1-1 الدوالّ
Functions

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

....
....

b) $x < 7$

....
....

c) $-2 < x < 7$

....
....

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ 1B) $x \leq -3$ 1C) $-1 \leq x \leq 5$

....
....
....

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \leq 16$

....
....

b) $x < 11$

....
....

c) $-16 \geq x$ أو $x > 5$

....
....

تحقق من فهمك

2A) $-4 \leq y < -1$ 2B) $a \geq -3$ 2C) $x > 9$ أو $x < -2$

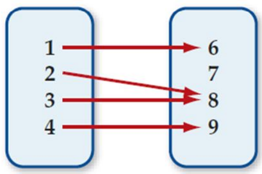
....
....

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.

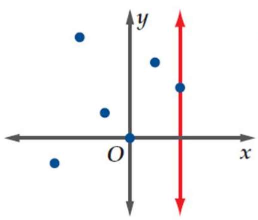
المجموعة A المجموعة B



مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

نموذج



مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثّل دوالّ

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

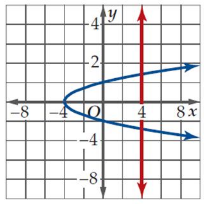
a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

....
....

b)

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

....

(c


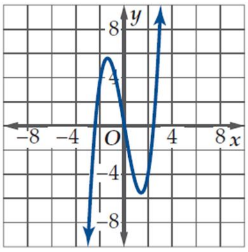
....

تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)


3D) $3y + 6x = 18$

....

....

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًّا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(6)$

....

b) $f(-4x)$

....

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ 4B) $f(6x)$

....

....

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

....

....

....

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

....

....

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

....

....

....

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ 5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5C) $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

....

....

....

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة متعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 & , \quad 63 < x < 66 \\ 3x - 132 & , \quad 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 & , \quad x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

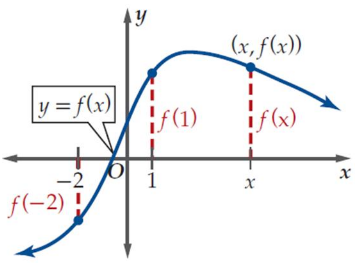
a) $h(67)$

....

b) $h(72)$ ....

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations



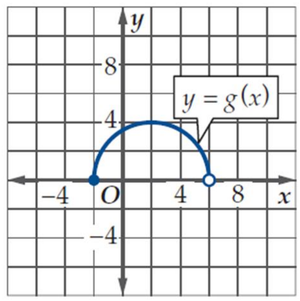
تحليل التمثيل البياني للدالة التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$، حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. وعليه تكون قيمة الدالة مساويةً لطول العمود الواصل من النقطة x على المحور x إلى منحنى الدالة كما هو موضح في الشكل المجاور.

يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

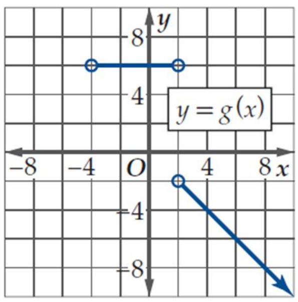
إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

(2A



(2B



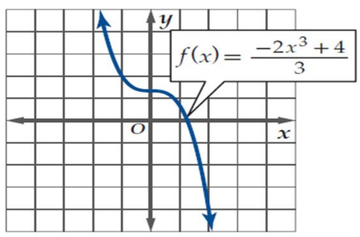
....

....

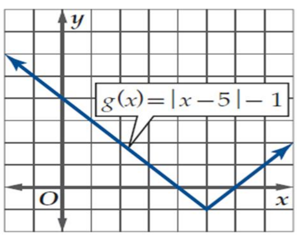
مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًا:

(a



(b



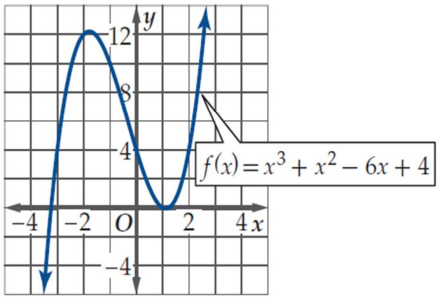
....

....

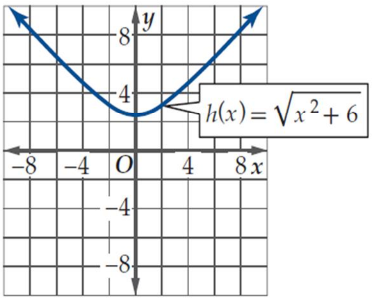
اليوم : .... التاريخ : ....

تحقق من فهمك

(3A

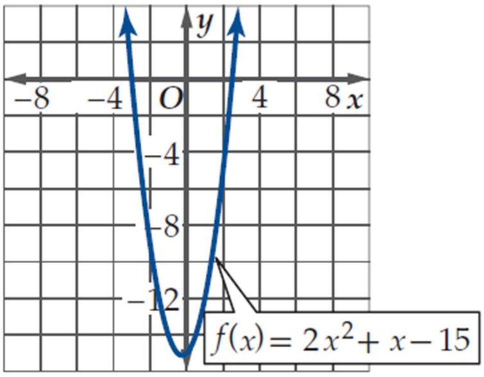


(3B



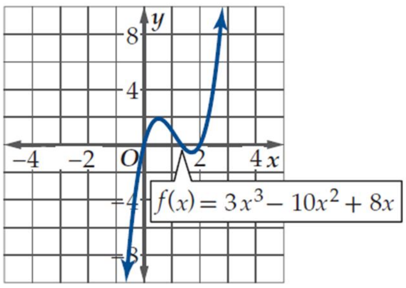
مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

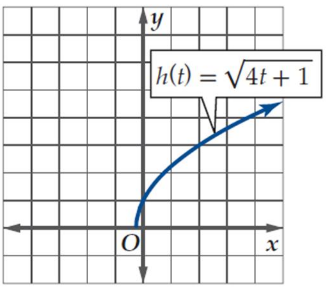


تحقق من فهمك

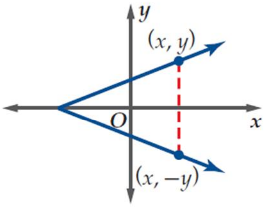
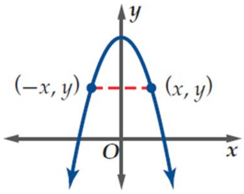
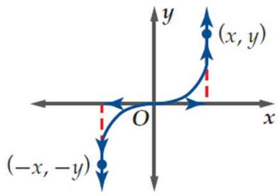
(4A



(4B

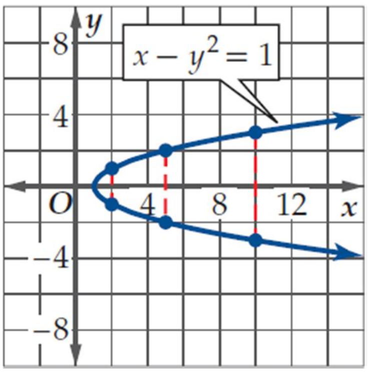


مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًا:



....

....

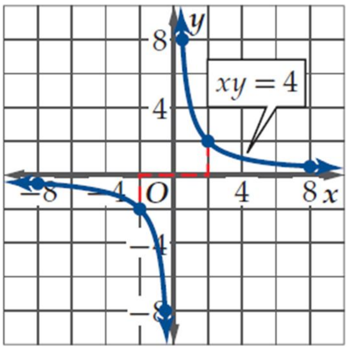
....

....

....

....

b) $xy = 4$



....

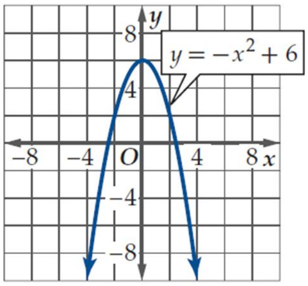
....

....

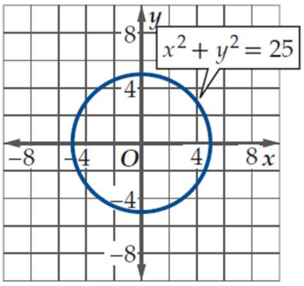
....

تحقق من فهمك

5A)



5B)



....
....
....
....

مفهوم أساسي — الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y **الدوال الزوجية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل **الدوال الفردية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 — تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

a) $f(x) = x^3 - 2x$

....
....

b) $g(x) = x^4 + 2$

....
....

c) $h(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x$

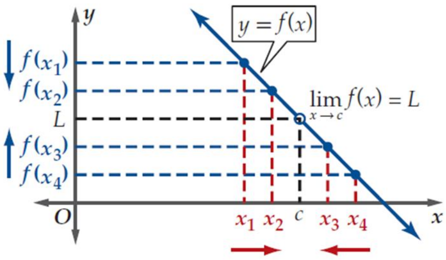
....
....

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات
Continuity, End Behavior, and Limits

مفهوم أساسي النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

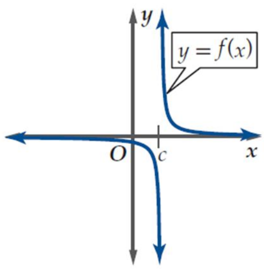
الرموز: نقول إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



مفهوم أساسي أنواع عدم الاتصال

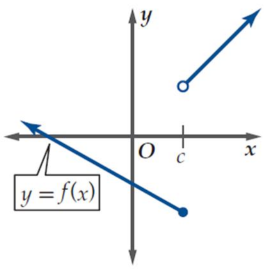
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



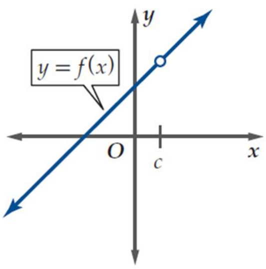
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال نُقطي عند $x = c$ إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء النقطة $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○).

مثال:



مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

....
....
....
....
....

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

....

....

....

....

....

مثال 2 تعيين نقاط عدم الاتصال

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.

....

....

....

....

....

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3$, $x = 3$.

....

....

....

....

....

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

2B) $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

....

....

....

....

....

....

....

مثال 3 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

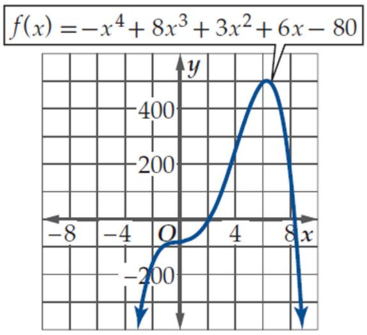
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

....
....
....

سلوك طرفي التمثيل البياني:

مثال 5 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

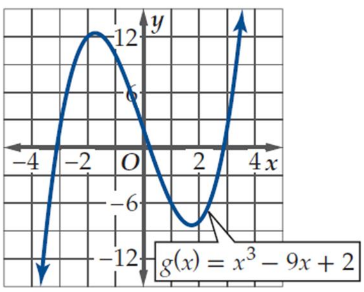
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



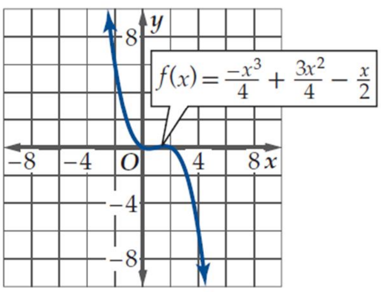
....
....
....
....
....

تحقق من فهمك

(5A



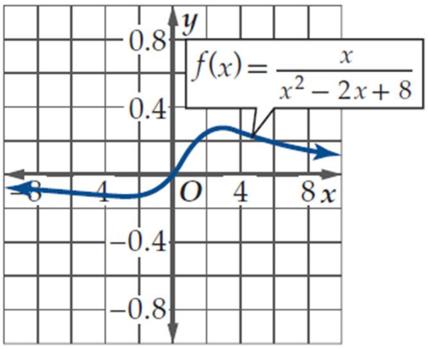
(5B



....
....
....
....
....

مثال 6 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



....

....

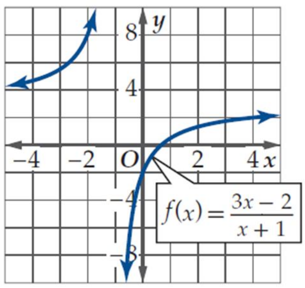
....

....

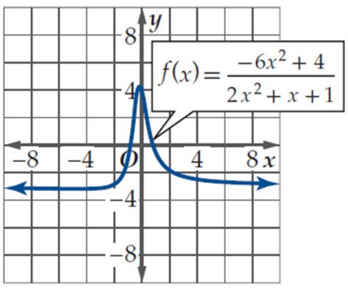
....

تحقق من فهمك

6A)



6B)



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

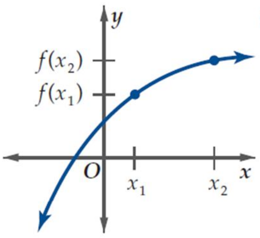
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير
Extrema and Average Rates of Change

مفهوم أساسي: الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

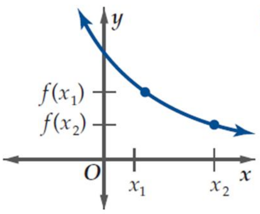
النموذج



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

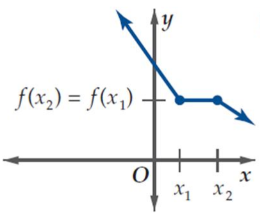
النموذج



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

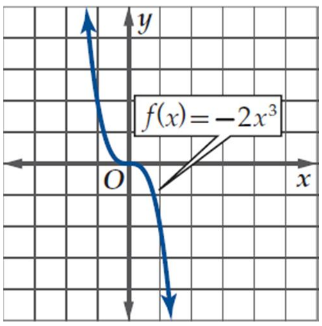
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج



مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.



....

....

....

....

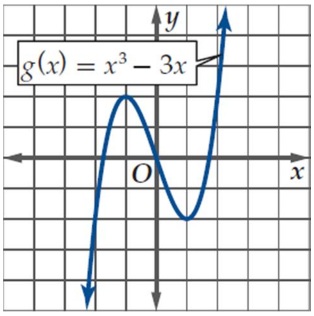
....

....

....

....

b) $g(x) = x^3 - 3x$



....

....

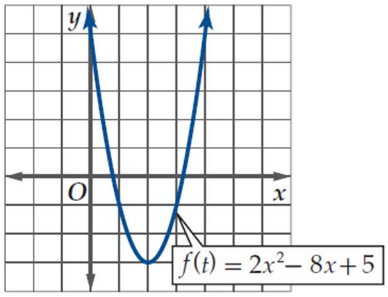
....

....

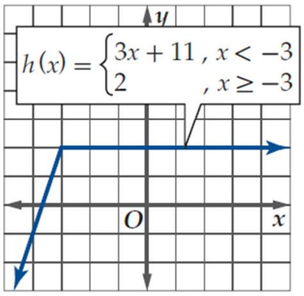
....

تحقق من فهمك

1A)



1B)



....

....

....

....

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

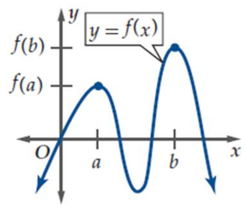
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

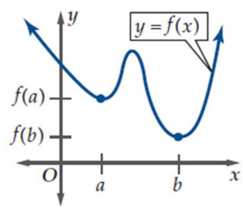
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

بالرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج

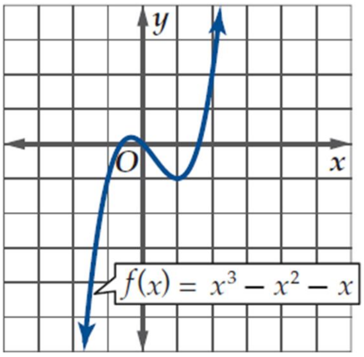


$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.



....

....

....

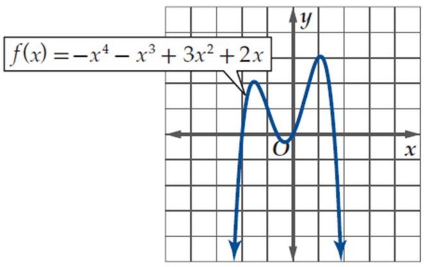
....

....

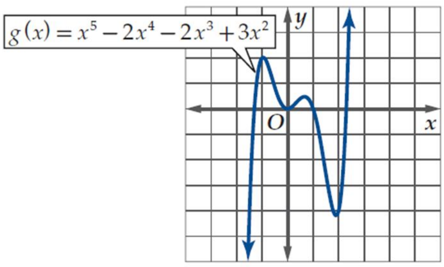
....

تحقق من فهمك

(2A



(2B



....

....

....

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

....

....

....

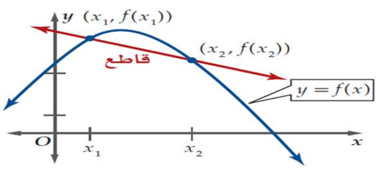
....

مفهوم أساسي متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بين هاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو
$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

....
....
....
....
....
....

b) $[0, 1]$

....
....
....
....
....

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

....
....
....

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

....
....
....
....
....

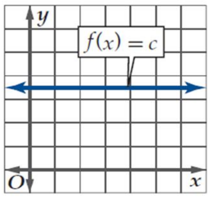
b) من 2 إلى 4 ثواني

....
....
....
....
....

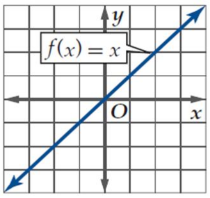
1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

مفهوم أساسي — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود

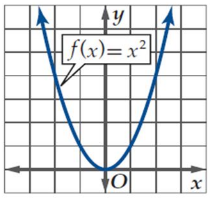
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



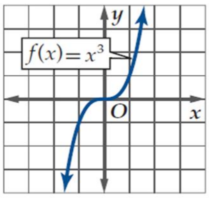
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.

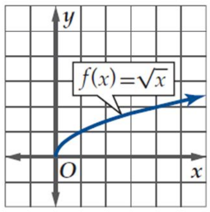


الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

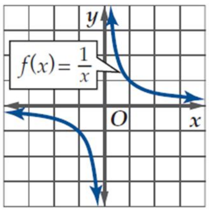


مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}$.



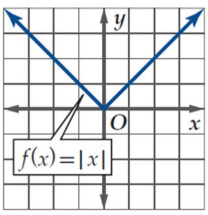
مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز **لدالة القيمة المطلقة**، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, \; |0| = 0, \; |4| = 4$

النموذج

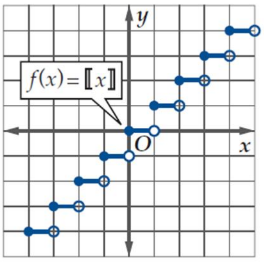


مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

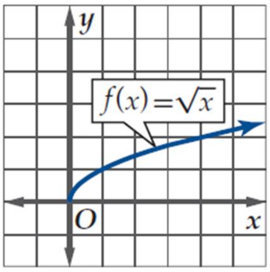
أمثلة: $[\![-4]\!] = -4,\ [\![-1.5]\!] = -2,\ \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

النموذج



مثال 1 وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، و فترات التزايد والتناقص.



....

....

....

....

تحقق من فهمك

(1A $f(x) = |x|$ **(1B** $f(x) = x^3$

....

....

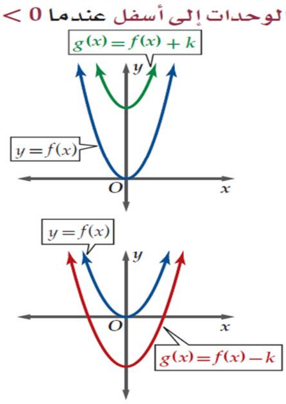
....

مفهوم أساسي الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

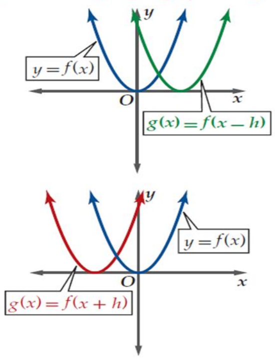
- k وحدة إلى الأعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x-h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

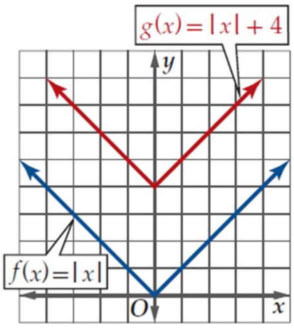
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



مـثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية:

$g(x) = |x| + 4$ (a



الشكل 1.5.2

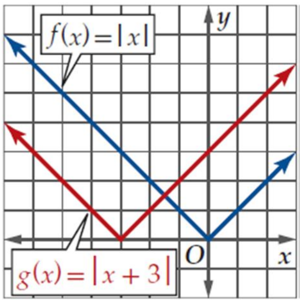
....

....

....

....

$g(x) = |x + 3|$ (b



الشكل 1.5.3

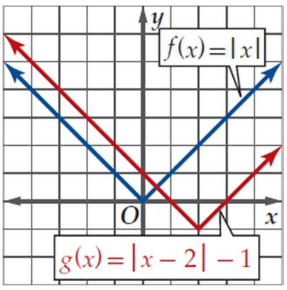
....

....

....

....

$g(x) = |x - 2| - 1$ (c



الشكل 1.5.4

....

....

....

....

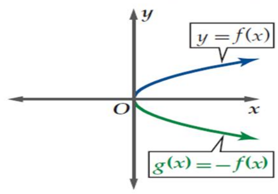
تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

$h(x) = x^3 - 5$ (2A　　$h(x) = 8 + x^3$ (2B　　$h(x) = (x + 2)^3 + 4$ (2C

مفهوم أساسي　الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

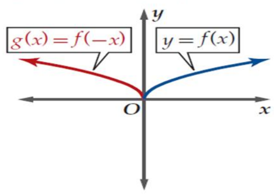
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.



الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.

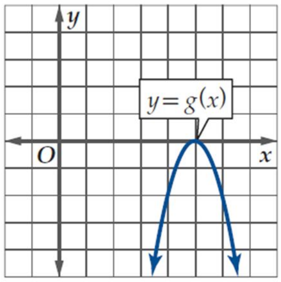


اليوم : .... التاريخ : ....

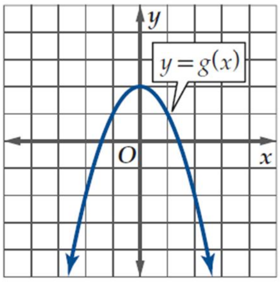
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

a)



b)



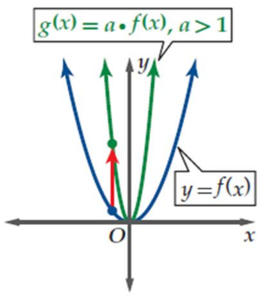
....
....
....
....

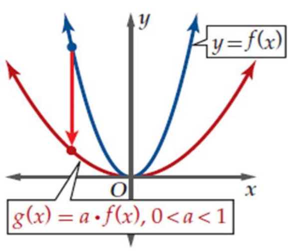
مفهوم أساسي التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$، هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

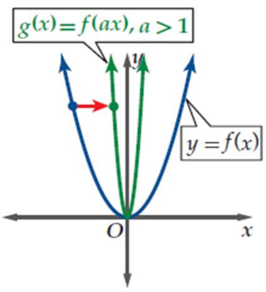


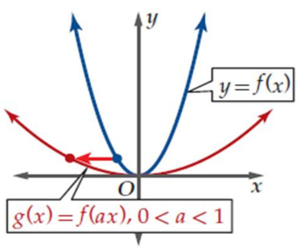


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$، هو:

- تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

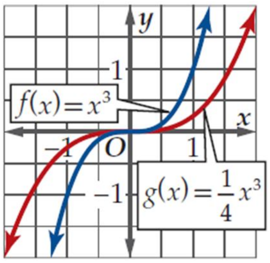




مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

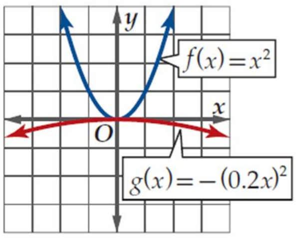
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



....

....

b) $g(x) = -(0.2x)^2$

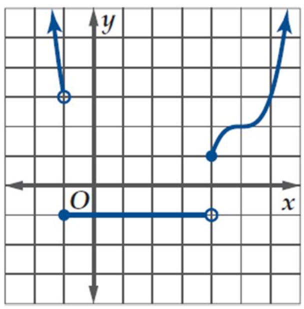


....

....

مثال 5 تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$.



....

....

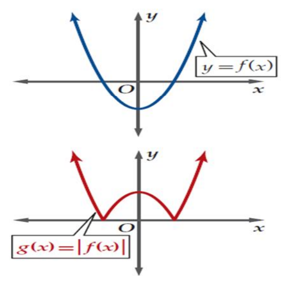
....

....

مفهوم أساسي التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة

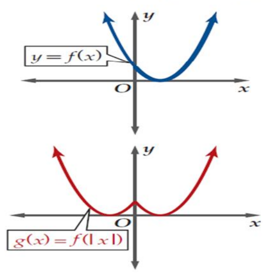
$g(x) = |f(x)|$

يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه.



$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .

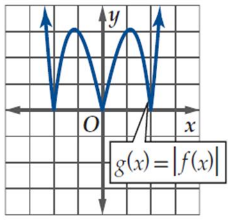


مثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.3 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

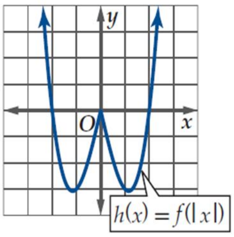
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



اليوم : .... التاريخ : ....

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين
Function Operations and Composition of Functions

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

مثال 1 — العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالِها:

a) $(f+g)(x)$ b) $(f-h)(x)$

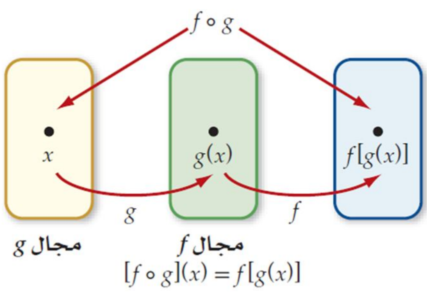
c) $(f \cdot h)(x)$ d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالة f مع الدالة g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



مثال 2 تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

....
....
....

b) $[g \circ f](x)$

....
....
....

c) $[f \circ g](2)$

....
....
....

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

....
....
....
....

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

....
....
....
....
....

$f(x) = x^2 - 2,\ g(x) = \sqrt{x-3}$ (b

....
....
....
....
....

تحقق من فهمك

$f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = x^2 - 1$ (3A

$f(x) = \frac{5}{x},\ g(x) = x^2 + x$ (3B

....
....
....
....
....
....
....

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

$h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$ (a

....
....
....
....

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$ (b

....
....
....
....
....

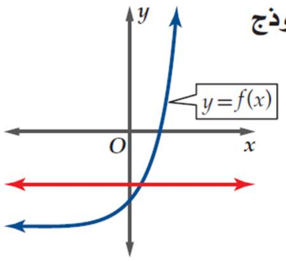
1-7 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



مثال 1 — تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا.

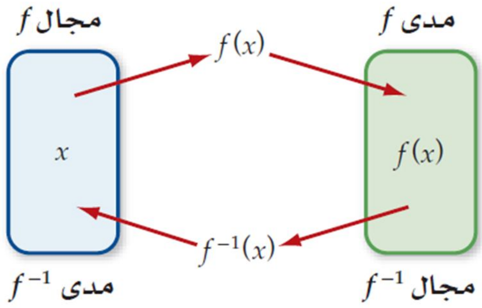
a) $f(x) = |x - 1|$

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$



مفهوم أساسي — إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1} ، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

مثال 2 — إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

....
....
....
....
....
....

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

....
....
....
....
....

مفهوم أساسي — تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

....
....
....
....
....

تحقق من فهمك

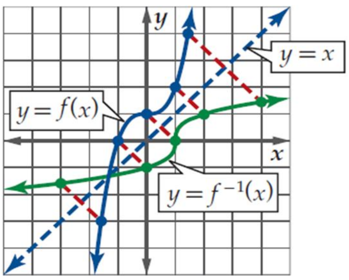
أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

....
....
....
....
....

مثال 4 ايجاد الدالة العكسية بيانيًا

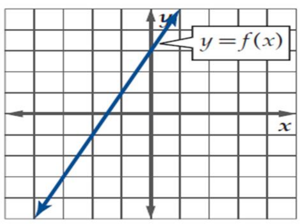
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.



تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

4A)



4B)