تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا 15/ae/com.almanahj//:https

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الثاني اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15math2

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا grade15/ae/com.almanahj//:https

* لتحميل جميع ملفات المدرس يحيى اضغط هنا

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا bot_almanahj/me.t//:https

مثال :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$, $dx = x\,du$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$x = e \Rightarrow u = 1$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du$$

$$= \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ملاحظة

[1] $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

حيث $f(x)$ دالة زوجية على $[-a,a]$

[2] $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

حيث $f(x)$ دالة فردية

تذكرة : $f(x)$ دالة زوجية اذا كان

$f(-x) = f(x)$

$f(x)$ دالة فردية اذا كان

$f(-x) = -f(x)$

تمارين متنوعة :

1) $\int \cos^3\theta \cdot \sin\theta \, d\theta$, $u = \cos\theta$

2) $\int \frac{\sec^2(\frac{1}{x})}{x^2} dx$, $u = \frac{1}{x}$

3) $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2} \, dx$

4) $\int e^x \sin(e^x) \, dx$

5) $\int (1+\tan\theta)^5 \cdot \sec^2\theta \, d\theta$

6) $\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\pi/6} \tan^3\theta \, d\theta$

7) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

8) $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$

9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

10) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \sin x}{1+x^6} dx$

11 $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

12 $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

13 $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T-\alpha}\right) dt$

14 $\int_{-2}^{2} (x+3)\sqrt{4-x^2}\, dx$

15 $\int_0^{1} x\sqrt{1-x^4}\, dx$

16 $\int_0^{4} f(x)\, dx = 10$ find $\int_0^{2} f(2x)\, dx$

17 $2\int_a^{b} f(x).\, f'(x)\, dx$ اثبت ان

$= [f(b)]^2 - [f(a)]^2$

حيث f' دالة متصلة

18 اذا كان $\int_0^{x} f(t)\, dt = x e^{2x} + \int_0^{x} e^{-t} f(t)\, dt$

اوجد $f(x)$

مثال : تكامل محدود وتعريفه

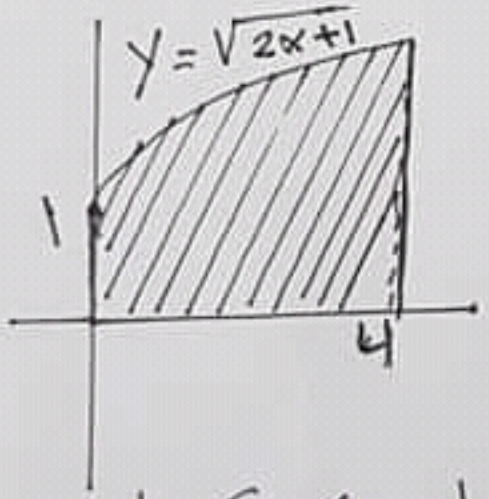
$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx \qquad u = 2x+1 \,,\; du = 2\,dx$$

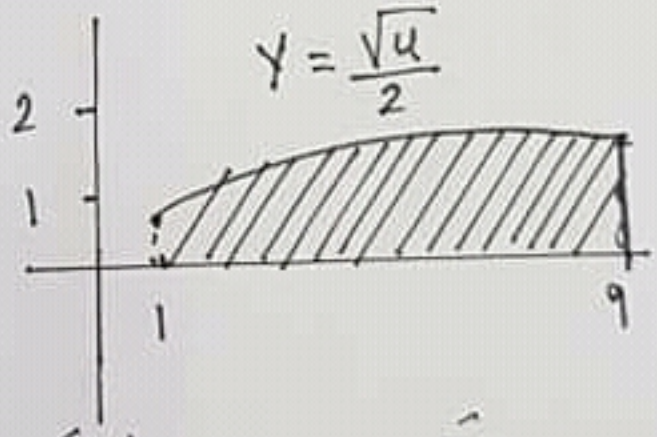
$$\frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \frac{26}{3}$$

هنا تم تغيير حدود التكامل حسب الفرض $u = 2x+1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1, \quad x = 4 \Rightarrow u = 9$





ثم حسابه هندسياً هو المساحة تحت المنحنى

مثال :

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$$

$u = 3-5x \,,\; du = -5\,dx$

$dx = \frac{du}{-5}$

when $x = 1$, $u = -2$

when $x = 2$, $u = -7$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}\, dx = \int_{-2}^{-7} \frac{-1}{5}\,\frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{-1}{5}\left[\frac{-1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{14}$$

مثال :

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

$$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int u^{1/2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c$$

عكس تعميم هذا المثال

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

طريقة اخرى :

افرض $u = \sqrt{2x+1}$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow dx = \sqrt{2x+1}\, du$$

$$dx = u\, du$$

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int u \cdot u\, du = \int u^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c$$

مثال :

$$\int e^{5x+1}\,dx$$

افرض ان $u = 5x+1$

$$du = 5\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

$$\int e^{5x+1}\,dx = \int e^{u}\cdot\frac{du}{5} \Rightarrow \int \frac{1}{5}e^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{5}e^{u} + C = \frac{1}{5}e^{5x+1} + C$$

نعمم هذه الحالة

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

لاحظ فقط يجب ان يكون الأس دالة خطية

لتطبيق هذه القاعدة

مثال :

$$\int \sqrt{1+x^2}\cdot x^5\,dx$$

$$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \sqrt{u}\cdot x^5\cdot\frac{du}{2x} \Rightarrow \int \frac{x^4\sqrt{u}}{2}\,du$$

هنا يجب التخلص من x^4

$$u = 1+x^2 \Rightarrow u-1 = x^2 \Rightarrow (u-1)^2 = x^4$$

$$\frac{1}{2}\int (u-1)^2\cdot\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}(u^2-2u+1)\,du =$$

نكامل بعد الفك

مثال: اوجد $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

* للاحظ ان المسألة تتكون من جدين احدها مشتقة او جزء من المشتقة للحد الآخر
* خطوات الحل

1 افرض ان $u = 1+x^2$

2 نشتق الطرفين $du = 2x\,dx$

3 نجد dx $dx = \frac{du}{2x}$

4 نعوض في المسألة

$$\int 2x\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2x} = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}+c$$

5 نعوض مكان u حسب الفرض من الخطوة الاولى

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$$

مثال: جد

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$$

$$u = x^4+2 \Rightarrow du = 4x^3\,dx$$

$$dx = \frac{du}{4x^3} \Rightarrow \int x^3\cos u\cdot\frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\sin(x^4+2)+c$$