرفة ونظريات واردة في هذه الوحدة. بالنسبة لكل مصطلح أو نظرية، (1) اذكر تعريف أو عبارة دقيقة، (2) اذكر معنى المصطلح أو النظرية بعبارات عامة، و(3) صف أنواع المسائل ذات الصلة بالمصطلح أو النظرية.

المماس	السرعة المتجهة	السرعة المتجهة المتوسطة
اشتقاق	قاعدة القوى	التسارع
قاعدة ناتج الضرب	قاعدة ناتج قسمة	قاعدة السلسلة
الإشتقاق الضمني	نظرية القيمة المتوسطة	نظرية رول

أوجد مشتقة كل دالة:

$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x,$
$\cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \csc^{-1} x, e^x, b^x, \ln x, \log_b x$

صواب أم خطأ

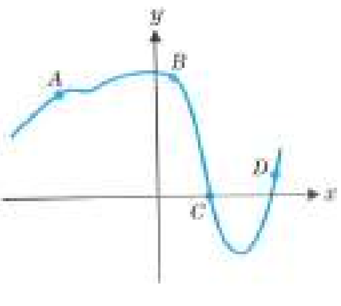
اذكر إذا ما كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة وبيّن السبب باختصار. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" عن طريق تعديل العبارة الموضّحة إلى عبارة جديدة صحيحة.

1. إذا كانت دالّة متصلة عند $x = a$، فسيكون لها مماس عند $x = a$
2. السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$ هي متوسط السرعات المتجهة عند $t = a$ و $t = b$
3. ينتج الميل عن مشتقة الدالّة.
4. إذا أخذنا التمثيل البياني لـ $f'(x)$ بعين الاعتبار، فيمكنك إنشاء التمثيل البياني لـ $f(x)$.
5. ينتج عن قاعدة القوى قاعدة لحساب مشتقة أي كثيرة حدود.
6. إذا تمت كتابة دالّة في صورة ناتج قسمة، فاستخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقتها.
7. ينتج عن قاعدة السلسلة مشتقة تركيب دالتين. الترتيب غير مهم في هذه الحالة.
8. مشتقة الدالّة العكسية هو معكوس مشتقة الدالّة.
9. لا يكون منحنى $f(x) = \sin 4x$ أبدًا أكبر من 1.
10. مشتقة أي دالّة كثيرة الحدود هي نفسها.
11. مشتقة $f(x) = \ln ax$ هي $\frac{1}{x}$ لأي $a > 0$
12. في الإشتقاق الضمني، لا يجب عليك حل y بصفتها دالّة x لإيجاد قيمة $y'(x)$
13. تعد نظرية القيمة المتوسطة ونظرية رول حالتان خاصتان بالنسبة لبعضهما.
14. يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة لتوضيح أنه في كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة يكون $f'(x) = 0$ بالنسبة كحد أقصى لأربع قيم لـ x.

1. قدّر قيمة $f'(1)$ من البيانات المعطاة.

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	2.0	2.6	3.0	3.4	4.0

2. نظّم لائحة النقاط A و B و C و D بترتيب الميل المتزايد للمماس على المنحنى.



في التمارين 3-8، استخدم تعريف النهاية لإيجاد المشتقة المطلوبة.

3. $f'(2)$ for $f(x) = x^2 - 2x$
4. $f'(1)$ for $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
5. $f'(1)$ for $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f'(0)$ for $f(x) = x^3 - 2x$
7. $f'(x)$ for $f(x) = x^3 + x$
8. $f'(x)$ for $f(x) = \frac{3}{x}$

في التمارين 9-14، أوجد معادلة المماس.

9. $y = x^4 - 2x + 1$ at $x = 1$
10. $y = \sin 2x$ at $x = 0$
11. $y = 3e^{2x}$ at $x = 0$
12. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ at $x = 0$
13. $y - x^2y^2 = x - 1$ at $(1, 1)$
14. $y^3 + xe^y = 4 - x$ at $(2, 0)$

في التمارين 15-18، استخدم دالّة الموقع المُعطى لإيجاد السرعة المتجهة والتسارع.

15. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$
16. $s(t) = -9.8t^2 - 22t + 6$
17. $s(t) = 10e^{-2t} \sin 4t$
18. $s(t) = \sqrt{4t + 16} - 4$

19. في التمرين 15، تعطي الدالة $s(t)$ ارتفاع الكرة في الزمن t. أوجد السرعة المتجهة للكرة عند $t = 1$. هل ترتفع الكرة أم تسقط؟ أوجد السرعة المتجهة للكرة عند $t = 2$. هل ترتفع الكرة أم تسقط؟

20. في التمرين 17، تعطي الدالة $s(t)$ موقع كتلة مرتبطة بزنبرك في الزمن t. قارن السرعتين المتجهتين عند $t = 0$ و $t = \pi$. هل تتحرك الكتلة في الاتجاه نفسه أم في اتجاهين متضادين؟ ما الزمن الذي تتحرك فيه الكتلة بسرعة؟

في التمرينين 21 و22، احسب ميول المستقيمات القاطعة بين $x = 2$ و $x = 1$ (a)، $x = 1.5$ و $x = 1$ (b)، $x = 1.1$ و $x = 1$ (c)، و(d) قدّر ميل المماس عند $x = 1$.

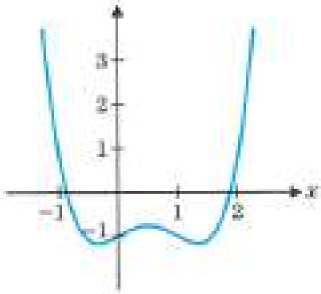
21. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
22. $f(x) = e^{2x}$

في التمارين 23-50، أوجد مشتقة الدالّة المعطاة.

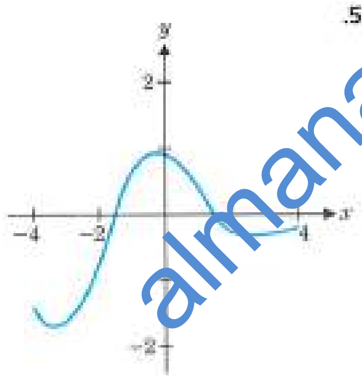
23. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$
24. $f(x) = x^{2/3} - 4x^2 + 5$
25. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$
26. $f(x) = \frac{2 - 3x + x^2}{\sqrt{x}}$
27. $f(t) = t^2(t + 2)^3$
28. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 - 3t + 2)$
29. $g(x) = \frac{x}{3x^2 - 1}$
30. $g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x}$
31. $f(x) = x^2 \sin x$
32. $f(x) = \sin x^2$
33. $f(x) = \tan \sqrt{x}$
34. $f(x) = \sqrt{\tan x}$
35. $f(t) = t \csc t$
36. $f(t) = \sin 3t \cos 4t$
37. $u(x) = 2e^{-x^2}$
38. $u(x) = (2e^{-x})^2$
39. $f(x) = x \ln x^2$
40. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$
41. $f(x) = \ln \sqrt{\sin 4x}$
42. $f(x) = e^{\sin(x^2+1)}$
43. $f(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$
44. $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$
45. $f(t) = te^{4t}$
46. $f(x) = \frac{6x}{(x - 1)^2}$
47. $\sin^{-1}(2x^2 + 1)$
48. $\sin(\cos^{-1} x^2)$
49. $\tan^{-1}(\cos 2x)$
50. $\sec^{-1}(3x^2)$

في التمرينين 51 و52، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لرسم التمثيل البياني $y = f'(x)$.

51.



52.



في التمارين 53-60، أوجد المشتقة المطلوبة.

53. $f''(x)$ for $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1$
54. $f'''(x)$ for $f(x) = \sqrt{x + 1}$
55. $f'''(x)$ for $f(x) = xe^{2x}$
56. $f''(x)$ for $f(x) = \frac{4}{x + 1}$

57. $f''(x)$ for $f(x) = \tan(2x)$

58. $f^{(4)}(x)$ for $f(x) = (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 1)^2$

59. $f^{(26)}(x)$ for $f(x) = \sin 3x$

60. $f^{(31)}(x)$ for $f(x) = e^{-2x}$

61. تساوي الإيرادات الثمن مضروبًا في الكمية. على فرض أن السعر الحالي هو AED 2.40 وتم بيع 12,000 قطعة بهذا السعر. إذا كان السعر يزداد بمعدل 10 فلسات في العام الواحد وتقل الكمية المبيعة بمعدل 1500 قطعة في العام الواحد. فبأي معدل تزداد الإيرادات؟

62. يمكننا إيجاد القيمة (بالدرهم) للاستثمار بصفته دالّة زمن (الأعوام) باستخدام $v(t) = 200\left(\frac{3}{2}\right)$. أوجد معدل النسبة المئوية اللحظية لتغيّر قيمة الاستثمار.

63. يمكننا إيجاد الموقع في الفترة الزمنية t لزنبرك يتحرك بشكل رأسي باستخدام $f(t) = 4\cos 2t$. أوجد موقع الزنبرك عندما يكون لديه (a) سرعة متجهة قيمتها صفر، و(b) حد أقصى للسرعة المتجهة، و(c) حد أدنى للسرعة المتجهة.

64. يمكننا إيجاد الموقع في الفترة الزمنية t لزنبرك يتحرك بشكل رأسي باستخدام $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$. أوجد سرعة الزنبرك المتجهة في أي زمن t

في التمارين 65-68، أوجد المشتقة $y'(x)$.

65. $x^2y - 3y^3 = x^2 + 1$

66. $\sin(xy) + x^2 = x - y$

67. $\frac{y}{x+1} - 3y = \tan x$

68. $x - 2y^2 = 3e^{x/y}$

69. إذا تمكنت من استخدام CAS، فارسم التمثيل البياني في التمرين 65. أوجد قيمة y التي تتوافق مع $x = 0$. أوجد ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة. كذلك، أوجد $y''(0)$.

70. إذا تمكنت من استخدام CAS، فارسم التمثيل البياني في التمرين 67. أوجد قيمة y التي تتوافق مع $x = 0$. أوجد ميل المماس مع المنحنى عند هذه النقطة. كذلك، أوجد $y''(0)$.

في التمارين 71-74، أوجد جميع النقاط التي يكون عندها المماس للمنحنى (a) أفقيًا، و(b) رأسيًا.

71. $y = x^3 - 6x^2 + 1$

72. $y = x^{2/3}$

73. $x^2y - 4y = x^2$

74. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

75. أثبت أن المعادلة $x^3 + 7x - 1 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

76. أثبت أن المعادلة $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

في التمرينين 77 و78، حل الجزأين بدون إيجاد المعكوس: (a) أوجد مشتقة المعكوس عند $x = a$ و(b) مثّل المعكوس بيانيًا.

77. $x^3 + 2x^2 - 1, a = 2$

78. $e^{x^3+2x}, a = 1$

79. أثبت أن $|\cos x - 1| \le |x|$ لكل x.

80. أثبت أن $x + x^3/3 + 2x^5/15 < \tan x < x + x^3/3 + 2x^5/5$ لكل $0 < x < 1$

81. إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$، فوضّح أن $g(x)$ متصلة عند $x = a$، حيث

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & x \ne a \text{ إذا } \\ f'(a) & x = a \text{ إذا } \end{cases}$$

82. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ والمماس هو $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ عند $x = a$ على المنحنى $f(x)$، فأثبت أن $f(x) - T(x) = e(x)(x - a)$ للدالة الخطأ $e(x)$ حيث $\lim_{x \to a} e(x) = 0$

في التمرينين 83 و84، أوجد قيمة c بالشكل الذي تحققه نظرية القيمة المتوسطة.

83. $f(x) = x^2 - 2x$ في الفترة $[0, 2]$

84. $f(x) = x^3 - x$ في الفترة $[0, 2]$

في التمرينين 85 و86، أوجد جميع دوال g حيث $g'(x) = f(x)$.

85. $f(x) = 3x^2 - \cos x$

86. $f(x) = x^3 - e^{2x}$

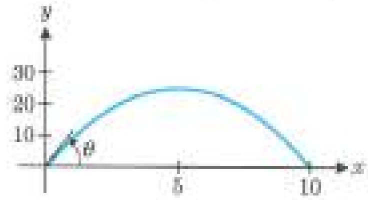
87. يكون لكثيرة الحدود $f(x)$ جذر مكرر من الرتبة 2 عند $x = a$ إذا كان $(x - a)^2$ عاملاً لـ $f(x)$ لكن $(x - a)^3$ ليس كذلك. لدى الخط الذي يمر بالنقطة $(1, 2)$ وميله m المعادلة $y = m(x - 1) + 2$. أوجد m بحيث يكون لدى $f(x) = x^3 + 1 - [m(x - 1) + 2]$ جذر مكرر من الرتبة 2 عند $x = 1$. وضّح أن $y = m(x - 1) + 2$ هو المماس لـ $y = x^3 + 1$ عند النقطة $(1, 2)$

88. كرر التمرين 87 بالنسبة لـ $f(x) = x^3 + 2x$ والنقطة $(2, 12)$

89. يبلغ طول وتر غيتار L، وتبلغ كثافته p، ويتذبذب الشد T بالتردد $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{p}}$ احسب الاشتقاق $\frac{df}{dT}$، عندما نتعامل مع T على أنه متغير مستقل، ونتعامل مع p وL على أنهما ثابتين. فسّر هذا الاشتقاق من وجهة نظر عازف غيتار يخفف الوتر أو يحزّزه "لضبط نغمته". أوجد $\frac{df}{dL}$ وفسّر من وجهة نظر عازف غيتار يعزف نوتة من خلال الضغط على الوتر بطوق.

تمارين استكشافية

1. تُعد معرفة أين ينبغي تصويب الكرة مهارة مهمة في العديد من النشاطات الرياضية. إذا لم تتبع الكرة خطًا مستقيمًا (بفعل الجاذبية أو عوامل أخرى)، فإن التصويب قد يكون مهمة صعبة. عند إلقاء كرة قاعدة على سبيل المثال، يجب على اللاعب أخذ الجاذبية بعين الاعتبار والتصويب على ارتفاع أعلى من الهدف. وعند تجاهل مقاومة الهواء وأي حركات جانبية، يمكن تقريب حركة الكرة المتحركة باستخدام $y = -\frac{16}{v^2 \cos^2 \theta}x^2 + (\tan \theta)x$. إذا، تم إلقاء الكرة من الموضع $(0, 0)$ بالسرعة الابتدائية v ft/s عند الزاوية θ من المستقيم الأفقي.



إذا أخذنا هذا الميل بعين الاعتبار، فيمكننا حساب ميل المماس عند $x = 0$. إذا كيف يمكننا حساب الزاوية المناسبة θ؟ وضّح أنه إذا كان m هو ميل المماس عند $x = 0$، فإن $m = \tan \theta$. (إرشاد: ارسم مثلثًا باستخدام المماس والمحور x، وتذكّر أنّ الميل هو الارتفاع الرأسي على الامتداد الأفقي). ألا تظن أنّ المماس اسم جيد؟ فلنتناول الآن بعض مسائل كرة القاعدة. سوف نتأمل الآن مدى الارتفاع الذي يحتاج اللاعبون إلى رفع الكرة إليه لجعل التمريرات سهلة في الإمساك بها. تُعدّ ارتفاع التمريرة هو ارتفاع الالتقاط الجيد. إذا كان L (ft) هو طول التمريرة، ونريد من الكرة الوصول إلى الارتفاع نفسه عند إطلاقها (كما هو موضح في الشكل). ويمكن تحديد القطع المكافئ من خلال العلاقة التالية بين الزاوية والسرعة المتجهة: $\sin 2\theta = 32L/v^2$ يجب على لاعب القاعدة الثالثة الذي يمرّر الكرة بسرعة 130 ft/s (حوالي 90 mph) أن تمرّر بسرعة 120 ft للوصول إلى القاعدة الأولى. أوجد قاعدة إطلاق الكرة (عوّض عن L و v، ومن خلال المحاولة والخطأ، أوجد قيمة θ المناسبة)، وميل المماس، والارتفاع الذي يجب فيه على لاعب القاعدة الثالثة تصويب الكرة (وهو الارتفاع الذي ستصل إليه الكرة مع افتراض انعدام الجاذبية). ما مدى التغير الذي سيطرأ في حالة إجراء تمريرة مرنة بسرعة 100 ft/s؟ ماذا عن تمريرة لاعب الدفاع للكرة لمسافة 300 قدم بسرعة 130 ft/s؟ ينكر معظم لاعبو كرة القاعدة أنهم يصوّبون الكرة بهذا الارتفاع. فما الشيء المتأصل في خبراتهم ويجعل من الصعب عليهم تصديق هذه الحسابات؟

ملحوظات

Appendix A

ANSWERS TO ODD-NUMBERED EXERCISES

CHAPTER 1

Exercises 1.1

1. $x < 2$ 3. $-\frac{4}{3} < x \le \frac{1}{3}$

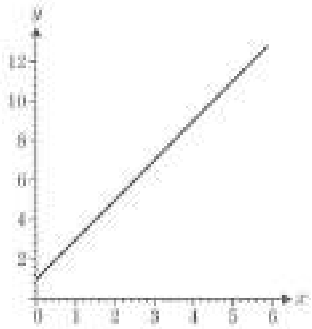
5. $x > 4$ or $x \le -2$ 7. $x \ge 1$ or $x \le -3$

9. $-7 < x < -3$ 11. yes 13. no

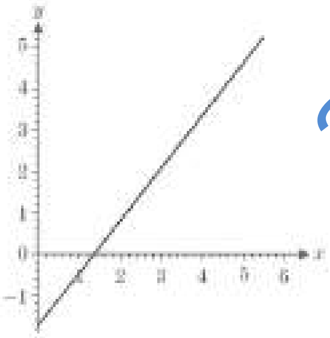
15. (a) $\sqrt{20}$ (b) 2 (c) $y = 2x$

17. (a) $\sqrt{2.96}$ (b) $-\frac{5}{7}$ (c) $1.4y = -x - 1.66$

19. $(2, 5)$, $y = 2(x - 1) + 3$



21. $(3.3, 2.3)$, $y = 1.2(x - 2.3) + 1.1$



23. parallel 25. perpendicular 27. perpendicular

29. (a) $y = 2(x - 2) + 1$ (b) $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1$

31. (a) $y = 2(x - 3) + 1$ (b) $y = -\frac{1}{2}(x - 3) + 1$

33. $y = 2(x - 1) + 1$; 7

35. yes 37. no 39. both 41. rational

43. $x \ge -2$ 45. $(-\infty, -2) \cup (3, 5) \cup (5, \infty)$ 47. $x \ne \pm 1$

49. $-1, 1, 11, -\frac{3}{4}$

51. $0 \le x \le$ number made, x an integer 53. no: many y's for one x

55. no: many y's for one x

57. constant, increasing, decreasing; graph going down; graph going up

59. x-intercepts: $-2, 4$; y-intercept: -8

61. x-intercept: 2; y-intercept: -8

63. x-intercepts: ± 2; y-intercept: -4

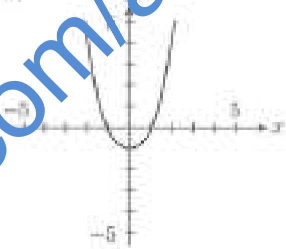
65. 1, 3 67. $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ 69. 0, 1, 2

71. $1, -\sqrt[3]{2}$ 73. $(-2, 3), (1, 6)$

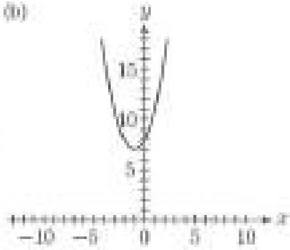
75. 63,000 feet 77. $y = 4x - 156$ 79. 51

Exercises 1.2

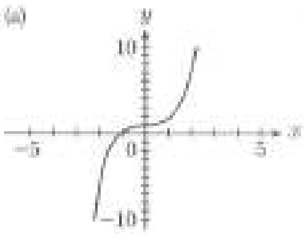
1. (a)



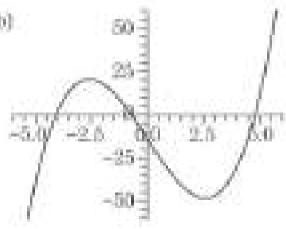
(b)



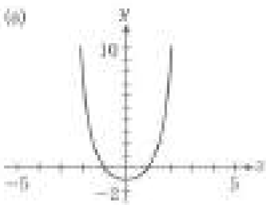
3. (a)



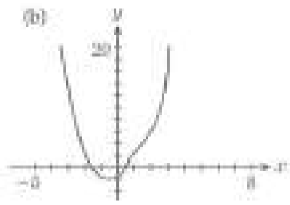
(b)



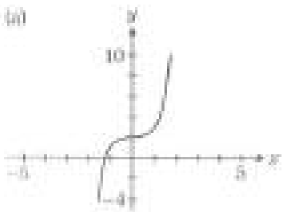
5. (a)



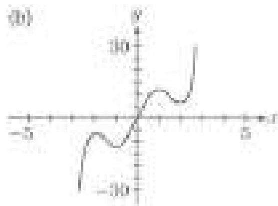
(b)



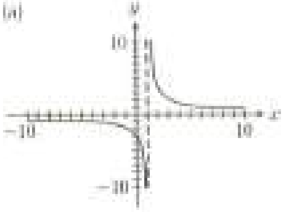
7. (a)



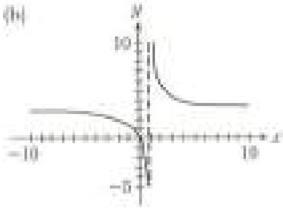
(b)



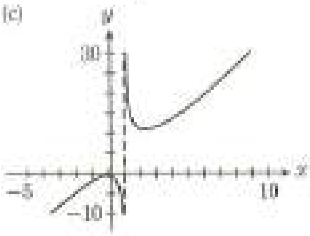
9. (a)



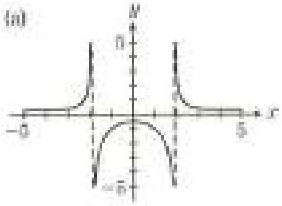
(b)



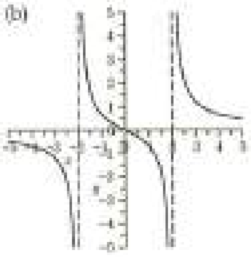
(c)



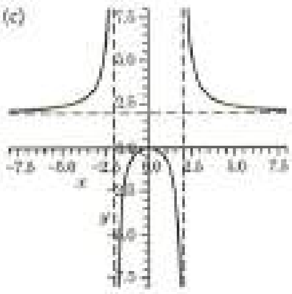
11. (a)



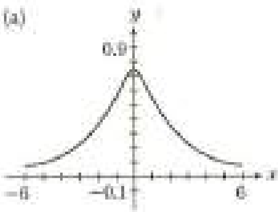
(b)



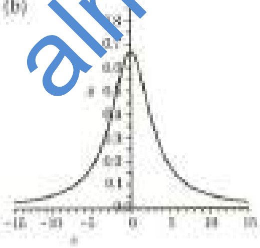
(c)



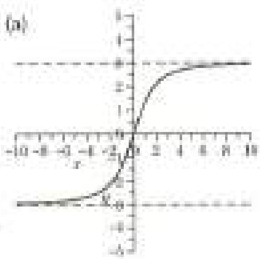
13. (a)



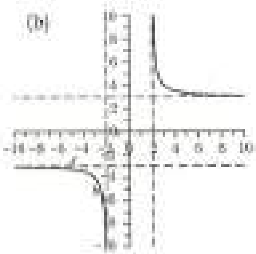
(b)



15. (a)



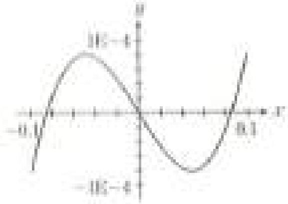
(b)



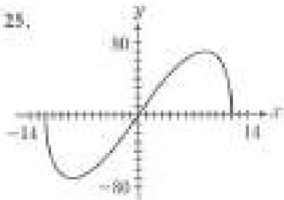
17. (a) $x = -2, x = 2$ 19. $x = -5, x = 2$

21. $x = -2, x = -1, x = 0$

23.



25.



27. $x = 0$ 29. 1, 1.2 (approx.)

31. 1 33. 0, 9.53 (approx.)

35. −1.18, 1.18 (approx.) 37. −1.88, 0.35, 1.53

39. 0.56, 3.07 41. −5.25, 10.01

43. possible answer: $-9 \le x \le 11, -17 \le y \le 23$

45. parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

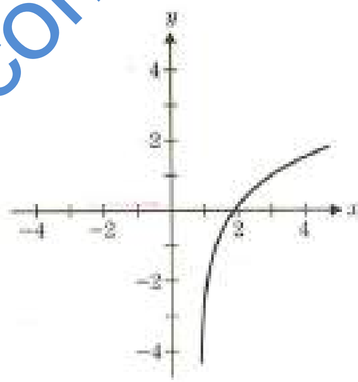
Exercises 1.3

5. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$ 7. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+1}$

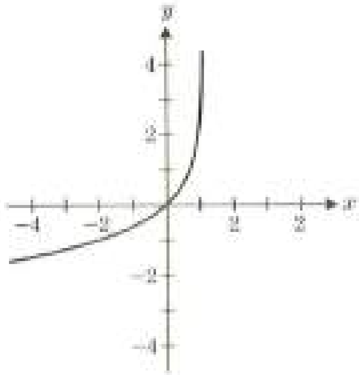
9. not one-to-one 11. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}, x \ge 0$

13. (a) 0 (b) 1 15. (a) −1 (b) 1 17. (a) 2 (b) 0

19.



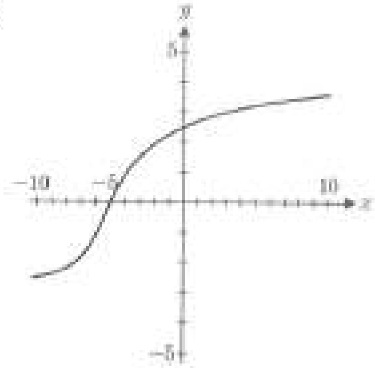
21.



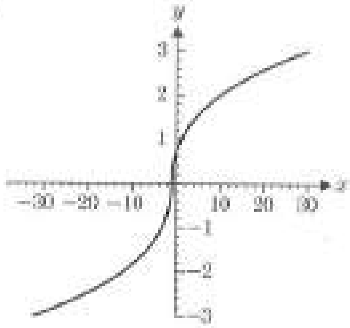
23. If $f^{-1}(x) = y$, then $f(y) = x > 0$

25. If $f(x) \ne 3$, then $f^{-1}(3) \ne x$

27.

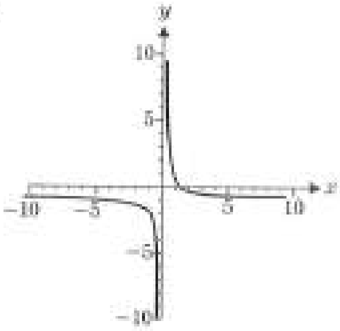


29.

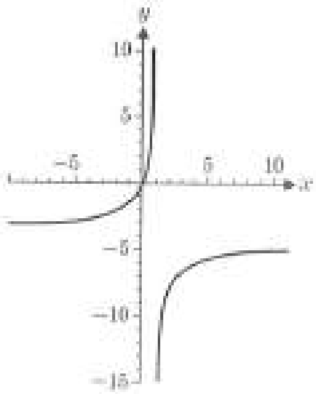


31. not one-to-one

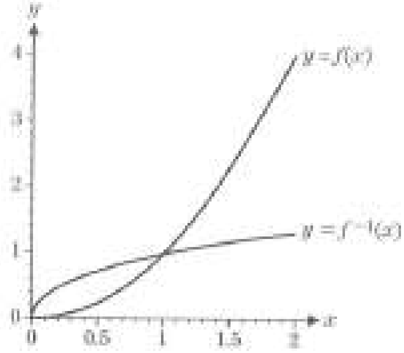
33.



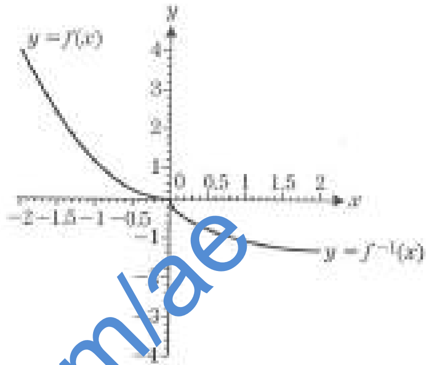
35.



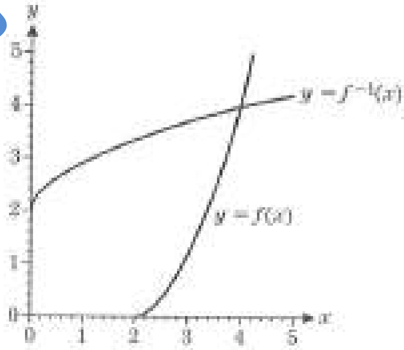
37.



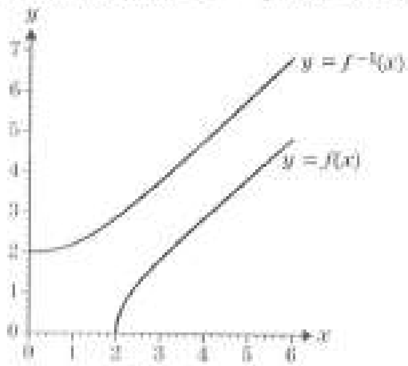
39. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, x \ge 0$



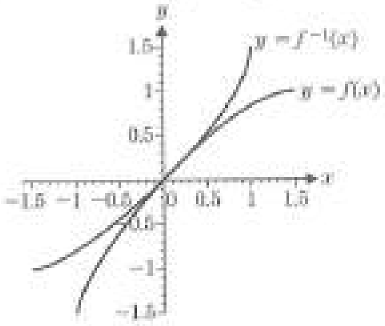
41. f is one-to-one for $x \ge 2$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$



43. f is one-to-one for $x \ge 2$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$



45. f is one-to-one for $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



53. no; subtract $\frac{100}{11}$%

Exercises 1.4

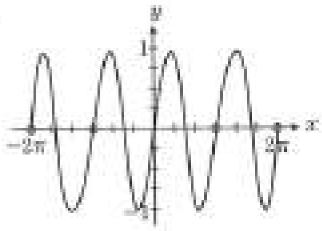
1. (a) 45° (b) 60° (c) 30° (d) 240°

3. (a) π (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

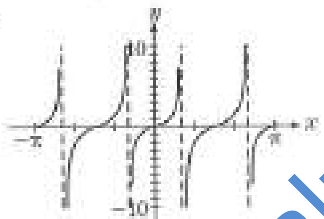
5. $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi; \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ 7. $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

9. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 11. $\frac{\pi}{2} + n\pi; 2n\pi$ 13. $\pi + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi$

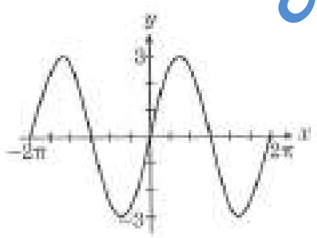
15.



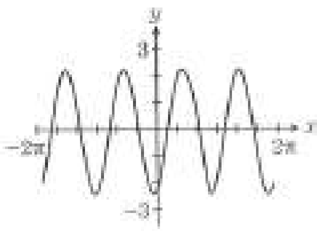
17.



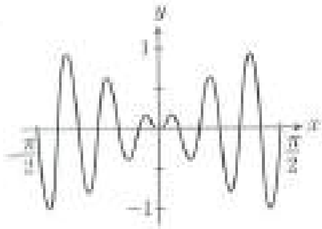
19.



21.



23.



25. $A = 3$, period $= \pi$, frequency $= \frac{1}{\pi}$

27. $A = 5$, period $= \frac{2\pi}{3}$, $f = \frac{3}{2\pi}$

29. $A = 3$, period $= \pi$, $f = \frac{1}{\pi}$

31. $A = 4$, period $= 2\pi$, $f = \frac{1}{2\pi}$

37. $\frac{\pi}{2}$ 39. $-\pi/2$ 41. 0 43. $\frac{\pi}{3}$ 45. $\frac{\pi}{4}$

47. $\theta \approx 0.6435$ 49. no 51. yes, 2π 53. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

55. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

57. $\sqrt{1-x^2}; -1 \le x \le 1$

59. $\sqrt{x^2-1}, x \ge 1$ or $-\sqrt{x^2-1}, x \le -1$

61. [illegible] 63. $\frac{4}{3}$

65. 3; $x = 0, x \approx 1.109, x \approx 3.698$

67. 2; $x \approx -1.455, x \approx 1.455$

69. $2 \tan 20^\circ \approx 0.73$ mile

71. $100 \tan 50^\circ \approx 119$ feet

73. $A(x) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3x}\right)$

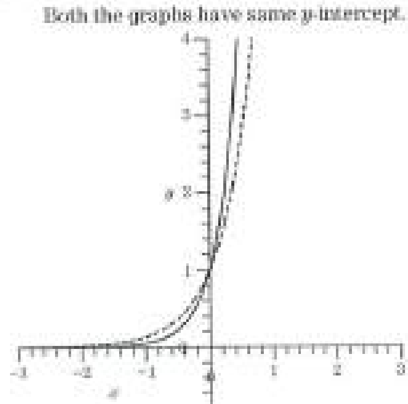
75. $f = \frac{30}{\pi}, \frac{170}{\sqrt{2}} \approx 120.2$ volts 77. $24,000 per year

Exercises 1.5

1. $\frac{1}{8}$ 3. $\sqrt{3}$ 5. $\sqrt[3]{25}$ 7. x^{-2} 9. $2x^{-3}$

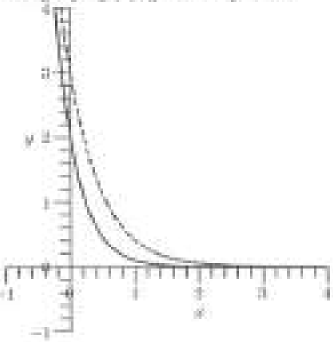
11. $\frac{1}{2}x^{-1/3}$ 13. 8 15. 2 17. 1.213 19. 4.415

21. Both the graphs have same y-intercept.



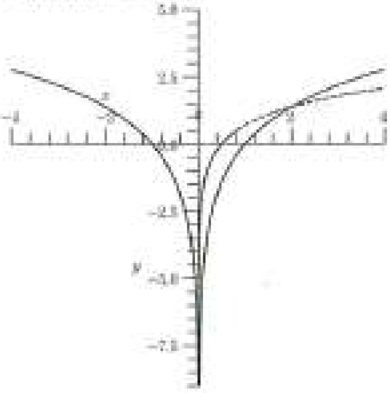
Graph of $f(x)$: Dotted line.
Graph of $g(x)$: Solid line.

23. For the graph $f(x)$, y-intercept is 3 and for the graph $g(x)$, y-intercept is 2.



Graph of $f(x)$: Dotted line.
Graph of $g(x)$: Solid line.

25. The graph $f(x)$, is defined for positive values of x only and the graph $g(x)$ is defined for all nonzero value of x.



Graph of $f(x)$: Dotted line.
Graph of $g(x)$: Solid line.

27. $\frac{1}{2}\ln 2$ 29. $x=-1, x=1$

31. e^{-2} 33. 2 35. $\ln 3$

37. (a) 2 (b) 3 (c) -3

39. (a) 1.771 (b) 2.953 (c) -2.893

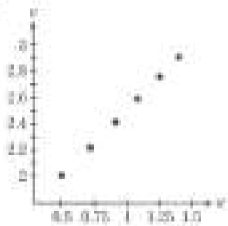
41. $\ln\frac{3}{4}$ 43. $\ln 1 = 0$ 45. $\ln 12$

47. $2e^{(1/2\ln 3)x}$ 49. $4e^{(1/2\ln 1/2)x}$

53. $x=-1, x=1$ 55. 0.651

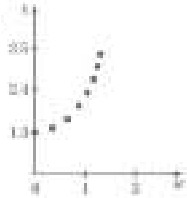
57. $1-e^{-1}\approx 0.632$

59.



$m=2$, $b\approx 1.0986$,
$c=e^b=3$

61.



no, exponential

63. $10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, \frac{1}{10}$

65. $10^{10.4}, 10^{11.9}, 10^{13.4}, 10^{1.5}=31.6$

67. yes 69. $f=(220)\,2^x$

Exercises 1.6

1. $(f\circ g)(x)=\sqrt{x-3}+1, x\geq 3$
$(g\circ f)(x)=\sqrt{x-2}, x\geq 2$

3. $(f\circ g)(x)=x, x>0$
$(g\circ f)(x)=x$, all reals

5. $(f\circ g)(x)=\sin^2 x+1$, all reals
$(g\circ f)(x)=\sin(x^2+1)$, all reals

7. possible answer: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4+1$

9. possible answer: $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2+1$

11. possible answer: $f(x)=x^2+3$, $g(x)=4x+1$

13. possible answer: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sin x$

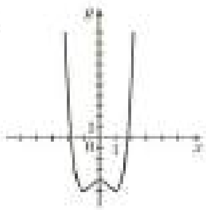
15. possible answer: $f(x)=e^x$, $g(x)=x^2+1$

17. possible answer: $f(x)=\frac{3}{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=\sin x+2$

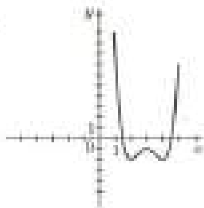
19. possible answer: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=4x-2$

21. possible answer: $f(x)=4x-5$, $g(x)=e^x$, $h(x)=x^2$

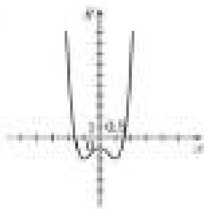
23.



25.

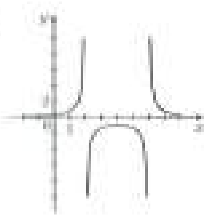


27.

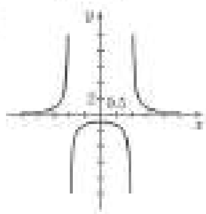


29.

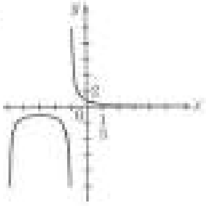
31.



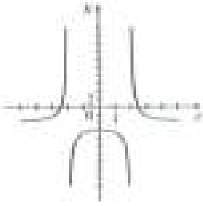
33.



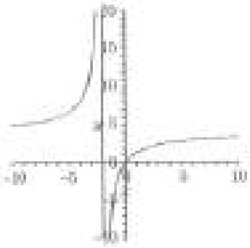
35.



37.



19.



39. $y = (x + 1)^2$, shift left one

41. $y = (x + 1)^2 + 3$, shift left one, up three

43. $y = 2[(x + 1)^2 + 1]$, shift left one, up one, double vertical scale

45. reflect across x-axis, double vertical scale

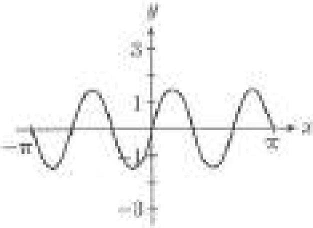
47. reflect across x-axis, triple vertical scale, shift up two

49. reflect across y-axis

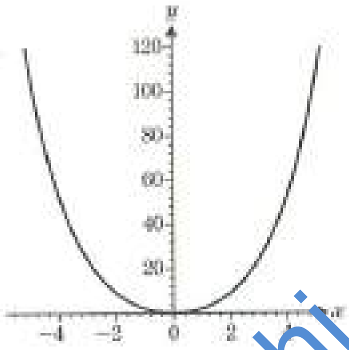
51. shift right one

53. reflect across x-axis, vertical scale times $|c|$

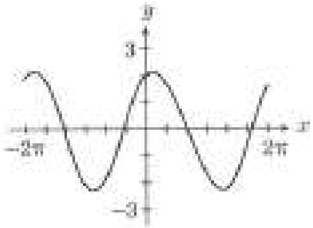
21.



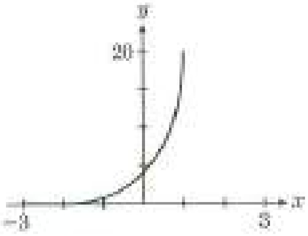
55.



23.



25.



59. go to 0   61. 0.739085

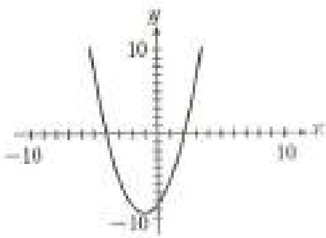
Chapter 1 Review Exercises

1. −2   3. parallel   5. no

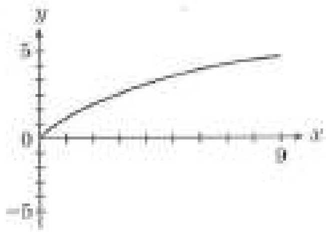
7. $y = \frac{1}{2}(x$ [illegible] $+ 1, y = \frac{3}{2}$ 9. $y = -\frac{3}{5}(x + 1) - 1$

11. yes   13. $-2 \le x \le 2$

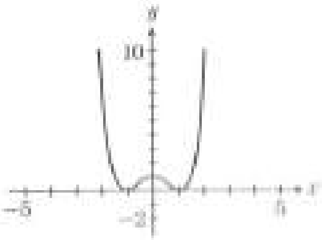
13.



27.



17.



29. $x = -4, x = 2, y = -8$ 31. $x = -2$

33. $-2, 5$ 35. $1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ 37. 3

39. $50 \tan 34° \approx 33.7$ feet

41. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{9}$

43. $\ln 2$ 45. $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

47. $(f \circ g)(x) = x - 1, x \ge 1$

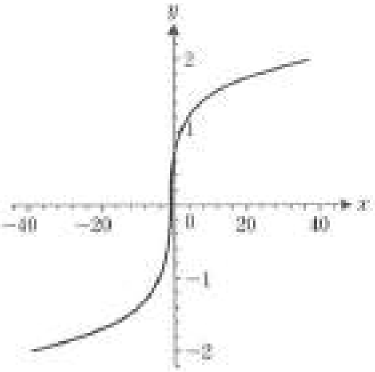
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}, x \le -1$ or $x \ge 1$

49. $f(x) = e^x, g(x) = 3x^2 + 2$

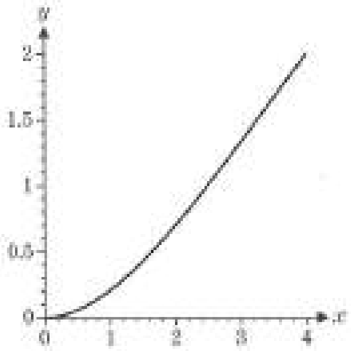
51. $(x-2)^2-3$, shift two right and three down

53. yes; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 55. no

57.



59.



61. $\frac{\pi}{2}$ 63. $-\frac{\pi}{4}$ 65. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

67. $\frac{\pi}{4}$ 69. $\frac{\pi}{4}+n\pi$

CHAPTER 2

Exercises 2.1

1. (a) 2 (b) 4 3. (a) 0 (b) −1

5. (a) 1 (b) 2.7

7. (a) 1.90626 (b) 1.90913 (c) 1.91010

9. (a) 3.16732 (b) 3.16771 (c) 3.16784

11. (a) 9.15298 (b) 9.25345 (c) 9.29357

13. (a) $\frac{11}{8}$ (b) $\frac{43}{32}$ 15. (a) 2.05 (b) 2.01

17. (a) 1.55 (b) 1.56; quarter circle

Exercises 2.2

1. 2 3. $\frac{1}{4}$ 5. 3

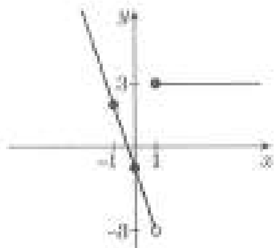
7. (a) −2 (b) 2 (c) does not exist (d) 2 (e) 2
(f) 2 (g) 0 (h) 1

9. (a) 4 (b) 4 (c) 4 (d) 2 (e) 9

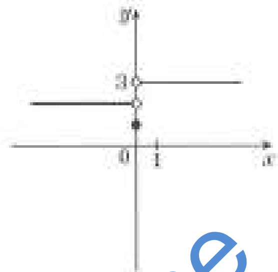
11. 2.2247, 2.0488, 2.0050, 2.0005 → 2;
1.7071, 1.9487, 1.9950, 1.9995 → 2 13. 1 15. 0

17. 1 19. limit does not exist 21. does not exist

23.



25.



27. does not exist

29. The first argument is correct.

31. (a) 2.7182818 (b) if $x>0$, $(1+x)^n$ increases as n increases.

33. One possibility: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \begin{cases} 2x, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

35. $m = \frac{1}{2}$ 37. $w \to 0$, $h(w) \to 0$ and $|f(w) - h(w)| \to 0$

39. 8; does not exist

Exercises 2.3

1. 1 3. $\frac{\pi}{2}$ 5. 5 7. $\frac{3}{4}$ 9. 1 11. π 13. $\frac{1}{4}$

15. 2 17. $\frac{1}{2}$ 19. 2 21. 4 23. does not exist

25. 4 27. 1 29. 0, $f(x) = -x^2$, $h(x) = x^2$

31. $f(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{x}$ 33. 4 35. 0 37. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

39. $h(a)$ 41. (a) −1 (b) −2 43. 13 45. $-\frac{4}{3}$ 47. 0

51. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$ 53. yes 55. 2.7182818

57. 1 59. does not exist

63. for $2 \le x < 3$, $\lfloor x \rfloor = 2$ and for $3 \le x < 4$, $\lfloor x \rfloor = 3$,
so $\lim_{x\to 3^-} \lfloor x \rfloor \ne \lim_{x\to 3^+} \lfloor x \rfloor$.

65. 0, does not exist

Exercises 2.4

1. $x \ne -2$; $g(x) = x-1$

3. $x \ne \pm 1$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$

5. all real numbers 7. $x \neq \frac{n\pi}{2}$ for odd integers n

9. $x \neq 0$ 11. $x \neq 1$ 13. $x \neq 1$

15. $f(1)$ is not defined and $\lim_{x \to 1} f(x)$ does not exist

17. $f(0)$ is not defined and $\lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist

19. $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

21. $[-3, \infty)$ 23. $(-\infty, \infty)$

25. $[-3, -1]$, 27. $[-1, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$ 29. -700

31. $b = \$12{,}747.50$, $c = \$23{,}801.30$

33. (a) $\left[2\frac{20}{32}, 2\frac{21}{32}\right]$ (b) $\left[-2\frac{21}{32}, -2\frac{20}{32}\right]$

35. $\left[\frac{20}{32}, \frac{21}{32}\right]$ 37. $(-7, -2), (-2, -1), (1, 4), (4, 7)$

39. $a = b = 2$ 41. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}\ln 4$

43. no 45. #43 is 51. No

57. $x = -2, x = -1, x = 0$

59.

63. One answer: g(T) = 100 − 25(T − 30)

Exercises 2.5

1. (a) ∞ (b) $-\infty$ (c) does not exist

3. (a) $-\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$

5. does not exist 7. does not exist 9. $-\frac{1}{3}$

11. 1 13. ∞ 15. 0 17. 0 19. 0

21. does not exist

23. (a) vertical asymptotes at $x = \pm 2$; horizontal asymptote at $y = 0$
(b) vertical asymptotes at $x = \pm 2$; horizontal asymptote at $y = -1$

25. vertical asymptotes at $x = -1$ and $x = 3$; horizontal asymptote at $y = 3$

27. horizontal asymptotes at $y = \pm 2x - 1$

29. vertical asymptotes at $x = \pm 2$; slant asymptote at $y = -x$

31. vertical asymptotes at $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$; slant asymptote at $y = x - 1$

33. with no light, 40 mm; with an infinite amount of light, 12 mm

35. $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3} + 60}{10x^{-0.3} + 30}$

37. -223.6 ft/s; -158.1 ft/s; 4

39. $\frac{1}{2}$ 41. $\frac{1}{2}$ 43. 0 45. 1 47. 2.7183

49. $-\frac{1}{2}$ 51. m. 53. one larger

55. $-2(x-3)^2$ 57. $x^2 + 1$

59. true 61. false 63. true

65. $g(x) = \sin x$, $h(x) = x$ 67. 30 mm, 300 mm

69. $-\infty$; r 71. $v = \sqrt{19.6R}$

Exercises 2.6

1. $\frac{\varepsilon}{3}$ 3. $\frac{\varepsilon}{3}$ 5. $\frac{\varepsilon}{4}$ 7. $\delta \leq \varepsilon$ 9. $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

11. $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ 13. $\frac{\varepsilon}{|m|}$, no

15. (a) $\sqrt{0.1} \approx 0.32$ (b) $\sqrt{0.05} \approx 0.22$

17. (a) 0.39 (b) 0.19 21. (a) 0.02 (b) 0.02

23. 12 25. -3.4

27. $N = -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2}$, for $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

29. $\delta = \sqrt[4]{-\frac{2}{N}}$ 31. $M = \sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}$

33. 2 35. 1.9 41. $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$

Exercises 2.7

1. $\frac{1}{4}$; $\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$ 3. 1; $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$

5. 1; $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2}}$ 7. $\frac{1}{6}$; $\dfrac{\sin^2 2x}{12x^2(1+\cos 2x)}$

9. $\frac{1}{2}$; $\dfrac{\sin^2(x^2)}{x^4(1+\cos(x^2))}$

11. $\frac{2}{3}$; $\dfrac{2x^{4/3}}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

13. 3, does not exist

15. $f(x) = 0$, $g(x) = 0.0016, -0.0159, -0.1586, -0.9998$

17. 20, 0

Chapter 2 Review Exercises

1. 2 3. (a) 1.05799 (b) 1.05807 5. 1

7. does not exist 9. 7.39 (exact: e^2)

11. (a) 1 (b) -2 (c) does not exist (d) 0

13. $x = -1, x = 1$ 15. $\frac{3}{4}$ 17. does not exist

19. does not exist 21. 5 23. $\frac{2}{3}$ 25. ∞

27. $\frac{1}{3}$ 29. 0 31. ∞ 33. 0 35. e^{-6}

39. $x = -3, x = 1$ (removable)

41. $x = 2$ 43. $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$

45. $(-\infty, \infty)$ 47. $x = 1, x = 2, y = 0$

49. $x = -1, x = 1, y = 1$ 51. $x = 0, y = 2$

53. $x = \ln 2$, $y = -1.5$ and $y = 0$

55. $\frac{1}{4}$; $\dfrac{\sin^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$

CHAPTER 3

Exercises 3.1

1. $y = 2(x-1)-1$ 3. $y = -7(x+2)+10$

5. $y = -\frac{1}{2}(x-1)+1$ 7. $y = \frac{1}{2}(x+2)+1$

9. (a) 6 (b) 18 (c) 8.25 (d) 14.25 (e) 10.41 (f) 11.61 (g) 11

11. (a) 0.33 (b) 0.17 (c) 0.27 (d) 0.19 (e) 0.23 (f) 0.22 (g) 0.22

13. C, B, A, D

15. (a) -9.8 m/s (b) -19.6 m/s

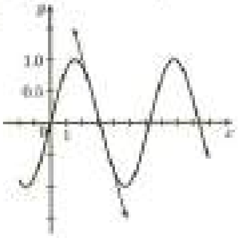
19. (a) 32 ft/s (b) 48 ft/s (c) 62.4 ft/s (d) 63.84 ft/s (e) 64 ft/s

21. (a) 2.236 ft/s (b) 1.472 ft/s (c) 1.351 ft/s (d) 1.343 ft/s (e) 1.342 ft/s

23. sharp corner

25. jump discontinuity

27.



29. No tangent line

31. (a) from 2002 to 2004, the balance increased at an average rate of \$21,034 per year

35. (a) $\left(\sqrt{2/3}, 5\sqrt{2/3}+1\right), \left(-\sqrt{2/3}, -5\sqrt{2/3}+1\right)$

37. (a) $y = 6(x-1)+5$ (b) $x=-2, x=1$

39. -18; -4.5

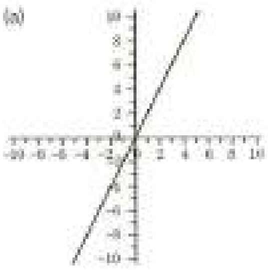
41. about 1.75 hours; 1.5 hours; 4 hours; rest

Exercises 3.2

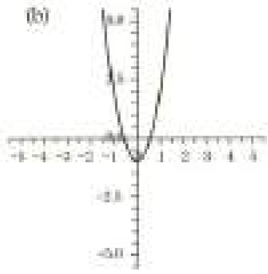
1. 3 3. $\frac{3}{4}$ 5. $6x$ 7. $3x^2+2$

9. $\frac{-3}{(x+1)^2}$ 11. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

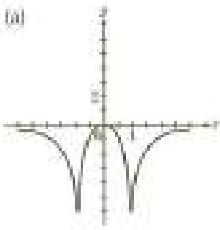
13. (a)



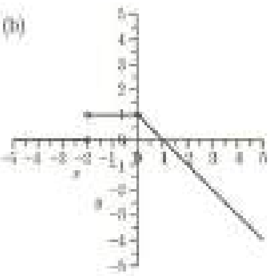
(b)



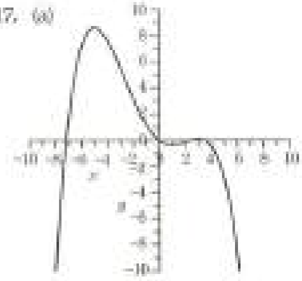
15. (a)



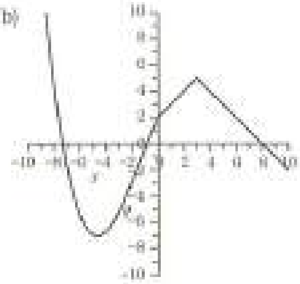
(b)



17. (a)



(b)



19. $D_+f(0)=3, D_-f(0)=2$; no

21. $D_+f(0)=D_-f(0)=0$; yes

23. 0.35 25. 0 27. 10

29. (a) $x=0, x=2$ (b) $x=0, x=4$

31. $p \geq 1$ 33. $f(x) = -1-x^2$

35. $\frac{f(a)f'(a)}{a}$ 37. $f'(1), \frac{f(1.5)-f(1)}{0.5}, f(2)-f(1), f(1)$

41. $2x, 3x^2, 4x^3, nx^{n-1}$ 43. 1.64 degrees per meter

45. (a) 0.4 ton per year (b) 0.2 ton per year

47. (a) meters per second (b) items per dollar

49. losing value; sell

53. $f'(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 20 \\ 10, & 20 < t < 80 \\ 8, & t > 80 \end{cases}$

Exercises 3.3

1. $3x^2-2$ 3. $9t^2 - \frac{1}{\sqrt{t}}$ 5. $-\frac{3}{w^2} - 8$

7. $\frac{-10}{3}x^{-4/3} - 2$ 9. $3s^{1/2} + s^{-4/3}$

11. $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}$ 13. $9x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2}$

15. $12t^2+6$ 17. $24x^2 - \frac{9}{4}x^{-5/2}$ 19. 24

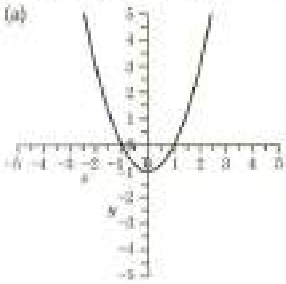
21. $v(t) = -32t+40, a(t) = -32$

23. $v(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2} + 4, a(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2} + 4$

25. (a) $v(1) = 8$ (going up); $a(1) = -32$
(b) $v(2) = -24$ (going down); $a(2) = -32$

27. $y = 4(x-2)+2$ 29. $y = -x+4$

31. (a)



(b)

33. $x=-1$ (peak); $x=1$ (trough); $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

35. (a) $x=0$; vertical tangent (b) $x=5$; sharp corner
(c) $x=-1, x=4$; sharp corners

37. (a) $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ (b) $x = \pm\sqrt{1+3^{-1/2}}$

39. (a) $\frac{3}{2}x^2+2x-2$ (b) $\frac{1}{2}x^2+5x$

41. 2 43. (a) $f''(x)$ (b) 0 45. x^4 47. $\frac{2}{3}x^{3/2}$

49. $b > \frac{4}{9c^2}$ 51. $f'(2000) \approx 174.4, f''(2000) \approx -160$

Exercises 3.4

1. $2x(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 3)(3x^2 - 3)$

3. $\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + 3\right)\left(5x^2 - \frac{3}{x}\right) + (\sqrt{x} + 3x)(10x + 3x^{-2})$

5. $\dfrac{3(5t+1) - (3t-2)5}{(5t+1)^2} = \dfrac{13}{(5t+1)^2}$

7. $\dfrac{(3 - 3x^{-1/2})(5x^2 - 2) - (3x - 6\sqrt{x})10x}{(5x^2 - 2)^2}$

9. $\dfrac{(2u-1)(u^2 - 5u + 1) - (u^2 - u - 2)(2u - 5)}{(u^2 - 5u + 1)^2}$

11. $\frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{3}{2}x^{-1/2} + x^{-3/2}$ 13. $\frac{5}{3}t^{2/3} + 3$

15. $2x\dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2} + (x^2 - 1)\dfrac{(3x^2 + 6x)(x^2 + 2) - (x^3 + 3x^2)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$

17. $y = 2x$ 19. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

21. (a) $y = -2x - 3$ (b) $y = 7(x - 1) - 2$

23. (a) $y = -(x - 1) - 2$ (b) $y = 0$

25. $P'(t) = 0.03P(t)$; $3 - 4 = -1$ 27. $65,000 per year.

29. $\dfrac{19.125}{(w + 0.15)^2}$; bigger bat gives greater speed

31. $\dfrac{-14.11}{(w + 0.05)^2}$; heavier club gives less speed

33. $f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

35. $\frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2 - 2)(x^3 - x + 1) + x^{2/3}(2x)(x^3 - x + 1) + x^{2/3}(x^2 - 2)(3x^2 - 1)$

39. maximum slope at $x = 0$; minimum slope at $x = \pm\sqrt{3}$

45. $F'''(x) = f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x)$

49. 0; 1; $\dfrac{2.7x^{1.7}}{\left(1 + x^{2.7}\right)^2}$

51. (a) if c increases, r increases
(d) increase in r is less than increase in h

Exercises 3.5

1. $6x^2(x^3 - 1)$ 3. $6x(x^2 + 1)^2$

5. (a) $(9x^2 - 3)(x^3 - x)^2$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

7. (a) $5t^4\sqrt{t^3 + 2} + \dfrac{3t^7}{2\sqrt{t^3 + 2}}$ (b) [illegible] $t^{-1/2}$

9. (a) $\dfrac{u^2 + 8u - 1}{(u + 4)^2}$ (b) $\dfrac{12u^2 \ldots}{(u + 4) \ldots}$

11. (a) $\dfrac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ (b) $\frac{1}{2}(1 - x^2)x^{-1/2}(x^2 + 1)^{-3/2}$

13. (a) $-6w(w^2 + 4)^{-3/2}$ (b) $\dfrac{w}{6\sqrt{w^2 + 4}}$

15. (a) $-2(\sqrt{x^3 + 2} + 2x)^{-3}\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} + 2\right)$
(b) $\frac{3x^2 - 4x^{-3}}{2\sqrt{x^3 + 2 + 2x^{-2}}}$

17. $\dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{4}$ 19. $\dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{15}$ 21. $\dfrac{1}{f'(0)} = 2$

23. chain rule; product

25. product rule; chain, quotient

27. $y = \frac{3}{5}(x - 3) + 5$ 29. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 31. -6

35. (a) $2xf'(x^2)$ (b) $2f(x)f'(x)$ (c) $f'(f(x))f'(x)$

37. (a) $-\frac{f'(1/x)}{x^2}$ (b) $-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ (c) $f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)\frac{f(x) - xf'(x)}{[f(x)]^2}$

39. (a) 3 (b) does not exist (c) 9

41. (a) $4(t^2 + 4)^{-3/2}$ (b) $\dfrac{8 - 4t^2}{(t^2 + 4)^{5/2}}$

43. (a) $x = 0, x = 1, x = 2$; vertical tangents
(b) $x = 0$; vertical tangent

45. (a) $\frac{1}{3}(x^2 + 3)^3$ 47. $\sqrt{x^2 + 1}$

Exercises 3.6

1. $12\cos 3x - 1$ 3. $6\tan^2 2t\sec^2 2t + 12\csc^4 3t\cot 3t$

5. $\cos(3x^2) - 10x^2\sin(5x^2)$ 7. $\dfrac{2x^2\cos x^2 - 2\sin x^2}{x^2}$

9. $3\sec^2 3t$ 11. $-4\csc(4w)\cot(4w)$

13. $4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x$ 15. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\sec^2\sqrt{x^2 + 1}$

17. $-3\frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}\sin^2\left(\cos\sqrt{x^3 + 2x^2}\right)\cos\left(\cos\sqrt{x^3 + 2x^2}\right)\sin\left(\sqrt{x^3 + 2x^2}\right)$

19. $2x\cos x^2$ (b) $2\sin x\cos x$ (c) $2\cos 2x$

21. (a) $2x\cos x^2\tan x + \sin x^2\sec^2 x$
(b) $2\sin(\tan x)\cos(\tan x)\sec^2 x$
(c) $2\cos(\tan^2 x)\tan x\sec^2 x$

23. $y = 1$ 25. $y = \frac{-\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

27. -2 ft/s 29. $\dfrac{1}{\pi^2}$ ft/s

31. (a) [illegible] (b) 12 (c) $f = 0$

33. (a) 3 (b) $\frac{1}{4}$ (c) 0 (d) 1

35. [illegible] $\cos 2x$; $-2^{150}\sin 2x$

(a) $f'(x) = \begin{cases} (x\cos x - \sin x)/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Exercises 3.7

1. $(x^3 + 3x^2)e^x$ 3. $1 + (\ln 2)2^t$ 5. $8e^{4x+1}$

7. $-2x\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$ 9. $(2u + 4)e^{u^2+4u}$

11. $\dfrac{(4w - 1)}{w^2}e^{4w}$ 13. $\dfrac{1}{x}$

15. $\dfrac{3t^2 + 3}{t^3 + 3t}$ 17. $-\tan x$

19. (a) $\frac{2}{x}\cos(\ln x^2)$ (b) $2t\cos(t^2)$

21. (a) $e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$ (b) $1\ (x > 0)$

23. (a) $\cot x$ (b) $\sec t$ 25. $y = 6e(x - 1) + 3e$

27. $y = x - 1$ 29. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

31. $100\ln 3 = 109.86\%$ 33. 40%

35. $p(t) = (200)3^t$; 110% 39. $\left(\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

41. $[\ln(\sin x) + x\cot x](\sin x)^x$ 43. $\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)x^{\ln x}$

45. $a = e, a = 1$; $\frac{1}{e}$ and e 49. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$

51. $x = \pm 1$ 53. $x = m \pm c$

55. $-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$; vel. is 0 at $t = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \ldots$

57. $t = \pi$ 59. $n = 2.8, \theta \approx 4$

Exercises 3.8

1. $-\frac{1}{3}$ 3. 0 5. $\dfrac{4 - 2xy^2}{3 + 2x^2y}$ 7. $\dfrac{y}{16y\sqrt{xy} - x}$

9. $\dfrac{y - 4y^2}{x + 3 + 2y^3}$ 11. $\dfrac{1 - 2xye^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} - e^y}$

13. $\dfrac{16x\sqrt{x+y}-y^2}{4y(x+y)+y^2-2\sqrt{x+y}}$ 15. $\dfrac{1}{2e^{4y}-y/(y^2+3)}$

17. $y=\frac{1}{3}(x-2)+1$ 19. $y=-\frac{4}{5}(x-2)+1$

21. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

23. $y''=\dfrac{27x^2+48y^2-180x+240y-144xy+200}{4(x^2y-2)^3}$

25. $y''=\dfrac{3[4x(y+2\sin y)^2-3(x^2-2)^2(1+2\cos y)]}{4(y+2\sin y)^3}$

27. $\dfrac{6y(3y-6-9x-12e^{4y}+24ye^{4y})}{(2y-2-3x-4e^{4y})^3}$

29. (a) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

31. (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (b) $-\dfrac{1}{x^2+1}$

33. (a) $16x^3\sec(x^4)\tan(x^4)$ (b) $\dfrac{16}{x\sqrt{x^8-1}}$

35. 9.1 ft 37. $-\frac{130}{3}$ rad/s

39. horizontal asymptotes at (0,0), (0,3); vertical asymptotes at $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

41. (a) implicit (b) direct (c) direct (d) implicit

43. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

45. vertical asymptotes at $x=\pm\sqrt{2}$ horizontal asymptotes at $y=0$

51. $x^2+ny^2=k$

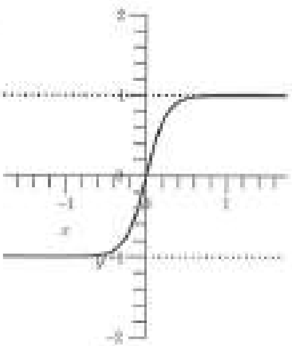
53. (a) $y=x+3$; (4, 7) (b) $y=-\frac{1}{2}(x+1)+3$; $\left(\frac{9}{4},\frac{11}{8}\right)$

55. $x=\sqrt{3}$ ft 57. near (−74, 290)

Exercises 3.9

1.

3.



5. (a) $4\sinh 4x$ (b) $4\cosh^3 x\sinh x$

7. (a) $2x\,\mathrm{sech}^2(x^2)$ (b) $2\tanh x\,\mathrm{sech}^2 x$

9. (a) $2x\sinh 5x+5x^2\cosh 5x$
(b) $2x\sinh^2 x+2(x^2+1)\sinh x\cosh x$

11. (a) $\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$ (b) $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$

17. $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ 23. $a=10,\ b=\dfrac{20}{\sinh^{-1}2}$

25. (a) $-\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 27. 9.797 m/s^2

Exercises 3.10

1. $c=0$ 3. $c=\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$ 5. $c=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

7. $3x^2+5>0$ 9. $f'(x)=4x^3+6x$ has one zero

11. $3x^2+a>0$ 13. $5x^4+3ax^2+b>0$

15. $\frac{1}{3}x^3+c$ 17. $-\dfrac{1}{x}+c$ 19. $-\cos x+c$

21. $4\tan^{-1}x+c$

23. $f(x)>0$ in an interval $(b,0)$ for some $b<0$

31. increasing 33. decreasing 35. increasing

37. increasing 43. discontinuous at $x=0$

45. discontinuous at $x=\dfrac{\pi}{2}$ 47. discontinuous at $x=0$

Chapter 3 Review Exercises

1. 0.8 3. 2 5. $\frac{1}{2}$ 7. $3x^2+1$

9. $y=2x-2$ 11. $y=6x+3$ 13. $y=-3(x-1)+1$

15. $v(t)=-32t+40$; $a(t)=-32$

17. $v(t)=10e^{-2t}(4\cos 4t-2\sin 4t)$;
$a(t)=-40e^{-2t}(4\cos 4t+3\sin 4t)$

19. 8 ft/s going up, −24 ft/s coming down

21. (a) 0.3178 (b) 0.3339 (c) 0.3492 (d) 0.35

23. $4x^3-9x^2+2$ 25. $\frac{3}{2}x^{1/2}-10x^{-3}$

27. $2t(t+2)^3+3t^2(t+2)^2$ 29. $\dfrac{(3x^2-1)-x(6x)}{(3x^2-1)^2}$

31. $2x\sin x+x^2\cos x$ 33. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\sec^2\sqrt{x}$

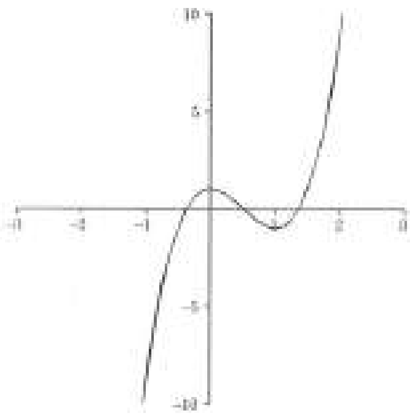
35. $\csc t-t\csc t\cot t$ 37. $-4xe^{-x^2}$ 39. $\ln x^2+2$

41. $4\cos 4x$ 43. $2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\dfrac{-2}{(x-1)^2}$ 45. $e^{4t}+4te^{4t}$

47. not differentiable (undefined for $x\neq 1$)

49. $\dfrac{-2\sin 2x}{1+\cos^2 2x}$

51.



53. $12x^2-18x+4$ 55. $(12+8x)e^{2x}$

57. $8\tan 2x\sec^2 2x$ 59. $-3^{26}\sin 3x$ 61. −\$2400 per year

63. (a) $f(t)=\pm 4$ (b) $f(t)=0$ (c) $f(t)=0$

65. $\dfrac{2x-2xy}{x^2-9y^2}$ 67. $\dfrac{\sec^2 x+\dfrac{y}{(x+1)^2}}{\dfrac{1}{(x+1)}-3}$

Appendix B

USEFUL FORMULAS

Algebra

Arithmetic

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Factoring

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) \qquad x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

Binomial

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Exponents

$$x^n x^m = x^{n+m} \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad (x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Lines

Slope m of line through (x_0, y_0) and (x_1, y_1)

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Through (x_0, y_0), slope m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Slope m, y-intercept b

$$y = mx + b$$

Quadratic Formula

If $ax^2 + bx + c = 0$ then

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Distance

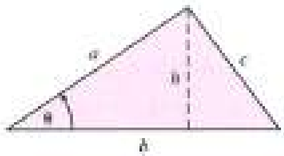
Distance d between (x_1, y_1) and (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Geometry

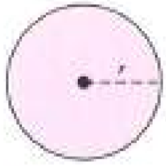
Triangle

Area $= \frac{1}{2}bh$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$



Circle

Area $= \pi r^2$
$C = 2\pi r$

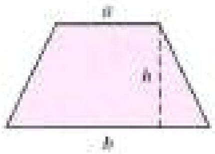


Sector of a Circle

Area $= \frac{1}{2}r^2\theta$
$s = r\theta$
(for θ in radians only)

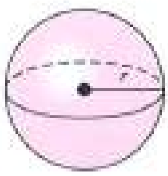
Trapezoid

Area $= \frac{1}{2}(a+b)h$



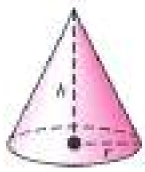
Sphere

Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Surface Area $= 4\pi r^2$



Cone

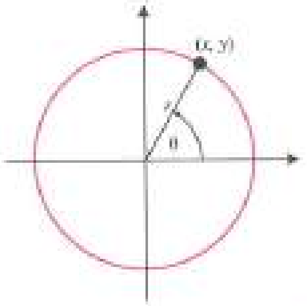
Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Surface Area $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Cylinder

Volume $= \pi r^2 h$
Surface Area $= 2\pi r h$

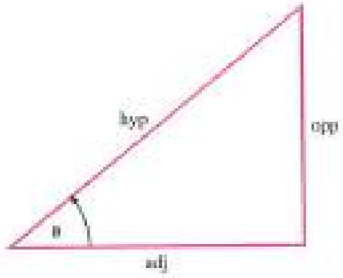
Trigonometry



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



$\sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$

Reciprocals

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

Definitions

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

Pythagorean

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Cofunction

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

Even/Odd

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$ $\quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

Double-Angle

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

Half-Angle

$\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ $\quad \cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

Addition

$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ $\quad \cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

Subtraction

$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$ $\quad \cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

Sum

$\sin u + \sin v = 2\sin\dfrac{u + v}{2}\cos\dfrac{u - v}{2}$

$\cos u + \cos v = 2\cos\dfrac{u + v}{2}\cos\dfrac{u - v}{2}$

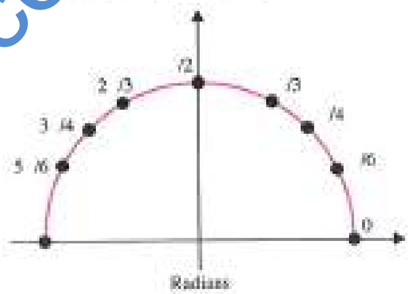
Product

$\sin u\sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\cos u\cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$

$\sin u\cos v = \frac{1}{2}[\sin(u + v) + \sin(u - v)]$

$\cos u\sin v = \frac{1}{2}[\sin(u + v) - \sin(u - v)]$



$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$
$\sin(2\pi) = 0$	$\cos(2\pi) = 1$

Derivative Formulas

General Rules

$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$

$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Power Rules

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(c) = 0$

$\frac{d}{dx}(cx) = c$

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exponential

$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}\left[e^{u(x)}\right] = e^{u(x)}u'(x)$

$\frac{d}{dx}[e^{rx}] = r\,e^{rx}$

Trigonometric

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Inverse Trigonometric

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hyperbolic

$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{csch}^2 x$

$\frac{d}{dx}(\text{sech}\, x) = -\text{sech}\, x \tanh x$

$\frac{d}{dx}(\text{csch}\, x) = -\text{csch}\, x \coth x$

Inverse Hyperbolic

$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\text{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$