الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

رؤية
VISION
2021
الإمارات العربية المتحدة
UNITED ARAB EMIRATES

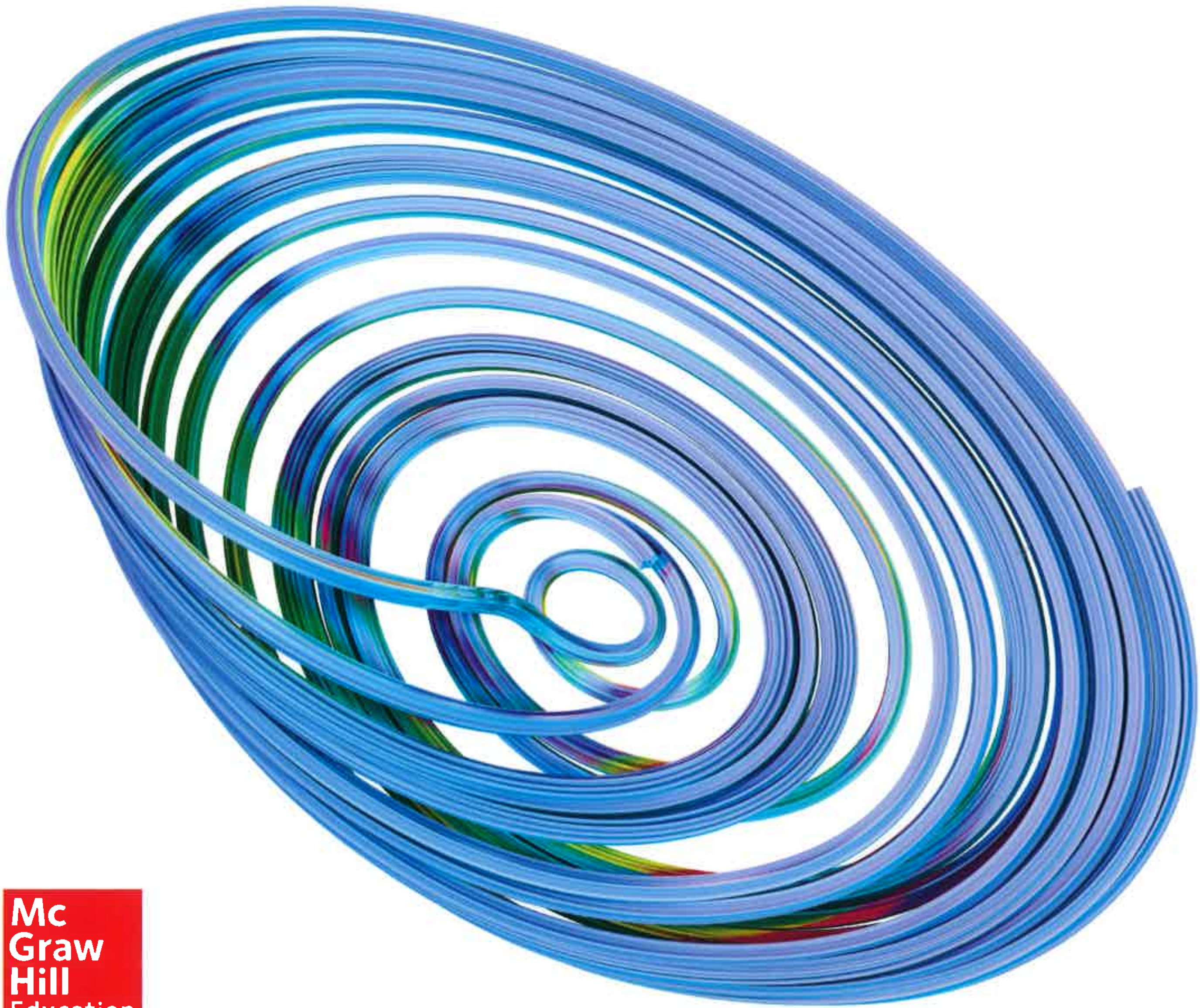
الرياضيات

12

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

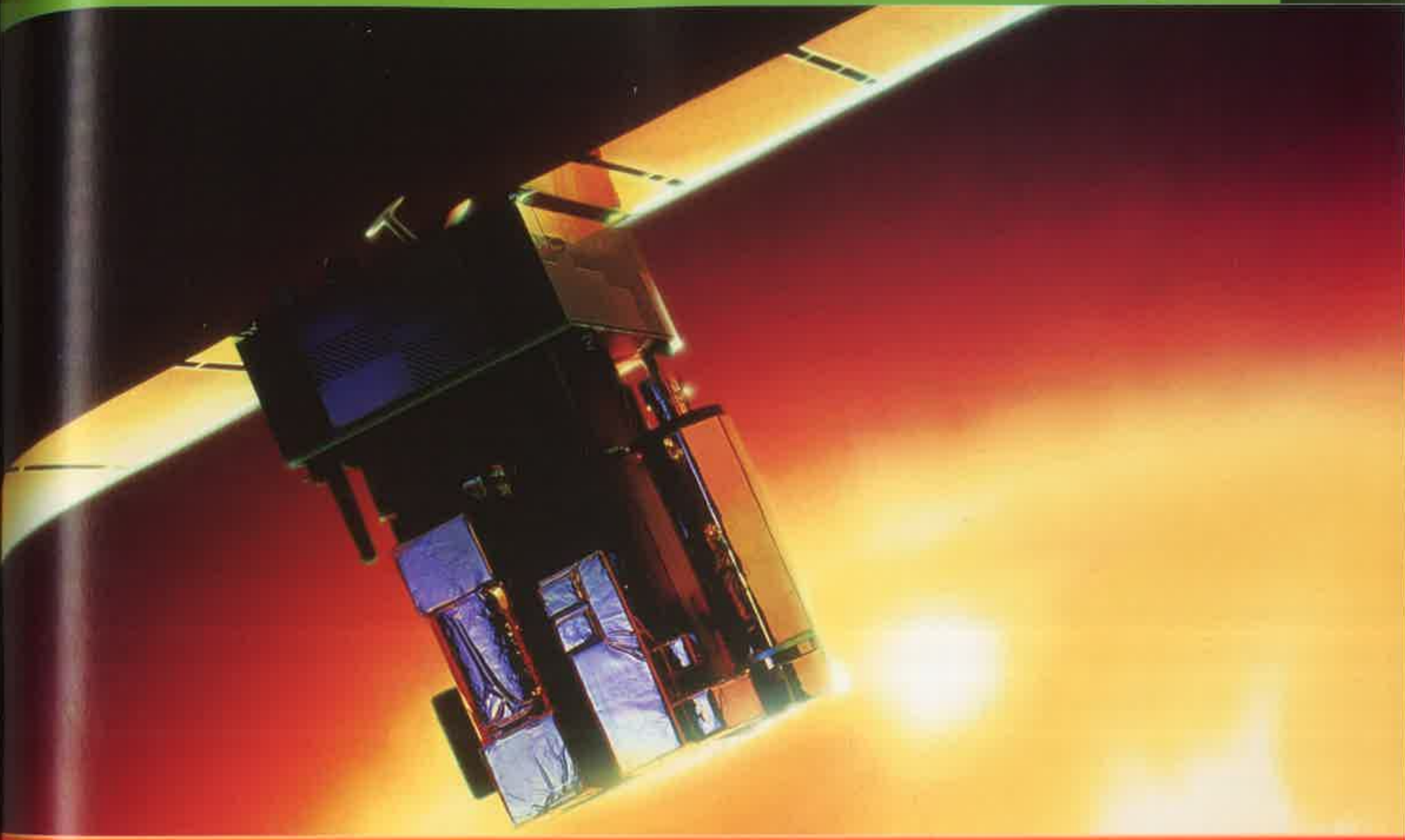
نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc
Graw
Hill
Education

الوحدة

6 تطبيقات الاشتقاق



المرصد الشمسي والهيليوسفيري المعروف باسم سوهو (SOHO) هو مشروع دولي لرصد الشمس ودراستها. تعتبَر الإدارة الوطنية للملاحة الجوية والفضاء (NASA) مسؤولة عن عمليات مركبة سوهو الفضائية، بما في ذلك التعديلات الدورية في موقع المركبة الفضائية للحفاظ على موقعها بين الأرض والشمس مباشرةً، ومع القدرة على رؤية الشمس بدون انقطاع. تستطيع مركبة سوهو جمع البيانات لدراسة البنية الداخلية للشمس، وغلافها الجوي الخارجي والرياح الشمسية. أصدرت مركبة سوهو العديد من الصور الفريدة من نوعها للشمس. تشمل اكتشاف موجات صوتية شمسية تتحرك بداخلها.

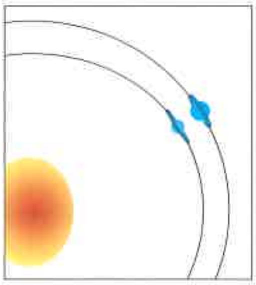
تدور مركبة سوهو في مدار حول الشمس. حيث تقع في موقع نسبي يُطلق عليه نقطة لاغرانج (L_1) بالنسبة إلى نظام الشمس والأرض. يجدر بالذكر أنّ هذه واحدة من خمس نقاط تعمل عندها قوى الجاذبية الساحبة التي تصدر من الشمس والأرض على الحفاظ على الموقع النسبي لأي جسم بين الشمس والأرض. وفي حالة النقطة L_1، يقع هذا المكان على خط بين الشمس والأرض. وهو ما يعطي مركبة سوهو الفضائية (انظر اعلاه) رؤية مباشرة للشمس وخط مباشر للاتصال العائد إلى الأرض. لأن الجاذبية تتسبب في دوران النقطة L_1 تبعًا لحركة الشمس والأرض. لا يحتاج الأمر سوى لقليل من

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

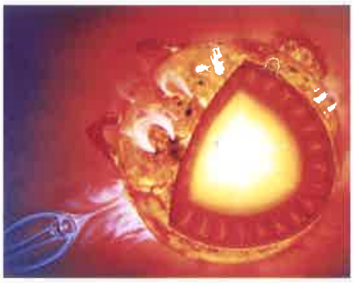
الوقود للحفاظ على مركبة سوهو الفضائية في موقعها الصحيح.

رياضيًا تعتبر نقاط لاغرانج حلولًا لمسائل "الأجسام الثلاثة"، والتي تتضمن وجود ثلاثة أجسام تختلف كتلها بشكل كبير. مثال على ذلك الشمس والأرض وأي مركبة فضائية بينهما. ولكن هناك أيضًا أنظمة أخرى لها دلالتها في ما يتعلق باستكشاف الفضاء. فمن الأنظمة الأخرى محل الاهتمام الأرض والقمر وأي مختبر فضاء بينهما؛ وهناك كذلك نظام ثالث يتمثل في الشمس والمشترى وأي كويكب بينهما. هناك مجموعة من الكويكبات (تُسمى كويكبات طروادة) تقع عند نقطتي لاغرانج L_4 و L_5 في نظام الشمس والمشترى.

مع نظام معين، يمكن تحديد مواقع نقاط لاغرانج الخمسة من خلال حل المعادلات. وكما سترى في تمارين الدرس 6.1، فإن معادلة موقع مركبة سوهو الفضائية هي معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة. لأجل المعادلة من الدرجة الخامسة، نضطر عادةً إلى جمع أدلة بيانية وعددية لتقريب الحلول. في هذه الوحدة، سنؤكد على التمثيل البياني للدوال المُركبة وتحليلها وحلّ المعادلات التي تتضمن هذه الدوال.



مدار L_1



موجات داخل الشمس

الدرس

6-1 التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

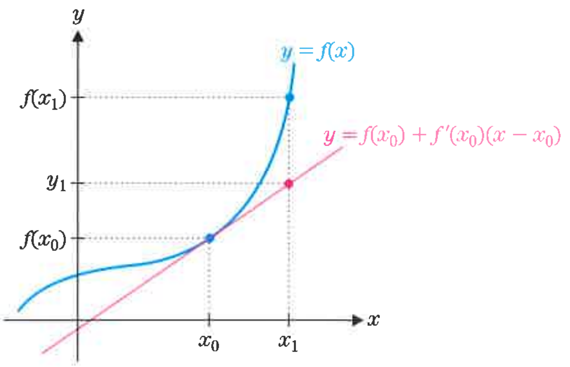
يوجد نوعان من المهام يختلفان اختلافًا واضحًا وتستخدم معهما آلة حاسبة علمية. الأولى، رغم أننا جميعًا نعرف كيفية ضرب 1024 في 1673، إلا أن الآلة الحاسبة ستعطينا النتيجة بشكل أسرع. أو نحن لا نعرف كيفية حساب $\sin(1.2345678)$ من دون استخدام آلة حاسبة، حيث لا توجد صيغة لـ $\sin x$ تتضمن العمليات الحسابية فقط. تحسب الآلة الحاسبة $\sin(1.2345678) \approx 0.9440056953$ باستخدام برنامج مدمج يعطي قيمًا تقريبية لـ sine والدوال المتسامية الأخرى.

في هذا الدرس، سنطور طريقة تقريب بسيطة. بالرغم من أنها بسيطة إلى حدٍ ما، إلا أنها تمهّد السبيل لطرق التقريب الأكثر تعقيدًا لاتباعها لاحقًا في هذا المحتوى.

التقريبات الخطية

على فرض أننا نريد إيجاد تقريب للدالة $f(x_1)$ حيث إن $f(x_1)$ غير معروفة، ولكن $f(x_0)$ معروفة مع بعض قيم x_0 "القريبة" من x_1. على سبيل المثال، قيمة $\cos(1)$ غير معروفة، ولكننا نعرف أن $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ (بدقة) وأن $\pi/3 \approx 1.047$ "قريبة" من 1 . وبينما يمكننا استخدام $\frac{1}{2}$ كتقريب لـ $\cos(1)$ ، يمكننا أن نفعل ما هو أفضل.

بالإشارة إلى الشكل 6.1، لاحظ أنه إذا كانت x_1 "قريبة" من x_0 وتتبعنا المماس عند النقطة $x = x_0$ إلى النقطة المقابلة لـ $x = x_1$ ، فعندئذٍ يكون الإحداثي -y لتلك النقطة (y_1) ينبغي أن يكون "قريبًا" من الإحداثي -y للنقطة الموجودة على المنحنى $y = f(x)$ [أي، $f(x_1)$].



الشكل 6.1

التقريب الخطي للدالة $f(x_1)$

بما أن ميل المماس على منحنى $y = f(x)$ عند $x = x_0$ هو $f'(x_0)$ ، يمكن إيجاد معادلة المماس على منحنى $y = f(x)$ عند $x = x_0$ من

$$m_{\tan} = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

أو

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.1}$$

نعطي الدالة الخطية المُعرَّفة بالمعادلة (1.1) اسمًا، كما يلي.

التعريف 1.1

التقريب الخطي (**أو المماس**) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

لاحظ أن الإحداثي y_1 للنقطة على المماس المقابلة لـ $x = x_1$ يمكن إيجاده ببساطة بالتعويض عن قيمة $x = x_1$ في المعادلة (1.1) . وبالتالي

$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{1.2}$$

نُعرّف **الزيادات** Δx و Δy بـ

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

و

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

باستخدام هذا الرمز، تعطينا المعادلة (1.2) التقريب

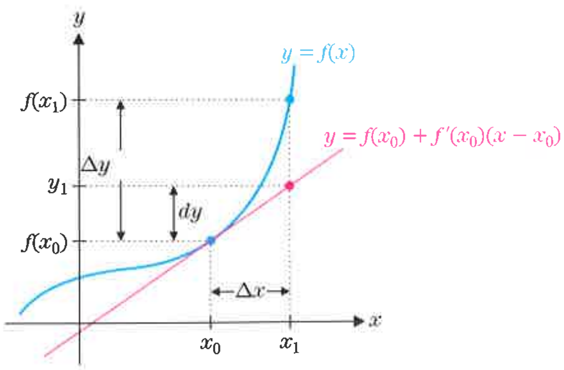
$$\boxed{f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \tag{1.3}$$

نوضّح ذلك في الشكل 6.2 . وفي بعض الأحيان، نُعيد كتابة المعادلة (1.3) بطرح $f(x_0)$ من كلا الطرفين، ليعطينا النتيجة

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x = dy \tag{1.4}$$

حيث إن $dy = f'(x_0)\Delta x$ يُطلق عليها **تفاضلة** y وعند استخدام هذا الرمز، نُعرّف أيضًا dx تفاضلة x بالمعادلة $dx = \Delta x$ وبالتالي وفق المعادلة (1.4) .

$$dy = f'(x_0)\; dx$$



الشكل 6.2

الزيادات والتفاضلات

يمكننا استخدام التقريبات الخطية لإيجاد قيم تقريبية للدوال المتسامية، كما في المثال 1.1 .

مثال 1.1 إيجاد تقريب خطي

أوجد التقريب الخطي لـ $f(x) = \cos x$ عند $x_0 = \pi/3$ واستخدمه لتقريب $\cos(1)$.

الحل من التعريف 1.1 ، يُعرَّف التقريب الخطي بالمعادلة $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
وهنا، $x_0 = \pi/3, f(x) = \cos x$ و $f'(x) = -\sin x$ وبالتالي، نحصل على المعادلة

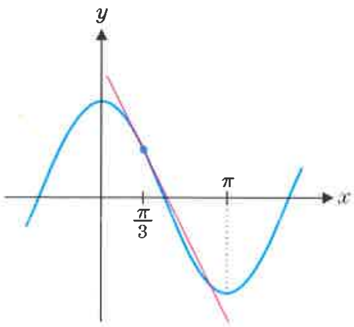
$$L(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

في الشكل 6.3a، نبيّن تمثيلًا بيانيًا للمعادلة $y = \cos x$ والتقريب الخطي لـ $\cos x$ عندما تكون $x_0 = \pi/3$. ولاحظ أن التقريب الخطي (أي، المماس عند $x_0 = \pi/3$ يبقى قريبًا من التمثيل البياني لـ $y = \cos x$ فقط عندما تكون x قريبة من $\pi/3$. وفي الواقع، عندما تكون $x < 0$ أو $x > \pi$ ، يكون التقريب الخطي سيئًا جدًا بشكل واضح. من المعتاد للتقريبات الخطية (المماسات) أن تبقى قريبة من المنحنى فقط بقرب نقطة التماس.

لاحظ أننا اخترنا $x_0 = \frac{\pi}{3}$ بما أن $\frac{\pi}{3}$ هي القيمة الأقرب لـ 1 والتي نعرف عندها قيمة cosine بدقة. وإذًا يكون تقدير $\cos(1)$

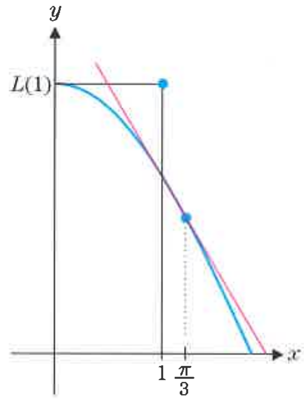
$$\cos(1) \approx L(1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.5409$$

نُوضِّح هذا في الشكل 6.3b ، حيث قمنا فقط بتكبير التمثيل البياني من الشكل 6.3a.
تعطيك الآلة الحاسبة نتيجة $\cos(1) \approx 0.5403$ وهكذا، وجدنا تقريبًا للقيمة المطلوبة جيدًا إلى حدٍ ما. ■



الشكل 6.3a

$y = \cos x$ وتقريبها الخطي عند $x_0 = \pi/3$



الشكل 6.3b

$L(1) \approx \cos(1)$

في المثال 1.2 ، نشتق تقريبًا مفيدًا لـ $\sin x$ ، يصلح عندما تقترب x من 0. غالبًا ما يُستخدم هذا التقريب في تطبيقات الفيزياء والهندسة لتبسيط المعادلات التي تتضمن $\sin x$.

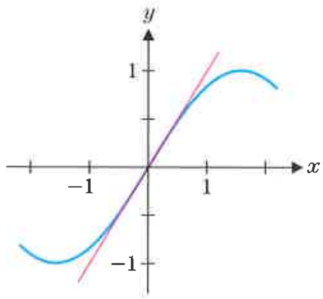
مثال 1.2 تقريب خطي لدالة sin x

أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin x$ ، عندما تقترب x من 0 .

الحل هنا، $f'(x) = \cos x$ وبالتالي من التعريف 1.1 ، نحصل على المعادلة

$$\sin x \approx L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = \sin 0 + \cos 0\,(x) = x$$

يعني ذلك أنه عندما تقترب x من 0، يكون $\sin x \approx x$ ونُوضِّح هذا في الشكل 6.4. ■



الشكل 6.4

$y = \sin x$ و $y = x$

لاحظ من الشكل 6.4 أن التمثيل البياني لـ $y = x$ يبقى قريبًا من التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ فقط بقرب $x = 0$. وبناءً عليه، يبقى تقريب $\sin x \approx x$ صالحًا فقط عندما تقترب x من 0. لاحظ أيضًا أنه كلما بعدت x عن 0، كان التقريب أسوأ. يُصبح هذا السلوك أكثر وضوحًا في المثال 1.3 ، حيث نُوضِّح أيضًا استخدام الزيادات Δx و Δy

مثال 1.3 التقريب الخطي لبعض الجذور التكعيبية

استخدم تقريبًا خطيًا لتقريب $\sqrt[3]{8.02}$ ، $\sqrt[3]{8.07}$ ، $\sqrt[3]{8.15}$ و $\sqrt[3]{25.2}$

الحل نحن نُقرِّب هنا قيم الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. وبالتالي، $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ أقرب عدد لأيٍ من الأعداد 8.02، أو 8.07 أو 8.15 ونعرف جذره التكعيبي بدقة هو العدد 8. وبالتالي، نكتب

$$\begin{aligned} f(8.02) &= f(8) + [f(8.02) - f(8)] && \text{اجمع واطرح } f(8) \\ &= f(8) + \Delta y && (1.5) \end{aligned}$$

من المعادلة (1.4)، نحصل على المعادلة

$$\begin{aligned} \Delta y \approx dy &= f'(8)\Delta x \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) 8^{-2/3}(8.02 - 8) = \frac{1}{600} && \text{بما أن } \Delta x = 8.02 - 8 \quad (1.6) \end{aligned}$$

باستخدام المعادلة (1.5) والمعادلة (1.6) . نحصل على النتيجة

$$f(8.02) \approx f(8) + dy = 2 + \frac{1}{600} \approx 2.0016667$$

بينما تعطيك الآلة الحاسبة النتيجة $\sqrt[3]{8.02} \approx 2.0016653$ بدقة. بالمثل، نحصل على النتيجة

$$f(8.07) \approx f(8) + \frac{1}{3}8^{-2/3}(8.07 - 8) \approx 2.0058333$$

و

$$f(8.15) \approx f(8) + \frac{1}{3}8^{-2/3}(8.15 - 8) \approx 2.0125$$

x	الخطأ
8.02	1.4×10^{-6}
8.07	1.7×10^{-5}
8.15	7.7×10^{-5}

خطأ في التقريب الخطي

بينما تعطيك الآلة الحاسبة النتيجة $\sqrt[3]{8.07} \approx 2.005816$ و $\sqrt[3]{8.15} \approx 2.01242$. وفي الهامش، نُوضّح جدولًا يتضمن الخطأ في استخدام التقريب الخطي لتقريب $\sqrt[3]{x}$. ولاحظ مدى ازدياد الخطأ كلما بعدت x عن 8.

لتقريب $\sqrt[3]{25.2}$ لاحظ أن العدد 8 ليس أقرب عدد إلى 25.2 نعرف جذره التكعيبي بدقة. وبما أن 25.2 أقرب إلى 27 من 8، نكتب المعادلة

$$f(25.2) = f(27) + \Delta y \approx f(27) + dy = 3 + dy$$

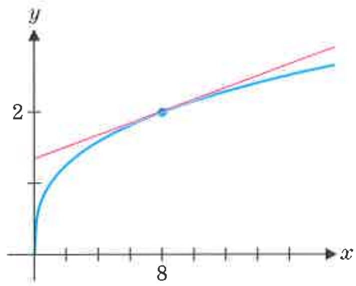
في هذه الحالة،

$$dy = f'(27)\Delta x = \frac{1}{3}27^{-2/3}(25.2 - 27) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)(-1.8) = -\frac{1}{15}$$

ونحصل على المعادلة

$$f(25.2) \approx 3 + dy = 3 - \frac{1}{15} \approx 2.9333333$$

مقارنة بقيمة 2.931794 التي تعطيها الآلة الحاسبة. في الشكل 6.5، يمكنك أن ترى بوضوح أنه كلما بعدت قيمة x عن نقطة التماس، كان التقريب يميل إلى أن يكون أسوأ. ■



الشكل 6.5

$y = \sqrt[3]{x}$ والتقريب الخطي عند $x_0 = 8$

كانت الأمثلة الثلاثة الأولى تهدف إلى تعريفك بالطريقة ومنحك فكرة عن كيفية اتجاه التقريبات الخطية إلى التقريب الجيد (أو السيء). في المثال 1.4 ، لا توجد إجابة دقيقة لمقارنتها بالتقريب. واستخدامنا للتقريب الخطي هنا يُشار إليه على أنه **استكمال داخلي خطي**.

مثال 1.4 استخدام تقريب خطي لإجراء استكمال داخلي خطي

على فرض أنه بناءً على بحث في الأسواق ، قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف آلة تصوير صغيرة بسعر $\$x$ ، كما هو مُعطى في الجدول المرافق. قدّر عدد الكاميرات التي يمكن بيعها بسعر $7 .

x	6	10	14
$f(x)$	84	60	32

الحل أقرب قيمة -x إلى $x = 7$ في الجدول هي $x = 6$ [بعبارة أخرى، هذه هي أقرب قيمة لـ x نعرف عندها قيمة الدالة $f(x)$] التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = 6$ سيبدو مثل

$$L(x) = f(6) + f'(6)(x - 6)$$

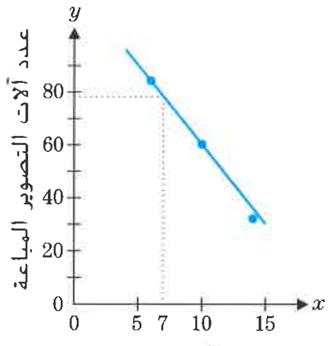
من الجدول، نعرف أن $f(6) = 84$ ولكن لا نعرف $f'(6)$. وكذلك، لا يمكننا ايجاد قيمة $f'(x)$ ، لأنه ليس لدينا صيغة للدالة $f(x)$. وأفضل ما يمكننا فعله بالبيانات المعطاة هو تقريب المشتقة بالمعادلة

$$f'(6) \approx \frac{f(10) - f(6)}{10 - 6} = \frac{60 - 84}{4} = -6$$

إذن التقريب الخطي يكون

$$L(x) \approx 84 - 6(x - 6)$$

تقدير عدد الكاميرات المبيعة عند $x = 7$ سيكون عندئذٍ $L(7) \approx 84 - 6 = 78$ ألفًا. ونُوضِّح تفسيرًا بيانيًا لهذا في الشكل 6.6. حيث يمثل المستقيم التقريب الخطي (في هذه الحالة، القاطع الواصل بين أول نقطتي بيانات). ■



الشكل 6.6

الاستكمال الداخلي الخطي

طريقة نيوتن

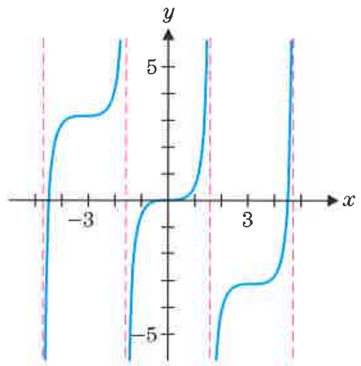
نعود الآن إلى مسألة إيجاد أصفار الدالة. قد شرحنا سابقًا طريقة التنصيف كخطوة واحدة لإيجاد أصفار الدالة المتصلة. سنشرح هنا طريقةً عادة ما تكون أكثر كفاءة بكثير من طرائق التنصيف. مرة أخرى، فإن قيم x حيث $f(x) = 0$ يُطلق عليها **جذور** المعادلة $f(x) = 0$ أو **أصفار** الدالة f . وفي حين أنه من السهل إيجاد أصفار

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

كيف يمكنك إيجاد أصفار الدالة:

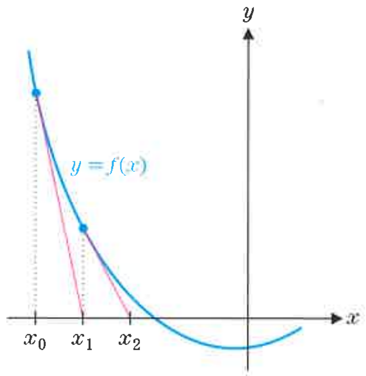
$$f(x) = \tan x - x \ ?$$

بما أن هذه الدالة ليست جبرية، لا تتوفر صيغ لإيجاد الأصفار. حتى مع ذلك، يمكننا رؤية الأصفار بوضوح في الشكل 6.7 . (في الواقع، هناك عدد لانهائي منها). السؤال هو، كيف لنا أن نجدها؟



الشكل 6.7

$y = \tan x - x$



الشكل 6.8

طريقة نيوتن

ملاحظات تاريخية

السيد إسحاق نيوتن (1642-1727) عالم رياضيات وفيزياء إنجليزي يُعرف بأنه العالِم المشارك في وضع أسس حساب التفاضل والتكامل. وخلال عامين منذ 1665 إلى 1667، توصل نيوتن إلى اكتشافات مهمة في العديد من جوانب حساب التفاضل والتكامل، إلى جانب البصريات وقانون الجاذبية. إلا أنه لم يتم نشر نتائج الرياضيات التي توصل إليها نيوتن في الوقت المناسب. عوضًا عن ذلك، ثمة طرائق مثل طريقة نيوتن تم طرحها رويدًا رويدًا كأدوات مفيدة في هذه الأوراق العلمية. يعتبر كتاب الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية الذي وضعه نيوتن من أهم إنجازات العقل البشري.

بشكلٍ عام، لإيجاد حلول تقريبية للدالة $f(x) = 0$ ، نقوم أولًا بعمل **تخمين أولي**، بالرمز x_0 ، لموقع الحل. تتبع المماس إلى $y = f(x)$ عند $x = x_0$ إلى حيث يقطع الإحداثي x (انظر الشكل 6.8) يبدو أنه يوفر تقريبًا مُحسَّنًا إلى الصفر. تتحقق معادلة المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = x_0$ بالتقريب الخطي عند x_0 [انظر المعادلة (1.1)].

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1.7)$$

نرمز الى نقطة تقاطع المماس مع المحور -x بـ x_1 [يمكن إيجاده بوضع $y = 0$ في المعادلة (1.7)]. ثم يكون لدينا

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

وبحل هذه المعادلة لإيجاد قيمة x_1 ، نتوصل إلى النتيجة

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بتكرار هذه العملية، باستخدام x_1 كتخمين جديد، سوف نحصل على تقريب مُحسَّن آخر،

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهكذا. (انظر الشكل 6.8). بهذه الطريقة، نُنشئ متتالية من تقريبات متتابعة تُعرَّف بالمعادلة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1.8}$$

يُطلق على هذا الإجراء **طريقة نيوتن رافسون**، أو فقط **طريقة نيوتن**. إذا كانت هناك أي إشارة في الشكل 6.8 ، ينبغي أن تقترب x_n أكثر وأكثر إلى الصفر كلما زادت n . طريقة نيوتن بشكلٍ عام طريقة دقيقة وسريعة جدًا لتقريب أصفار الدالة، كما نبين في المثال 1.5 .

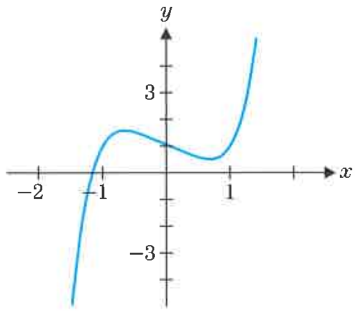
مثال 1.5 استخدام طريقة نيوتن لتقريب صفر

أوجد الصفر التقريبي للدالة $f(x) = x^5 - x + 1$

الحل يقترح الشكل 6.9 أن الصفر الوحيد للدالة f يقع بين $x = -2$ و $x = -1$. أيضًا، بما أن $f(-1) = 1 > 0$ و $f(-2) = -29 < 0$ وبما أن f دالة متصلة، تقول نظرية القيمة المتوسطة إنه يجب أن يكون للدالة f صفرًا في الفترة $(-2, -1)$. وبما أن الصفر يظهر أقرب إلى $x = -1$ ، نختار -1 $x_0 = -1$ كتخمين أولي. أخيرًا، $f'(x) = 5x^4 - 1$ وهكذا، تعطينا طريقة نيوتن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^5 - x_n + 1}{5x_n^4 - 1}, \quad n = 0, 1, 2, , \ldots .$$



الشكل 6.9
$y = x^5 - x + 1$

باستخدام التخمين الأولي $x_0 = -1$ ، نحصل على النتيجة

$$x_1 = -1 - \frac{(-1)^5 - (-1) + 1}{5(-1)^4 - 1} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

على نحوٍ مماثل، من $x_1 = -\frac{5}{4}$ ، نحصل على تقريب مُحسَّن

$$x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{\left(-\frac{5}{4}\right)^5 - \left(-\frac{5}{4}\right) + 1}{5\left(-\frac{5}{4}\right)^4 - 1} \approx -1.178459394$$

وهكذا. نجد أن

$$x_3 \approx -1.167537389,$$

$$x_4 \approx -1.167304083$$

و

$$x_5 \approx -1.167303978 \approx x_6$$

بما أن $x_5 \approx x_6$ ، لن نقوم بأي تقدم آخر بحساب خطوات إضافية. كتحقق نهائي من دقة التقريب، نحسب

$$f(x_6) \approx 1 \times 10^{-13}$$

وبما أن هذا قريب جدًا من الصفر، نقول إن $x_6 \approx -1.167303978$ صفر تقريبي للدالة f .

يمكنك استخدام طريقة نيوتن لحل مجموعة متنوعة من مسائل التقريب. كما نبيّن في المثال 1.6. قد تحتاج أولاً إلى إعادة صياغة المسألة كمسألة لإيجاد الجذر.

مثال 1.6 استخدام طريقة نيوتن لتقريب جذر تكعيبي

استخدم طريقة نيوتن لتقريب $\sqrt[3]{7}$.

الحل بما أن طريقة نيوتن تُستخدم لحل المعادلات من الشكل $f(x) = 0$ ، نقوم أولًا بإعادة صياغة المسألة، كما يلي. على فرض أن $x = \sqrt[3]{7}$. إذن، $x^3 = 7$ ، والتي يمكن إعادة كتابتها بالشكل

$$f(x) = x^3 - 7 = 0$$

هنا، $f'(x) = 3x^2$ ونحصل على تخمين أولي من تمثيل بياني لـ $y = f(x)$ (انظر الشكل 6.10). لاحظ أن هناك صفرًا قريبًا من $x = 2$ وهكذا نعتبر $x_0 = 2$. عندئذٍ تعطينا طريقة نيوتن الناتج

$$x_1 = 2 - \frac{2^3 - 7}{3(2^2)} = \frac{23}{12} \approx 1.916666667$$

بالاستمرار في هذه العملية، نحصل على

$$x_2 \approx 1.912938458$$

و

$$x_3 \approx 1.912931183 \approx x_4$$

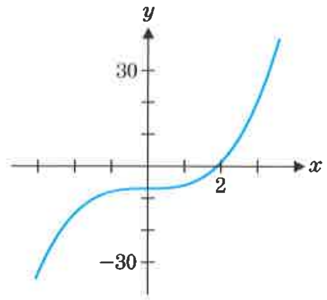
أيضًا،

$$f(x_4) \approx 1 \times 10^{-13}$$

بالتالي، تكون x_4 صفر تقريبي للدالة f . يعني هذا أيضًا أن

$$\sqrt[3]{7} \approx 1.912931183$$

التي تساوي إلى حدٍ كبير قيمة $\sqrt[3]{7}$ الناتجة من الآلة الحاسبة. ■



الشكل 6.10
$y = x^3 - 7$

ملاحظات
يسلط المثالان 1.3 و 1.6 الضوء على طريقتين لحل المسألة نفسها. خذ بضع لحظات لمقارنة هذه الطرائق.

ملحوظة 1.1

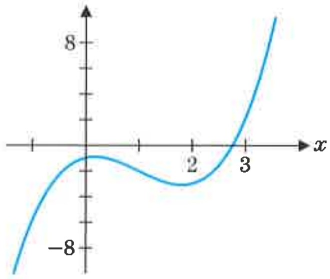
على الرغم من فعالية طريقة نيوتن الكبيرة في المثالين 1.5 و 1.6، إلا أنها لا تنجح دائمًا. وتأكد من أن قيم x_n تُصبح تدريجيًا أقرب وأقرب معًا (نأمل التركيز على الحل المرغوب). استمر حتى تصل إلى حدود دقة الآلة الحاسبة لديك. تأكد أيضًا من حساب قيمة الدالة عند الصفر التقريبي محل التخمين؛ وإذا لم تكن هذه القيمة قريبة من الصفر، فلا تقبل القيمة كصفر تقريبي.

كما نبيّن في المثال 1.7، تحتاج طريقة نيوتن إلى تخمين أولي جيد لإيجاد تقريب دقيق.

مثال 1.7 تأثير التخمين السيء على طريقة نيوتن

استخدم طريقة نيوتن لإيجاد صفر تقريبي للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.11، يوجد صفر في الفترة $(2, 3)$. باستخدام تخمين أولي (لا سيما غير جيد) $x_0 = 1$ ، نحصل على النتيجة $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 0$ وهكذا. جرّب هذا بنفسك. طريقة نيوتن حساسة للتخمين الأولي و $x_0 = 1$ مجرد تخمين أولي سيئ. إذا بدأنا بدلًا من ذلك بتخمين أولي مُحسَّن $x_0 = 2$. تقترب طريقة نيوتن بسرعة من الصفر التقريبي 2.769292354. (مرة أخرى، جرّب هذا بنفسك). ■

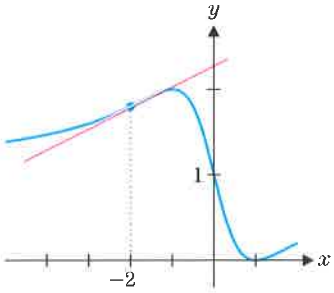


الشكل 6.11
$y = x^3 - 3x^2 + x - 1$

كما نرى في المثال 1.7، يعتبر التخمين الأولي الجيد عنصرًا أساسيًا في طريقة نيوتن. إلا أن هذا وحده لن يضمن التقارب السريع (ما يعني أن هذا لا يستغرق سوى بعض التكرارات للوصول إلى التقريب الدقيق).

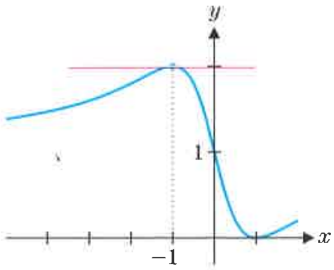
n	x_n
1	−9.5
2	−65.9
3	−2302
4	−2,654,301
5	-3.5×10^{12}
6	-6.2×10^{24}

تكرارات طريقة نيوتن عندما تكون $x_0 = -2$



الشكل 6.12

$y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ والمماس عند $x = -2$



الشكل 6.13

$y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ والمماس عند $x = -1$

مثال 1.8 التقارب البطيء على غير العادة مع طريقة نيوتن

استخدم طريقة نيوتن مع (a) $x_0 = -2$ و (b) $x_0 = -1$ و (c) $x_0 = 0$ لمحاولة تحديد مكان صفر الدالة $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

الحل بالطبع لا يوجد لغز هنا: f لها صفر واحد فقط يقع عند $x = 1$. ولكن، شاهد ما يحدث عندما نستخدم طريقة نيوتن مع التخمينات المحددة.

(a) باعتبار $x_0 = -2$ تعطينا طريقة نيوتن القيم في الجدول الموجود في الهامش. من الواضح أن التكرارات المتتالية تتزايد بشكل كبير مع هذا التخمين الأولي. لمعرفة السبب، انظر الشكل 6.12، والذي يُظهر التمثيلات البيانات لكلٍ من $y = f(x)$ والمماس عند $x = -2$. وتتبع المماس إلى حيث يقطع الإحداثي x يأخذنا بعيدًا عن الصفر هنا (بعيدًا جدًا). بما أن كل المماسات عندما تكون $x \le -2$ لها ميل موجب [أوجد قيمة $f'(x)$ لمعرفة لماذا هذا صحيح]. تأخذك كل خطوة لاحقة بعيدًا عن الصفر.

(b) باستخدام التخمين الأولي المُحسَّن $x_0 = -1$ لا يمكننا حتى حساب x_1 . وفي هذه الحالة، $f'(x_0) = 0$ وهكذا، تفشل طريقة نيوتن. بيانيًا، هذا يعني أن المماس على منحنى $y = f(x)$ عند $x = -1$ يكون أفقيًا (انظر الشكل 6.13)، وبالتالي فإن المماس لن يقطع الإحداثي x مطلقًا.

(c) مع التخمين الأولي الأفضل $x_0 = 0$ نحصل على تقريبات متتالية في الجدول التالي. أخيرًا، وجدنا تخمينًا أوليًا تقترب معه طريقة نيوتن من الجذر $x = 1$. ولكن التقريبات

n	x_n
1	0.5
2	0.70833
3	0.83653
4	0.912179
5	0.95425
6	0.976614

n	x_n
7	0.9881719
8	0.9940512
9	0.9970168
10	0.9985062
11	0.9992525
12	0.9996261

تكرارات طريقة نيوتن عندما تكون $x_0 = 0$

المتتالية تقترب من 1 ببطء أكثر منها في الأمثلة السابقة. وبالمقارنة، نلاحظ أنه في المثال 1.5، تتوقف التكرارات عن التغيّر عند x_5 ، وهنا، x_5 ليست قريبة على وجه الخصوص من الصفر المطلوب للدالة $f(x)$ ، وفي الواقع، في هذا المثال، x_{12} ليست قريبة من الصفر بمثل قرب x_5 في المثال 1.5. سنتناول هذا النوع من السلوك بتفصيل أكثر في التمارين. ■

على الرغم من المعضلات البسيطة التي وجدناها في المثالين 1.7 و 1.8، ينبغي لك أن ترى طريقة نيوتن باعتبارها طريقة تتسم بالثقة والكفاءة عمومًا لتحديد أماكن الأصفار تقريبيًا. كل المطلوب منك القليل من الانتباه والحس السليم. إذا كانت التقريبات المتتالية تقترب من قيمة معينة لا تبدو متسقة مع التمثيل البياني، ستحتاج إلى تدقيق النتائج بعناية أكبر وربما تجربة تخمينات أولية أخرى.

ما وراء الصيغ

التقريبات هي في قلب حساب التفاضل والتكامل. لإيجاد ميل مماس، على سبيل المثال، نبدأ بتقريب المماس مع الخطوط القاطعة. ووجود العديد من الصيغ المشتقة البسيطة التي تساعدنا في حساب الميول الدقيقة، مكافأة غير متوقعة. في هذا الدرس، يوفر المماس تقريبًا لمنحنى ويُستخدَم لتقريب حلول المعادلات التي تفشل فيها قواعد الجبر. ورغم أننا لن نتوصل إلى إجابة دقيقة، يمكننا إجراء التقريب بالدقة التي نرغب فيها. وهكذا يمكننا "حل" المعادلة، لمعظم الأغراض العملية. فكّر في موقف تحتاج فيه إلى معرفة الوقت من اليوم. كم مرة ستحتاج إلى معرفة الوقت الدقيق؟

التمارين 6.1

تمارين كتابية

1. اشرح بإيجاز، فيما يتعلق بالمماسات، لماذا يسوء التقريب في المثال 1.3 كلما بعدت x عن 8.

2. وضعنا مجموعة من التقريبات الخطية في هذا الدرس. إنّ بعض التقريبات أكثر فائدة من الأخرى، بالنظر إلى التمثيلات البيانية، اشرح لماذا قد يكون التقريب $\sin x \approx x$ أكثر فائدةً من التقريب $\cos x \approx 1$.

3. في المثال 1.6، ذكرنا أنك تستطيع أن تفكر في استخدام تقريب خطي بدلًا من طريقة نيوتن. ناقش العلاقة بين التقريب الخطي لـــ $\sqrt[3]{7}$ عند $x = 8$ وتقريب طريقة نيوتن لـــ $\sqrt[3]{7}$ مع $x_0 = 2$

4. اشرح لماذا تفشل طريقة نيوتن حسابيًا إذا كانت $f'(x_0) = 0$. وفيما يتعلق بالمماسات التي تقطع الإحداثي x، اشرح لماذا تُعدّ $f'(x_0) = 0$ معضلة.

في التمارين 1–6، أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$. استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطى.

1. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, \sqrt{1.2}$
2. $f(x) = (x+1)^{1/3}, x_0 = 0, \sqrt[3]{1.2}$
3. $f(x) = \sqrt{2x+9}, x_0 = 0, \sqrt{8.8}$
4. $f(x) = 2/x, x_0 = 1, 2/0.99$
5. $f(x) = \sin 3x, x_0 = 0, \sin(0.3)$
6. $f(x) = \sin x, x_0 = \pi, \sin(3.0)$

في التمرينين 7 و 8، استخدم التقريبات الخطية لتقدير الكمية.

7. (a) $\sqrt[4]{16.04}$ (b) $\sqrt[4]{16.08}$ (c) $\sqrt[4]{16.16}$
8. (a) $\sin(0.1)$ (b) $\sin(1.0)$ (c) $\sin\left(\frac{9}{4}\right)$

في التمارين 9–12، استخدم الاستكمال الداخلي الخطي لتقدير الكمية المطلوبة.

9. قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بالسعر $\$x$ كما هو مُعطى في الجدول.

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

قدّر عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر (a) \$24 و (b) \$36 .

10. قدّرت شركة بيع أنه يمكن بيع $f(x)$ علبة مشروبات غازية كل يوم إذا كانت درجة الحرارة x°F كما هو مُعطى في الجدول.

x	60	80	100
$f(x)$	84	120	168

قدّر عدد العلب التي يمكن بيعها عند (a) 72° و (b) 94° .

11. مخرج رسوم متحركة يدخل الموقع $f(t)$ لرأس شخصية ما بعد t إطار من الفيلم كما هو موضح في الجدول.

t	200	220	240
$f(t)$	128	142	136

إذا كان برنامج الحاسوب يستخدم الاستكمال الداخلي لتحديد المواقع المتوسطة، فحدد موقع الرأس عند عدد الإطارات (a) 208 و (b) 232.

12. يقيس مستشعر الموقع $f(t)$ لجسيم بعد t ميكروثانية من تصادم كما هو مُعطى في الجدول.

t	5	10	15
$f(t)$	8	14	18

قدّر موقع الجسيم عند الأزمنة (a) $t = 8$ و (b) $t = 12$.

في التمارين 13–16، استخدم طريقة نيوتن مع قيم x_0 المعطاة لـــ (a) حساب x_1 و x_2 يدويًا و(b) استخدام حاسوب أو آلة حاسبة لإيجاد الجذر لخمس منازل عشرية دقيقة على الأقل.

13. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0,\ x_0 = 1$
14. $x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0,\ x_0 = -1$
15. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$
16. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0,\ x_0 = -1$

في التمارين 17–24، استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر تقريبي (دقيق لست منازل عشرية). ارسم التمثيل البياني واشرح كيفية توصّلك إلى تخمينك الأولي.

17. $x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$
18. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0$
19. $x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0$
20. $\cos x - x = 0$
21. $\sin x = x^2 - 1$
22. $\cos x^2 = x$
23. $e^x = -x$
24. $e^{-x} = \sqrt{x}$

في التمارين 25–30، استخدم طريقة نيوتن [اذكر الدالة التي تستخدمها] لتقدير العدد المُعطى.

25. $\sqrt{11}$
26. $\sqrt{23}$
27. $\sqrt[3]{11}$
28. $\sqrt[3]{23}$
29. $\sqrt[4.4]{24}$
30. $\sqrt[4.6]{24}$

في التمارين 31–36، تفشل طريقة نيوتن. اشرح لماذا تفشل الطريقة، وإن أمكن، أوجد جذرًا بتصحيح المسألة.

31. $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 0$
32. $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$

33. $x^2+1=0,\ x_0=0$

34. $x^2+1=0,\ x_0=1$

35. $\dfrac{4x^2-8x+1}{4x^2-3x-7}=0,\ x_0=-1$

36. $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{1/3}=0,\ x_0=0.5$

.37 استخدم طريقة نيوتن مع $x_0=1.2$ (a) و $x_0=2.2$ (b) لإيجاد صفر للدالة $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$. ناقش الفرق في معدلات التقارب في كل حالة.

.38 استخدم طريقة نيوتن مع $x_0=0.2$ (a) و $x_0=3.0$ (b) لإيجاد صفر للدالة $f(x)=x\sin x$. ناقش الفرق في معدلات التقارب في كل حالة.

.39 استخدم طريقة نيوتن مع $x_0=-1.1$ (a) و $x_0=2.1$ (b) لإيجاد صفر للدالة $f(x)=x^3-3x-2$. ناقش الفرق في معدلات التقارب في كل حالة.

.40 حلل كثيرات الحدود إلى عوامل في التمرينين 37 و 39 . أوجد علاقة بين كثيرة الحدود المحللة إلى عوامل والمعدل الذي تقترب به طريقة نيوتن من الصفر. اشرح مدى ملاءمة الدالة في التمرين 38، والتي لا تتحلل إلى عوامل، في هذه العلاقة. (ملاحظة: سنتناول العلاقة بمزيد من الاستكشاف في التمرين الاستكشافي 1).

في التمارين 44–41، أوجد التقريب الخطي عند $x=0$ لإثبات أن التقريبات شائعة الاستخدام التالية صالحة مع قيم x "الصغيرة". وقارن التقريب والقيم الدقيقة عندما تكون $x=0.01$ ، $x=0.1$ و $x=1$.

41. $\tan x\approx x$

42. $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$

43. $\sqrt{4+x}\approx 2+\frac{1}{4}x$

44. $e^x\approx 1+x$

.45 (a) أوجد التقريب الخطي عند $x=0$ لكلٍ من الدوال $f(x)=(x+1)^2$ و $g(x)=1+\sin(2x)$ و $h(x)=e^{2x}$. قارن النتائج التي تتوصل إليها.

(b) مثِّل بيانيًا كل دالة في الجزء (a) مع تقريبها الخطي المشتق في الجزء (a). ما الدالة التي لها أقرب ملاءمة مع تقريبها الخطي؟

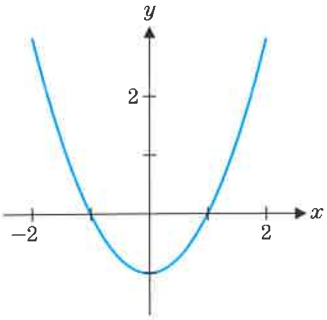
.46 (a) أوجد التقريب الخطي عند $x=0$ لكلٍ من الدوال $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\tan^{-1}x$ و $h(x)=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. وقارن النتائج التي تتوصل إليها.

(b) مثِّل بيانيًا كل دالة في الجزء (a) مع تقريبها الخطي المشتق في الجزء (a). ما الدالة التي لها أقرب ملاءمة مع تقريبها الخطي؟

.47 في التمرين 7، أوجد قيمة الأخطاء (القيمة المطلقة للفرق بين القيم الدقيقة والتقريبات الخطية). بالنظر في التمارين 7a-7c كأعداد بالشكل $\sqrt{16+\Delta x}$ ضع للأخطاء الرمز $e(\Delta x)$ (حيث إن $\Delta x=0.04$ ، $\Delta x=0.08$ و $\Delta x=0.16$. وبناء على هذه القيم الثلاثة، خمّن الثابت c حيث $e(\Delta x)\approx c\cdot(\Delta x)^2$.

.48 استخدم نظام جبر حاسوبيًا (CAS) لتحديد مدى قيم x في التمرين 41 التي يكون معها التقريب لها دقيقًا ضمن 0.01. أي، أوجد x حيث $|\tan x-x|<0.01$.

.49 مع التمثيل البياني المُعطى للمعادلة $y=f(x)$ ، ارسم المماسات المستخدمة في طريقة نيوتن لتحديد x_1 و x_2 بعد البدء عند $x_0=2$. أي الأصفار ستقترب منها طريقة نيوتن؟ كرر مع $x_0=-2$ و $x_0=0.4$.



.50 ماذا سيحدث لطريقة نيوتن في التمرين 49 إذا كان لديك قيمة بداية لـــ $x_0=0$ ؟ اعتبر أنك تستخدم طريقة نيوتن مع $x_0=0.2$ و $x_0=10$. سيكون من الواضح أن $x_0=0.2$ أقرب بكثير من صفر الدالة، ولكن ما التخمين الأولي الذي سيصلح بشكل أفضل في طريقة نيوتن؟ اشرح ذلك.

.51 أثبت أن طريقة نيوتن المستخدمة مع $x^2-c=0$ (حيث $c>0$ ثابت ما) تتوصل إلى المخطط التكراري $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+c/x_n)$ للتقريب $\sqrt{c}$. وهذا المخطط معروف منذ أكثر من 2000 سنة. ولفهم سبب صلاحيته، تصوّر تخمينك الأولي (x_0) عندما يكون $\sqrt{c}$ صغيرًا جدًا. ما وجه المقارنة بين c/x_0 و $\sqrt{c}$ ؟ واشرح لماذا متوسط x_0 و c/x_0 سيعطي تقريبًا أفضل لـــ $\sqrt{c}$.

.52 أثبت أن طريقة نيوتن المستخدمة مع $x^n-c=0$ (حيث n و c ثوابت موجبة) تتوصل إلى المخطط التكراري $x_{n+1}=\frac{1}{n}[(n-1)x_n+cx_n^{1-n}]$ للتقريب $\sqrt[n]{c}$.

.53 بتطبيق طريقة نيوتن على $x^2-x-1=0$ ، اثبت أنه (a) إذا كانت $x_0=\dfrac{3}{2}$ ، فإن $x_1=\dfrac{13}{8}$ ؛ و (b) إذا كانت $x_0=\dfrac{5}{3}$ ، فإن $x_1=\dfrac{34}{21}$ ؛ و (c) إذا كانت $x_0=\dfrac{8}{5}$ ، فإن $x_1=\dfrac{89}{55}$ ؛ و (d) متتالية فيبوناتشي مُعرَّفة بـ $F_1=1$ ، $F_2=1$ ، $F_3=2$ ، $F_4=3$ و $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ عندما تكون $n\ge 3$. اكتب كل عدد في الأجزاء (a)–(c) كنسبة من أعداد فيبوناتشي. ضع قيمة مكان الرمزين السفليين m و k في ما يلي: إذا كانت $x_0=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ ، إذن $x_1=\dfrac{F_m}{F_k}$ (e) وإذا افترضنا أن طريقة نيوتن تقترب من $x_0=\dfrac{3}{2}$ ، فحدد $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

.54 حدد سلوك طريقة نيوتن المستخدمة مع المعادلات (a) $f_1(x)=\frac{1}{5}(8x-3)$ ؛ (b) $f_2(x)=\frac{1}{5}(16x-3)$ ، (c) $f_3(x)=\frac{1}{5}(32x-3)$ و(d)$f(x)$ عند $f(x)=f_1(x)$ إذا كان $\frac{1}{2}<x<1$ و $f(x)=f_2(x)$ إذا كان $\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}$ ، و $f(x)=f_3(x)$ إذا كان $\frac{1}{8}<x\le\frac{1}{4}$ وهكذا، مع كون $x_0=\frac{3}{4}$. هل تقترب طريقة نيوتن من صفر الدالة f ؟

تطبيقات

55. موجة مياه طولها L أمتار في مياه عمقها d أمتار وسرعتها v وتحقق المعادلة

$$v^2 = \frac{4.9L}{\pi}\,\frac{e^{2\pi d/L}-e^{-2\pi d/L}}{e^{2\pi d/L}+e^{-2\pi d/L}}$$

إذا تعاملنا مع L كثابت واعتبرنا v^2 دالة $f(d)$. استخدم تقريبًا خطيًا لإثبات أن $f(d)\approx 9.8d$ مع القيم الصغيرة لـ d . أي أنه، مع الأعماق الصغيرة، تكون سرعة الموجة تقريبًا $\sqrt{9.8d}$ وتكون مستقلة عن طول الموجة L .

56. يوضح قانون بلانك أنه يمكن حساب كثافة طاقة إشعاع جسم أسود طول موجته x بالمعادلة

$$f(x)=\frac{8\pi hcx^{-5}}{e^{hc/(kTx)}-1}$$

استخدم التقريب الخطي في التمرين 44 لإثبات أن $f(x)\approx 8\pi kT/x^4$ ، والمعروف بقانون رايلي-جينس.

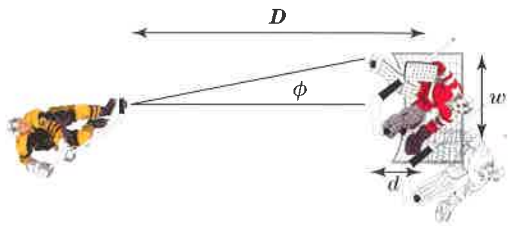
57. تقول نظرية الجاذبية التي وضعها نيوتن إن وزن الشخص على ارتفاع x قدم فوق مستوى سطح البحر يكون $W(x)=PR^2/(R+x)^2$ ، حيث P هو وزن الشخص عند مستوى سطح البحر و R نصف قطر الكرة الأرضية (تقريبًا 20,900,000 قدم). أوجد التقريب الخطي للدالة $W(x)$ عند $x=0$. استخدم التقريب الخطي لتقدير الارتفاع المطلوب لتخفيض وزن شخص وزنه 120 رطلًا بنسبة 1% .

58. أحد الجوانب المهمة في نظرية النسبية التي وضعها أينشتاين أن الكتلة غير ثابتة. إذا كان هناك شخص كتلته m_0 عند السكون، فإن كتلته ستساوي $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ عند السرعة v (حيث c سرعة الضوء). إذا اعتبرنا m كدالة للسرعة v ، فأوجد التقريب الخطي لـ $m(v)$ عند $v=0$. استخدم التقريب الخطي لإثبات أن الكتلة تكون ثابتة بشكل أساسي مع السرعات الصغيرة.

59. دودة براعم شجرة الراتينج الصنوبرية أحد أعداء شجرة البلسم. وفي أحد نماذج التفاعل بين هذه الكائنات الحية، تُمثّل الأعداد المحتملة على المدى الطويل من دودة البراعم حلول المعادلة $r(1-x/k)=x/(1+x^2)$ ، للثابتين الموجبين r و k . (a) أوجد كل الحلول الموجبة للمعادلة مع $r=0.5$ و $k=7$. (b) كرر هذا مع $r=0.5$ و $k=7.5$. لو كان هناك تغيّر صغير في الثابت البيئي k (من 7 إلى 7.5)، كيف كان سيتغيّر الحل؟ يقابل أكبر حل "الإصابة" بدودة براعم شجرة الراتينج الصنوبرية.

60. على فرض أن هناك استنساخًا لنوع ما كما يلي: مع الاحتمال p_0 ، كائن حي ليس له نتاج؛ مع الاحتمال p_1 ، كائن حي له نتاج واحد؛ مع الاحتمال p_2، كائن حي له نتاجان وهكذا. واحتمال أن ينقرض النوع يُعطَى بأصغر حل غير سالب للمعادلة $p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots=x$. أوجد الحلول الموجبة للمعادلتين $0.1+0.2x+0.3x^2+0.4x^3=x$ و $0.4+0.3x+0.2x^2+0.1x^3=x$. في ما يتعلق بالنوع الآخذ في الانقراض، اشرح بدلالة النوع لماذا حل المعادلة الأولى أصغر من حل المعادلة الثانية.

61. (a) في الرسم البياني، يظهر لاعب هوكي يبعد D أقدام عن الشبكة على المحور المركزي لحلبة التزلج. يحجب حارس المرمى قطعة مستقيمة عرضها w ويقف على مسافة d أقدام من الشبكة. يتم حساب زاوية التسديد على أحد جانبي حارس المرمى بالمعادلة $\phi=\tan^{-1}\left[\frac{3(1-d/D)-w/2}{D-d}\right]$. استخدم تقريبًا خطيًا لـ $\tan^{-1}x$ عند $x=0$ لإثبات أنه إذا كانت $d=0$ ، إذن $\phi\approx\frac{3-w/2}{D}$. وبناءً على هذا، وضّح طريقة تغير ϕ إذا كانت هناك زيادة في (i) w أو (ii) D .



تمرين 61

(b) اللاعب المسدد في الجزء (a) مفترض أنه في مركز حلبة التزلج. على فرض أن الخط من اللاعب إلى مركز المرمى يصنع زاوية θ مع خط المركز. ولكي يحجب الحارس المرمى بالكامل، عليه أن يقف على مسافة d أقدام من الشبكة حيث $d=D(1-w/6\cos\theta)$. اثبت أنه مع الزوايا الصغيرة، $d\approx D(1-w/6)$.

62. في نظرية النسبية التي وضعها أينشتاين، يعتمد طول الشيء على سرعته المتجهة. فإذا كان L_0 طول الشيء عند السكون، وكانت v سرعة الشيء المتجهة وكانت c سرعة الضوء، فإن صيغة انكماش لورنس لطول الشيء هي $L=L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$. وإذا اعتبرنا L كدالة للسرعة v ، فأوجد التقريب الخطي لـ L عند $v=0$.

تمارين استكشافية

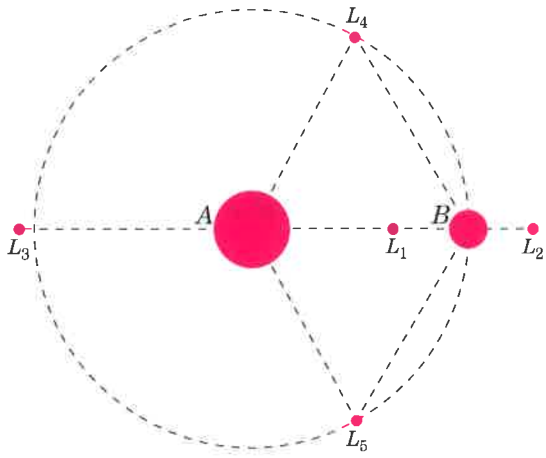
1. هناك سؤال مهم يتعلق بطريقة نيوتن وهو مدى سرعة تقاربها من صفر مُعطى. وبالحدس، يمكننا التمييز بين معدل التقارب للدالة $f(x)=x^2-1$ (مع $x_0=1.1$) ومعدل التقارب للدالة $g(x)=x^2-2x+1$ (مع $x_0=1.1$). ولكن كيف يمكننا قياس هذا؟ إحدى الطرائق هي أن نأخذ التقريبين المتتاليين x_n و x_{n-1} ونحسب الفارق $\Delta_n=x_n-x_{n-1}$. ولاكتشاف أهمية هذه الكمية، استخدم طريقة نيوتن مع $x_0=1.5$ ثم أوجد قيمة النسبة Δ_3/Δ_2 ، Δ_4/Δ_3 ، Δ_5/Δ_4 وهكذا، لكل دالة من الدوال التالية:

$$F_1(x)=(x-1)(x+2)^3=x^4+5x^3+6x^2-4x-8,$$
$$F_2(x)=(x-1)^2(x+2)^2=x^4+2x^3-3x^2-4x+4,$$
$$F_3(x)=(x-1)^3(x+2)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$$
$$F_4(x)=(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

في كل حالة، خمّن قيمة للنهاية $r=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$. إذا كانت النهاية موجودة ولا تساوي الصفر، نقول إن طريقة نيوتن **تتقارب خطيًا**. ما الرابط بين r وحسك الحدسي بمدى سرعة تقارب الطريقة؟ عندما تكون $f(x)=(x-1)^4$. نقول إن الصفر $x=1$ له **التكرار** 4. عندما تكون $f(x)=(x-1)^3(x+2)$ ، $x=1$ لها التكرار 3 وهكذا. ما الرابط بين r وتكرار الصفر؟ واستنادًا إلى هذا التحليل، لماذا

تتقارب طريقة نيوتن للدالة $f(x) = x^2 - 1$ أسرع منها للدالة $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ؟ أخيرًا، استخدم طريقة نيوتن لحساب المعدل r وضع فرضية تكرار الصفر $x = 0$ عندما تكون $f(x) = x \sin x$ و $g(x) = x \sin x^2$.

.2 يتناول هذا التمرين حالة خاصة لمسألة **الأجسام الثلاثة**. يكون فيها جسم كبير A كتلته m_A ، وجسم أصغر بكثير B كتلته $m_B \ll m_A$ وجسم C كتلته ضئيلة. (هنا، $m_B \ll m_A$ تعني أن a أصغر بكثير من m_A). افترض أن الجسم B يدور في مسار دائري حول مركز الكتلة المشترك. وهناك خمسة مدارات دائرية للجسم C الذي يحافظ على مواقع نسبية ثابتة من الأجسام الثلاثة. ويُطلق على هذه المواقع نقاط لاغرانج L_1، L_2، L_3، L_4، وL_5، كما هو موضح في الشكل.



لاشتقاق معادلات لنقاط لاغرانج، ارسم نظامًا إحداثيًا يكون فيه الجسم A عند نقطة الأصل والجسم B عند النقطة $(1, 0)$. إذن تكون L_1 عند النقطة $(x_1, 0)$ ، حيث x_1 هي حل المعادلة

$$(1 + k)x^5 - (3k + 2)x^4 + (3k + 1)x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

وتكون L_2 عند النقطة $(x_2, 0)$ ، حيث x_2 هي حل المعادلة

$$(1 + k)x^5 - (3k + 2)x^4 + (3k + 1)x^3 - (2k + 1)x^2 + 2x - 1 = 0$$

وتكون L_3 عند النقطة $(-x_3, 0)$ ، حيث x_3 هي حل المعادلة

$$(1 + k)x^5 + (3k + 2)x^4 + (3k + 1)x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

حيث $k = \frac{m_B}{m_A}$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الحلول التقريبية لما يلي.

(a) أوجد النقطة L_1 لنظام الأرض والشمس مع $k = 0\ 000002$. وهذه النقطة ترى الشمس بدون انقطاع وهي موقع المرصد الشمسي "سوهو".

(b) أوجد النقطة L_2 لنظام الأرض والشمس مع $k = 0.000002$. وهذه النقطة هي موقع مسبار قياس تباين خواص الموجات الدقيقة التابع لوكالة ناسا.

(c) أوجد النقطة L_3 لنظام الأرض والشمس مع $k = 0\ 000002$. وهذه النقطة لا تُرى من الأرض وهي موقع الكوكب X في العديد من حكايات الخيال العلمي.

(d) أوجد النقطة L_1 لنظام القمر والأرض مع $k = 0.01229$. تم اقتراح هذه النقطة كموقع جيد لمحطة فضاء للمساعدة في استعمار القمر.

(e) تشكّل النقطتان L_4 و L_5 مثلثين متساويي الأضلاع مع الجسمين A و B . اشرح لماذا يعني هذا أن الإحداثيات القطبية للنقطة L_4 تكون $(r, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$. أوجد الإحداثيين -(x, y) للنقطتين L_4 و L_5 . وفي نظام المشترى والشمس، تكون هذه النقاط هي مواقع العديد من **كويكبات طروادة**.

الدرس

6-2 الصيغ غير المعرّفة وقاعدة لوبيتال

في هذا الدرس، نعيد التفكير في مسألة حساب النهايات. لقد رأيت كثيرًا نهايات بالصيغة

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ أو حيث $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (أو $-\infty$). وتذكر أنه لأي صيغة من هذه الصيغ ($\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$، يُطلق عليها **الصيغة غير المعرّفة**)، لا يمكننا تحديد قيمة النهاية، أو حتى ما إذا كانت النهاية موجودة، من دون خطوات إضافية. على سبيل المثال، لاحظ أن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{1} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

و $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ غير موجودة

وعلى الرغم من ذلك فإن النهايات الثلاث لها مبدئيًا الصيغة $\frac{0}{0}$. الدرس هنا هو أن التعبير $\frac{0}{0}$ لا معنى له رياضيًا. فهو يشير فقط إلى أن كلًا من البسط والمقام يقتربان من الصفر وأننا سنحتاج إلى عمل خطوات إضافية لإيجاد قيمة النهاية أو للتحقق حتى مما إذا كانت النهاية موجودة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وبالمثل، لكل نهاية من النهايات التالية الصيغة غير المعرّفة $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)\left(\frac{1}{x^3}\right)}{(x^3+5)\left(\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{1}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+5)\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$

و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+3x-5)\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2+4x-11)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{11}{x^2}}=\frac{2}{1}=2.$$

بالتالي، كما هو الحال مع النهايات ذات الصيغة $\frac{0}{0}$، إذا كانت هناك نهاية بالصيغة $\frac{\infty}{\infty}$، يجب علينا عمل خطوات إضافية لتحديد قيمتها. لسوء الحظ، النهايات ذات الصيغ غير المعرّفة كثيرًا ما تكون أكثر صعوبة من تلك المعطاة مباشرة. لقد واجهتنا صعوبة مع النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (التي لها الصيغة $\frac{0}{0}$)، فوجدنا الحل مع فرضية هندسية معقدة. وفي حالة $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث، $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$ يمكننا استخدام التقريبات الخطية لاقتراح حل، كما يلي.

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للاشتقاق عند $x=c$، إذن فهما أيضًا متصلتان عند $x=c$. وبالتالي $f(c)=\lim_{x\to c}f(x)=0$ و $g(c)=\lim_{x\to c}g(x)=0$. ونحصل الآن على التقريبات الخطية

$$f(x)\approx f(c)+f'(c)(x-c)=f'(c)(x-c)$$

و

$$g(x)\approx g(c)+g'(c)(x-c)=g'(c)(x-c),$$

بما أن $f(c)=0$ و $g(c)=0$. كما رأينا، ينبغي أن يتحسن التقريب كلما اقتربت x من c. وبالتالي سنتوقع المعادلة التالية عند وجود النهايات.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)(x-c)}{g'(c)(x-c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

على فرض أن $g'(c)\neq 0$. لاحظ أنه إذا كانت الدالتان $f'(x)$ و $g'(x)$ متصلتين عند $x=c$ و $g'(c)\neq 0$، إذن $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. وهذا يؤدي إلى النتيجة التالية.

النظرية 2.1 (قاعدة لوبيتال)

على فرض أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق في الفترة (a, b)، باستثناء ربما عند النقطة $c\in(a, b)$ وأن $g'(x)\neq 0$ في الفترة (a, b)، باستثناء ربما عند النقطة c. على فرض أن $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ لها الصيغة غير المعرّفة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وأن $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ (أو $\pm\infty$). إذن،

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

تنبيه

سنكرر كتابة $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ بجوار التعبير. على سبيل المثال،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

تستخدم هذه الكتابة المختصرة للإشارة إلى أن النهاية لها الصيغة غير المعرّفة المشار إليها. وهذا الرمز لا يعني أن قيمة النهاية هي $\frac{0}{0}$. وينبغي لك الحرص على تجنب كتابة $\lim_{x\to a}f(x)=\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$، لأن هذه التعابير لا معنى لها.

ملاحظات تاريخية

غييوم دي لوبيتال (1661-1704)

عالِم الرياضيات الفرنسي الذي نشر لأول مرة النتيجة التي تُعرف الآن باسم قاعدة لوبيتال. تعلّم لوبيتال، الذي وُلِد لعائلة من النبلاء، حساب التفاضل والتكامل على يد عالم الرياضيات اللامع يوهان برنولي الذي يُعتقد بأنه من اكتشف القاعدة التي تحمل اسم راعيه.

يشتهر عالم الرياضيات المختص لوبيتال بأنه مؤلف أول كتاب علمي عن حساب التفاضل والتكامل. كان لوبيتال صديقًا وراعيًا للعديد من كبار علماء الرياضيات في القرن السابع عشر.

البرهان

هنا، نبرهن فقط الحالة $\frac{0}{0}$ حيث f, f', g و g' كلها متصلة في كل الفترة (a, b) و $g'(c) \neq 0$، بينما سنترك الحالة الأكثر تعقيدًا $\frac{0}{0}$ للملحق A. أولًا، تذكر الصيغة البديلة لتعريف الاشتقاق:

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

لو عكسنا الخطوات، نتوصل من خلال الاتصال إلى أن

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}.$$

أيضًا، بما أن f و g متصلتان عند $x = c$، نتوصل إلى أن

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(c) = \lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

والآن يتبع ذلك أن

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

وهو المطلوب. ■

تركنا برهان الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ لدروس أكثر تقدمًا.

ملحوظة 2.1

الاستنتاج من النظرية 2.1 يثبت أيضًا أنه من الممكن استبدال $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ بأي نهاية من النهايات $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}$، $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)}{g(x)}$، $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. (في كل حالة، يجب إدخال التعديلات المناسبة على الفرضيات.)

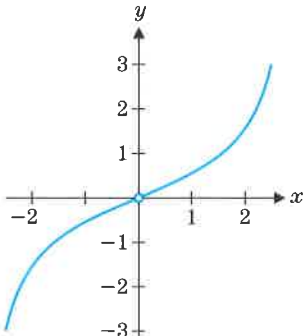
مثال 2.1 الصيغة غير المعرّفة $\frac{0}{0}$

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

الحل هذه النهاية لها الصيغة غير المعرّفة $\frac{0}{0}$. وكل من $(1-\cos x)$ و $\sin x$ متصلتان وقابلتان للاشتقاق في مجالهما. أيضًا، $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \neq 0$ في فترة ما تتضمن $x = 0$. (هل يمكنك تحديد تلك الفترة؟) من التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ في الشكل 6.14، يظهر أن $f(x) \to 0$، عندما $x \to 0$. يمكننا إثبات هذا باستخدام قاعدة لوبيتال، كما يلي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}(1-\cos x)}{\dfrac{d}{dx}(\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

قاعدة لوبيتال سهلة التطبيق على حدٍ سواء مع النهايات ذات الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$. ■



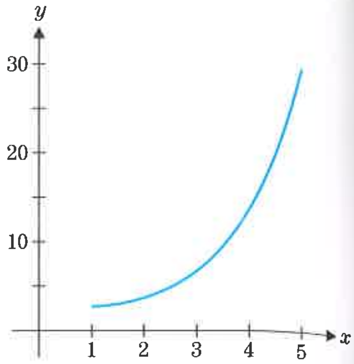
الشكل 6.14
$y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

مثال 2.2 الصيغة غير المعرّفة $\frac{\infty}{\infty}$

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$.

الحل هذه النهاية لها الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ ومن التمثيل البياني في الشكل 6.15، يظهر أن الدالة تكبر أكثر وأكثر، بدون حدود، كما $x \to \infty$. يثبت تطبيق قاعدة لوبيتال شكوكنا، حيث

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$



الشكل 6.15

$y = \frac{e^x}{x}$

مع بعض النهايات، قد تحتاج إلى تطبيق قاعدة لوبيتال بشكل متكرر. فقط احرص على التثبّت من صحة الفرضيات في كل خطوة.

مثال 2.3 نهاية تتطلب تطبيق قاعدة لوبيتال مرتين

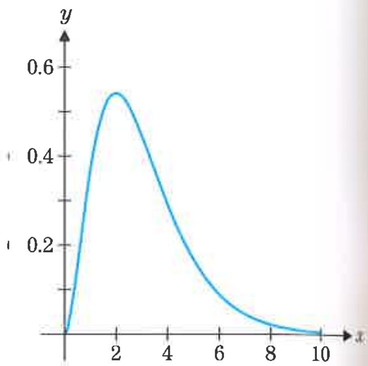
أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

الحل أولًا، لاحظ أن هذه النهاية لها الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$. من التمثيل البياني في الشكل 6.16، يبدو أن الدالة تقترب من 0 كلما $x \to \infty$. وبتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نحصل على

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

كما توقعنا.



الشكل 6.16

$y = \frac{x^2}{e^x}$

ملحوظة 2.2

من الأخطاء الشائعة جدًا تطبيق قاعدة لوبيتال من دون أن نتحقق أولًا من أن النهاية لها الصيغة غير المعرّفة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$. كما يُخطئ الطلاب أحيانًا في حساب مشتقة ناتج القسمة، بدلًا من ناتج قسمة المشتقات. انتبه لهذا جيدًا.

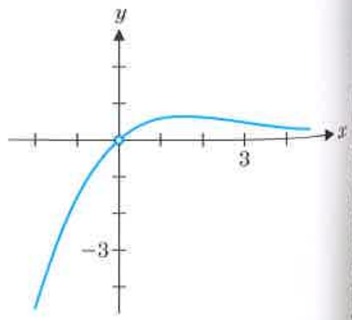
مثال 2.4 الاستخدام الخاطئ لقاعدة لوبيتال

أوجد الخطأ في سلسلة المعادلات

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{1} = 2$$ هذا غير صحيح

الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.17، يمكننا أن نرى أن النهاية تقريبًا 0. وبالتالي فإن النهاية 2 تبدو خطأ. النهاية الأولى، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$، لها الصيغة $\frac{0}{0}$ والدالتان $f(x) = x^2$ و $g(x) = e^x - 1$ تحققان فرضية قاعدة لوبيتال. لذلك، تصح المعادلة الأولى $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{e^x}$. لكن، لاحظ أن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$ وقاعدة لوبيتال لا تنطبق هنا. وعليه تكون القيمة الصحيحة

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$



الشكل 6.17

$y = \frac{x^2}{e^x - 1}$

في بعض الأحيان يجب أن يكون تطبيق قاعدة لوبيتال متبوعًا بتبسيط، كما نرى في المثال 2.5.

مثال 2.5 تبسيط الصيغة غير المعرّفة $\frac{\infty}{\infty}$

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$

الحل أولًا، لاحظ أن هذه النهاية لها الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$. من التمثيل البياني في الشكل 6.18، يظهر أن الدالة تقترب من 0 عندما $x \to 0^+$. وبتطبيق قاعدة لوبيتال، نحصل على

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\csc x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

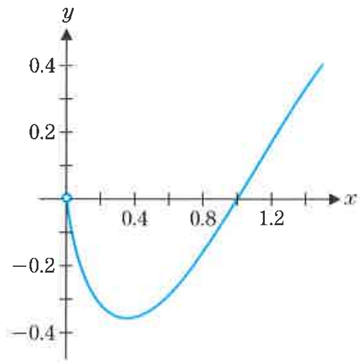
هذه النهاية الأخيرة لا تزال لها الصيغة غير المعرّفة $\frac{\infty}{\infty}$. ولكن بدلًا من تطبيق قاعدة لوبيتال مرة ثانية، لاحظ أننا يمكننا إعادة كتابة التعبير. لدينا

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\sin x}{x} \tan x\right) = (-1)(0) = 0,$$

كما توقعنا، حيث استخدمنا حقيقة أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(يمكنك أيضًا إثبات هذا باستخدام قاعدة لوبيتال). لاحظ أننا لو كنا ببساطة واصلنا تطبيق قاعدة لوبيتال مرة أخرى على $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$، لعجَزنا عن حل النهاية مطلقًا. (لم لا؟) ■



الشكل 6.18

$y = \frac{\ln x}{\csc x}$

الصيغ غير المعرّفة الأخرى

ثمة خمس صيغ غير معرّفة أخرى علينا دراستها: ∞^0 و $1^\infty, 0^0, 0\cdot\infty, \infty - \infty$. ألق نظرة عن كثب على كل صيغة من هذه الصيغ لمعرفة لماذا تُعدّ غير معرّفة. عند حساب قيمة نهاية من هذا النوع، يتمثل الهدف من ذلك في تحويله بطريقة ما إلى إحدى الصيغتين غير المعرّفتين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وهي الحالة التي يمكننا عندها تطبيق قاعدة لوبيتال.

مثال 2.6 تبسيط الصيغة غير المعرّفة $\infty - \infty$

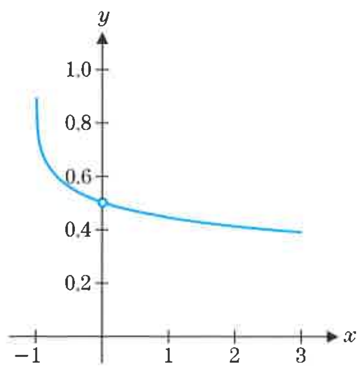
أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right]$

الحل في هذه الحالة، النهاية لها الصيغة $(\infty - \infty)$. ومن التمثيل البياني في الشكل 6.19، يظهر أن النهاية في مكان ما حول النقطة 0.5. إذا جمعنا الكسور، نحصل على صيغة يمكننا تطبيق قاعدة لوبيتال عليها. لدينا

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[x - \ln(x+1)]}{\frac{d}{dx}[\ln(x+1)x]} \quad \text{باستخدام قاعدة لوبيتال.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\left(\frac{1}{x+1}\right)x + \ln(x+1)(1)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$



الشكل 6.19

$y = \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$

بدلًا من تطبيق قاعدة لوبيتال على هذا التعبير الأخير، نقوم أولًا بتبسيط التعبير، بضرب البسط والمقام في $(x+1)$. لدينا الآن

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)x+\ln(x+1)(1)}\left(\frac{x+1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-1}{x+(x+1)\ln(x+1)}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{d}{dx}(x)}{\dfrac{d}{dx}[x+(x+1)\ln(x+1)]}$$ باستخدام قاعدة لوبيتال

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+(1)\ln(x+1)+(x+1)\dfrac{1}{(x+1)}}=\frac{1}{2},$$

التي تتوافق مع الشكل 6.19.

مثال 2.7 الصيغة غير المعرّفة $\infty\cdot0$

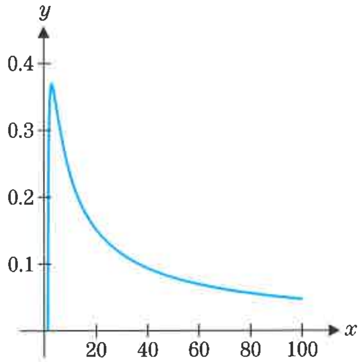
أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)$

الحل هذه النهاية لها الصيغة غير المعرّفة $(\infty\cdot0)$. من التمثيل البياني في الشكل 6.20. يظهر أن الدالة تتناقص ببطء شديد باتجاه 0 عندما $x\to\infty$. ومن السهل إعادة كتابة هذه النهاية بالصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نُطبّق قاعدة لوبيتال. لاحظ أن

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}\ln x}{\dfrac{d}{dx}x}$$ باستخدام قاعدة لوبيتال

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$



الشكل 6.20

$y=\dfrac{1}{x}\ln x$

ملاحظة: إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}$ لها إحدى الصيغ غير المعرّفة $0^0,\infty^0$ أو 1^∞. إذن، لنأخذ $y=[f(x)]^{g(x)}$. وعندما تكون $f(x)>0$، يكون لدينا

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln[f(x)]$$

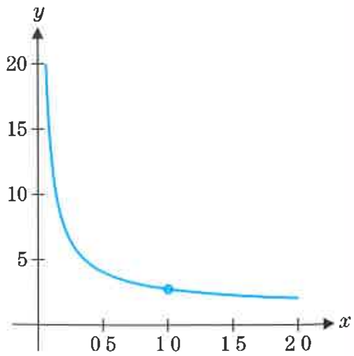
وبالتالي $\lim\limits_{x\to c}\ln y=\lim\limits_{x\to c}\{g(x)\ln[f(x)]\}$ ستكون لها الصيغة غير المعرّفة $\infty\cdot0$. والتي يمكن التعامل معها كما في المثال 2.7.

مثال 2.8 الصيغة غير المعرّفة 1^∞

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to1^+}x^{\frac{1}{x-1}}$

الحل أولًا، لاحظ أن هذه النهاية لها الصيغة (1^∞). ومن التمثيل البياني في الشكل 6.21. يظهر أن النهاية في مكان ما حول النقطة 3. نُعرّف $y=x^{\frac{1}{x-1}}$، وبالتالي

$$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{x-1}\ln x$$



الشكل 6.21

$y=x^{\frac{1}{x-1}}$

نفكر الآن في النهاية

$$\lim_{x\to1^+} \ln y = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1}\ln x \quad (\infty\cdot 0)$$

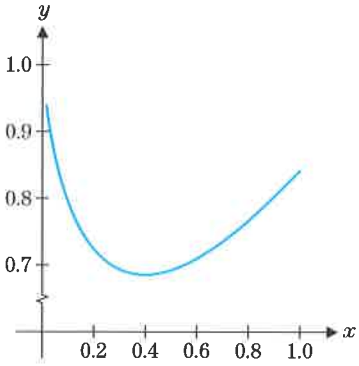
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^{-1}}{1} = 1$$ باستخدام قاعدة لوبيتال

انتبه، لقد وجدنا أن $\lim_{x\to1^+} \ln y = 1$، ولكن هذه ليست النهاية الأصلية. نريد إثبات أن

$$\lim_{x\to1^+} y = \lim_{x\to1^+} e^{\ln y} = e^1$$

والتي تتوافق مع الشكل 6.21. ■



الشكل 6.22
$y = (\sin x)^x$

غالبًا ما يحتاج حساب النهايات إلى تطبيق قاعدة لوبيتال عدة مرات. فقط انتبه (على وجه الخصوص، تثبّت من صحة الفرضيات في كل خطوة) ولا تغفل عن المسألة الأصلية.

مثال 2.9 الصيغة غير المعرّفة 0^0

أوجد قيمة $\lim_{x\to0^+} (\sin x)^x$

الحل هذه النهاية لها الصيغة غير المعرّفة (0^0). وفي الشكل 6.22، يظهر أن النهاية في مكان ما حول النقطة 1. وعلى فرض أن $y = (\sin x)^x$، فإن

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln(\sin x)$$

فكّر الآن في النهاية

$$\lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} \ln(\sin x)^x = \lim_{x\to0^+} [x\ln(\sin x)] \quad (0\cdot\infty)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(\sin x)]}{\frac{d}{dx}(x^{-1})}$$ باستخدام قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-x^{-2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

كما رأينا في السابق، ينبغي أن نُعيد كتابة التعبير قبل المتابعة. هنا، نضرب البسط والمقام في $x^2 \sin x$ لنحصل على

$$\lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-x^{-2}} \left(\frac{x^2\sin x}{x^2\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x^2\cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{d}{dx}(-x^2\cos x)}{\frac{d}{dx}(\sin x)}$$ باستخدام قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-2x\cos x + x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

اليوم في الرياضيات

فوكاز جونز (1952)
عالم رياضيات نيوزيلندي ارتبط عمله على ما يبدو بالمناطق المنفصلة في الرياضيات. وقد حصل على جائزة وسام فيلدز عام 1990 في الرياضيات؛ حيث وصفه نظراؤه "بالمذهل". أحد إنجازاته الرئيسة اكتشافه في نظرية العقدة والذي منح علماء الأحياء الفرصة لفهم تكرار الحمض النووي بشكل أعمق. وجونز، الذي يُعد أحد الداعمين الأقوياء للعلوم والرياضيات في نيوزيلندا، له أسلوب عمل غير رسمي، فهو يُشجع على تبادل الأفكار بشكل حر ومنفتح... وانفتاحه وسخاؤه بهذا الشأن كان بأفضل تقاليد علم الرياضيات وروحها". لقد مثّلت أفكاره "مصدرًا غنيًا بالأفكار لعمل الآخرين".

مرة أخرى، لم نجد النهاية الأصلية بعد. لكن،

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

والتي تتوافق مع الشكل 6.22.

مثال 2.10 الصيغة غير المعرّفة ∞^0

أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty} (x+1)^{2/x}$

الحل هذه النهاية لها الصيغة غير المعرّفة (∞^0). من التمثيل البياني في الشكل 6.23، يبدو أن الدالة تقترب من 1 كلما $x\to\infty$. لنأخذ $y=(x+1)^{2/x}$ نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln (x+1)^{2/x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{x}\ln (x+1)\right] \quad (0\cdot\infty)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2\ln(x+1)]}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x+1)^{-1}}{1}$$

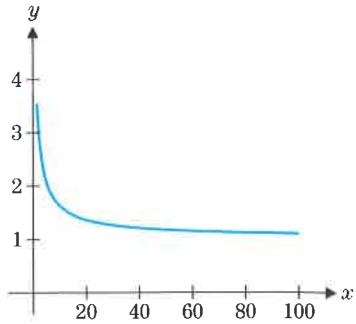
باستخدام قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

الآن لدينا

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

كما توقعنا.



الشكل 6.23
$y=(x+1)^{2/x}$

تمارين 6.2

تمارين كتابية

1. تقول قاعدة لوبيتال إنه، في بعض الحالات، تقترب نسب قيم الدوال من النهايات نفسها التي تقترب منها نسب المشتقات المقابلة (معدلات التغيّر). من الناحية البيانية، قد يصعب فهم هذا. للمساعدة على فهم هذا، لنأخذ $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث إن كلًا من $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$ دالتان خطيتان. اشرح لماذا ينبغي أن تتبع قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ على القيم النسبية لميول الخطوط؛ بمعنى، ينبغي أن تساوي $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. فكّر في النهاية 0 على أنها تعني بالفعل "صغيرة جدًا" والنهاية ∞ على أنها تعني "كبيرة جدًا". ناقش ما إذا كانت صيغ النهايات التالية غير معرّفة أم لا واشرح إجابتك: $0^\infty, \infty^0, \infty\cdot\infty, 0\cdot\infty, \frac{1}{0}, \infty-\infty$ و 0^0.

3. صديق لك يواجه صعوبة في تطبيق قاعدة لوبيتال. وعندما طُلب منه حل مسألة، قال، "أولًا، سأعوض عن x وأحصل على بسط 0 فوق مقام 0. ثم سأستخدم قاعدة ناتج القسمة لأخذ المشتقة. ثم سأعيد استخدام x." اشرح لصديقك ما الخطأ وكيفية تصحيحه.

4. على فرض أن اثنين من المتسابقين يبدؤون سباقًا من خط البداية، مع انطلاق أحد المتسابقين مبدئيًا بسرعة ضعف سرعة المتسابق الآخر. إذا كانت $f(t)$ و $g(t)$ تمثلان مواقع المتسابقين عند الزمن $t\ge 0$، اشرح لماذا يمكننا افتراض أن $f(0)=g(0)=0$ و $\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t)}{g'(t)}=2$. اشرح، بدلالة مواقع المتسابقين، لماذا تصلح قاعدة لوبيتال، بمعنى أن $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=2$.

في التمارين 1–40، أوجد النهايات المعطاة.

1. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2-4}$
4. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$
5. $\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}$
6. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^{3t}-1}$
7. $\lim_{t\to 0}\frac{\tan^{-1} t}{\sin t}$
8. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin^{-1} t}$
9. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}$
10. $\lim_{x\to -1}\frac{\cos^{-1} x}{x^2-1}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$
13. $\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$
14. $\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sin 2x}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\tan x + \frac{1}{x-\pi/2}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

23. $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t}$

24. $\lim\limits_{t\to\infty} t\sin(1/t)$

25. $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$

26. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x - x)$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{x+1}{x-2}\right|^{\sqrt{x^2-4}}$

35. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$

36. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

37. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x)^x$

38. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

39. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{t-3}{t+2}\right)^t$

40. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{t-3}{2t+1}\right)^t$

في التمارين 41–44، أوجد كل الأخطاء.

41. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{2/x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{-2/x^2}$
$= \lim\limits_{x\to 0} (-x^2) = 0.$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$

في التمارين 45–48، عيِّن الطريقة بتحديد ما إذا كان ينبغي استخدام طريقة لوبيتال أم لا .

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\csc x}{\sqrt{x}}$

46. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-3/2}}{\ln x}$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{\tan^{-1} x}$

48. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{e^{x/3}}$

49. (a) بالبدء مع $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$، اختصر sin للحصول على $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{2x}$، ثم اختصر قيم x للحصول على $\frac{3}{2}$. هذه الإجابة صحيحة. هل أي خطوة من الخطوات المستخدمة صالحة؟ استخدم التقريبات الخطية لمحاولة البرهنة على أن الخطوة الأولى ستعطي إجابة صحيحة على الأرجح.

(b) أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}$ للثابتين n و m اللذين لا يساويان صفرًا.

50. (a) أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ وقارن نتيجتك بـ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

(b) أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$ وقارن نتيجتك بـ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

(c) استخدم نتائجك من الجزأين (a) و (b) لإيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^3}{x^6}$ من دون إجراء أي عمليات حسابية.

51. أوجد الدالة f حيث $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ لها الصيغة غير المعرّفة $\frac{\infty}{\infty}$، ولكن حيث لا توجد النهاية (a)؛ و(b) تساوي 0؛ و(c) تساوي 3 و(d) تساوي -4.

52. أوجد الدالة f حيث $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ لها الصيغة غير المعرّفة $\infty - \infty$. ولكن حيث لا توجد النهاية (a)؛ و(b) تساوي 0 و(c) تساوي 2.

في التمرينين 53 و 54، حدد الدالة التي "تهيمن" عندما نقول إن الدالة f تهيمن على g عندما $x \to \infty$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

53. e^x أو x^n ($n =$ أي عدد صحيح موجب)

54. $\ln x$ أو x^p (لأي عدد $p > 0$)

55. استنادًا إلى إجابتك في التمرين 53، خمّن $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{t/2} - t^3)$ وبرهن على صحة تخمينك.

56. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{-\sqrt{x}}$. وعلى المدى البعيد، ما كسر $\sqrt{x}$ الذي تمثله $\sqrt{x} - \ln x$؟

57. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+2x+1)}{\ln(x^2+x+2)}$. عمّم إجابتك على $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(p(x))}{\ln(q(x))}$ لكثيرات الحدود p و q حيث $p(x) > 0$ و $q(x) > 0$ عندما تكون $x > 0$

58. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x}+x)}{\ln(e^{2x}+4)}$. عمّم إجابتك على $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{kx}+p(x))}{\ln(e^{cx}+q(x))}$ لكثيرات الحدود p و q والعددين الموجبين k و c.

59. إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$، ما الذي يمكن قوله عن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{g(x^2)}$. واشرح لماذا معرفة أن $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ عندما تكون $a \neq 0, 1$ لا يفيدك بأي شيء عن $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x^2)}{g(x^2)}$.

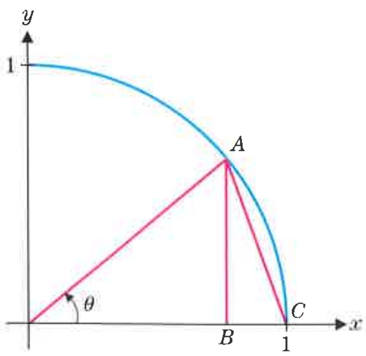
60. أعطِ مثالًا للدالتين f و g اللتين توجد لهما النهاية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{g(x^2)}$، ولا توجد لهما النهاية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

تطبيقات

61. في السابق ناقشنا بإيجاز موضع كرة بيسبول أُلقيت بقذفة بطيئة السرعة على غير العادة. الموضع الأيسر/الأيمن (بالأقدام) لكرة قُذفت بمعدل دوران ω وبمسكة معينة عند زمن t ثوانٍ هو $f(\omega) = (2.5/\omega)t\ (2\ 5/4\omega^2) \sin 4\omega t$. وإذا اعتبرنا t ثابتًا واعتبرنا ω المتغير (غيّر إلى x إذا رغبت في ذلك). أثبت أن $\lim\limits_{\omega \to 0} f(\omega) = 0$ t لأي قيمة للزمن t. (ارشاد: أوجد المقام المشترك واستخدم قاعدة لوبيتال). استنتج أن المسكة التي لا يوجد بها دوران لا تتحرك يسارًا أو يمينًا على الإطلاق.

62. في هذا التمرين، ننظر إلى قذفة بطيئة السرعة قُذفت بمسكة مختلفة عن تلك الموجودة في التمرين 61. الموضع الأيسر أو الأيمن (بالأقدام) لكرة قُذفت بمعدل دوران ω وبهذه المسكة الجديدة عند زمن t ثوانٍ هو $f(\omega) = (2.5/4\omega^2) - (2.5/4\omega^2) \sin (4\omega t + \pi/2)$. وإذا اعتبرنا t ثابتًا واعتبرنا ω المتغير (غيّر إلى x إذا رغبت في ذلك). فأوجد $\lim\limits_{\omega \to 0} f(\omega)$. ينبغي أن تعتمد إجابتك على t. بالتمثيل البياني لدالة الزمن t، يمكنك رؤية مسار المسكة (استخدم المجال $0 \le t \le 0.68$). صِف هذه المسكة.

63. في الشكل الموضح ادناه، يتحدد مقطع من دائرة الوحدة بالزاوية θ. المنطقة 1 هي المثلث ABC. المنطقة 2 تحدّها القطعتان المستقيمتان AB و BC وقوس من الدائرة. كلما تناقصت الزاوية θ، تناقص الفرق بين المنطقتين كذلك. قد تتوقع أن تصبح مساحتا المنطقتين متساويتين تقريبًا. وفي تلك الحالة تقترب نسبة المساحتين من 1. لرؤية ما يحدث حقًا، أثبت أن ناتج قسمة مساحة المنطقة 1 على مساحة المنطقة 2 يساوي $\dfrac{\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta}{\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta} = \dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta - \cos\theta\sin\theta}$ وأوجد نهاية هذا التعبير كلما $\theta \to 0$. مفاجأة!



تمرين 63

64. يتمدد حجم بؤبؤ عين حيوان ما وينكمش حسب كمية الضوء المتاحة. على فترض أن $f(x) = \dfrac{160x^{-0.4} + 90}{8x^{-0.4} + 10}$ حجم بؤبؤ العين بوحدة القياس mm عندما تكون شدة الإضاءة x. أوجد $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ وحاول أن تبرهن على أنهما يمثلان أكبر وأصغر حجمين ممكنين لبؤبؤ العين، على التوالي.

65. سرعة هبوط لاعب قفز حر كتلته m تؤثر عليه الجاذبية وسحب الهواء هي $v = \sqrt{40\ \text{mg}} \tanh\left(\sqrt{\dfrac{g}{40\ \text{m}}}\, t\right)$. أوجد (a) $\lim\limits_{t \to \infty} v$ و (b) $\lim\limits_{m \to 0^+} v$ و (c) $\lim\limits_{m \to \infty} v$ واذكر ما الذي تمثله كل نهاية في ما يتعلق بلاعب القفز الحر.

66. تتناسب قوة تلسكوب عاكس مع مساحة السطح S لعاكس قطع مكافئ، مع $S = \dfrac{8\pi}{3} c^2 \left[\left(\dfrac{t^2}{16c^2} + 1\right)^{3/2} - 1\right]$ للعدد c و d. أوجد $\lim\limits_{c \to \infty} S$.

تمرينات استكشافية

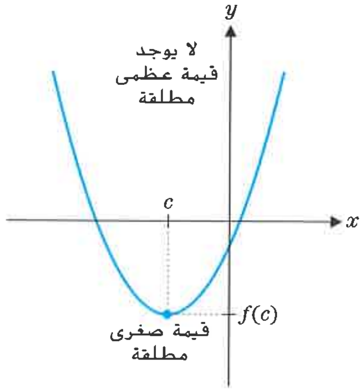
1. في هذا التمرين، تلقِ نظرة سريعة على ما نسميه متسلسلة تايلور في الوحدة 8. ابدأ بالنهاية $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. واشرح بإيجاز لماذا هذا يعني ذلك عندما تكون x قريبة من 0، $\sin x \approx x$. وأثبت أن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$. هذا يعني أنه إذا كانت x قريبة من 0، إذن $\sin x - x \approx -\dfrac{1}{6}x^3$ أو $\sin x \approx x - \dfrac{1}{6}x^3$. مثِّل بيانيًا هاتين الدالتين لرؤية مدى جودة تطابقهما. للاستمرار، أوجد قيمة $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - (x - x^3/6)}{x^4}$ و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - f(x)}{x^5}$ للوصول إلى التقريب المناسب $f(x)$. وعند هذه النقطة، انظر إلى نمط المصطلحات لديك (إرشاد: $3! = 6$ و $5! = 120$). باستخدام هذا النمط، قرِّب $\sin x$ باستخدام كثيرة حدود من الدرجة 11 ومثِّل الدالتين بيانيًا.

2. صفر الدالة $f(x)$ هو حل المعادلة $f(x) = 0$ ومن الواضح أنه ليس كل الأصفار يتم إنشاؤها متساوية. على سبيل المثال، $x = 1$ هو صفر الدالة $f(x) = x - 1$. ولكن بطرق معينة، ينبغي حساب $f(x) = (x-1)^2$ كصفرين للدالة $f(x) = (x-1)^2$. ولتحديد هذا، نقول إن $x = 1$ صفر له التكرار 2 للدالة $f(x) = (x-1)^2$. التعريف الدقيق هو: $x = c$ هو له التكرار n للدالة $f(x)$ إذا كانت $f(c) = 0$ وكانت النهاية $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{(x-c)^n}$ موجودة ولا تساوي صفرًا. بناءً عليه، فإن $x = 0$ هي صفر له التكرار 2 لـ $x \sin x$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ .e أوجد تكرار كل صفر للدوال التالية: $x^2 \sin x, x \sin x^2, x^4 \sin x^3, (x-1)\ln x, \ln(x-1)^2, e^x - 1$ و $\cos x - 1$.

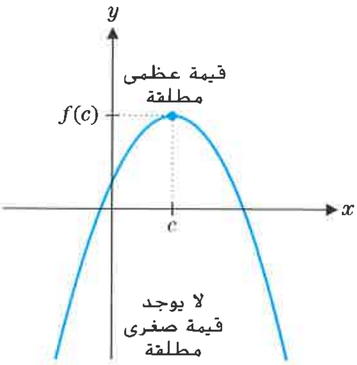
6-3 القيم العظمى والصغرى

يجب على إحدى الشركات، كي تبقى قادرة على المنافسة، أن تقوم بانتظام بتقييم كيفية تقليص النفايات إلى أقل كمية ممكنة وزيادة عائدات الاستثمار إلى أعلى قيمة ممكنة. وفي هذا الدرس، نفكِّر في مسألة إيجاد القيم العظمى والصغرى للدوال. وفي الدرس 6.7، نختبر كيفية تطبيق هذه الرموز على المسائل ذات الطابع التطبيقي.

وسنبدأ بتقديم تعريفات رياضية متأنية لبعض المصطلحات المألوفة.



الشكل 6.24a



الشكل 6.24b

> **تعريف 3.1**
>
> بالنسبة إلى الدالة f المُعرَّفة في مجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$
>
> (i) $f(c)$ هي **القيمة العظمى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$ و
>
> (ii) $f(c)$ هي **القيمة الصغرى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.
>
> القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة يُشار إليها بـ **القيمة القصوى** المطلقة. (وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي **القيم القصوى**).

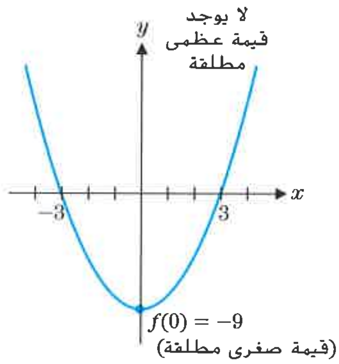
أول سؤال قد تطرحه يدور حول ما إذا كانت كل دالة لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة. والإجابة هي لا. كما يمكننا أن نرى من الشكلين 6.24a و6.24b.

مثال 3.1 القيم العظمى والصغرى المطلقة

(a) حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $(-\infty, \infty)$ (b) حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $(-3, 3)$. (c) حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $[-3, 3]$.

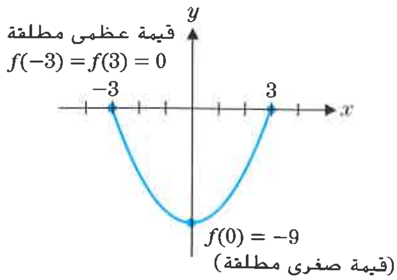
الحل (a) في الشكل 6.25 لاحظ أن الدالة f لها القيمة الصغرى المطلقة $f(0) = -9$ ولكن ليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(b) في الشكل 6.26a نرى أن الدالة f لها القيمة الصغرى المطلقة $f(0) = -9$. قد يكون رد فعلك الأولي أن تقول أن الدالة f قيمتها العظمى المطلقة هي 0. ولكن $f(x) \neq 0$ مع أي $x \in (-3, 3)$ لأنها فترة مفتوحة. ولهذا السبب، لا توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة f في الفترة $(-3, 3)$.



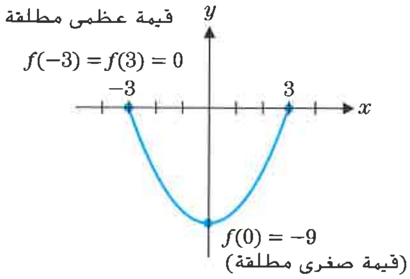
الشكل 6.25

$y = x^2 - 9$ on $(-\infty, \infty)$



الشكل 6.26a

$y = x^2 - 9$ on $[-3, 3]$



الشكل 6.26b

$y = x^2 - 9$ on $[-3, 3]$

(c) في هذه الحالة، تكون نقطتا النهاية 3 و -3 في الفترة $[-3, 3]$. هنا، تفترض الدالة f قيمتها العظمى المطلقة عند نقطتين: $f(3) = f(-3) = 0$ (انظر الشكل 6.26b). ■

لقد رأينا أن الدالة قد يكون لها قيم قصوى مطلقة وقد لا يكون. وفي المثال 3.1، أخفقت الدالة في أن يكون لها قيمة عظمى مطلقة، باستثناء في الفترة المغلقة $[-3, 3]$. يوفر لنا المثال 3.2 قطعة أخرى من الأحجية.

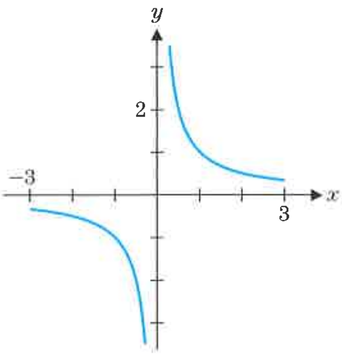
مثال 3.2 الدالة التي ليس لها قيمة عظمى أو صغرى مطلقة

حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = 1/x$ في $[-3, 0) \cup (0, 3]$.

الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.27، الواضح أن الدالة f أخفقت في أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى مطلقة في الفترة $[-3, 0) \cup (0, 3]$. ويبيّن الجدول التالي لقيم الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 0، الاستنتاج نفسه.

x	$1/x$
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
0.00001	100,000
0.000001	1,000,000

x	$1/x$
−1	−1
−0.1	−10
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10,000
−0.00001	−100,000
−0.000001	−1,000,000



الشكل 6.27

$y = 1/x$

أوضح اختلاف بين الدالتين في المثالين 3.1 و3.2 هو أن الدالة $f(x) = 1/x$ ليست متصلة في الفترة $[-3, 3]$. ونحن نقدم النظرية التالية بدون برهان.

نظرية 3.1 (نظرية القيم القصوى)

الدالة المتصلة f المُعرَّفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة.

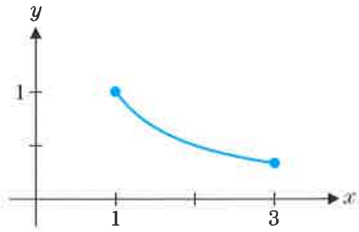
ورغم أننا لسنا بحاجة للحصول على دالة متصلة أو فترة مغلقة لتحقيق قيمة قصوى مطلقة، تقول النظرية 3.1 إن الدوال المتصلة تضمن تحقيق القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة في الفترات المغلقة.

وفي المثال 3.3، سنعيد النظر مرة أخرى في الدالة من المثال 3.2، ولكنها تبدو في فترة مختلفة.

مثال 3.3 إيجاد قيمة قصوى مطلقة لدالة متصلة

أوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x) = 1/x$ في الفترة $[1, 3]$.

الحل لاحظ أنه في الفترة $[1, 3]$ الدالة f متصلة. بالتالي، تؤكد نظرية القيم القصوى على أن الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في الفترة $[1, 3]$ وبالعودة إلى التمثيل البياني في الشكل 6.28، يبدو أن الدالة $f(x)$ تصل إلى قيمتها العظمى 1 عند $x = 1$ وقيمتها الصغرى $1/3$ عند $x = 3$.



الشكل 6.28

$y = 1/x$ on $[1, 3]$

هدفنا هو تحديد كيف نعيّن مكان القيم القصوى المطلقة لدالة معينة. قبل القيام بهذا، نحتاج إلى التفكير في نوع آخر من القيمة القصوى.

التعريف 3.2

(i) $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

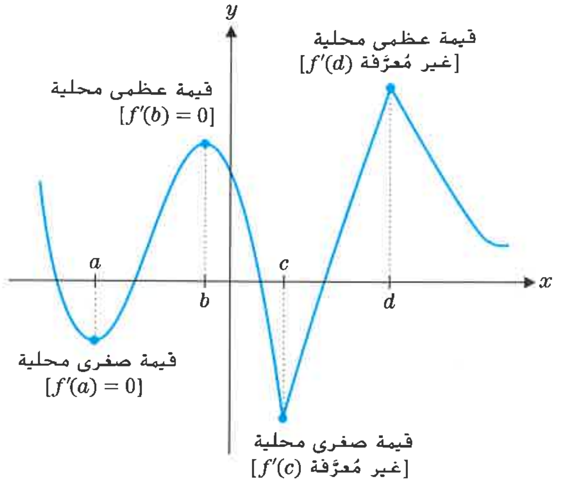
(ii) $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

في كلتا الحالتين نطلق على $f(c)$ قيمة قصوى محلية للدالة f.

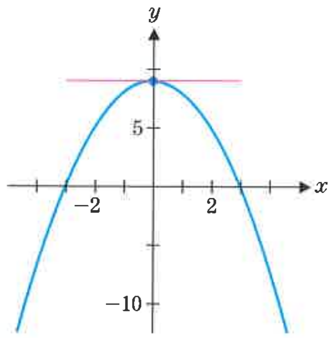
ملحوظة 3.1

في بعض الأحيان يُشار إلى القيم العظمى والصغرى المحلية (صيغ الجمع للقيمة العظمى والصغرى **على التوالي**) بالقيم العظمى والصغرى النسبية، على التوالي.

لاحظ من الشكل 6.29 أن كل قيمة قصوى محلية تتحقق إما عند نقطة يكون فيها لمنحنى $f(x)$ المماس أفقيًا [أي أن $f'(x)=0$]، أو عند نقطة يكون فيها المماس رأسيًا [حيث $f'(x)$ غير مُعرَّفة] أو عند رأس مدبب [مرة أخرى، حيث $f'(x)$ غير مُعرَّفة]. ويمكننا رؤية هذا السلوك بوضوح تام في المثالين 3.4 و3.5.



الشكل 6.29
القيم القصوى المحلية

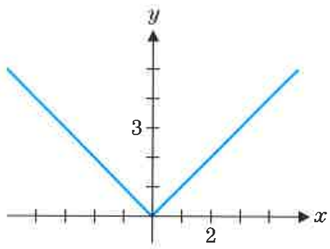


الشكل 6.30
$y=9-x^2$ والمماس عند $x=0$

مثال 3.4 دالة مشتقتها صفرًا عند قيمة عظمى محلية

حدد مكان أي قيم قصوى محلية للدالة $f(x)=9-x^2$ وصِف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية.

الحل يمكننا أن نرى من الشكل 6.30 أن هناك قيمة عظمى محلية عند $x=0$. أيضًا، لاحظ أن $f'(x)=-2x$ وبالتالي، $f'(0)=0$. وهذا يعني أن المماس على منحنى $y=f(x)$ عند $x=0$ يكون أفقيًا، كما هو موضح في الشكل 6.30. ■



الشكل 6.31
$y=|x|$

مثال 3.5 دالة مشتقتها غير معرّفة عند قيمة صغرى محلية

حدد مكان أي قيم قصوى محلية للدالة $f(x)=|x|$ وصِف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية.

الحل يمكننا أن نرى من الشكل 6.31 أن هناك قيمة صغرى محلية عند $x=0$. لاحظنا سابقاً في القسم 6.1، للتمثيل البياني ركن عند $x=0$ ولهذا، $f'(0)$ غير مُعرَّفة. ■

ملاحظات تاريخية

بيير دو فيرمات (1601-1665)

هو عالِم رياضيات فرنسي اكتشف العديد من نتائج يوران، بما في ذلك النظرية التي سميت على اسمه. كان فيرمات محاميًا وعضوًا في محكمة تولوز العليا، وكان يحب الرياضيات كهواية. ترك "أمير الهواة" إرثًا غير عادي عن طريق الكتابة في مسودة كتاب معين وفيه يوضح أنه قد اكتشف إثباتًا لنتيجة رائعة، ولكن هذه المسودة من الكتاب كانت صغيرة للغاية لكي تحافظ على الإثبات. حيّرت نظرية فيرمات الأخيرة العديد من أفضل علماء الرياضيات في العالم لما يزيد عن 300 عام قبل أن يثبتها أندرو ويليس في عام 1995.

التمثيلات البيانية الموضحة في الأشكال 6.29-6.31 هي غير عادية. وفي الواقع، أعطِ بعض الوقت الآن في رسم التمثيلات البيانية للدوال ذات القيم القصوى المحلية. ومن المفترض ألا تستغرق وقتًا طويلًا لإقناع نفسك بأن القيم القصوى المحلية تتحقق فقط عند النقاط التي تكون فيها المشتقة إما صفرًا أو غير معرّفة. ولهذا، نعطي هذه النقاط اسمًا خاصًا.

التعريف 3.3

يسمّى العدد c في مجال دالة معينة f **عددًا حرجًا** لـ f إذا كانت $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير معرّفة.

لقد إتضح لنا أن ملاحظتنا السابقة عن موقع القيم القصوى صحيحة. وهكذا تحدث القيم القصوى المحلية فقط عند النقاط حيث تكون المشتقة صفرًا أو غير معرّفة. نحن نؤكد هذا بشكل رسمي في النظرية 3.2.

النظرية 3.2 (نظرية فيرمات)

على فرض أن $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى محلية -صغرى محلية). إذًا يجب أن يكون c عددًا حرجًا لـــ f .

البرهان

على فرض أن f قابلة للاشتقاق عند $x = c$. (إذا لم يكن الأمر كذلك، فإن c عدد حرج لـ f وقد أنهينا عملنا) افترض ما هو أكثر بأن $f'(c) \neq 0$. إذًا، إما $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$.

إذا كانت $f'(c) > 0$. فإن لدينا باستخدام تعريف المشتقة أن

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

لذا. فإن لكل h صغيرة بما يكفي،

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \tag{3.1}$$

ولكل $h > 0$. باستخدام (3.1) يمكننا القول أن

$$f(c+h) - f(c) > 0$$

وهكذا.

$$f(c+h) > f(c)$$

بالتالي. فإن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية.

بالمثل. لكل $h < 0$. باستخدام (3.1) يمكننا القول أن

$$f(c+h) - f(c) < 0$$

وهكذا.

$$f(c+h) < f(c)$$

بالتالي. فإن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية أيضًا.

وبما أننا قد افترضنا أن $f(c)$ هي قيمة قصوى محلية، فهذا يمثل تناقضًا. يستبعد هذا الأمر امكانية أن $f'(c) > 0$.

نترك ذلك كتمرين لتوضيح أنه إذا كانت $f'(c) < 0$ فإن لدينا التناقض نفسه. الامكانية الوحيدة المتبقية هي الحصول على $f'(c) = 0$ وهذا يثبت النظرية. ■

يمكننا استخدام نظرية فيرمات وتمثيلات بيانية عن طريق الحاسبة أو الحاسوب لإيجاد القيم القصوى المحلية كما في المثال 3.6 و 3.7.

مثال 3.6 إيجاد قيمة قصوى لكثيرة حدود $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

أوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية لـــ .

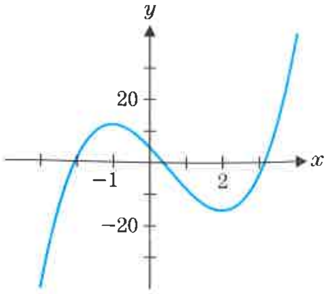
الحل نوجد.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$
$$= 6(x-2)(x+1)$$

الحياة المعاصرة في الرياضيات

أندرو ويليس (--1953)

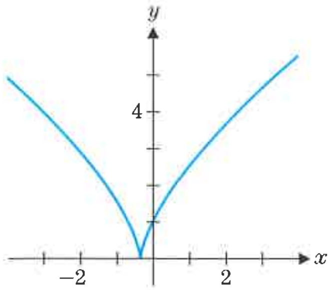
هو عالِم رياضيات نشر في عام 1995 إثباتًا للنظرية الأخيرة لفيرمات. وهي أشهر مسألة لم تكن محلولة في القرن العشرين. تنص نظرية فيرمات الأخيرة على أنه لا يوجد حل بعدد صحيح x و y و z للمعادلة $x^n + y^n = z^n$ للأعداد الصحيحة $n > 2$ وقد أراد ويليس إثبات النظرية منذ أن قرأ عنها عندما كان عمره 10 سنوات. وبعد أكثر من عشر سنوات كعالم رياضي وباحث ناجح، عزل ويليس نفسه عن أقرانه لمدة 7 سنوات بينما كان يطور الرياضيات الضرورية للبرهان الخاص به. "لقد أدركت أن الحديث مع الناس مصادفة عن فيرمات كان مستحيلًا لأن ذلك كان يستحق الكثير جدًا من الاهتمام. لا يمكنك التركيز بنفسك لسنوات لو لم يكن لديك هذا النوع من التركيز الموحد الذي قد يدمره الكثير من المشاهدين". قد توصل إلى الخطوة الأخيرة من برهانه بعد عام من العمل المكثف على هذه الخطوة تحت شعار "هذا اكتشاف غير معقول" ثم أصبح هذا الشعار "جميل جدًا. لقد كان سهلًا ورائعًا".



الشكل 6.32

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

وهكذا، f يشمل عددين حرجين، هما $x = -1$ و $x = 2$. لاحظ من التمثيل البياني في الشكل 6.32 أن تلك تتوافق مع مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية، على التوالي.



الشكل 6.33

$y = (3x + 1)^{2/3}$

مثال 3.7 القيم القصوى عند نقطة حيث تكون المشتقة غير معرّفة

أوجد الأعداد الحرجة والقيمة القصوى المحلية لـ $f(x) = (3x + 1)^{2/3}$.

الحل يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x + 1)^{-1/3}(3) = \frac{2}{(3x + 1)^{1/3}}$$

وبالطبع، $f'(x) \neq 0$ لكل x ، لكن $f'(x)$ غير معرّفة عند $x = -\frac{1}{3}$. تأكد من ملاحظة أن $-\frac{1}{3}$ موجود في مجال الدالة. وهكذا فإن f هو العدد الحرج الوحيد للدالة. من التمثيل البياني في الشكل 6.33، نرى أن هذا يتوافق مع موقع القيم الصغرى المحلية (وكذلك القيم الصغرى المطلقة). إذا استخدمت أداة التمثيل البياني لمحاولة إنتاج رسم بياني لـ $y = f(x)$. قد تجد أن نصف التمثيل البياني فقط هو المعروض في الشكل 6.33. والسبب هو أن معظم الحاسبات تستخدم الخوارزميات. والكثير من أجهزة الحاسوب ستُرجع عددًا مركبًا (أو خطأ) عندما تتم مطالبتها بحساب قوة كسور معينة لأعداد سالبة. وبينما يمثل هذا العيب السيئ صعوبات عارضة فقط، فنحن نذكر هذا هنا فقط حتى تُدرك أن هذه التكنولوجيا لها حدود.

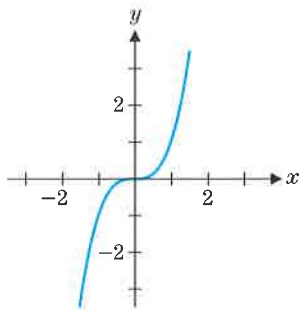
ملحوظة 3.2

تنص نظرية فيرمات على أن هذه القيم القصوى المحلية يمكن أن تحدث فقط عند الأعداد الحرجة. وهذا لا يعني أنه يوجد قيم قصوى محلية عند كل عدد حرج. وفي الواقع، هذا خاطئ، كما نوضح في الأمثلة 3.8 و 3.9.

مثال 3.8 مماس أفقي عند نقطة ليست قيمة قصوى محلية

أوجد الأعداد الحرجة والقيمة القصوى المحلية لـ $f(x) = x^3$.

الحل يجب أن يكون من الواضح من الشكل 6.34 أن f ليس لها قيمة قصوى محلية. ومع ذلك، فإن $f'(x) = 3x^2 = 0$ لـ $x = 0$ (العدد الحرج الوحيد لـ f). في هذه الحالة، يوجد لـ f مماس أفقي عند $x = 0$ لكنه لا يشمل قيمًا قصوى محلية.



الشكل 6.34

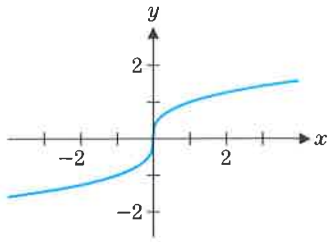
$y = x^3$

مثال 3.9 مماس رأسي عند نقطة ليست قيمة قصوى محلية

أوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية لـ $f(x) = x^{1/3}$

الحل كما في المثال 3.8. f ليس له قيمة قصوى محلية. (راجع الشكل 6.35 في الصفحة التالية). هنا. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ وكذلك، فإن f له عددًا حرجًا عند $x = 0$ (وفي تلك الحالة، يتم المشتقة غير معرّفة عند $x = 0$) ومع ذلك. f ليس لها قيمة قصوى محلية عند $x = 0$.

يجب عليك دائمًا التحقق من أن القيمة المعطاة موجودة في مجال الدالة قبل اعتبارها عددًا حرجًا، كما في المثال 3.10.



الشكل 6.35

$y = x^{1/3}$

مثال 3.10 إيجاد أعداد حرجة لدالة نسبية

أوجد كل الأعداد الحرجة لــ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$.

الحل يجب أن تلاحظ أن مجال f يتكون من كل الأعداد الحقيقية غير $x = -2$. لدينا هنا

$$f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2(1)}{(x+2)^2} \quad \text{من قاعدة ناتج القسمة.}$$
$$= \frac{2x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

لاحظ أن $f'(x) = 0$ لـــ $x = 0, -4$ و $f'(x)$ غير معرّفة لـــ $x = -2$. ومع ذلك، فإن -2 ليست في مجال f وبالتالي فإن الأعداد الحرجة فقط هي $x = 0$ و $x = -4$.

لقد لاحظنا أن القيم القصوى المحلية تحدث فقط عند الأعداد الحرجة وأن الدوال المتصلة يجب أن يكون لها قيم قصوى مطلقة وقيم صغرى مطلقة في فترة مغلقة. تعطينا النظرية 3.3 طريقة لإيجاد قيم قصوى مطلقة.

ملحوظة 3.3

عندما نستخدم القيم القصوى أو الصغرى أو العظمى بدون تحديد هل هي مطلقة أو محلية، فإننا سنشير دائمًا إلى القيم القصوى المطلقة.

النظرية 3.3

على فرض أن f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$. يجب على كل قيمة قصوى مطلقة لـــ f ان تكون موجودة عند نقطة نهاية (a أو b) أو عند عدد حرج.

البرهان

وفقًا لنظرية القيمة القصوى ، f سوف يكون لها القيمة العظمى والصغرى عند $[a, b]$ لأن f متصلة. على فرض أن $f(c)$ قيمة قصوى مطلقة. إذا لم تكن c نقطة نهاية (أي $c \neq a$ و $c \neq b$) ثم يجب أن تكون c في فترة مفتوحة (a, b) وفي هذه الحالة، تكون $f(c)$ أيضًا قيمة قصوى محلية. وفقًا لنظرية فيرمات، إذًا، يجب أن تكون c عددًا حرجاً، لأن القيم القصوى المحلية تحدث عند الأعداد الحرجة فقط. ■

ملحوظة 3.4

تعطينا النظرية 3.3 إجراء بسيطًا لإيجاد قيمة قصوى مطلقة لدالة متصلة في فترة مغلقة:

1. أوجد كل الأعداد الحرجة في الفترة واحسب قيم الدالة عند تلك النقاط.
2. احسب قيم الدالة عند نقاط النهاية.
3. أكبر قيمة لهذه الدوال هي قيمة عظمى مطلقة وأصغر قيمة لهذه الدوال هي قيمة صغرى مطلقة.

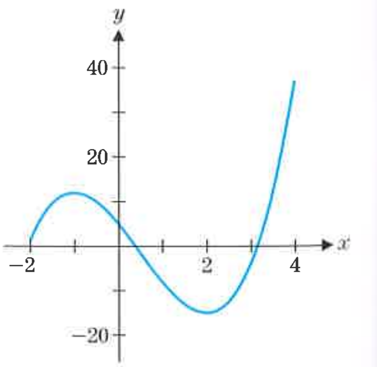
نحن نوضح النظرية 3.3 لحالة الدالة كثيرة الحدود في المثال 3.11.

مثال 3.11 إيجاد قيمة قصوى مطلقة في فترة مغلقة

أوجد القيمة القصوى المطلقة لـــ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ في الفترة $[-2, 4]$.

الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.36، تبدو القيمة العظمى عند نقطة النهاية $x = 4$ ، بينما تبدو القيمة الصغرى عند القيمة الصغرى المحلية بالقرب من $x = 2$. في المثال 3.6، وجدنا أن الأعداد الحرجة لـــ f هي $x = -1$ و $x = 2$. وبالإضافة إلى ذلك، كل من تلك الأعداد موجودة في الفترة $[-2, 4]$. لذلك، سنقارن القيم عند نقاط النهاية:

$$f(-2) = 1 \quad \text{و} \quad f(4) = 37$$



الشكل 6.36

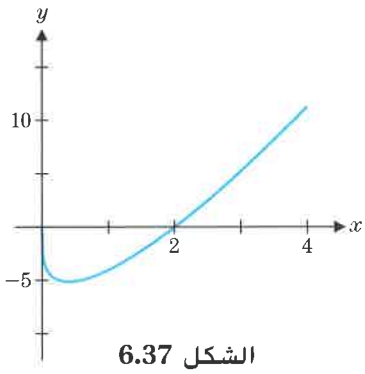
$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

والقيم عند الأعداد الحرجة:

$$f(-1) = 12 \text{ و } f(2) = -15.$$

وبما أن f متصلة في $[-2, 4]$ ، فإن النظرية 3.3 تنص على أن القيم القصوى المطلقة يجب أن تكون من بين هذه القيم الأربعة. وهكذا، $f(4) = 37$ هي قيمة عظمى مطلقة و $f(2) = -15$ قيمة صغرى مطلقة متناسقة مع ما نجده في التمثيل البياني في الشكل 6.36. ■

وبالطبع، فإن معظم المسائل الحقيقية المهمة لا يُحتمل أن تؤدي إلى مشتقات تشمل الأصفار الصحيحة. ضع في حسبانك أن المثال التالي صعب إلى حد ما على المستخدم.



الشكل 6.37

$y = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$

مثال 3.12 إيجاد قيمة قصوى للدالة باستخدام أسس كسرية

أوجد القيمة القصوى لـ $f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ في الفترة $[0, 4]$.

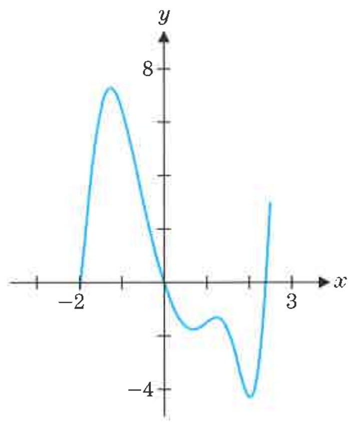
الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.37، يبدو أن القيم العظمى تحدث عند نقطة النهاية $x = 4$ والقيم الصغرى بالقرب من $x = \frac{1}{2}$. ثم لاحظ أن

$$f'(x) = 5x^{1/4} - 2x^{-3/4} = \frac{5x - 2}{x^{3/4}}$$

وهكذا، فإن الأعداد الحرجة هي $x = \frac{2}{5}$ [بما أن $f'\left(\frac{2}{5}\right) = 0$] و $x = 0$ (بما أنّ $f'(0)$ غير معرّفة والعدد 0 موجود في مجال f). والآن لا نحتاج إلا إلى المقارنة بين

$$f(0) = 0, \quad f(4) \approx 11.3137 \qquad f\left(\frac{2}{5}\right) \approx -5.0897$$

وهكذا، القيمة العظمى المطلقة هي $f(4) \approx 11.3137$ والقيمة الصغرى المطلقة هي $f\left(\frac{2}{5}\right) \approx -5.0897$ وهذا يتوافق مع ما توقعناه من الشكل 6.37. ■



الشكل 6.38

$y = f(x) = x^3 - 5x + 3\sin x^2$

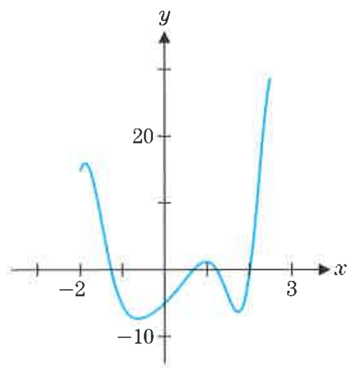
عند التطبيق، لا تكون الأعداد الحرجة سهلة دائمًا لكي يتم العثور عليها كما كانت في المثالين 3.11 و 3.12. في المثل 3.13 على فرض انه غير معروف لدينا الأعداد الحرجة الموجودة فيهما. مع ذلك، يمكننا تقدير العدد ومواقع تلك الأعداد من خلال تحليل دقيق للتمثيلات البيانية التي ينشئها الحاسب الآلي.

مثال 3.13 إيجاد قيمة قصوى مطلقة تقريبيًا

أوجد القيمة القصوى المطلقة لـ $f(x) = x^3 - 5x + 3\sin x^2$ في الفترة $[-2, 2.5]$.

الحل من التمثيل البياني في الشكل 6.38، يبدو أن القيمة العظمى تحدث بالقرب من $x = -1$ بينما يبدو أن القيمة الصغرى تحدث بالقرب من $x = 2$. وبعد ذلك نحسب المشتقة

$$f'(x) = 3x^2 - 5 + 6x\cos x^2$$



الشكل 6.39

$y = f'(x) = 3x^2 - 5 + 6x\cos x^2$

وعلى العكس من المثالين 3.11 و 3.12، لا يوجد عملية جبرية يمكننا استخدامها لإيجاد أصفار f' . بديلنا الوحيد هو إيجاد الأصفار تقريبيًا. يمكنك القيام بذلك باستخدام طريقة نيوتن لحل $f'(x) = 0$. (يمكنك أيضًا استخدام طريقة أخرى لإيجاد الجذر تكون مضمنة في حاسبتك أو جهاز الحاسوب) سنحتاج أولاً إلى تخمينات ابتدائية مناسبة. من التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$ الموجود في الشكل 6.39، يبدو أنه يوجد أربعة أصفار لـ $f'(x)$ في الفترة المعطاة، عاين بالقرب من $x = -1.3, 0.7, 1.2$ و 2.0. علاوة على ذلك، بالرجوع إلى الشكل 6.38، يوجد أربعة أصفار تتوافق مع القيم القصوى المحلية الموضحة في التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. سنطبق الآن طريقة نيوتن لحل $f'(x) = 0$ ، باستخدام القيم الأربعة السابقة مثل تخميناتنا الأولية. هذا يؤدي إلى أربعة أعداد حرجة تقريبية لـ f في الفترة $[-2, 2.5]$ لدينا

$$a \approx -1.26410884789, \qquad b \approx 0.674471354085,$$

$$c \approx 1.2266828947 \qquad d \approx 2.01830371473$$

والآن سنحتاج فقط إلى مقارنة قيم f عند نقاط النهاية وتقدير الأعداد الحرجة تقريبيًا:

$$f(a) \approx 7.3, \quad f(b) \approx -1.7, \quad f(c) \approx -1.3$$
$$f(d) \approx -4.3, \quad f(-2) \approx -0.3 \quad \text{and} \quad f(2.5) \approx 3.0$$

وهكذا، تكون القيمة العظمى المطلقة تقريبًا $f(-1.26410884789) \approx 7.3$ وتكون القيمة الصغرى المطلقة تقريبًا $f(2.01830371473) \approx -4.3$.

من المهم (خصوصًا في ضوء مدى التقدير التقريبي والتمثيل البياني لعملنا هنا) من أجل التحقق من أن القيم القصوى التقريبية تتوافق مع ما توقعناه من التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. وبما أن هذا يتفق بشكل جيد، توجد لدينا ثقة في دقة ذلك. ■

لقد رأينا الآن كيفية تحديد مكان القيم القصوى المطلقة لدالة متصلة في فترة مغلقة. لقد رأينا في الدرس 6.4، نحن نرى كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية.

ما وراء القوانين

نظرية القيمة القصوى مهمة ولكنها نتيجة متقنة. فكر في الأمر بتلك الطريقة. إذا تمت تلبية فرضية النظرية. فلن تضيع وقتك أبدًا في البحث عن القيم العظمى لدالة معينة لا تحتوي على قيم عظمى. وهكذا تكون المسألة قابلة للحل تقريبًا. الأسلوب المستخدم في الملاحظة 3.4 يصلح دائمًا. وطالما يوجد الكثير من الأعداد الحرجة المحدودة فقط.

التمارين 6.3

تمارين كتابية

1. باستخدام أحد التمثيلات البيانية أو أكثر، اشرح لماذا تكون نظرية القيمة القصوى صحيحة. هل يكون الاستنتاج صحيحًا إذا أغفلنا الفرضية التي تنص على أن f دالة متصلة؟ هل يكون الاستنتاج صحيحًا إذا أغفلنا الفرضية التي تنص على أن الفترة مغلقة؟

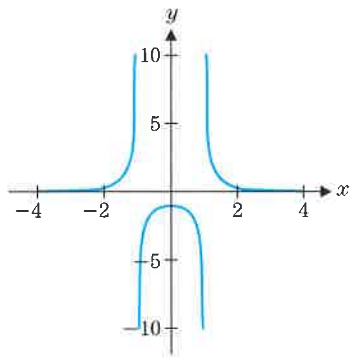
2. باستخدام أحد التمثيلات البيانية أو أكثر. عبّر عن أن نظرية فيرمات صحيحة. ناقش كيفية استخدام نظرية فيرمات. أعد صياغة النظرية بكلمات من عندك لجعل استخدامها أكثر وضوحًا.

3. على فرض أن $f(t)$ يمثل ارتفاعك بعد t ساعة من تسلق جبل معين. إذا توقفت للراحة، فاشرح لماذا $f'(t) = 0$. ناقش الظروف التي من خلالها ستكون عند قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لن تكون عند أي منهما.

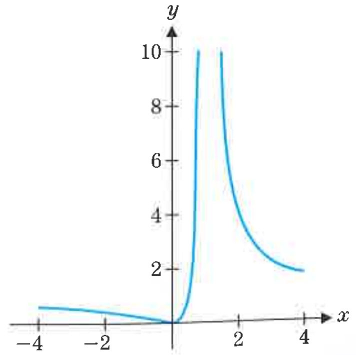
4. ومن وجهة نظر الرياضيات، تكون العبارة إذا كان / فإنّ في اتجاه واحد عادة. عندما نقول "إذا كان A ، فإنّ B" فهذا لا يشبه حالة قولنا "إذا كان B فإنّ A" صحيح أيضًا. عندما تكون كلا العبارتين صحيحتين، نقول "A إذا وفقط إذا B". وهذه العبارة تُختصر إلى A إذا وفقط إذا B. فكّر في العبارة "إذا وقفت في المطر، فستتعرض للبلل." هل هذا صحيح؟ كيفية اختلاف ذلك عن عكسه "إذا أصابك البلل، إذًا أنت تقف في المطر." طبّق هذا المنطق على كل من نظرية القيم القصوى ونظرية فيرمات: اذكر العكس وقرر هل استنتاجه يكون صحيحًا أم دائمًا.

في التمرينين 1 و 2، استخدم التمثيل البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة (إذا كانت موجودة) للدالة في الفترة المعطى.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ في (a) $(0, 1) \cup (1, \infty)$، (b) $(-1, 1)$، (c) $(0, 1)$، (d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



2. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ في (a) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ، (b) $(-1, 1)$ ، (c) $(0, 1)$ ، (d) $[-2, -1]$



في التمارين 6-3، أوجد كل الأعداد الحرجة يدويًا. استخدم معرفتك بنوع التمثيل البياني (مثل القطع المكافئ أو المكعب) لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما.

3. (a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$ (b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

4. (a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$

5. (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ (b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

6. (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

في التمارين 24–7، أوجد كل الأعداد الحرجة يدويًا. وإن أمكن، استخدم تكنولوجيا التمثيل البياني لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما.

7. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

8. $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

9. $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

10. $f(x) = (x^{2/5} - 3x^{1/5})^2$

11. $f(x) = \sin x \cos x, [0, 2\pi]$

12. $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$

15. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

16. $f(x) = xe^{-2x}$

17. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3} + 4x^{-2/3}$

18. $f(x) = x^{7/3} - 28x^{1/3}$

19. $f(x) = 2x\sqrt{x + 1}$

20. $f(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$

21. $f(x) = |x^2 - 1|$

22. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{if } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{if } -\pi < x < \pi \\ -\tan x & \text{if } |x| \geq \pi \end{cases}$

في التمارين 34-25، أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة محددة في كل فترة مُشار إليها.

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 2]$

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ في الفترتين (a) $[-3, 1]$ و (b) $[-1, 3]$

27. $f(x) = x^{2/3}$ في الفترتين (a) $[-4, -2]$ و (b) $[-1, 3]$

28. $f(x) = \sin x + \cos x$ في الفترتين (a) $[0, 2\pi]$ و (b) $[\pi/2, \pi]$

29. $f(x) = e^{-x^2}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 2]$

30. $f(x) = x^2e^{-4x}$ في الفترتين (a) $[-2, 0]$ و (b) $[0, 4]$

31. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 3}$ في الفترتين (a) $[-2, 2]$ و (b) $[2, 8]$

32. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ في الفترتين (a) $[0, 1]$ و (b) $[-3, 4]$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 3]$

34. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 16}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[0, 6]$

في التمارين 38--35، قدّر القيم القصوى المطلقة رقميًا لدالة معطاة في كل فترة مُشار إليها.

35. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ في الفترتين (a) $[-1, 1]$ و (b) $[-3, 2]$

36. $f(x) = x^6 - 3x^4 - 2x + 1$ في الفترتين (a) $[-1, 1]$ و (b) $[-2, 2]$

37. $f(x) = x\sin x + 3$ في الفترتين (a) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و (b) $[0, 2\pi]$

38. $f(x) = x^2 + e^x$ في الفترتين (a) $[0, 1]$ و (b) $[-2, 2]$

39. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفاصل $[-2, 2]$ يساوي 3 وتكون القيمة الصغرى المطلقة غير موجودة.

40. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة متصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ غير موجودة وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2.

41. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة متصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ يساوي 4 وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2.

42. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة f بحيث لا توجد قيمة عظمى مطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$ وكذلك لا توجد قيمة صغرى مطلقة.

43. في هذا التمرين، سوف نستكشف عائلة الدوال $f(x) = x + cx + 1$، بحيث يكون c ثابتًا. ما عدد القيم القصوى المحلية الموجودة وما أنواعها؟ (ستعتمد إجابتك على قيمة c). على فرض أن هذه العائلة تشير إلى الدوال المكعبة، فاكتب جميع أنواع الدوال المكعبة.

44. أثبت أن أي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة يجب أن تتضمن حدًا أقصى محليًا واحدًا على الأقل، وقد تتضمن ثلاثة حدود قصوى على الأكثر. وبناءً على هذه المعلومات، ارسم عدة تمثيلات بيانية لكثيرات الحدود من الدرجة الرابعة.

45. اثبت ان: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ تتضمن كلًا من حد أقصى محلي وحد أدنى محلي إذا كان $c < 0$.

46. في التمرين 45، وضّح أن مجموع الأعداد الحرجة يساوي $-\frac{2b}{3}$.

47. لكل عائلة الدوال: $f(x) = x^4 + cx^2 + 1$، أوجد جميع القيَم القصوى المحلية (ستعتمد إجابتك على قيمة الثابت c).

48. لكل عائلة الدوال $f(x) = x^4 + cx^3 + 1$، أوجد جميع القيَم القصوى المحلية. (ستعتمد إجابتك على قيمة الثابت c).

49. إذا كانت f قابلة للاشتقاق في الفترة $[a, b]$ و $f'(a) < 0 < f'(b)$، أثبت أن هناك قيمة لـ c تحقق $a < c < b$. (إرشاد: استخدم نظرية القيمة القصوى ونظرية فيرمت).

50. ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح أن $y = f(x) = x^2 + 1$ و $y = g(x) = \ln x$ لا يتقاطعان. أوجد x التي تحقق القيمة الصغرى لـ $f(x) - g(x)$. في هذه القيمة لـ x، وضّح أن المماسين على $y = f(x)$ و $y = g(x)$ متوازيان. وضّح بيانيًا لماذا يُعد من المنطقي أن يكون المماسان متوازيين.

51. ارسم تمثيلًا بيانيًا لـــ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ حيث $x > 0$، وحدد أين يكون التمثيل البياني أشد انحدارًا. (أي، أوجد المكان الذي يكون فيه المنحنى عند قيمته العظمى).

.52 ارسم تمثيلًا بيانيًا لـــ $f(x) = e^{-x^2}$ ، وحدد أين يكون التمثيل البياني أشد انحدارًا. (ملاحظة: هذه مسألة مهمة بالنسبة لنظرية الاحتمالات).

التطبيقات

.53 إذا كان هناك فريقا كرة قدم، ويسجل كل فريق أهدافًا بمعدل r هدف في الدقيقة، فإن احتمال تسجيل r هدف في t دقيقة هو $P = \frac{(rt)^n}{n!} e^{-rt}$. استخدم $r = \frac{1}{25}$. وضّح أنه في غضون مباراة لمدة 90 دقيقة، ستزداد قيمة P بمعدل $n = 3$. وضّح بإيجاز لماذا يُعد هذا منطقيًا. أوجد t التي تزيد من احتمال تسجيل هدف واحد بالضبط. وضّح بإيجاز لماذا يُعد هذا منطقيًا.

.54 إذا فزت في ثلاث مباريات من أصل أربع مباريات أمام شخص ما، فهل معنى ذلك أن احتمال فوزك في المباراة التالية هي $\frac{3}{4}$ ؟ بصفة عامة، إذا كانت لديك احتمال p للفوز في كل مباراة، فإن احتمال الفوز في m من من أصل n من المباريات هو $f(p) = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} p^m (1-p)^{n-m}$. أوجد p التي تزيد من f. يُطلق على قيمة p مقدّر المعقولية العظمى للاحتمال. وضّح بإيجاز لماذا يُعد هذا منطقيًا.

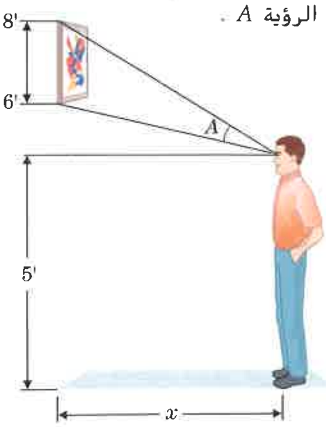
.55 هناك جزء من أفعوانية يأخذ شكل $y = x^5 - 4x^3 - x + 10$ ، حيث x يقع بين -2 و2. أوجد جميع القيم القصوى المحلية واشرح الأجزاء التي تمثلها من الأفعوانية. حدد أين الجزء الأكثر انحدارًا من الأفعوانية.

.56 على فرض أنه تم إرسال ملف حاسوب ضخم عبر الإنترنت. إذا كان احتمال وصوله إلى وجهته بدون أخطاء هي x، فإن احتمال حدوث خطأ هي $1 - x$. ويدرس مجال نظرية المعلومات مثل هذه المواقف. يُمكن إيجاد كمية مهمة وهي الإنتروبي (قياس عدم إمكانية التنبؤ) من خلال $H = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$ ، لكل $0 < x < 1$. أوجد قيمة x التي تزيد من الكمية. وضّح لماذا قد يزيد هذا الاحتمال من قياس عدم إمكانية التنبؤ بالأخطاء. (إرشاد: إذا كان $x = 0$ أو $x = 1$ ، فهل لا يُمكن التنبؤ بالأخطاء؟)

.57 تستخدم الأبحاث في عدد من المجالات (بما في ذلك علم الأحياء السكانية، وعلم الاقتصاد، ودراسات الأورام في الحيوانات) منحنى جومبرتز للنمو، $W(t) = ae^{-be^{-t}}$. إذا كان $t \to \infty$ ، فوضّح أن $W(t) \to a$ و $W'(t) \to 0$. أوجد أقصى معدل للنمو.

.58 يُمكن إيجاد المعدل R للتفاعل الأنزيمي بصفته دالة لتركيز المادة المتفاعلة مع الأنزيم $[S]$ باستخدام $R = \frac{[S]R_m}{K_m + [S]}$ ، حيث R_m و K_m ثابتان. ويُطلق على K_m ثابت ميكايليس، بينما يُطلق على R_m أقصى معدل للتفاعل. وضّح أن R_m ليس حدًا أقصى مناسبًا لأن معدل التفاعل لا يُمكن أن يساوي R_m .

.59 على فرض ان تعليق لوحة على جدار كما هو موضح في الشكل. يمتد الإطار بطول 6 أقدام إلى 8 أقدام فوق الأرض. يقف شخص ترتفع عيناه عن الأرض بمقدار 5 أقدام على بُعد x قدم من الحائط. وينظر إلى اللوحة بزاوية رؤية A التي تشكلت من الشعاع الصادر من عين هذا الشخص إلى أعلى الإطار، والشعاع الصادر من عين الشخص إلى أسفل نقطة في الإطار. أوجد قيمة x التي تزيد من زاوية الرؤية A .



ماذا سيتغير إذا كان ارتفاع عين هذا الشخص 6 أقدام عن الأرض؟

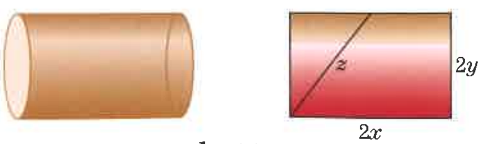
.60 على فرض أن لاعب هوكي يصوب على شبكة عرضها 6 أقدام من مسافة d قدم عن خط المرمى، و4 أقدام بجانب خط المنتصف. (a) أوجد المسافة d التي تزيد من زاوية التصويب. (b) كرر الجزء (a) عند التصويب بمسافة قدمين بجانب خط المنتصف. وضّح السبب في اختلاف النتيجة لهذه الدرجة. (c) كرر الجزء (a) مع فرض نجاح حارس المرمى في منع التسديد، ولكن على بُعد قدمين من المرمى.

تمارين استكشافية

.1 استكشف التمثيلات البيانية للدالة $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$ والدالة x^3e^{-x} . أوجد جميع القيم القصوى المحلية واستخدم قاعدة لوبيتال في تحديد السلوك حيث $x \to \infty$. يُمكنك التفكير في التمثيل البياني $x^n e^{-x}$ بصفته يوضح نتائج لعبة شد الحبل: $x^n \to \infty$ حيث $x \to \infty$ ، بينما $e^{-x} \to 0$ حيث $x \to \infty$. صِف التمثيل البياني $x^n e^{-x}$ في ما يتعلق بلعبة شد الحبل هذه.

.2 يشتهر يوهانس كيبلر (1571-1630) بصفته عالم فلك، وخصوصًا بفضل قوانينه الثلاثة حول حركة الكواكب. لكنه

الشكل a



الشكل b

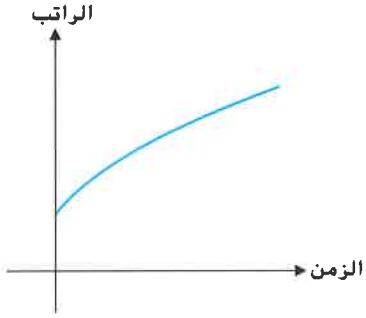
كان أيضًا بارعًا في الرياضيات. خلال فترة خدمته في بلاط الإمبراطور النمساوي ماثيو الأول، لاحظ كيبلر قدرة بعض النمساويين على حساب سعات مجموعة متنوعة من البراميل بسرعة وبشكل غامض. يحتوي كل برميل على ثقب في منتصف جانبه (انظر الشكل a). يُدخل الشخص النمساوي عودًا في الثقب حتى يصل إلى الركن البعيد، ثم يعلن حجمه. قام كيبلر أولًا بتحليل المسألة بالنسبة لبرميل أسطواني (انظر الشكل b). حجم الأسطوانة هو $V = \pi r^2 h$. في الشكل b ، $r = y$ و $h = 2x$ ، إذًا $V = 2\pi y^2 x$. أطلق على عود القياس z . باستخدام نظرية فيثاغورس $x^2 + (2y)^2 = z^2$. يكمن اللغز الذي واجهه كيبلر في كيفية حساب V بمعلومية z فقط. وكانت ملاحظة كيبلر الأساسية هي أن البراميل النمساوية كان لها النسبة نفسها بين الارتفاع والقطر (أي x/y). وافترض أن $t = x/y$ ، وأنه من الواضح لنا أن $z^2/y^2 = t^2 + 4$. استخدم هذا في التعويض عن y^2 في قانون الحجم. ثم عوّض عن x بـ $\sqrt{z^2 + 4y^2}$. وضّح أن $V = \frac{2\pi z^3 t}{(4 + t^2)^{3/2}}$. في هذه الصيغة، t ثابت؛ إذًا يُمكن للشخص النمساوي حساب z ، ثم تقدير الحجم بسرعة. لم نخبرك بعد بما تساويه t . افترض كيبلر أن الشخص النمساوي قد اتخذ خيارًا ذكيًا لهذه النسبة. أوجد قيمة t التي تزيد من حجم z معطاة. هذه النسبة هي المُستخدمة في الواقع بصناعة البراميل النمساوية!

الدرس 6-4 الدوال المتزايدة والمتناقصة

في القسم 6.3، توصلنا إلى أن القيم القصوى المحلية لا تحدث سوى في الأعداد الحرجة. ولا تتناظر جميع الأعداد الحرجة مع القيم القصوى المحلية. في هذا الدرس، نتعرف كيفية تحديد الأعداد الحرجة التي تتوافق مع القيم القصوى المحلية. وفي الوقت نفسه، سنتعرف أكثر على الارتباط بين الاشتقاق والتمثيل البياني.

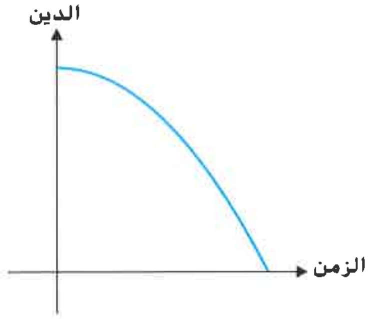
نحن جميعًا نعرف مصطلح متزايدة ومصطلح متناقصة. إذا أخبرك صاحب العمل الخاص بك أن راتبك سيزداد بشكل ثابت طوال مدة توظيفك، فسيجول بخاطرك أنه بمرور الوقت سيزيد راتبك بالصورة الموضحة في الشكل 6.40. إذا سحبت قرضًا لشراء سيارة، فبمجرد بداية سداد القرض، ستقل مديونياتك بمرور الزمن. إذا وضعت مخططًا للدين بالنسبة للزمن، فإن التمثيل البياني قد يأخذ صورة الشكل 6.41.

والآن، عرّف هاتين الفكرتين بعناية. لاحظ أن التعريف 4.1 هو مجرد بيان رسمي لشيء تفهمه بالفعل.



الشكل 6.40

راتب تزايدي



الشكل 6.41

دين تناقصي

التعريف 4.1

تكون f دالة متزايدة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ عندما $x_1 < x_2$ ، فانّ $f(x_1) < f(x_2)$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أكبر].

تكون f دالة متناقصة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ ، فانّ $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أصغر].

بينما ينظر أي شخص إلى تمثيل بياني لدالة يستطيع معرفة اين هي متزايدة واين هي متناقصة، إلا أن التحدي يكمن في تحديد أين تصبح متزايدة وأين تصبح متناقصة من خلال الصيغة الرياضية فقط للدالة. على سبيل المثال، هل يُمكنك تحديد أين تصبح $f(x) = x^2 \sin x$ متزايدة، وأين تصبح متناقصة، بدون النظر إلى التمثيل البياني؟ انظر بعناية إلى الشكل 6.42 (في الصفحة التالية) لمعرفة ما إذا كان يُمكنك ملاحظة ما يحدث عند كل نقطة تكون الدالة عندها متزايدة أو متناقصة.

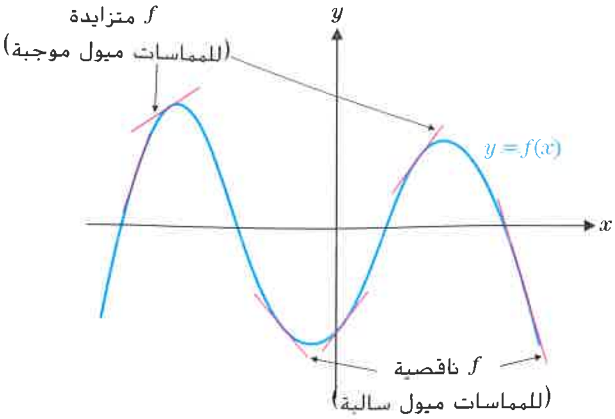
لاحظ أنه في الفترات التي تكون فيها ميول المماسات موجبة موجبة، فإنّ f متزايدة، بينما في الفترات التي تكون فيها ميول المماسات سالبة، فإنّ f متناقصة. بالطبع، فإن ميل المماس عند نقطة ما يُعطى بقيمة المشتقة عند هذه النقطة. إذًا، سواء كانت الدالة متزايدة أم متناقصة في فترة ما، فإنه من الواضح أنه يتم تحديد ذلك من اشارة مشتقتها في هذه الفترة. والآن، سنضع نظرية لهذه العلاقة تجعلها دقيقة.

النظرية 4.1

على فرض أن f قابلة للتفاضل في الفترة I .

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متزايدة في I .

(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متناقصة في I .



الشكل 6.42
الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة

البرهان

(i) اختر أي نقطتين $x_1, x_2 \in I$، حيث $x_1 < x_2$. طبّق نظرية القيمة المتوسطة (النظرية 10.4 في الدرس 10—5) على f في الفترة (x_1, x_2)، وسنحصل على

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \tag{4.1}$$

لبعض القيم $c \in (x_1, x_2)$. (لماذا يُمكننا تطبيق نظرية القيمة المتوسطة هنا؟) باستخدام الفرضية، نجد أن $f'(c) > 0$. وبما أن $x_1 < x_2$ (فإن $x_2 - x_1 > 0$). ومن خلال (4.1)، نجد أن

$$0 < f(x_2) - f(x_1)$$

أو

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{4.2}$$

بما أن (4.2) صحيحة لكل $x_1 < x_2$، فإن الدالة f متزايدة في I.

يكاد يكون البرهان (ii) متطابقًا، وقد تم وضعه في شكل تمرين. ■

ما تراه قد لا يكون الحقيقة

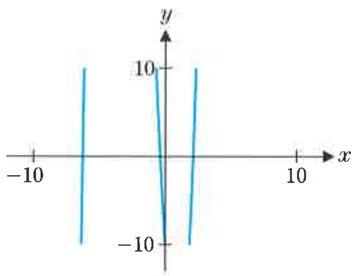
يتمثّل أحد أهداف القسم 6.5 و 6.6 بتعلّم كيفية رسم تمثيلات بيانية موضحة للدوال (أي تمثيلات بيانية تعرض جميع المميزات المهمة في الدالة: أين تكون متزايدة أو تناقضية، وهل توجد قيم قصوى، وخطوط التقارب، وخاصيتين أخريين سنتناولهما في القسم 6.5: التقعر ونقاط الانعطاف). نرسم كل تمثيل بياني في نافذة عرض محددة (أي، ضمن مدى محدد لقيم x وقيم y). في حالة التمثيلات البيانية التي يتم إنشاؤها على حاسوب أو حاسبة، فإن النافذة عادةً ما تكون من اختيار الأداة. للكشف عن متى يتم إخفاء المميزات المهمة لنافذة ما أو لتحديد المواقع الدقيقة للميزات التي نراها في نافذة ما، سنحتاج إلى إجراء بعض حسابات التفاضل والتكامل.

مثال 4.1 رسم تمثيل بياني

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ مع إيضاح جميع القيم القصوى المحلية.

الحل تستخدم عديد من حاسبات التمثيل البياني النافذة الافتراضية التي يتم تعريفها من خلال $-10 \le x \le 10$ و $-10 \le y \le 10$. باستخدام هذه النافذة. يأخذ التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ هيئة التمثيل البياني المعروض في الشكل 6.43. رغم أن القطع المستقيمة الثلاث الموضحة لا تكشف الأمر بالتحديد. بدلًا من التعامل مع النافذة بدون دراية على أمل زائف بأن يظهر التمثيل البياني بشكل معقول، سنتحدث بإيجاز حول متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة. لدينا

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24 = 6(x^2 + 3x - 4)$$
$$= 6(x - 1)(x + 4).$$

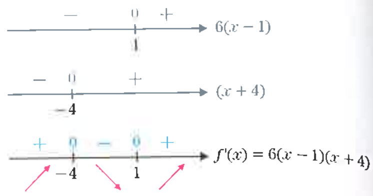


الشكل 6.43
$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$

لاحظ أن العددين الحرجين (1 و 4−) يمثلان الموقعين المحتملين للقيم القصوى المحلية. يمكننا معرفة أين يقع العاملان، وبالتالي نعرف ما إذا كانت المشتقة موجبة أم سالبة من خلال خطوط الأعداد المعروضة في الهامش. بناءً على ما سبق، لاحظ أن

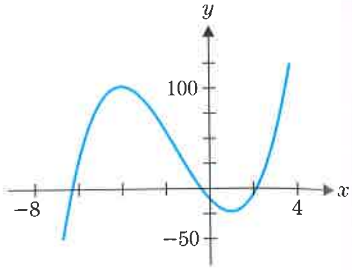
f متزايدة $f'(x) > 0$ في $(-\infty, -4)$ و $(1, \infty)$

و f متناقصة $f'(x) < 0$ في $(-4, 1)$



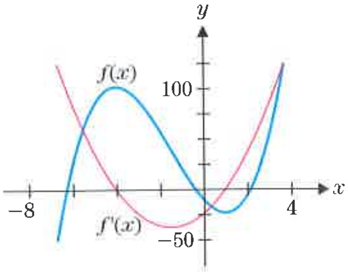
لتسهيل الأمر، أضفنا أسهمًا توضّح أين تكون الدالة متزايدة وأين تكون متناقصة أسفل خط الأعداد الأخير. في الشكل 6.44a، أعدنا رسم التمثيل البياني في النافذة المعرّفة كما يأتي: $-8 \le x \le 4$

والفترة $-50 \le y \le 125$. حددنا هنا مدى y حتى يتم عرض النقطتين الحرجتين $(-4, 102)$ و $(1, -23)$. بما أن f متزايدة في كل الفترة $(-\infty, -4)$، فإننا نعلم أن الدالة تبقى متزايدة على يسار الجزء المعروض في الشكل 6.44a. وبالمثل، بما أن f متزايدة في كل الفترة $(1, \infty)$، فإننا نعلم أن الدالة تتزايد باستمرار على يمين الجزء المعروض. في الشكل 6.44b، وضعنا مخططًا لكل من $y = f(x)$ (الموضح باللون الأزرق) و $y = f'(x)$ (الموضح باللون الأحمر). لاحظ العلاقة بين التمثيلين البيانيين. عندما تكون $f'(x) > 0$ فإنّ الدالة متزايدة؛ وعندما تكون $f'(x) < 0$، فإن الدالة f متناقصة. ولاحظ ماذا يحدث لـ $f'(x)$ عند القيم القصوى المحلية لـ f. (سوف نتناول هذا قريبًا بتفصيل أكبر).



الشكل 6.44a

$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$



الشكل 6.44b

$y = f(x)$ و $y = f'(x)$

قد يقودك التفكير إلى أنه يُمكنك رسم التمثيلات البيانية باستخدام أداة مع قليل من التعامل مع نافذة التمثيل البياني، ثم الحصول على تمثيل بياني معقول. للأسف، هذا عادةً لا يكفي. على سبيل المثال، رغم أنه من الواضح أن التمثيل البياني في الشكل 6.43 غير كامل، إلا أن التمثيل البياني الأولي في المثال 4.2 يوجد به شكل مألوف وقد يبدو عليه أنه معقول، ولكنه غير صحيح. يُطلعك حساب التفاضل والتكامل على المميزات التي ينبغي لك توقع رؤيتها في التمثيل البياني. وبدونها، يكون ما تفعله وكأنه عملية تصويب في الظلام.

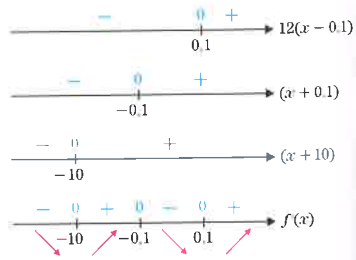
مثال 4.2 كشف سلوك مخفي في تمثيل بياني

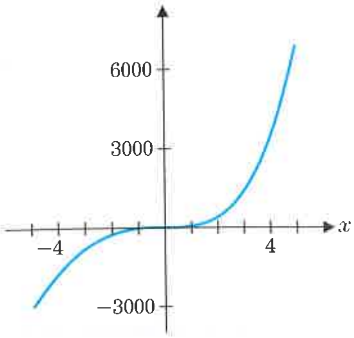
ارسم بيانيًا $f(x) = 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$ مع إيضاح جميع القيم القصوى المحلية.

الحل يبيّن الشكل 6.45a التمثيل البياني الافتراضي الذي تم إنشاؤه بواسطة نظام الجبر في الكمبيوتر الخاص بنا، بينما يوضح الشكل 6.45b التمثيل البياني الذي تم إنشاؤه بواسطة حاسبة التمثيل البياني. يُمكنك بكل تأكيد جعل الشكل 6.45b يظهر بطريقة أكبر مثل الشكل 6.45a من خلال ضبط النافذة. ولكن بإجراء بعض عمليات حساب التفاضل والتكامل، يُمكنك اكتشاف المميزات المخفية في التمثيلين البيانيين.

أولًا، لاحظ أن

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 120x^2 - 0.12x - 1.2 \\ &= 12(x^2 - 0.01)(x + 10) \\ &= 12(x - 0.1)(x + 0.1)(x + 10) \end{aligned}$$

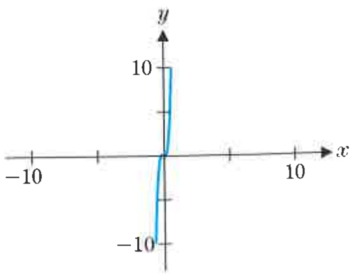




الشكل 6.45a

تمثيل بياني افتراضي على **CAS** للدالة

$y = 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$



الشكل 6.45b

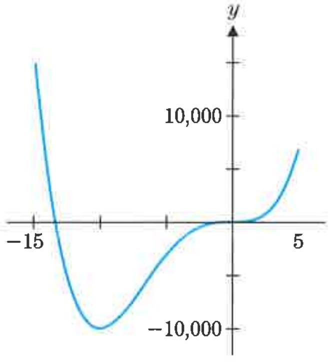
تمثيل بياني افتراضي على حاسبة للدالة

$y = 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$

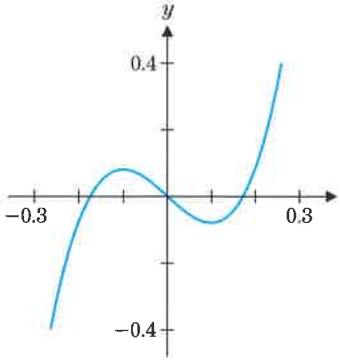
أوضحنا خطوط الأعداد للعوامل الثلاثة في الهامش (في الصفحة السابقة). لاحظ أن

$$f'(x)\begin{cases} > 0 \text{ في } (-10,-0.1) \text{ و } (0.1,\infty) & \text{متزايدة } f \\ < 0 \text{ في } (-\infty,-10) \text{ و } (-0.1,0.1). & \text{متناقصة } f \end{cases}$$

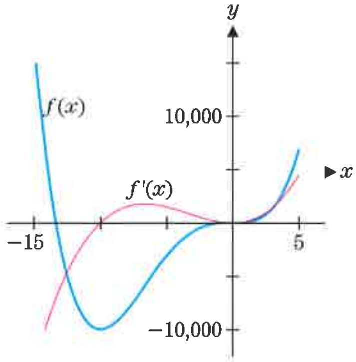
بما أن التمثيلين البيانيين في الشكلين 6.45a و6.45b يقترحان أن f متزايدة لكل قيم x ، فإن كلا التمثيلين البيانيين غير مناسبين. لأنه قد تبين أنه لا يوجد أي تمثيل بياني يوجد به جميع سلوكيات الدالة. من خلال زيادة مدى قيم x إلى الفترة $[-15,5]$، نحصل على التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.46a. يوضح ذلك ما نطلق عليه السلوك العام للدالة. يمكنك هنا رؤية القيمة الصغرى المحلية عند $x=-10$ التي كانت مفقودة في تمثيلاتنا البيانية السابقة، لكن سلوك قيم x القريبة من الصفر غير واضحة. لرؤية ذلك، نحتاج إلى رسم تمثيل بياني منفصل مخصص لمدى أصغر من قيم x، كما هو واضح في الشكل 6.46b. لاحظ أنه يُمكننا بكل وضوح رؤية سلوك الدالة عندما تكون قيم x قريبة من الصفر. وعلى وجه الخصوص، يُمكننا رؤية القيمة العظمى المحلية عند $x=-0.1$ والقيمة الصغرى المحلية عند $x=0.1$ بكل وضوح. ونقول عادةً إن التمثيل البياني المماثل للشكل 6.46b، فهو يوضح السلوك المحلي للدالة. في الشكلين 6.47a و6.47b، رسمنا تمثيلات بيانية توضح السلوك العام والسلوك المحلي للدالة $f(x)$ (باللون الأزرق)، والدالة $f'(x)$ (باللون الأحمر) على المحاور نفسها. احرص على إيلاء اهتمام خاص بسلوك $f'(x)$ بالقرب من القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$.



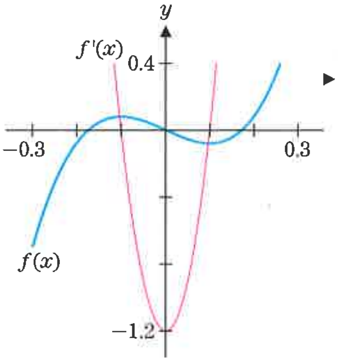
الشكل 6.46a
السلوك العام للدالة
$f(x)=3x^4+40x^3-0.06x^2-1.2x$



الشكل 6.46b
السلوك المحلي للدالة
$f(x)=3x^4+40x^3-0.06x^2-1.2x$



الشكل 6.47a
السلوك العام
$y=f(x)$ و $y=f'(x)$



الشكل 6.47b
السلوك المحلي
$y=f(x)$ و $y=f'(x)$

قد تكون لاحظت وجود علاقة بين القيم القصوى المحلية والفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة ومتناقصة. سنتناول ذلك في النظرية 4.2.

النظرية 4.2 اختبار المشتقة الأولى

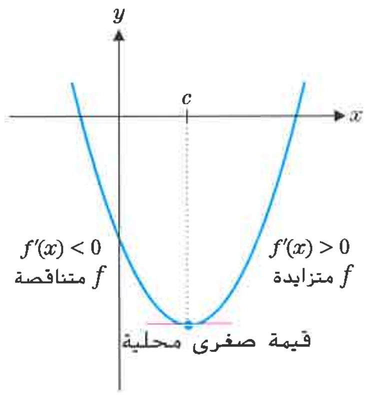
على فرض أن f متصلة في الفترة $[a,b]$ و $c\in(a,b)$ هو عدد حرج.

(i) إذا كانت $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,c)$ ، و $f'(x)<0$ لكل $x\in(c,b)$ (أي f تتغير من التزايد إلى التناقص عند c)، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.

(ii) إذا كانت $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,c)$ ، و $f'(x)>0$ لكل $x\in(c,b)$ (أي f تتغير من التناقص إلى التزايد عند c)، فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

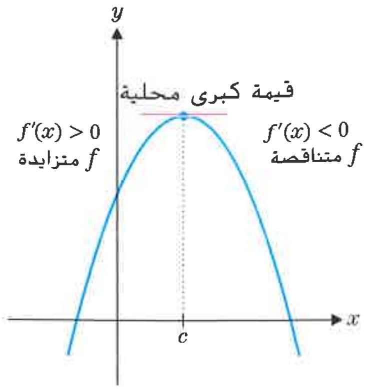
(iii) إذا كانت $f'(x)$ لها الإشارة نفسها في الفترتين (a,c) و (c,b)، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية.

من الأسهل التفكير في هذه النتيجة بيانيًا. إذا كانت f متزايدة إلى يسار عدد حرج، ومتناقصة إلى اليمين، فإنه يجب وجود قيمة عظمى محلية عند العدد الحرج. (انظر الشكل 3.48a). وبالمثل، إذا كانت f متناقصة إلى يسار عدد حرج، متزايدة إلى اليمين، فإنه يجب وجود قيمة صغرى محلية عند العدد الحرج. (انظر الشكل 6.48b). يقترح هذا تقديم برهان للنظرية، وقد تم وضع مهمة كتابة جميع التفاصيل في شكل تمرين.



الشكل 6.48b

قيمة صغرى محلية



الشكل 6.48a

قيمة كبرى محلية

مثال 4.3 إيجاد القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة من المثال 4.1. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.

الحل توصلنا في المثال 4.1 إلى أن

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ في } (-\infty, -4) \text{ و } (1, \infty) & f \text{ متزايدة} \\ < 0 \text{ في } (-4, 1). & f \text{ متناقصة} \end{cases}$$

وبناءً على اختبار المشتقة الأولى، نجد أن f لديها قيمة عظمى محلية عند $x = -4$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 1$.

تعمل نظرية 4.2 كذلك بشكل جيد على الدالة التي يوجد بها نقاط حرجة والمشتقة غير معرّفة.

مثال 4.4 إيجاد القيم القصوى المحلية لدالة مع أسس كسرية

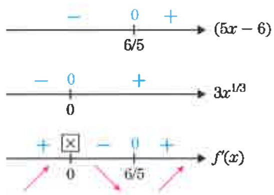
أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x^{5/3} - 3x^{2/3}$.

الحل لدينا هنا

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}$$

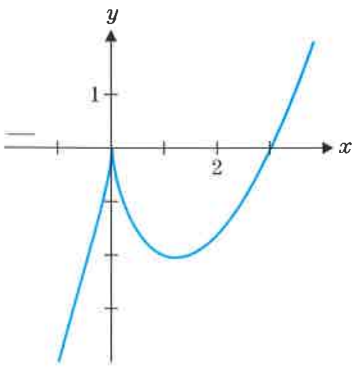
$$= \frac{5x - 6}{3x^{1/3}},$$

إذًا العددان الحرجان هما $\frac{6}{5}$ $[f'\left(\frac{6}{5}\right) = 0]$ و 0 $[f'(0)$ غير معرّفة]. ومرة أخرى، من خلال رسم خطوط الأعداد للعوامل، يُمكننا تحديد أين تكون f متزايدة، وأين تكون متناقصة. لقد وضعنا هنا $\boxtimes$ فوق الصفر على خط الأعداد الخاص بالدالة $f'(x)$ لتوضيح أن f' غير معرّفة عند $x = 0$. انطلاقًا من هذا، يُمكننا أن نعرف بمجرد النظر أين تكون f' موجبة، وأين تكون سالبة:



$$f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ في } (-\infty, 0) \text{ و } \left(\frac{6}{5}, \infty\right) & f \text{ متزايدة} \\ < 0 \text{ في } \left(0, \frac{6}{5}\right). & f \text{ متناقصة} \end{cases}$$

وبالتالي، لدى f قيمة عظمى محلية عند $x = 0$، وقيمة صغرى محلية عند $x = \frac{6}{5}$. ونرى بوضوح هاتان القيمتان المحليتان في التمثيل البياني بالشكل 6.49.



الشكل 6.49

$y = x^{5/3} - 3x^{2/3}$

مثال 4.5 إيجاد القيم القصوى المحلية التقريبية

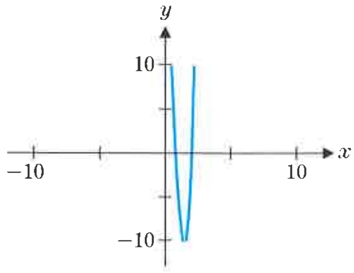
أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$ وارسم تمثيلًا بيانيًا.

الحل يوجد بالشكل 6.50 (في الصفحة التالية) تمثيلًا بيانيًا للدالة $y = f(x)$ باستخدام النافذة الأكثر الافتراضية شيوعًا في حاسبة التمثيل البياني. بدون مزيد من التحليل، لا نعرف ما إذا كان هذا التمثيل البياني يظهر جميع السلوكيات المهمة للدالة أم لا

[لاحظ أن بعض كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة (مثل $f(x) = x^4$) يوجد لها تمثيلات بيانية تشبه كثيرًا التمثيل البياني الموجود في الشكل 6.50]. أولًا، نقوم بحساب

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 10x - 31.$$

إلا أن هذا المشتقة لا يمكن تحليلها بسهولة إلى عوامل. يظهر التمثيل البياني للدالة $y = f'(x)$ (انظر الشكل 6.51) ثلاثة أصفار، كل واحد منها يقع بالقرب من $x = -3, -1.5$ و1.5. نظرًا لأن كثيرة الحدود التكعيبية يكون لديها ثلاثة أصفار بحد أقصى، فإنه ليس هناك أصفار أخرى. باستخدام طريقة نيوتن أو طريقة أخرى لإيجاد الجذر مُطبقة على $f'(x)$.] يُمكننا إيجاد تقريب للأصفار الثلاثة للدالة f'. نجد أن $a \approx -2.96008$، $b \approx -1.63816$ و $c \approx 1.59824$. من الشكل 6.51، نجد أن



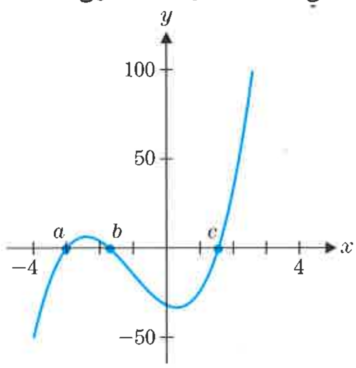
الشكل 6.50

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$

f متزايدة $\quad f'(x) > 0$ في (a, b) و (c, ∞)

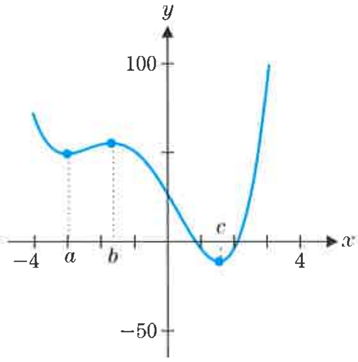
f متناقصة $\quad f'(x) < 0$ في $(-\infty, a)$ و (b, c).

من اختبار المشتقة الأولى، توجد قيمة صغرى محلية عند $a \approx -2.96008$. وقيمة عظمى محلية عند $b \approx -1.63816$، وقيمة صغرى محلية عند $c \approx 1.59824$. بما أن القيمة الصغرى المحلية فقط عند $x = c$ يُمكن رؤيتها في التمثيل البياني بالشكل 6.50، فإن هذا التمثيل البياني غير ملائم. من خلال تضييق مدى قيم x المعروضة، وتوسيع مدى قيم y المعروضة، يُمكننا الحصول على التمثيل البياني الأكثر إفادة في الشكل 6.52. لاحظ أن القيمة الصغرى المحلية عند $x = c \approx 1.59824$ هي كذلك القيمة الصغرى المطلقة.



الشكل 6.51

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 10x - 31$



الشكل 6.52

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$

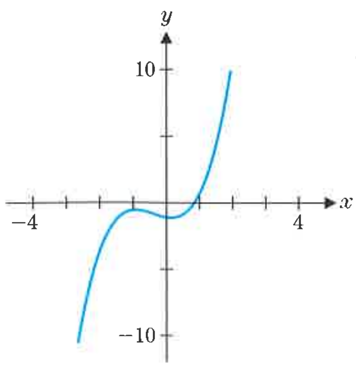
التمارين 6.4

تمارين كتابية

1. على فرض أن $f(0) = 2$ و f هي دالة متزايدة. لرسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$. يُمكنك البدء بوضع مخطط للنقطة (0 ,2). ثم ملأ التمثيل البياني الموجود على اليسار. لكن هل ستحرك قلم الرصاص لأعلى أم لأسفل؟ كيف يلائم هذا تعريف التزايد؟

2. على فرض أنك تسافر شرقًا على الطريق الذي يربط شرق البلاد بغربها. وعند وصولك إلى وجهتك. انتظرت فترة ثم رجعت إلى موطنك. وضّح اختبار المشتقة الأولى من وجهة نظر سرعاتك المتجهة (موجبة وسالبة) في هذه الرحلة.

3. على فرض أن لديك دالة قابلة للتفاضل f وبها عددان حرجان مميزان. أظهر الحاسوب الخاص بك تمثيلًا بيانيًا لها يأخذ شكل التمثيل البياني الوارد في الشكل.



ناقش احتمال أن يكون ذلك تمثيلًا بيانيًا توضيحيًا؛ بمعنى أنه هل من الممكن أن تكون هناك أي نقاط مهمة وغير موضحة في النافذة؟

4. على فرض أن الدالة في التمرين 3 يوجد بها ثلاثة أعداد حرجة مميزة. وضّح لماذا لا يُعد التمثيل البياني توضيحيًا. ناقش طريقة تغيير نافذة التمثيل البياني لعرض بقية التمثيل البياني.

في التمارين 10-1، أوجد (يدويًا) الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة. استخدم هذه المعلومات في تحديد جميع القيم القصوى المحلية وارسم تمثيلًا بيانيًا.

1. $y = x^3 - 3x + 2$

2. $y = x^3 + 2x^2 + 1$

3. $y = x^4 - 8x^2 + 1$

4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

5. $y = (x+1)^{2/3}$

6. $y = (x-1)^{1/3}$

7. $y = \sin x + \cos x$

8. $y = \sin^2 x$

9. $y = e^{x^2-1}$

10. $y = \ln(x^2 - 1)$

في التمارين 20-11، أوجد (يدويًا) جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف كل واحدة على أنها قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك.

11. $y = x^4 + 4x^3 - 2$

12. $y = x^5 - 5x^2 + 1$

13. $y = xe^{-2x}$

14. $y = x^2 e^{-x}$

15. $y = \tan^{-1}(x^2)$

16. $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

17. $y = \dfrac{x}{1 + x^3}$

18. $y = \dfrac{x}{1 + x^4}$

19. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

20. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

في التمارين 26-21، قرّب إحداثيات x لكل القيم القصوى، وارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح سلوك الدالة العام والمحلي.

21. $y = x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 40x - 2$

22. $y = x^4 - 16x^3 - 0.1x^2 + 0.5x - 1$

23. $y = x^5 - 200x^3 + 605x - 2$

24. $y = x^4 - 0.5x^3 - 0.02x^2 + 0.02x + 1$

25. $y = (x^2 + x + 0.45)e^{-2x}$

26. $y = x^5 \ln 8x^2$

في التمارين 32-27، ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة بالخصائص التالية.

27. $f(0) = 1$، $f(2) = 5$، $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $x > 2$، $f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 2$

28. $f(-1) = 1$، $f(2) = 5$، $f'(x) < 0$ لكل $x < -1$ و $x > 2$، $f'(x) > 0$ لكل $-1 < x < 2$، $f'(-1) = 0$، $f'(2)$ غير موجودة.

29. $f(3) = 0$، $f'(x) < 0$، لكل $x < 0$ و $x > 3$، $f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 3$، $f'(3) = 0$، $f(0)$ و $f'(0)$ غير موجودة.

30. $f(1) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2, f'(x) < 0$ لكل $x < 1, f'(x) > 0$ لكل $x > 1, f'(1) = 0$.

31. $f(-1) = f(2) = 0,\ f'(x) < 0$ لكل $x < -1$ و $0 < x < 2$ و $x > 2,\ f'(x) > 0$ لكل $-1 < x < 0,\ f'(-1)$ غير موجودة، $f'(2) = 0$.

32. $f(0) = 0,\ f(3) = -1,\ f'(x) < 0$ لكل $x > 3,\ f'(x) > 0$ لكل $x < 0$ و $0 < x < 1$ و $1 < x < 3,\ f'(0) = 0,\ f'(1)$ غير موجودة و $f'(3) = 0$.

في التمارين 38-33، أوجد (يدويًا) كافة خطوط التقارب والقيم القصوى، وارسم تمثيلًا بيانيًا.

33. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

34. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

36. $y = \dfrac{x}{1 - x^4}$

37. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

38. $y = \dfrac{x^2 + 2}{(x+1)^2}$

في التمارين 42-39، قدّر الأعداد الحرجة، وارسم تمثيلًا بيانيًا يوضّح السلوكين العام والمحلي.

39. $y = \dfrac{x - 30}{x^4 - 1}$

40. $y = \dfrac{x^2 - 8}{x^4 - 1}$

41. $y = \dfrac{x + 60}{x^2 + 1}$

42. $y = \dfrac{x - 60}{x^2 - 1}$

43. اكتب مثالًا بيانيًا يوضّح أن الجملة الآتية خطأ: إذا كانت $f(0) = 4$ و f هي دالة متناقصة. فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل واحد بالضبط.

44. على فرض أن f هي دالة متزايدة لها دالة معكوسة f^{-1}. بيّن أن f^{-1} هي أيضًا دالة متزايدة.

45. اذكر مجال الدالة $\sin^{-1} x$، وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

46. اذكر مجال الدالة $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1} x\right)$، وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

47. إذا كانت f و g دالتين تزايديتين، فهل صحيح أن $f(g(x))$ تُعد كذلك متزايدة؟ إما أن تثبت صحة العبارة أو اعرض مثالًا يثبت خطأها.

48. إذا كانت f و g دالتين متزايدتين و $f(5) = 0$، أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للقيم التالية: $g(1), g(4), g(f(1)), g(f(4))$.

49. لأجل

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{إذا كانت } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كانت } x = 0 \end{cases}$$

اثبت $f'(0) > 0$,

لكن f غير متزايدة في أي فترة حول 0. وضّح لماذا لا يتناقض ذلك مع النظرية 4.1.

50. لأجل $f(x) = x^3$. وضّح أن f متزايدة في أي فترة حول 0. غير أن $f'(0) = 0$. وضّح لماذا لا يتناقض ذلك مع النظرية 4.1.

51. أثبت النظرية 4.2 (اختبار المشتقة الأولى).

.52 أعطِ حجة بيانية بحيث إذا كانت $f(a) = g(a)$. و $f'(x) > g'(x)$ لكل $x > a$، فإن $f(x) > g(x)$ لكل $x > a$. استخدم نظرية القيمة المتوسطة لإثبات ذلك.

في التمارين 56–53، استخدم نتيجة التمرين 52 للتحقق من المتباينة.

.53 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ لكل $x > 1$ **.54** $x > \sin x$ لكل $x > 0$

.55 $e^x > x + 1$ لكل $x > 0$ **.56** $x - 1 > \ln x$ لكل $x > 1$

.57 وضّح أن $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ هي دالة متزايدة، إذا كان $b^2 \le 3c$. أوجد شرطًا للمعاملين b و c أن تضمن أن $f(x) = x^5 + bx^3 + cx + d$ هي دالة متزايدة.

.58 على فرض أن f و g دالتين قابلتين للتفاضل، و $x = c$ عدد حرج للدالتين. أثبت أن تركيب الدالة $f \circ g$ يوجد به كذلك عدد حرج عند $x = c$ (إن كان ذلك صحيحًا)، أو أثبت خطأ ذلك (بمثال مضاد).

التطبيقات

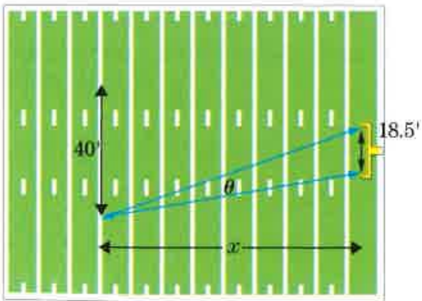
.59 على فرض أنه يمكننا إيجاد إجمالي مبيعات منتج ما بعد مرور t شهر باستخدام $s(t) = \sqrt{t+4}$ ألف درهم. احسب وفسر $s'(t)$.

.60 في التمرين 59، وضّح أن $s'(t) > 0$ لكل $t > 0$. وضّح باستخدام المصطلحات التجارية أنه لا يمكن أن يكون لدينا $s'(t) < 0$.

.61 يوضّح الجدول معامل الاحتكاك μ للثلج في صورة دالة لدرجة الحرارة. كلما انخفضت قيمة μ، زادت درجة "انزلاق" الثلج. قدّر $\mu'(C)$ عند $C = -10$ و $C = -6$ (b) (a). إذا كان التزلج يزيد من درجة حرارة الثلج، فهل يزيد هذا من صعوبة التزلج أم يزيد من سهولته؟ اشرح بإيجاز.

°C	−12	−10	−8	−6	−4	−2
μ	0.0048	0.0045	0.0043	0.0045	0.0048	0.0055

.62 في ملعب كرة قدم بإحدى الكليات وبالأبعاد الموضحة، يُمكننا إيجاد الزاوية θ الخاصة بتسديد هدف خارجي



على مسافة (أفقية) قدرها x قدم من قائم المرمى باستخدام $\theta(x) = \tan^{-1}(29.25/x) - \tan^{-1}(10.75/x)$. وضّح أن $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$ متزايدة عند لكل $a > t$، واستخدم هذه الحقيقة في توضيح أن $\theta(x)$ دالة متناقصة عند $x \ge 30$. وغالبًا ما يقول المعلقون على المباريات عن محاولة تسديد الهدف الخارجية $(50 \le x \le 60)$. أنه يُمكن للفريق تحسين الزاوية بالرجوع 5 ياردات عند حدوث خطأ. فهل هذا صحيح؟

تمارين استكشافية

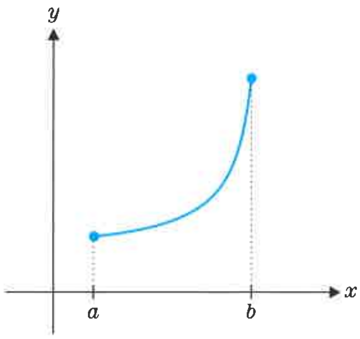
.1 في هذا التمرين، ندرس قدرة اليراعات على إحداث تزامن في وميضها. على فرض أن الدالة f تمثل إيقاع يراع واحد؛ فإن اليراع يومض كلما كان $f(t)$ يساوي عددًا صحيحًا. على فرض أن $e(t)$ تمثل إيقاع يراع مجاور. حيث أيضًا $e(t) = n$ بالنسبة للعدد الصحيح n، كلما أصدر اليراع المجاور وميضًا. أحد نماذج التفاعل بين اليراع هو $f'(t) = \omega + A\sin[e(t) - f(t)]$ لأجل للثابتين ω و A. إذا حدث تزامن بين اليراع $[e(t) = f(t)]$ ، فإن $f'(t) = \omega$. وبذلك يومض اليراع كل $1/\omega$ وحدة زمن. على فرض أن الفرق بين $e(t)$ و $f(t)$ أصغر من π. وضّح أنه إذا كانت $f(t) < e(t)$ ، فإن $f'(t) > \omega$. وضّح لماذا يعني ذلك أن اليراع المنفرد يزيد من سرعة وميضه ليكون متوافقًا مع اليراع المجاور له. بالمثل، ناقش ماذا سيحدث إذا كانت $f(t) > e(t)$.

.2 في رياضات مثل كرة القدم أو الهوكي التي يمكن حدوث تعادل فيها، يعتمد احتمال فوز الفريق الأقوى بشكل مثير على عدد الأهداف التي يحرزها. على فرض أنه عند أي نقطة، يكون احتمال إحراز الفريق A الهدف التالي هو p حيث $0 < p < 1$. إذا تم إحراز هدفين، فإنه قد يكون تعادلًا 1–1 نتيجة إحراز الفريق A الهدف الأول (الاحتمال p)، ثم أحرز الفريق B هدف التعادل (الاحتمال $1 - p$)، أو العكس. وبذلك يكون احتمال التعادل بهدفين هو $2p(1-p)$. وببساطة، يكون احتمال المباراة التي بها 4 أهداف بتعادل 2–2 هو $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}p^2(1-p)^2$، ويكون احتمال المباراة التي بها 6 أهداف بتعادل 3–3 هو $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}p^3(1-p)^3$، وهكذا. عندما يزداد عدد الأهداف، هل يزيد احتمال التعادل أم يقل؟ لإيجاد ذلك، ينبغي لنا أولًا توضيح أن $\frac{(2x+2)(2x+1)}{(x+1)^2} < 4$ لكل $x > 0$ و $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ بالنسبة لـ $0 \le x \le 1$. واستخدم هذه المتباينات لتوضيح أن احتمال التعادل يقل كلما زاد عدد الأهداف (المتساوية بين الفريقين). في المباراة التي بها هدف واحد، يكون احتمال فوز الفريق A هو p. وفي المباراة التي بها هدفان، يكون احتمال فوز الفريق A هو p^2. وفي المباراة التي بها ثلاثة أهداف، يكون احتمال فوز الفريق A هو $p^3 + 3p^2(1-p)$. وفي المباراة التي بها أربعة أهداف، يكون احتمال فوز الفريق A هو $p^4 + 4p^3(1-p)$. وفي المباراة التي بها خمسة أهداف، يكون احتمال فوز الفريق A هو $p^5 + 5p^4(1-p) + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}p^3(1-p)^2$. استكشف مدى زيادة احتمال فوز الفريق A كلما زاد عدد الأهداف

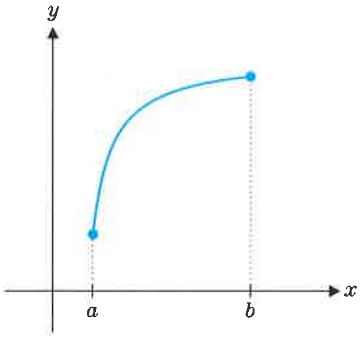
الدرس

6-5 التقعر واختبار المشتقة الثانية

في الدرس السابق، تعرفنا على كيفية تحديد أين تكون الدالة متزايدة وأين تكون متناقصة، ومدى ارتباط ذلك برسم تمثيل بياني للدالة. وللأسف، لا تكفي معرفة أين تكون الدالة متزايدة وأين تكون متناقصة لرسم تمثيل بياني جيد. في الشكلين 6.53a و 6.53b، نوضح شكلين مختلفين تمامًا للدوال المتزايدة التي تربط بين نقطتين.

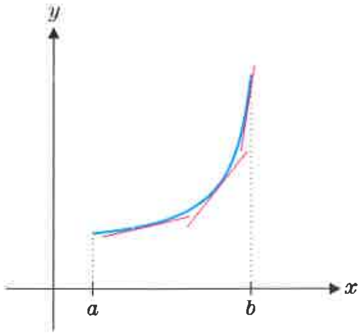


الشكل **6 53a**
دالة متزايدة

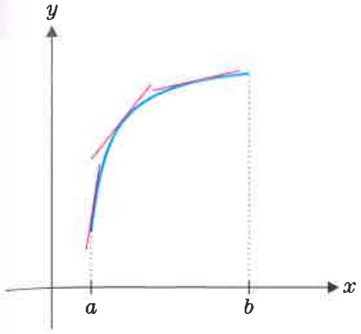


الشكل **6.53b**
دالة متزايدة

لاحظ أن معدل النمو في الشكل 6.53a تزايدي، بينما معدل النمو الموضح في الشكل 6.53b تناقصي. ولتوضيح هذا بصورة أكبر، يُعد الشكلان 6.54a و 6.54b هما مشابهان للشكلين 6.53a و 6.53b على الترتيب، لكن مع رسم عدد قليل من المماسات.

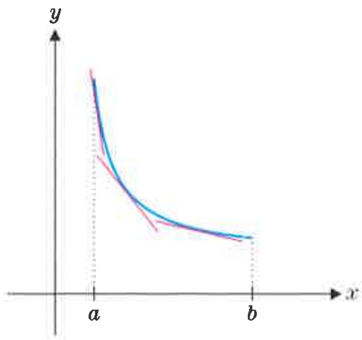


الشكل **6.54a**
تقّعر إلى الأعلى، تزايدي

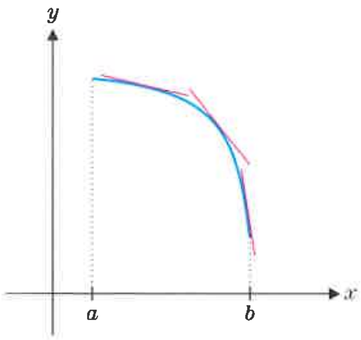


الشكل **6.54b**
تقعر إلى الأسفل، تزايدي

رغم أن جميع المماسات لها ميل موجب [حيث $f'(x) > 0$]، إلا أن ميول المماسات في الشكل 6.54a تزايدي، بينما تكون متناقصة في الشكل 6.54b. نطلق على التمثيل البياني في الشكل 6.54a **تقّعر إلى الأعلى** والتمثيل البياني في الشكل 6.54b **تقّعر إلى الأسفل**. ويُعد هذا الموقف مشابهًا للدوال المتناقصة. في الشكلين 6.55a و6.55b.



الشكل **6.55a**
تقّعر إلى الأعلى، تناقصي



الشكل **6.55b**
تقّعر إلى الأسفل، تناقصي

نوضّح شكلين مختلفين للدوال المتناقصة. يظهر التمثيل البياني الوارد في الشكل 6.55a تقعرًا إلى الأعلى (ازدياد ميول المماسات) ويظهر التمثيل البياني الوارد في الشكل 6.55b تقعرًا إلى الأسفل (نقصان ميول المماسات). ونلخص هذا في التعريف 5.1 .

التعريف 5.1

لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f

(i) **تقعّرًا إلى الأعلى** في I إذا كانت f' متزايدة في I أو

(ii) **تقعّرًا إلى الأسفل** في I إذا كانت f' متناقصة في I .

لاحظ أنه يُمكنك معرفة متى تكون f' متزايدة أو متناقصة من مشتقة f' (أي، f''). تربط النظرية 5.1 التقعر بما نعرفه من قبل حول الدوال المتزايدة والمتناقصة. يُعد البرهان تطبيقًا مباشرًا على النظرية 4.1 الخاصة بالتعريف 5.1.

النظرية 5.1

على فرض أن f'' موجودة في الفترة I .

(i) إذا كانت $f''(x) > 0$ في I . فإن التمثيل البياني للدالة f يمثل تقعرًا إلى الأعلى في I .

(ii) إذا كانت $f''(x) < 0$ في I . فإن التمثيل البياني للدالة f يمثل تقعرًا إلى الأسفل في I .

مثال 5.1 تحديد التقعر

حدد أين يبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ تقعرًا إلى الأعلى. وأين يبيّن تقعرًا إلى الأسفل، وارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح جميع المميزات المهمة للدالة.

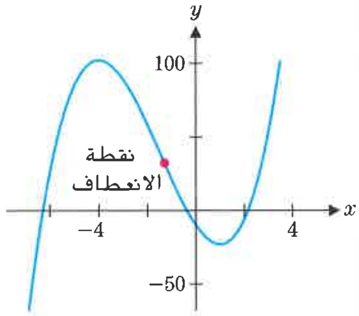
الحل في ما يلي. يوجد لدينا $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$

ومن عملنا في المثال 4.3، لدينا

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & (-\infty, -4) \text{ و } (1, \infty) \text{ في } & f \text{ متزايدة} \\ < 0 & (-4, 1) \text{ في } & f \text{ متناقصة} \end{cases}$$

ولدينا كذلك

$$f''(x) = 12x + 18 \begin{cases} > 0, & x > -\frac{3}{2} \text{ لكل } & \text{تقعر لأعلى} \\ < 0, & x < -\frac{3}{2} \text{ لكل } & \text{تقعر لأسفل} \end{cases}$$



الشكل 6.56

$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$

باستخدام جميع هذه المعلومات، نستطيع رسم التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.56 . لاحظ أنه في النقطة $\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ ، يتغير التمثيل البياني من التقعر إلى أسفل للتقعر إلى أعلى. يُطلق على هذه النقاط نقاط الانعطاف. وقد عرفناها بدقة أكبر في التعريف 5.2.■

التعريف 5.2

على فرض أن f متصلة في الفترة (a, b) وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $c \in (a, b)$ (أي، يتقعر التمثيل البياني إلى الأسفل على جانب واحد من c ، بينما يتقعر إلى الأعلى على الجانب الآخر). إذًا، يُطلق على النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف** لـ f .

ملاحظات

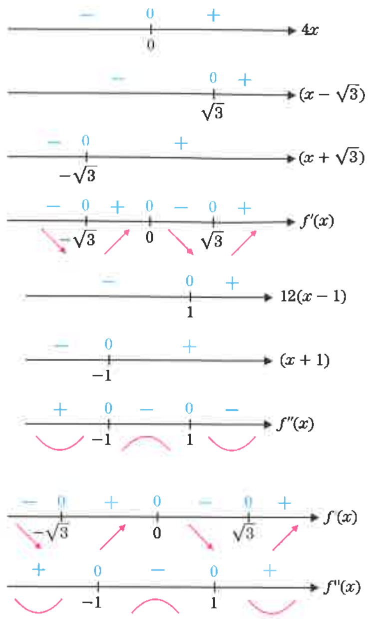
إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف، فإنه إما $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ تكون غير معرفة. إذًا، إيجاد جميع النقاط حيث $f''(x)$ تساوي صفرًا أو غير معرفة يتيح أمامك جميع الحالات الممكنة لنقاط الانعطاف. لكن كُن حذرًا أنه ليست جميع النقاط حيث $f''(x)$ تساوي صفرًا أو غير معرفة تتوافق مع نقاط الانعطاف.

مثال 5.2 تحديد التقعر وموقع نقاط الانعطاف

حدد أين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ متقعرًا إلى الأعلى وأين يكون متقعرًا إلى الأسفل، وأوجد جميع نقاط الانعطاف، وارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل في ما يلي، يوجد لدينا

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$
$$= 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$



لقد رسمنا خطوط أعداد لعوامل $f'(x)$ في الهامش. وباستخدام خطوط أعداد، نجد أن

$$f'(x)\begin{cases} > 0, & (-\sqrt{3}, 0) \text{ و } (\sqrt{3}, \infty) \text{ في } \quad f \text{ متزايدة} \\ < 0, & (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ و } (0, \sqrt{3}) \text{ في } \quad f \text{ متناقصة} \end{cases}$$

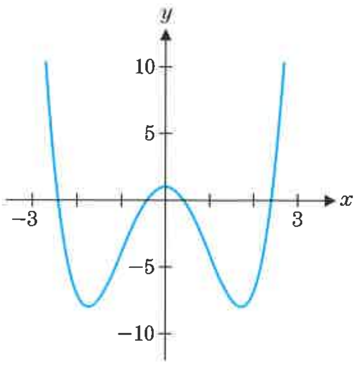
ثم، يصبح لدينا

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$$

لقد رسمنا خطّي أعداد لعاملين في الهامش. باستخدام خطّي الأعداد، نجد أن

$$f''(x)\begin{cases} > 0, & (-\infty, -1) \text{ و } (1, \infty) \text{ في } \quad \text{تقعر لأعلى} \\ < 0, & (-1, 1) \text{ في } \quad \text{تقعر لأسفل} \end{cases}$$

لتسهيل الأمر، وضحنا التقعر أدناه في خط الأعداد السفلي بإضافة قطع مستقيمة توضح تقعّرًا صغيرًا إلى الأعلى وتقعّرًا صغيرًا إلى الأسفل. في النهاية، لاحظ أنه بما أن التمثيل البياني يغير من التقعر عند $x = -1$ و$x = 1$، فإن هناك نقطتي انعطاف تقع عند $(-1, -4)$ و$(1, -4)$. باستخدام جميع هذه المعلومات، يُمكننا رسم التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.57. لتسهيل الأمر عليك، أعدنا كتابة خطوط الأعداد الخاصة بـ $f'(x)$ و $f''(x)$ معًا فوق الشكل. ■



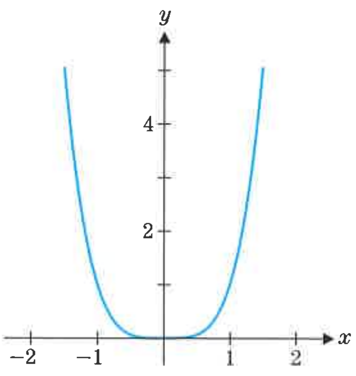
الشكل 6.57
$y = x^4 - 6x^2 + 1$

كما نرى في المثال 5.3، فإن كون $f''(x) = 0$ لا يدل على وجود نقطة انعطاف.

مثال 5.3 تمثيل بياني بدون نقطة انعطاف

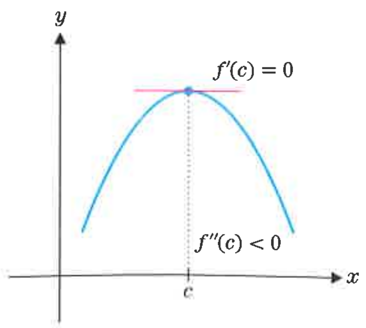
حدد تقعر وموقع أي نقطة انعطاف $f(x) = x^4$.

الحل لا توجد صعوبة في هذه الدالة. لدينا هنا $f'(x) = 4x^3$ و$f''(x) = 12x^2$. بما أن $f'(x) > 0$ لكل $x > 0$ و $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$، فإننا نعرف أن f متزايدة لكل $x > 0$ ومتناقصة لكل $x < 0$. وكذلك، $f''(x) > 0$ لكل $x \neq 0$، حيث $f''(0) = 0$. إذًا، التمثيل البياني يتقعر إلى الأعلى لكل $x \neq 0$. وكذلك، رغم أن $f''(0) = 0$، إلا أنه لا توجد نقطة انعطاف عند $x = 0$. يتضمن الشكل 6.58 تمثيلًا بيانيًا للدالة. ■

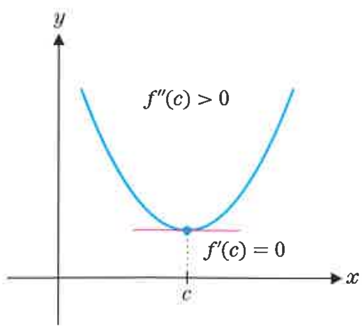


الشكل 6.58
$y = x^4$

والآن نستكشف العلاقة بين المشتقات من الدرجة الثانية والقيم القصوى. على فرض أن $f'(c) = 0$ وأن التمثيل البياني للدالة f متقعرًا إلى الأعلى في بعض الفترات المفتوحة التي تتضمن c. فإنه بالقرب من $x = c$، يأخذ التمثيل البياني الشكل في 6.59a. وبالتالي تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية. وبالمثل، إذا كانت $f'(c) = 0$ والتمثيل البياني للدالة f متقعرًا إلى الأعلى في بعض الفترات المفتوحة التي تتضمن c، فإنه بالقرب من $x = c$، يأخذ التمثيل البياني الشكل في 6.59b وبالتالي تكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية.



الشكل 6 59a
قيمة عظمى محلية



الشكل 6.59b
قيمة صغرى محلية

وسنتناول ذلك بدقة أكبر في النظرية 5.2.

النظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية)

على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a, b) و$f'(c) = 0$ ، لكل $c \in (a, b)$.

(i) إذا كانت $f''(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.

(ii) إذا كانت $f''(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

وسنضع البرهان الرسمي لهذه النظرية في شكل تمرين. عند تطبيق النظرية، فكر ببساطة في الشكلين 6.59a و6.59b.

مثال 5.4 استخدام اختبار المشتقة الثانية في لإيجاد القيم القصوى

استخدم اختبار المشتقة الثانية في لإيجاد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$.

الحل لدينا:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$$
$$= 4x(x - 2)(x + 2)$$

إذًا الأعداد الحرجة هي $x = 0$ ، 2 و -2 . لدينا أيضًا

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

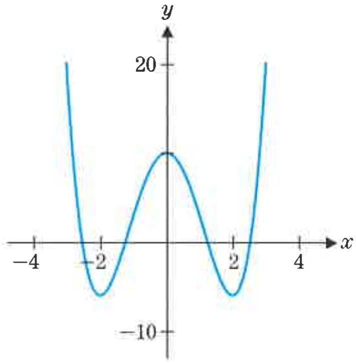
وهكذا،

$$f''(0) = -16 < 0$$
$$f''(-2) = 32 > 0$$

و

$$f''(2) = 32 > 0$$

إذًا، باستخدام اختبار المشتقة الثانية، تكون $f(0)$ هي القيمة العظمى المحلية، و $f(-2)$ و، $f(2)$ هما قيمتين صغريين محليتين. نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالة $y = f(x)$ في الشكل 6.60. ■



الشكل **6.60**

$y = x^4 - 8x^2 + 10$

ملحوظة 5.1

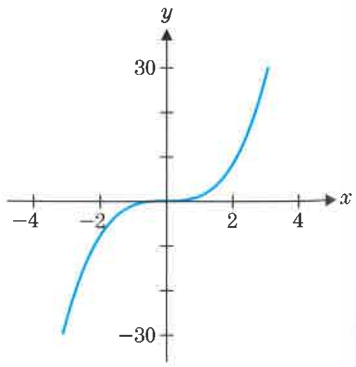
إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفيّن، فإن اختبار المشتقة الثانية لا يعطي أي استنتاج. بمعنى أنه قد تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك. في هذه الحالة، يجب أن نعتمد على طرائق أخرى (مثل اختبار المشتقة الأولى) في تحديد ما إذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية. نوضّح هذا في المثال 5.5.

مثال 5.5 الدوال الحصرية على اختبار المشتقة الثانية

استخدم اختبار المشتقة الثانية في محاولة تصنيف أي قيم قصوى محلية لأجل (a) $f(x) = x^3$ و(b) $g(x) = (x + 1)^4$ و(c) $h(x) = -x^4$

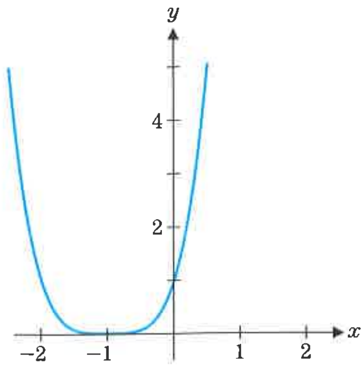
الحل (a) لاحظ أن $f'(x) = 3x^2$ و$f''(x) = 6x$. إذًا العدد الحرج الوحيد هو $x = 0$ و$f''(0) = 0$ كذلك. سنضع ذلك في شكل تمرين لتوضيح أن النقطة $(0, 0)$ ليست قيمة قصوى محلية. (انظر الشكل 6.61a).

(b) لدينا هنا $g'(x) = 4(x + 1)^3$ و$g''(x) = 12(x + 1)^2$. العدد الحرج الوحيد هنا هو $x = -1$ و$g''(-1) = 0$. وفي هذه الحالة، رغم أن $g'(x) < 0$ لكل $x < -1$ و $g'(x) > 0$ لكل $x > -1$ ؛ إذًا باستخدام اختبار المشتقة الأولى، النقطة $(0, 0)$ تُعد قيمة صغرى محلية. (انظر الشكل 6.61b).

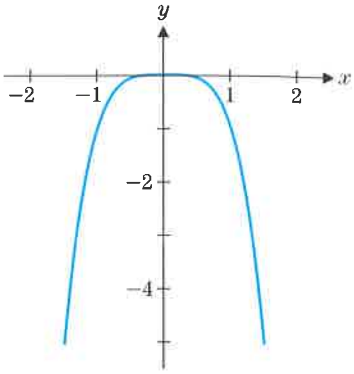


الشكل **6.61a**

$y = x^3$



الشكل **6.61b**
$y = (x+1)^4$



الشكل **6.61c**
$y = -x^4$

(c) لدينا $h'(x) = -4x^3$ و$h''(x) = -12x^2$. ومرة أخرى، يكون العدد الحرج الوحيد هو $x = 0$ ، $h''(0) = 0$ وسنضع ذلك في شكل تمرين لتوضيح أن $(0, 0)$ هي قيمة عظمى محلية لأجل h . (انظر الشكل 6.61c).

نستخدم معلومات حول المشتقتين الأولى والثانية لمساعدتنا في إنشاء تمثيل بياني معبر للدالة، كما هو الحال في المثال 5.6.

مثال 5.6 رسم تمثيل بياني لدالة نسبية

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = x + \frac{25}{x}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل يتكون مجال f من جميع الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$. إذًا،

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

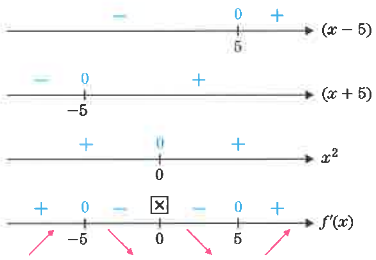
$$= \frac{(x-5)(x+5)}{x^2} \qquad \text{اجمع الكسور}$$

إذًا، العددان الحرجان الوحيدان هما $x = -5$ و $x = 5$ (لماذا $x = 0$ لا يُعد عددًا حرجًا؟) بالنظر إلى العوامل الثلاثة في $f'(x)$ ، نحصل على خطوط الأعداد الموضحة في الهامش. بالتالي،

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & (-\infty, -5) \text{ و } (5, \infty) \text{ في} \\ < 0, & (-5, 0) \text{ و } (0, 5) \text{ في} \end{cases} \qquad \begin{matrix} f \text{ متزايدة} \\ f \text{ متناقصة} \end{matrix}$$

كذلك،

$$f''(x) = \frac{50}{x^3} \begin{cases} > 0, & (0, \infty) \text{ في} \\ < 0, & (-\infty, 0) \text{ في} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{تقعر لأعلى} \\ \text{تقعر لأسفل} \end{matrix}$$



كُن حذرًا هنا. لا توجد نقطة انعطاف في التمثيل البياني، رغم أن التمثيل البياني متقعر إلى أعلى في أحد جوانب $x = 0$ ومتقعر إلى أسفل في الجانب الآخر. (لم لا؟) يُمكننا الآن إما استخدام اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى المحلية. بما أنّ

$$f''(5) = \frac{50}{125} > 0$$

و

$$f''(-5) = -\frac{50}{125} < 0$$

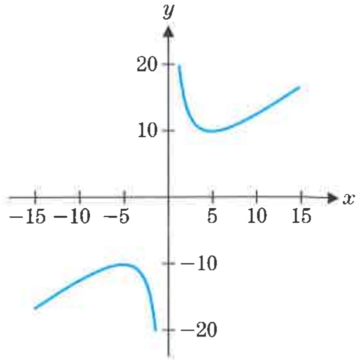
توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 5$ وقيمة عظمى محلية عند $x = -5$ عند استخدام اختبار المشتقة الثانية. وأخيرًا، قبل أن نرسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا، نحتاج إلى معرفة ماذا يحدث للتمثيل البياني بالقرب من $x = 0$ حيث إن العدد 0 ليس في مجال f . لدينا هنا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{25}{x}\right) = \infty$$

و

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{25}{x}\right) = -\infty$$

إذًا يوجد خط تقارب عند $x = 0$. وعند تجميع كل هذه المعلومات، نحصل على التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.62. ■



الشكل **6.62**

$y = x + \frac{25}{x}$

في المثال 5.6، وجدنا قيمة $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ وقيمة $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ لكشف سلوك الدالة بالقرب من $x = 0$. وذلك لأن $x = 0$ ليس في مجال f . وفي المثال 5.7، سوف نرى أنه نظرًا لأن $x = -2$ ليس في مجال f' (رغم أنه في مجال f)، يجب ايجاد قيمة $\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x)$ وقيمة $\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)$ لكشف سلوك المماسات بالقرب من $x = -2$

مثال 5.7 دالة لها مماس عمودي عند نقطة انعطاف

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = (x+2)^{1/5} + 4$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل لاحظ أولًا أن مجال f هو الخط الحقيقي بأكمله. لدينا أيضًا

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x+2)^{-4/5} > 0 \quad x \neq -2 \text{ لكل}$$

إذًا، f متزايدة في مجالها، عدا عند $x = -2$ [العدد الحرج الوحيد الذي تكون عنده $f'(-2)$ غير معرفة]. ويدل هذا أيضًا على أن f ليس لديها قيم قصوى محلية. كذلك،

$$f''(x) = -\frac{4}{25}(x+2)^{-9/5} \begin{cases} > 0, \text{ on } (-\infty, -2) & \text{تقعر لأعلى} \\ < 0, \text{ on } (-2, \infty) & \text{تقعر لأسفل} \end{cases}$$

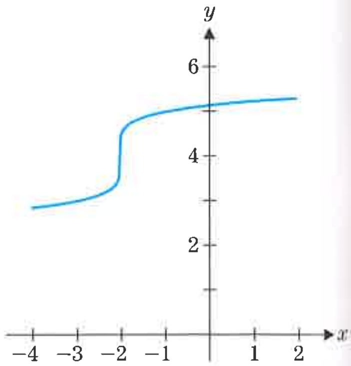
إذًا، لا توجد نقطة انعطاف عند $x = -2$. في هذه الحالة، تكون $f'(x)$ غير معرفة عند $x = -2$. بما أن -2 موجود في مجال f . لكنه ليس في مجال f' ، إذًا

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{5}(x+2)^{-4/5} = \infty$$

و

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{5}(x+2)^{-4/5} = \infty$$

ويدل هذا على أن التمثيل البياني لديه مماس رأسي عند $x = -2$. بتجميع هذه المعلومات، نتوصل إلى التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.63. ■



الشكل **6.63**

$y = (x+2)^{1/5} + 4$

التمارين 6.5

تمارين كتابية

1. عادةً يُقال إن التمثيل البياني متقعر إلى الأعلى إذا كان يُمكن لشكله أن "يحمل الماء". ويُعد هذا صحيحًا في حالة القطع المكافئ $y = x^2$. لكن هل يُعد صحيحًا بالنسبة لبعض التمثيلات البيانية الأخرى مثل $y = 1/x^2$ ؟ قد يكون من المفيد أن نضع مفهومًا ضمن سياق لغة الحياة اليومية، لكن هناك خطر يكمن في التبسيط المبالغ فيه. هل تظن أن تعبير "يحمل الماء" مفيدًا؟ اكتب الوصف الخاص بك للتقعر إلى أعلى باستخدام لغة الحياة اليومية. (إرشاد: تتضمن الصور الأكثر شيوعًا شكلَي الابتسام والامتعاض)

2. راجع التعداد السكاني في الولايات المتحدة منذ عام 1800. من 1800 إلى 1900، تزداد الأعداد بزيادة العقود. أثبت أن هذا يعني أن منحنى السكان متقعرًا إلى أعلى. ومن 1960 إلى 1990، تزداد الأعداد مع الثبات التقريبي للعقود. أثبت أن هذا يعني أن منحنى السكان قريب من نقطة تجعله ليس متقعرًا إلى أعلى ولا إلى أسفل. لماذا لا يعني هذا بالضرورة أننا بصدد نقطة انعطاف؟

3. يكمن السبب في استكشاف البورصة في الشراء بسعر منخفض والبيع بسعر مرتفع. لكن، كيف تعرف ما إذا كان السعر قد وصل إلى ذروته؟ عندما ينخفض سعر سهم، يمكنك ملاحظة أنه كان عند الذروة، لكن الآن قد فات الأوان! قد يساعدنا التقعر في ذلك. على فرض أن سعر سهم يزداد، ويتقعر منحنى السعر إلى أعلى. لماذا تعتقد أنه سيستمر في الزيادة؟ هل هذا الوقت مناسب للشراء؟ والآن، على فرض أن السعر يزداد، لكن المنحنى يتقعر إلى الأسفل. لماذا ينبغي لك الاستعداد للبيع؟ أخيرًا، على فرض أن السعر ينخفض. إذا كان المنحنى متقعرًا لأعلى، فهل ينبغي لك الشراء أم البيع؟ ماذا سيكون الوضع إن كان المنحنى متقعر إلى الأسفل؟

4. على فرض أن $f(t)$ هي كمية المال المتوفر في حسابك البنكي في الفترة الزمنية t . اشرح، في ما يتعلق بالإنفاق والادخار، ما الذي سيجعل $f(t)$ متناقصة ومتقعرة إلى الأسفل؛ أو متزايدة ومتقعرة إلى الأعلى؛ أو متناقصة ومتقعرة إلى الأعلى.

في التمارين 1–8، حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاة متقعرًا إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها متقعرًا إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

1. $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$
2. $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$
3. $f(x)=x+1/x$
4. $f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$
5. $f(x)=\sin x-\cos x$
6. $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$
7. $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$
8. $f(x)=xe^{-4x}$

في التمارين 9–14، أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية.

9. $f(x)=x^4+4x^3-1$
10. $f(x)=x^4+4x^2+1$
11. $f(x)=xe^{-x}$
12. $f(x)=e^{-x^2}$
13. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}$
14. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

في التمارين 15–26، حدد جميع المميزات المهمة يدويًا وارسم تمثيلًا بيانيًا.

15. $f(x)=(x^2+1)^{2/3}$
16. $f(x)=x\ln x$
17. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$
18. $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$
19. $f(x)=\sin x+\cos x$
20. $f(x)=e^{-x}\sin x$
21. $f(x)=x^{3/4}-4x^{1/4}$
22. $f(x)=x^{2/3}-4x^{1/3}$
23. $f(x)=x|x|$
24. $f(x)=x^2|x|$
25. $f(x)=x^{1/5}(x+1)$
26. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

في التمرينات 27–36، حدد جميع المميزات المهمة (تقريبيًا إذا لزم الأمر) وارسم تمثيلًا بيانيًا.

27. $f(x)=x^4-26x^3+x$
28. $f(x)=2x^4-11x^3+17x^2$
29. $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$
30. $f(x)=\sqrt{x^3+1}$
31. $f(x)=x^4-16x^3+42x^2-39.6x+14$
32. $f(x)=x^4+32x^3-0.02x^2-0.8x$
33. $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$
34. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$
35. $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$
36. $f(x)=e^{-2x}\cos x$

في التمارين 37–40، ارسم تمثيلًا بيانيًا بالخصائص التالية.

37. $f(0)=0$ ، $f'(x)>0$ لكل $x<-1$ و $-1<x<1$ ، $f'(x)<0$ لكل $x>1$ ، $f''(x)>0$ لكل $x<-1$ ، $0<x<1$ و $x>1$ ، $f''(x)<0$ لكل $-1<x<0$

38. $f(0)=2$ ، $f'(x)>0$ لكل x ، $f'(0)=1$ ، $f''(x)>0$ لكل $x<0$، $f''(x)<0$ لكل $x>0$

39. $f(0)=0$ ، $f(-1)=-1$ ، $f(1)=1$ ، $f'(x)>0$ لكل $x<-1$ و $0<x<1$ ، $f'(x)<0$ لكل $-1<x<0$ و $x>1$ ، $f''(x)<0$ لكل $x<0$ و $x>0$

40. $f(1)=0$ ، $f'(x)<0$ لكل $x<1$ ، $f'(x)>0$ لكل $x>1$ ، $f''(x)<0$ لكل $x<1$ و $x>1$

41. وضّح أن أي $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ مكعبة لديها نقطة انعطاف. أوجد الشروط التي تتوفر في معاملات $a-e$ وتضمن أن $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ من الدرجة الرابعة لديها نقطتا انعطاف.

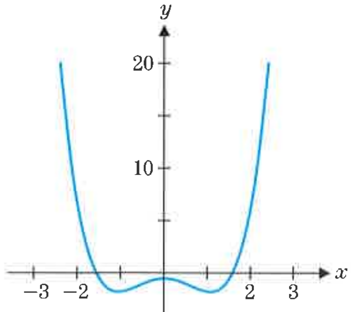
42. إذا كان لدى الدالتين f و g مشتقتان لكل قيم x ، $f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=0$ و$f''(0)>0$ و$g''(0)<0$. فاكتب بالتفصيل قدر الإمكان ما يُمكن قوله حول ما إذا كانت $f(x)>g(x)$ أو $f(x)<g(x)$

43. اذكر مثالًا على دالة يوضّح أن البيان التالي خاطئ. إذا كان التمثيل البياني للدالة $y=f(x)$ متقعرًا إلى أسفل لكل x ، فإن المعادلة $f(x)=0$ يوجد لها حل واحد على الأقل.

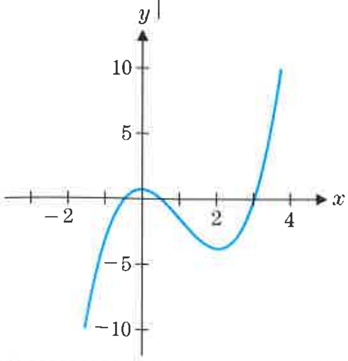
44. حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صح أم خطأ. إذا كانت $f(0)=1$ ، $f''(x)$ موجودة لكل x والتمثيل البياني للدالة $y=f(x)$ متقعر إلى أسفل لكل x ، فإن المعادلة $f(x)=0$ يوجد لها حل واحد على الأقل.

في التمرينين 45 و46، قدّر الفترات المتزايدة والمتناقصة، ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

45.



46.



.47 كرر التمرينين 45 و 46 إذا كان التمثيل البياني المعطى هو ل f' (a) أو f'' (b) بدلًا من f .

.48 أثبت النظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية). (ارشاد: فكر في ما يمكن قوله عن تعريف $f''(c)$ عندما $f''(c) > 0$ أو $f''(c) < 0$).

.49 وضّح أن الدالة في المثال 5.4 يُمكن كتابتها في شكل $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 6$. واستنتج أن القيمة الصغرى المطلقة لـf هي -6 ، وتقع عند $x = \pm 2$. أجري تحليلًا مشابهًا عند $g(x) = x^4 - 6x^2 + 1$.

.50 لأجل $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2$ ، وضّح أنه لا يوجد نقطتيّ انعطاف سوى إذا كان $c < \frac{3}{8}b^2$. وضّح أن مجموع إحداثيات -x لنقطتيّ الانعطاف هو $-b/2$.

التطبيقات

.51 على فرض أن $w(t)$ هو عمق المياه في خزان مياه المدينة عند الزمن t . ما الأفضل له عند الزمن $t = 0$، $w''(0) = 0.05$ ، أم $w''(0) = -0.05$ ؟ أم تحتاج إلى معرفة قيمة $w'(0)$ لتحديد أيها أفضل؟

.52 على فرض أن $T(t)$ تمثل درجة حرارة شخص مريض في الزمن t. ما الأفضل له في الزمن t ، $T''(0) = 2$ أم $T''(0) = -2$ ؟ أم تحتاج إلى معرفة قيمة $T'(0)$ و $T(0)$ لتحديد أيها أفضل؟

.53 على فرض أن شركة تنفق $x$$ ألف على الدعاية تبيع $s(x)$$ من البضائع، حيث $s(x) = -3x^3 + 270x^2 - 3600x + 18{,}000$. أوجد قيمة x التي ترفع من معدل تغير المبيعات إلى القيمة العظمى. (إرشاد: اقرأ السؤال بعناية!) أوجد نقطة الانعطاف واشرح لماذا، باستخدام مصطلحات الدعاية، تُعد هذه النقطة هي "نقطة تناقص المرتجعات".

.54 يرتبط عدد الوحدات Q التي أنتجها عامل في يوم بعدد الساعات t منذ بداية يوم العمل. على فرض أن $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 12t$. اشرح لماذا يُعد $Q'(t)$ هو قياس معامل العامل في الزمن t . أوجد الزمن الذي تكون فيه كفاءة العامل عند القيمة العظمى. اشرح لماذا يُعد منطقيًا أن يُطلق على نقطة الانعطاف "نقطة تناقص المرتجعات".

.55 على فرض أن شركة تتكلف $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 3600$ دولار لصناعة x وحدة من منتج. **لدالة التكلفة** هذه، يكون **متوسط دالة التكلفة** $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. أوجد قيمة x التي تصل بمتوسط التكلفة إلى القيمة الصغرى. يُمكن ربط دالة التكلفة بكفاءة عملية الإنتاج. اشرح لماذا تشير دالة التكلفة المقعرة للأسفل إلى كفاءة أفضل من دالة التكلفة المقعرة للأعلى.

.56 يتحلل الليدوكايين الخاص بالأدوية المضاد لاضطراب النظم ببطء بعد دخول مجرى الدم. يُمكن تمثيل تركيز البلازما خلال t دقيقة بعد تناول الدواء باستخدام $c(t) = 92.8\left(-0.129e^{-t/6.55} + 0.218e^{-t/65.7} - 0.089e^{-t/13.3}\right)$ استخدم برنامج CAS لتقدير الزمن للقيمة العظمى للتركيز ونقطة الانعطاف $(t > 0)$. افترض أن $f(t)$ يمثل تركيز نوع آخر من الدواء. إذا كان لدى التمثيل البياني $f(t)$ شكلًا مماثلًا ونقطة القيمة العظمى نفسها كما هو الحال في التمثيل البياني $c(t)$ ، غير أن نقطة الانعطاف تقع عند قيمة أكبر لـ t ، فهل سيكون هذا الدواء أكثر تأثيرًا من الليدوكايين أم أقل تأثيرًا منه؟ اشرح بإيجاز.

.57 هناك مبدأ أساسي في الفيزياء يفيد بأن الضوء يتبع مسار القيمة الصغرى للزمن. على فرض أن سرعة الضوء تنخفض في الغلاف الجوي للأرض كلما انخفض الارتفاع. أثبت أن الممر الذي يتبعه الضوء هو شكل متقعر إلى الأسفل. اشرح لماذا يعني ذلك أن الشمس عند غروبها تكون في مكان أكثر انخفاضًا مما تبدو عليه.

تمارين استكشافية

.1 التقريب الخطي الذي عرّفناه في القسم 6.1 هو خط في نفس موقع الدالة التي يتم تقريبها ولديه ميل هذه الدالة نفسه. بما أن النقطتين تحددان الخط، فإن هناك متطلبين أساسيين (النقطة والميل) فقط لاستيفاء شروط الدالة الخطية. وقد يتم استيفاء شروط الدالة التربيعية بتطبيق ثلاثة متطلبات أساسية، لأن ثلاثة نقاط تكفي لتحديد قطع مكافئ (وهناك ثلاث ثوابت في المعادلة التربيعية العامة $ax^2 + bx + c$). على فرض أننا نريد تحديد **تقريب تربيعي** للدالة $f(x)$ عند $x = a$. بناءً على التقريب الخطي، تكون الصيغة العامة هي $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c(x - a)^2$ حتى يتم تحديد الثابت c.

بهذه الطريقة، وضّح أن $g(a) = f(a)$ و $g'(a) = f'(a)$ بمعنى أن $g(x)$ تقع في الموقع الصحيح ولديها ميل عند $x = a$. ويكمن المتطلب الثالث في أن يكون لدى $g(x)$ التقعر الصحيح عند $x = a$ ، وبذلك يكون $g''(a) = f''(a)$. أوجد الثابت c الذي يجعل هذا صحيحًا. ثم أوجد هذا التقريب التربيعي لكل الدوال $\sin x$ ، $\cos x$ و e^x عند $x = 0$. في كل حالة، ارسم بيانيًا الدالة الأصلية، والتقريب الخطي، والتقريب التربيعي، وصِف مدى التصاق التقريبات بالدالة الأساسية.

.2 في هذا التمرين، سنستكشف مسألة أساسية في علم الوراثة. على فرض أن فصيلة تتكاثر وفق الاحتمالات التالية: p_0 هو احتمال عدم ولادة أطفال، و p_1 هو احتمال ولادة طفل واحد، و p_2 هو احتمال ولادة طفلين، و p_n هو احتمال ولادة n من الأطفال، و n هو أكبر عدد ممكن من الأطفال. اشرح لماذا لكل i يكون لدينا $0 \le p_i \le 1$ و $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
نعرف الدالة باستخدام $F(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$. يمثل أصغر حل غير سالب للمعادلة $F(x) = x$ لكل $0 \le x \le 1$ احتمال انقراض الفصيلة. اشرح بيانيًا أنه إذا كان $p_0 > 0$ و $F'(1) > 1$ ، فإن هناك حل للدالة $F(x) = x$ من خلال $0 < x < 1$. إذًا، هناك احتمال موجب لنجاة الفصيلة. إذا كان $p_0 > 0$ و $F'(1) < 1$ ، فوضّح أنه ليس هناك حل بالنسبة لـ $F(x) = x$ مع $0 < x < 1$. (إرشاد: وضّح أولًا أن F متزايدة ومتقعرة إلى الأعلى).

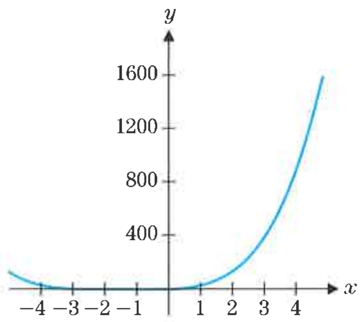
.3 اكتب وصفًا كاملًا للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x + c}{x^2 - 1}$ قدر الإمكان. وبالتحديد، أوجد قيمة c التي توجد عندها نقطتان حرجتان (أو نقطة حرجة واحدة، أو لا توجد نقاط حرجة) وحدّد أي قيم قصوى. بالمثل، أثبت أن وجود نقاط انعطاف وعدم وجودها يعتمد على قيمة c .

6-6 نظرة عامة على رسم المنحنيات

حاسبة التمثيل البياني وأنظمة الجبر على الحاسوب أدوات مساعدة فعالة في تصور التمثيل البياني لدالة ما. لكنها لا ترسم التمثيلات البيانية فعليًا. وبدلًا عن ذلك، تضع نقاطًا (أو عدد من النقاط) ثم تربط بينها بطريقة سلسة قدر الإمكان. لقد عرفنا من قبل أنه يجب علينا تحديد النافذة المناسبة لرسم تمثيل بياني معطى، حتى نرى جميع المميزات المهمة. ويُمكننا إنجاز ذلك بإجراء بعض حسابات التفاضل والتكامل.

نبدأ بتلخيص الخطوات التي يجب عليك اتخاذها عند محاولة رسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$.

- **المجال**: حدد دائمًا مجال f أولًا.
- **خطوط التقارب الرأسية**: لأي نقطة منعزلة غير موجودة في مجال f، تحقق من نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من هذه النقطة، وذلك لمعرفة ما إذا كان هناك خط تقارب رأسي أو قفزة أو انفصال غير منتهٍ عند هذه النقطة.
- **معلومات حول المشتقة الأولى**: حدد أين تكون f متزايدة وأين تكون متناقصة، وأوجد أي قيم قصوى محلية.
- **مماسات رأسية**: في أي نقطة منعزلة ليست في مجال f'، ولكنها في مجال f، تحقق من نهاية $f\,(x)$. وذلك لتحديد ما إذا كان هناك مماس رأسي عند هذه النقطة.
- **معلومات حول المشتقة الثانية**: حدد ما إذا كان التمثيل البياني متقعرًا إلى الأعلى أم متقعرًا إلى الأسفل، وحدد موقع أي نقاط انعطاف.
- خطوط التقارب الأفقية: تحقق من نهاية $f(x)$ حيث $x \to \infty$ وحيث $x \to -\infty$.
- **التقاطعات مع المحورين**: حدد موقع التقاطع مع المحور x والمحور y . إن وجد. إذا تعذر تحديد موقع التقاطع بالضبط. فحدده بالتقريب (كأن تستخدم طريقة نيوتن). وسنبدأ بمثال مباشر للغاية.



الشكل 6.64a

$y = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$

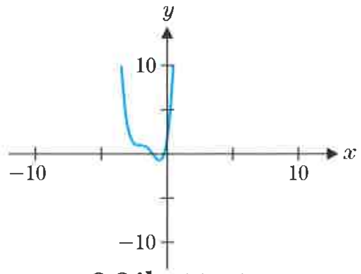
(عرض واحد)

مثال 6.1 رسم تمثيل بياني لكثيرة حدود

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل إحدى الطرائق شائعة الاستخدام في أنظمة الجبر على الحاسوب وحاسبة التمثيل البياني لتحديد نافذة عرض التمثيل البياني هي ايجاد قيم مجموعة أعداد لقيم الدالة على مدى قياسي محدد من قيم x. ثم يتم اختيار مدى y حتى يتم عرض جميع النقاط التي تم ايجاد قيمها. وقد يؤدي هذا إلى إنشاء تمثيل بياني يشبه الموجود في الشكل 6.64a. وهناك طريقة أخرى شائعة وهي رسم تمثيل بياني في نافذة افتراضية ثابتة. على سبيل المثال، تستخدم معظم حاسبات التمثيل البياني النافذة الافتراضية التي يتم تحديدها باستخدام

$$-10 \le x \le 10 \quad \text{و} \quad -10 \le y \le 10$$



الشكل 6.64b

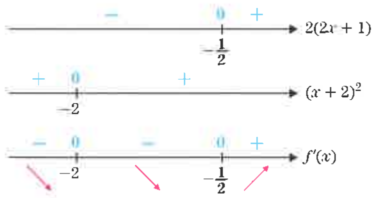
$y = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$

وباستخدام هذه النافذة، نحصل على التمثيل البياني الموضح في الشكل 6.64b. وبالطبع، هذان الشكلان مختلفان تمامًا، ومن الصعب تحديد أيهما يمثل سلوك f بشكل صحيح. إن كان أحدهما صحيح أصلًا. لاحظ أولًا أن مجال f هو الخط الحقيقي بأكمله. كذلك، بما أن f هي كثيرة حدود، فإن تمثيلها البياني لا يحتوي على أي خطوط تقارب رأسية أو أفقية. ولاحظ بعد ذلك أن

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 24x + 8 = 2(2x+1)(x+2)^2$$

برسم خطوط أعداد للعوامل الانفرادية الخاصة بالدالة $f'(x)$، نحصل على

$$f'(x)\begin{cases} > 0, \text{على } \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ و} & f \text{ متزايدة} \\ < 0, \text{على } (-\infty, -2) \text{ أو } \left(-2, -\frac{1}{2}\right) & f \text{ متناقصة} \end{cases}$$



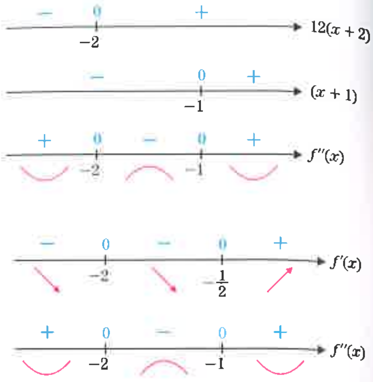
ويخبرنا هذا أيضًا أن هناك قيمة صغرى محلية عند $x = -\frac{1}{2}$ وأنه لا توجد قيم عظمى محلية.

ثم، نوجد المشتقة من الرتبة الثانية:

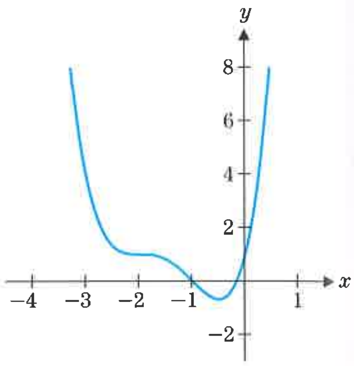
$$f''(x) = 12x^2 + 36x + 24 = 12(x+2)(x+1)$$

برسم خطوط أعداد لعوامل $f''(x)$، نحصل على

$$f''(x)\begin{cases} >0, \text{ في } (-\infty,-2) \text{ و } (-1,\infty) & \text{تقعر لأعلى} \\ <0, \text{ في } (-2,-1). & \text{تقعر لأسفل} \end{cases}$$



من خلال هذا، نجد أن هناك نقاط انعطاف عند $x=-2$ وعند $x=-1$. وأخيرًا، لإيجاد تقاطعات المحور x، علينا إيجاد حل $f(x)=0$ تقريبيًا. وبفعل ذلك (على سبيل المثال باستخدام طريقة نيوتن على أداة الحل بالحاسبة)، نجد أن هناك تقاطعان مع المحور x: $x=-1$ (بالضبط) و $x\approx-0.160713$. لاحظ أن قيم x المهمة التي حددناها سابقًا هي $x=-2, x=-1$ و $x=-0.5$ بحساب قيم y المناظرة من $y=f(x)$، نحصل على القيم الآتية: $(-2,1)$ ، $(-1,0)$ و $\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{16}\right)$. لقد لخصنا المعلومات المتوفرة حول المشتقة الأولى والمشتقة الثانية في خطوط الأعداد بالهامش. في الشكل 6.65، ضمّنا النقاط المهمة بضبط مجال x ليصبح $-4\le x\le 1$، وضبط مدى y ليصبح $-2\le y\le 8$. ■



الشكل 6.65

$y=x^4+6x^3+12x^2+8x+1$

في المثال 6.2، نفحص دالة تحتوي على قيم قصوى محلية، ونقاط انعطاف، وخطوط تقارب افقية وخطوط تقارب رأسية.

مثال 6.2 رسم تمثيل بياني لدالة نسبية

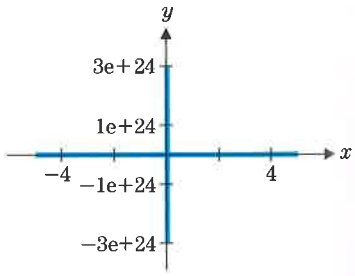
ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل يوضح الشكل 6.66a التمثيل البياني الافتراضي الذي تم إنشاؤه بواسطة نظام الجبر على الحاسوب، بينما يوضح الشكل 6.66b التمثيل البياني الذي تم إنشاؤه بواسطة النافذة الافتراضية الأكثر شيوعًا في حاسبة التمثيل البياني. يُمكن القول بأن هذا يُعد تطورًا للشكل 6.66a، لكن هذا التمثيل البياني ينقصه شيء آخر، كما سنرى.

أولًا، لاحظ أن مجال f يتضمن جميع الأعداد الحقيقية $x\ne 0$. بما أن $x=0$ هي نقطة منعزلة وليست في مجال f، فإننا نعتبر

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-3}{x^3}=-\infty \tag{6.1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-3}{x^3}=\infty. \tag{6.2}$$



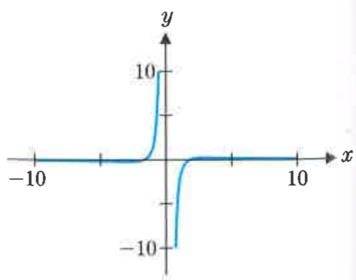
الشكل 6.66a

$y=\dfrac{x^2-3}{x^3}$

من (6.1) و (6.2) ، نجد أنه يوجد بالتمثيل البياني خط تقارب رأسي عند $x=0$.

ثم نبحث عن أية معلومات نحصل عليها من المشتقة الأولى. لدينا

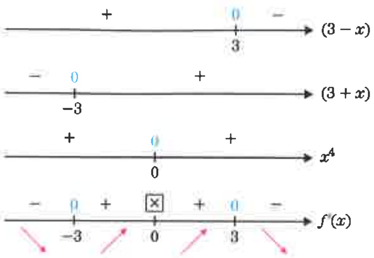
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^3)-(x^2-3)(3x^2)}{(x^3)^2} && \text{قاعدة ناتج القسمة} \\ &= \frac{x^2[2x^2-3(x^2-3)]}{x^6} && \text{تحليل العامل } x^2 \\ &= \frac{9-x^2}{x^4} && \text{تجميع الحدود} \\ &= \frac{(3-x)(3+x)}{x^4}. && \text{تحليل إلى العوامل الفرق بين المربعين} \end{aligned}$$



الشكل 6.66b

$y=\dfrac{x^2-3}{x^3}$

بالنظر إلى العوامل الإفرادية في $f'(x)$، نحصل على خطوط الأعداد الموضحة في الهامش. بالتالي،



$$f'(x)\begin{cases} >0 \text{ في } (-3,0) \text{ و } (0,3) & f \text{ متزايدة} \\ <0 \text{ في } (-\infty,-3) \text{ و } (3,\infty) & f \text{ متناقصة} \end{cases} \tag{6.3}$$

إذًا، لدى f قيمة صغرى محلية عند $x=-3$. وقيمة عظمى محلية عند $x=3$.

ثم نوجد المشتقة من الرتبة الثانية

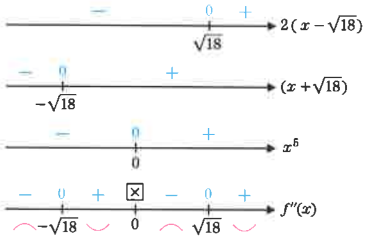
$$f''(x)=\frac{-2x(x^4)-(9-x^2)(4x^3)}{(x^4)^2} \qquad \text{قاعدة ناتج القسمة}$$

$$=\frac{-2x^3[x^2+(9-x^2)(2)]}{x^8} \qquad \text{تحليل العامل } -2x^3$$

$$=\frac{-2(18-x^2)}{x^5} \qquad \text{تجميع الحدود}$$

$$=\frac{2(x-\sqrt{18})(x+\sqrt{18})}{x^5}. \qquad \text{تحليل إلى العوامل الفرق بين المربعين}$$

بالنظر إلى العوامل الافرادية في $f''(x)$، نحصل على خطوط الأعداد الموضحة في الهامش. بالتالي، يكون لدينا



$$f''(x)\begin{cases} >0 \text{ في } (-\sqrt{18},0) \text{ و } (\sqrt{18},\infty) & \text{تقعر إلى الأعلى} \\ <0 \text{ في } (-\infty,-\sqrt{18}) \text{ و } (0,\sqrt{18}). & \text{تقعر إلى الأسفل} \end{cases} \tag{6.4}$$

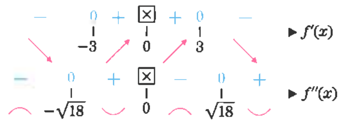
إذًا، توجد نقاط انعطاف عند $x=\pm\sqrt{18}$. (لماذا لا توجد نقطة انعطاف عند $x=0$ ؟)

لتحديد سلوك النهايات عندما $x\to\pm\infty$. نأخذ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)=0. \tag{6.5}$$

بالمثل، يكون لدينا

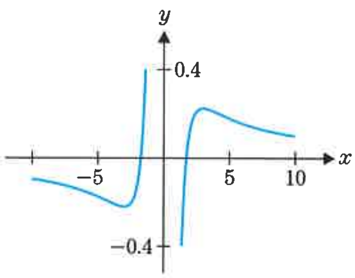


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0. \tag{6.6}$$

إذًا، الخط $y=0$ هو عبارة عن خط تقارب أفقي حيث $x\to\infty$ و $x\to-\infty$. وأخيرًا، تقع التقاطعات مع المحور x ، حيث يكون

$$x\to-\infty$$

وذلك عند $x=\pm\sqrt{3}$. لاحظ أنه لا توجد تقاطعات مع المحور y، لأن $x=0$ ليس في مجال الدالة. لدينا الآن جميع المعلومات التي نحتاج إليها لرسم تمثيل بياني توضيحي. بعد عدة تجارب، يُمكنك ضبط مدى المحور x ومدى المحور y بحيث يتم عرض معظم النقاط المهمة للتمثيل البياني (أي خطوط التقارب الرأسية والأفقية، والحدود القصوى المحلية، ونقاط الانعطاف، وما إلى ذلك) كما هو الحال في الشكل 6.67 الذي يتوافق مع جميع المعلومات التي جمعناها حول الدالة في (6.1)-(6.6). رغم أن وجود نقاط انعطاف واضح جدًا من خلال تغير التقعر، إلا أن موقعها الدقيق غير واضح إلى حد ما في التمثيل البياني. ومع ذلك تظهر خطوط التقارب الأفقية والرأسية والحدود القصوى المحلية بشكل واضح، وهو ما لم يحدث مع الشكل 6.66a أو الشكل 6.66b. ■



الشكل 6.67

$y=\frac{x^2-3}{x^3}$

في المثال 6.3، هناك خطوط تقارب رأسية كثيرة، وحد أقصى واحد، بينما لا توجد نقاط انعطاف.

مثال 6.3 رسم تمثيل بياني بخطيّ تقارب رأسيين

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل يوضح الشكل 6.68a التمثيل البياني الافتراضي الذي تم رسمه بواسطة نظام الجبر على الحاسوب الخاص بنا، بينما يوضح الشكل 6.68b التمثيل البياني الذي يتم رسمه بواسطة معظم حاسبات التمثيل البياني. لاحظ أن مجال f يتضمن جميع x عدا $x = \pm 2$ (لأن المقام صفر عند $x = \pm 2$). يبيّن الشكل 6.68b. وجود خطوط تقارب رأسية عند $x = \pm 2$. لكن نثبت هذا بعناية. لدينا

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{+}{x^2}}{\underset{+}{(x-2)}\underset{+}{(x+2)}} = \infty$$

بالمثل، نحصل على النتيجة

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \infty$$

إذًا، هناك خطوط تقارب رأسية عند $x = \pm 2$. ثم يكون لدينا

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

بما ان المقام موجب لكل $x \neq \pm 2$. فمن السهل رؤية أن

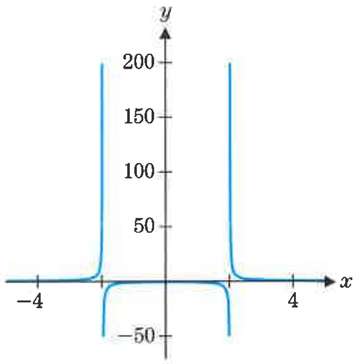
$$f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ في } (-\infty, -2) \text{ و } (-2, 0) & f \text{ متزايدة} \\ < 0 \text{ في } (0, 2) \text{ و } (2, \infty). & f \text{ متناقصة} \end{cases}$$

وعلى وجه الخصوص، لاحظ أن العدد الحرج الوحيد هو $x = 0$ (نظرًا لأن $x = -2, 2$ ليست في مجال f). إذًا، القيمة القصوى المحلية الوحيدة هي القيمة العظمى المحلية التي تقع عند $x = 0$. ثم، يصبح لدينا

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-8(x^2-4)^2 + (8x)2(x^2-4)^1(2x)}{(x^2-4)^4} && \text{قاعدة ناتج القسمة} \\ &= \frac{8(x^2-4)[-(x^2-4)+4x^2]}{(x^2-4)^4} && \text{تحليل العامل } 8(x^2-4) \\ &= \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} && \text{تجميع الحدود} \\ &= \frac{8(3x^2+4)}{(x-2)^3(x+2)^3}. && \text{تحليل إلى العوامل الفرق بين المربعين} \end{aligned}$$

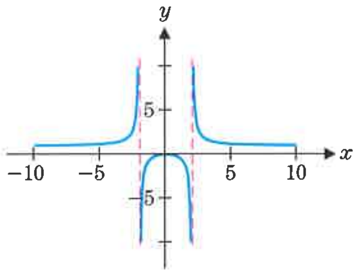
نظرًا لأن البسط موجب لكل x، يجب علينا فقط دراسة العوامل الموجودة في المقام، كما هو موضح في الهامش. ثم يكون لدينا

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ في } (-\infty, -2) \text{ و } (2, \infty) & \text{تقعر إلى الأعلى} \\ < 0 \text{ في } (-2, 2). & \text{تقعر إلى الأسفل} \end{cases} \tag{6.11}$$



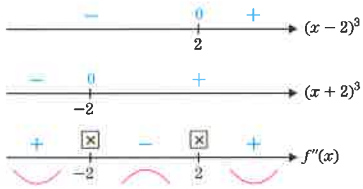
الشكل 6.68a

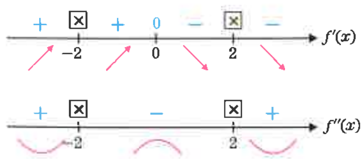
$y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$



الشكل 6.68b

$y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$





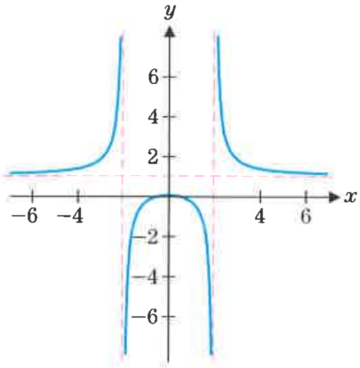
بما أن $x = 2, -2$ ليست في مجال f، فإنه لا توجد نقاط انعطاف. ويُعد هذا تمرينًا سهلًا لإثبات أن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \tag{6.12}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1. \tag{6.13}$$

من (6.12) و(6.13)، نجد أن $y = 1$ هو خط تقارب أفقي، عندما $x \to \infty$. وعندما $x \to -\infty$. وأخيرًا، نلاحظ أن التقاطع الوحيد مع المحور x عند $x = 0$. ثم نلخص المعلومات الواردة في (6.7)–(6.13) بالتمثيل البياني في الشكل 6.69. ■



الشكل 6.69

$y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

في المثال 6.4، يجب علينا استخدام تمثيلات بيانية تم إنشاؤها باستخدام الحاسوب، وكذلك طريقة إيجاد الجذر لتحديد سلوك الدالة.

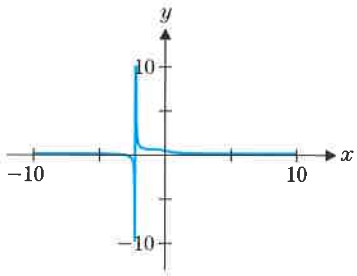
مثال 6.4 التمثيل البياني لدالة يجب فيها تقريب المجال والقيمة القصوى

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+3}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل يوضح الشكل 6.70 التمثيل البياني الافتراضي الذي تم رسمه بواسطة معظم حاسبات التمثيل البياني وأنظمة الجبر على الحاسوب. ونقوم ببعض حسابات التفاضل والتكامل لتنقيح هذا الرسم.

بما أن f دالة نسبية، فإنها معرفة لكل x، عدا عندما يساوي المقام صفرًا، ويحدث هذا عندما يكون

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$$



الشكل 6.70

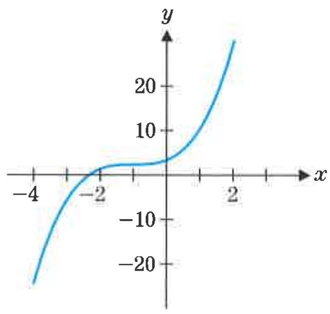
$y = \dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+3}$

في التمثيل البياني للدالة $y = g(x)$ بالشكل 6.71، نجد أن g تتضمن صفرًا واحدًا حول $x = -2$. يُمكننا إثبات أن هذا هو الصفر الوحيد، حيث إن

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$$

يُمكنك الحصول على الصفر التقريبي عند $x = a \approx -2.25992$ باستخدام طريقة نيوتن أو أداة الحل بالحاسبة. يُمكننا استخدام الشكل 3.71 لمساعدتنا في حساب النهايتين

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{+}{x^3+3x^2+3x+3}} = \infty \tag{6.14}$$



الشكل 6.71

$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{-}{x^3+3x^2+3x+3}} = -\infty. \tag{6.15}$$

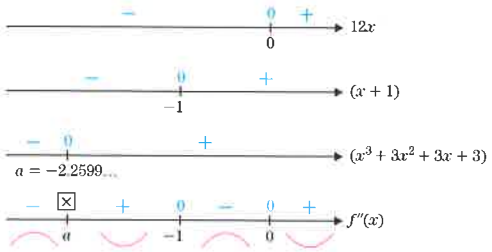
من (6.14) و(6.15)، نجد أن f لها خط تقارب رأسي عند $x = a$. بالتحول إلى المشتقة، نجد أن

$$f'(x) = -(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^{-2}(3x^2 + 6x + 3)$$
$$= -3\left[\frac{(x+1)^2}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2}\right]$$
$$= -3\left(\frac{x+1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}\right)^2$$
$$< 0, \text{ لكل قيم } x \neq a \text{ أو } -1 \tag{6.16}$$

و $f'(-1) = 0$. إذًا f متناقصة لكل $x < a$ و $x > a$. لاحظ أيضًا أن العدد الحرج الوحيد هو $x = -1$. لكن بما أن f متناقصة في مجالها عدا عند $x = a$، فإنه لا توجد حدود قصوى محلية. بالتحول إلى معلومات المشتقة من الرتبة الثانية، نجد أن

$$f''(x) = -6\left(\frac{x+1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}\right)\frac{1(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) - (x+1)(3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2}$$
$$= \frac{-6(x+1)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^3}(-2x^3 - 6x^2 - 6x)$$
$$= \frac{12x(x+1)(x^2 + 3x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^3}.$$

بما أن $(x^2 + 3x + 3) > 0$ لكل x (لماذا يحدث ذلك؟)، فإننا لا نحتاج إلى دراسة هذا العامل. وبعد دراسة العوامل المتبقية، نحصل على خطوط الأعداد الموضحة أدناه.



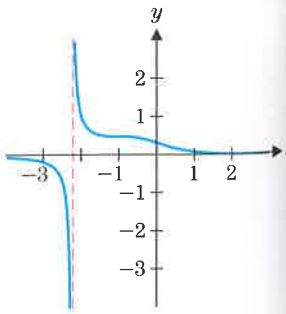
إذًا، نحصل على

$$f''(x)\begin{cases} > 0, \text{ في } (a, -1) \text{ و } (0, \infty) & \text{تقعر إلى الأعلى} \\ < 0, \text{ في } (-\infty, a) \text{ و } (-1, 0) & \text{تقعر إلى الأسفل} \end{cases} \tag{6.17}$$

وبالتالي، توجد نقاط انعطاف عند $x = 0$ وعند $x = -1$. لاحظ أنه في الشكل 6.70، معلومات التقعر غير واضحة للغاية، وأن نقاط الانعطاف يصعب تأملها.
نلاحظ الحقيقة الواضحة أن الدالة لا تساوي الصفر أبدًا، وبالتالي لا يوجد تقاطع مع المحور x.
وأخيرًا نوجد النهايتين

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3} = 0 \tag{6.18}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3} = 0. \tag{6.19}$$



الشكل 6.72
$y = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}$

باستخدام كل المعلومات الواردة في (6.14)–(6.19)، نرسم التمثيل البياني الوارد في الشكل 6.72. إذًا، يُمكننا بكل وضوح رؤية خطوط التقارب الأفقية والرأسية، ونقاط الانعطاف، وحقيقة أن الدالة متناقصة في مجالها بأكمله. ■

في المثال 6.5، ندرس شكل الدالة المتسامية التي تتضمن خط تقارب رأسي.

مثال 6.5 التمثيل البياني لدالة يصعب فيها رؤية بعض المميزات

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = e^{1/x}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

الحل لا يُمكنك الاستفادة كثيرًا بالتمثيل البياني الذي يرسمه نظام الجبر على الحاسوب. (انظر الشكل 6 73a). يكون التمثيل البياني الذي ترسمه معظم حاسبات التمثيل البياني (انظر الشكل 6.73b) أفضل بكثير. لكن لا يُمكننا التأكد من مدى ملائمته بدون إجراء تحليل أكثر دقة. أولًا، لاحظ أن مجال f هو $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. وبالتالي، ندرس

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty, \qquad (6.20)$$

نظرًا لأن $1/x \to \infty$ حيث $x \to 0^+$. كذلك، نظرًا لأن $1/x \to -\infty$ حيث $x \to 0^-$ (و $e^t \to 0$ حيث $t \to -\infty$)، يصبح لدينا

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0. \qquad (6.21)$$

من (6.20) و(6.21)، يوجد خط تقارب عند $x = 0$. لكنه خط تقارب غير معتاد، حيث إن $f(x) \to \infty$ في جانب واحد للصفر، و $f(x) \to 0$ في الجانب الآخر. ثم،

$$f'(x) = e^{1/x} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) < 0, \text{ لكل قيم } x \neq 0$$

بما أن $e^{1/x} > 0$ لكل $x \neq 0$. إذًا، f تتناقص لكل $x \neq 0$. لدينا أيضًا

$$f''(x) = e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) + e^{1/x}\left(\frac{2}{x^3}\right)$$
$$= e^{1/x}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{1/x}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$$
$$\begin{cases} < 0, & \text{في } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) & \text{تقعر إلى الأعلى} \\ > 0, & \text{في } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ و } (0, \infty) & \text{تقعر إلى الأسفل} \end{cases}$$

بما أن $x = 0$ ليست في مجال f، فإن نقطة الانعطاف الوحيدة تكون عند $x = -\frac{1}{2}$. ولاحظ بعد ذلك أن

$$\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1$$

بما أن $1/x \to 0$ حيث $x \to \infty$ و $e^t \to 1$ حيث $t \to 0$. بالمثل،

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1$$

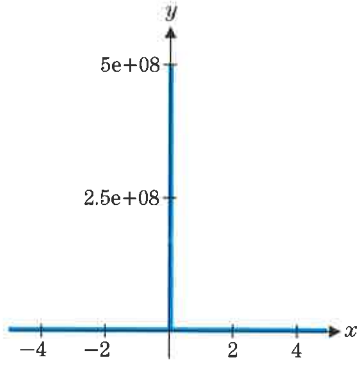
إذًا، $y = 1$ هو خط تقارب أفقي حيث $x \to \infty$ و $x \to -\infty$. وأخيرًا، بما أن

$$e^{1/x} > 0$$

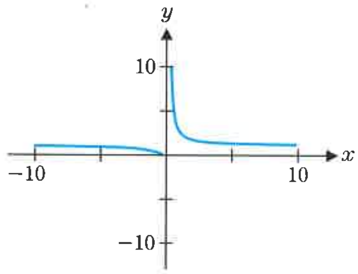
لكل $x \neq 0$، لا يوجد تقاطع مع المحور x. لاحظ أنه في جميع التمثيلات البيانية تقريبًا التي ترسمها، يكون من الصعب رؤية جميع مميزات الدالة. نظرًا لأن نقطة الانعطاف $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$ قريبة جدًا من الإحداثي x. بما أن خط التقارب الأفقي هو خط $y = 1$، فمن الصعب رؤية هاتين الميزتين في التمثيل البياني نفسه (بدون رسم تمثيل بياني على ورقة كبيرة). لنحل هذا الأمر في التمثيل البياني الوارد في الشكل 3.74 الذي يوضح جميع المميزات عدا نقطة الانعطاف والتقعر في الفترة $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. لرؤية سلوك الدالة بوضوح بالقرب من نقطة الانعطاف، يُمكننا رسم تمثيل بياني مكبر لمنطقة نقطة الانعطاف. (انظر الشكل 6.75).

بينما كنا نقوم هنا بحل مسألة التقعر بالقرب من $x = 0$ ونقطة الانعطاف، فقدنا تفاصيل "الفكرة العامة". ■

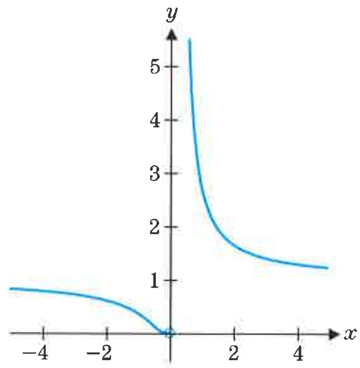
في مثالنا الأخير، سنقوم بدراسة التمثيل البياني للدالة التي هي عبارة عن مجموع دالة مثلثية وكثيرة الحدود.



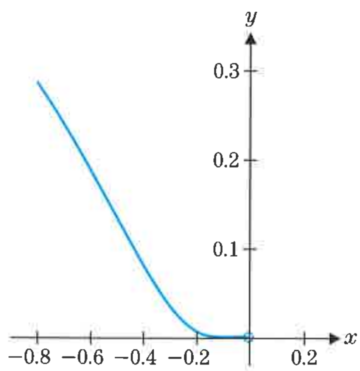
الشكل 6.73a
$y = e^{1/x}$



الشكل 6.73b
$y = e^{1/x}$



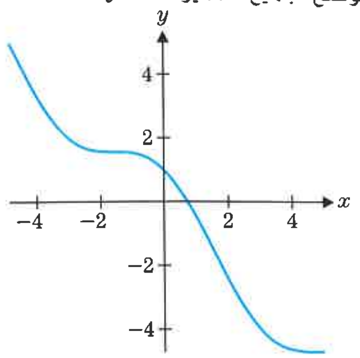
الشكل 6.74
$y = e^{1/x}$



الشكل 6.75
$y = e^{1/x}$

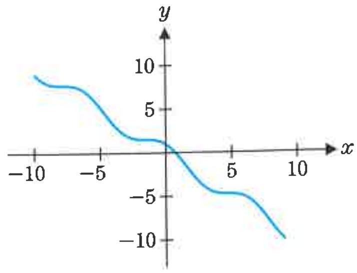
مثال 6.6 التمثيل البياني لمجموع كثيرة الحدود ودالة مثلثية

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \cos x - x$ يوضح جميع المميزات المهمة.



6.76a

$y = \cos x - x$



6.76b

$y = \cos x - x$

الحل يوضح الشكل 6.76a التمثيل البياني الافتراضي الذي يرسمه نظام الجبر على الحاسوب. التمثيل البياني الذي ترسمه معظم حاسبات التمثيل البياني يشبه كثيرًا التمثيل البياني الوارد بالشكل 6.76b. بما أن مجال f يمثل الخط الحقيقي بأكمله، ولا توجد خطوط تقارب رأسية. ثم، يصبح لدينا

$$f'(x) = -\sin x - 1 \leq 0, \qquad x$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

كذلك، يكون $f'(x) = 0$ فقط في حالة إذا كان $\sin x = -1$. إذًا، توجد أعداد حرجة (وهي تمثل هنا جميع مواقع خطوط المماس الأفقي). لكن بما أن $f'(x)$ لا يغير الإشارة، فإنه لا توجد حدود قصوى محلية. وحتى إن كان الوضع كذلك، لا زالنا نهتم بإيجاد مواضع خطوط المماس الأفقي. تذكر أن

$$\sin x = -1 \text{ لكل قيم } x = \frac{3\pi}{2}$$

لأي عدد صحيح n. ثم، نجد أن

$$f''(x) = -\cos x$$

وفي الفترة $[0, 2\pi]$، لدينا

$$\cos x \begin{cases} > 0, & \text{في } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ و } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ < 0, & \text{في } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$f''(x) = -\cos x \begin{cases} < 0, & \text{في } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ و } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] & \text{تقعر إلى الأعلى} \\ > 0, & \text{في } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) & \text{تقعر إلى الأسفل} \end{cases} \qquad (6.23)$$

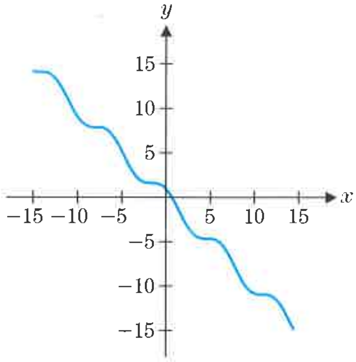
خارج $[0, 2\pi]$، $f''(x)$ يتكرر هذا النمط. وعلى وجه الخصوص، يدل هذا على أن التمثيل البياني لديه عدد لا نهائي من نقاط الانعطاف تقع على المضاعفات الفردية لـ $\pi/2$. لتحديد السلوك حيث $x \to \pm\infty$. نفحص النهايتين

$$\lim_{x\to\infty} (\cos x - x) = -\infty \qquad (6.24)$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} (\cos x - x) = \infty, \qquad (6.25)$$

حيث $-1 \leq \cos x \leq 1$، لكل x وحيث $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.



الشكل 6.77

$y = \cos x - x$

وأخيرًا، لتحديد التقاطع مع المحور x، علينا إيجاد حل $f(x) = \cos x - x = 0$

مع ذلك، لا يُمكن حل ذلك بالضبط. بما أن $f'(x) \leq 0$ لكل x والشكلان 6.76a و 6.76b يظهران وجود صفر حول $x = 1$، فإن هناك صفرًا واحدًا، ويجب علينا التقريب. (استخدم طريقة نيوتن أو أداة الحل بالحاسبة). فنحصل على $x \approx 0.739085$ في صورة تقريب للتقاطع الوحيد مع المحور x. بتجميع كل المعلومات الواردة في (6.22)-(6.25)، يُمكننا رسم التمثيل البياني الوارد في الشكل 6.77. لاحظ أن الشكل 6.76b يظهر السلوك بوضوح كما يفعل الشكل 6.77 إلا أنه بالنسبة لمدى صغير من x وقيم y. نفتح الآن للنقاش موضوع أي مما سبق يُعد أكثر "توضيحًا". ■

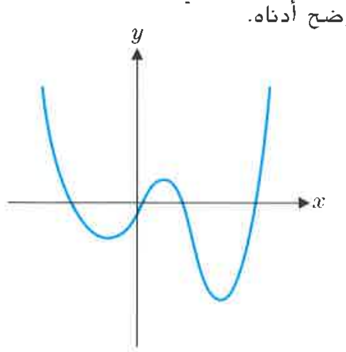
ما وراء القوانين

الصفة الأساسية للأمثلة الواردة في الدروس 6.6–6.4 هي التفاعل بين الرسم البياني وحل المعادلات. لتحليل تمثيل بياني لدالة، ستتحرك للأمام والخلف عدة مرات بين حل المعادلة (لإيجاد الأعداد الحرجة ونقاط الانعطاف وما إلى ذلك) وتحديد المميزات البيانية ذات الصلة. وقد يقودك حل المعادلة إلى كشف المميزات المخفية للتمثيل البياني.

التمارين 6.5

تمارين كتابية

1. تناولنا من قبل رسم التمثيلات البيانية التوضيحية، لكن عادة ما يكون من المستحيل رسم تمثيل بياني بشكل صحيح كمقياس يوضح جميع المميزات التي قد تهمنا. على سبيل المثال، حاول إنشاء تمثيل بياني على الحاسبة أو الحاسوب بحيث يوضح القيم القصوى المحلية الثلاثة لـ $x^4 - 25x^3 - 2x^2 + 80x - 3$. عندما يكون لاثنين من القيم القصوى تقاطع مع المحور y عند -60 و 50 تقريبًا، سنستخدم تمثيلًا بيانيًا كبيرًا لتوضيح جميع النقاط التي يوجد بها $y = -40{,}000$ وإذا كان لا يُمكن للتمثيل البياني الدقيق أن يظهر كل النقاط التي تهمنا، فقد نحتاج إلى صنع رسم يدوي كالموضوح أدناه.



لا يوجد مقياس في التمثيل البياني لأننا قد حرفنا النسب المختلفة للتمثيل البياني أثناء محاولة إظهار جميع النقاط التي تهمنا. ناقش المزايا النسبية لتمثيل بياني "صادق" يوجد به مقياس ثابت لكنه لا يوضح جميع النقاط التي تهمنا مقابل تمثيل بياني كاريكاتوري يحرّف المقياس لكنه يوضّح جميع النقاط التي تهمنا.

2. وضّح كيفية ارتباط التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos x - x$ في المثال 6.6 بالتمثيلين البيانيين للدالة $y = \cos x$ والدالة $y = -x$. وبناءً على هذه المناقشة، وضّح كيفية رسم التمثيل البياني للدالة $y = x + \sin x$.

في تمارين 1–22، ارسم بيانيًا الدالة التي تناقش بشكل تام التمثيل البياني كما في المثال 6.2.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
2. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
3. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$
4. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$
5. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^3}$
8. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^3}$
9. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
10. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$
11. $f(x) = x + \sin x$
12. $f(x) = \sin x - \cos x$
13. $f(x) = x \ln x$
14. $f(x) = x \ln x^2$
15. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
16. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$
18. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$
19. $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
20. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{400}x$
21. $f(x) = e^{-2/x}$
22. $f(x) = e^{1/x^2}$

في التمارين 23–36، حدد جميع المميزات المهمة (تقريبيًا إذا لزم الأمر) وارسم تمثيلًا بيانيًا.

23. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 - 9x + 1}$
24. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 1}$
25. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{2/3}$
26. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 80x^3 + 12x^2 - 192x$
27. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 1}$
28. $f(x) = \dfrac{5x}{x^3 - x + 1}$

29. $f(x) = x^2\sqrt{x^2-9}$

30. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2-1}$

31. $f(x) = e^{-2x}\sin x$

32. $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$

33. $f(x) = x^4 - 16x^3 + 42x^2 - 39.6x + 14$

34. $f(x) = x^4 + 32x^3 - 0.02x^2 - 0.8x$

35. $f(x) = \dfrac{25 - 50\sqrt{x^2+0.25}}{x}$

36. $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

في التمارين 37–42، تتضمن "عائلة الدوال" وسيطًا هو c. وتؤثر قيمة c على خصائص الدوال. حدد أوجه الاختلاف، إن وجدت، عندما يكون c صفرًا، أو موجبًا، أو سالبًا. ثم حدد كيف سيبدو التمثيل البياني عند رسمه لعدد كبير من c الموجب، وعدد كبير من c السالب.

37. $f(x) = x^4 + cx^2$

38. $f(x) = x^4 + cx^2 + x$

39. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+c^2}$

40. $f(x) = e^{-x^2/c}$

41. $f(x) = \sin(cx)$

42. $f(x) = x^2\sqrt{c^2-x^2}$

لدى الدالة f خط التقارب المائل $y = mx + b\ (m \neq 0)$ إذا كانت $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx+b)] = 0$ و/أو $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx+b)] = 0$. في التمارين 43–48، أوجد الخط المتقارب المائل. (استخدام القسمة المطولة لإعادة كتابة الدالة). ثم ارسم الدالة بيانيًا وخط التقارب الخاص بها على المحاور نفسها.

43. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x-1}$

45. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

47. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+1}$

48. $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3+x}$

في التمارين 49–52، أوجد دالة يوجد بتمثيلها البياني خطوط التقارب المعطاة.

49. $x = 1, x = 2$ and $y = 3$

50. $x = -1, x = 1$ and $y = 0$

51. $x = -1, x = 1, y = -2$ and $y = 2$

52. $x = 1, y = 2$ and $x = 3$

53. قد يكون من المفيد تحديد خطوط تقارب غير الرأسية والأفقية. على سبيل المثال، القطع المكافئ $y = x^2$ منحنى تقارب للدالة $f(x)$ إذا كانت $\lim_{x\to\infty}[f(x) - x^2] = 0$ و/أو $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x^2] = 0$. وضّح أن x^2 هو منحنى تقارب للدالة $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2-1}$. ارسم $y = f(x)$ بيانيًا، وصغّر الرسم حتى يصل التمثيل البياني إلى شكل القطع المكافئ. (ملاحظة: تأثير التصغير عبارة عن التأكيد على قيم x الكبيرة)

54. لكل دالة، أوجد كثيرة الحدود $p(x)$ حيث $\lim_{x\to\infty}[f(x) - p(x)] = 0$

(a) $\dfrac{x^4}{x+1}$ (b) $\dfrac{x^5-1}{x+1}$ (c) $\dfrac{x^6-2}{x+1}$

وضّح من خلال التصغير أن $f(x)$ و $p(x)$ يبدوان متشابهين عند تكبير x

55. أوجد جميع القيم القصوى ونقاط الانعطاف، وارسم التمثيلات البيانية للدالة $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ والدالة $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

56. على المحاور نفسها وبطريقة التمثيلات البيانية نفسها في التمرين 55. ارسم تمثيلات بيانية للدالة $y = \frac{1}{2}e^x$ والدالة $y = \frac{1}{2}e^{-x}$. وضّح لماذا تقوم هذه التمثيلات البيانية بعمل التمثيلات البيانية في التمرين 55. (إرشاد: حيث $x \to \pm\infty$. ماذا يحدث إلى e^x و e^{-x}؟)

التطبيقات

57. في عدد متنوع من التطبيقات، يصنع الباحثون نموذجًا لظاهرة يبدأ تمثيلها البياني عند نقطة الأصل، ويرتفع إلى قيمة عظمى واحدة، ثم ينخفض إلى خط التقارب الأفقي للدالة $y = 0$. على سبيل المثال، قد تكون هذه الخصائص موجودة في دالة كثافة الاحتمال لأحداث مثل الفترة من زمن الحمل في الحيوان إلى ولادته، والزمن الذي سيبقى فيه على قيد الحياة بعد التقاط عدوى مرض قاتل. وضّح أن مجموعة الدوال xe^{-bx} يوجد بها هذه الخصائص لكل الثوابت الموجبة b. ما التأثير الذي يحدثه b على موقع القيمة العظمى؟ في حالة الفترة التي تبدأ من الحمل، ما الذي تمثله b؟ في حالة فترة البقاء على قيد الحياة، ما الذي تمثله b؟

58. يرمز الاختصار "FM" في موجة الراديو FM إلى تضمين التردد، وهي طريقة لنقل المعلومات المشفرة في موجة مذياع من خلال تضمين (أو تغيير) التردد. والمثال الأساسي لهذه الموجة التي يتم تضمينها هو $f(x) = \cos(10x + 2\cos x)$. استخدم الرسومات البيانية $f(x), f'(x)$ و $f''(x)$ التي تنشأ عن طريق الحاسوب لمحاولة تحديد موقع جميع القيم القصوى المحلية $f(x)$

59. زاوية هدف خارجي تم تسديده من علامة التجزئة على بعد x قدم هي $A = \tan^{-1}\left(\dfrac{29.25}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{10.75}{x}\right)$. أوجد x التي تجعل الزاوية A أكبر ما يُمكن. وزادت قيمة x من 60 إلى 75 بسبب احتساب ضربة جزاء على بُعد 5 ياردات. كيف يغير ذلك من A؟

60. تم تسديد كرة بمعدل دوران ω (في (in rad/s)) ووضعها الجانبي يساوي $x(t) = \dfrac{2.5}{\omega}t - \dfrac{2.5}{4\omega^2}\sin 4\omega t$ عند الزمن لكل t. بالنسبة لـ $0 \leq t \leq 0.68$. استكشف تأثير التمثيل اللتغير في $\omega \geq 0$.

تمارين استكشافية

1. دودة البراعم الراتينجية هي أحد الأعداء الطبيعيين لشجرة تّنوب البلسم، وتهاجم أوراق هذه الشجرة بشكل متفشٍ ومدمر. عرّف $N(t)$ باعتباره عدد الديدان في شجرة ما خلال الزمن t. يجب أن يشتمل نموذج الرياضيات لمجتمع الأحياء المتحرك للديدان على حد لتوضيح معدل وفيات الديدان بسبب الحيوانات المفترسة (مثل الطيور). ويتم وضع هذا الحد غالبًا في شكل $\dfrac{B[N(t)]^2}{A^2 + [N(t)]^2}$ للثوابت الموجبة A و B.

ارسم بيانيًا الدوال $\frac{x^2}{4+x^2}$، و $\frac{2x^2}{1+x^2}$، و $\frac{x^2}{9+x^2}$، و $\frac{3x^2}{1+x^2}$ لكل $x > 0$. وبناء على هذه التمثيلات البيانية، ناقش لماذا يُعد $\frac{B[N(t)]^2}{A^2+[N(t)]^2}$ نموذجًا معقولاً لمعدل الوفاة بفعل الحيوانات المفترسة. ما الدور الذي يلعبه الثابتان A و B؟ يتم تحديد مستويات مجتمع الأحياء لديدان البراعم الراتينجية من خلال التقاطعات في التمثيل البياني $y = r(1-x/k)$ و $y = \frac{x}{1+x^2}$. في هذه الحالة، $x = N/A, r$ يتناسب مع معدل المواليد لديدان البراعم، ويتم تحديد k من خلال كمية الطعام المتاحة لديدان البراعم. لاحظ أن $y = r(1-x/k)$ هو خط، يتقاطع مع المحور y عند r، ويتقاطع مع المحور x عند k. ما عدد حلول المعادلة $\frac{x}{1+x^2} = r(1-x/k)$؟ (إرشاد: تعتمد الإجابة على قيم r و k). وهناك نظرية حالية تنص على أن التفشي يحدث في مواقف يوجد فيها 3 حلول ويتحول فيها مجتمع الأحياء لديدان البراعم من مجتمع احياء صغيرة إلى مجتمع احياء كبيرة.

2. على فرض أن f تمثل دالة لها مشتقتان، وأن $f(a) = f'(a) = 0$، لكن للعدد $f''(a) \neq 0$. وضّح أن $f(x)$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = a$. ثم، على فرض أن f دالة لها ثلاث مشتقات، وأن $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$، لكن $f'''(a) \neq 0$ للعدد a. وضّح أن $f(x)$ لا يوجد لها قيمة قصوى محلية عند $x = a$. عمم عملك على الحالة التي يكون فيها $f^{(k)}(a) = 0$ لكل قيم $k = 0, 1, \ldots, n-1$، لكن $f^{(n)}(a) \neq 0$، مع الأخذ في عين الاعتبار أن هناك استنتاجات مختلفة تعتمد على ما إذا كان n عدداً فرديًا أم زوجيًا. استخدم هذه النتيجة في تحديد ما إذا كانت $f(x) = x \sin x^2$ أو $g(x) = x^2 \sin(x^2)$ تحتوي على قيمة قصوى محلية عند $x = 0$

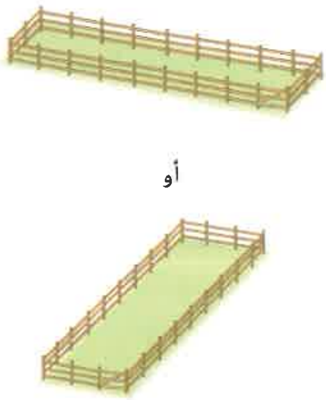
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

القيمة المثلى

نرى الأشخاص في كل قطاعات التجارة والصناعة يناضلون لتصغير المخلفات وتعاظم الانتاج. في هذا الدرس، نتعامل مع قوة حساب التفاضل والتكامل للتأثير على عدد من المسائل التطبيقية التي تتضمن إيجاد القيمة القصوى والقيمة الصغرى. ونبدأ بإعطاء بعض التوجيهات العامة.

- إذا كانت هناك صورة لرسمها، فارسمها! لا تحاول تصوير كيف تبدو الأشياء في رأسك. ضع الصورة على ورقة والصقها بها.
- حدد ماهية المتغيرات وكيفية ترابطها.
- قرر الكمية التي يجب تعاظمها او تصغيرها
- اكتب تعبير الكمية التي يجب تعاظمها او تصغيرها بدلالة متغير واحد فقط. للقيام بذلك، قد تحتاج إلى الحل لإيجاد أي متغيرات أخرى بدلالة هذا المتغير الواحد.
- حدد القيمة الصغرى والعظمى للقيم المسموح بها (إن وجد) للمتغير الذي تستخدمه.
- حل المسألة وتأكد من الإجابة على السؤال المطروح.

نبدأ بمثال بسيط حيث يتمثل الهدف في إنجاز ما تواجهه الشركات كل يوم: الاستفادة بأكبر قدر ممكن من الموارد المحدودة.

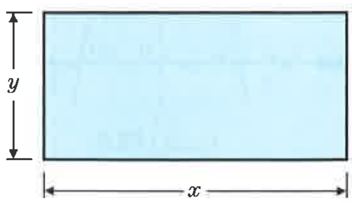


الشكل 6.78
المخططات المحتملة

مثال 7.1 إنشاء حديقة مستطيلة بأكبر مساحة ممكنة

لديك سياج طوله 40 قدمًا لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. أوجد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذه السياج وأبعاد الحديقة الناظرة لها.

الحل أولًا لاحظ أنه توجد امكانيات كثيرة. فيمكننا إحاطة مخطط طويل جدًا ولكنه ضيق، أو مخطط عريض جدًا ولكنه ليس طويل جدًا. (انظر الشكل 6.78). أولًا نرسم صورة وندون الطول والعرض x و y ، على التوالي. (انظر الشكل 6.79).



الشكل 6.79
مخطط المستطيل

نريد ايجاد القيمة العظمى للمساحة،

$$A = xy$$

مع ذلك، تحتوي هذه الدالة على متغيرين وبالتالي، لا يمكن التعامل معها بواسطة الطرق المتوفرة لدينا. لاحظ أنه إذا كنت ترغب في قيمة عظمى للمساحة، فيجب استخدام كل السياج. وهذا معناه أن محيط السياج الناتج يجب أن يكون $40'$ وبالتالي،

$$40 = \text{المحيط} = 2x + 2y. \qquad (7.1)$$

لاحظ أنه يمكننا استخدام (7.1) للحل وايجاد أحد المتغيرات (أيّ منهما) بدلالة الآخر.

لدينا

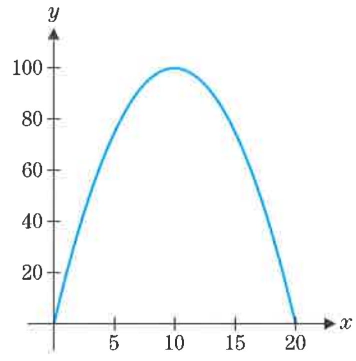
$$2y = 40 - 2x \quad \text{or} \quad y = 20 - x$$

بتعويض y . نحصل على

$$A = xy = x(20 - x)$$

لذا. تتمثل مهمتنا في إيجاد قيمة عظمى للدالة

$$A(x) = x(20 - x)$$



الشكل **6.80**
$y = x(20 - x)$

قبل ايجاد القيمة العظمى للمساحة $A(x)$. يجب أن نحدد إذا ما كان يوجد فترة يقع فيها المتغير x بما أن x هي مسافة. فيجب أن يكون لدينا $0 \leq x$. وبما أن المحيط $40'$. فيجب أن يكون لدينا $x \leq 20$. (لما لدينا $x \leq 40$ ؟) بالتالي. نرغب في إيجاد قيمة عظمى لـ $A(x)$ في الفترة المغلقة $[0, 20]$. تتحقق من ماهية الإجابة المعقولة. نرسم تمثيلًا بيانيًا لـ $y = A(x)$ على الفترة $[0, 20]$ (انظر الشكل 6.80). فيبدو أن القيمة العظمى تحدث عند $x = 10$. الآن. لنحلل المسألة بدقة. لدينا

$$\begin{aligned} A'(x) &= 1(20 - x) + x(-1) \\ &= 20 - 2x \\ &= 2(10 - x) \end{aligned}$$

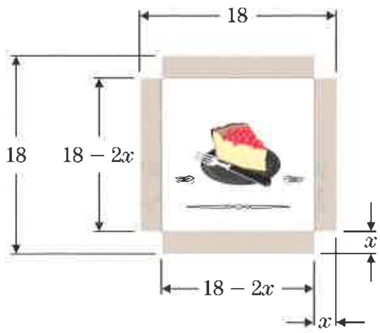
إذن. العدد الحرج الوحيد هو $x = 10$ وهذه هي القيمة في الفترة قيد البحث. تذكر أن القيم العظمى والصغرى المتصلة في الفترة المغلقة يجب أن تحدث إما عند النقاط الطرفية أو العدد الحرج. إذن. نحن بحاجة إلى المقارنة فقط

$$A(0) = 0 \quad , \quad A(20) = 0 \quad و \quad A(10) = 100$$

بالتالي. المساحة العظمى التي يمكن احاطتها بـ $40'$ من السياج هي $100\ \text{ft}^2$. أبعاد الحديقة هي: معطاة بواسطة $x = 10$ و

$$y = 20 - x = 10$$

أي أن المستطيل الذي يبلغ محيطه $40'$ بمساحة عظمى هو مربع طول ضلعه $10'$. ■



الشكل **6.81a**
لوح من الورق المقوى

بشكل عام. يمكنك إيضاح أن (بفرض وجود قيمة ثابتة للمحيط) المستطيل له مساحة عظمى اذا كان مربعًا. وهذا مطابق من الناحية العملية للمثال 7.1 ويُترك كتمرين.

يجب على شركات التصنيع تحديد كيفية تعبئة المنتجات للشحن بأكثر الطرق اقتصادية. ويوفر مثال 7.2 إيضاحًا بسيطًا لذلك.

مثال 7.2 إنشاء صندوق مع قيمة عظمى للحجم

لوح مربع من الورق المقوى طول ضلعه 18 in. صنع منه صندوق مفتوح (أي. لا يوجد غطاء). بقطع مربعات متساوية من كل زاوية (انظر الشكل 6.81a) وطي الجوانب على طول الخطوط المنقطة. (انظر الشكل 6.81b). أوجد أبعاد الصندوق الذي له قيمة عظمى للحجم.

الحل تذكر أن حجم متوازي المستطيلات (صندوق) يُعطى بالصيغة:

$$V = l \times w \times h$$

من الشكل 6.81b. يمكننا القول بأن الارتفاع $h = x$. بينما الطول والعرض $l = w = 18 - 2x$. بناء عليه. يمكننا كتابة الحجم بدلالة متغير واحد x كـ

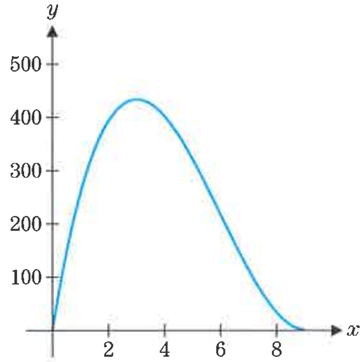
$$V = V(x) = (18 - 2x)^2(x) = 4x(9 - x)^2$$

الشكل **6.81b**
صندوق مستطيل

لاحظ أنه بما أن x مسافة، فلدينا $x \geq 0$. كما أن لدينا $x \leq 9$ ، بما أن المربعات المقصوصة من الجانب 9 من كل زاوية ستقطع لوح الورق المقوى بالكامل. بالتالي، يجب ايجاد القيمة العظمى المطلقة للدالة المتصلة $V(x) = 4x(9 - x)^2$

في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq 9$.

التمثيل البياني لـ $y = V(x)$ في الفترة $[0, 9]$ يتضح على الشكل 6.82 من التمثيل البياني. يبدو أن القيمة العظمى للحجم اكبر من 400 ويبدو أنه يحدث حول $x = 3$. الآن، يمكننا حل المسألة بدقة. لدينا



الشكل **6.82**

$y = 4x(9 - x)^2$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(9 - x)^2 + 4x(2)(9 - x)(-1) && \text{قاعدة ناتج الضرب والسلسلة} \\ &= 4(9 - x)[(9 - x) - 2x] \\ &= 4(9 - x)(9 - 3x) && \text{ضع العامل المشترك } (9 - x) \end{aligned}$$

وبالتالي، يكون لـ V عددين حرجين، 3 و9، وكلاهما في الفترة قيد البحث. كل ما نحتاج إليه الآن هو مقارنة قيمة الدالة عند النقاط الطرفية والأعداد الحرجة. لدينا

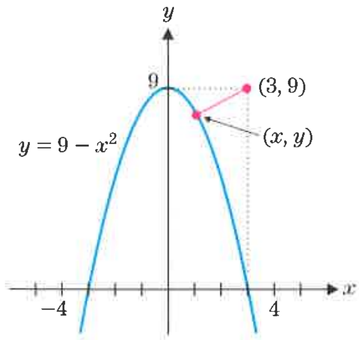
$V(0) = 0$ ، $V(9) = 0$ و$V(3) = 432$

من الواضح أن القيمة العظمى للحجم هي 432 بوصة مكعبة، وهو ما يمكننا تحقيقه إذا قمنا بقص المربعات طول الضلع ″3 من كل زاوية. لاحظ أن هذا يتطابق مع ما توقعناه من التمثيل البياني لـ $y = V(x)$ في الشكل 6.82. أخيرًا، لاحظ أن أبعاد الصندوق المثالي هي ″12 طول في ″12 عرض في ″3 عمق.

عند إنشاء بناء جديد، يجب ربطه بخطوط التليفون والطاقة والماء والصرف الصحي. وإذا كانت هذه الخطوط ملتوية، فقد لا يتضح كيفية إجراء أقصر وصلة ممكنة (أي الأقل تكلفة). في الأمثلة 7.3 و 7.4، يمكننا دراسة المسألة المشتركة لإيجاد أقصر مسافة من نقطة إلى منحنى.

مثال 7.3 إيجاد أقرب نقطة على قطع مكافئ

أوجد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(3, 9)$. (انظر الشكل 6.83).



الشكل **6.83**

$y = 9 - x^2$

الحل من صيغة المسافة العادية، تكون المسافة بين النقطة $(3, 9)$ وأي نقطة (x, y) هي

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 9)^2}$$

فإذا كانت النقطة (x, y) على القطع المكافئ، فإن إحداثياتها تحقق المعادلة $y = 9 - x^2$ وبالتالي، يمكننا كتابة المسافة بدلالة المتغير الوحيد x على النحو التالي

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x - 3)^2 + [(9 - x^2) - 9]^2} \\ &= \sqrt{(x - 3)^2 + x^4}. \end{aligned}$$

بالرغم من أنه يمكننا بالتأكيد حل المسألة في شكلها الحالي، إلا أنه يمكننا تبسيط عملنا بملاحظة أن $d(x)$ لها قيمة صغرى اذا وفقط اذا، كانت الكمية الموجودة تحت الجذر التربيعي. (نترك هذه المسألة كتمرين لتوضيح سبب صحة ذلك). إذن، فبدلًا من ايجاد القيمة الصغرى للدالة $d(x)$ بشكل مباشر، نجد القيمة الصغرى لمربع $d(x)$:

$$f(x) = [d(x)]^2 = (x - 3)^2 + x^4$$

بدلًا من ذلك. لاحظ من الشكل 6.83 أن أي نقطة على القطع المكافئ يسار الإحداثي y أبعد عن النقطة $(3, 9)$ منها عن النقطة $(0, 9)$. بالمثل، أي نقطة على القطع المكافئ أسفل الإحداثي x أبعد عن النقطة $(3, 9)$ منها عن النقطة $(3, 0)$. إذن، يكفي البحث عن أقرب نقطة باستخدام $0 \leq x \leq 3$.

انظر الشكل 6.84 من أجل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ عند هذه الفترة. لاحظ أنه يبدو أن القيمة الصغرى للدالة f (مربع المسافة) حوالي 5 ويبدو أنها تحدث بالقرب من $x = 1$ لدينا

$$f'(x) = 2(x-3)^1 + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 6$$

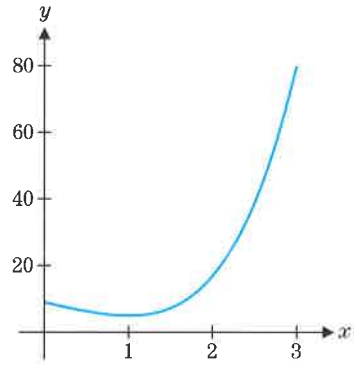
لاحظ أن عوامل $f'(x)$. [وإحدى طرق ملاحظة ذلك هي إدراك أن $x = 1$ هو صفر f' الذي يجعل $(x-1)$ عاملاً]. لدينا

$$f'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

إذن، $x = 1$ عددًا حرجاً. في الحقيقة، إنه العدد الحرج الوحيد، حيث إن $(2x^2 + 2x + 3)$ ليس له أصفار. (لم لا؟) كل ما نحتاج إليه الآن هو مقارنة قيمة f عند النقاط الطرفية والأعداد الحرجة. لدينا

$f(0) = 9$ ، $f(3) = 81$ و$f(1) = 5$

وبالتالي، تكون القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ هي 5. هذا يعني أن أصغر مسافة من النقطة $(3, 9)$ إلى القطع المكافئ هي $\sqrt{5}$ وأقرب نقطة على القطع المكافئ هي $(1, 8)$ ، التي تناظر مع ما نتوقعه من التمثيل البياني $y = f(x)$ ■



الشكل **6.84**
$y = (x-3)^2 + x^4$

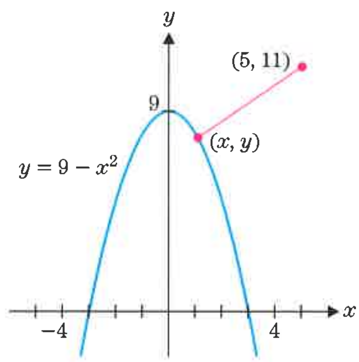
مثال 7.4 يشبه كثيرًا مثال 7.3، باستثناء أننا نحتاج إلى استخدام طرق التقريب لإيجاد العدد الحرج.

مثال 7.4 إيجاد أقصر مسافة تقريبية

أوجد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(5, 11)$. (انظر الشكل 6.85).

الحل كما في مثال 7.3، نريد إيجاد أقصر مسافة من نقطة ثابتة [في هذه الحالة، النقطة $(5, 11)$] إلى النقطة (x, y) على القطع المكافئ. باستخدام صيغة المسافة، تكون المسافة من أي نقطة (x, y) على القطع المكافئ إلى النقطة $(5, 11)$ هي

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-11)^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + [(9-x^2) - 11]^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + (x^2+2)^2}. \end{aligned}$$



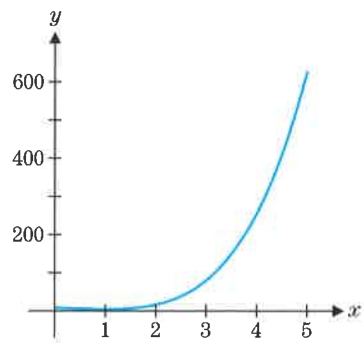
الشكل **6.85**
$y = 9 - x^2$

مرةً أخرى، هذه الطريقة تكافئ (وأبسط من) ايجاد القيمة الصغرى تحت الجذر التربيعي:

$$f(x) = [d(x)]^2 = (x-5)^2 + (x^2+2)^2$$

كما في المثال 7.3، يمكننا من الشكل 6.85 ملاحظة أن أي نقطة على القطع المكافئ يسار الإحداثي y أبعد عن النقطة $(5, 11)$ منها عن النقطة $(0, 9)$. بالمثل، أي نقطة على القطع المكافئ يمين المحور $x = 5$ أبعد عن النقطة $(5, 11)$ منها عن النقطة $(5, -16)$. وبالتالي، نوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ للحصول على $0 \le x \le 5$. من التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضح في الشكل 6.86، يبدو أن القيمة الصغرى للدالة f تحدث حول $x = 1$. بعد ذلك، لاحظ أنه

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-5) + 2(x^2+2)(2x) \\ &= 4x^3 + 10x - 10 \end{aligned}$$



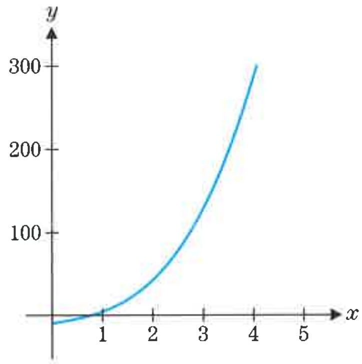
الشكل **6.86**
$y = f(x) = [d(x)]^2$

على عكس المثال 7.3، لا يحتوي تعبير $f'(x)$ على تحليل واضح إلى العوامل. إذن، يكون اختيارنا الوحيد هو إيجاد أصفار f' بالتقريب. من التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$ الموضح في

الشكل 6.87. يبدو أن الصفر الوحيد أصغر قليلًا من 1. باستخدام $x_0 = 1$ كتخمين أولي في طريقة نيوتن (المطبقة على $f'(x) = 0$) أو استخدم برنامج الحل بالآلة الحاسبة، ستحصل على الجذر التقريبي $x_c \approx 0.79728$. نقارن الآن قيم الدالة:

$$f(0) = 29 \text{ ،} \qquad f(5) = 729 \qquad f(x_c) \approx 24.6_9$$

بالتالي، تكون أصغر مسافة من $(5, 11)$ إلى القطع المكافئ $\sqrt{24.6} \approx 4.96$ تقريبًا وتقع أقرب نقطة على القطع المكافئ عند $(0.79728, 8.364)$ تقريبًا.



الشكل **6.87**
$y = f'(x)$

لاحظ أنه في الشكلين 6.83 و 6.85، يبدو أن أقصر مسار عموديًا على المماس للمنحنى عند النقطة حيث يتقاطع المسار مع المنحنى. نترك هذه المسألة كتمرين لإثبات صحة ذلك. تُعد هذه الملاحظة مبدأ هندسيًا هامًا ينطبق على أي مسألة من هذا النوع.

ملحوظة 7.1

في هذه المرحلة، قد تكون حاولت التخلي عن مقارنة قيم الدالة عند النقاط الطرفية والأعداد الحرجة. بعد كل ذلك، وفي كل الأمثلة التي رأيناها حتى الآن، كانت القيمة العظمى او القيمة الصغرى تحدث (أي، النقطة التي حدث عندها القيمة العظمى او القيمة الصغرى) عند العدد الحرج في الفترة قيد البحث قد تشك في ذلك إذا كان لديك عدد حرج واحد فقط، حيث سيناظر القيمة العظمى او القيمة الصغرى التي نبحث عنها. لسوء الحظ، لا يكون هذا هو الحال على الدوام. في 1945، قام اثنان من مهندسي الطيران البارزين بايجاد مشتقة دالة لتمثيل مجال طائرة، عازمين بذلك زيادة المجال. ووجدا العدد الحرج لهذه الدالة (المناظر لتوزيع كل وزن الطائرة من الناحية العملية في الجناحين) واستنتجا أن ذلك يعطي أقصى مجال. كانت النتيجة طائرة "الجناح الطائر" الشهيرة. بعد بضع سنوات، قيل بأن العدد الحرج الذي وجدوه يوافق الحد الأدنى المحلي. في دفاع المهندسين، لم يكن في متناولهم قدرة حسابية سهلة ودقيقة كما هو حالنا اليوم. جدير بالملاحظة أن هذا التصميم يشبه بشدة قاذفة القنابل المتخفية B-2 . أتى ذكر هذه القصة كجدال نشأ بشأن إنتاج B-2. ينبغي أن يكون المغزى واضحًا وضوح الشمس: تحقق من قيم الدالة عند الأعداد الحرجة والنقاط الطرفية. لا تفترض ببساطة (حتى بموجب أنه يوجد عدد حرج واحد فقط) أن العدد الحرج المعطى يناظر القيمة القصوى التي تبحث عنها.

بعد ذلك، ندرس مسألة التوصل إلى القيمة المثلى التي لا يمكن أن تقتصر على الفترة المغلقة. وسنستخدم حقيقة أنه بالنسبة للدالة المتصلة، يجب أن تكون القيمة القصوى المحلية عبارة عن قيمة قصوى مطلقة. (فكر في سبب صحة ذلك).

مثال 7.5 تصميم علبة صودا باستخدام القيمة الصغرى من كمية المواد

تتسع علبة الصودا لـ 12 أوقية من السائل. أوجدابعاد العلبة التي ستوفر القيمة الصغرى لكمية المواد المستخدمة في صنعها، على فرض أن سمك المادة واحد (أي، سمك الألمنيوم واحد في أي مكان بالعبوة).

الحل أولًا، نرسم صورة لعبوة الصودا النموذجية ونلصقها. (انظر الشكل 6.88). هنا، نفترض أن العبوة هي أسطوانة دائرية صحيحة بارتفاع h ونصف قطر r. على فرض وحدة سمك الألومنيوم، لاحظ أننا نقلل مقدار المادة بتقليل مساحة سطح العبوة. لدينا

$$\text{المساحة} = \text{مساحة السطح+مساحة القعر+المساحة الجانبية} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (7.2)$$

الشكل **6.88**
علبة صودا

يمكننا حذف أحد المتغيرات باستخدام حقيقة أن الحجم (باستخدام 1 بوصة سائلة (fl oz) $\approx 1.80469\ \text{in.}^3$) يجب أن يكون

$$12\ \text{fl oz} \approx 12\ \text{fl oz} \times 1.80469\ \frac{\text{in.}^3}{\text{fl oz}} = 21.65628\ \text{in.}^3$$

كما أن حجم الأسطوانة الدائرية الصحيحة هو

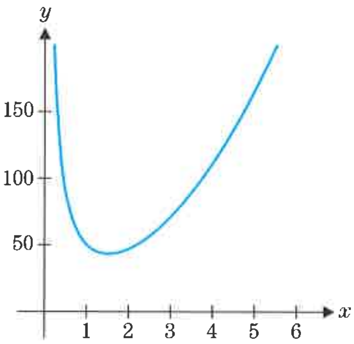
$$\text{الحجم} = \pi r^2 h$$

وكذلك،

$$h = \frac{}{\pi r^2} \approx \frac{21.65628}{\pi r^2} \qquad (7.3)$$

بالتالي، ومن (7.2) و(7.3) ، تكون مساحة السطح تقريبًا

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{21.65628}{\pi r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{21.65628}{\pi r} \right)$$



الشكل **6.89**

$y = A(r)$

من ثم، تتمثل مهمتنا في ايجاد القيمة الصغرى للدالة $A(r)$. ولكن هنا، لا يوجد فترة مغلقة للقيم المسموح بها. في الحقيقة، كل ما يمكننا قوله هو أن $r > 0$. قد يكون لدينا r كبيرة أو صغيرة بقدر ما يمكننا تخيله، وبأخذ h لتكون صغيرة أو كبيرة، على التوالي، تبعًا لذلك. أي، يجب أن نوجد القيمة الصغرى المطلقة للدالة $A(r)$ في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. لتكوين فكرة عن ما قد تكونه الإجابة المعقولة، نرسم $y = A(r)$. (انظر الشكل 6.89). القيمة الصغرى المحلية (أصغر من 50 بقليل) واقعًا بين $r = 1$ و $r = 2$. بعد ذلك، نوجد

$$\begin{aligned} A'(r) &= \frac{d}{dr}\left[2\pi \left(r^2 + \frac{21.65628}{\pi r} \right) \right] \\ &= 2\pi \left(2r - \frac{21.65628}{\pi r^2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2\pi r^3 - 21.65628}{\pi r^2} \right) \end{aligned}$$

لاحظ أن الأعداد الحرجة الوحيدة هي تلك الأعداد التي يكون بسط الكسر لها هو صفر:

$$0 = 2\pi r^3 - 21.65628$$

يحدث ذلك اذا وفقط اذا

$$r^3 = \frac{21.65628}{2\pi}$$

وبالتالي، يكون العدد الحرج الوحيد

$$r = r_c = \sqrt[3]{\frac{21.65628}{2\pi}} \approx 1.510548$$

لاحظ ذلك أيضًا لـ $0 < r < r_c, A'(r) < 0$. ولـ $0 < r < r_c, A'(r) < 0$. أي أن، $A(r)$ تتناقص في الفترة $(0, r_c)$ وتتزايد في الفترة (r_c, ∞) . بالتالي، لا يكون للدالة $A(r)$ حد أدنى محلي فقط، وإنما قيمة صغرى محلية مطلقة أيضًا عند $r = r_c$. لاحظ، أيضًا، أن هذا يناظر مع ما توقعناه من التمثيل البياني للدالة $y = A(r)$ في الشكل 6.89. هذا يوضح أن العبوة التي تستخدم القيمة الصغرى من المواد من المواد نصف قطرها $r_c \approx 1.510548$ وارتفاعها

$$h = \frac{21.65628}{\pi r_c^2} \approx 3.0211 \quad \blacksquare$$

لاحظ أن العبوة المثلى من المثال 7.5 "مربعة"، بمعنى أن الارتفاع (h) يساوي القطر $(2r)$. ينبغي أن نلاحظ أيضًا أن المثال 7.5 ليس واقعيًا تمامًا. علبة الصودا المعيارية التي تحوي 12 أوقية لها قطر يبلغ تقريبًا $1.156''$. ينبغي أن تراجع المثال 7.5 لإيجاد أي افتراضات غير واقعية

قمنا بافتراضها. ندرس مسألة تصميم علبة صودا أخرى في التمارين.

في مثالنا الأخير. يمكننا دراسة مسألة حيث يجب القيام بمعظم العمل عدديًا وبيانيًا.

مثال 7.6 ايجاد القيمة الصغرى لتكلفة إنشاء طريق سريع

تريد الولاية بناء امتداد جديد لطريق سريع يربط الجسر الحالي بتقاطع لشارع رئيسي، يقع على بعد 8 أميال من جهتي جنوب وشرق الجسر. وهناك امتداد بعرض 5 أميال لمستنقعات مجاورة للجسر يجب عبورها. (انظر الشكل 6.90). على فرض أن الطريق السريع يكلف 10 ملايين $ للميل للبناء فوق المستنقعات و7 ملايين $ فقط للميل للبناء فوق أرض جافة. فما هي المسافة بين الطريق السريع و شرق الجسر عندما يعبر المستنقعات؟ ■

الشكل 6.90
طريق سريع جديد

الحل قد تخمن عبور الطريق السريع للمستنقعات مباشرة، لتقصير المسافة فوق المستنقعات. إلا أن هذا غير صحيح. على فرض أن x تمثل المسافة محل الاستفهام. (انظر الشكل 6.90). بعد ذلك، يقع التقاطع $(8-x)$ ميل شرق النقطة حيث سيترك الطريق السريع المستنقعات. بالتالي، يكون إجمالي التكلفة (بملايين الدولارات)

التكلفة=10(المسافة فوق المستنقعات) + 7(المسافة فوق الأرض الجافة)

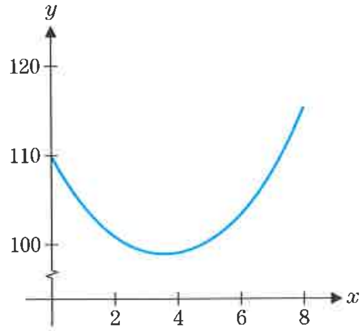
باستخدام نظرية فيثاغورس على المثلثين الصحيحين الظاهرين في الشكل 6.90. نحصل على دالة التكلفة

$$C(x) = 10\sqrt{x^2+25} + 7\sqrt{(8-x)^2+9}$$

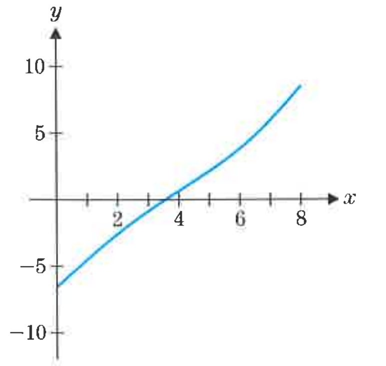
لاحظ من الشكل 6.90 أنه يجب أن يكون لدينا $0 \le x \le 8$. بالتالي، يجب أن ايجاد القيمة الصغرى للدالة المتصلة $C(x)$ في الفترة المغلقة $[0, 8]$. من التمثيل البياني $y = C(x)$ الموضح في الشكل 6.91. يبدو أن القيمة الصغرى أصغر من 100 ويحدث حول $x = 4$. لدينا

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}\left[10\sqrt{x^2+25} + 7\sqrt{(8-x)^2+9}\right] \\ &= 5(x^2+25)^{-1/2}(2x) + \frac{7}{2}[(8-x)^2+9]^{-1/2}(2)(8-x)^1(-1) \\ &= \frac{10x}{\sqrt{x^2+25}} - \frac{7(8-x)}{\sqrt{(8-x)^2+9}}. \end{aligned}$$

أولًا، لاحظ أن الأعداد الحرجة فقط هي حيث $C'(x) = 0$. (لماذا؟) الطريقة الوحيدة لإيجاد ذلك هي بتقريبهم. من التمثيل البياني لـ $y = C'(x)$ الموضح في الشكل 6.92. يبدو أن الصفر



الشكل 6.91
$y = C(x)$



الشكل 6.92
$y = C'(x)$

الوحيد لـ $C'(x)$ في الفترة $[0, 8]$ بين $x = 3$ و $x = 4$. نقوم بتقريب هذا الصفر عدديًا (على سبيل المثال، باستخدام التنصيف أو برنامج الحل في الآلة الحاسبة)، للحصول على العدد الحرج التقريبي

$$x_c \approx 3.560052$$

كل ما نحتاج إليه الآن هو مقارنة قيمة $C(x)$ عند النقاط الطرفية والعدد الحرج:

$$C(0) \approx \$109.8 \text{ million}$$

$$C(8) \approx \$115.3 \text{ million}$$

و

$$C(x_c) \approx \$98.9 \text{ million}$$

بالتالي، وباستخدام حساب التفاضل والتكامل، يمكننا التوفير لدافعي الضرائب أكثر من 10 ملايين $ عند عبور المستنقعات مباشرةً وأكثر من 16 مليون $ عند عبور المستنقعات بشكل قطري (ليست مكافأة سيئة بالنسبة لبعض دقائق عمل). ■

ينبغي أن تمنحك الأمثلة التي قدمناها في هذا القسم بالإضافة إلى التدريبات أساسًا لحل مجموعة كبيرة من مسائل التوصل إلى القيمة المثلى المطبقة. عند حل هذه المسائل، احرص على رسم صورة جيدة، فضلًا عن التمثيلات البيانية للدوال المضمنة. تأكد من اتساق الإجابة التي تحصل عليها حسابيًا مع ما تتوقعه من التمثيلات البيانية. إذا لم تتسق، فيجب إجراء المزيد من التحليل للوقوف على ما فاتك. تأكد كذلك من منطقية الحل ماديًا، عند الاقتضاء. من شأن عمليات التحقق المتعددة هذه أن تقلل من ترجيح الخطأ.

التمارين 6.7

تمارين كتابيّة

1. على فرض أن بعض الأصدقاء يشتكون من عدم تمكنهم من حل أي مسائل في هذا الدرس. وعندما تطلب مشاهدة عملهم، يقولون بأنه لا يمكنهم حتى البدء في العمل. في هذا الدرس، أكدنا على رسم صورة وتحديد المتغيرات. ويتمثل جزء من فائدة ذلك في مساعدتك على البدء في تدوين شيء ما (أي شيء). هل تعتقد أن هذه النصيحة مفيدة؟ ما الجانب الذي تراه أكثر صعوبة في هذه المسائل؟ امنح أصدقاءك أفضل نصيحة ممكنة.

2. تجاهلنا جانبًا واحدًا هامًا في مسائل التوصيل إلى القيمة المثلى، جانبًا يمكن تسميته "المنطق السليم". على سبيل المثال، على فرض أنك توجد الأبعاد المثالية للسياج والحل الرياضي هو بناء سياج مربع بطول $10\sqrt{5}$ قدم على كل جانب. في مقابلتك مع النجار الذي سيبني السياج، ما هو طول السياج الذي طلبته؟ ما سبب احتمال عدم كون $10\sqrt{5}$ أفضل طريقة للتعبير عن الطول؟ يمكننا تقريب $10\sqrt{5} \approx 22.36$ ما هي الظروف التي قد تدفعك إلى الاقتصار على التقريب إلى $22'4''$ بدلًا من $22'5''$ ؟

3. في المثال 7.3، ذكرنا أنه تم ايجاد القيمة الصغرى للدالة $d(x) = \sqrt{f(x)}$ بنفس قيمة (قيم) x- التي توجد القيمة الصغرى للدالة $f(x)$. اشرح سبب عدم ضرورة تقليل $f(x)$ و $\sin(f(x))$ بنفس قيم x- . هل يصح مع $f(x)$ و $e^{f(x)}$ ؟

4. على فرض أن $f(x)$ دالة متصلة تحتوي على عدد حرج واحد وأن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند هذا العدد الحرج. اشرح سبب كون لـ $f(x)$ حد أدنى مطلق كذلك عند العدد الحرج.

1. يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار القسم المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي $1800\,\text{ft}^2$. أوجد القيمة الصغرى للمحيط وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.

2. يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار القسم المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر 96 قدمًا من السياج. أوجد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.

3. يجب بناء إسطبل مكون من حظيرتين. يشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك 120 ft من السياج متوفر، فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج؟

4. يجب أن تكون صالة عرض بمتجر متعدد الأقسام مستطيلة بثلاثة جدران في ثلاثة جوانب وفتحات باب 6 أقدام في الجانبين المتقابلين وفتحة باب 10 أقدام في الجدار المتبقي. يجب أن تكون مساحة أرضية صالة العرض $800\,\text{ft}^2$. ما هي الأبعاد التي ستكون أصغر طول للجدار المستخدم؟

5. بيّن أن المستطيل ذي المساحة العظمى محيطه قيمة ثابتة P مربع دائمًا.

6. بيّن أن المستطيل ذي المحيط الأصغر ومساحته قيمة ثابتة A مربع دائمًا.

7. يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته $6''$ –في– $10''$ ، وقص مربعات بحجم x-in من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوق.

.8 يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته ″12 –في– ″16 ، وقص مربعات بحجم x-in من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x تحقق القيمةالعظمى لحجم الصندوق.

.9 (a) تم بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ قطعة من الورق المقوى مساحتها ″6 –في– ″6 ، وقص مربعات بحجم x-inمن كل زاوية وطي الجوانب. ثم تم لصق المربعات الأربعة بمساحة x-in معًا لتشكل صندوقًا ثانيًا (مفتوح من الأعلى أو سفلي). أوجد قيمة x تحقق القيمة العظمى لأحجام الصناديق.
(b) كرر المسألة بدءًا بقطعة من الورق المقوى مساحتها ″4–في–″6.

.10 أوجد قيم d بحيث عندما تُبنى الصناديق في التمرين 9 من قطعة ورق مقوى مساحتها ″d –في– ″6 تحقق القيمة القصوى للحجم من هذين الصندوقين.

.11 أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(0, 1)$.

.12 أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(3, 4)$.

.13 أوجد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقطة $(0, 0)$.

.14 أوجد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقطة $(1, 1)$.

.15 في التمرينين 11 و 12، أوجد ميل المستقيم الذي يمرّ من النقطة المعطاة وأقرب نقطة على المنحنى المعطى. بيّن أن في كل حالة، يكون هذا الخط عموديًا على المماس للمنحنى عند النقطة المحددة.

.16 كرر التمرين 15 للأمثلة 7.3 و7.4.

.17 تتسع علبة الصودا 12 أوقية من السائل. على فرض أن سمك القمة والقاع ضعف سمك الجوانب. أوجد أبعاد العلبة التي تحقق القيمة الصغرى للمادة المستخدمة. (إرشاد: بدلًا من ايجاد القيمة الصغرى لمساحة السطح أوجد القيمة الصغرى للتكلفة مساحة السطح، قلل التكلفة، التي تتناسب مع ناتج السمك والمساحة).

.18 عقب المثال 7.5، ذكرنا أن علبة الصودا الفعلية لها نصف قطر يبلغ ″1.156 تقريبًا. بيّن أن نصف القطر هذا يحقق القيمة الصغرى للتكلفة إذا كان سمك القمة والقاع أكبر من سمك الجوانب بـ2.23 مرة.

.19 يمتد خط الماء بين الشرق والغرب. وتريد مدينة توصيل مشروعي تطوير سكنية بالخط من خلال مد خط من نقطة واحدة على الخط الموجود إلى مشروعي التطوير. يقع أحد مشاريع التطوير على بعد 3 أميال جنوب الخط الموجود؛ ويقع الآخر على بعد 4 أميال جنوب الخط الموجود و 5 أميال شرق مشروع التطوير الأول. أوجد المكان على الخط الموجود لعمل الوصلة وايجاد القيمة الصغرى لطول الخط الجديد.

.20 تحتاج شركة إلى مد خط أنابيب نفط من منصة نفط على بعد 25 ميلًا في البحر إلى الخزان الذي يبعد 5 أميال من البر. يمتد الخط الساحلي بين الشرق والغرب ويقع الخزان على بعد 8 أميال شرق المنصة. على فرض أن ذلك يكلف 50 ألف $ لكل ميل لإنشاء خط الأنابيب تحت الماء و20 ألف $ للميل لإنشاء خط الأنابيب على البر. سيتم إنشاء خط الأنابيب في خط مستقيم من المنصة إلى النقطة المحددة على الخط الساحلي، ثم في خط مستقيم إلى الخزان. ما النقطة التي ينبغي اختيارها على الخط الساحلي لتحقق القيمة الصغرى لتكلفةخط الأنابيب؟

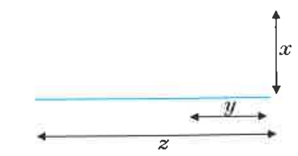
.21 تريد الولاية بناء قسم جديد من طريق سريع لربط الجسر الحالي بتقاطع مع طريق سريع موجود، يقع على بعد 8 أميال شرق و10 أميال جنوب الجسر. أول 4 أميال جنوب الجسر عبارة عن مستنقعات. على فرض أن الطريق السريع يكلف 5 ملايين $ للميل فوق المستنقعات و2 مليون $ للميل فوق الأرض الجافة. سيتم إنشاء الطريق السريع في خط مستقيم من الجسر إلى حافة المستنقعات، ثم في خط مستقيم إلى تقاطع الطريق السريع. (a) ما النقطة التي ينبغي أن يبرز الطريق السريع عندها من المستنقعات ليتحقق قيمة صغرى لتكلفة الطريق السريع الجديد؟ (b) ما مقدار ما يمكن توفيره عند بناء الطريق السريع الجديد في خط مستقيم من الجسر إلى التقاطع؟

.22 (a) بعد البدء في إنشاء الطريق السريع في التمرين 21، أعيد تقييم تكلفة الميل فوق المستنقعات بـ 6 ملايين $. أوجد النقطة على المستنقعات/حد الأرض الجافة التي من شأنهان تحقق قيمة صغرى لتكلفة الطريق السريع باستخدام دالة التكلفة الجديدة. إذا كان الإنشاء بعيدًا جدًا بحيث لا يمكن تغيير المسارات، فما مقدار التكلفة الإضافية لاستخدام المسار من التمرين 21؟

(b) بعد البدء في إنشاء الطريق السريع في التمرين 21، أعيد تقييم تكلفة الميل فوق الأرض الجافة بـــ3 ملايين دولار. أوجد النقطة على المستنقعات/حد الأرض الجافة التي من شأنها ان تحقق القيمة الصغرى لتكلفة الطريق السريع باستخدام دالة التكلفة الجديدة. إذا كان الإنشاء بعيدًا جدًا بحيث لا يمكن تغيير المسارات، فما مقدار التكلفة الإضافية لاستخدام المسار من التمرين 21؟

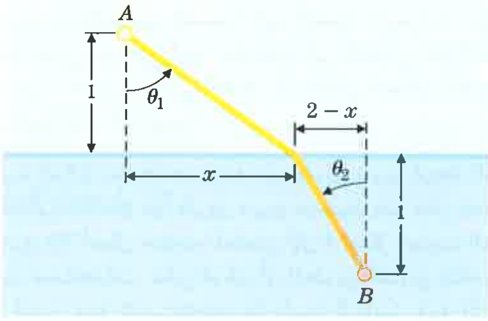
التطبيقات

.23 يقف حامد على الخط الساحلي بينما ألقيت كرة على بعد $x = 4$ متر في الماء و $z = 8$ متر من الشاطئ. إذا ركض بسرعة 6.4 m/s وسبح بسرعة 0.9 m/s فأوجد المكان الذي يدخل عنده (y) الماء ليحقق القيمة الصغرى من الزمن كي يصل إلى الكرة. بيّن أنك تحصل على نفس قيمة -y- لأي $z > 1$.



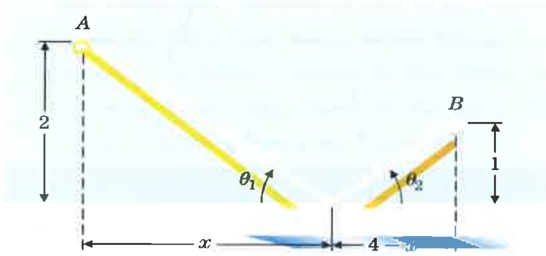
.24 في مسألة التمرين 23، بيّن أنه بالنسبة لأي x تكون نقطة الدخول المثالية عند $y = 0.144x$ تقريبًا.

.25 على فرض أن الضوء ينتقل من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح في الشكل. على فرض أن االسرعة المتجهة للضوء فوق خط الحد هي v_1 والسرعة المتجهة للضوء أسفل خط الحد هي v_2 . أوجد إجمالي الوقت $T(x)$ للوصول من النقطة A إلى النقطة B . اكتب المعادلة $T'(x) = 0$ واستبدل الجذور التربيعية باستخدام جيوب الزوايا في الشكل وأوجد مشتقة قانون سنيل $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$



تمرين 25

26. على فرض أن الضوء ينكسر عن مرآة للوصول من النقطة A إلى النقطة B كما هو مُشار إليه في الشكل. بفرض ثبات سرعة الضوء، يمكننا ايجاد القيمة الصغرى للزمن من خلال ايجاد القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. أوجد النقطة على المرآة التي تحقق القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. بيّن أن الزوايا في الشكل متساوية (زاوية الأنحناء تساوي زاوية الانعكاس).



تمرين 26

27. الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء إلى الرئتين، بإزاحة أي جسيمات تسد القصبة الهوائية وتغيير نصف قطر القصبة. على فرض أن قطر القصبة الهوائية في عدم وجود ضغط هو r_0 . السرعة المتجهة للهواء خلال القصبة الهوائية عند نصف قطر r هي $V(r) = cr^2(r_0 - r)$ تقريبًا لثابت ما c . أوجد نصف القطر الذي يحقق القيمة العظمى للسرعة المتجهة لدخول الهواء خلال القصبة الهوائية. هل هذا يعني أن القصبة الهوائية تتمدد أم تنكمش؟

28. لتزويد جميع أجزاء الجسم بالدم، يجب تكرار تفرع النظام الشرياني البشري. على فرض أن شريان بنصف قطر r يتفرع من شريان بنصف قطر $R\ (R > r)$ عند الزاوية θ . الطاقة المفقودة بسبب الاحتكاك تقريبًا هي

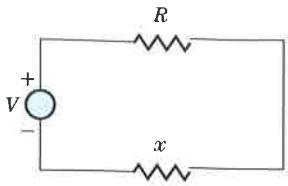
$$E(\theta) = \frac{\csc\theta}{r^4} + \frac{1 - \cot\theta}{R^4}$$

أوجد قيمة θ التي تحقق القيمة الصغرى لفقدان الطاقة.

29. في جهاز إلكتروني، قد تخدم الدوائر الافرادية عدة أغراض. في بعض الحالات، يجب التحكم في تدفق الكهرباء عن طريق القيمة الصغرى للطاقة بدلًا من تضخيمها. فتكون الطاقة الممتصة من الدائرة

$$p(x) = \frac{V^2 x}{(R + x)^2},$$

بالنسبة لجهد V ومقاومة R . أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للطاقة الممتصة.



30. في دائرة تيار متردد AC بجهد $V(t) = v\sin(2\pi ft)$ ، يبين الفولتميتر بالفعل متوسط الجهد (مربع متوسط الجذر) لـ $v/\sqrt{2}$ فإذا كان التردد $f = 60\ (\text{Hz})$ ويسجل المقياس 115 فولت، أوجد القيمة العظمى للجهد الذي يمكن الوصول إليه.

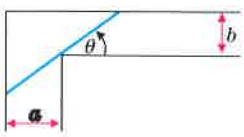
31. نافذة نورمندية على شكل نصف دائرة فوق مستطيل. على فرض أنه يتوفر $8 + \pi$ قدم من الزخارف الخشبية. ناقش السبب في أن مصمم النافذة قد يرغب في زيادة مساحة النافذة. أوجد أبعاد المستطيل (وبالتالي، نصف الدائرة) التي ستحقق القيمة العظمى لمساحة النافذة.

32. على فرض أن هناك سلكًا بطول 2 ft يجب قصه إلى قطعتين، ستشكل كل منهما مربعًا. أوجد طول كل قطعة لتحقق قيمة عظمى لاجمالي مساحتي المربعين.

33. إعلان يتكون من منطقة مستطيلة مطبوعة بالإضافة إلى هوامش 1-in على الجانبين و2-in في الأعلى والأسفل. فإذا كان لابد أن تكون مساحة المنطقة المطبوعة $92\ \text{in.}^2$ ، أوجد أبعاد المنطقة المطبوعة وإجمالي الإعلان التي تحقق القيمة الصغرى للمساحة.

34. إعلان يتكون من منطقة مستطيلة مطبوعة بالإضافة إلى هوامش 1-in على الجانبين و1.5-in في الأعلى والأسفل. فإذا كان لابد أن يكون إجمالي مساحة الإعلان $120\ \text{in.}^2$ ، ما هي الأبعاد التي ينبغي أن يكون عليها الإعلان لتحقق القيمة العظمى لمساحة المنطقة المطبوعة؟

35. مدخل بعرض $a = 5$ يلتقي مدخل بعرض $b = 4$ ft عند الزاوية اليمنى. (a) أوجد طول أطول سلم يمكن حمله عند الزاوية. (إرشاد: عبر عن طول السلم كدالة للزاوية θ في الشكل).



(b) بيّن أن القيمة العظمة لطول السلم بدلالة لـ a و b بشكل عام يساوي $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. (c) على فرض أن طول $a = 5$ والسلم هو 8 ft. أوجد القيمة الصغرى لـ b بحيث يمكن دوران السلم عند الزاوية. (d) قم بحل الجزء (c) للحصول على a بشكل عام وطول السلم L .

36. أرباح شركة ما عن بيع x (ألف) سلعة تُعطى بالدالة

$R(x) = \dfrac{35x - x^2}{x^2 + 35}$. (a) أوجد قيمة x التي القيمة العظمى للعائدات وأوجد القيمة العظمى للعائدات. (b) لأي ثابت موجب c ، أوجد x التي تحقق القيمة العظمى للدالة $R(x) = \dfrac{cx - x^2}{x^2 + c}$.

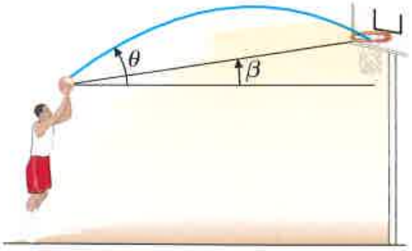
37. في t ساعة، يصنع أحد العمال $Q(t) = -t^3 + 12t^2 + 60t$ سلعة. مثل $Q'(t)$ بيانيًا وبيّن سبب إمكانية تفسير ذلك على أنه **كفاءة** العامل. (a) أوجد الزمن الذي تكون فيه كفاءة العامل ذات قيمة عظمى. (b) على فرض أن T هو طول يوم العمل. على فرض أن التمثيل البياني لـ $Q(t)$ له نقطة انعكاس واحدة لـ $0 \le t \le T$، تُسمى **نقطة تناقص العائدات**. بيّن أن كفاءة العامل تزداد عند نقطة تناقص العائدات.

38. 46) على فرض أن سعر مجموعة تذاكر إلى حفل محدد عند $40 للتذكرة. فإذا تم طلب 20 تذكرة. إلا أن تكلفة التذكرة كانت أقل بمقدار $1 لكل تذكرة إضافية مطلوبة، حتى 50 تذكرة كحد أقصى. (على سبيل المثال، في حال طلب 22 تذكرة، يكون السعر $38 للتذكرة). (a) أوجد عدد التذاكر الذي تحقق قيمة عظمى لتكلفة التذاكر. (b) إذا أرادت الإدارة أن يكون حل الجزء (a) هو 50، فكم يبلغ خصم السعر للتذاكر الإضافية المطلوبة؟

39. في النشاطات الرياضية حيث تُلقى الكرة أو تُضرب، تنتهي الكرة في كثير من الأحيان على ارتفاع مغاير لبدايتها. تتضمن الأمثلة تسديدة جولف المنحدرات وتسديدة كرة السلة. في المخطط، تنطلق الكرة بزاوية θ وتنتهي بزاوية β فوق الخط الأفقي (للمسافات المنحدرة، ستكون β سالبة). بتجاهل مقاومة ودوران الهواء، يُعطى المدى الأفقي بواسطة

$$R = \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta)$$

إذا كانت السرعة الابتدائية هي v وكان g ثابت الجاذبية. ففي الحالات التالية، أوجد θ التي تحقق القيمة العظمى لـ R (عامل v و g على أنها ثوابت): (a) $\beta = 10°$ (b) $\beta = 0°$ و (c) $\beta = -10°$ تأكد من أن $\theta = 45° + \beta°/2$ تزيد المدى.



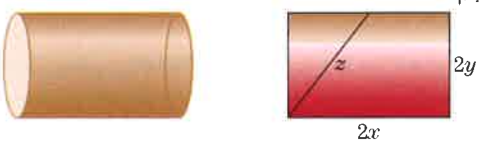
40. مساحة المنطقة المحاطة بالقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ تساوي πab . أوجد القيمة العظمى لمساحة المنطقة المحاطة بالقطع الناقص (أي، مستطيل بجوانب موازية الإحداثي x والإحداثي y ورؤوس على القطع الناقص). بيّن أن نسبة المساحةالعظمى للمستطيل إلى مساحة القطع الناقص وإلى مساحةالمستطيل المحاط بالقطع الناقص يساوي $2 : \frac{\pi}{2} : 1$

41. بيّن أن القيمة العظمى لحجم اسطوانة دائرية محاطة بكرة تساوي $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مرة.

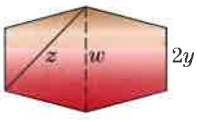
42. أوجدالقيمة العظمى لمساحة مثلث متساوي الساقين محيطه معطى P . [إرشاد: استخدم صيغة هيرون لمساحة المثلث للجوانب a ، b و c : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ، حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

تمارين استكشافية

1. في تحقيق أولي لمسألة كبلر عن البرميل الخشبي، بَيّنت أن نسبة الارتفاع إلى القطر (x/y) لـ $\sqrt{2}$ لبرميل أسطواني ستزيد الحجم (انظر الشكل a). مع ذلك، تم سحب البراميل الفعلية. قام كبلر بتقريب البرميل باستخدام برميل مستقيم الجوانب في الشكل b. ويمكن توضيح (أخبرناك أن كبلر كان جيدًا!) أن حجم هذا البرميل هو $V = \frac{2}{3}\pi[y^2 + (w-y)^2 + y(w-y)]\sqrt{z^2 - w^2}$ بمعاملة w و z كثوابت. بيّن أن $V'(y) = 0$ إذا كانت $y = w/2$. تذكر أن هذه النقطة الحرجة قدرلـ $V(y)$ أو شيء آخر (نقطة الانعكاس، على سبيل المثال). لاكتشاف ما لدينا هنا، أعد رسم الشكل b للقياس (بيّن العلاقة الصحيحة بين $2y$ و w). من الناحية المادية (فكر فيتزايد و تناقص y). قل بأن هذه النقطة المهمة ليست قيمة عظمى او صغرى. من المثير للاهتمام بالقدر الكافي، أن هذه النقطة الحرجة غير المفرطة لها ميزة مؤكدة لدى النمساويين. فقد كان هدفهم تحويل القياس z إلى تقدير للحجم. اشرح لماذا تعني $V'(y) = 0$ أن الاختلافات الصغيرة في y ستتحول إلى أخطاء صغيرة في الحجم V .



الشكل **a**



الشكل **b**

2. ألقيت كرة من $s = b$ إلى $s = a$ (حيث $a < b$) بسرعة الزمن v_0 . على فرض أن مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة، فإن الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى $s = a$ هو

$$T = -\frac{1}{c}\ln\left(1 - c\,\frac{b-a}{v_0}\right)$$

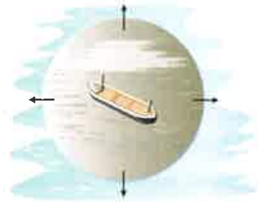
حيث c هو ثابت التناسب. يبعد لاعب البيسبول 300 ft عن اللوحة الرئيسية ويلقي الكرة نحو اللوحة الرئيسية مباشرةً بسرعة ابتدائية 125 ft/s. على فرض أن $c = 0.1$. فماالزمن الذي تستغرقه التي الكرة للوصول إلى اللوحة الرئيسية؟ يقف لاعب آخر على بعد x قدم من اللوحة الرئيسية ولديه خيار التقاط الكرة ثم ترحيلها، بعد تأخير لمدة 0.1 s. نحو اللوحة الرئيسية بسرعة ابتدائية 125 ft/s. أوجد x التي تحقق القيمة الصغرى لزمن وصول الكرة إلى اللوحة الرئيسية. هل الإلقاء المستقيم أسرع أم الترحيل؟ ما الذي يتغير، إن وجد، إذا كان التأخر بمقدار 0.2 s بدلًا من 0.1 s؟ ما طول مدة التأخير الذي تتساوى عنده سرعة إلقائها ولا يوجد به ترحيل؟ هل تعتقد أنه يمكنك التقاط الكرة وإلقاءها في هذا الزمن القصير؟ لماذا تعتقد بأهمية وجود خيار الترحيل في البيسبول؟ كرر ما سبق إذا ألقى اللاعب الثاني الكرة بسرعة ابتدائية 100 ft/s. بالنسبة للتأخير 0.1 s، أوجد قيمة السرعة الأولية لإلقاء اللاعب الثاني التي تتساوى عندها سرعة الترحيل ولا يوجد بها ترحيل.

الدرس 6-8 المعدّلات المرتبطة

في هذا الدرس، سنقدم مجموعة من المسائل المعروفة بمسائل المعدلات المرتبطة . والقاسم المشترك في كل مسألة هو وجود معادلة تربط كميتين أو أكثر تتغير جميعها بتغير الزمن. في كل حالة، سنستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقات كل الحدود الموجودة بالمعادلة. تتيح المعادلة التفاضلية لنا تحديد كيفية ترابط المشتقات (المعدلات) المختلفة.

مثال 8.1 مسألة معدلات مرتبطة

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150 غالونًا في الدقيقة. على فرض أن النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}''$. (انظر الشكل 6.93). اعتبر أن $1\ \text{ft}^3$ يساوي 7.5 غالونات، حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى 500 قدم.



الشكل 6.93
تسرب نفطي

الحل بما أن مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي πr^2 ، فإن حجم النفط يُعطى بـ

$$V = (\text{المساحة})(\text{العمق}) = \frac{1}{120}\pi r^2$$

وبما أن العمق هو $\frac{1}{10}'' = \frac{1}{120}\ \text{ft.}$ فإن كلًا من الحجم ونصف القطر هي بدلالة الزمن، بالتالي

$$V(t) = \frac{\pi}{120}[r(t)]^2$$

بإشتقاق كلا جانبي المعادلة للمتغير بـ t ، نحصل على

$$V'(t) = \frac{\pi}{120}2r(t)r'(t)$$

يتزايد الحجم بمعدل 150 غالونًا في الدقيقة، أو $\frac{150}{7.5} = 20\ \text{ft}^3/\text{min.}$ بالتعويض في $V'(t) = 20$ و $r = 500$ ، يكون لدينا

$$20 = \frac{\pi}{120}2(500)r'(t)$$

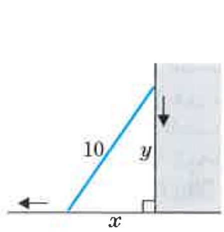
أخيرًا، بالحل لإيجاد $r'(t)$، نجد أن نصف القطر يتزايد بمعدل $\frac{2.4}{\pi} \approx 0.76394$ قدم في الدقيقة. ■

بالرغم من أن التفاصيل تتغير من مسألة إلى أخرى، إلا أن النمط العام للحل واحد لجميع مسائل المعدلات المرتبطة. ومما سبق، ينبغي أن تكون قادرًا على تحديد كل خطوة من الخطوات التالية في المثال 8.1.

1. اصنع مخططًا بسيطًا، إذا كان ذلك مناسبًا.
2. أنشئ معادلة مرتبطة بكل الكميات ذات الصلة.
3. اشتق (ضمنياً) كلا جانبي المعادلة مع المتغير الزمن(t).
4. عوّض القيم لكل الكميات والمشتقات المعروفة.
5. حل لإيجاد المعدل الباقي.

مثال 8.2 سلم ينزلق

يرتكز سلم بطول 10 أقدام على جانب المبنى. إذا كان الجزء العلوي من السلم يبدأ في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل 2 ft/sec، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعًا عن الأرض بـ 8 أقدام؟



الشكل 6.93
سلم ينزلق

الحل أولًا، نضع مخطط للمسألة، كما هو موضح في الشكل 6.94 ليكن ارتفاع السلم y والمسافة من الجدار إلى الجزء السفلي من السلم x . بما أن السلم ينزلق لأسفل الجدار بمعدل 2 ft/sec، فيجب أن يكون لدينا $\frac{dy}{dt} = -2$. (لاحظ إشارة السالب هنا).

من x و y هي دوال بالمتغير، t . باستخدام نظرية فيثاغورس، يكون لدينا

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ينتج:

$$0 = \frac{d}{dt}(100) = \frac{d}{dt}\{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\}$$
$$= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

وبالحل لإيجاد $x'(t)$ ، نحصل على

$$x'(t) = -\frac{y(t)}{x(t)}y'(t)$$

بما أن ارتفاع الجزء العلوي من السلم فوق الأرض عند النقطة في المسألة هو 8 أقدام، يكون لدينا $y = 8$ ومن نظرية فيثاغورس، نحصل على

$$100 = x^2 + 8^2$$

إذن $x = 6$ عند النقطة في المسألة..

$$x'(t) = -\frac{y(t)}{x(t)}y'(t) = -\frac{8}{6}(-2) = \frac{8}{3}$$

بالتالي، ينزلق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن المبنى بمعدل $\frac{8}{3}$ ft/sec ■

مثال 8.3 مسألة أخرى للمعدّلات المرتبطة

تسير سيارة بسرعة 50 mph تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}$ ميل شمال التقاطع. وتسير سيارة شرطة بسرعة 40 mph من نقطة تبعد $\frac{1}{4}$ ميل شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟

الشكل 6.95
سيارة تقترب من التقاطع

الحل أولًا، نرسم مخططًا ونرمز للمسافة الرأسية للسيارة الأولى من مركز التقاطع بـ y والمسافة الأفقية من سيارة الشرطة بـ x. (انظر الشكل 6.95). لاحظ أن اللحظة في المسألة (لنسميها $t = t_0$). $\frac{dx}{dt} = -40$ ، بما أن سيارة الشرطة تسير في اتجاه الإحداثي x السالب و $\frac{dy}{dt} = -50$ ، وبما أن السيارة الأخرى تسير في اتجاه الإحداثي y السالب. من نظرية فيثاغورس، تكون المسافة بين السيارتين هي $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. بما أن كل الكميات تتغير بتغير الزمن، فإن لدينا

$$d(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\}^{1/2}$$

باشتقاق الطرفين بالزمن t ، يكون لدينا باستخدام قاعدة السلسلة

$$d'(t) = \frac{1}{2}\{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\}^{-1/2}\, 2[x(t)x'(t) + y(t)y'(t)]$$
$$= \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}.$$

بالتعويض في $y(t_0) = \frac{1}{2}$, $x'(t_0) = -40$, $x(t_0) = \frac{1}{4}$ و $y'(t_0) = -50$ ، يكون لدينا

$$d'(t_0) = \frac{\frac{1}{4}(-40) + \frac{1}{2}(-50)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}} = \frac{-140}{\sqrt{5}} \approx -62.6$$

إذن، يسجل جهاز الرادار 62.6 mph لاحظ أن هذا تقدير سيئ لسرعة السيارة الفعلية. لهذا السبب، دائمًا ما تقوم الشرطة بأخذ قياسات الرادار من وضع ثابت. ■

في بعض المسائل، لا ترتبط المتغيرات بصيغة هندسية، وفي هذه الحالة لن تكون في حاجة إلى اتباع الخطوتين الأوليين من مخططنا. في المثال 8.4، تزداد صعوبة الخطوة الثالثة بسبب عدم وجود قيمة معطاة لأحد معدلات التغير.

مثال 8.4 تقدير معدل التغير في الاقتصاد

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق x ألف دولار على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف دولار. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

السنة	4	3	2	1
الاعلانات (بالدولار)	20,000	18,000	16,000	14,500

قدر القيمة الحالية (السنة 4) لــ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

الحل من الجدول، نلاحظ أن الاتجاه الأخير هو زيادة الإعلانات بمقدار 2000$ في السنة. إذن، يكون التقدير الجيد $x'(4) \approx 2$. بدءًا من معادلة المبيعات

$$s(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$$

نستخدم قاعدة السلسلة لايجاد المشتقة

$$s'(t) = -40e^{-0.05x(t)}[-0.05x'(t)] = 2x'(t)e^{-0.05x(t)}$$

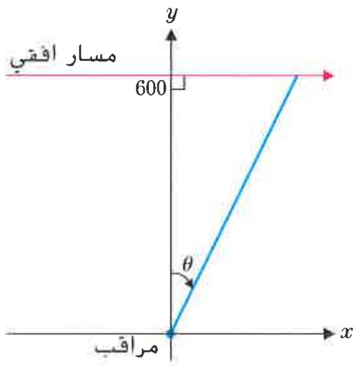
باستخدام تقديرنا بأن $x'(4) \approx 2$ وبما أن $x(4) = 20$ ، نحصل على $s'(4) \approx 2(2)e^{-1} \approx 1.472$. من ثم، تزداد المبيعات بمعدل 1472 $ في السنة تقريبًا.

مثال 8.5 تتبع طائرة نفاثة

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة 540 mph. وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد 600 قدم. أوجد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.

الحل ضع المراقب عند نقطة الأصل (0, 0) ومسار الطائرة النفاثة من اليسار إلى اليمين على الخط $y = 600$. وأطلق على الزاوية الواقعة بين الإحداثي y الموجب ومجال الرؤية θ (انظر الشكل 6.96). إذا قمنا بقياس المسافة بالقدم والزمن بالثواني، فيجب أن نقوم أولا بتحويل سرعة الطائرة النفاثة إلى قدم في الثانية. لدينا

$$540\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \left(540\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(5280\frac{\text{ft}}{\text{mi}}\right)\left(\frac{1}{3600}\frac{\text{h}}{\text{s}}\right) = 792\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$



الشكل 6.96
مسار الطائرة النفاثة

من علم المثلثات الأساسي (انظر الشكل 6.96). تكون المعادلة التي تربط الزاوية θ بــ x و y هي $\tan\theta = \frac{x}{y}$. كن حذرًا في ذلك؛ فبما أننا نقوم بقياس θ من الجهة الرأسية، فقد لا تكون هذه المعادلة ما تتوقعه. بما أن كل الكميات تتغير بتغير الزمن، فإن لدينا

$$\tan\theta(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالزمن، يكون لدينا

$$[\sec^2\theta(t)]\,\theta'(t) = \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{[y(t)]^2}$$

بتحرك الطائرة النفاثة من اليسار إلى اليمين على طول المستقيم $y = 600$، يكون لدينا $x'(t) = 792$ ، $y(t) = 600$ و $y'(t) = 0$. بتعويض هذه الكميات، يكون لدينا

$$[\sec^2\theta(t)]\,\theta'(t) = \frac{792(600)}{600^2} = 1.32$$

بالحل لإيجاد معدل التغير $\theta'(t)$. نحصل على

$$\theta'(t) = \frac{1.32}{\sec^2\theta(t)} = 1.32\cos^2\theta(t)$$

لاحظ أن معدل التغير يكون عند القيمة العظمى عندما تكون $\cos^2\theta(t)$ عند قيمتها العظمى. بما أن القيمة العظمى لدالة cosine هو 1، فإن القيمة العظمى لقيمة $\cos^2\theta(t)$ يكون 1، وهذا يحدث عندما تكون $\theta = 0$. نستنتج أن القيمة العظمى لمعدل تغير الزاوية هو 1.32 راديان/الثانية، وهذا يحدث عندما تكون $\theta = 0$ ، أي، عندما تصل الطائرة النفاثة إلى أقرب نقطة لها من المراقب. (فكر في ذلك: ينبغي أن يوافق ذلك حدسك!) بما أنه يمكن للإنسان تتبع أجسام تسير بسرعة تصل إلى 3 راديان/الثانية، فهذا يعني أنه يمكننا، بصريًا، تتبع حتى طائرة نفاثة سريعة على مسافة صغيرة جدًا. ■

التمارين 6.8

تمارين كتابية

.1 بما أنك قرأت الأمثلة 8.1 - 8.3، فإلى أي مدى تجد الرسم مفيد؟ تحديدًا، هل سيكون من الواضح ما تمثله x و y في المثال 8.3 بدون رسم؟ في المثال 8.3، اشرح كذلك سبب كون كل المشتقات $x'(t)$ ، $y'(t)$ و $d'(t)$ سالبة. هل يساعد الرسم في هذا الشرح؟

.2 في المثال 8.4، كانت الزيادة في الاعلانات (بالدولار) من السنة 1 إلى السنة 2 1500 \$. اشرح سبب عدم صلة هذا المبلغ تحديدًا بتقريب $s'(4)$.

.1 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 120 غالونًا في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. نظرًا لأن $1\ \text{ft}^3$ يساوي 7.5 غالونات، حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى (a) 100 ft و (b) 200 ft اشرح سبب تناقص المعدل بتزايد نصف القطر.

.2 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 90 غالونًا في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{8}''$. حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى 100 قدم.

.3 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل g غالون في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. (a). على فرض أن نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل 0.6 ft/min عندما يساوي نصف القطر 100 قدم، فحدد قيمة g . (b). إذا تضاعف سمك النفط، فكيف يتغير معدل تزايد نصف القطر؟

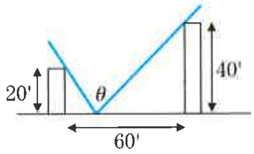
.4 على فرض أن المنطقة المصابة بإصابة ما دائرية. (a). فإذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 mm وتزداد بمعدل 1 mm/hr، فما هو معدل تزايد المنطقة المصابة؟ (b) أوجد معدل تزايد المنطقة المصابة عند وصول نصف القطر إلى 6 mm. اشرح بمنطق سليم سبب كون هذا المعدل أكبر من معدل الجزء (a).

.5 على فرض أن قطرة مطر تتبخر بطريقة تحافظ معها على شكلها الكروي. علمًا ان حجم شكل كروي بقطر r هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ وأن مساحة سطحه هي $A = 4\pi r^2$. فإذا تغير نصف القطر مع الزمن، واصبح الحجم $V' = Ar'$. إذا كان معدل التبخر (V') يتناسب مع مساحة السطح، بيّن أن نصف القطر يتغير بمعدل ثابت.

.6 على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 أقدام في الدقيقة. عندما يصل نصف القطر إلى 200 قدم، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟

.7 يرتكز سلم بطول 10 أقدام على جانب المبنى كما في المثال 8.2. فإذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدًا عن الجدار بمعدل 3 ft/s وبقي السلم ملامسًا للجدار.(a) أوجد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدًا بمقدار 6 أقدام عن الجدار. (b). أوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الأفقي عندما يبعد أسفل السلم 6 أقدام من الجدار.

.8 مبنيان ارتفاعهما 20 قدمًا و 40 قدمًا، على التوالي، والمسافة بينهما 60 قدمًا. على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طرديا مع الزاوية θ في الشكل (a). إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل 4 ft/s، فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط ؟ (b) أوجد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ أكبر ما يمكن.



.9 تقع طائرة على بعد $x = 40$ ميل (أفقيًا) عن المطار وارتفاع h ميل . يوجد رادار في المطار $s(t)$ يكشف المسافة بين الطائرة والمطار ويتغير بمعدل $s'(t) = -240$ mph.(a) إذا حلقت الطائرة نحو المطار بارتفاع ثابت $h = 4$ ، فما هي السرعة $|x'(t)|$ للطائرة؟ (b) كرر العملية بارتفاع 6 أميال. استنادًا إلى إجاباتك، ما أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

.10 (a) أعد صياغة المثال 8.3 إذا كانت سيارة الشرطة لا تتحرك. هل هذا يجعل قياس الرادار أكثر دقة؟ (b) بيّن أن الرادار المذكور في المثال 8.3 يحدد السرعة الصحيحة إذا كانت سيارة الشرطة تقع في نقطة الأصل.

.11 بيّن أن الرادار المذكور في المثال 8.3 يحدد السرعة الصحيحة إذا كانت سيارة الشرطة تتحرك بسرعة $x = \frac{1}{2}$. $(\sqrt{2}-1)$ 50 mph.

.12 أوجد موقع وسرعة الرادار المذكور في المثال 8.3 عندما تكون قراءته أبطأ من السرعة الفعلية.

.13 تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات. على فرض أن مبيعاتها السنوية $x\$$ بآلاف من الدولارات تساوي $s = 60 - 40e^{-0.05x}$. تتضح أعداد إعلاناتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

السنة	2	1	0
الاعلان	20,000	18,000	16,000

قدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير المبيعات في العام الحالي (عامين).

14. على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. تتضح أعداد منتجاتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

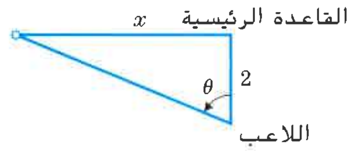
السنة	2	1	0
المنتجات (x)	9.4	8.8	8.2

قدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير متوسط التكلفة في العام الحالي (عامين).

15. على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\overline{C}(x) = 10 + \frac{100}{x}$. إذا كان الإنتاج الحالي $x = 10$ وازداد الإنتاج بمعدل عنصرين سنويًا، فأوجد معدل تغير متوسط التكلفة.

16. تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات، على فرض أن مبيعاتها السنوية $x$$ بآلاف من الدولارات تساوي $s = 80 - 20e^{-0.04x}$. إذا كانت ميزانية الإعلانات الحالية $x = 40$ وتزايدت الميزانية بمعدل 1500$ سنويًا، فأوجد معدل تغير المبيعات.

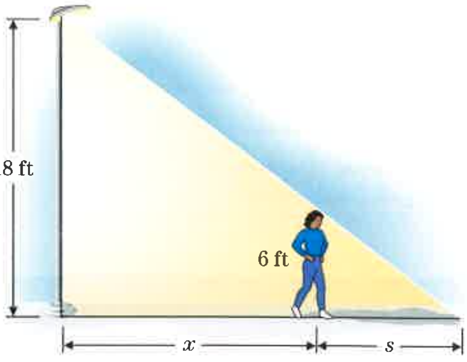
17. يبعد لاعب البيسبول حوالي قدمين من القاعدة الرئيسية وشاهد الكرة تمر سريعًا. في الشكل، x هي المسافة من الكرة إلى القاعدة الرئيسية و θ هي الزاوية التي تحدد اتجاه نظر اللاعب. (a) أوجد المعدل θ' الذي تتحرك به عينيه لمشاهدة رمية الكرة بنحو $x'(t) = -130$ ft/s حيث تمر إلى القاعدة الرئيسية بمعدل $x = 0$. (b) يمكن أن يحافظ الإنسان على تركيزه فقط عندما $\theta' \leq 3$. أوجد أسرع رمية كرة يمكنك مشاهدتها فعليًا إلى القاعدة الرئيسية.



18. تتابع آلة تصوير إطلاق مركبة فضائية تصعد عموديًا. تقع آلة التصوير على مستوى سطح الأرض بنحو ميلين من منصة الاطلاق. (a) إذا كانت المركبة الفضائية تبعد بنحو 3 أميال وتصعد بمعدل 0.2 ميل في الثانية، فما معدل تغير زاوية آلة التصوير (التي تقاس أفقيًا)؟ (b) كرر العملية إذا كانت المركبة الفضائية تصعد بمعدل ميل واحد (على فرض السرعة المتجهة نفسها). أي معدل أعلى؟ اشرح من حيث المنطق السليم لماذا هو أكبر.

التطبيقات

19. على فرض أن شخصًا ما يبلغ طوله 6 اقدام يبعد 12 ft من عمود إنارة ارتفاعه 18 قدمًا (انظر الشكل). (a) إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل 2 ft/s ، فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص؟ (إرشاد: انظر إلى $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$). (b) كرّر العملية مع شخص يبعد 6 اقدام عن عمود الإنارة و يمشي نحو العمود بمعدل 3 ft/s.



التمرين 19

20. قانون بويل للغاز في درجة حرارة ثابتة هوح $PV = c$ حيث إن P هو ضغط الغاز، و V هو حجم الغاز و c هو ثابت الغازات. على فرض أن كل من P و V هي دوال بالزمن. (a) بيّن أن $P'(t)/V'(t) = -c/V^2$. (b) أوجد حلًا لـــ P كدالة بالمتغير V . اعتبر أن V متغير مستقل، فاحسب $P'(V)$. قارن بين $P'(V)$ و $P'(t)/V'(t)$ من الجزئين (a) و(b).

21. يرتفع حوض مائي 6 أقدام عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلًا متصلًا بمركب بمعدل ثابت 2 ft/s وان المركب لا تزال على مستوى المياه. فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 20 قدمًا من الحوض؟ 10 أقدام من الحوض؟ أليس من المستغرب أن تكون سرعة المركب ثابتة؟

22. ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل ثابت $5\ \mathrm{m^3/s}$، فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟

23. يرتبط تردد اهتزاز أوتار الجيتار (الذي يحدد طبقة صوت النغمة التي نسمعها) بالتوتر T الذي يشد به الوتر، الكثافة ρ للوتر والطول الفعال ρ للوتر من خلال المعادلة عند تمرير عازف الجيتار إصبعه على الوتر، $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ فيمكنه تغيير L من خلال تغيير المسافة بين مشط الجيتار وإصبعه على فرض أن $L = \frac{1}{2}$ ft و $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220$ ft/s ولذلك فإن وحدات f هي الهرتز (دورة في الثانية). إذا انزلقت يد عازف الجيتار حتى أصبحت $L'(t) = -4$. فأوجد $f'(t)$ وبهذا المعدل، فما هو الزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت أوكتاف واحدًا(وهو، ضعف f)؟

24. على فرض أنك تملأ بالونًا بالهواء بمعدل $1\ \mathrm{ft^3/s}$ إذا بقي البالون في شكل كروي، فيرتبط حجمه ونصف قطره بـــ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ قارن معدل تغير نصف قطره عندما يكون $r = 0.01$ ft في مقابل عندما يكون $r = 0.1$ ft. ناقش طريقة ارتباط ذلك بخبرة الشخص الذي يملأ البالون.

25. ضُخت مياه إلى خزان كروي نصف قطره 60 قدمًا بمعدل ثابت $10\ \mathrm{ft^3/s}$. (a) أوجد معدل تغيير نصف قطر أعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلئ الخزان إلى النصف. (b) أوجد الارتفاع الذي تتغير فيه المياه في الخزان بنفس معدل نصف قطره.

26. افرغ الرمل وشكّل كومة مخروطية بارتفاع يساوي ضعف نصف قطره. (a) إذا افرغ الرمل بمعدل ثابت $20\ \mathrm{ft^3/s}$ فأوجد المعدل الذي يتزايد به نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 أقدام.

(b) كرر العملية عندما تشكل كومة الرمل زاوية قياسها ثانية 45 في المستوى الأفقي.

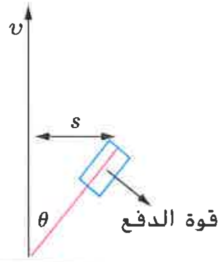
.27 (a) إذا كان شيء ما يدور حول دائرة تتمركز في نقطة الأصل، فبيّن أن $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$. استنتج أن إذا $x(t) = 0$ ، فان $y'(t) = 0$ ، وإذا $y(t) = 0$ ، فان $x'(t) = 0$. وضّح ذلك بيانيًا.

(b) إذا كان شيء ما يدور حول كويكب $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ، فبيّن أن $x(t)[y'(t)]^3 + y(t)[x'(t)]^3 = 0$. استنتج أن إذا $x(t) = 0$ ، فان $x'(t) = 0$ ، وإذا $y(t) = 0$ ، فان $y'(t) = 0$. وضّح ذلك بيانيًا.

.28 يقع ضوء على النقطة $(0, 100)$، وسقط جسم صغير من النقطة $(10, 64)$. على فرض أن x هو موقع الظل لهذا الجسم في الإحداثي x عندما يكون الجسم على ارتفاع h . على فرض أن $h'(t) = -8\sqrt{64 - h(t)}$ ، (a) أوجد $x'(t)$ عندما $h = 0$. (b) أوجد الارتفاع الذي تصل فيه قيمة $|x'(t)|$ إلى القيمة العظمى.

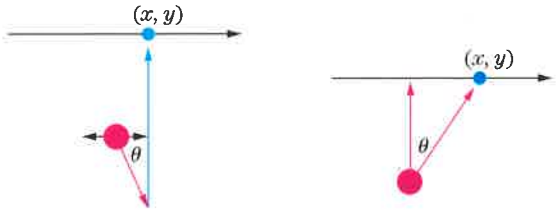
.29 يقف الكلب عند النقطة $(0, 0)$ m وبدأ في مطاردة كرة في الماء عند النقطة $(8, 4)$ m. إنه يركض على امتداد الإحداثي الموجب x بسرعة $x'(t) = 6.4$ m/s. على فرض أن $d(t)$ هي المسافة بين الكلب والكرة في وقت t . (a) أوجد الزمن والموقع الذي يكون فيه $|d'(t)| = 0.9$ m/s، والمعدل الذي يسبح به الكلب. (b) بيّن أن الموقع هو نقطة الدخول الاختيارية نفسها المذكورة في التمرين 23 من الدرس 3.7.

.30 لبدء التزلج، يجب عليك إمالة قدمك نحو الخارج ثم تحريك ساقك مؤثرًا في الجليد بقوة دفع تبعد عن جسمك. استمد العالم الفيزيائي ألين هاتشي في فيزياء لعبة الهوكي العلاقة بين زاوية التزلج θ ، وبعد موقع القدم عن الطرق الجانبية s ، وفترة التوقف T وسرعة التقدم T للمتزلج، من خلال $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2s}{vT}\right)$. لـ T ثانية. $s = 60$ cm والسرعة 1 m/s^2 ، أوجد معدل تغير الزاوية θ عندما يصل المتزلج إلى (a) 1 m/s و (b) 2 m/s فسّر رمز وحجم θ' من حيث وسيلة التزلج على الجليد.



تمارين استكشافية

.1 أثبت أن الرؤية أكبر تحدٍ لتصميم الروبوتات الوظيفية. يمكن تصميم الربوتات القادرة على الرؤية لمحاكاة رؤية الإنسان أو اتباع تصميم مختلف. تم تحليل احتمالين هنا. في الرسم البياني أدناه، تتبع الكاميرا جسمًا ما بشكل مباشر من اليسار إلى اليمين. إذا كانت آلة التصوير في نقطة الأصل، وتحرك الجسم بسرعة 1 m/s وكان خط الحركة في $y = c$ فأوجد تعبيرًا لـ θ' كدالة على موقع الجسم. في الرسم البياني ناحية اليسار، تنظر آلة التصوير في الأسفل إلى مرآة على شكل قطع مكافئ وترى الجسم بشكل غير مباشر. إذا كان للمرآة إحداثي قطبي (في هذه الحالة تقاس الزاوية θ أفقيًا) المعادلة $r = \dfrac{1 - \sin\theta}{2\cos^2\theta}$ و $x = r\cos\theta$ ، أوجد تعبيرًا لـ θ' كدالة على موقع الجسم. قارن قيم θ' بـ $x = 0$ والقيم x –. إذا كانت القيمة الكبرى لـ θ' تتسبب في تشويش الصورة، فما هو أفضل نظام لألة التصوير؟ هل المسافة $y = c$ تؤثر على تفضيلاتك؟



.2 يتحرك جسيم أسفل منحدر بفعل قوة الجاذبية فقط. على فرض أن y_0 هو أقصى ارتفاع للجسيم. ومن ثم يعطي حفظ الطاقة

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0$$

(a) من التعريف $v(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ ، استنتج أن $|y'(t)| \le |v(t)|$

(b) بيّن أن $|v'(t)| \le g$.

(c) ما هو الشكل الذي يجب أن يكون عليه المنحدر لكي يساوي الجزء (b)؟ اشرح باختصار من الناحية المادية لماذا g هي قيمة عظمى لـ $|v'(t)|$.

الدرس 9-6

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

غالبًا ما يقال إن الرياضيات هي لغة الطبيعة. وفي الزمن الراهن، يجري تطبيق مفاهيم حساب التفاضل والتكامل عمليًا في كافة مجالات المساعي الإنسانية تقريبًا. تمثل التطبيقات في هذا الدرس نماذج صغيرة من بعض الاستخدامات الأولية للمشتقة.

تذكر أن مشتقة الدالة تعطي معدلًا لحظيًا لتغيير تلك الدالة. لذلك، عندما تجد كلمةمعدل، فتذكرالاشتقاق. فبالكاد يمكنك ترقّب أي صحيفة بدون البحث عن مرجع لبعض المعدلات (على سبيل المثال، معدل التضخم، معدلات الفائدة، وما إلى ذلك). وينظر إلى ذلك على أنه اشتقاق. هناك أيضا العديد من الكميات المألوفة التي قد لا تعتبرها معدلات تغير. فمثالنا الأول، مستمد من الاقتصاد، من هذا النوع.

في الاقتصاد، يستخدم المصطلح **حدّية** للإشارة إلى المعدل. وبالتالي، فإن **التكلفة الحدية** مشتقة من دالة التكلفة، و**الربح الحدي** مشتقة دالة الربح وغير ذلك..

على فرض أنك تصنّع منتجاً معينًا، حيث بلغت تكلفة البدء 4000 $ وتكاليف الإنتاج 2 $ لكل منتج. ستكون تكلفة إنتاج x منتج بعد ذلك $2x + 4000$. وبطبيعة الحال، فإن على فرض أن تكلفة كل منتج ثابتة غير واقعي. وقد تخفض تقنيات الإنتاج على نطاق واسع تكلفة كل منتج، ولكن صيانة الآلات والعمالة وتوسيع المصانع والعوامل الأخرى يمكن أن تؤدي إلى ارتفاع التكلفة مع زيادة إنتاج (x). في المثال 9.1، تستخدم دالة التكلفة التربيعية لوضع بعض هذه العوامل الإضافية في الاعتبار.

عندما تكون تكلفة كل منتج غير ثابتة، فيطرح سؤال هام لكل المديرين للإجابة عليه وهو ما هي تكلفة تزايد الإنتاج. هذه هي الفكرة وراء التكلفة الحدية.

مثال 9.1 تحليل التكلفة الحدية لمنتجات تجارية

على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

هو إجمالي التكلفة (بالدولار) معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

الحل دالة التكلفة الحدية هي مشتقة دالة التكلفة:

$$C'(x) = 0.04x + 2$$

وبالتالي، التكلفة الحدية لـ $x = 100$ هي $C'(100) = 4 + 2 = 6$ دولار لكل وحدة. ومن ناحية أخرى، فإن التكلفة الفعلية للمنتج عدد 100 ستكون $C(100) - C(99)$. (لماذا؟) لدينا

$$\begin{aligned} C(100) - C(99) &= 200 + 200 + 4000 - (196.02 + 198 + 4000) \\ &= 4400 - 4394.02 = 5.98\,\$ \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا قريب جدًا من التكلفة الحدية البالغة 6 $. لاحظ أيضًا أن التكلفة الحدية سهلة في حسابها. ■

الكمية الاخرى التي تستخدمها الشركات لتحليل الإنتاج هو **متوسط التكلفة**. يمكنك تذكر صيغة متوسط التكلفة بسهولة من خلال التفكير في أي مثال. إذا بلغ إجمالي تكلفة إنتاج 12 منتجًا 120 $. فيكون متوسط التكلفة فأن $\left(\$\frac{120}{12}\right)$ لكل منتجًا. وبشكل عام، يحدد إجمالي التكلفة من خلال $C(x)$ و عدد العناصر من خلال x، وبالتالي يحدد متوسط التكلفة من خلال

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

يرغب مديرو الشركات في معرفة مستوى الإنتاج الذي يخفض متوسط التكلفة.

مثال 9.2 القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة لمنتجات تجارية

على فرض أن

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

هو إجمالي التكلفة (بالدولار) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فأوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

الحل تحدد دالة متوسط التكلفة من خلال

$$\overline{C}(x) = \frac{0.02x^2 + 2x + 4000}{x} = 0.02x + 2 + 4000x^{-1}$$

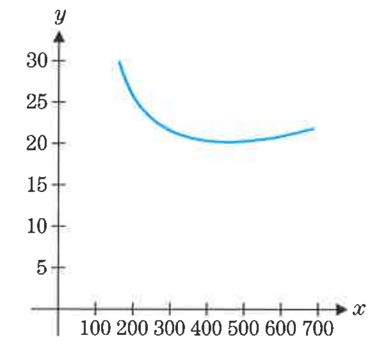
لايجاد القيمة الصغرى لـ$\overline{C}(x)$، فإننا نبدأ بإيجاد أعداد حرجة في المجال $x > 0$. لدينا

اذا $\overline{C}'(x) = 0.02 - 4000x^{-2} = 0$

او $4000x^{-2} = 0.02$

$$\frac{4000}{0.02} = x^2.$$

فان $x^2 = 200,000$ أو $x = \pm\sqrt{200,000} \approx \pm 447$ بما أن $x > 0$، فإن العدد الحرج الوحيد هو تقريبًا $x = 447$. بالإضافة إلى ذلك، $\overline{C}'(x) < 0$ إذا كان $x < 447$ و $\overline{C}'(x) > 0$ إذا كان $x > 447$. لذا فإن هذا العدد الحرج هو موقع القيمة الصغرى المطلقة في المجال $x > 0$. يوضح التمثيل البياني لدالة متوسط التكلفة (انظر الشكل 6.97) القيمة الصغرى. ■



الشكل 6.97
دالة متوسطة التكلفة

نستمد مثالنا الثالث من الاقتصاد. في هذا المثال، ستكتشف العلاقة بين السعر والطلب. في معظم الحالات، عندما يرتفع سعر أي منتج يتناقص الطلب عليه. ومع ذلك، إذا لم تتناقص المبيعات بدرجة كبيرة، فقد تتزايد إيرادات الشركة على الرغم من ارتفاع الأسعار. كما سنرى، سيقدم لنا تحليل مرونة الطلب معلومات هامة عن الإيرادات.

على فرض أن الطلب x لأي منتجًا هو دالة لسعره p. أي أن، $x = f(p)$. إذا تغير السعر بمقدار صغير Δp، فيكون التغير النسبي في السعر مساويًا لـ $\frac{\Delta p}{p}$. ومع ذلك، فإن تغير السعر ينشئ تغييرًا في الطلب Δx، بالتغير النس بي في السعر لـ $\frac{\Delta p}{p}$. يعرّف الخبراء الاقتصاديون مرونة الطلب بسعر Δx ليكون التغير النسبي في الطلب مقسومًا على التغير النسبي في السعر بالنسبة للتغيرات الصغيرة في السعر . بصفتكم طلاب تدرسون حساب التفاضل والتكامل فيمكنكم تحديد مرونة الطلب E كحد:

$$E = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

في حالة أن x هي دالة لـ p، فإننا نكتب $\Delta p = (p+h) - p = h$ لبعض القيم الصغيرة h وعندئذٍ $\Delta x = f(p+h) - f(p)$. يكون لدينا

$$E = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(p+h) - f(p)}{f(p)}}{\frac{h}{p}} = \frac{p}{f(p)} \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

على فرض أن f قابلة للاشتقاق. في المثال 9.3، حلل مرونة الطلب والإيرادات. تذكر أنه إذا كان $x = f(p)$ منتجات مباعة بسعر p، فإن الإيرادات تساوي $pf(p)$.

مثال 9.3 ايجاد قيمة مرونة الطلب والتغير في الإيرادات

على فرض أن

$$f(p) = 400(20 - p)$$

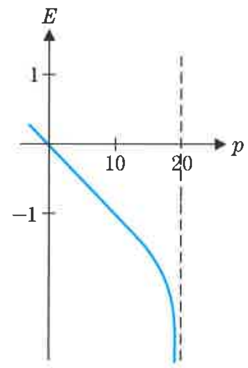
هو طلب منتج معين بسعر p (بالدولار) بـ $p < 20$. (a) أوجد مرونة الطلب. (b) أوجد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$. قارن مدى الأسعار هذا الذي تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p.

الحل تحدد دالة مرونة الطلب من خلال

$$E = \frac{p}{f(p)} f'(p) = \frac{p}{400(20 - p)}(-400) = \frac{p}{p - 20}$$

نبيّن تمثيلًا بيانيًا لها $E = \frac{p}{p - 20}$ في الشكل 6.98. لاحظ أنه $E < -1$ إذا كان

$$\frac{p}{p - 20} < -1$$



الشكل 6.98
$E = \frac{p}{p - 20}$

أو	بما إن $p - 20 < 0$	$p > -(p - 20)$
فينتج من حلها		$2p > 20$
أو		$p > 10$

لتحليل الإيرادات، فإننا نوجد قيمة $R = pf(p) = p(8000 - 400p) = 8000p - 400p^2$ تتناقص الإيرادات إذا كانت $R'(p) < 0$. من $R'(p) = 8000 - 800p$، نرى أن $R'(p) = 0$ إذا كان $p = 10$ و $R'(p) < 0$ إذا كان $p > 10$. وبطبيعة الحال، فهذا يدل على أن الإيرادات تتناقص إذا تجاوز السعر 10.

لاحظ في المثال 9.3 أن الأسعار حيث ان $E < -1$ (في هذه الحالة نستنتج أن الطلب مرناً) بما يناظر تمامًا الأسعار التي إذا تزايدت فان الإيرادات تتناقص. في التمرينات، سنجد أن هذا ليس من قبيل الصدفة.

ملحوظة

في بعض الحالات تحدد مرونة الطلب بأنها $-E$، ليكون الطلب مرن إذا كان $E>1$

نستمد المثال الثاني من الكيمياء. من المهم جدًا للكيميائيين معرفة معدل تقدم تفاعل كيميائي معين. حيث تعطي معدلات التفاعلات الكيميائيين معلومات عن طبيعة الروابط الكيميائية التي يجري تشكيلها وتفكيكها، وكذلك معلومات عن نوع وكمية المنتج المتوقع. يصف الرسم البياني حالة بسيطة

$$A + B \longrightarrow C$$

مما يدل على أن المواد الكيميائية A و B (المواد المتفاعلة) تتجمع لتشكل المادة الكيميائية C (المنتج). لتكن $[C](t)$ للدلالة على تركيز (مول لكل لتر) المنتج. متوسط سرعة التفاعل بين الأوقات t_1 و t_2 هو

$$\frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

ومن ثم تحدد سرعة التفاعل اللحظي في أي وقت t_1 من خلال

$$\lim_{t \to t_1} \frac{[C](t) - [C](t_1)}{t - t_1} = \frac{d[C]}{dt}(t_1)$$

استنادًا إلى تفاصيل التفاعل الكيميائي، فيمكننا في أغلب الأحيان تكوين معادلة تربط بين سرعة التفاعل $\frac{d[C]}{dt}$ وتركيز المواد المتفاعلة، $[A]$ و$[B]$.

مثال 9.4 نمذجة سرعة التفاعل الكيميائي

في التفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز تتشابه المواد المتفاعلة والمنتج. يستمر التفاعل حتى الوصول إلى مستوى التشبع. يعرف الكيميائيين من الأدلة التجريبية أن سرعة التفاعل تتناسب مع قيمة المنتج المعروض والفرق بين مستوى التشبع وقيمة المنتج. إذا كان التركيز الأولي من المادة الكيميائية هو 0 ومستوى التشبع هو 1 (بما يناظر 100%) فهذا يعني أن التركيز $x(t)$ للمادة الكيميائية يحقق المعادلة

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$$

حيث إن $r > 0$ ثابت.

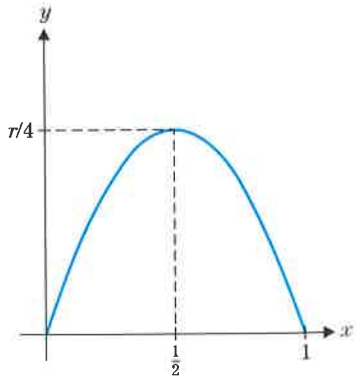
أوجد تركيز المادة الكشيئيائية الذي تصل فيه سرعة تفاعلها $x'(t)$ إلى القيمة العظمى.

الحل لتوضيح المسألة، نكتب معادلة سرعة التفاعل كما يلي

$$f(x) = rx(1 - x)$$

ويكون هدفنا بعد ذلك هو إيجاد $x \geq 0$ الذي يحقق القيمة العظمى لـ $f(x)$. من التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضح في الشكل 6.99، تقع القيمة العظمى عندما تكون $x = \frac{1}{2}$. لدينا

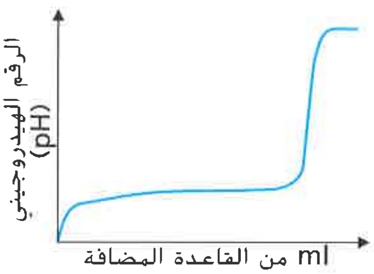
$$f'(x) = r(1)(1 - x) + rx(-1)$$
$$= r(1 - 2x)$$



الشكل 6.99

$y = rx(1 - x)$

وبالتالي، يكون العدد الحرج الوحيد هو $x = \frac{1}{2}$. لاحظ أن الرسم البياني لـ $y = f(x)$ هو قطع مكافئ مفتوح لأسفل وبالتالي، يجب أن يناظر العدد الحرج القيمة العظمى المطلقة. وعلى الرغم من أن هذه المسألة الرياضية يسهل حلها، فإن النتيجة تزود الكيميائي ببعض المعلومات الدقيقة. حينما تصل سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى، يكون تركيز المادة الكيميائية مساويًا لنصف مستوى التشبع بالضبط. ■



الشكل 6.100
معايرة الحمض

نستمد مثالنا الثاني من الكيمياء التي تشمل معايرة الحمض الضعيف والقاعدة القوية. في هذا النوع من المعايرة، تضاف القاعدة القوية للحمض الضعيف ببطء. يتم رصد درجة حموضة لخليط من خلال مراقبة لون مؤشر الرقم الهيدروجيني، والذي يتغير جذريًا في ما يسمى بنقطة التكافؤ. ثم تستخدم نقطة التكافؤ عادة لحساب تركيز القاعدة. ويرد منحنى المعايرة العام في الشكل 6.100، حيث يشير المحور الأفقي إلى كمية القاعدة المضافة إلى الخليط ويبين المحور الرأسي الرقم الهيدروجيني للخليط. لاحظ الارتفاع الرأسي في التمثيل البياني عند نقطة التكافؤ.

لتكن أن x هي كسر حيث $(0 < x < 1)$ القاعدة المضافة (المساوية لكسر الحمض المحول). حيث $x = 1$ تمثل نقطة التكافؤ. ثم يتم تقريب الرقم الهيدروجيني من خلال $c + \ln \frac{x}{1-x}$، حيث إن c ثابت وترتبط ارتباطًا وثيقًا بالتفكك الحمضي الثابت.

مثال 9.5 تحليل معايرة المنحني

أوجد قيمة x التي يكون فيها معدل تغير الرقم الهيدروجيني صغير جدا. حدد النقطة المقابلة على منحنى المعايرة في الشكل 6.100.

الحل يعطى الرقم الهيدروجيني بالدالة $p(x) = c + \ln \frac{x}{1-x}$. ومن ثم يعطى معدل تغيير الرقم الهيدروجيني بالمشتقة $p'(x)$. لجعل هذه العملية الحسابية أكثر سهولة نكتب $p(x) = c + \ln x - \ln(1-x)$. وتكون المشتقة:

$$p'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}(-1) = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x - x^2}$$

والمسألة هي ايجاد القيمة الصغرى للدالة $g(x) = \frac{1}{x - x^2} = (x - x^2)^{-1}$، باستخدام $0 < x < 1$ تأتي النقاط الحرجة من المشتقة

$$g'(x) = -(x - x^2)^{-2}(1 - 2x) = \frac{2x - 1}{(x - x^2)^2}$$

لاحظ أن $g'(x)$ لن تكون موجودة إذا كان $x - x^2 = 0$، والتي تحدث عندما $x = 0$ أو $x = 1$. ولن يكون أي منهما في المجال $0 < x < 1$. علاوة على ذلك، $g'(x) = 0$ إذا كان $x = \frac{1}{2}$، والذي يكون في المجال. عليك التحقق من أن $g'(x) < 0$ إذا كان $0 < x < \frac{1}{2}$ و $g'(x) > 0$ إذا كان $\frac{1}{2} < x < 1$، والذي يثبت أن القيمة الصغرى للدالة $g(x)$ تحدث عند $x = \frac{1}{2}$ وعلى الرغم أن المحور الأفقي في الشكل 6.100 غير محدد. فلاحظ أنه يمكننا تحديد موقع هذه النقطة على الرسم البياني. نجد أن حل $g'(x) = 0$. بما أن $g(x) = p'(x)$، فلدينا $p''(x) < 0$ لأجل $0 < x < \frac{1}{2}$ و $p''(x) > 0$ لأجل $\frac{1}{2} < x < 1$، وبالتالي فإن نقطة القيمة الصغرى هي نقطة انعطاف في التمثيل البياني الأساسي. ■

يرتبط حساب التفاضل والتكامل بالفيزياء الابتدائية ارتباطًا وثيقًا من الناحية التاريخية. فلا غرو أن توفر لنا الفيزياء هذا العدد الهائل من التطبيقات الهامة لحساب التفاضل والتكامل. وقد استكشفنا بالفعل مفاهيم السرعة المتجهة والتسارع. ثمة تطبيق آخر مهم في الفيزياء حيث تلعب المشتقة دورًا يتضمن الكثافة. يمكننا دراسة أنواع مختلفة من الكثافات. فعلى سبيل المثال، يمكننا دراسة كثافة السكان (عدد الأشخاص لكل وحدة مساحة) أو كثافة اللون (عمق اللون لكل وحدة مساحة) المستخدمة في دراسة التصوير الإشعاعي. ومع ذلك، فإن النوع الأكثر دراية من الكثافة هو كثافة الكتلة (كتلة لكل وحدة حجم). ربما يكون لديك بالفعل فكرة عن

ما نعنيه بهذا، ولكن كيف يمكنك تعريف ذلك؟ إذا تمّ صنع شيئ من بعض المواد المتجانسة (فتكون كتلة أي جزء من الجسم من حجم معين هي نفسها) وتكون كثافة الكتلة بسيطة

$$\text{كثافة الكتلة} = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$$

وتكون تلك الكمية ثابتة في الجسم بأكمله. ومع ذلك، إذا كانت كتلة حجم معين تختلف في أجزاء مختلفة من الجسم، فتحسب هذه الصيغة متوسط الكثافة للجسم فقط. نجد في المثال 9.6 طرق حساب كثافة الكتلة من نقطة محددة من جسم غير متجانس.

على فرض أن الدالة $f(x)$ تعطينا الكتلة (بالكيلوجرام) لأول x متر من قضيب رقيق. (انظر الشكل 6.101).

الشكل 6.101
قضيب رقيق

تعطى الكتلة الإجمالية بين العلامات x و $x_1(x > x_1)$ بالصيغة $[f(x) - f(x_1)]$ كجم. ثم يُعرف متوسط كثافة الطول (أي الكثافة بالنسبة للطول) بين كل من x و x_1 بأنه

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

وأخيرًا، تعرّف **الكثافة الخطية** عند $x = x_1$ بأنها

$$\rho(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \tag{9.1}$$

حيث إننا أدركنا تعريفًا بديلًا للمشتقة التي ناقشناها سابقًا.

مثال 9.6 كثافة القضيب الرقيق

على فرض أن كثافة الأول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$، وقارن الكثافتين عند النقطتين.

الحل من (9.1)، لدينا

$$\rho(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

لذا، $\rho(2) = 1/\sqrt{4} = 1/2$ و $\rho(8) = 1/\sqrt{16} = 1/4$. لاحظ أن هذا يدل على أن القضيب الرقيق غير متجانس (أي أن كثافة الكتلة للقضيب غير ثابتة). تحديدًا، يكون القضيب أقل كثافة عند $x = 8$ من عند $x = 2$. ■

نستمد المثال التالي من الفيزياء أيضًا، وتحديدًا من الدراسة الكهرومغناطيسية.

على فرض أن $Q(t)$ يمثل الشحنة الكهربائية في سلك معين عند الزمن t ثم تعطي المشتقة $Q'(t)$ التيار المتدفق عبر السلك. لرؤية هذا، انظر في المقطع العرضي للسلك كما هو موضح في الشكل 6.102. بين الزمن t_1 و الزمن t_2، تكون الشحنة الصافية التي تمر خلال هذا المقطع العرضي $Q(t_2) - Q(t_1)$. يُعرف متوسط التيار (شحنة لكل وحدة زمن) على فترة من الزمن كما يأتي:

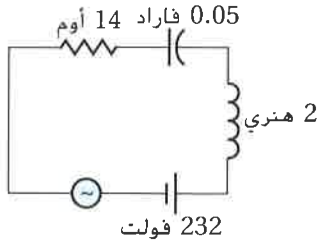
الشكل 6.102
سلك كهربائي

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

يمكن ايجاد التيار اللحظي $I(t)$ في أي زمن t_1 باحتساب النهاية:

$$I(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1} = Q'(t_1),$$

بما أن (9.2) هو سابقًا التعريف البديل للإشتقاق.



الشكل 6.103

دارة كهربائية بسيطة

مثال 9.7 نمذجة التيار الكهربائي في السلك

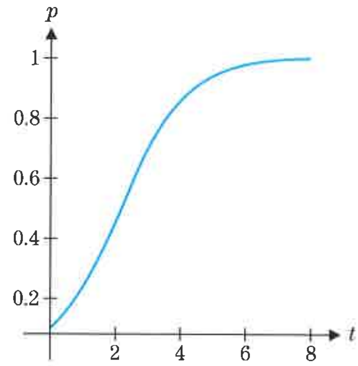
تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل 6.103 مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري، ومكثّف 0.05 – فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $232 \sin 2t$، حيث إن t تقاس بالثواني. فأوجد التيار في الدارة عند أي t.

الحل يمكن إثبات أن الشحنة في هذه الدارة تعطى بالدالة (باستخدام القوانين الكهربائية الأساسية)

$$Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3 \sin 2t - 7 \cos 2t$$

فالتيار إذن

$$Q'(t) = -50e^{-5t} + 2e^{-2t} - 4te^{-2t} + 6 \cos 2t + 14 \sin 2t$$



الشكل 6.104

النمو اللوجستي

استكشفنا سابقًا باختصار معدل النمو السكاني. الديناميات السكانية أحد مجالات علم الأحياء التي توفر الاستخدام الواسع لحساب التفاضل والتكامل. الآن، فإننا نستكشف أحد جوانب النموذج الأساسي للنمو السكاني وهو ما باسم المعادلة اللوجستية. ويبين ذلك أنه إذا كانت $p(t)$ يمثل التعداد السكاني (الذي يقاس على كسر من القيمة العظمى للتعداد السكاني المستدام). إذن فمعدل تغير التعداد السكاني يحقق المعادلة

$$p'(t) = r\ (t)[1 - p(t)]$$

للثابت r. نحصل على الحل النموذجي [لـ $r = 1$ و $p(0) = 0.05$] في الشكل 6.104. وعلى الرغم من أننا لا نعلم كيفية ايجاد قيمة الحل ولكن يمكننا تحديد بعض خواص الرياضيات بأن تطرح جميع الحلول.

مثال 9.8 إيجاد القيمة العظمى لمعدل النمو السكاني

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (المعادلة اللوجستية باستخدام $r = 2$). أوجد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى. فسّر هذه النقطة بيانيًا.

الحل لتوضيح المسألة، نكتب معدل التعداد السكاني على أنه

$$f(p) = 2p(1 - p)$$

ويكون هدفنا عندئذٍ هو إيجاد التعداد السكاني $p \geq 0$ الذي يحقق القيمة العظمى $f(p)$. لدينا

$$\begin{aligned} f'(p) &= 2(1)(1 - p) + 2p(-1) \\ &= 2(1 - 2p) \end{aligned}$$

وبالتالي، فإن العدد الحرج الوحيد هو $p = \frac{1}{2}$ لاحظ أن التمثيل البياني لـ $y = f(p)$ هو قطع مكافئ مفتوح لأسفل وبالتالي، يجب أن يناظر العدد الحرج القيمة العظمى المطلقة. في الشكل 6.104، لاحظ أن ارتفاع $p = \frac{1}{2}$ يناظر الجزء من التمثيل البياني حيث الميل له القيمة العظمى. كذلك، لاحظ أن هذه النقطة يناظر الجزء من التمثيل البياني حيث الميل له القيمة العظمىلك بحل المعادلة $f'(p) = 0$. حيث إن $f(p)$ تساوي $p'(t)$. فأن، $p = \frac{1}{2}$ هو قيمة p المناظرة لحل $p''(t) = 0$ .o وقد يكون هذا الأمر هامًا لعلماء البيولوجيا السكانية. إذا تتبعوا التعداد السكاني الذي يصل إلى نقطة انعطاف، عندئذٍ (على فرض أن المعادلة اللوجستية تعطى نموذجًا دقيقًا) فإن التعداد السكاني سيتضاعف في الحجم في نهاية الأمر.

لاحظ أوجه الشبه بين المثالين 9.4 و 9.8. من أحد الأسباب التي تجعل الرياضيات لها هذه القيمة الكبيرة هو أن العمليات الفيزيائية التي تبدو غير ذات صلة يكون لها الوصف الرياضي نفسه في كثير من الأحيان. بالمقارنة بين المثالين 9.4 و 9.8، فإننا نعلم تطابق الآليات الأساسية للتفاعلات الكيميائية ذاتية التحفيز والنمو السكاني.

لقد ناقشنا الآن أمثلة من ثمانية معدلات للتغير مستمدة من الاقتصاد والعلوم. أضف هذا إلى التطبيقات التي درسناها في الأقسام السابقة، لدينا قائمة طويلة من التطبيقات المشتقة. بالرغم من ذلك، فقد بدأنا بالكاد من نقطة الصفر. في أي مجال يمكننا من تحديد وتحليل خواص أي دالة، يكون حساب التفاضل والتكامل والمشتقة هي الأدوات القوية. تتضمن هذه القائمة بعض جوانب كل مجال رئيسي في الدراسة تقريباً. تمنحك الدراسة المستمرة لحساب التفاضل والتكامل القدرة على قراءة (وفهم) الدراسات التقنية في حقول واسعة من المجالات ودراسة (كما سنتناوله في هذا القسم) الوحدة الأساسية التي تقدمها الرياضيات في مجالات واسعة من المساعي البشرية.

التمارين 6.9

تمارين كتابية

1. تستخدم **المعادلة اللوجستية** $x'(t) = x(t)[1 - x(t)]$ لنمذجة العديد من الظواهر المهمة (انظر المثالين 9.4 و 9.8). للمعادلة مساهمتان متعارضتان لمعدل التغير $x'(t)$. الحد $x(t)$ في حد ذاته يعني أنه أكبر $x(t)$ وأسرع نمو سكاني. يتوازن ذلك من خلال الحد $1 - x(t)$، مما يدل على أنه إذا اقترب $x(t)$ إلى 1، فيكون أبطء نمو سكاني. باستخدام الحدين، يكون للنموذج خاصية أن الأصغر $x(t)$، والأكبر قليلًا من $x(t)$ يعني قدرًا أكبر من النمو، ولكن إذا اقترب $x(t)$ من 1، فإن النمو يتباطأ تدريجيًا. اشرح من حيث النمو السكاني وتركيز المادة الكيميائية لماذا يعد هذا النموذج معقولًا.

2. حدث عجز بالشركة وتداولت الديون في الأخبار كثيرًا، ولكن غالبا ما يتم الخلط بين المصطلحات مع بعضها البعض. نضرب مثالًا على ذلك، على فرض أن الشركة أنهت عامها المالي بديون بلغت 5000. وهذه هي ديونها. على فرض أنه سيكون لدى الشركة في العام التالي إيرادات قدرها $106,000$ ونفقات قدرها $109,000$. وكان عجز الشركة في العام 3000 ، وتزايد دين الشركة إلى 8000. اشرح باختصار لماذا يعتبر العجز مشتقة الدين.

---

1. إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجاً.

2. إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$ أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجاً.

3. إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$ أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجًا.

4. إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$ أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجًا.

5. على فرض أن تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$ بالدولار. أوجد نقطة الانعطاف وناقش أهمية هذه القيمة بدلالة تكلفة تصنيع.

6. ذكر قائد فريق البيسبول أنه إذا حددت أسعار التذاكر بقيمة 10. فسيكون متوسط الحضور في المباراة 27,000 وإذا حددت بقيمة 8. فسيكون متوسط الحضور 33,000. باستخدام النموذج الخطي يمكننا تقدير أن التذاكر المسعرة بقيمة 9 ينتج عنها متوسط حضور بنحو 30,000. ناقش ما إذا كنت تعتقد أن استخدام النموذج الخطي هنا أمر معقول. ثم، استخدم النموذج الخطي، وحدد السعر الذي يحقق القيمة العظمى للايرادات.

في التمارين 7—10، أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

7. $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$

8. $C(x) = 0.2x^3 + 4x + 4000$

9. $C(x) = 10e^{0.02x}$

10. $C(x) = \sqrt{x^3 + 800}$

11. (a) لتكن $C(x)$ هي دالة التكلفة و $\overline{C}(x)$ هي دالة متوسط التكلفة. افترض ان $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 3600$. اثبت ان $C'(100) < \overline{C}(100)$ اثبت أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتناقص متوسط التكلفة. (b) بيّن أن $C'(1000) > \overline{C}(1000)$ وبيّن أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتزايد متوسط التكلفة. (c) أثبت أن متوسط التكلفة يحقق قيمة صغرى عند القيمة x حيث إن $C'(x) = \overline{C}(x)$.

12. لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع xمنتج. تُعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$. (a) بيّن انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للأرباح، فان الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية. (b) أوجد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دولار و $C(x) = 2x + 5000$ دولار.

في التمارين 13-16، أوجد (a) مرونة الطلب و (b) مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا $(E < -1)$.

13. $f(p) = 200(30 - p)$

14. $f(p) = 200(20 - p)$

15. $f(p) = 100p(20 - p)$

16. $f(p) = 60p(10 - p)$

17. إذا كانت دالة الطلب f دالة قابلة للاشتقاق، فاثبت أن $[pf(p)]' < 0$ إذا كانت $\frac{p}{f(p)}f'(p) < -1$ فقط. (إذن، فإن الإيرادات تتناقص إذا كان الطلب مرنًا فقط).

18. يُعرف الدخل من مرونة الطلب بأنه النسبة المئوية للتغير في الكمية المشتراة مقسومة على النسبة المئوية للتغير في الدخل الحقيقي. إذا كان I يمثل الدخل و $Q(I)$ يمثل الطلب كدالة للدخل، أوجد صيغة لدخل مرونة الطلب.

19. إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$ (a) أوجد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى، (b) أوجد حدود التركيز.

20. إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة $x'(t) = 0.5x(t)[5 - x(t)]$ (a) أوجد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى، (b) أوجد حدود التركيز.

21. يدرس علماء الرياضيات في كثير من الأحيان معادلات بالشكل $x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$. بدلًا من المعادلة الأكثر تعقيدًا التي تبرر التبسيط وبيان أن المعادلة الثانية "تتقلص إلى" المعادلة الأولى. بدءًا بـ $x'(t) = cx(t)[K - x(t)]$ وبالتعويض عن $y(t) = Kx(t)$ يتبين أن المعادلة تتقلص إلى الشكل $x(t) = rx(t)[1 - x(t)]$ كيف يرتبط الثابت r بالثوابت c و K؟

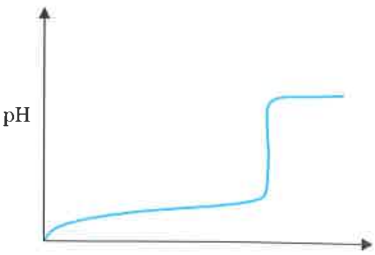
22. على فرض أن التفاعل الكيميائي يتبع المعادلة $x'(t) = cx(t)[K - x(t)]$ على فرض أنه في الزمن $t = 4$ يكون التركيز $x(4) = 2$ وسرعة التفاعل في الزمن $t = 6$ على فرض أن التركيز هو $x(6) = 4$ وسرعة التفاعل $x'(6) = 4$ أوجد قيم c و K لهذا التفاعل الكيميائي.

23. بوجه عام، يتجمع التفاعل الكيميائي من الدرجة الثانية، والمواد الكيميائية A و B (المواد المتفاعلة) لتشكل المادة الكيميائية C (المنتج). إذا كانت التركيزات الأولية للمواد المتفاعلة A و B هي a و b على التوالي، فأن فتركيز المنتج $x(t)$ يحقق المعادلة $x'(t) = [a - x(t)][b - x(t)]$ فما هو معدل تغيير المنتج عندما $x(t) = a$؟ بهذه القيمة، هل يتزايد تركيز المنتج أم يتناقص أم يبقى كما هو؟ على فرض أن $a < b$ ولم يظهر أي منتج عندما بدأ التفاعل الكيميائي، اشرح لماذا تكون القيمة العظمى لتركيز المنتج هي a = $x(t)$.

24. يمكن إثبات أنه يمكن حل المعادلة $x'(t) = [a - x(t)][b - x(t)]$ من خلال $x(t) = \frac{a[1 - e^{-(b-a)t}]}{1 - (a/b)e^{-(b-a)t}}$ أوجد $x(0)$ التركيز الأولي للمادة الكيميائية و $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ وحدود تركيزها (على فرض $a < b$). مثّل بيانيًا $x(t)$ في الفترة $[0, \infty)$ وصِف شفهياً كيفية تغيّر تركيز التغير الكيميائي بمرور الزمن.

25. في المثال 9.5، وجدنا نقطة انعطاف واحدة في منحنى المعايرة. نقطة انعطاف أخرى، تسمى نقطة التكافؤ، تقابل $x = 1$. في منحنى المعايرة العام المبين في الصفحة التالية، حدد في التمثيل البياني نقطتي الانعطاف واشرح بإيجاز لماذا يفضل الكيميائيون قياس درجة التكافؤ وليس نقطة انعطاف المثال 9.5. (ملاحظة: يشير المحور الأفقي لمنحنى المعايرة إلى كمية القاعدة المضافة إلى الخليط. وهذا تناسب طردي مع كمية الحمض المحوّل في المنطقة حيث $0 < x < 1$)

26. في معايرة الحمض الضعيف والقاعدة القوية، يحدد الرقم



الهيدروجيني من خلال $c + \ln \frac{x}{1 - x}$، حيث إن f هو كسر $(0 < x < 1)$ من الحمض المحوّل. ماذا يحدث لمعدل تغير الرقم الهيدروجيني x إذا اقترب من 1؟

27. يعطى المعدل R للتفاعل الأنزيمي بالعلاقة $R = \frac{rx}{k + x}$، حيث إن k هو ثابت ميخائيل و x هو تركيز المادة المتفاعلة مع الأنزيم. حدد ما إذا كان هناك قيمة عظمى للتفاعل الكيميائي.

28. في عملية إدياباتيّة كيميائية، لا يوجد تغير صافٍ في الحرارة. لذا يرتبط الضغط والحجم بالمعادلة $PV^{1.4} = c$، للثابت الموجب c. أوجد وفسّر $\frac{dV}{dP}$.

في التمارين 32–29، تُحدد كتلة الأول x متر من القضيب الرقيق بالمعادلة $m(x)$ في الفترة المحددة. أوجد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب. استنادًا إلى ما استنتجته، صِف بإيجاز تركيب دوال القضيب.

29. $m(x) = 4x - \sin x$ جرام لكل $0 \le x \le 6$

30. $m(x) = (x - 1)^3 + 6x$ جرام لكل $0 \le x \le 2$

31. $m(x) = 4x$ جرام لكل $0 \le x \le 2$

32. $m(x) = 4x^2$ جرام لكل $0 \le x \le 2$

33. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ كولوم. أوجد التيار.

34. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ كولوم. أوجد التيار.

35. على فرض أن الشحنة في مكان محدد في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{-3t}\cos 2t + 4\sin 3t$ كولوم. ماذا يحدث لهذه الدالة إذا كان $t \to \infty$؟ اشرح لماذا يسمى الحد $e^{-3t}\cos 2t$ **حالة عابر** و $4\sin 3t$ يعرف بأنه **حالة ثابتة** أو قيمة **خط التقارب** لدالة الشحنة. أوجد قيم الحالة الثابتة والعابرة لدالة التيار.

36. كما في التمرين 35، أوجد قيم الحالة الثابتة والعابرة إذا حُددت دالة الشحنة من خلال $Q(t) = e^{-2t}(\cos t - 2\sin t) + te^{-3t} + 2\cos 4t$

37. على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)]$. أوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

38. على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ أوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

39. يمكن إثبات أن حلول المعادلة اللوجستية تكون بالشكل $p(t)=\frac{B}{1+Ae^{-kt}}$. للثوابت B، A و k. أوجد معدل تغير التعداد السكاني والنهاية $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

40. في التمرين 39. على فرض أنك تدرس النمو السكاني وتشير بياناتك إلى نقطة انعطاف في $p=120$. استخدم هذه القيمة لتحديد الثابت B. في دراستك، التعداد السكاني الأولي هو $p(0)=40$ استخدم هذه القيمة لتحديد الثابت A. إذا كان قياسك الحالي هو $p(12)=160$ فاستخدم هذه القيمة لتحديد الثابت k.

التطبيقات

41. تستخدم الدالة $f(t)=a/(1+3e^{-bt})$ لنمذجة انتشار الشائعات. على فرض أن $a=70$ و $b=0.2$ أوجد قيمة $f(2)$، النسبة المئوية للتعداد السكاني التي استمعت للشائعات بعد ساعتين. احسب $f'(2)$ وصف ماذا تمثل. احسب $\lim_{t\to\infty} f(t)$ وصف ماذا تمثل.

42. بعد الحقن، يعطى تركيز الدواء في العضلات بالمعادلة، $f(t)$ على فرض أن t يقاس بالساعات و $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$. حدد الزمن الذي يصل فيه التركيز إلى القيمة العظمى.

43. على فرض أن حجم حدقة عين حيوان معين يحدد من خلال $f(x)$ (ملم)، حيث إن x هو كثافة الضوء في الحدقة. إذا

$$f(x)=\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$$

بيّن أن $f(x)$ دالة متناقصة. فسّر هذه النتيجة من حيث استجابة الدقة للضوء.

44. على فرض ان درجة حرارة الجسم بعد تلقي الدواء بساعة واحدة تعطى بالمتغير x ملغ $T(x)=102-\frac{1}{6}x^2(1-x/9)$ لكل $0\le x\le 6$. تُعرّف القيمة المطلقة للمشتقة، $|T'(x)|$، بأنها حساسية الجسم من الجرعة. أوجد الجرعة التي تحقق القيمة العظمى للحساسية.

45. تسبح سمكة بالسرعة المتجهة v ضد التيار من النقطة A إلى النقطة B، ضد تيار سرعته c. اشرح لماذا ينبغي أن يكون لدينا $v>c$. تحدد الطاقة التي تستهلكها السمكة من خلال $E=\frac{kv^2}{v-c}$ للثابت $k>1$. بيّن أن E له عدد حرج واحد. هل يمثل القيمة الصغرى أم القيمة العظمى؟

46. الطاقة اللازمة لطائر لكي يطير بسرعة v تتناسب مع $P=\frac{1}{v}+cv^3$، لثابت ما c. أوجد v التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة.

47. خرج شخص متنقل من المنطقة التي يقطن فيها وقاد حوالي y ميل بمعدل r_1 mph، ثم اتجه إلى الطريق المركزي وقاد حوالي x ميل بمعدل r_2 mph. على فرض أن المنطقة لها حجم محدد، بحيث إن $xy=c$ لرقم معين c. (a) أوجد x و y تحققان القيمة الصغرى للزمن المستغرق في القيادة. (b) بيّن أن هناك زمن قيادة متساويا بمعدل r_1 mphو بمعدل r_2 mph. هذا هو التصميم الأساسي للمناطق السكنية والمطارات.

48. على فرض أن إجمالي تكلفة تحرك زورق على بعد مسافة p بسرعة v هو $C(v)=avp+b\frac{p}{v}$، بما يمثل الزمن والطاقة المستهلكة. (a) أوجد v التي تحقق القيمة الصغرى لـ $C(v)$. (b) السير ضد تيار سرعته v_c، وتصبح التكلفة $C(v)=ap\frac{v^2}{v-c}+b\frac{p}{v-v_c}$ أوجد v التي تحقق القيمة الصغرى لـ $C(v)$ (مقترح من تيم بنينفس).

تمارين استكشافية

1. نموذج بسيط لانتشار الأمراض الفتاكة مثل الإيدز يقسم الأشخاص إلى فئات سريعة التأثر (ولكن لم تتعرض للمرض)، ومعرضة للمرض (ولكن غير مصابة بالمرض) والمصابة. يرمز لتناسب الأشخاص في كل فئة في الزمن t بـ $S(t), E(t)$ و $I(t)$، على الترتيب. المعادلات العامة لهذا النموذج هي

$$S'(t)=mI(t)-bS(t)I(t),$$
$$E'(t)=bS(t)I(t)-aE(t),$$
$$I'(t)=aE(t)-mI(t),$$

حيث إن m, b و a هي ثوابت موجبة. لاحظ أن كل معادلة تعطي معدل التغير في إحدى الفئات. لكل معدل تغير حد موجب وحد سالب. اشرح لماذا يمثل الحد الموجب الأشخاص الذي دخلوا الفئة والحد السالب الأشخاص الذين غادروا الفئة. في المعادلة الأولى، يمثل الحد $mI(t)$ الأشخاص الذين توفوا من المرض (الثابت m هو معكوس ضربي لمتوسط العمر المتوقع للشخص المصاب بالمرض). هذا الحد مصطنع قليلًا: على فرض أن التعداد السكاني ثابت، وذلك أنه عندما يتوفى شخص واحد، يولد طفل غير معرض أو مصاب بالمرض. وتتمثل ديناميات المرض في إصابة الأشخاص من الفئة سريعة التأثر (السليمة) عن طريق الاتصال بالأشخاص من الفئة المصابة. اشرح لماذا يعتمد رقم الاتصال بين الأشخاص من الفئة سريعة التأثر بالأشخاص من الفئة المصابة على $S(t)$ و $I(t)$. فأن فالحد $bS(t)I(t)$ يمثل الأشخاص من الفئة سريعة التأثر والمعرضين للإصابة عن طريق الاتصال بالأشخاص من الفئة المصابة. اشرح لماذا يظهر الحد نفسه أنه موجب في المعادلة الثانية. اشرح المتبقي من المعادلتين في هذا الشكل. (إرشاد: يمثل الثابت a المعكوس الضربي لمتوسط فترة الكمون. في حالة مرض الإيدز. ستكون تلك الفترة التي يستغرقها الشخص المصاب بفيروس نقص المناعة البشرية للتطوير الفعلي لمرض الإيدز).

2. بدون معرفة كيفية حل المعادلات التفاضلية، يمكننا أن نستنتج بعض الخواص الهامة لحلول المعادلات التفاضلية. أطلع على معادلة التفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز. $x'(t)=x(t)[1-x(t)]$. على فرض أن $x(0)$ يقع بين 0 و 1. بيّن أن $x'(0)$ موجب، من خلال تحديد القيم الممكنة لـ $x(0)[1-x(0)]$. اشرح لماذا يشير هذا إلى أن قيمة $x(t)$ ستزداد من $x(0)$ وستستمر في الزيادة طالما $0<x(t)<1$. اشرح السبب إذا كان $x(0)<1$ و $x(t)>1$ لبعض $t>0$، فأن فلا بد أن يكون صحيحًا أن $x(t)=1$ لبعض $t>0$. مع ذلك. إذا كان $x(t)=1$، فأن $x'(t)=0$ و الحل $x(t)$ يبقى ثابتًا (مساويًا

1). وبالتالي، يمكننا أن نخمن أن $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ بالمثل، بيّن أنه إذا كان $x(0) > 1$، فأن $x(t)$ تتناقص ويمكننا التخمين مرة أخرى بأن $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$. معادلات التغير. على فرض أن $x'(t) = -0.05x(t) + 2$. هذا النموذج على سبيل التجربة ومن خلاله تتحلل المادة المشعة بمعدل 5% ولكن تتجدد المادة بمعدل ثابت قدره 2. أوجد قيمة $x(t)$ حيث إن $x'(t) = 0$. حدد قيم بداية متنوعة لـ $x(0)$ أصغر من وأكبر من الحل الثابت وحدد ما إذا كان الحل $x(t)$ سيتزايد أو سيتناقص. استنادًا إلى هذه الخاتمة، خمن قيمة $\lim_{t\to\infty} x(t)$، التي تحدد مقدار المادة المشعة في التجربة.

تمارين مراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية مصطلحات المعرفة ونظريات واردة في هذه الوحدة. بالنسبة لكل مصطلح أو نظرية، (1) اذكر تعريف أو عبارة دقيقة، (2) اذكر معنى المصطلح أو النظرية بعبارات عامة، و(3) صف أنواع المسائل ذات الصلة بالمصطلح أو النظرية.

التقريب الخطي	طريقة نيوتن	العدد الحرج
القيمة القصوى المطلقة	النهايات القصوى المحلية	اختبار المشتقة الأولى
نقطة الانعطاف	التقعر	مشتقة من الرتبة الثانية
التكلفة الحدية	التيار	اختبار
قاعدة لوبيتال	نظرية القيمة القصوى	المعدّلات المرتبطة مبرهنة فيرما

صواب أم خطأ

اذكر إذا ما كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة وبيّن السبب باختصار. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" عن طريق تعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. يعطي التقريب الخطي تقديرات تقريبية جيدة لقيم الدالة لـ x القريبة من نقطة التماس.
2. أقرب تخمين مبدئي هو الحل، وأسرع تقارب هو طريقة نيوتن.
3. تنص قاعدة لوبيتال على أن نهاية المشتقة يساوي نهاية الدالة.
4. إذا كانت القيمة العظمى لـ $f(x)$ عند $x = a$ فأن $f'(a) = 0$
5. تحدث القيمة القصوى المطلقة إما عند عدد حرج أو عند نقطة نهاية.
6. إذا كان $f'(x) > 0$ لكل $x < a$ و $f'(x) < 0$ لـ $x > a$ فأن $f(a)$ هي قيمة عظمى محلية.
7. إذا كان $f''(a) = 0$، فأن $y = f(x)$ لها نقطة انعطاف عند $x = a$
8. إذا كان هناك خط تقارب $x = a$ فأن إما $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
9. في مسألة تحقيق القيمة العظمى، إذا كانت f لها عدد حرج واحد فقط، فإنه يمثل القيمة العظمى.
10. إذا كان التعداد السكاني $p(t)$ لها معدل بالقيمة العظمى عند $t = a$ فأن $p''(a) = 0$.
11. إذا كان $f'(a) = 2$ و $g'(a) = 4$ فأن $\frac{dg}{df} = 2$ و g يتزايد بسرعة تبلغ ضعف f.

في التمرينين 1 و 2، أوجد التقريب الخطي لـ $f(x)$ عندما x_0.

1. $f(x) = e^{3x}, x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+3}, x_0 = 1$

في التمرينين 3 و 4، استخدم التقريب الخطي لتقدير الكمية.

3. $\sqrt[3]{7.96}$
4. $\sin 3$

في التمرينين 5 و 6، استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الجذر التقريبي.

5. $x^3 + 5x - 1 = 0$
6. $x^3 = e^{-x}$

7. اشرح السبب، بوجه عام، إذا كانت $y = f(x)$ لها نقطة انعطاف عند $x = a$ وليس لها نقطة انعطاف عند $x = b$ فأن التقريب الخطي لـ $f(x)$ عند $x = a$ سيكون أكثر دقة لمجموعة أكبر من x التقريب الخطي $f(x)$ عند $x = b$.
8. بين أن التقريب $\frac{1}{(1-x)} \approx 1 + x$ صالح لقيم x الصغيرة.

في التمارين 9-16، أوجد النهاية.

9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2+3x}$
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^4+2}$
12. $\lim_{x\to\infty} (x^2e^{-3x})$
13. $\lim_{x\to 2^+} \left|\frac{x+1}{x-2}\right|^{\sqrt{x^2-4}}$
14. $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x)$
15. $\lim_{x\to 0^+} (\tan x \ln x)$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{\sin^{-1} x}$

في التمارين 17-26، نفذ ما ياتي يدويًا. (a) أوجد الأعداد المهمة، (b) حدد فترات التزايد والتناقص، (c) حدد ما إذا كان العدد الحرج يمثل القيمة العظمى المحلية، القيمة الصغرى المحلية أم لا. (d) حدد كافة فترات التقعر، (e) أوجد كافة نقاط الانعطاف.

17. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$
18. $f(x) = x^4 - 4x + 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

19. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

20. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$

21. $f(x) = xe^{-4x}$

22. $f(x) = x^2 \ln x$

23. $f(x) = \dfrac{x - 90}{x^2}$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

26. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

في التمارين 30-27، أوجد القيمة القصوى المطلقة من الدالة المعطاة في الفترة المعطاة.

27. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ on $[0, 4]$

28. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$ on $[-1, 3]$

29. $f(x) = x^{4/5}$ on $[-2, 3]$

30. $f(x) = x^2 e^{-x}$ on $[-1, 4]$

في التمارين 34-31، أوجد x - إحداثيات القيم القصوى المحلية.

31. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x$

32. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

33. $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$

34. $f(x) = x^5 + 4x^2 - 4x$

35. ارسم الدالة بيانيًا باستخدام $f(-1) = 2$، $f(1) = -2$، $f'(x) < 0$ لـ $-2 < x < 2$ و $f'(x) > 0$ لـ $x < -2$ و $x > 2$.

36. ارسم الدالة بيانيًا باستخدام $f'(x) > 0$ لـ $x \neq 0$، $f'(0)$ غير معرّفة، $f''(x) > 0$ لـ $x < 0$ و $f''(x) < 0$ لـ $x > 0$.

في التمارين 46-37، ارسم بيانيًا الدوال المبينة ونقاط التقاطع وخطوط التقارب.

37. $f(x) = x^4 + 4x^3$

38. $f(x) = x^4 + 4x^2$

39. $f(x) = x^4 + 4x$

40. $f(x) = x^4 - 4x^2$

41. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

43. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

45. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

46. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

47. أوجد النقطة على التمثيل البياني $y = 2x^2$ الأقرب إلى $(2, 1)$

48. بيّن أن المستقيم المار من خلال النقطتين في التمرين 47 متعامد على المماس $y = 2x^2$ عند $(2, 1)$.

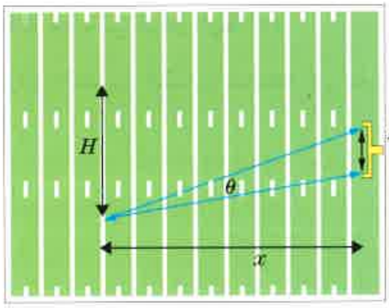
49. مدينة ما تبني طريقًا سريعًا من النقطة A إلى النقطة B، ويبعد 4 أميال شرقًا و6 أميال جنوبًا عن النقطة A. والأربعة أميال جنوب النقطة A هي المستنقعات، حيث بلغت تكلفة بناء الطريق السريع حوالي 6 مليون \$ لكل ميل. وبلغت التكلفة على الأرض اليابسة 2 مليون \$. أوجد النقطة على حدود المستنقعات والأراضي اليابسة التي سيبنى عليها الطريق السريع التي تحقق القيمة الصغرى للتكلفة الإجمالية.

50. إذا انقبضت عضلة بسرعة v، تتناسب القوة الناتجة عن انقباض العضلة مع $e^{-v/2}$. بيّن أنه كلما ازدادت سرعة الانقباض، أنتجت قوة أقل. ومع ذلك، تتناسب القوة الناتجة عن انقباض العضلة مع $ve^{-v/2}$. حدد السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة.

51. تحتوي علبة مشروب غازي أسطوانية الشكل على 16 أونصة سائلة. أوجد أبعاد العلبة التي تحقق القيمة الصغرى للمساحة السطحية للعلبة.

52. على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 4x + 1200$ هي تكلفة تصنيع x منتج. بيّن أن $C'(x) > 0$ واشرح من حيث المعنى التجاري لماذا يكون ذلك صحيحا. بيّن أن $C''(x) > 0$ واشرح لماذا يدل ذلك أن عملية تصنيع ليست على درجة عالية من الكفاءة.

53. يوضح المخطط ملعبًا لكرة القدم بعلامات H تجزئة تبعد عن بعضها البعض P قدم وقائمي مرمى يبعدان عن بعضهما البعض x قدم. إذا سجل هدف خارجي من مسافة تبعد (أفقيًا) قدم من عوارض المرمى، والزاوية θ تعطي هامش الخطأ لهذا الاتجاه. أوجد x التي تحقق القيمة العظمى لـ θ



54. في حالة التمرين 53، غالبًا ما يقول المعلقون الرياضيون في ما يتعلق بالهدف الخارجي القصير $(50 \le x \le 60)$، إن الفريق يمكنه الرجوع 5 ياردات بركلة الجزاء. حدد ما إذا كان هذا صحيحا لطلاب المدارس الثانوية ($H = 53\frac{1}{3}$ و $P = 23\frac{1}{3}$)، الجامعات ($H = 40$ و $P = 18\frac{1}{2}$) أو الرياضيين المحترفين ($H = 18\frac{1}{2}$ و $P = 18\frac{1}{2}$).

55. إجمالي الشحنة في دارة كهربية في الزمن t يحدده $Q(t) = e^{-3t} \sin 2t$ كولوم. أوجد التيار.

56. إذا كان التركيز $x(t)$ للمادة الكيميائية في تغيرات التفاعل الكيميائي تعطى بالمعادلة $x'(t) = 0.3x(t)[4 - x(t)]$ ، فأوجد التركيز الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى.

57. على فرض أن كتلة أول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالمعادلة $m(x) = 20 + x^2$ لـ $0 \le x \le 4$. أوجد كثافة القضيب وصِف بإيجاز تركيب الدوال للقضيب.

58. درجات شخص $(f(t) = 90/(1 + 4e^{-0.4t}))$ نقطة في الاختبار بعد t ساعة من الدراسة. فما هي درجات الشخص إذا لم يدرس على الإطلاق؟ احسب $f'(0)$ وقدر كم عدد النقاط 1 من ساعات الدراسة ستضاف إلى الدرجات.

59. قيمة تصنيع x من منتج تعطى بالمعادلة $C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$. أوجد دالة التكلفة الحدية. قارن التكلفة الحدية عندما $x = 20$ بالتكلفة الفعلية لإنتاج 20 منتج.

60. في ما يتعلق بدالة التكلفة في التمرين 59، أوجد قيمة x التي تحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

تمارين استكشافية

1. على فرض أن $n(t)$ هو رقم الفوتونات في مجال الليزر. أحد نماذج العمل بالليزر هو $n'(t) = an(t) - b[n(t)]^2$، حيث إن a و b ثوابت موجبة. إذا كانت $n(0) = a/b$، فما هي $n'(0)$؟ استنادا إلى هذا الحساب هل $n(t)$ تتزايد أم تتناقص أم تبقى كما هي؟ إذا كانت $n(0) > a/b$، فهل $n'(0)$ موجب أو سالب؟ استنادا إلى هذا الحساب هل $n(t)$ تتزايد أم تتناقص أم تبقى كما هي؟ إذا كانت $n(0) < a/b$، فهل $n'(0)$ موجب أو سالب؟ استنادا إلى هذا الحساب هل $n(t)$ تتزايد أم تتناقص أم تبقى كما هي؟ جمّع هذه المعلومات وخمن حد $n(t)$ حيث إن $t \to \infty$. كرر هذه العملية مع على فرض أن $a < 0$.

2. إحدى طرائق التقريب العددي لمشتقة هي بايجاد قيمة الميل من القاطع. على سبيل المثال، $f'(a) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ إذا كان b قريبًا جدا من a. في هذا التمرين، سنطور التقريب المشابه لمشتقة من الرتبة الثانية. بدلا من إيجاد القاطع المار من خلال نقطتين على المنحنى، نجد القطع المكافئ المار من خلال ثلاث نقاط على المنحنى. تشكل المشتقة من الرتبة الثانية لهذا القطع المكافئ المقرّب تقريبًا للمشتقة من الرتبة الثانية للمنحنى. الخطوة الثانية معقدة. نوصي باستخدام CAS إن وجدت. أوجد دالة بالشكل $g(x) = ax^2 + bx + c$ مثل $g(x_1) = y_1$، $g(x_2) = y_2$ و $g(x_3) = y_3$. بما إن $g''(x) = 2a$، فيتطلب منك إيجاد الثابت a. ما يسمى بتقريب الفرق الثاني لـ $f''(x)$ هو قيمة $g''(x) = 2a$ باستخدام الثلاث نقاط $x_1 = x - \Delta x\,[y_1 = f(x_1)]$، $x_2 = x\,[y_2 = f(x_2)]$ و $x_3 = x + \Delta x\,[y_3 = f(x_3)]$. أوجد الفرق الثاني $f(x) = \sqrt{x+4}$ عند $x = 0$ باستخدام $\Delta x = 0.5$، $\Delta x = 0.1$ و $\Delta x = 0.01$. قارن القيمة الدقيقة للمشتقة من الرتبة الثانية، $f''(0)$.

3. لدالة الظل الزائدية $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$، اثبت أن $\frac{d}{dx}\tanh x > 0$. استنتج أن الدالة الزائدية $\tanh(x)$ لها دالة معكوسة وأوجد مشتقة الدالة المعكوسة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-1 الدوال الأصلية

ملاحظات

يتوجب علينا أن نأخذ بعين الاعتبار ما هو أكثر بكثير من المفاهيم البسيطة المطروحة هنا إذا تناولنا نموذجا واقعيا لنظام في مثل تعقيد مركبات الفضاء. وعلى سبيل إن التمهيد لهذه المسألة، اطلع على المقال المثير جدا للاهتمام الذي كتبه لونج وفويس في إصدار شهر فبراير لعام 1999 من مجلة *American Mathematical Monthly*.

مركبة الفضاء إنديفور

يزودنا حساب التفاضل والتكامل بمجموعة من الأدوات الفعالة لفهم العالم من حولنا. تضمنت التصاميم الأولية لمركبة الفضاء، محركات طائرة لتزويدها بالقوة خلال رحلتها عبر الغلاف الجوي بعد مرحلة إعادة الدخول للغلاف الجوي، وسعيا للحد من التكاليف، حولت محركات الطائرة إلى قطع خردة وصارت مركبة الفضاء، طائرة شراعية منزلقة ضخمة. يستخدم مهندسو وكالة ناسا للفضاء حساب التفاضل والتكامل لتوفير أجوبة دقيقة عن مسائل التحكم بالرحلة. وفي حين أننا لسنا في موضع للتعامل مع التعقيدات الواسعة لرحلة المركبات الفضائية، فلا يسعنا إلا التأمل في نموذج مثالي.

كما نفعل عادة مع مسائل الحياة اليومية، نبدأ بمبدأ (مبادئ) فيزيائي ونستخدمه لإنتاج نموذج رياضي للنظام الفيزيائي. ونحل المسألة الرياضية بعد ذلك، ونفسر الحل بدلالة المسألة الفيزيائية.

إذا لم نأخذ في الاعتبار سوى الحركة الرأسية لجسم ما يهبط نحو الأرض، فالمبدأ الفيزيائي المؤثر على الحركة هو قانون نيوتن الثاني للحركة،

$$\text{القوة} = \text{الكتلة} \times \text{التسارع} \quad \text{أو} \quad F = ma$$

ينص هذا القانون على أن مجموع كل القوى المؤثرة على جسم يساوي ناتج ضرب كتلته وتسارعه. وقد تتعرف على قوتين هنا وهما الجاذبية التي تجذب لأسفل ومقاومة الهواء التي تدفع في الاتجاه المعاكس للحركة. ومن الدليل التجريبي، نحن نعلم أن القوة بفعل مقاومة الهواء، F_d، تتناسب مع مربع سرعة الجسم وتؤثر في الاتجاه المعاكس للحركة. إذا، في حالة الجسم عند الهبوط،

$$F_d = kv^2$$

لعدد ثابت $k > 0$.

تكون قوة بفعل الجاذبية هي ببساطة وزن الجسم، $W = -mg$ ، حيث أن ثابت الجاذبية g يساوي تقريبا $9.8\ \text{m/s}^2$ (إشارة السالب تخبرنا أن قوة الجاذبية تؤثر في اتجاه الهبوط). إذا جمعنا ذلك معا، فسيعطينا قانون نيوتن الثاني للحركة

$$F = ma = -mg + kv^2$$

علما أن $a = v'(t)$ ، يكون لدينا

$$mv'(t) = -mg + kv^2(t) \tag{1.1}$$

لاحظ أن المعادلة (1.1) تتضمن كلا من دالة المجهول $v(t)$ ومشتقتها $v'(t)$. ويطلق على مثل هذه المعادلة، **معادلة تفاضلية**. وسنناقش المعادلات التفاضلية بالتفصيل في الوحدة 7. للبدء الآن، نبسط المسألة على فرض أن الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم. بأخذ $k = 0$ في (1.1)، نحصل على

$$mv'(t) = -mg \quad \text{أو} \quad v'(t) = -g$$

والآن، لتكن $y(t)$ هي الدالة المكانية، بمعرفة ارتفاع الجسم بالمتر بعد t ثانية من بدء مرحلة إعادة الدخول للغلاف الجوي. بما أن $v(t) = y'(t)$ و $a(t) = v'(t)$ ، فإنه لدينا

$$y''(t) = -9.8$$

من هذا، نرغب في تحديد $y(t)$. وعموما، نحن نحتاج إلى إيجاد طريقة لعكس عمل الاشتقاق. بمعنى، إذا أخذنا الدالة، f ، فنحن نرغب في إيجاد دالة أخرى F بحيث يكون فيها $F'(x) = f(x)$. ونسمي هذه الدالة F **الدالة الأصلية** لـ f.

المثال 1.1 إيجاد دوال أصلية عديدة لدالة معطاة

أوجد دالة أصلية لـ $f(x) = x^2$.

الحل لاحظ أن $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ هي دالة أصلية لـ $f(x)$. بما أن

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

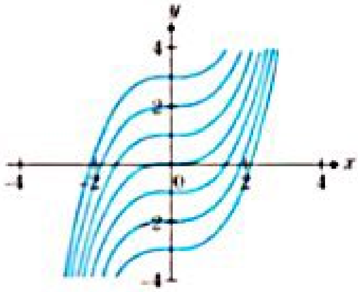
بالإضافة إلى ذلك، لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right) = x^2$$

بحيث تكون $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ دالة أصلية لـ f أيضا. في الحقيقة، لأي عدد ثابت c يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^2$$

لذلك، إن $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ هي ايضا دالة أصلية لـ $f(x)$. لأي اختيار من الثابت c بيانيا، يعطينا هذا عائلة لمنحنيات دالة أصلية، كما هو موضح في الشكل 7.1. لاحظ أن كل منحنى هو إزاحة رأسية لكل منحنى آخر في العائلة.



الشكل 7.1

عائلة لمنحنيات دالة أصلية

عموما، لاحظ أنه إذا كانت F أي دالة أصلية لـ f وكان c أي عدد ثابت، فإذا

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

لذلك، $F(x) + c$ هي أيضا دالة أصلية لـ $f(x)$، لأي عدد ثابت c. من ناحية أخرى، هل يوجد دوال أصلية أخرى لـ $f(x)$ إلى جانب $F(x) + c$ ؟ الإجابة هي لا، كما هو موضح في النظرية 1.1.

النظرية 1.1

على فرض أن F و G هما دالتان أصليتان لـ f على الفترة I . إذا،

$$G(x) = F(x) + c$$

لكل عدد ثابت c.

البرهان

بما أن F و G دالتان أصليتان لـ f ، فان $G'(x) = F'(x)$. ويلي ذلك الآن، بحسب النتيجة 10.1 في الدرس 2.10، أن $G(x) = F(x) + c$ ، لكل عدد ثابت c كما هو مطلوب. ■

التعريف 1.1

لتكن F دالة أصلية لـ f على الفترة I. **التكامل غير المحدود** لـ $f(x)$ (بمعلومية x) على I، يعرف بواسطة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c هو عدد ثابت اضافي **(ثابت التكامل)**.

ملاحظات

تنص النظرية 1.1 على أنه إذا أخذنا دالة أصلية F لـ f، فإنه يمكن كتابة كل دالة أصلية ممكنة لـ f في الصورة $F(x) + c$. نعطي لهذه الدوال الأصلية الإسم في التعريف 1.1.

إن عملية حساب التكامل تسمى **التكامل**. هنا، $f(x)$ تسمى **المكامل** والحد dx يعرف x على أنه **متغير التكامل**.

المثال 1.2 التكامل غير المحدود

أوجد قيمة $\int 3x^2dx$.

الحل يجب أن تعرف $3x^2$ على أنها مشتقة لـ x^3 وبهذا،

$$\int 3x^2dx = x^3 + c$$

المثال 1.3 إيجاد قيمة تكامل غير محدود

أوجد قيمة $\int t^5dt$

الحل نحن نعلم أن $\frac{d}{dt}t^6 = 6t^5$ وعليه، $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}t^6\right) = t^5$. لذلك،

$$\int t^5dt = \frac{1}{6}t^6 + c$$

يجب التركيز على أن كل قاعدة اشتقاق تستحضر قاعدة تكامل مناظرة. على سبيل المثال، تذكر أن لكل قوة نسبية، r ، $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$ على نحو مماثل، لدينا

$$\frac{d}{dx}x^{r+1} = (r+1)x^r$$

وهذا يثبت النتيجة التالية.

النظرية 1.2 (قاعدة القوة)

لأي قوة نسبية $r \neq -1$.

$$\int x^rdx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

هنا، إذا كان $r < -1$ ، فالفترة I التي يكون عليها هذا معرفا يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$.

ملحوظة 1.1

تنص النظرية 1.2 على أنه من أجل مكاملة قوة لـ x(غير x^{-1})، يجب عليك ببساطة رفع القوة بمقدار 1 وتقسم على القوة الجديدة. لاحظ أن هذه القاعدة لا تصلح بشكل واضح حيث $r = -1$. بما أن هذا من شأنه أن ينتج قسمة على 0. في وقت لاحق من هذا الدرس، سنطور قاعدة تغطي هذه الحالة.

المثال 1.4 استخدام قاعدة القوة

أوجد قيمة $\int x^{17}dx$.

الحل من قاعدة القوة، يكون لدينا

$$\int x^{17}dx = \frac{x^{17+1}}{17+1} + c = \frac{x^{18}}{18} + c.$$

مثال 1.5 قاعدة القوة مع أس سالب

أوجد قيمة $\int \frac{1}{x^3}dx$.

الحل يمكننا استخدام قاعدة القوة إذا أعدنا كتابة التكامل أولا. في أي فترة لا تحتوي على 0، يكون لدينا

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$$

المثال 1.6 قاعدة القوة مع أس كسري

أوجد قيمة (a) $\int \sqrt{x}\,dx$ و (b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

الحل (a) كما في المثال 1.5، نعيد كتابة المكامل أولا ثم نطبق قاعدة القوة. لدينا

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

لاحظ أن الكسر $\frac{2}{3}$ في التعبير الأخير هو بالتحديد ما يلزم لاختصار الأس الجديد $\frac{3}{2}$ (هذا ما يحدث إذا أجريت الاشتقاق).

(b) على نحو مماثل، أي فترة لا تحتوي على 0.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c. \quad \blacksquare$$

لاحظ أنه بما أن $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$، يكون لدينا

$$\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + c.}$$

ونعيد الذكر بأنه عند عكس أي صيغة اشتقاق، نحصل على صيغة تكامل مناظرة. ويحتوي الجدول الآتي عددا من الصيغ المهمة. ثم ترك براهين هذه الصيغ لتكون تمارين مباشرة ولكن مهمة. لاحظ أنه ليس لدينا بعد صيغ تكامل للعديد من الدوال المألوفة مثل، $\frac{1}{x}$ و $\ln x$ و $\tan x$ و $\cot x$ وغيرها.

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$، لكل $r \neq -1$ (قاعدة القوة)	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

حتى الآن، ما نقوم به هو عكس معظم قواعد الاشتقاق الأساسية التي نعلمها. وسنطور أساليب أكثر تعقيدا في مرحلة لاحقة. أما الآن، فنحن نحتاج إلى قاعدة عامة تسمح لنا بدمج صيغ التكامل الأساسية لدينا.

النظرية 1.3

على فرض أن $f(x)$ و $g(x)$ لهما دوال أصلية. إذا، لأي عددين ثابتين a و b.

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

البرهان

لدينا $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ و $\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = g(x)$ ويترتب على ذلك

$$\frac{d}{dx}\left[a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx\right] = af(x) + bg(x)$$

كما هو مطلوب ■

لاحظ أن النظرية 1.3 تنص على أنه يمكننا بسهولة حساب تكاملات المجموع والفروق ومضاعفات العدد الثابت للدوال. ومع ذلك، تبين أن التكامل لناتج ضرب (أو ناتج قسمة) لا يكون بصفة عامة ناتج ضرب (ناتج قسمة) التكاملات.

المثال 1.7 التكامل غير المحدود لمجموع

أوجد قيمة $\int (3\cos x + 4x^8)\,dx$.

الحل

$$\int (3\cos x + 4x^8)\,dx = 3\int \cos x\,dx + 4\int x^8\,dx \quad \text{من النظرية 1.3}$$

$$= 3\sin x + 4\,\frac{x^9}{9} + c$$

$$= 3\sin x + \frac{4}{9}x^9 + c \quad ■$$

المثال 1.8 التكامل غير المحدود لفرق

أوجد قيمة $\int \left(3e^x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$

الحل

$$\int \left(3e^x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = 3\int e^x\,dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 3e^x - 2\tan^{-1} x + c \quad ■$$

حسب قاعدة القوة، نحن نعلم طريقة إيجاد قيمة $\int x^r\,dx$ لأس نسبي عدا $r = -1$. يمكننا التعامل مع هذه الحالة الاستثنائية إذا أبدينا الملاحظة التالية. أولاً، نذكر أنه حيث $x > 0$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

الآن، لاحظ أن $\ln|x|$ معرفة لكل $x \neq 0$. ولكل $x > 0$، فإن $\ln|x| = \ln x$ وبذلك،

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

وبالمثل لكل $x < 0$، $\ln|x| = \ln(-x)$ وبالتالي،

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x)$$

$$= \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) \quad \text{باستخدام قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

لاحظ أننا نحصل على المشتقة نفسها في كلتا الحالتين. وهذا يثبت النتيجة التالية.

النظرية 1.4

لكل $x \neq 0$، $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

المثال 1.9 **مشتقة ln لقيمة مطلقة**

لأي x يكون $\tan x \neq 0$. أوجد قيمة $\frac{d}{dx}\ln|\tan x|$.

الحل من النظرية 1.4 وقاعدة السلسلة، يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}\ln|\tan x| = \frac{1}{\tan x}\frac{d}{dx}\tan x$$

$$= \frac{1}{\tan x}\sec^2 x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$ ■

ومن خلال قاعدة الاشتقاق الجديدة في النظرية 1.4، نحصل على قاعدة تكامل جديدة.

النتيجة 1.1

في أي فترة لا تحتوي على 0.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

وعموما، لاحظ أنه إذا كانت $f(x) \neq 0$ وكانت f قابلة للاشتقاق، فإننا نحصل باستخدام قاعدة السلسلة على

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

وهذا يثبت قاعدة التكامل التالية.

النتيجة 1.2

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

في أي فترة تكون فيها $f(x) \neq 0$.

المثال 1.10 **التكامل غير المحدود لكسر بالصورة** $\frac{f'(x)}{f(x)}$

أوجد قيمة $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

الحل لاحظ أن البسط $(\sec^2 x)$ هو مشتقة المقام $(\tan x)$. حسب النتيجة 1.2، يكون لدينا إذا

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + c$$

قبل الاستنتاج من هذا الدرس وعرض جسم آخر أثناء الهبوط، ينبغي أن نؤكد أننا قد وضعنا عددا صغيرا فحسب من قواعد التكامل. علاوة على ذلك، على عكس الاشتقاقات، لن يكون لدينا أبدا قواعد تغطي كل الدوال المألوفة لنا. لذلك، من الضروري إدراك متى لا يمكنك إيجاد دالة أصلية.■

المثال 1.11 تحديد التكاملات التي لا يمكن إيجاد قيمها بعد

أي من التكاملات الآتية يمكنك إيجاد قيمته استنادا إلى التي وردت في هذا الدرس؟

(a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ، (b) $\int \sec x\,dx$ ، (c) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ ، (d) $\int \frac{x^3+1}{x}\,dx$

(e) $\int (x+1)(x-1)\,dx$ ، (f) $\int x\sin 2x\,dx$

الحل لاحظ أولا أنه يمكننا إعادة كتابة المسائل (a) و (c) و (d) و (e) في صيغ حيث يمكننا التعرف على الدوال الأصلية. كما يلي. لأجل (a).

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = 3x^{\frac{1}{3}} + c$$

في الجزء (c) ، لاحظ أن $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$ (البسط). من النتيجة 1.2، يكون لدينا إذا

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + c = \ln(x^2+1) + c$$

حيث يمكننا حذف رمز القيمة المطلقة بما أن $x^2+1>0$ لكل x.

في الجزء (d) ، إذا قسمنا المكامل، سنجد

$$\int \frac{x^3+1}{x}\,dx = \int (x^2 + x^{-1})\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|x| + c$$

أخيرا في الجزء (e) ، إذا ضربنا المكامل، سنحصل على

$$\int (x+1)(x-1)\,dx = \int (x^2-1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

يتطلب الجزآن (b) و (f) أن نجد دوالا تكون مشتقاتها مساوية لـ $\sec x$ و $x\sin 2x$. حتى الآن، نحن لا نعرف طريقة إيجاد قيمة هذه التكاملات. ■

والآن بما أننا نعرف طريقة إيجاد الدوال الأصلية لبعض الدوال، يمكننا العودة إلى مسألة الجسم عند الهبوط التي افتتحنا بها هذا الدرس.

المثال 1.12 إيجاد موقع جسم عند الهبوط معطى تسارعه

تسارع جسم عند الهبوط هو $y''(t) = -9.8\text{ m/s}^2$. على فرض أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = -30\text{ m/s}$ والموقع الابتدائي هو $y(0) = 30{,}000\text{ m}$. أوجد الدالة المكانية $y(t)$.

الحل يجب علينا عكس عمل مشتقتين، لذا فنحن نحسب دالتين أصليتين. أولا، يكون لدينا

$$y'(t) = \int y''(t)\,dt = \int (-9.8)\,dt = -9.8t + c$$

بما أن $y'(t)$ هي السرعة المتجهة للجسم (معطاة بوحدات الأمتار في الثانية)، يمكننا تحديد العدد الثابت c من السرعة المتجهة الابتدائية المعطاة. لدينا

$$v(t) = y'(t) = -9.8t + c$$

و $v(0) = y'(0) = -30$ وبالتالي،

$$-30 = v(0) = -9.8(0) + c = c$$

لذلك $c = -30$ ، إذا، السرعة المتجهة هي $y'(t) = -9.8t - 30$ ، بعد ذلك، يكون لدينا

$$y(t) = \int y'(t)\,dt = \int (-9.8t - 30)\,dt = -4.9t^2 - 30t + c$$

الآن. $y(t)$ تعطي ارتفاع الجسم (التي تم قياسها بالأمتار) وبهذا، من الموقع الابتدائي. يكون لدينا

$$30{,}000 = y(0) = -4.9(0) - 30(0) + c = c$$

إذا $c = 30{,}000$ و $y(t) = -4.9t^2 - 30t + 30{,}000$

ضع في اعتبارك أن ذلك يمثل ارتفاع الجسم على فرض أن القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم هي الجاذبية (أي في حال انعدام مقاومة الهواء). ■

التمارين 7.1

تمارين كتابية

1. أكدنا في هذا الدرس على أن التكامل غير المحدود يمثل كل الدوال الأصلية لدالة معطاة. لفهم مدى أهمية ذلك، افترض حالة تكون معلومة لديك القوة المحصلة، $F(t)$ ، المؤثرة على جسم ما. بموجب قانون نيوتن الثاني، $F = ma$. لأجل دالة السرعة المتجهة $v(t)$. يتحول ذلك إلى $a(t) = v'(t) = F(t)/m$. ولحساب $v(t)$ ، أنت تحتاج إلى حساب دالة أصلية لدالة القوة $F(t)/m$. ومع ذلك، على فرض أنه تعذر عليك إيجاد كل الدوال الأصلية. كيف تعلم ما إذا كنت حسبت الدالة الأصلية المناظرة لدالة السرعة المتجهة؟ من الناحية الفيزيائية. اشرح لماذا يكون من المعقول التوقع بوجود دالة أصلية واحدة مناظرة لمجموعة معطاة من الشروط الابتدائية.

2. قدمنا في هذا الدرس نموذجا أحادي الأبعاد لحركة جسم عند الهبوط. وتجاهلنا بعض القوى المؤثرة على الجسم بحيث تكون المعادلة الرياضية الناشئة معادلة يمكننا حلها. وازن الفائدة النسبية بأن يكون لدينا نموذج غير قابل للحل ولكنه واقعي مقابل حل لنموذج دقيق نسبيا فحسب. وضع في اعتبارك أنك عندما تقذف القمامة إلى سلة المهملات أنت لا تأخذ في الحسبان انحناء الأرض.

3. تحقق من أن $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + c$ و $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ بحساب مشتقات الدوال الأصلية المقترحة. ما قواعد الاشتقاق التي استخدمتها؟ لماذا يستبعد ذلك إيجاد قاعدة ناتج ضرب عامة (للدوال الأصلية) لـ $\int f(x)g(x)\,dx$ ؟

4. ذكرنا في الدرس أنه ليس لدينا بعد صيغة للدوال الأصلية للعديد من الدوال الأولية، بما في ذلك $\ln x$ و $\sec x$ و $\csc x$. إذا كانت $f(x)$ معطاة، اشرح ما يحدد إذا كان لدينا صيغة بسيطة أم لا لـ $\int f(x)\,dx$. على سبيل المثال، لماذا توجد صيغة بسيطة لـ $\int \sec x \tan x\,dx$ ولكن ليس لـ $\int \sec x\,dx$ ؟

في التمارين 4–1، ارسم عددا من الدوال ضمن عائلة الدوال المعرفة بالدالة الأصلية.

1. $\int x^3\,dx$
2. $\int (x^3 - x)\,dx$
3. $\int e^x\,dx$
4. $\int \cos x\,dx$

في التمارين 28–5، أوجد الدالة الأصلية

5. $\int (3x^4 - 3x)\,dx$
6. $\int (x^3 - 2)\,dx$
7. $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$
8. $\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
9. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$
10. $\int \frac{x + 2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$
11. $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$
12. $\int (3\cos x - \sin x)\,dx$
13. $\int 2\sec x\tan x\,dx$
14. $\int \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
15. $\int 5\sec^2 x\,dx$
16. $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$
17. $\int (3e^x - 2)\,dx$
18. $\int (4x - 2e^x)\,dx$
19. $\int (3\cos x - 1/x)\,dx$
20. $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$
21. $\int \frac{4x}{x^2 + 4}\,dx$
22. $\int \frac{3}{4x^2 + 4}\,dx$
23. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$
24. $\int \left(2\cos x - \sqrt{e^{2x}}\right)dx$
25. $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$
26. $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\,dx$
27. $\int x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{5}{4}} - 4\right)dx$
28. $\int x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{4}{3}} - 3\right)dx$

في التمرينين 29 و 30، أوجد المشتقة.

29. $\frac{d}{dx}\ln|\sec x + \tan x|$
30. $\frac{d}{dx}\ln|\sin x - 2|$

في التمارين 34–31، يمكن تحديد إحدى الدالتين الاصليتين باستخدام صيغ الجبر الأساسية والدوال الأصلية التي عرضناها. اذكر الطريقة لإيجاد الدالة الأصلية لكل تمرين وتسمية التعبير الآخر "N/A".

31. (a) $\int \sqrt{x^3 + 4}\,dx$ (b) $\int \left(\sqrt{x^3} + 4\right)dx$
32. (a) $\int \frac{3x^2 - 4}{x^2}\,dx$ (b) $\int \frac{x^2}{3x^2 - 4}\,dx$

33. (a) $\int 2\sec x\,dx$ (b) $\int \sec^2 x\,dx$

34. (a) $\int \left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx$ (b) $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

في التمارين 40–35، أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة.

35. $f'(x) = 3e^x + x, f(0) = 4$

36. $f'(x) = 4\cos x, f(0) = 3$

37. $f''(x) = 12x^2 + 2e^x, f'(0) = 2, f(0) = 3$

38. $f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, f'(0) = -3, f(0) = 2$

39. $f''(t) = 2 + 2t, f(0) = 2, f(3) = 2$

40. $f''(t) = 4 + 6t, f(1) = 3, f(-1) = -2$

في التمارين 44–41، أوجد كل الدوال التي تحقق الشروط المعطاة.

41. $f''(x) = 3\sin x + 4x^2$ 42. $f''(x) = \sqrt{x} - 2\cos x$

43. $f'''(x) = 4 - 2/x^3$ 44. $f'''(x) = \sin x - e^x$

.45 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

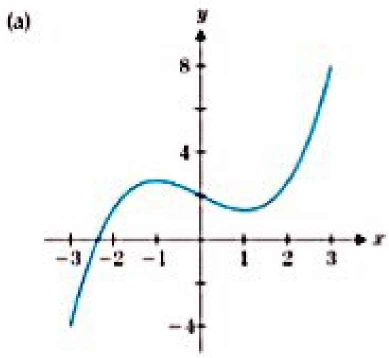
.46 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

.47 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = 3\sin t + 1$. والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

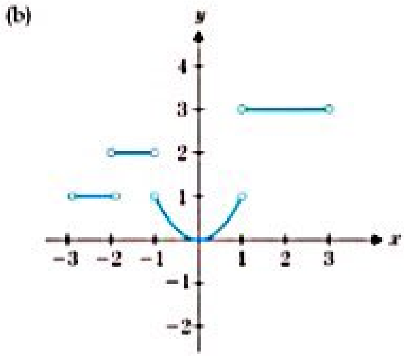
.48 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$. والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

.49 ارسم التمثيل البياني لدالتين $f(x)$ مقابلتين للتمثيل البياني الموضح لـ $y = f'(x)$.

(a)



(b)



.50 كرر التمرين 49 إذا كان التمثيل البياني المعطى يخص $f''(x)$.

.51 أوجد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة (1, 2) على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ ، وميل المماس عند (1, 2) هو 3 و $f''(x) = x - 1$.

.52 أوجد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة (-1, 1) على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$، وميل المماس عند (-1, 1) هو 2 و $f''(x) = 6x + 4$.

في التمارين 58–53، أوجد دالة أصلية إذا عكست قاعدة السلسلة أو قاعدة ناتج الضرب أو قاعدة ناتج القسمة.

53. $\int 2x\cos x^2\,dx$ 54. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

55. $\int (x\sin 2x + x^2\cos 2x)\,dx$ 56. $\int \frac{2xe^{3x} - 3x^2e^{3x}}{e^{6x}}\,dx$

57. $\int \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}\,dx$

58. $\int \left(2\sqrt{x}\cos x + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\right)dx$

.59 في المثال 1.11، استخدم حاسبة أو CAS الخاصة بك لإيجاد قيمة دالتين أصليتين في الجزأين (b) و (f) . وتحقق من صحتهما بحساب المشتقات.

.60 استخدم حاسبة أو CAS الخاصة بك وحاول أن تجد دالة أصلية لكل من المسائل ضمن التمارين 34-31 التي سميتها N/A. وتحقق من أن الدالة الأصلية صحيحة بحساب المشتقات، حيثما أمكن ذلك.

.61 استخدم حاسبة أو CAS لإيجاد دالة أصلية، ثم تحقق من الإجابة بحساب المشتقة.

(a) $\int x^2e^{-x^3}\,dx$ (b) $\int \frac{1}{x^2-x}\,dx$ (c) $\int \csc x\,dx$

.62 استخدم حاسبة أو CAS لإيجاد دالة أصلية، ثم تحقق من الإجابة بحساب المشتقة.

(a) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$ (b) $\int 3x\sin 2x\,dx$ (c) $\int \ln x\,dx$

.63 أوضح أن $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1}x + c$ و $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sin^{-1}x + c$، واشرح لم لا يشير ذلك ضمنيًا إلى أن $\cos^{-1}x = -\sin^{-1}x$. وأوجد معادلة تربط بين $\cos^{-1}x$ و $\sin^{-1}x$.

.64 اشتق الصيغتين $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ و $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + c$.

65. اشتق الصيغتين $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$ و $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$.

66. لأجل الدالة الأصلية $\int \frac{1}{kx}\,dx$. (a) حلل إلى عوامل باستثناء k ثم استخدم صيغة أساسية (b) وأعد كتابة المسألة في الصورة $\frac{1}{k}\int \frac{k}{kx}$ واستخدم الصيغة (1.4). ناقش الفرق بين الدالتين الأصليتين (a) و (b) واشرح لم يعتبر كلتاهما صحيحتين.

التطبيقات

67. على فرض أن سيارة يمكن أن تتسارع من 30 km/h إلى 50 km/h في 4 ثوان. بافتراض أن التسارع ثابت. أوجد تسارع (بالكيلومتر لكل ثانية مربعة) السيارة. وأوجد المسافة المجتازة بالسيارة خلال 4 ثوان.

68. على فرض أن سيارة يمكن أن تتوقف من سرعة 60 km/h في 3 ثوان. بافتراض أن التسارع ثابت (سالب). أوجد تسارع (بالكيلومتر لكل ثانية مربعة) السيارة. وأوجد المسافة المجتازة بالسيارة خلال 3 ثوان (أي. مسافة التوقف).

69. يبين الجدول أدناه السرعة المتجهة لجسم عند هبوطه في أزمنة مختلفة. لكل فترة زمنية. قدر مسافة الهبوط والتسارع.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$v(t)$ (m/s)	−4.0	−19.8	−31.9	−37.7	−39.5

70. يبين الجدول أدناه السرعة المتجهة لجسم يهبط في أزمنة مختلفة. لكل فترة زمنية. قدر مسافة الهبوط والتسارع.

t (s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0
$v(t)$ (m/s)	0.0	−9.8	−18.6	−24.9	−28.5

71. يبين الجدول أدناه تسارع سيارة تتحرك في خط مستقيم. إذا كانت السيارة تتحرك بمعدل 21 m/s في الزمن $t = 0$. قدر السرعة والمسافة المجتازة في كل فترة زمنية.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$a(t)$ (m/s^2)	−1.3	0.7	0.2	−1.2	0.5

72. يبين الجدول أدناه تسارع سيارة تتحرك في خط مستقيم. إذا كانت السيارة تتحرك بمعدل 20 m/s في الزمن $t = 0$. قدر السرعة والمسافة المتجهة المجتازة في كل فترة زمنية.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$a(t)$ (m/s^2)	0.6	−2.2	−4.5	−1.2	−0.3

تمارين استكشافية

1. احسب مشتقة كل من $e^{\sin x}$ و e^{x^2} علما بهاتين المشتقتين. أوجد قيمتي التكاملين غير المحدودين $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$ و $\int 2x\,e^{x^2}dx$. بعد ذلك. أوجد قيمة $\int x\,e^{x^2}\,dx$. (إرشاد: $\int x\,e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}dx$) على نحو مماثل. أوجد قيمة $\int x^2\,e^{x^3}\,dx$ بصفة عامة. أوجد قيمة

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx$$

بعد ذلك. أوجد قيمة $\int e^{x}\cos(e^{x})\,dx$. $\int 2x\cos(x^2)\,dx$ وبصفة أكثر عموما

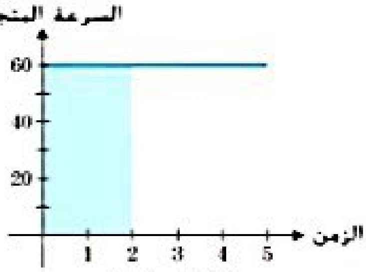
$$\int f'(x)\cos(f(x))\,dx$$

كما ذكرنا. لا توجد قاعدة عامة للدالة الأصلية لناتج ضرب. $\int f(x)g(x)\,dx$. عوضا عن ذلك. ثمة العديد من الحالات الخاصة التي توجد فيها القيمة. كل حالة على حدة.

2. إن **المعادلة التفاضلية** هي معادلة تشتمل على دالة مجهولة واحدة أو أكثر من مشتقاتها. وبصفة عامة. قد يكون من الصعب حل المعادلات التفاضلية. على سبيل المثال. قدمنا المعادلة التفاضلية $mv'(t) = -mg + kv^2(t)$ للحركة الرأسية لجسم يخضع لقوة الجاذبية ومقاومة الهواء. وبأخذ القيمتين الخاصتين لـ m و k . نأخذ المعادلة $v'(t) = -9.8 + 0.0003v^2(t)$. لحل هذه المسألة. عليك إيجاد دالة تكون مشتقتها تساوي −9.8 زائد 0.0003 مضروبة في مربع الدالة. من الصعب إيجاد دالة تكون مشتقتها مكتوبة بدلالة $[v(t)]^2$ عندما تكون $v(t)$ هي بالتحديد ما تكون مجهولة. ولكن رغم ذلك يمكننا إنشاء تمثيل بياني للحل باستخدام ما يسمى **بمجال الاتجاه**. على فرض أننا نريد إنشاء حل يمر بالنقطة (0, −100). يناظر السرعة المتجهة الابتدائية لـ $v(0) = -100$ m/s . عند $t = 0$. حيث $v = -100$. نحن نعرف أن ميل الحل هو $v' = -9.8 + 0.0003(-100)^2 = -6.8$. بدءا من عند (0, −100) . ارسم قطعة مستقيمة قصيرة لها ميل −6.8 . ستتصل هذه القطعة المستقيمة بالنقطة (1, −106.8) إذا قمت بتمديدها بهذا القدر (ولكن اجعل القطعة المستقيمة لديك أقصر بكثير). عند $t = 1$ و $v = -106.8$. يكون ميل الحل هو $v' = -9.8 + 0.0003(-106.8)^2 \approx -6$. ارسم قطعة مستقيمة قصيرة لها ميل −6 بدءا من النقطة (1, −106.8) . تشير هذه القطعة المستقيمة إلى (2 , −112.8) . عند هذه النقطة. $v' = -9.8 + 0.0003(-112.8)^2 \approx -6$ ارسم قطعة مستقيمة قصيرة لها ميل −6 عند (2, −112.8) . هل ترى حلا بيانيا يبدأ في الظهور؟ هل الحل متزايد أم متناقص؟ هل التقعر لأعلى أم لأسفل؟ إذا كانت لحاسبة أو CAS الخاصة بك إمكانية عمل مجال اتجاه. فارسم مجال الاتجاه وحاول تصور الحلول بدءا من عند النقطة (0, −100) . (0, 0) و (0, −300) .

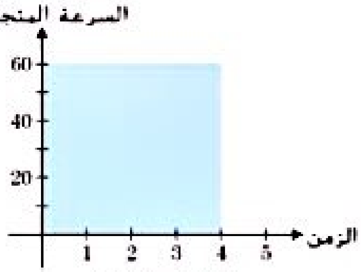
الدرس 7-2 المجموع والرمز سيجما

ناقشنا في الدرس 7.1 طريقة الحساب عكسيا من دالة السرعة المتجهة لجسم ما بصل عند الدالة المكانية للجسم. ليس مفاجئا أنه عند القيادة بمعدل ثابت 60 km/h، سوف تجتاز مسافة 120 كيلومترا في ساعتين أو 240 كيلومترا في 4 ساعات. عندما نعرض ذلك بيانيا، لاحظ أن المساحة تحت التمثيل البياني لدالة السرعة المتجهة (الثابت) $v(t) = 60$ من $t = 0$ إلى $t = 2$ هي 120، المسافة المتجهة المجتازة في هذه الفترة الزمنية. (انظر المساحة المظللة في الشكل 7.2a). على نحو مماثل، في الشكل 7.2b، إن المنطقة المظللة من $t = 0$ إلى $t = 4$ لها مساحة تساوي مسافة 240 كيلومترا.



الشكل 7.2a

$y = v(t)$ على الفترة $[0, 2]$

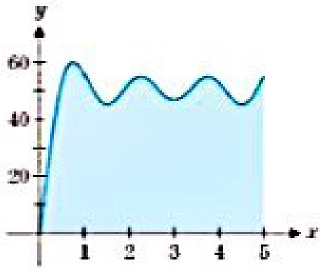


الشكل 7.2b

$y = v(t)$ على الفترة $[0, 4]$

بصفة عامة، تبين أن المسافة المجتازة خلال فترة زمنية معينة تساوي مساحة المنطقة المحدودة بين $y = v(t)$ ومحور t- على هذه الفترة. في حالة السرعة المتجهة الثابتة، لا توجد مفاجأة، لأنه لدينا

$$d = r \times t = \text{السرعة المتجهة} \times \text{الزمن}$$



الشكل 7.3

مساحة تحت منحنى

هدفنا في الدروس الآتية هو حساب المساحة تحت المنحنى لدالة غير ثابتة، مثل تلك الموضحة في الشكل 7.3. يوفر لنا العمل في هذا الدرس الخطوة الأولى بتقنية متقدمة لحساب مثل تلك المساحات. للإشارة إلى الاتجاه الذي سنسلكه، لاحظ أنه يمكننا تقريب المساحة في الشكل 7.3 بجمع مساحات المستطيلات الخمسة المبينة في الشكل 7.4:

$$A \approx 60 + 45 + 50 + 55 + 50 = 260 \text{ كيلومترا}$$

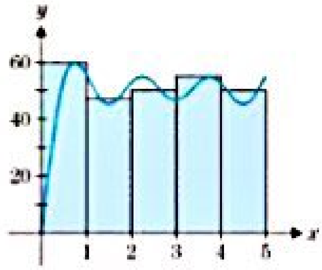
بالطبع، يعتبر هذا تقديرا غير دقيق للمساحة، ولكن ينبغي أن تلاحظ أنه يمكننا الحصول على تقدير أفضل بتقريب المساحات واستخدام مستطيلات أكثر وأصغر. بالتأكيد لا يكون صعبا جمع المساحات لخمسة مستطيلات، ولكن بالنسبة لـ 5000 مستطيل، فإنك ستريد بعض الوسائل لتبسيط العملية وإتمامها أوتوماتيكيا. ويتمثل موضوع هذا الدرس في التعامل مع هذا المجموع.

نبدأ بتقديم بعض الرموز. على فرض أنك تريد إيجاد ناتج جمع مربعات أول 20 عددا صحيحا موجبا. لاحظ أن

$$1 + 4 + 9 + \cdots + 400 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

حيث يكون لكل حد في المجموع الصورة i^2، لكل $i = 1, 2, 3, \ldots, 20$. للحد من كمية الكتابة، نستخدم الحرف الكبير الإغريقي سيجما، $\sum$، باعتباره رمزا للمجموع ونكتب المجموع في صورة **رمز المجموع** كما يأتي:

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$



الشكل 7.4

مساحة تقريبية

للإشارة إلى أننا نجمع حدودا معا لها الصيغة i^2، بدءا من $i = 1$ وانتهاء بـ $i = 20$. يسمى المتغير i **مؤشر المجموع**.

بصفة عامة، بالنسبة لأي أعداد حقيقية a_1، a_2، ...، a_n، يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

المثال 2.1 **استخدام رمز المجموع**

اكتب في صورة رمز المجموع، (a) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10}$
و (b) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3$.

الحل (a) لدينا مجموع الجذور التربيعية للأعداد الصحيحة من 1 إلى 10.

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10} = \sum_{i=1}^{10} \sqrt{i}$$

(b) وبالمثل، لدينا مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة من 3 إلى 45.

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3 = \sum_{i=3}^{45} i^3.$$

المثال 2.2 **رمز المجموع لمجموع يتضمن أعدادا صحيحة فردية**

اكتب في صورة رمز المجموع، مجموع أول 200 عدد صحيح موجب فردي.

الحل أولا، لاحظ أن $(2i)$ هو عدد زوجي لكل عدد صحيح i ولهذا، كل من $(2i-1)$ و $(2i+1)$ هو عدد فردي. إذا، لدينا

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 399 = \sum_{i=1}^{200}(2i-1)$$

بدلا من ذلك، يمكننا كتابة هذا في تعبير متكافئ $\sum_{i=0}^{199}(2i+1)$. (اكتب الحدود لرؤية سبب تكافئها).

ملحوظة 2.1

يعتبر مؤشر المجموع **متغيرا صوريا**، بما أنه يستخدم فحسب باعتباره عدادا لتتبع الحدود. ولا تعتمد قيمة المجموع على الحرف المستخدم باعتباره المؤشر. لهذا السبب، يمكنك استخدام الحرف الذي تريده باعتباره مؤشرا. وفقا للعادة، نحن كثيرا ما نستخدم i, j, k, m و n. ولكن أي مؤشر سيظل صالحا. على سبيل المثال،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

المثال 2.3 **حساب مجموع في صورة رمز المجموع**

اكتب كل الحدود واحسب مجموع (a) $\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$ و (b) $\sum_{i=2}^{6}\sin(2\pi i)$ و (c) $\sum_{i=4}^{10} 5$.

الحل (a) لدينا

$$\sum_{i=1}^{8}(2i+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$$

(b) $$\sum_{i=2}^{6}\sin(2\pi i) = \sin 4\pi + \sin 6\pi + \sin 8\pi + \sin 10\pi + \sin 12\pi = 0$$

(لاحظ أن المجموع بدأ عند $i = 2$). أخيرا، يكون لدينا

(c) $$\sum_{i=4}^{10} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$$

سنقدم العديد من الصيغ المختصرة لحساب المجموع في النتيجة الآتية.

النظرية 2.1

إذا كان n عددا صحيحا موجبا و c عددا ثابتا، فإن

(i) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (مجموع الثوابت)،

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموع أول n عدد صحيح موجب) و

(iii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (مجموع مربعات أول n عدد صحيح موجب).

ملاحظات تاريخية

كارل فريدريك جاوس (1777-1855)

هو عالم رياضيات ألماني يعتبر على نطاق واسع أعظم علماء الرياضيات على الإطلاق. كان جاوس عبقريا إذ إنه أثبت نظريات مهمة وهو في عامه الـ 14. وكان نابغة في كل جوانب الرياضيات تقريبا. وقد أثبت النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل وعددا هائلا من النتائج في نظرية الأعداد والفيزياء الرياضية. إضافة إلى ذلك، كان لجاوس دور فعال في بدء حقول بحث جديدة بما في ذلك تحليل المتغيرات المركبة والإحصاء وحساب تفاضل وتكامل المتجهات والهندسة غير الإقليدية. كان جاوس حقا «أمير الرياضيات».

البرهان

(i) $\sum_{i=1}^{n} c$ يرمز إلى جمع الثابت c إلى ذاته n مرات وبهذا، يكون المجموع ببساطة هو c مضروبا في n.

(ii) ينسب البرهان التالي الأبرع إلى كارل فريدريك جاوس وقتما كان يبلغ من العمر 10 أعوام. (لمعرفة المزيد عن جاوس، انظر إلى الملاحظة التاريخية في الهامش). لاحظ أولا أن

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n}_{n \text{ حدود}} \tag{2.1}$$

بما أنه لا يهم الترتيب الذي نجمع فيه الحدود، فنحن نجمع الحدود في (2.1) بترتيب عكسي للحصول على

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1}_{\text{الحدود } n \text{ نفسها (بطريقة عكسية)}} \tag{2.2}$$

عندما نجمع المعادلتين (2.1) و(2.2) حد مع حد، نحصل على

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} i &= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-1+2)+(n+1) \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ حدود}} \quad \text{جمع كل حد داخل الأقواس.} \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

بما أن $(n+1)$ يظهر n مرات في المجموع. عند قسمة كلا الطرفين على 2، نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

كما هو مطلوب. يتطلب برهان (iii) برهانا أكثر تعقيدا باستخدام الاستقراء الرياضي ونرجئه إلى نهاية هذا الدرس. ■

لدينا أيضا القاعدة العامة الآتية لتفكيك المجموع. إن البرهان مباشر ومتروك على سبيل التمرين.

النظرية 2.2

لأي عددين ثابتين c و d ،

$$\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

باستخدام النظريتين 2.1 و2.2، يمكننا الآن حساب عدد من المجاميع البسيطة بسهولة. لاحظ أننا لا نواجه صعوبة أكبر عند جمع 800 حد مقارنة بجمع 8 حدود.

المثال 2.4 **حساب المجموع باستخدام النظريتين 2.1 و 2.2**

احسب $\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$ (a) و $\sum_{i=1}^{800}(2i+1)$ (b).

الحل (a) من النظريتين 2.1 و 2.2، يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{8}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{i=1}^{8} 1 = 2\frac{8(9)}{2} + (1)(8) = 72 + 8 = 80$$

(b) وبالمثل

$$\sum_{i=1}^{800}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{800} i + \sum_{i=1}^{800} 1 = 2\frac{800(801)}{2} + (1)(800)$$

$$= 640{,}800 + 800 = 641{,}600$$

المثال 2.5 **حساب المجموع باستخدام النظريتين 2.1 و 2.2**

احسب $\sum_{i=1}^{20} i^2$ (a) و $\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{i}{20}\right)^2$ (b).

الحل (a) من النظريتين 2.1 و 2.2، يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870.$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{i}{20}\right)^2 = \frac{1}{20^2}\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{400}\,\frac{20(21)(41)}{6} = \frac{1}{400}2870 = 7.175$$

في بداية هذا الدرس، قربنا المسافة بجمع عدة قيم لدالة السرعة المتجهة. وسنطور أكثر من منظورنا لهذا المجموع في الدرس 7.3 بما يسمح لنا بحساب المساحات بدقة. مع ذلك، اهتمامنا الحالي في المجموع هو استخدامه لجمع عدد من قيم الدالة، كما هو موضح في المثالين 2.6 و2.7.

المثال 2.6 **حساب مجموع قيم دالة**

أوجد مجموع قيم $f(x) = x^2 + 3$ للقيم عند: $x = 0.1$ ، $x = 0.2$ ، ... ، $x = 1.0$.

الحل تفيد أولا الصياغة في صورة رمز المجموع، بحيث يمكننا استخدام القواعد التي تطرقنا إليها في هذا الدرس. الحدود المطلوب جمعها هي $a_1 = f(0.1) = 0.1^2 + 3$ ، $a_2 = f(0.2) = 0.2^2 + 3$ وهكذا. لاحظ أنه بما أن كلا من قيم x- هو مضاعف لـ 0.1، يمكننا كتابة x في الصورة $0.1i$، لكل $i = 1, 2, \ldots, 10$. وعموما، لدينا

$$a_i = f(0.1i) = (0.1i)^2 + 3, \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, 10$$

من النظريتين 2.1 (i) و (iii) . لدينا

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} f(0.1i) = \sum_{i=1}^{10}[(0.1i)^2 + 3] = 0.1^2\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} 3$$

$$= 0.01\frac{10(11)(21)}{6} + (3)(10) = 3.85 + 30 = 33.85.$$

المثال 2.7 **مجموع قيم دالة عند مسافة متساوية للمتغير x**

أوجد مجموع قيم $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ للقيم عند $x = 1.05$ و $x = 1.15$ و $x = 1.25$ و ... و $x = 2.95$.

الحل سنحتاج إلى التفكير مليا بشأن المتغير x. إن المسافة بين قيم x- المتتالية هي 0.1. ويوجد 20 قيمة متتالية. (تأكد من عدها بنفسك). لاحظ أنه يمكننا كتابة المتغير x بالصيغة $0.95 + 0.1i$، لكل $i = 1, 2, \ldots, 20$.

ويكون لدينا الآن

$$\sum_{i=1}^{20} f(0.95+0.1i) = \sum_{i=1}^{20}[3(0.95+0.1i)^2 - 4(0.95+0.1i)+2]$$

$$= \sum_{i=1}^{20}(0.03i^2 + 0.17i + 0.9075) \quad \text{فكك واضرب الحدود}$$

$$= 0.03\sum_{i=1}^{20} i^2 + 0.17\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 0.9075 \quad \text{من النظرية 2.2}$$

$$= 0.03\frac{20(21)(41)}{6} + 0.17\frac{20(21)}{2} + 0.9075(20) \quad \text{من النظرية 2.1 (i) و (ii) و (iii).}$$

$$= 139.95$$

مع الدروس الآتية، سنرى كيف يؤدي المجموع المماثل للمجموعتين الواردتين في المثالين 2.6 و2.7، دورا بالغ الأهمية. وننهي هذا الدرس بالنظر إلى مبدأ رياضي قوي.

مبدأ الاستقراء الرياضي

لأي عبارة تابعة لعدد صحيح موجب، n. نوضح أولا أن النتيجة صحيحة لقيمة محددة $n = n_0$. ثم نفترض أن النتيجة صحيحة لقيمة غير محددة $n = k \geq n_0$. (تسمى هذه **فرضية الاستقراء**). إذا كان بمكننا توضيح أنه يترتب على ذلك أن تكون العبارة صحيحة لكل $n = k + 1$.
فإذا سنكون أثبتنا أن النتيجة صحيحة لأي عدد صحيح موجب $n \geq n_0$. **فكر لم يجب أن يكون ذلك** صحيحا. (إرشاد: إذا كانت العبارة P_1 صحيحة وكون P_k صحيحة يشير ضمنيا إلى أن P_{k+1} صحيحة. فإذا كون P_1 صحيحة يشير ضمنيا إلى أن P_2 صحيحة، والذي بدوره يشير ضمنيا إلى أن P_3 صحيحة وهكذا).

يمكننا الآن استخدام الاستقراء الرياضي لإثبات الجزء الأخير من نظرية 2.1، التي تنص على أنه لأي عدد صحيح موجب n، $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

برهان النظرية 2.1 (iii)

لأجل $n = 1$، يكون لدينا

$$1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

كما هو مطلوب. إذا، العبارة صحيحة حيث $n = 1$. بعد ذلك، **على فرض أن**

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{فرضية الاستقراء.} \quad (2.3)$$

لأي عدد صحيح ما $k \geq 1$.

في هذه الحالة، يخبرنا افتراض الاستقراء بأنه حيث $n = k + 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^2 \quad \text{جزء الحد الأخير}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{من 2.3}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$ اجمع الكسور

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$ العامل المشترك $(k+1)$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$ دمج الحدود

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$ تحليل التعبير التربيعي الى العوامل

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$ اعادة كتابة الحدود

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$ بما أن $n = k + 1$

كما هو مطلوب.

التمارين 7.2

تمارين كتابية

1. ذكرنا في هذا الدرس أن إحدى مزايا استخدام رمز المجموع هي تبسيط الحسابات. للمساعدة على فهم ذلك، اشرح بالكلمات ما الذي يعنيه $\sum_{i=1}^{40}(2i^2 - 4i + 11)$.
2. واستكمالا للتمرين 1. احسب مجموع $\sum_{i=1}^{40}(2i^2 - 4i + 11)$ ثم صف بالمفردات كيف قمت بذلك. واحرص على وصف الصيغ واستخدامك لها بالمفردات.

في التمرينين 1 و 2. حول إلى رمز المجموع.

1. $2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + \cdots + 2(14)^2$
2. $\sqrt{2-1} + \sqrt{3-1} + \sqrt{4-1} + \cdots + \sqrt{15-1}$

في التمرينين 3 و 4. إن الحسابات موصوفة بالمفردات. حول كلا منها إلى رمز المجموع ثم احسب المجموع.

3. (a) مجموع مربعات أول 50 عددا صحيحا موجبا. (b) مربع مجموع أول 50 عددا صحيحا موجبا.
4. (a) مجموع الجذور التربيعية لأول 10 أعداد صحيحة موجبة. (b) الجذر التربيعي لمجموع أول 10 أعداد صحيحة موجبة.

في التمارين 8–5. اكتب كل الحدود واحسب المجموع.

5. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$
6. $\sum_{i=3}^{7}(i^2 + i)$
7. $\sum_{i=6}^{10}(4i + 2)$
8. $\sum_{i=6}^{8}(i^2 + 2)$

في التمارين 18–9. استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع.

9. $\sum_{i=1}^{70}(3i - 1)$
10. $\sum_{i=1}^{45}(3i - 4)$
11. $\sum_{i=1}^{40}(4 - i^2)$
12. $\sum_{i=1}^{50}(8 - i)$
13. $\sum_{n=1}^{100}(n^2 - 3n + 2)$
14. $\sum_{n=1}^{140}(n^2 + 2n - 4)$
15. $\sum_{i=3}^{30}[(i-3)^2 + i - 3]$
16. $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$
17. $\sum_{k=3}^{n}(k^2 - 3)$
18. $\sum_{k=0}^{n}(k^2 + 5)$

في التمارين 22–19. احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاة.

19. $f(x) = x^2 + 4x;\ x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0;\ \Delta x = 0.2;\ n = 5$
20. $f(x) = 3x + 5;\ x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0;\ \Delta x = 0.4;\ n = 5$
21. $f(x) = 4x^2 - 2;\ x = 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, \ldots, 3.0;$ $\Delta x = 0.1;\ n = 10$
22. $f(x) = x^3 + 4;\ x = 2.05, 2.15, 2.25, 2.35, \ldots, 2.95;$ $\Delta x = 0.1;\ n = 10$

في التمارين 26–23. احسب المجموع ونهاية كل مجموع عندما $n \to \infty$.

23. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

24. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

25. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

26. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

27. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

28. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

في التمارين 32–29. استخدم الصيغ في التمرينين 27 و 28 لحساب المجموع.

29. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 3i + 1)$

30. $\sum_{i=1}^{20} (i^3 + 2i)$

31. $\sum_{i=1}^{100} (i^5 - 2i^2)$

32. $\sum_{i=1}^{100} (2i^5 + 2i + 1)$

33. أثبت النظرية 2.2.

34. استخدم الاستقراء لاشتقاق صيغة المتسلسلة الهندسية $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r}$ لأي عددين ثابتين a و $r \neq 1$.

في التمرينين 35 و 36 . استخدم نتيجة التمرين 34 لإيجاد قيمة المجموع ونهاية المجموع عندما $n \to \infty$.

35. $\sum_{i=1}^{n} e^{(6i)/n} \frac{6}{n}$

36. $\sum_{i=1}^{n} e^{(2i)/n} \frac{2}{n}$

التطبيقات

37. على فرض أن سيارة لها سرعة متجهة 50 km/h لمدة ساعتين، وسرعة متجهة 60 km/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 70 km/h لمدة 30 دقيقة وسرعة متجهة 60 km/h لمدة 3 ساعات. أوجد المسافة المجتازة.

38. على فرض أن سيارة لها سرعة متجهة 50 km/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 40 km/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 60 km/h لمدة 30 دقيقة وسرعة متجهة 55 km/h لمدة 3 ساعات. أوجد المسافة المجتازة.

39. يبين الجدول السرعة المتجهة لقذيفة في أزمنة مختلفة. قدر المسافة المجتازة.

الزمن (s)	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
السرعة المتجهة (m/s)	36	35	34	33	32	31	30	29	28

40. يبين الجدول السرعة المتجهة (في الاتجاه الهابط) لجسم يسقط. قدر مسافة السقوط.

الزمن (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
السرعة المتجهة (m/s)	10	14.9	19.8	24.7	29.6	34.5	39.4	44.3	49.2

تمارين استكشافية

1. على فرض أن السرعة المتجهة لسيارة تعطى بواسطة $v(t) = 3\sqrt{t} + 30$ km/h في الزمن t ساعات $(0 \leq t \leq 4)$. سنحاول تحديد المسافة المجتازة في الـ4 ساعات. السرعة المتجهة في الزمن $t = 0$ هي $v(0) = 3\sqrt{0} + 30 = 30$ km/h والسرعة المتجهة في الزمن $t = 1$ هي $v(1) = 3\sqrt{1} + 30 = 33$ km/h. بما أن متوسط هاتين السرعتين المتجهتين هو 31.5 km/h، فإنه يمكننا تقدير أن السيارة اجتازت 31.5 كيلومترا في الساعة الأولى. اشرح بدقة لماذا ليس من الضروري أن يكون ذلك صحيحا. بما أن $v(1) = 33$ km/h و $v(2) = 3\sqrt{2} + 30 \approx 34$ km/h، نحن نقدر أن السيارة اجتازت 33.5 كيلومترا في الساعة الثانية. باستخدام $v(3) \approx 35$ km/h و $v(4) = 36$ km/h، أوجد تقديرات مماثلة للمسافة المجتازة في الساعتين الثالثة والرابعة ثم قدر المسافة المجتازة الإجمالية. لتحسين هذا التقدير، يمكننا إيجاد تقدير للمسافة المجتازة كل نصف ساعة. سيأخذ التقدير الأول $v(0) = 30$ km/h و $v(0.5) \approx 32.1$ km/h ويقدر مسافة 15.525 كيلومترا. قدر السرعة المتوجهة المتوسطة ثم المسافة المجتازة لـ 7 أنصاف ساعات المتبقية وقدر المسافة المتجهة الإجمالية. وبتقدير السرعة المتجهة المتوسطة كل ربع ساعة، أوجد ثالث تقدير للمسافة المجتازة الإجمالية. استنادا إلى هذه التقديرات الثلاثة، خمن نهاية هذه التقريبات مع افتراض أن الفترة الزمنية تتجه إلى الصفر.

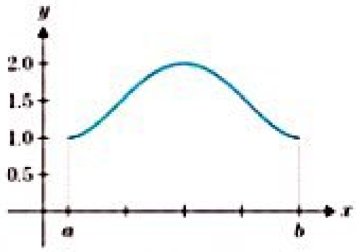
2. سنستكشف في هذا التمرين مفهوما عاما لمجموع نهائي يسمى **المتسلسلة اللانهائية**. على فرض أن كرة ترتد لها **معامل ارتداد** يساوي 0.6. هذا يعني أنه إذا بلغت الكرة الأرض بسرعة متجهة v m/s، فسترتد بالسرعة المتجهة $0.6v$. مع تجاهل مقاومة الهواء، إذا ضربت كرة بسرعة متجهة v m/s، ستظل في الهواء لمدة $v/16$ ثانية قبل أن تصل إلى الأرض. على فرض أن كرة لها معامل ارتداد 0.6 تم ضربها بسرعة متجهة ابتدائية 60 m/s اشرح لماذا الزمن الإجمالي في الهواء يعطى بـ $60/16 + (0.6)(60)/16 + (0.6)(0.6)(60)/16 + \cdots$. قد يبدو أن الكرة ستستمر في الارتداد إلى ما لا نهاية. لرؤية خلاف ذلك، استخدم نتيجة التمرين 40 لإيجاد النهاية التي يقترب منها هذا المجموع. إن النهاية هي عدد الثواني التي تستمر الكرة في الارتداد خلالها.

3. جملة الرياضيات الآتية خاطئة بشكل واضح: لأي مجموعة معطاة من الأعداد n، تكون الأعداد كلها متساوية. أوجد الخطأ في محاولة استخدام الاستقراء الرياضي في ما يلي. على فرض أن $n = 1$. العدد الواحد يساوي نفسه. على فرض أنه حيث $n = k$، أي أعداد k تكون متساوية. على فرض أن S هو أي مجموعة من الأعداد $k + 1$، $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. استنادا إلى فرضية الاستقراء، تكون أول أعداد k متساوية، $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ وتكون آخر أعداد k متساوية، $a_2 = a_3 = \cdots = a_{k+1}$. إذا جمعنا بين هذه النتائج، تكون كل الأعداد $k+1$ متساوية، $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ كما هو مطلوب.

الدرس 7-3 المساحة

في هذا الدرس، سوف نطور طريقة لإيجاد قيمة المساحة تحت المنحنى لـ $y = f(x)$ وفوق المحور x على الفترة $a \le x \le b$ كنت معتادا في التعامل مع قوانين إيجاد قيمة مساحة المستطيل والدائرة والمثلث. ولكن، كيف ستجد قيمة مساحة منطقة ليست مستطيلا أو دائرة أو مثلثا؟

سنحتاج إلى وصف أكثر تعميما للمساحة يمكننا استخدامه لإيجاد مساحة منطقة، ثنائية الأبعاد، يمكن تصورها تقريبا. اتضح أن هذه العملية (التي نعمم فيها رمز التكامل المحدود في الدرس 7.4) هي أحد الأفكار الرئيسة في حساب التفاضل والتكامل، ولها تطبيقات على مدى واسع ومتنوع من المجالات.



الشكل 7.5

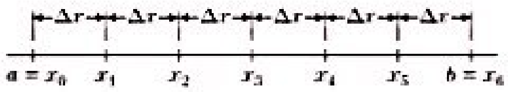
المساحة تحت منحنى $y = f(x)$

على فرض أولا أن $f(x) \ge 0$ و f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$. كما هو موضح في الشكل 7.5. نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية. ويسمى ذلك **تجزئة منتظمة** لـ $[a, b]$. إذا، يكون عرض كل فترة جزئية في هذه التجزئة $\frac{b-a}{n}$ ، والذي نرمز إليه بـ Δx (يعني تغيرا صغيرا في x). يرمز للنقاط في التجزئة بـ $x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا، بصورة عامة،

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{لكل}$$

انظر الشكل 7.6 لمراجعة الرسم التوضيحي لتجزئة منتظمة في الحالة $n = 6$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ (حيث $i = 1, 2, \ldots, n$). أنشئ مستطيلا طوله $f(x_i)$ (قيمة الدالة عند نقطة النهاية اليمنى للفترة الجزئية)، كما هو موضح في الشكل 7.7 في الحالة $n = 4$. ينبغي أن يكون واضحا من الشكل 7.7 أن المساحة تحت المنحنى A هي تقريبا مجموع مساحات المستطيلات الأربعة،

$$A \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x = A_4$$



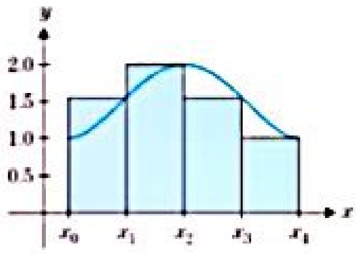
الشكل 7.6

تجزئة منتظمة لـ $[a, b]$

على الأخص، لاحظ أنه بالرغم من أن اثنين من هذه المستطيلات يحدان مساحة أكبر من تلك الواقعة تحت المنحنى ويحدد المستطيلان الآخران مساحة أصغر، فإنه بالإجمال، يوفر مجموع مساحات تلك المستطيلات الأربعة قيمة تقريبية للمساحة الإجمالية الواقعة تحت المنحنى. وعموما، إذا أنشأت n مستطيلا متساويا في العرض على الفترة $[a, b]$ ، فيكون لدينا

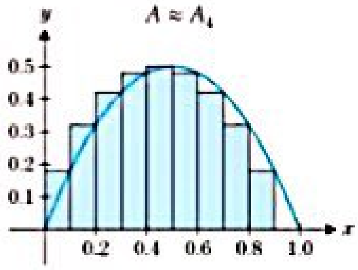
$$A \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A_n. \qquad (3.1)$$



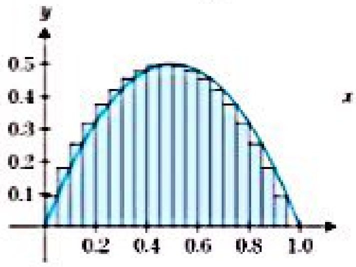
الشكل 7.7

$A \approx A_4$



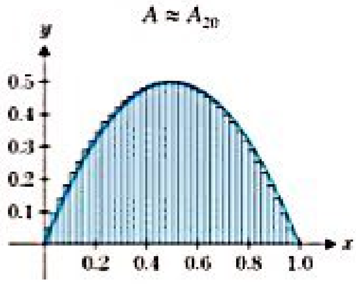
الشكل 7.8

$A \approx A_{10}$



الشكل 7.9

$A \approx A_{20}$



الشكل 7.10

$A \approx A_{40}$

المثال 3.1 تقريب مساحة باستخدام المستطيلات

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$ باستخدام (a) 10 مستطيلات و(b) 20 مستطيلا.

الحل (a) نجزىء الفترة إلى 10 فترات متساوية، يكون طول كل منها $\Delta x = 0.1$ ، أي تحديدا $[0, 0.1]$، $[0.1, 0.2]$ ، ... ، $[0.9, 1.0]$. رسمنا في الشكل 7.8، مستطيلات لها الارتفاع $f(x_i)$ على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ حيث $i = 1, 2, \ldots, 10$. لاحظ أن مجموع مساحات الـ 10 مستطيلات يوضح قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى، أي إن،

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= [f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(1.0)](0.1)$$

$$= (0.18 + 0.32 + 0.42 + 0.48 + 0.5 + 0.48 + 0.42 + 0.32 + 0.18 + 0)(0.1)$$

$$= 0.33$$

(b) نجزىء الفترة $[0, 1]$ إلى 20 فترة متساوية، يكون طول كل منها:

$$\Delta x = \frac{1 - 0}{20} = \frac{1}{20} = 0.05$$

لدينا إذا، $x_0 = 0, x_1 = 0 + \Delta x = 0.05$ ، $x_2 = x_1 + \Delta x = 2(0.05)$ وهكذا، أي إن $x_i = (0.05)i$ ، حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, 20$. من (3.1)، تكون المساحة تقريبا

$$A \approx A_{20} = \sum_{i=1}^{20} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{20} (2x_i - 2x_i^2)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{20} 2[0.05i - (0.05i)^2](0.05) = 0.3325$$

علما بأنه تم الإبقاء على تفاصيل الحساب للقارئ، يوضح الشكل 7.9 قيمة تقريبية للمساحة باستخدام 20 مستطيلا. وفي الشكل 7.10، نرى 40 مستطيلا.

استنادا إلى الأشكال 7.10-7.8، عليك أن تتوقع أنه كلما كبرت n، ستكون A_n قيمة تقريبية أفضل للمساحة A. إن العيب الواضح في هذه الفكرة هو فترة الزمن المستغرق لحساب A_n ، عندما يكون n كبيرا. مع ذلك، يستطيع الحاسوب CAS أو الحاسبة القابلة للبرمجة الخاصة بك إيجاد قيمة هذا المجموع بسهولة. يشير الجدول الموضح في الهامش إلى القيم التقريبية A_n لبعض قيم n.

لاحظ أنه كلما كبرت n، فإن قيمة A_n تقترب من $\frac{1}{3}$. ■

n	A_n
10	0.33
20	0.3325
30	0.332963
40	0.333125
50	0.3332
60	0.333241
70	0.333265
80	0.333281
90	0.333292
100	0.3333

يقدم المثال 3.1 دليلا قويا على أنه كلما كبر عدد المستطيلات المستخدمة، تصبح القيمة التقريبية للمساحة أفضل. بعد التفكير في ذلك، نصل إلى التعريف التالي لمساحة منطقة تحت منحنى.

التعريف 3.1

لكل دالة f معرفة على الفترة $[a, b]$. إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. فإن المساحة A تحت منحنى $y = f(x)$ على $[a, b]$ تعطى بالصيغة:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x \qquad (3.2)$$

في المثال 3.2، نستخدم النهاية كما هي معرفة في (3.2) لإيجاد المساحة الدقيقة تحت المنحنى من المثال 3.1.

المثال 3.2 إيجاد قيمة المساحة بدقة

أوجد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$.

الحل باستخدام n فترة جزئية متساوية الطول، يكون لدينا

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

وبهذا، $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$ ، $x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n}$ وهكذا. إذًا، $x_i = \frac{i}{n}$ ، حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. من (3.1)، تساوي المساحة تقريبًا

$$\begin{aligned}
A \approx A_n &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[2\frac{i}{n} - 2\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{من نظرية 2.1 (ii) و (iii)} \\
&= \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}
\end{aligned}$$

بما أنه لدينا صيغة لـ A_n ، لأي n، فإنه يمكننا إيجاد قيم متعددة بسهولة.

$$A_{200} = \frac{(201)(199)}{3(40,000)} = 0.333325$$

$$A_{500} = \frac{(501)(499)}{3(250,000)} = 0.333332$$

أخيرًا، يمكننا إيجاد النهاية لـ A_n. لدينا

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - 1/n^2}{3} = \frac{1}{3}$$

المساحة الدقيقة في الشكل 7.8 هي 1/3 ، كما كنا نقدر. ■

المثال 3.3 إيجاد قيمة المساحة تحت منحنى

أوجد قيمة المساحة تحت منحنى $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1, 3]$.

الحل نأخذ فترات جزئية متساوية:

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

و $x_0 = 1$. لذا،

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n},$$

$$x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$$

فيكون $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$ ، و $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

نجد من (3.1) أن

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + 1}\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 1}\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{2i}{n}}$$

n	A_n
10	3.50595
50	3.45942
100	3.45357
500	3.44889
1000	3.44830
5000	3.44783

ليس لدينا صيغ مثل تلك المتوفرة في النظرية 2.1 لتبسيط هذا المجموع الأخير (على عكس المجموع في المثال 3.2). خيارنا الوحيد هو إيجاد قيمة A_n لعدد من قيم n باستخدام الحاسوب أو حاسبة قابلة للبرمجة. إن الجدول الموضح في الهامش ينظم القيم التقريبية لـ A_n . على الرغم من أنه يتعذر علينا إيجاد قيمة المساحة بدقة (حتى الآن)، فإنه عليك إدراك أن المساحة تساوي 3.4478 تقريبًا. ■

نتوقف الآن لتعريف بعض المواضيع في الرياضيات التي تعلمناها.

ملاحظات تاريخية

بيرنارد ريمان (1826–1866)

هو عالم رياضيات ألماني توصل إلى مفاهيم عامة مهمة لتعريف التكامل. توفي ريمان في سن صغير بدون أن تنشر له العديد من الدراسات، ولكن كل دراسة منها كانت بالغة الأثر. وكان عمله على التكامل مجرد جزء صغير من دراساته حول متسلسلة فورييه. وألح جاوس عليه لتقديم محاضرة عن الهندسة. فوضع ريمان الهندسة الخاصة به التي وفرت صورة أشمل للهندسة الإقليدية وغير الإقليدية. وكانت تشكل أعمال ريمان، في الغالب، روابط ثاقبة وغير متوقعة بين التحليل والهندسة.

التعريف 3.2

لتكن $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ ، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.
لكل i ، اختر النقاط $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ، حيث يكون c_i أي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. (وهذه النقاط تسمى نقاط القيم). إن **مجموع ريمان** لهذه التجزئة ومجموعة نقاط القيم، هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

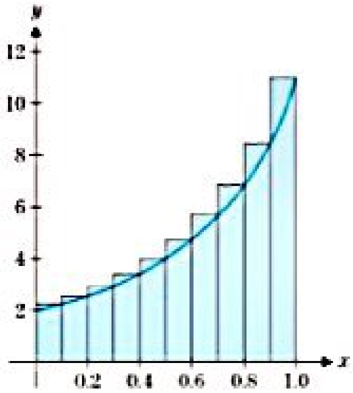
حتى الآن، رأينا أنه لدالة متصلة غير سالبة f، تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ هي نهاية مجاميع ريمان:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (3.3)$$

حيث $c_i = x_i$ ، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. على نحو يدعو للدهشة، نجد أنه لأي دالة متصلة f، تكون النهاية في (3.3) هي نفسها لأي اختيار من نقاط لكل $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (مع أن البرهان يتخطى مستوى هذا المقرر). في المثالين 3.2 و 3.3، استخدمنا نقاط القيم $c_i = x_i$. لكل i (نقطة النهاية اليمنى لكل فترة جزئية). يكون هذا عادة أكثر اختيار ملاءمة عند الحل اليدوي، ولكن لا ينتج عنه عامة أدق تقريب لقيمة معطاة من n.

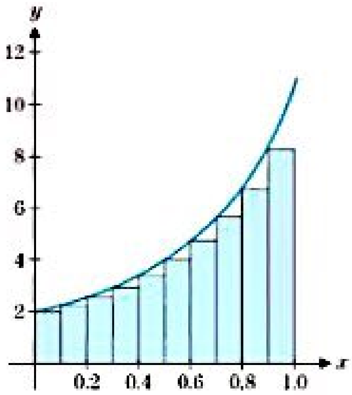
ملحوظة 3.1

في أغلب الأحيان، لا يمكننا إيجاد قيمة نهاية مجموع ريمان المشار إليها في (3.3) بدقة (على الأقل ليس بشكل مباشر). ومع ذلك، يمكننا دائما الحصول على تقريب إلى المساحة بواسطة إيجاد قيمة مجاميع ريمان لقيم كبيرة من n . الاختيارات الأكثر شيوعا، ووضوحا، لنقاط القيم c_i هي x_i (نقطة النهاية اليمنى)، و x_{i-1} (نقطة النهاية اليسرى) و $\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ (نقطة المنتصف). انظر الأشكال 7.11a و 7.11b و 7.11c لتقريبات نقطة النهاية اليمنى ونقطة النهاية اليسرى ونقطة المنتصف، على التوالي، لـ $f(x) = 9x^2 + 2$، على الفترة $[0, 1]$ ، باستخدام $n = 10$. ينبغي أن تلاحظ أنه في هذه الحالة (كما هو الحال مع أي دالة متزايدة)، تعطي المستطيلات المناظرة لقيم نقطة النهاية اليمنى (الشكل 7.11a) مساحة كبيرة على كل فترة جزئية، بينما تعطي المستطيلات المناظرة لقيم نقطة النهاية اليسرى (الشكل 7.11b) مساحة صغيرة. ونترك لك ملاحظة أن العكس صحيح بالنسبة للدوال المتناقصة.



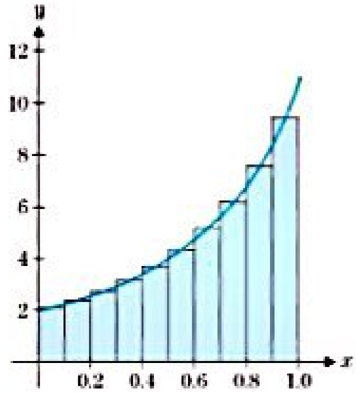
الشكل 7.11a

$c_i = x_i$



الشكل 7.11b

$c_i = x_{i-1}$



الشكل 7.11c

$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

المثال 3.4 **إيجاد قيمة مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة**

إيجاد قيمة مجموع ريمان لـ $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1, 3]$، حيث $n = 10, 50, 100, 500, 1000$ و 5000 ، باستخدام نقطة النهاية اليسرى، ونقطة النهاية اليمنى، ونقطة المنتصف لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم.

الحل الأعداد المبينة في الجدول أدناه هي واردة من برنامج لحاسبة قابلة للبرمجة. نقترح أن تختبر برنامجك الخاص أو برنامج مثبت في حاسوب CAS مع تلك القيم (مع التقريب إلى أقرب ستة أرقام).

n	نقطة النهاية اليمنى	نقطة المنتصف	نقطة النهاية اليسرى
10	3.50595	3.44789	3.38879
50	3.45942	3.44772	3.43599
100	3.45357	3.44772	3.44185
500	3.44889	3.44772	3.44654
1000	3.44830	3.44772	3.44713
5000	3.44783	3.44772	3.44760

توجد العديد من الاستنتاجات المستمدة من تلك الأعداد. أولا، تعتبر دليلا جيدا على أن مجموعات الأعداد الثلاث متقاربة عند نهاية مشتركة تساوي 3.4477 تقريبا. ثانيا، على الرغم من أن النهايات هي نفسها، فإن كل قاعدة مختلفة تقترب من النهاية بمعدلات مختلفة. ينبغي أن تجرب إيجاد قيمتي مجموعتي نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى للقيم الأكبر من n، لرؤية أنهما يقتربان في النهاية من 3.44772، كذلك. ■

ملاحظات اليوم في الرياضيات

لويس دي برانجيه (–1932)

هو عالم رياضيات فرنسي أثبت تخمين بيرباخ في عام 1985. ولحل هذه المسألة الشهيرة البالغة من العمر 70 عاما، أثبت دي برانجيه فعلا نتيجة ذات صلة ولكن أقوى بكثير. في 2004، نشر دي برانجيه على الإنترنت ما باعتقاده هو برهان لمسألة شهيرة أخرى، فرضية ريمان. لاستحقاق جائزة قدرها مليون دولار ستقدم لأول برهان على فرضية ريمان، ينبغي أن يتحقق علماء رياضيات خبراء من هذه النتيجة. ومع ذلك، صرح دي برانجيه قائلا: "أنا استمتع بكم النشوة من أنه لدي نظرية بين يدي وليس معي نظرية باعتباري من القراء النهائيين. لن أرغب في إنهاء هذه الحالة مقابل مليون درهم".

يكون مجموع ريمان الذي يستخدم قيم نقطة المنتصف عادة أدق من قاعدتي نقطة النهاية اليسرى أو نقطة النهاية اليمنى لـ n معطاة. إذا كنت تفكر في المستطيلات المناظرة، فقد تتمكن من تفسير السبب. أخيرا، لاحظ أن مجموعي نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى في المثال 3.4 يقتربان من النهاية ولكن من اتجاهين متقابلين وبالمعدل نفسه تقريبا.

ما بعد الصيغ

وضعنا الآن أسلوبا لاستخدام النهايات بغرض حساب مساحات معينة بدقة. يجعل ذلك الاشتقاق من ميل المماس في تماثل مع نهاية ميول المستقيمات القاطعة. تذكر أن هذه النهاية أصبحت تعرف بالاشتقاق وتبين أن لها تطبيقات تفوق ميل المماس إلى حد بعيد. على نحو مماثل، ترشدنا مجاميع ريمان إلى منطقة رئيسة ثانية من حساب التفاضل والتكامل، تسمى التكامل. استنادا إلى تجربتك مع الاشتقاق، هل تتوقع من هذه النهاية الجديدة أن تحل مسائل تفوق مساحة المنطقة؟ هل تتوقع أنه ستكون هناك قواعد موضوعة لتبسيط الحسابات؟

تمارين 7.3

تمارين كتابية

1. للعديد من الدوال، تكون نهاية مجاميع ريمان مستقلة عن اختيار نقاط القيم. وكلما كبر عدد نقاط التجزئة، أصبحت المسافة بين نقاط النهاية أصغر. للدالة المتصلة $f(x)$، اشرح لماذا يتعين أن يكون الفرق بين قيم الدالة عند أي نقطتين في فترة جزئية معينة، أصغر.

2. ليست المستطيلات هي الأشكال الهندسية الأساسية الوحيدة التي لدينا صيغة مساحة لها. ناقش طريقة تقريب المساحة تحت قطع مكافئ باستخدام الدوائر أو المثلثات. أي شكل هندسي تعتقد أنه الأسهل في الاستخدام؟

في التمارين 4–1، نظم نقاط التقدير المناظرة لنقطة المنتصف لكل فترة جزئية وارسم الدوال ومستطيلات التقريب وأوجد قيمة مجموع ريمان.

1. $f(x) = x^2 + 1$, (a) $[0, 1]$, $n = 4$; (b) $[0, 2]$, $n = 4$
2. $f(x) = x^3 - 1$, (a) $[1, 2]$, $n = 4$; (b) $[1, 3]$, $n = 4$
3. $f(x) = \sin x$, (a) $[0, \pi]$, $n = 4$; (b) $[0, \pi]$, $n = 8$
4. $f(x) = 4 - x^2$, (a) $[-1, 1]$, $n = 4$; (b) $[-3, -1]$, $n = 4$

في التمارين 10–5، قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلا وقواعد القيم (a) نقطة النهاية اليسرى (b) نقطة المنتصف (c) نقطة النهاية اليمنى.

5. $y = x^2 + 1$ on $[0, 1]$, $n = 16$
6. $y = x^3 + 1$ on $[0, 2]$, $n = 16$
7. $y = \sqrt{x + 2}$ on $[1, 4]$, $n = 16$
8. $y = e^{-2x}$ on $[-1, 1]$, $n = 16$
9. $y = \cos x$ on $[0, \pi/2]$, $n = 50$
10. $y = x^3 - 1$ on $[-1, 1]$, $n = 100$

في التمارين 14–11، استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى.

11. $y = x^2 + 1$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[0, 2]$; (c) $[1, 3]$
12. $y = x^2 + 3x$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[0, 2]$; (c) $[1, 3]$
13. $y = 2x^2 + 1$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[-1, 1]$; (c) $[1, 3]$
14. $y = 4x^2 - x$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[-1, 1]$; (c) $[1, 3]$

في التمارين 18–15، أنشئ جدولا لمجموع ريمان كما في المثال 3.4 لإيضاح أن المجموع باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى ونقطة المنتصف ونقطة النهاية اليسرى تتقارب كلها من القيمة ذاتها عندما $n \to \infty$.

15. $f(x) = 4 - x^2$, $[-2, 2]$
16. $f(x) = \sin x$, $[0, \pi/2]$
17. $f(x) = x^3 - 1$, $[1, 3]$
18. $f(x) = x^3 - 1$, $[-1, 1]$

في التمارين 22–19، حدد بيانيا ما إذا كان مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم (a) نقطة النهاية اليسرى، (b) ونقطة المنتصف، (c) ونقطة النهاية اليمنى، سيكون أكبر أم أصغر من المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على $[a, b]$.

19. $f(x)$ تتزايد والتقعر إلى الأعلى على $[a, b]$.
20. $f(x)$ تتزايد والتقعر إلى الأسفل على $[a, b]$.
21. $f(x)$ تتناقص والتقعر إلى الأعلى على $[a, b]$.
22. $f(x)$ تتناقص والتقعر إلى الأسفل على $[a, b]$.

23. للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 1]$، استخدم طريقة التجربة والخطأ لإيجاد نقاط القيم لـ $n = 2$ التي تجعل مجموع ريمان يساوي المساحة الدقيقة 1/3.

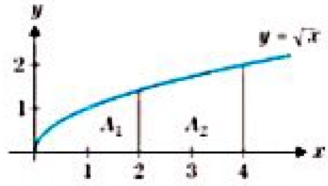
24. للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 1]$، استخدم طريقة التجربة والخطأ لإيجاد نقاط القيم لـ $n = 2$ التي تجعل مجموع ريمان يساوي المساحة الدقيقة 2/3.

25. (a) وضح أن قيم نقطة النهاية اليمنى على الفترة $[a, b]$ مع

كل فترة جزئية طولها $\Delta x = (b-a)/n$. تكون نقاط القيم هي $c_i = a + i\Delta x$ ، حيث $i = 1, 2, \ldots, n$. (b) أوجد صيغة لنقاط القيم بالنسبة لقيم نقطة المنتصف.

26. (a) وضح أن قيم نقطة النهاية اليسرى على الفترة $[a, b]$ مع كل فترة جزئية طولها $\Delta x = (b-a)/n$. تكون نقاط القيم هي $c_i = a + (i-1)\Delta x$ ، حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.
(b) أوجد صيغة لنقاط القيم تمثل ثلث الطريق من نقطة النهاية اليسرى إلى نقطة النهاية اليمنى.

27. في الشكل المبين، أي مساحة تساوي $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1+i/n}\,\frac{2}{n}$ ؟



28. أي مساحة تساوي $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{1+2i}\,\frac{2}{n}$ ؟

في التمارين 32–29، استخدم التعريفات التالية. المجموع الأعلى لـ f على P يعطى بواسطة $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ، حيث

$f(c_i)$ هي القيمة العظمى لـ f على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. وبالمثل: المجموع الأدنى لـ f على P يعطى بواسطة
$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$ ، حيث $f(d_i)$ هي القيمة الصغرى لـ f على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

29. احسب المجموع الأعلى والمجموع الأدنى لـ $f(x) = x^2$ على $[0, 2]$ للتجزئة المنتظمة حيث $n = 4$.

30. احسب المجموع الأعلى والمجموع الأدنى لـ $f(x) = x^2$ على $[-2, 2]$ للتجزئة المنتظمة حيث $n = 8$.

31. أوجد (a) المجموع الأعلى العام (b) والمجموع الأدنى العام لـ $f(x) = x^2$ على $[0, 2]$ وأوضح أن كلا المجموعين يقتربان من العدد نفسه عندما $n \to \infty$.

32. كرر التمرين 31 للدالة $f(x) = x^3 + 1$ على الفترة $[0, 2]$.

33. تنسب النتيجة التالية إلى أرخميدس. (راجع الملاحظة التاريخية في صفحة 387). للقطع المكافئ العام $y = a^2 - x^2$ حيث $-a \le x \le a$. أوضح أن المساحة تحت القطع المكافئ هي $\frac{2}{3}$ القاعدة مضروبة في الارتفاع [بمعنى، $\frac{2}{3}(2a)(a^2)$].

34. وضح أن المساحة تحت منحنى $y = ax^2$ حيث $0 \le x \le b$ هي $\frac{1}{3}$ القاعدة مضروبة في الارتفاع.

في التمارين 38–35، استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى.

35.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

36.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

37.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

38.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

التطبيقات

39. يستخدم الاقتصاديون تمثيلا بيانيا يسمى **منحنى لورنز** لوصف مدى المساواة لتوزيع كمية معينة في مجتمع إحصائي معين. على سبيل المثال، يختلف **الناتج المحلي الإجمالي** (GDP) بشكل كبير من بلد لآخر. توضح البيانات التالية الواردة عن إدارة معلومات الطاقة. النسب المئوية لأعلى 100 ناتج محلي إجمالي للدول في العالم في 2001. مرتبة حسب ترتيب تزايد GDP. تشير البيانات إلى أن أول 10 (أقل 10%) دول تمثل 0.2% فحسب من إجمالي GDP للعالم، وأول 20 دولة تمثل 0.4% وما إلى ذلك. وتمثل أول 99 دولة 73.6% من إجمالي GDP. ما النسبة المئوية التي تنتجها الدولة رقم 100 (الولايات المتحدة الأمريكية)؟ إن منحنى لورنز هو عبارة عن مخطط بياني لـ y مقابل x. مثل منحنى لورنز بيانيا لهذه البيانات. قدر المساحة بين المنحنى ومحور -x. (إرشاد: لاحظ أن قيم -x ليست متباعدة على نحو متساو. سنحتاج إلى تحديد طريقة التعامل مع ذلك).

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y	0.002	0.004	0.008	0.014	0.026	0.048	0.085

x	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	1.0
y	0.144	0.265	0.398	0.568	0.736	1.0

40. يمكن استخدام منحنى لورنز (انظر التمرين 39) لحساب **مؤشر جيني**، قياس عددي لمدى عدم عدالة التوزيع. لتكن A_1 تساوي المساحة بين منحنى لورنز ومحور -x.
أنشئ منحنى لورنز لحالة تكون فيها كل الدول متساوية من حيث GDP. ولتكن A_2 هي المساحة بين منحنى لورنز ومحور -x . إن مؤشر جيني G يساوي A_1 مقسوما على A_2 .
اشرح لماذا $0 \le G \le 1$ واثبت أن $G = 2A_1$. قدر G بالنسبة للبيانات المتوفرة في التمرين 39.

تمارين استكشافية

1. يمكن تعريف مجموع ريمان كذلك على **اجزاء غير منتظمة**، تكون فيها الفترات الجزئية غير متساوية في الحجم. المثال على تجزئة غير منتظمة للفترة $[0, 1]$ هو $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.6$ ، $x_3 = 0.9$ ، $x_4 = 1$. اشرح لماذا مجموع ريمان المقابل سيكون

$$f(c_1)(0.2) + f(c_2)(0.4) + f(c_3)(0.3) + f(c_4)(0.1)$$

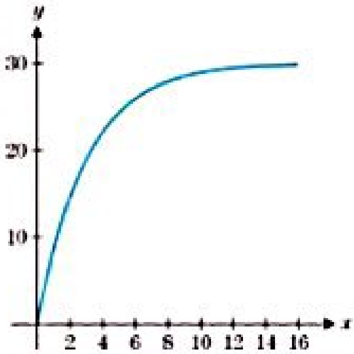
لنقاط القيم c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 . حدد الفترة التي

يجب اختيار كل c_i منها مع ذكر أمثلة على نقاط القيم، لرؤية لماذا قد تكون التجزئات غير المنتظمة مفيدة. تأمل الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$ على الفترة $[0, 2]$. تكون إحدى طرائق تقريب المساحة تحت المنحنى لهذه الدالة، بإيجاد قيمة مجاميع ريمان نستخدم قيم نقطة المنتصف حيث $n = 10$ ، $n = 50$ ، $n = 100$ وما إلى ذلك. أوضح بيانيا وعدديا أنه باستخدام قيم نقطة المنتصف، يقدم مجموع ريمان حيث $n = 2$ المساحة الصحيحة على الفترة الجزئية $[0, 1]$. ثم اشرح لماذا سيكون بدون جدوى إيجاد قيمة مجاميع ريمان على هذه الفترة الجزئية لكل القيم الكبيرة من n. أما الاستراتيجية التي ستكون أكثر فاعلية، فهي إيجاد قيمتي المساحتين على $[0, 1]$ و $[1, 2]$ بشكل منفصل وجمعهما معا. يمكن إيجاد قيمة المساحة على $[0, 1]$ بدقة باستخدام قيمة صغيرة لـ n، بينما يجب تقريب المساحة على $[1, 2]$ باستخدام قيم كبيرة من n . استخدم هذا الأسلوب لتقدير المساحة لـ $f(x)$ على الفترة $[0, 2]$. جرب تحديد المساحة في نطاق من الخطأ يساوي 0.01. وناقش سبب اعتقادك أن إجابتك دقيقة.

2. مثل بيانيا الدالة $f(x) = e^{-x^2}$. قد تتعرف على هذا المنحنى بأنه المنحنى المسمى «منحنى الجرس» والذي له أهمية أساسية في الإحصاء. نحن نعرف **دالة المساحة** $g(t)$ لتكون المساحة بين هذا التمثيل البياني ومحور x بين $x = 0$ و $x = t$ (حتى الآن، على فرض أن $t > 0$). ارسم منطقة المساحة التي تعرف $g(1)$ و $g(2)$ وناقش أن $g(1) < g(2)$. اشرح سبب تزايد الدالة $g(x)$ وبالتالي $g'(x) > 0$ حيث $x > 0$. علاوة على ذلك، ناقش أن $g'(1) > g'(2)$. اشرح لماذا $g'(x)$ تكون دالة متناقصة. وبهذا، يكون للدالة $g'(x)$ الخواص العامة (موجبة، متناقصة) نفسها التي تتصف بها $f(x)$. في الحقيقة، سنكتشف في الدرس 7.5 أن $g'(x) = f(x)$. لجمع بعض الأدلة لهذه النتيجة، استخدم مجاميع ريمان لتقدير $g(2)$ ، $g(1.1)$ ، $g(1.01)$ و $g(1)$. استخدم هذه القيم لتقدير $g'(1)$ ومقارنتها بـ $f(1)$.

الدرس 7-4 التكامل المحدود

تتزايد السرعة في القفز الحر خارج الطائرة (بدءا من سرعة متجهة عند الهبوط قدرها صفر) تدريجيا حتى تصل إلى السرعة المتجهة النهائية. وهي السرعة التي تلغي عندها القوة بفعل مقاومة الهواء بفعل الجاذبية. إن الدالة التي تمثل السرعة المتجهة x ثوان خلال القفز هي $f(x) = 30(1 - e^{-x/3})$. (انظر الشكل 7.12).



الشكل 7.12

$y = f(x)$

رأينا في الدرس 7.2 أن المساحة A تحت هذا المنحنى على الفترة $0 \le x \le t$ تناظر المسافة التي تم هبوطها في أول t ثانية. لأي قيمة معطاة لـ t، تعطى المساحة بواسطة نهاية مجاميع ريمان.

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,} \qquad (4.1)$$

حيث لكل من i ، c_i تؤخذ لأي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. لاحظ أن المجموع في (4.1) لا يزال منطقيا حتى عندما تكون بعض (أو كل) قيم الدوال $f(c_i)$ سالبة. في ما يلي التعريف العام.

التعريف 4.1

لأي دالة f معرفة على $[a, b]$. يكون **التكامل المحدود** لـ f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

متى وجدت النهاية والأمر نفسه لكل اختيار من نقاط القيم c_1 ، c_2 ، ... ، c_n . عندما يكون هناك نهاية، نقول إن f **قابلة للتكامل على** $[a, b]$.

ملحوظة 4.1

يناسب التعريف 4.1 معظم الدوال (تلك التي تكون متصلة باستثناء عدد محدود من **الانفصالات على الأكثر**). الأكثر عموما، توسع التعريف ليشمل تجزئات الفترات الفرعية ذات الأطوال المختلفة. يمكنك إيجاد تعميم لتعريف مناسب في الوحدة 13.

ينبغي أن نلاحظ أن الحرف الإغريقي $\sum$ في مجموع ريمان يشير إلى المجموع، وكذلك الحرف المتمدد "S" $\int$ المستخدمة على أنها إشارة التكامل. إن الحدين **الأدنى والأعلى للتكامل** a و b على التوالي، تشيران إلى نقطتي النهاية للفترة التي تجري عليها التكامل. يتقابل dx في التكامل مع الزيادة Δx في مجموع ريمان ويشير أيضا إلى متغير التكامل. يكون الحرف المستخدم لمتغير التكامل (يسمى متغير صوري) غير ذي صلة بما أن قيمة التكامل ثابتة وليست دالة لـ x. هنا، $f(x)$ تسمى **المكامل**.

إذا، متى ستوجد النهاية المعرفة لتكامل محدود؟ تشير النظرية 4.1 إلى أن العديد من الدوال المألوفة قابلة للتكامل.

النظرية 4.1

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

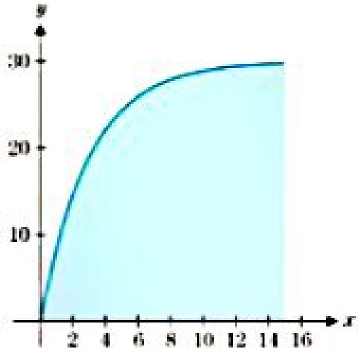
ملاحظات

إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$ ، فإذا

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{المساحة تحت المنحنى} \geq 0$$

يعتبر برهان النظرية 4.1 تقنيًا للغاية ومن غير المناسب تضمينه هنا. ومع ذلك، إذا تأملت في تفسير المساحة للتكامل المحدود، فينبغي أن تبدو النتيجة مقبولة.

لحساب تكامل محدود لدالة قابلة للتكامل، أمامنا خياران: إذا كانت الدالة مبسطة بما يكفي (مثلًا كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أصغر)، فإنه يمكننا حساب نهاية مجموع ريمان رمزيًا. بخلاف ذلك، يمكننا حساب عدد مجموع ريمان عدديًا وتقريب قيمة النهاية. كثيرًا ما نستخدم **قاعدة نقطة المنتصف**، التي تستخدم نقاط المنتصف باعتبارها نقاط قيم لمجموع ريمان.



الشكل 7.13

$y = 30(1 - e^{-x/3})$

مثال 4.1 تقريب قاعدة نقطة المنتصف لتكامل محدود

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقدير $\int_0^{15} 30\,(1 - e^{-x/3})\,dx$.

الحل يعطي التكامل المساحة تحت المنحنى الموضح في الشكل 7.13. (لاحظ أن هذا يناظر المسافة عند هبوط لاعب القفز الحر في مقدمة هذا الدرس). من قاعدة نقطة المنتصف، لدينا

$$\int_0^{15} 30(1 - e^{-x/3})\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = 30\sum_{i=1}^{n}(1 - e^{-c_i/3})\left(\frac{15 - 0}{n}\right)$$

حيث $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. باستخدام CAS أو برنامج آلة حاسبة، يمكنك الحصول على متتالية التقريبات الموجودة في الجدول المبين.

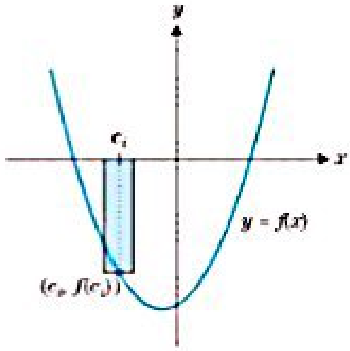
R_n	n
361.5	10
360.8	20
360.6	50
360.6	100

يبقى سؤال واحد وهو متى نتوقف عن زيادة n. في هذه الحالة، نواصل زيادة n حتى يكون واضحًا أن 361 مترًا يعتبر تقريبًا منطقيًا. ■

والآن، فكر مليًا بالنهاية التي يتحدث عنها التعريف 4.1. كيف يمكننا تفسير هذه النهاية عندما تكون f موجبة وسالبة على الفترة $[a, b]$ ؟ لاحظ أنه إذا كانت $f(c_i) < 0$ ، لـ i ما. فإذًا يكون ارتفاع المستطيل الموضح في الشكل 7.14 هو $-f(c_i)$ وعليه،

$$f(c_i)\Delta x = - \text{ مساحة عدد } i \text{ من المستطيلات}$$

لرؤية أثر ذلك على المجموع، نأخذ المثال 4.2.



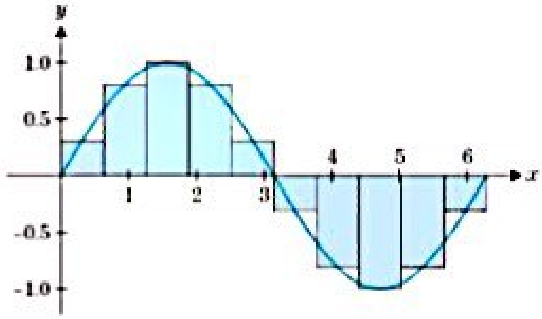
الشكل 7.14

$f(c_i) < 0$

المثال 4.2 مجموع ريمان لدالة لها قيم موجبة وسالبة

لأجل $f(x) = \sin x$ على $[0, 2\pi]$ ، أعط تفسير المساحة لـ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$.

الحل لأجل هذا الرسم التوضيحي، نحن نأخذ c_i ليكون نقطة منتصف $[x_{i-1}, x_i]$ ، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. في الشكل 7.15a، نرى 10 مستطيلات تم إنشاؤها بين محور x- والمنحنى $y = f(x)$.



الشكل 7.15a

عشرة مستطيلات

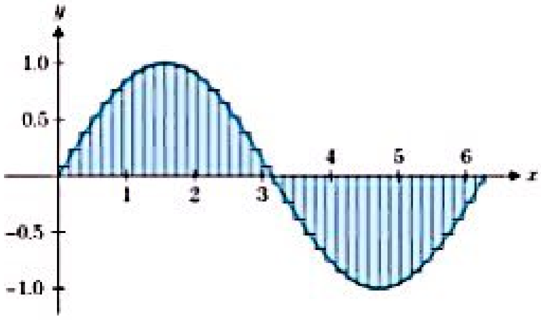
إن أول خمسة مستطيلات [حيث $f(c_i) > 0$] تقع أعلى محور -x ولها ارتفاع $f(c_i)$. إن المستطيلات الخمسة المتبقية [حيث $f(c_i) < 0$] تقع تحت محور -x ولها ارتفاع $-f(c_i)$. إذا، هنا

$$\sum_{i=1}^{10} f(c_i)\,\Delta x = \text{(مساحة المستطيلات فوق المحور-}x\text{)} - \text{(مساحة المستطيلات تحت المحور-}x\text{)}$$

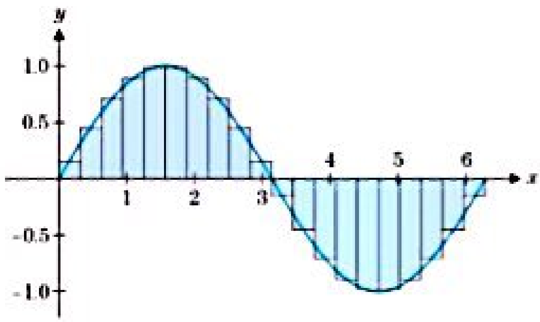
في الشكلين 7.15b و7.15c، يظهر 20 مستطيلا و40 مستطيلا على التوالي تم إنشاؤها بالطريقة ذاتها، من ذلك، نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \text{(المساحة فوق المحور-}x\text{)} - \text{(المساحة تحت المحور-}x\text{)}$$

والتي تبين أنها تساوي صفرا، في هذه الحالة.



الشكل 7.15c
أربعون مستطيلا

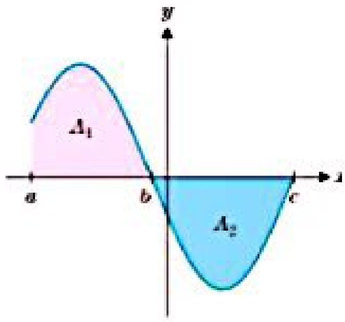


الشكل 7.15b
عشرون مستطيلا

وعموما، لدينا رمز **المساحة المشار إليها**، والتي تعرفها الآن.

التعريف 4.2

على فرض أن $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$ و A_1 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq b$. علاوة على ذلك، على فرض أن $f(x) \leq 0$ على الفترة $[b, c]$ و A_2 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور -x لكل $b \leq x \leq c$. إن **المساحة المشار إليها** بين $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 - A_2$. **والمساحة الإجمالية** بين $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 + A_2$. (انظر الشكل 7.16).



الشكل 7.16
المساحة المشار اليها

ينص التعريف 4.2 على أن المساحة المشار إليها هي الفرق بين مساحات تقع أعلى محور -x ومساحات تقع تحت محور -x، بينما المساحة الإجمالية هي مجموع إجمالي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور -x.

يتفحص المثال 4.3 الحالة العامة حيث يمكن أن يكون المكامل موجبا وسالبا على فترة التكامل.

المثال 4.3 العلاقة بين التكاملات المحدودة والمساحة المشار إليها

احسب التكاملين، (a) $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$ و (b) $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx$ وفسر كل منهما بدلالة المساحة.

الحل (a) أولا، لاحظ أن المكامل دالة متصلة على مجالها، وبهذا تكون قابلة للتكامل على فترة. إن التكامل المحدود هو نهاية متتالية مجاميع ريمان، حيث يمكننا اختيار اي نقطة من نقاط القيم. عادة يكون من الأسهل كتابة الصيغة باستخدام نقاط القيم للنهاية اليمنى، كما

نعمل هنا. في هذه الحالة،

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

لدينا إذا $x_0 = 0$ ، $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{2}{n}$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{2(2)}{n}$$

وهكذا. لدينا إذا $c_i = x_i = \frac{2i}{n}$ ، يكون إذا ناتج جمع ريمان النوني R_n،

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} - \frac{4i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

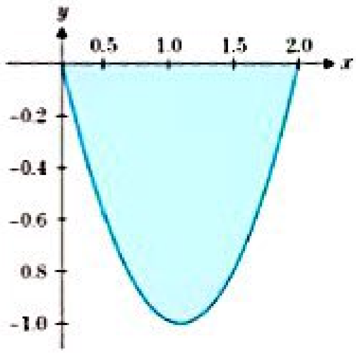
$$= \left(\frac{8}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{8}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2}$$ من نظرية 2.1 (ii) و (iii).

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{4(n+1)}{n} = \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} - \frac{4n+4}{n}$$

إيجاد نهاية R_n عندما $n \to \infty$ يعطينا القيمة الدقيقة للتكامل:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+12n+4}{3n^2} - \frac{4n+4}{n}\right) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

إن التمثيل البياني لـ $y = x^2 - 2x$ على الفترة $[0, 2]$ موضح في الشكل 7.17. لاحظ أنه بما أن الدالة هي سالبة دائما على الفترة $[0, 2]$، فإن التكامل هو سالب ويساوي $-A$ ، حيث A هو المساحة الواقعة بين محور -x والمنحنى.



$[0, 2]$ $y = x^2 - 2x$

الشكل 7.17

على

(b) على الفترة $[0, 3]$ ، لدينا $\Delta x = \frac{3}{n}$ و $x_0 = 0, x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{3}{n}$.

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{3}{n} + \frac{3}{n} = \frac{3(2)}{n}$$

هكذا. باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى، يكون لدينا $c_i = x_i = \frac{3i}{n}$. وهذا يعطينا مجموع ريمان

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{3i}{n}\right)\right]\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2} - \frac{6i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

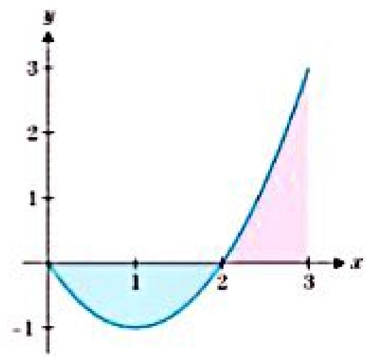
$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \left(\frac{27}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{18}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2}$$ من نظرية 2.1 (ii) و (iii).

$$= \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{9(n+1)}{n}.$$

إن إيجاد النهاية عندما $n \to \infty$ يعطينا

$$\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{9(n+1)}{n}\right] = \frac{18}{2} - 9 = 0$$



$[0, 3]$ $y = x^2 - 2x$

الشكل 7.18

على

على الفترة $[0, 2]$ ، لاحظ أن المنحنى $y = x^2 - 2x$ يقع تحت محور -x والمساحة المحدودة بين المنحنى ومحور -x هي $\frac{4}{3}$. على الفترة $[2, 3]$ ، يقع المنحنى فوق محور -x ولذلك، يشير التكامل 0 على الفترة $[0, 3]$ إلى أن المساحتين المشار إليهما قد ألغت احداهما الثانية. (انظر الشكل 7.18 للتمثيل البياني لـ $y = x^2 - 2x$ على الفترة $[0, 3]$). لاحظ أن هذا يشير أيضا إلى أن المساحة تحت المنحنى على الفترة $[2, 3]$ يجب أن تكون $\frac{4}{3}$. يجب أن نلاحظ أيضا أن المساحة الإجمالية A

المحدودة بين $y = x^2 - 2x$ ومحور x- هي مجموع المساحتين المبينتين في الشكل 7.18. $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

يمكننا تفسير المساحة المشار اليها أيضا بدلالة السرعة المتجهة والموقع. على فرض أن $v(t)$ هي دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك جيئا وذهابا على طول خط مستقيم. لاحظ أن السرعة المتجهة يمكن أن تكون موجبة وسالبة. إذا كانت السرعة المتجهة موجبة على الفترة $[t_1, t_2]$. فإذا $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ يعطينا المسافة المجتازة (هنا. في الاتجاه الموجب). إذا كانت السرعة المتجهة سالبة على الفترة $[t_3, t_4]$. فإذا يتحرك الجسم في إتجاه سالب والمسافة المجتازة (هنا. في الاتجاه السالب) تعطى بـ $-\int_{t_3}^{t_4} v(t)\,dt$. لاحظ أنه إذا بدأ الجسم بالتحرك عند الزمن 0 وتوقف عند الزمن T. فإذا $\int_0^T v(t)\,dt$ يعطينا المسافة المجتازة في الاتجاه الموجب ناقص المسافة المجتازة في الاتجاه السالب. وهذا يعني. $\int_0^T v(t)\,dt$ يناظر التغير الكلي في الموقع من البداية حتى النهاية.

مثال 4.4 تقدير التغير الكلي في الموقع

إن دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على طول خط مستقيم هي $v(t) = \sin t$. إذا بدأ الجسم عند الموقع 0. حدد إجمالي المسافة المجتازة وموقع الجسم في الزمن $t = 3\pi/2$.

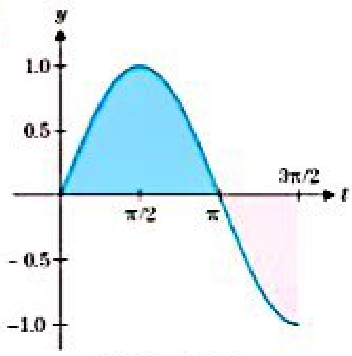
الحل من التمثيل البياني (انظر الشكل 7.19). لاحظ أن $\sin t \geq 0$ لكل $0 \leq t \leq \pi$ و $\sin t \leq 0$ لكل $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. يناظر إجمالي المسافة المجتازة مساحة المنطقتين المظللتين في الشكل 7.19. ونعطى بواسطة

$$A = \int_0^{\pi} \sin t\,dt - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin t\,dt$$

يمكنك استخدام قاعدة نقطة المنتصف للحصول على مجاميع ريمان التالية:

n	$R_n \approx \int_0^{\pi} \sin t\,dt$
10	2.0082
20	2.0020
50	2.0003
100	2.0001

n	$R_n \approx \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin t\,dt$
10	−1.0010
20	−1.0003
50	−1.0000
100	−1.0000



الشكل 7.19

$y = \sin t$ على $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

لاحظ أن المجاميع تبدو متقاربة من 2 و -1 . على التوالي. وعما قريب سنكون قادرين على اثبات صحة ذلك. إن المساحة الإجمالية المحدودة بين $y = \sin t$ ومحور t- على $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ تكون إذا

$$\int_0^{\pi} \sin t\,dt - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin t\,dt = 2 + 1 = 3$$

لذلك. يساوي إجمالي المسافة المجتازة 3 وحدات. إن التغير الكلي في موقع الجسم يعطى بواسطة

$$\int_0^{3\pi/2} \sin t\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin t\,dt = 2 + (-1) = 1$$

لذلك. إذا بدأ الجسم عند الموقع 0. فسينتهي عند الموقع $0 + 1 = 1$.

لاحقا. سنقدم بعض القواعد العامة الخاصة بالتكاملات.

النظرية 4.2

إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a, b]$. فإن ما يأتي يكون صحيحا.

(i) لأي عددين ثابتين c و d . $\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$ و

(ii) لأي عدد ثابت c في $[a, b]$. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

البرهان

من التعريف، ولأي عددين ثابتين c و d ، لدينا

$$\begin{aligned}\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [cf(c_i) + dg(c_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[c\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x + d\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x \right] && \text{من النظرية 2.2} \\ &= c\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x + d\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx,\end{aligned}$$

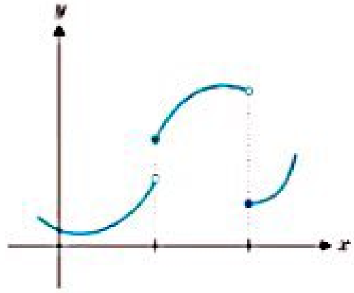
حيث استخدمنا قواعدنا المعتادة للمجاميع زائد حقيقة أن f و g قابلتان للتكامل. نترك برهان الجزء (ii) للتمارين. ولكن لاحظ أننا وضحنا الفكرة بالفعل في المثال 4.4.■

سنضع الآن زوجا من التعريفات المنطقية. أولا، لأي دالة قابلة للتكامل f، إذا كان $a < b$ ، فنحن نعرف

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.2}$$

يجب أن يبدو هذا منطقيا في أنه إذا أجرينا التكامل «إلى الوراء» على طول الفترة، سيبدو عرض المستطيلات المتقابلة لمجموع ريمان (Δx) سالبا. ثانيا، إذا كانت $f(a)$ معرفة، فنحن نعرف

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



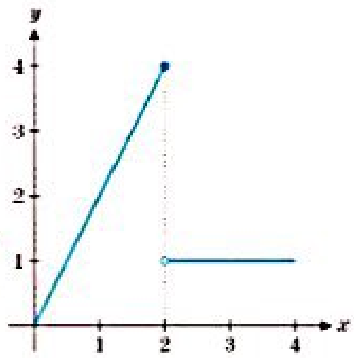
الشكل 7.20

دالة متصلة متعددة التعريف

إذا كنت تفكر في التكامل المحدود على أنه مساحة، فهذا يشير إلى أن المساحة من a حتى a هي صفر.

تبين أن الدالة تكون قابلة للتكامل حتى عندما يكون فيها عدد نهائي من الانفصالات القفزية، ولكن غير ذلك تكون متصلة. (يطلق على هذه الدالة **متصلة متعددة التعريف**؛ انظر الشكل 7.20 للتمثيل البياني لمثل هذه الدالة).

في المثال 4.5، نحن نوجد قيمة تكامل دالة غير متصلة.



الشكل 7.21a

$y = f(x)$

المثال 4.5 تكامل لمكامل غير متصل

أوجد قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$ ، حيث $f(x)$ تعرف كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{إذا } x \le 2 \\ 1, & \text{إذا } x > 2 \end{cases}$$

الحل تبدأ بالنظر إلى التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ في الشكل 7.21a. لاحظ أنه على الرغم من أن f هي غير متصلة عند $x = 2$ ، لها انفصال قفزي منفرد ولهذا، تكون متصلة متعددة التعريف على $[0, 3]$. من التعريف 4.2 (ii)، نجد أن

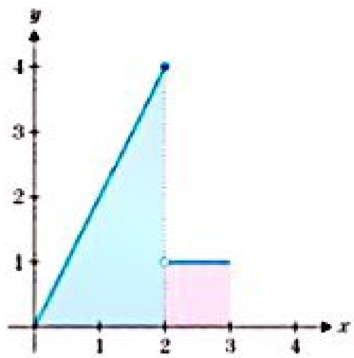
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

راجع الشكل 7.21b. لاحظ أن $\int_0^2 f(x)\,dx$ يناظر مساحة المثلث قاعدته 2 وارتفاعه 4 المظلل في الشكل. لذلك

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$

بعد ذلك، نلاحظ أيضا من الشكل 7.21b أن $\int_2^3 f(x)\,dx$ يناظر مساحة المربع طول ضلعه وحدة واحدة. لذلك

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 1$$



الشكل 7.21b

المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على $[0, 3]$

الآن نجد أن

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 4 + 1 = 5$$

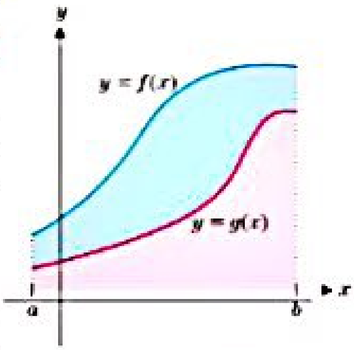
لاحظ أن في هذه الحالة، يمكن حساب المساحتان المناظرتان للتكاملين باستخدام صيغ هندسية بسيطة وبذلك، لا حاجة لحساب مجموع ريمان هنا. ■

توجد خاصية بسيطة أخرى للتكاملات المحدودة، وهي كما يلي.

النظرية 4.3

على فرض أن $g(x) \le f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأن f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذا،

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$



الشكل 7.22

إن الدوال الأكبر لديها تكاملات أكبر

البرهان

بما أن $f(x) \le g(x)$ ، فيجب أن يكون لدينا $0 \le [f(x) - g(x)]$ على $[a, b]$ وعليه، $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x) - g(x)$ ، والتي لا يمكن أن تكون سالبة. باستخدام نظرية (i) 4.2 ، لدينا الآن

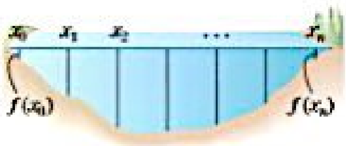
$$0 \le \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

من ذلك تلي النتيجة. ■

لاحظ أن النظرية 4.3 تشير ببساطة إلى أن الدوال الأكبر لها تكاملات أكبر. نوضح ذلك في حالة دالتين موجبتين في الشكل 7.22.

القيمة المتوسطة لدالة

لحساب متوسط العمر للطلاب في صف يتعلمون حساب التفاضل والتكامل، لاحظ أنك تحتاج إلى جمع أعمار كل الطلاب والقسمة على عدد الطلاب في الصف الدراسي. في المقابل، كيف تجد متوسط العمق لمقطع عرضي من بحيرة؟ ستحصل على فكرة منطقية لمتوسط العمق عن طريق أخذ عينة من عمق البحيرة عند عدد من النقاط المنتشرة على امتداد طولها، ثم إيجاد متوسط هذه الأعماق كما هو موضح في الشكل 7.23.



الشكل 7.23

متوسط العمق لمقطع عرضي من البحيرة

وعموما، غالبا ما نريد حساب القيمة المتوسطة لدالة f على فترة ما $[a, b]$. للقيام بذلك، نشكل تجزئة لـ $[a, b]$ ،

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

حيث يكون الفرق بين النقاط المتتالية هو $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. تعطى **القيمة المتوسطة**، f_{ave}، إذا بشكل تقريبي بواسطة متوسط قيم الدالة عند x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ؛

$$\begin{aligned} f_{ave} &\approx \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) && \text{اضرب واقسم على } b-a \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. && \text{بما أن } \Delta x = \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

لاحظ أن المجموع الأخير هي مجموع ريمان. علاوة على ذلك، لاحظ أنه كلما ازدادت النقاط ضمن العينة، توجب أن يكون التقريب أفضل. إذا، عندما $n\to\infty$ ، نحصل على تكامل يمثل القيمة المتوسطة:

$$\boxed{f_{ave} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.} \quad (4.3)$$

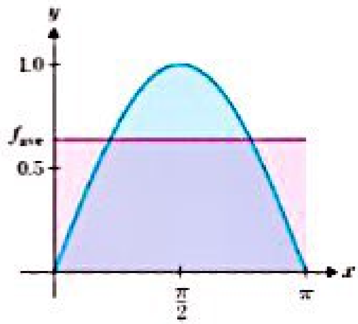
المثال 4.6 حساب القيمة المتوسطة لدالة

احسب القيمة المتوسطة لـ $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$.

الحل من (4.3)، لدينا

$$f_{ave} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x\,dx$$

يمكننا تقريب قيمة هذا التكامل عن طريق حساب بعض من مجموع ريمان. للحصول على متوسط التقريب. $f_{ave} \approx 0.6366198$. (انظر المثال 4.4) في الشكل 7.24، نعرض تمثيلا بيانيا لـ $y = \sin x$ وقيمته المتوسطة على الفترة $[0, \pi]$. ينبغي أن تلاحظ أن المنطقتين المظللتين لهما المساحة ذاتها. ■



الشكل 7.24

$y = \sin x$

لاحظ أنه توجد نقطتان في الشكل 7.24 تتساوى عندهما الدالة مع متوسط قيمتها. لقد قمنا بصياغة عبارة دقيقة لتلك النتيجة (غير المفاجئة) في النظرية 4.4. أولا، لاحظ أنه لأي عدد ثابت، c

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x = c(b-a)$$

بما أن $\sum_{i=1}^{n}\Delta x$ هو ببساطة مجموع أطوال الفترات الجزئية في التجزئة.

لتكن f دالة متصلة معرفة في $[a, b]$. تذكر أنه بناء على نظرية القيمة القصوى، وبما أن f متصلة، فإنه يوجد فيها قيمة صغرى m، وقيمة عظمى M، في $[a, b]$. ومنه

$$m \le f(x) \le M \text{ لكل } x \in [a, b]$$

بناء على النظرية 4.3،

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

بما أن m و M هي قيم ثابتة، فسنحصل على

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad (4.4)$$

وفي النهاية، بالقسمة على $(b-a) > 0$ ، تكون النتيجة

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

وبذلك، $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (فإن متوسط قيمة f في $[a, b]$) تقع بين قيمتي f الصغرى والعظمى على $[a, b]$. بما أن f هي دالة متصلة، نستخلص بناء على نظرية القيمة المتوسطة (النظرية 4.4 في الدرس 1.4) أنه لا بد من وجود بعض القيم $c \in (a, b)$ والتي من أجلها

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

أثبتنا فقط النظرية:

النظرية 4.4 (نظرية القيمة المتوسطة في التكامل)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ ، فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ من أجله

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

إن نظرية القيمة المتوسطة في التكامل هي فكرة بسيطة نوعا ما (وهذا يعني أن الدالة المتصلة ستأخذ متوسط قيمتها عند نقطة ما). ولكن لها بعض التطبيقات الهامة. سيتم إيجاد أولها في الدرس 7.5 في إثبات واحدة من أهم النتائج في التفاضل والتكامل، وهي النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

بالرجوع إلى اشتقاق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل. لاحظ أنه دائما كنا نثبت أنه لدالة قابلة للتكامل f، إذا كانت $m \le f(x) \le M$ ، لكل $x \in [a, b]$. فإن المتباينة (4.4) تنطبق على:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

وهذا يمكننا من تقدير قيمة تكامل محدود. على الرغم أن التقدير ليس إلا تقريب بوجه عام، إلا أن أهميته تكمن في أنه يعطينا الفترة التي يجب أن تقع فيها القيمة. توضح ذلك في المثال 4.7.

المثال 4.7 تقدير قيمة التكامل

استخدم المتباينة (4.4) لتقدير قيمة $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

الحل أولا. لاحظ أنه ليس في مقدورنا حاليا حساب قيمة هذا التكامل حسابا دقيقا. ولكن لاحظ أنه

$$1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2} \text{ لكل } x \in [0, 1]$$

من المتباينة (4.4). يوجد لدينا الآن

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \le \sqrt{2} \approx 1.414214$$

وبعبارة أخرى، على الرغم أننا ما زلنا لا نعرف القيمة الدقيقة للتكامل، إلا أننا نعرف أنه لا بد أن يقع بين 1 و $\sqrt{2} \approx 1.414214$. ■

التمارين 7.4

تمارين كتابية

1. ارسم التمثيل البياني للدالة f التي لها قيم موجبة وسالبة على الفترة $[a, b]$. اشرح في ضوء المساحة ما الذي يعنيه أن يكون لدينا $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. اشرح أيضا ما يعنيه أن يكون لدينا $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ و $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

2. للحصول على تفسير ملموس للنتيجة في النظرية 4.3، على فرض أن $f(x)$ و $g(x)$ هما دالتين للسرعة المتجهة لجسمين مختلفين يبدأن من الموقع نفسه. إذا كانت $f(x) \ge g(x) \ge 0$ ، اشرح لماذا يتبع ذلك $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$.

3. تقول نظرية القيمة المتوسطة في التكامل أنه إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[a, b]$ ، فإنه يوجد عدد c بين a و b بحيث $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. بالتفكير في الطرف الأيسر من هذه المعادلة على أنه مساحة مستطيل، ارسم صورة توضح هذه النتيجة واشرح سبب تطابق هذه النتيجة.

4. اكتب نظرية القيمة المتوسطة في التكامل وفقا لتطبيقها على الاشتقاق $f'(x)$. ثم اكتب نظرية القيمة المتوسطة للاشتقاقات (انظر الدرس 2.10). إذا كانت قيم c- المحددة بكل نظرية هي نفسها، فما الذي ينبغي أن تساويه $\int_a^b f'(x)\,dx$ ؟ اشرح سبب

عدم معرفة ما إذا كانت قيم c_i هي نفسها أم لا عند تلك النقطة.

في التمارين 1–4، استخدم قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 6$ لتقدير قيمة التكامل.

1. $\int_0^3 (x^3 + x)\,dx$
2. $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 1}\,dx$
3. $\int_0^\pi \sin x^2\,dx$
4. $\int_{-2}^2 e^{-x^2}\,dx$

في التمارين 5–8، أعط تفسير مساحة للتكامل.

5. $\int_1^1 x^2\,dx$
6. $\int_0^1 e^x\,dx$
7. $\int_0^2 (x^2 - 2)\,dx$
8. $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$

في التمارين 9–14، اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان.

9. $\int_0^1 2x\,dx$
10. $\int_1^2 2x\,dx$
11. $\int_0^2 x^2\,dx$
12. $\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx$
13. $\int_1^3 (x^2 - 3)\,dx$
14. $\int_{-2}^2 (x^2 - 1)\,dx$

في التمارين 15–20، اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات.

15. المساحة فوق المحور -x وتحت $y = 4 - x^2$
16. المساحة فوق المحور -x وتحت $y = 4x - x^2$
17. المساحة تحت المحور -x وفوق $y = x^2 - 4$
18. المساحة تحت المحور -x وفوق $y = x^2 - 4x$
19. المساحة بين $y = \sin x$ والمحور -x لـ $0 \le x \le \pi$
20. المساحة بين $y = \sin x$ والمحور -x لـ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$

في التمرينين 21 و22، استخدم دالة السرعة المتجهة المعطاة والموقع الابتدائي لتقدير الموقع النهائي $s(b)$.

21. $v(t) = 40(1 - e^{-2t})$, $s(0) = 0$, $b = 4$
22. $v(t) = 30e^{-t/4}$, $s(0) = -1$, $b = 4$

في التمرينين 23 و24، احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$.

23. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{إذا } x < 1 \\ 4 & \text{إذا } x \ge 1 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{إذا } x \le 2 \\ 3x & \text{إذا } x > 2 \end{cases}$

في التمارين 25–28، احسب القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة.

25. $f(x) = 2x + 1, [0, 4]$
26. $f(x) = x^2 + 2x, [0, 1]$
27. $f(x) = x^2 - 1, [1, 3]$
28. $f(x) = 2x - 2x^2, [0, 1]$

في التمارين 29–32، استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير قيمة التكامل.

29. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$
30. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$
31. $\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1}\,dx$
32. $\int_{-1}^1 \frac{3}{x^3 + 2}\,dx$

في التمرينين 33 و34، أوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل.

33. $\int_0^2 3x^2\,dx\ (= 8)$
34. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x)\,dx\ (= \frac{2}{3})$

في التمرينين 35 و36، استخدم النظرية 4.2 لكتابة تعبير في صورة تكامل منفرد.

35. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

36. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$ (b) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

في التمرينين 37 و38، فرضا أن $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ اوجد

37. (a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,dx$

38. (a) $\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

في التمرينين 39 و40، ارسم المساحة المناظرة للتكامل.

39. (a) $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$ (b) $\int_2^4 (x^2 - x)\,dx$

40. (a) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ (b) $\int_{-2}^2 e^{-x}\,dx$

41. (a) استخدم النظرية 4.3 لتثبت أن $\sin(1) \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4$
(b) استخدم النظرية 4.3 لتثبت أن $\frac{7}{3}\sin(1) \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le \frac{7}{3}$
(c) هل نتيجة الجزء (a) أو الجزء (b) مفيدة أكثر؟ اشرح بإيجاز

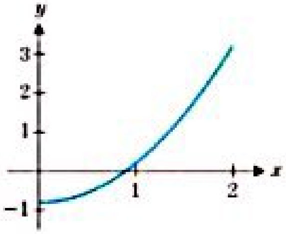
42. استخدم النظرية 4.3 لإيجاد حدود $\int_1^2 x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx$

43. اثبت أنه إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b]$، فإنه يوجد عدد c في (a, b) بحيث $f(c)$ تساوي قيمة f المتوسطة في الفترة $[a, b]$.

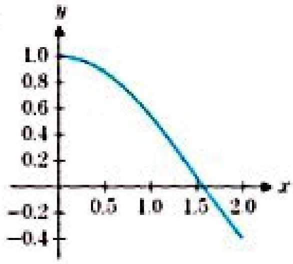
44. اثبت أن الجزء الثاني من النظرية 4.2 للحالة الخاصة حيث $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

في التمارين 48–45، استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة أو سالبة.

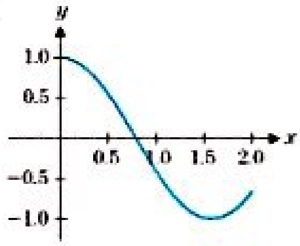
45.



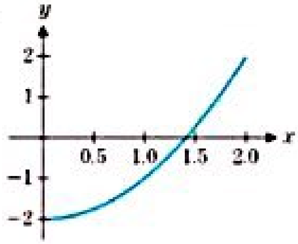
46.



47.



48.



في التمارين 52–49، استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل.

49. $\int_0^2 3x\,dx$

50. $\int_1^4 2x\,dx$

51. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

52. $\int_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

53. عبر عن كل نهاية في صورة تكامل

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{n+2}{n^2} + \cdots + \frac{2n}{n^2}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n) + f(2/n) + \cdots + f(n/n)}{n}$

54. على فرض أن القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ تساوي v وأن القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[b, c]$ تساوي w. أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, c]$.

التطبيقات

55. على فرض أن، لمجتمع معين من الكائنات الحية، يكون معدل المواليد محددا بمقدار $b(t) = 410 - 0.3t$ كائن حي في الشهر وأن معدل الوفيات محدد بمقدار $a(t) = 390 + 0.2t$ كائن في الشهر. اشرح سبب تمثيل $\int_0^{12}[b(t) - a(t)]\,dt$ صافي التغيير في المجتمع في أول 12 شهرا. حدد القيمة من t صحيحة بحيث $b(t) > a(t)$. ما الأوقات التي يتزايد فيها المجتمع ويتناقص؟ حدد الزمن الذي يصل فيه عدد أفراد المجتمع إلى ذروته.

56. في مجتمع معين من الكائنات الحية. على فرض أن معدل المواليد محدد بمقدار $b(t) = 400 - 3\sin t$ كائن حي في الشهر وأن معدل الوفيات محدد في $a(t) = 390 + t$ كائن في الشهر. اشرح سبب تمثيل $\int_0^{12}[b(t) - a(t)]\,dt$ صافي التغيير في المجتمع في أول 12 شهرا. حدد بالتمثيل البياني قيمة من t صحيحة بحيث $b(t) > a(t)$. ما الأوقات التي يتزايد فيها المجتمع ويتناقص؟ قدر الزمن الذي يصل فيه عدد أفراد المجتمع إلى ذروته.

57. لأجل نوع معين من الغاز المثالي في درجة حرارة ثابتة، يرتبط الضغط P بالحجم V باستخدام الدالة $PV = 10$. إن العمل المطلوب هو زيادة الحجم من $V = 2$ إلى $V = 4$ محدد بالتكامل $\int_2^4 P(V)\,dV$. قدر قيمة هذا التكامل.

58. على فرض أن درجة الحرارة t شهور إلى العام معطاة بالدالة $T(t) = 18 - 4\cos\frac{\pi}{6}t$ (درجة سيلسيوس). قدر متوسط درجة الحرارة على مدار عام كامل. اشرح سبب وضوح الإجابة من التمثيل البياني $T(t)$.

تتضمن التمارين 62–59 الجردة في الزمن المناسب الذي تمت مناقشته في مقدمة الوحدة.

59. في ما يتعلق بالأعمال التي تستخدم الجردة في الزمن المناسب، يصل تسليم العناصر Q بعد شحن العنصر الأخير مباشرة. على فرض أن العناصر تشحن بمعدل ثابت لعدد r عنصر في اليوم. إذا وصل التسليم في الزمن 0... اثبت أن $f(t) = Q - rt$ تعطي عدد العناصر في المخزن لـ $0 \le t \le \frac{Q}{r}$. أوجد القيمة المتوسطة لـ f في الفترة $[0, \frac{Q}{r}]$.

60. يستخدم نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ) الافتراضات في التمرين 59 لتحديد الكمية المثالية Q للطلبية في زمن محدد. على فرض أنه يطلب عدد D عنصرا سنويا، بحيث يساوي عدد مرات الشحن $\frac{D}{Q}$. إذا كانت C_o هي تكلفة وضع الطلبية
و C_c هي التكلفة السنوية لتخزين عنصر في المخزن، فإن التكلفة السنوية الإجمالية تحدد باستخدام $f(Q) = C_o\frac{D}{Q} + C_c\frac{Q}{2}$. أوجد قيمة Q التي تقلل من التكلفة الإجمالية. في ما يتعلق بحجم الطلبية المثالي، وضح أن التكلفة الإجمالية للطلبية $C_o\frac{D}{Q}$ تساوي التكلفة الإجمالية للحمل (للتخزين) $C_c\frac{Q}{2}$

61. يمكن تعديل نموذج كمية الطلبية الاقتصادية في التمرين 60 لنأخذ في الحسبان الفواتير الفورية. في هذه الحالة، بدلا من أن يصل التسليم كله في زمن واحد، يصل التسليم بمعدل p عنصر في اليوم. فرضا أن التسليم بمقدار Q يبدأ في الزمن 0..، ومع استمرار الشحن بمعدل r عنصر في اليوم (على فرض أن $p > r$).

وضح أنه عندما يكتمل التسليم، فإن المخزون يساوي $Q(1 - r/p)$. ومن هنا، ينخفض المخزون بمعدل ثابت وهو r عنصر في اليوم إلى أن ينفد كل المخزون. وضح أن متوسط المخزون يساوي $\frac{1}{2}Q(1 - r/p)$ أوجد حجم الطلبية Q التي تحقق القيمة الصغرى من التكلفة الإجمالية.

62. يمكننا إجراء مزيد من التصفية في نموذج كمية الطلبية الاقتصادية في التمرينين 60 و61 وهو أن تتيح تخفيضات على كميات الطلبيات الكبيرة. ولتسهيل الحسابات أكثر، خذ قيما معينة من $D = 4000$ ، $C_o = AED50,000$ و $C_c = AED3800$. إذا طلب من 1 إلى 99 عنصرا، يكون السعر AED 2800 للعنصر. إذا طلب من 100 إلى 179 عنصرا، يكون السعر AED 2200 للعنصر. إذا طلب 180 عنصرا أو أكثر، يكون السعر AED 1800 للعنصر. تبلغ التكلفة الإجمالية الآن $C_o\frac{D}{Q} + C_c\frac{Q}{2} + PD$ ، حيث إن P تساوي السعر للعنصر. أوجد حجم الطلبية Q الذي يحقق القيمة الصغرى من التكلفة الإجمالية.

63. تنص معادلة كمية حركة الدفع على العلاقة بين القوة $F(t)$ المبذولة على جسم له الكتلة m والتغير الناتج عن السرعة المتجهة Δv للجسم. إن المعادلة هي $m\Delta v = \int_a^b F(t)\,dt$ ، حيث $\Delta v = v(b) - v(a)$. على فرض أن قوة ضربة كرة القدم على إحدى الكرات تساوي تقريبا $F(t) = 9 - 10^8(t - 0.0003)^2$ ألف نيوتن، حيث تتراوح t بين 0 و0.0006 ثانية. ما أقصى قوة على الكرة؟ باستخدام $m = 0.01$ لإيجاد كتلة الكرة. قدر التغيير في السرعة المتجهة Δv (بوحدة m/s).

64. تشير القياسات المأخوذة من أقدام اندفاع لاعبي تنس الريشة لعمل ضربة إلى قوة رأسية تساوي تقريبا $F(t) = 1000 - 25,000(t - 0.2)^2$ نيوتن، حيث تتراوح t بين 0 و0.4 ثانية (انظر علم رياضات التنس). وفي ما يتعلق بلاعب كتلته $m = 5$ ، استخدم معادلة كمية حركة الدفع في التمرين 63 لتقدير التغير في السرعة المتجهة الرأسية للاعب.

تمارين استكشافية

1. إن العديد من الكميات الأساسية التي يستخدمها علماء الأوبئة لدراسة تفشي المرض موضحة عن طريق التكاملات. في حالة مرض الإيدز، يصاب الشخص بفيروس نقص المناعة البشري، ويصاب بالإيدز بعد دورة الحضانة. هدفنا هو اشتقاق قانون لحساب عدد المصابين بمرض الإيدز بناء على معدل الإصابة بفيروس نقص المناعة البشرية $g(t)$ وتوزيع الحضانة $F(t)$. لنضرب مثالا بسيطا، على فرض أن معدل العدوى في الشهر الأول هي 20 فردا في الشهر، ومعدل العدوى في الشهر الثاني هي 30 فردا في الشهر، ومعدل العدوى في الشهر الثالث هي 25 فردا في الشهر. إذا $g(1) = 20$ و $g(2) = 30$ و $g(3) = 25$. وعلى فرض أن 20% ممن أصيبوا بالعدوى أصيبوا بالإيدز بعد شهر واحد، و50% أصيبوا بالإيدز بعد شهرين، و30% أصيبوا بالإيدز بعد 3 أشهر (لحسن الحظ أن هذه الأعداد ليست حقيقية على الإطلاق). إذا $F(1) = 0.2$ و $F(2) = 0.5$ و $F(3) = 0.3$ اشرح سبب بلوغ عدد المصابين بالإيدز في الشهر الرابع $g(1)F(3) + g(2)F(2) + g(3)F(1)$. احسب هذا العدد. ثم، على فرض أن $g(0.5) = 16$ و $g(1) = 20$ و $g(1.5) = 26$ و $g(2) = 30$ و $g(2.5) = 28$ و $g(3) = 25$ و $g(3.5) = 22$. علاوة على ذلك، وعلى فرض أن $F(0.5) = 0.1$ و $F(1) = 0.1$ و $F(1.5) = 0.2$ و $F(2) = 0.3$ و $F(2.5) = 0.1$ و $F(3) = 0.1$ و $F(3.5) = 0.1$. احسب عدد المصابين بالإيدز في الشهر الرابع. إذا كان لدينا $g(t)$ و $F(t)$ محددة بكل الأعداد الحقيقية t اشرح لماذا عدد المصابين بالإيدز في الشهر الرابع يساوي $\int_0^4 g(t)F(4 - t)\,dt$.

2. **شرط ريمان** ينص على أن $\int_a^b f(x)\,dx$ لا يبقى إلا إذا كان في كل $\epsilon > 0$ جزء P بحيث يتطابق المجموع الأعلى U والمجموع الأدنى L (انظر التمارين 32–29 في القسم 7.3) مع $|U - L| < \epsilon$. استخدم هذا الشرط لإثبات أن

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{إذا كانت } x \text{ نسبية} \\ 1 & \text{إذا كانت } x \text{ غير نسبية} \end{cases}$$

لا يقبل التكامل في الفترة $[0, 1]$.

يطلق على الدالة f دالة **ليبشتز** في الفترة $[a, b]$ إذا كانت $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ لكل إحداثيات x وإحداثيات y في $[a, b]$. استخدم شرط ريمان لإثبات أن كل دالة من دوال ليبشتز في $[a, b]$ تقبل التكامل في $[a, b]$.

الدرس 5-7

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

في هذا الدرس، نقدم زوجا من النتائج المعروفة مجتمعة بالنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. على المستوى العملي، تمدنا النظرية الأساسية بطريقة مختصرة ونحتاجها أكثر لحساب تكاملات محدودة دون الحاجة لإيجاد نهايات مجموع ريمان. وعلى المستوى النظري، توحد النظرية الأساسية الدراسات التي تبدو غير مترابطة عن الاشتقاقات والتكاملات المحدودة، مما يوضح لنا أن التفاضل والتكامل هي عمليات عكسية في حقيقتها. وبهذا المعنى، تكون النظرية أساسية حقا لحساب التفاضل والتكامل بمثابة منهج مترابط.

توجد ملحوظة تتعلق بطبيعة الجزء الأول من النظرية الأساسية وهو أننا استخدمنا رموزا متشابهة نوعا ما لعمليات التكامل غير المحدود والمحدود. ولكن، تضع النظرية الأساسية عبارات أكثر إحكاما عن العلاقة بين التفاضل والتكامل.

النظرية 5.1 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الأول)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أي دالة أصلية لـ $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

ملاحظات

ينص الجزء الأول من النظرية الأساسية أنه لحساب التكامل المحدود، فإننا لا نحتاج إلا إلى إيجاد الدالة الأصلية ثم إيجاد قيمتها في حدين من حدود التكامل. لاحظ أن هذا تطور كبير في حساب حدود مجاميع ريمان، التي قد لا تعطي حسابا دقيقا إلا في بعض المسائل البسيطة.

البرهان

أولا، نجزئ $[a, b]$ ،

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

حيث إن $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، لحساب $i = 1, 2, \ldots, n$. بالعمل عكسيا، لاحظ أنه بناء على كل عمليات الحذف، فإنه يمكننا كتابة

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \end{aligned} \tag{5.2}$$

بما أن F هي دالة أصلية من الدالة f وهي قابلة للاشتقاق على (a, b) ومتصلة على $[a, b]$. بناء على نظرية القيمة المتوسطة، يكون لدينا لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ ، ما يأتي

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\,\Delta x \tag{5.3}$$

لبعض $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. وبالتالي من (5.2) و (5.3) ، نستخلص

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{5.4}$$

يجب عليك معرفة أن التعبير الأخير هو مجموع ريمان للدالة f على $[a, b]$. بأخذ النهاية في كلا الطرفين في (5.4) عندما $n \to \infty$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [F(b) - F(a)] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

وفقا للمطلوب، بما أن تلك الكمية الأخيرة ثابتة. ■

ملاحظات تاريخية

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل تحدد بداية حساب التفاضل والتكامل على أنه منهج موحد ومعتمد لدى كل من إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنز. وضع نيوتن حساب التفاضل والتكامل الخاص به في أواخر ستينيات القرن السابع عشر ولكنه لم يعلن عن النتائج حتى عام 1687. اكتشف لايبنز النتائج ذاتها مرة أخرى في أواسط سبعينات القرن السابع عشر ولكنه أعلن عنها قبل نيوتن في عامي 1684 و1686. تتفوق الرموز والمصطلحات التي استخدمها لايبنز، التي يستخدم الكثير منها اليوم، على التي استخدمها نيوتن (إذ أطلق نيوتن على الاشتقاقات والتكامل اسم التدفق والانسياب). ولكن نيوتن وضع الأفكار المركزية قبل لايبنز. وبناء على خطابات من نيوتن إلى لايبنز في سبعينات القرن السابع عشر، وقع جدل كبير حول الذي يستحق اعتماد اختراع حساب التفاضل والتكامل. وتطورت تلك المشكلة إلى معركة بين إنجلترا وباقي المجتمع الأوروبي المعني بالرياضيات. توقفت الاتصالات بين المجموعتين لأكثر من 100 عام وأثر ذلك في تطور الرياضيات تأثيرا كبيرا في القرن السابع عشر.

ملحوظة 5.1

سنستخدم غالبا الرمز

$$F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

وبذلك نتمكن من كتابة الدالة الأصلية قبل إيجاد قيمتها عند النقطتين الطرفيتين.

المثال 5.1 استخدام النظرية الأساسية

احسب $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$

الحل لاحظ أن $f(x) = x^2 - 2x$ هي دالة متصلة على الفترة $[0, 2]$ وبالتالي يمكننا تطبيق النظرية الأساسية. توجد دالة أصلية من قاعدة القوة وهي ببساطة:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0) = -\frac{4}{3}$$

تذكر أننا عمليا وجدنا قيمة التكامل في المثال 5.1 بحساب نهاية مجموع ريمان. (انظر المثال 7.3) إذا أتيح لك الاختيار، فأي طريقة ستفضل؟

بما أنه أتيح لك الخيار في المثال 5.1، فلن تتمكن من إيجاد قيم التكاملات في الأمثلة 5.2 - 5.5 بحساب نهاية مجموع ريمان مباشرة، إذ أنه لا توجد قوانين للمجاميع المدرجة.

المثال 5.2 حساب التكامل المحدود بدقة

احسب $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

الحل لاحظ بما أن $f(x) = x^{1/2} - x^{-2}$ هي دالة متصلة على $[1, 4]$، فإنه يمكننا تطبيق النظرية الأساسية. بما أن الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + x^{-1}$. يكون لدينا

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + x^{-1}\right)\Big|_1^4 = \left[\frac{2}{3}(4)^{3/2} + 4^{-1}\right] - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{47}{12}$$

المثال 5.3 استخدام النظرية الأساسية لحساب المساحات

أوجد المساحة الواقعة تحت المنحنى $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$.

الحل بما أن $\sin x \geq 0$ و $\sin x$ هي دالة متصلة على $[0, \pi]$، نجد أن

$$\text{المساحة} = \int_0^\pi \sin x\,dx$$

لاحظ أن الدالة الأصلية للدالة $\sin x$ هي $F(x) = -\cos x$. بناء على النظرية الأساسية، سنحصل على

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

ملاحظات اليوم في الرياضيات

بينوا ماندلبروت (– 1924)

هو عالم رياضيات فرنسي اخترع الهندسة الكسرية وطورها (انظر مجموعة ماندلبروت في تمارين الدرس 9.1). وكان ماندلبروت دائما ما ترشده بديهته الهندسية القوية. ويشرح قائلا: "واجهت بعض عمليات التكامل المعقدة، وقد ربطتها على الفور بشكل مألوف . لقد عرفت عددا كبيرا من الأشكال التي اطلعت عليها مرة في أحد الكتب وتذكرتها على الدوام، بالإضافة إلى خواصها وميزاتها... وقد وسعت الهندسة الكسرية التي طورها ماندلبروت قدرتنا بدرجة كبيرة لوصف خصائص لظواهر مثل تركيب الرئتين والقلب أو الجبال والسحب، بالإضافة إلى سوق الأوراق المالية والطقس بشكل صحيح.

المثال 5.4 تكامل محدود يتضمن دالة أسية

احسب $\int_0^4 e^{-2x}\,dx$.

الحل بما أن $f(x) = e^{-2x}$ هي دالة متصلة، يمكننا تطبيق النظرية الأساسية. لاحظ أن الدالة الأصلية للدالة e^{-2x} هي $-\frac{1}{2}e^{-2x}$، لذلك

$$\int_0^4 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^4 = -\frac{1}{2}e^{-8} - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) \approx 0.49983$$

المثال 5.5 تكامل محدود يتضمن لوغاريتم

أوجد قيمة $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$.

الحل بما أن $f(x) = \frac{2}{x}$ هي دالة متصلة على $[-3, -1]$، يمكننا تطبيق النظرية الأساسية. تذكر أولا أن الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي $2\ln|x|$. (يوجد خطأ شائع وهو إلغاء القيم المطلقة. وفي هذه

الحالة. يكون الخطأ كبيرًا! اطلع بعناية على ما يلي لمعرفة السبب).

$$\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|\Big|_{-3}^{-1} = 2(\ln|-1| - \ln|-3|)$$
$$= 2(\ln 1 - \ln 3) = -2\ln 3 \quad ■$$

المثال 5.6 تكامل محدود مع متغير في الحد الأعلى

أوجد قيمة $\int_1^x 12t^5\,dt$.

الحل على الرغم من أن الحد الأعلى في التكامل هو متغير، إلا أنه يمكننا استخدام النظرية الأساسية لإيجاد القيمة. وبما أن $f(t) = 12t^5$ هي دالة متصلة على أي فترة، لدينا

$$\int_1^x 12t^5\,dt = 12\,\frac{t^6}{6}\Big|_1^x = 2(x^6 - 1) \quad ■$$

ولن نتفاجأ أن يكون التكامل المحدود في المثال 5.6 هو دالة للمتغير x، حيث إن أحد حدود التكامل تتضمن المتغير x. ولكن، قد تكون الملاحظة التالية مفاجأة بالرغم من ذلك. لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}[2(x^6 - 1)] = 12x^5$$

وهي تتشابه مع المكامل الأصلي، ما عدا المتغير (المستعار) في التكامل، t ، الذي تم استبداله بالمتغير في الحد الأعلى من التكامل، x.

في الحقيقة يبدو أن الصدفة القريبة التي لوحظت هنا ليست بمعزل عن المسألة، كما نرى في النظرية 5.2. أولاً، يجب أن تتأكد بشأن ما تعنيه الدالة مثل $F(x) = \int_1^x 12t^5\,dt$. لاحظ أن قيمة الدالة في $x = 2$ توجد باستبدال x بالعدد 2:

$$F(2) = \int_1^2 12t^5\,dt$$

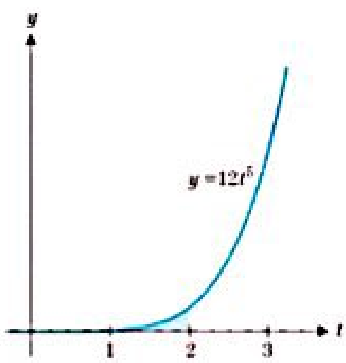
وهذا يناظر المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = 12t^5$ من $t = 1$ إلى $t = 2$. (انظر الشكل 7.25a).

وبالمثل، فإن قيمة الدالة في $x = 3$ تساوي

$$F(3) = \int_1^3 12t^5\,dt$$

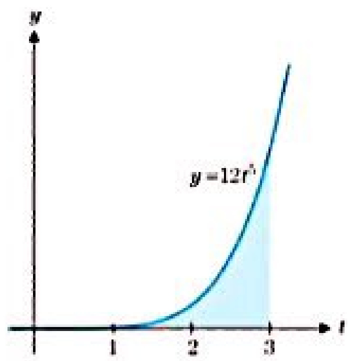
وهي المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = 12t^5$ من $t = 1$ إلى $t = 3$. (انظر الشكل 7.25b).

وعمومًا لأي $x > 1$ ، $F(x)$ يغطي المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = 12t^5$ من $t = 1$ وحتى $t = x$. (انظر الشكل 7.25c). ولذلك، يطلق على الدالة F أحيانًا **دالة المساحة**. لاحظ أنه لأجل $x > 1$ ، بينما تزداد قيمة x ، $F(x)$ تغطي المزيد والمزيد من المساحة الواقعة تحت المنحنى إلى يمين $t = 1$.



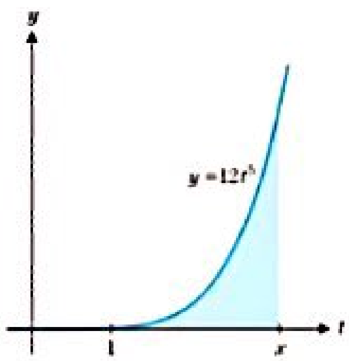
الشكل 7.25a

المساحة من $t = 1$ إلى $t = 2$



الشكل 7.25b

المساحة من $t = 1$ إلى $t = 3$



الشكل 7.25c

المساحة من $t = 1$ إلى $t = x$

النظرية (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الثاني)

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. فإن $F'(x) = f(x)$. على $[a, b]$.

البرهان

باستخدام تعريف الاشتقاق، نستخلص أن

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad (5.5)$$

حيثما حولنا حدود التكامل وفقا للمعادلة (4.2) وجمعنا عمليات التكامل وفقا للنظرية (ii) 4.2.

تحقق بعناية من الحد الأخير في (5.5). يمكنك معرفة على أنه نهاية للقيمة المتوسطة للدالة $f(t)$ على الفترة $[x, x+h]$ (إذا كانت $h > 0$). بناء على نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (النظرية 4.4). نحصل على

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \qquad (5.6)$$

لبعض الأعداد c الواقعة بين x و $x+h$. وأخيرا، بما أن c تقع بين x و $x+h$ ، نستخلص أن $c \to x$. عندما $h \to 0$. بما أن الدالة f متصلة. فإننا نستنتج من (5.5) و(5.6) أن

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

كما هو مطلوب. ■

ملحوظة 5.2

يقول الجزء الثاني من النظرية الأساسية أن كل دالة متصلة f لها بديل. وبالتحديد، $\int_a^x f(t)\,dt$.

المثال 5.7 استخدام النظرية الأساسية، الجزء الثاني

لأجل $F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt$. احسب $F'(x)$.

الحل هنا، المكامل يساوي $f(t) = t^2 - 2t + 3$. وبناء على النظرية 5.2. يساوي الاشتقاق

$$F'(x) = f(x) = x^2 - 2x + 3$$

وبذلك، $F'(x)$ هي الدالة المكاملة باستبدال المتغير t بالمتغير x.

قبل الانتقال إلى الأمثلة الأكثر تعقيدا، لننظر إلى المثال 5.7 بمزيد من التفصيل. وذلك لنطمئن أكثر إلى المعنى المقصود من الجزء الثاني في النظرية الأساسية. أولا، يمكننا استخدام الجزء الأول من النظرية الأساسية لإيجاد

$$F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t\Big|_1^x = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right)$$

من السهل اشتقاق ذلك مباشرة، وذلك للحصول على

$$F'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x + 3 - 0 = x^2 - 2x + 3$$

لاحظ أن الحد الأدنى للتكامل (في هذه الحالة، 1) لا يؤثر على قيمة $F'(x)$. وفي تعريف $F(x)$ ، الحد الأدنى من التكامل نادرا ما يحدد قيمة الحد الثابت المطروح في نهاية حساب $F(x)$. بما أن الاشتقاق لحد ثابت يساوي «صفر»، فإن هذه القيمة لا تؤثر على $F'(x)$.

المثال 5.8 استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الأساسية، الجزء الثاني

إذا كان $F(x) = \int_2^{x^2} \cos t\, dt$ ، فاحسب $F'(x)$.

الحل لنكن $u(x) = x^2$ ، ولذلك

$$F(x) = \int_2^{u(x)} \cos t\, dt$$

من قاعدة السلسلة،

$$F'(x) = \cos u(x) \frac{du}{dx} = \cos u(x)(2x) = 2x \cos x^2$$

المثال 5.9 تكامل محدود مع متغير في الحدين الأدنى والأعلى

إذا كانت $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt$ ، احسب $F'(x)$.

الحل يمكن تطبيق النظرية الأساسية فقط على التكامل المحدود مع المتغيرات في الحد الأعلى. ولذلك سنعيد أولاً كتابة التكامل وفق النظرية 4.2 (ii) كما يأتي:

$$F(x) = \int_{2x}^{0} \sqrt{t^2+1}\, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt = -\int_0^{2x} \sqrt{t^2+1}\, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt$$

حيث إننا أبدلنا حدود التكامل في التكامل الأول. باستخدام قاعدة السلسلة كما المثال 5.8. سنحصل على

$$F'(x) = -\sqrt{(2x)^2+1}\,\frac{d}{dx}(2x) + \sqrt{(x^2)^2+1}\,\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= -2\sqrt{4x^2+1} + 2x\sqrt{x^4+1}$$

ملحوظة 5.3

إن الشكل العام لقاعدة السلسلة المستخدمة في المثال 5.8 هو: إذا كانت $g(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ ، فإن $g'(x) = f(u(x))u'(x)$ أو

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt = f(u(x))u'(x)$$

قبل مناقشة الأهمية النظرية لجزئي النظرية الأساسية، نذكر مثالين يوضحان لك سبب الحاجة إلى حساب التكاملات والاشتقاقات أولاً.

المثال 5.10 حساب مسافة الهبوط لجسم يسقط

على فرض أن السرعة المتجهة (إلى الأسفل) لأحد لاعبي القفز الحر معطى بالدالة $v(t) = 9(1 - e^{-t})$ ft/s لأول 5 ثوان من القفز. احسب المسافة المجتازة عند الهبوط.

الحل تذكر أن المسافة المجتازة d معطاة بالتكامل المحدود

$$d = \int_0^5 (9 - 9e^{-t})\, dt = (9t + 9e^{-t})\Big|_0^5$$
$$= (45 + 9e^{-5}) - (0 + 9e^0) = 36 + 9e^{-5} \approx 36 \text{ مترا}$$

تذكر أن السرعة المتجهة هي المعدل اللحظي للتغير لدالة المسافة المجتازة المرتبطة بالزمن. نحن نرى في المثال 5.10 أن التكامل المحدود للسرعة المتجهة يعطي إجمالي التغير في دالة المسافة المجتازة على فترة زمنية معطاة. ينطبق تفسير مشابه للاشتقاق والتكامل المحدود على العديد من الكميات موضع الاهتمام. في المثال 5.11، ننظر إلى معدل التغير وإجمالي التغير للماء في الخزان.

المثال 5.11 معدل التغير وإجمالي التغير في حجم الخزان

على فرض أن ماءا تتدفق في خزان وتتسرب خارجه. يساوي المعدل الصافي للتغير (وهو معدل التدفق للداخل ناقص معدل التسرب للخارج) في الماء $f(t) = 20(t^2 - 1)$ لترات في الدقيقة. (a) لكل $0 \le t \le 3$ ، حدد متى يزداد مستوى الماء، ومتى ينخفض. (b) إذا كان الخزان يسع 200 لترا

من الماء عند الزمن $t = 0$. فحدد كم لترا في الخزان في الزمن $t = 3$ دقائق.

الحل لتكن $w(t)$ هو عدد اللترات في الخزان في الزمن t . (a) لاحظ أن مستوى الماء ينخفض إذا كان $w'(t) = f(t) < 0$. لدينا

$$f(t) = 20(t^2 - 1) < 0 \text{ إذا كان } 0 \le t < 1$$

وبدلا من ذلك، يزداد مستوى الماء إذا كان $w'(t) = f(t) > 0$. وفي هذه الحالة، نحصل على

$$f(t) = 20(t^2 - 1) > 0 \text{ إذا كان } 1 < t \le 3$$

(b) لقد بدأنا مع $w'(t) = 20(t^2 - 1)$. وبالتكامل من $t = 0$ إلى $t = 3$. نحصل على

$$\int_0^3 w'(t)\, dt = \int_0^3 20(t^2 - 1)\, dt$$

بإيجاد قيمة التكاملات في كلا الطرفين، يكون الناتج

$$w(3) - w(0) = 20\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=3}$$

بما أن $w(0) = 200$ ، سنحصل على

$$w(3) - 200 = 20(9 - 3) = 120$$

ومن ثم،

$$w(3) = 200 + 120 = 320$$

ولذلك سيكون في الخزان 320 لترا في غضون 3 دقائق. ■

في المثال 5.12، نستخدم الجزء الثاني من النظرية الأساسية لتحديد المعلومات عن الدالة التي تبدو معقدة. لاحظ أنه على الرغم من أننا لا نعرف كيف نجد قيمة التكامل، إلا أنه يمكننا استخدام النظرية الأساسية للحصول على بعض المعلومات المهمة عن الدالة.

المثال 5.12 إيجاد المماس للدالة المعرفة على أنها تكامل

للدالة $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt$ ، أوجد معادلة المماس عند $x = 2$.

الحل لاحظ أنه لا توجد قيم للدالة تقريبا يمكننا حسابها بدقة. ومع ذلك يمكننا إيجاد معادلة المماس بسهولة! بناء على الجزء الثاني من النظرية الأساسية وقاعدة السلسلة، نستنتج الاشتقاق

$$F'(x) = \ln[(x^2)^3 + 4]\frac{d}{dx}(x^2) = \ln[(x^2)^3 + 4](2x) = 2x\ln(x^6 + 4)$$

إذا، الميل عند $x = 2$ يساوي $F'(2) = 4\ln(68) \approx 16.878$. يمر المماس بالنقطة مع $x = 2$ و $y = F(2) = \int_4^4 \ln(t^3 + 4)\, dt = 0$ (حيث إن الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى). إذا معادلة المماس هي

$$y = (4\ln 68)(x - 2)$$ ■

ما بعد القوانين

إن جزئي النظرية الأساسية هما وجهين مختلفين لعملة واحدة. نذكر الاستنتاجات لكل من الجزأين الأول والثاني في النظرية الأساسية،

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

في كلا الجزأين، نقول أن التفاضل والتكامل نوعا ما هما عمليتين عكسيتين، فتأثير إحدى العمليتين (مع الفرضيات المناسبة) يبطل تأثير الأخرى. وعلى ما يبدو فإن هذا الترابط الأساسي هو ما يوحد أساليب الحساب غير المترابطة مع حساب التفاضل والتكامل.

تمارين كتابية

1. لاستكشاف الجزء الأول من النظرية الأساسية بيانيا، افترض أولا أن $F(x)$ متزايدة على الفترة $[a, b]$. اشرح لماذا سيكون كلا التعبيرين $F(b) - F(a)$ و $\int_a^b F'(x)\,dx$ موجبين. وعلاوة على ذلك، اشرح لماذا كلما تزايدت سرعة $F(x)$ ، سيزداد كل تعبير. وبالمثل، اشرح لماذا إذا كانت $F(x)$ متناقصة، سيكون كلا التعبيرين سالبين.

2. يمكنك التفكير في الجزء الأول من النظرية الأساسية في ما يتعلق بموضع $s(t)$ والسرعة المتجهة $v(t) = s'(t)$. ابدأ بافتراض أن $v(t) \geq 0$. اشرح لماذا $\int_a^b v(t)\,dt$ تعطي إجمالي المسافة المجتازة واشرح لماذا هذا يساوي $s(b) - s(a)$. ناقش ما الذي يتغير إذا كان $v(t) < 0$.

3. لاستكشاف الجزء الثاني من النظرية الأساسية بيانيا، فكر في الدالة $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. إذا كانت $f(t)$ موجبة على الفترة $[a, b]$. اشرح لماذا $g'(x)$ ستكون موجبة أيضا. علاوة على ذلك، كلما تزايدت $f(t)$ ، ستزداد $g'(x)$. وبالمثل، اشرح لماذا إذا كانت $f(t)$ سالبة، فإن $g'(x)$ ستكون سالبة.

4. في الجزء الأول من النظرية الأساسية، F قد تكون أي دالة أصلية من f . تذكر أن الدالتين الأصليتين من f يختلفان بمقدار ثابت. اشرح لماذا تكون الدالة $F(b) - F(a)$ معرفة جيدا؛ وبذلك، إذا كانت F_1 و F_2 هما دالتين أصليتين، فاشرح لماذا $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$. عند تقييم التكامل المعرف، اشرح لماذا لا نحتاج إلى إدراج « $+ c$ » مع الدالة الأصلية.

في التمارين 18—1، استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1. $\int_0^2 (2x - 3)\,dx$
2. $\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx$
3. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\,dx$
4. $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1)\,dx$
5. $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$
6. $\int_1^2 \left(4x - \frac{2}{x^2}\right) dx$
7. $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\,dx$
8. $\int_0^2 \left(\frac{e^{x} - 2e^{2x}}{e^{3x}}\right) dx$
9. $\int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin x - \cos x)\,dx$
10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3\csc x \cot x\,dx$
11. $\int_0^{\pi/4} \sec t \tan t\,dt$
12. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$
13. $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
14. $\int_{-1}^1 \frac{4}{1 + x^2}\,dx$
15. $\int_1^4 \frac{t - 3}{t}\,dt$
16. $\int_0^4 t(t - 2)\,dt$
17. $\int_0^1 (e^{x/2})^2\,dx$
18. $\int_0^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

في التمارين 24—19، أوجد المساحة المعطاة.

19. المساحة فوق المحور -x وتحت $y = 4 - x^2$
20. المساحة تحت المحور -x وفوق $y = x^2 - 4x$
21. مساحة المنطقة المحدودة بين الدالة $y = x^2$ و $x = 2$ والمحور -x
22. مساحة المنطقة المحدودة بين الدالة $y = x^3$ و $x = 3$ والمحور -x
23. المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور -x لكل $0 \leq x \leq \pi$
24. المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور -x لكل $-\pi/2 \leq x \leq \pi/4$

في التمارين 32—25، أوجد الاشتقاق $f'(x)$.

25. $f(x) = \int_4^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$
26. $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\,dt$
27. $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\,dt$
28. $f(x) = \int_x^2 \sec t\,dt$
29. $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2\,dt$
30. $f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{t^2}\,dt$
31. $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\,dt$
32. $f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\,dt$

في التمارين 36—33، أوجد دالة الموقع $s(t)$ من السرعة المتجهة المعطاة أو دالة التسارع والقيمة (القيم) الابتدائية. على فرض أن الوحدات هي الأمتار والثواني.

33. $v(t) = 12 - \sin t,\ s(0) = 2$
34. $v(t) = 3e^{-t},\ s(0) = 2$
35. $a(t) = 1.2 - t,\ v(0) = 8,\ s(0) = 0$
36. $a(t) = 4.8 - t^2,\ v(0) = 0,\ s(0) = 30$

37. على فرض أن معدل تغير الماء في الخزان يساوي $f(t) = 10\sin t$ لترا في الدقيقة. (a) لكل $0 \leq t \leq 2\pi$. حدد متى يتزايد مستوى الماء ومتى يتناقص. (b) إذا كان الخزان يسع 100 لترا من الماء في الزمن $t = 0$ ، فحدد كم لترا في الخزان عند $t = \pi$.

38. على فرض أن معدل تغير الماء في بركة يساوي $f(t) = 4t - t^2$ ألف لتر في الدقيقة. (a) لكل $0 \leq t \leq 6$. حدد متى يرتفع مستوى الماء ومتى يهبط. (b) إذا كانت البركة تسع 40 ألف لتر من الماء عند الزمن $t = 0$ ، فحدد كم لترا في البركة عند $t = 6$.

في التمارين 42—39، أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x .

39. $y = \int_0^x \sin\sqrt{t^2 + \pi^2}\,dt,\ x = 0$

40. $y = \int_{-1}^{x} \ln(t^2 + 2t + 2)\, dt,\ x = -1$

41. $y = \int_{2}^{x} \cos(\pi t^3)\, dt,\ x = 2$

42. $y = \int_{0}^{x} e^{-t^2+1}\, dt,\ x = 0$

في التمارين 48–43، اذكر الطريقة باستخدام النظرية الأساسية إذا أمكن ذلك أو تقدير التكامل باستخدام مجاميع ريمان. (إرشاد: يمكن حل المسائل باستخدام قوانين الدوال الأصلية التي تعلمناها سابقاً).

43. $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\, dx$

44. $\int_0^2 (\sqrt{x}+1)^2\, dx$

45. $\int_1^4 \frac{x^2}{x^2+4}\, dx$

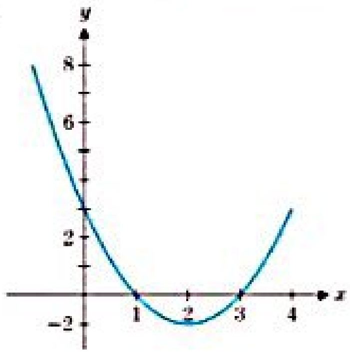
46. $\int_1^4 \frac{x^2+4}{x^2}\, dx$

47. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

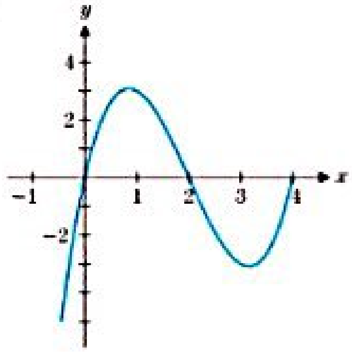
48. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sec^2 x}\, dx$

في التمرينين 49 و50 . استخدم التمثيل البياني لتنظيم $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^3 f(x)\,dx$ بالترتيب، من الأصغر إلى الأكبر. في ما يخص $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ، حدد الفترات التي تتزايد فيها g وحدد النقاط الحرجة لأجل g .

49.



50.



في التمرينين 51 و 52. (a) اشرح كيف تعرف أن قيمة التكامل المقترحة هي خطأ و(b) ابحث عن كل الأخطاء.

51. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - (1) = -2$

52. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \tan \pi - \tan 0 = 0$

في التمرينين 53 و 54، حدد التكاملات التي تنطبق عليها النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، والتكاملات الأخرى التي يطلق عليها التكاملات المعتلة.

53. (a) $\int_0^4 \frac{1}{x-4}\, dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ (c) $\int_0^1 \ln x\, dx$

54. (a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\, dx$ (b) $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$ (c) $\int_0^2 \sec x\, dx$

في التمارين 58–55، أوجد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة.

55. $f(x) = x^2 - 1,\ [1, 3]$

56. $f(x) = 2x - 2x^2,\ [0, 1]$

57. $f(x) = \cos x,\ [0, \pi/2]$

58. $f(x) = e^x,\ [0, 2]$

.59 استخدم النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لإيجاد الدالة الأصلية لكل من (a) e^{-x^2} ؛ (b) $\sin\sqrt{x^2+1}$.

.60 لكل $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \le x \le 4 \\ x^2 - x, & 4 < x \end{cases}$ أوجد $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ لكل $x > 0$. هل $g'(x) = f(x)$ لكل $x > 0$ ؟

.61 حدد كل القيم القصوى المحلية لـ $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$.

.62 أوجد المشتقات من الرتبتين الأولى والثانية لـ $g(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du$ ، حيث إن f هي دالة متصلة. حدد الخاصية البيانية للدالة $y = g(x)$ التي تناظر الصفر لـ $f(x)$.

.63 لتكن $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 2 \\ x+1 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$ وعرف $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. أثبت أن $F(x)$ هي دالة متصلة ولكن ليس صحيحاً أن $F'(x) = f(x)$ لكل x . اشرح سبب عدم معارضة ذلك مع النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

.64 لتكن f دالة متصلة على الفترة $[0, 1]$. وعرف $g_n(x) = f(x^n)$ لكل $n = 1, 2$ وهكذا. لكل x معطاة مع $0 \le x \le 1$. أوجد $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$. ثم، أوجد $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx$.

التطبيقات

.65 تقود إيمان السيارة بسرعة $f(t) = 55 + 10\cos t$ km/h ، ويقود محمود السيارة بسرعة $g(t) = 50 + 2t$ km/h عند الزمن t دقيقة. على فرض أن إيمان ومحمود يبدآن في الموقع نفسه عند الزمن $t = 0$. احسب $\int_0^5 [f(t) - g(t)]\,dt$ ، وفسر التكامل بدلالة السباق بين إيمان ومحمود.

.66 يعتمد عدد العناصر التي يرغب المستهلكون في شرائها على سعر العنصر. لتكن $p = D(q)$ تمثل السعر (بالدراهم) الذي يمكن بيع q عنصر به. إن التكامل $\int_0^Q D(q)\,dq$ ممثل في صورة عدد

الدراهم الإجمالي الذي قد يرغب المستهلكون في دفعه مقابل Q عنصرا. إذا كان السعر ثابتا عند $P = D(Q)$ درهم، يساوي المبلغ الفعلي المنفق PQ. إن **فائض المستهلك** معرف بالدالة $CS = \int_0^Q D(q)\,dq - PQ$. (a) احسب فائض المستهلك لـ $D(q) = 150 - 2q - 3q^2$ عند $Q = 4$ وعند $Q = 6$. ما الذي ينم عنه الفرق في قيم CS عن عدد العناصر التي ينبغي إتاجها؟ (b) كرر لـ $D(q) = 40e^{-0.05q}$ عند $Q = 10$ و $Q = 20$.

67. في ما يتعلق بالأعمال التي تستخدم الجردة عند الزمن المناسب، يصل تسليم العناصر Q بعد شحن العنصر الأخير مباشرة. على فرض أن العناصر تشحن بمعدل غير ثابت بحيث $f(t) = Q - r\sqrt{t}$ تعطي عدد العناصر في المخزن. أوجد الزمن T الذي ينبغي أن يصل فيه الشحن التالي. أوجد القيمة المتوسطة لـ f على الفترة $[0, T]$.

68. يستخدم نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ) الفرضيات الموجودة في التمرين 67 لتحديد الكمية المثالية Q للطلبية في أي زمن معطى. فإذا كان C_o هي تكلفة وضع الطلبية، و C_c هي التكلفة السنوية لتخزين عنصر في المخزن و A هي القيمة المتوسطة من التمرين 67، فتحدد التكلفة السنوية باستخدام الدالة $f(Q) = C_o\frac{D}{Q} + C_cA$. أوجد قيمة Q التي تحقق القيمة الصغرى من التكلفة الإجمالية. وضح أنه في ما يتعلق بحجم تلك الطلبية، فإن التكلفة الإجمالية للطلبية $C_o\frac{D}{Q}$ تساوي تكلفة الاحتفاظ بالمخزون (للتخزين) C_cA.

تمارين استكشافية

1. عند حل معادلات التفاضل الموجودة في الشكل $\frac{dy}{dt} = f(y)$ للدالة المجهولة $y(t)$، غالبا يكون من الملائم استخدام دالة محتملة $V(y)$. إن هذه الدالة مثل $-\frac{dV}{dy} = f(y)$. في ما يخص الدالة $f(y) = y - y^3$. أوجد الدالة المحتملة $V(y)$. أوجد أماكن القيم الصغرى المحلية في $V(y)$ واستخدم التمثيل البياني في $V(y)$ لشرح لماذا يطلق على ذلك دالة محتملة «مزدوجة البئر». اشرح كل خطوة في العملية الحسابية

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = -f(y)f(y) \le 0$$

بما أن $\frac{dV}{dt} \le 0$، فهل الدالة V متزايدة أم متناقصة مع مرور الزمن؟ استخدم التمثيل البياني للدالة V لتوقع القيم الممكنة لـ $\lim_{t\to\infty} y(t)$. وبالتالي، يمكنك توقع قيمة النهاية لحل معادلة التفاضل بدون حل المعادلة ذاتها نهائيا. استخدم هذا الأسلوب لتوقع $\lim_{t\to\infty} y(t)$ إذا كان $y' = 2 - 2y$.

2. لتكن

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n + 4n^2x & -\frac{1}{2n} \le x \le 0 \\ 2n - 4n^2x & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$ لقيمة عشوائية n. ارسم $y = f_n(x)$ وأثبت أن $\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = 1$. احسب $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$. في ما يخص القيمة الثابتة $x \ne 0$ في $[-2, 2]$. احسب $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ واحسب $\int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. هل دائما صحيح أن $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$؟

التكامل بالتعويض

في هذا الدرس، سنوسع قدرتنا بدرجة كبيرة لحساب الدوال الأصلية بتطوير تقنية مفيدة تسمى التكامل بالتعويض.

المثال 6.1 إيجاد الدالة الأصلية بطريقة التجربة والخطأ

أوجد قيمة $\int 2xe^{x^2}dx$.

الحل نحتاج إلى إيجاد الدالة $F(x)$ التي لها $F'(x) = 2xe^{x^2}$. قد تميل إلى تخمين أن

$$F(x) = x^2e^{x^2}$$

هي دالة أصلية للدالة $2xe^{x^2}$. ولكن من قاعدة ناتج الضرب،

$$\frac{d}{dx}(x^2e^{x^2}) = 2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}(2x) \neq 2xe^{x^2}$$

والآن انظر عن قرب إلى المكامل ولاحظ أن $2x$ هي مشتقة x^2 و x^2 تبدو في أس لـ e^{x^2}. علاوة على ذلك، وبناء على قاعدة السلسلة، لكل $F(x) = e^{x^2}$،

$$F'(x) = e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$$

التي هي المكامل. لإنهاء هذا المثال، تذكر أننا نحتاج إلى إضافة عدد ثابت استثنائي، للحصول على

$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + c$$

وعموما، اعرف أنه عندما يكون عامل واحد في المكامل هو مشتقة للجزء الثاني من المكامل يجب النظر الى مشتقة قاعدة السلسلة.

لاحظ أنه عموما إذا كانت F هي أي دالة أصلية للدالة f، إذا تستنتج ما يلي بناء على قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = F'(u)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

وبناء على ذلك، نستنتج أن

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{d}{dx}[F(u)]\,dx = F(u) + c = \int f(u)\,du \qquad (6.1)$$

بما أن F هي دالة أصلية للدالة f، إذا قرأت التعابير الموجودة في أقصى اليسار وأقصى اليمين من المثال (6.1)، فهذا يقترح أن

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

لذا، إذا لم نستطع حساب التكامل $\int h(x)\,dx$ مباشرة، فغالبا نبحث عن متغير جديد u ودالة $f(u)$ لها

$$\int h(x)\,dx = \int f(u(x))\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

حيث إن التكامل الثاني من السهولة إيجاد قيمته أكثر من الأول.

ملاحظات

عند تقرير اختيار متغير جديد، توجد عدة أشياء نبحث عنها.

- الحدود التي هي اشتقاقات لحدود أخرى (أو أجزاء منها) و
- الحدود الصعبة على وجه الخصوص. (غالبا ما يمكنك استبدال الحدود الصعبة).

مثال 6.2 استخدام التعويض لإيجاد قيمة التكامل

أوجد قيمة $\int (x^3+5)^{100}(3x^2)\,dx$

الحل ربما لا يمكنك إيجاد قيمة هذه كما هي. مع ذلك، لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2$$

وهي عامل في المكامل. وهذا يؤدي بنا إلى عمل التعويض $u = x^3 + 5$، بحيث $du = \frac{d}{dx}(x^3+5)\,dx = 3x^2\,dx$. ذلك يحطينا

$$\int \underbrace{(x^3+5)^{100}}_{u^{100}}\underbrace{(3x^2)\,dx}_{du} = \int u^{100}\,du = \frac{u^{101}}{101} + c$$

لم ننته تماما بعد. بما أننا وضعنا المتغير الجديد u، فإننا نحتاج إلى الرجوع مرة أخرى للمتغير الأصلي x، للحصول على

$$\int (x^3+5)^{100}(3x^2)\,dx = \frac{u^{101}}{101} + c = \frac{(x^3+5)^{101}}{101} + c$$

من المفيد دائما إجراء تحقق سريع على الدالة الأصلية. (تذكر أن التكامل والتفاضل عمليتان عكسيتان!) هنا نحسب

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^3+5)^{101}}{101}\right] = \frac{101(x^3+5)^{100}(3x^2)}{101} = (x^3+5)^{100}(3x^2)$$

والذي هو المكامل الأصلي. هذا يؤكد أننا بالفعل وجدنا الدالة الأصلية. ■

التكامل بالتعويض

يتكون التكامل بالتعويض من الخطوات العامة التالية، كما هو موضح في المثال 6.2.

- **اختر متغيرا جديدا** u؛ الاختيار الشائع هو التعبير العميق أو الحد «الداخلي» لتركيب الدوال. (في المثال 6.2، لاحظ أن $x^3 + 5$ هو الحد الداخلي لـ $(x^3 + 5)^{100}$.)
- **احسب** $du = \frac{du}{dx}\,dx$.
- **استبدل جميع الحدود** في التكامل الأصلي مع تعابير تتضمن u و du.
- **أوجد قيمة تكامل** (u) الناتج. إذا كنت لا تزال غير قادر على إيجاد قيمة التكامل، فربما تحتاج إلى تجربة اختيار مختلفة لـ u.
- **استبدل كل تكرار لـ** u في الدالة الأصلية بالتعبير المناظر للمتغير x.

تذكر دائما أن إيجاد الدوال الأصلية هي عملية معاكسة لإيجاد المشتقات. في المثال 6.3، لم نكن محظوظين كفاية لنجد المشتقة المطلوبة التي نريدها في المكامل.

مثال 6.3 **استخدام التعويض: دالة قوة داخل cosine**

أوجد قيمة $\int x\cos x^2\,dx$

الحل لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

بما أننا لا نملك تماما عامل $2x$ في المكامل، يمكننا دائما ضرب أعداد ثابتة مناسبة قبل رمز التكامل وبعده وإعادة كتابة التكامل بصيغة

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos x^2 dx$$

سنقوم بالتعويض الآن $u = x^2$، فيكون $du = 2x\,dx$ ولدينا

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\cos x^2}_{\cos u}\,\underbrace{(2x)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin x^2 + c.$$

لاحظ مرة أخرى، كنوع من التحقق

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin x^2\right) = \frac{1}{2}\cos x^2(2x) = x\cos x^2$$

والذي هو المكامل الأصلي. ■

مثال 6.4 **استخدام التعويض: دالة مثلثية اساس قوة**

أوجد قيمة $\int (3\tan x + 4)^5 \sec^2 x\,dx$

الحل مثلما هو الحال مع معظم التكاملات، ربما لن تتمكن من إيجاد قيمة هذه الحالة كما هي. ومع ذلك، لاحظ أنه يوجد حد هو $\tan x$ وعامل لـ $\sec^2 x$ في المكامل وأن $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$. وعليه، لنكن $u = 3\tan x + 4$، فيكون $du = 3\sec^2 x\,dx$.

ولدينا أيضا

$$\int (3\tan x+4)^5 \sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3\tan x+4)^5}_{u^5}\underbrace{(3\sec^2 x)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^5 du = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^6}{6}+c$$

$$= \frac{1}{18}(3\tan x+4)^6+c.$$

أحيانا ستحتاج التمعن عميقا بالتكامل لرؤية الحدود المشتقة من حدود أخرى، كما هو في المثال 6.5.

مثال 6.5 **استخدام التعويض: دالة جذرية داخل Sine**

أوجد قيمة $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل هذا التكامل غير واضح بشكل خاص، ومع ذلك، لن نخسر شيئا من التجربة. إن كنت مضطرا لتعويض شيء، فماذا تختار؟ ربما لاحظت أن $\sin\sqrt{x} = \sin x^{1/2}$ ولتكن $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (..الداخلي..). نحصل على $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$. بما أنه يوجد عامل لـ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ في المكامل، يمكننا المتابعة. لدينا

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \underbrace{\sin\sqrt{x}}_{\sin u}\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx}_{du}$$

$$= 2\int \sin u\,du = -2\cos u + c = -2\cos\sqrt{x}+c$$

مثال 6.6 **التعويض: بحيث يكون البسط مشتقة المقام**

أوجد قيمة $\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$

الحل بما أن $\frac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2$، لنأخذ $u = x^3+5$. فيكون $du = 3x^2dx$. ولدينا الآن

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{1}{x^3+5}}_{u}\underbrace{(3x^2)\,dx}_{du} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u|+c = \frac{1}{3}\ln|x^3+5|+c$$

المثال 6.6 هو إيضاح لنوع شائع جدا من التكامل، نوع يكون فيه البسط مشتقة المقام. وعموما، لدينا الناتج في النظرية 6.1.

النظرية 6.1

لأي دالة متصلة، f

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c$$

على أي فترة بحيث $f(x) \neq 0$.

البرهان

لتكن $u = f(x)$، فيكون $du = f'(x)\,dx$ و

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{u}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$

كما هو مطلوب. وكبديل لهذا الإثبات، يمكنك ببساطة حساب $\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$ مباشرة، للحصول على المكامل. ■

تذكر أننا ذكرنا هذه النتيجة بالفعل في الدرس 1-7 (النتيجة 1.2). من المهم جدا التكرار هنا في سياق التعويض.

مثال 6.7 الدالة الأصلية لدالة الظل

أوجد قيمة $\int \tan x\,dx$

الحل لاحظ أن هذه ليست إحدى صيغ التكامل الأساسية. مع ذلك، قد تلاحظ أنه باستخدام $u = \cos x$.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u}\,\underbrace{(-\sin x)\,dx}_{du}$$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ ■

مثال 6.8 تعويض معكوس دالة الظل

أوجد قيمة $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx$

الحل مرة أخرى، يكمن الحل في البحث عن تعويض. بما أن

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

لتكن $u = \tan^{-1}x$، بحيث يكون $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ولدينا الآن

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{(\tan^{-1}x)^2}_{u^2}\,\underbrace{\frac{1}{1+x^2}\,dx}_{du}$$

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + c$$ ■

حتى الآن، كل أمثلتنا تم حلها بالتركيز على حد في المكامل يكون مشتقة حد آخر. لقد وضحنا الآن التكامل ولم تكن هذه هي المسألة، ولكن المسألة تكمن في التعويض الذي قمنا به للتعامل مع حد صعب بشكل خاص في المكامل.

مثال 6.9 **تعويض يساعد على توسع المكامل**

أوجد قيمة $\int x\sqrt{2-x}\,dx$

الحل لن تتمكن بالتأكيد من إيجاد قيمة هذه كما هي، إذا بحثت عن حدود تكون مشتقات لحدود أخرى، فلن تحصل على نتيجة. تكمن المسألة الحقيقية هنا في وجود جذر تربيعي لناتج جمع (أو ناتج فرق) في المكامل. الخطوة المنطقية هي التعويض في التعبير تحت الجذر التربيعي. لنأخذ $u = 2 - x$، فيكون $du = -dx$. لا يبدو الأمر سيئًا. ولكن ماذا سنفعل مع x الدخيلة في المكامل؟ حسنًا، بما أن $u = 2 - x$، فالنتيجة هي أن $x = 2 - u$. عبر إجراء هذه التعويضات في التكامل، نحصل على

$$\int x\sqrt{2-x}\,dx = (-1)\int \underbrace{x}_{2-u}\ \underbrace{\sqrt{2-x}}_{\sqrt{u}}\ \underbrace{(-1)\,dx}_{du}$$

$$= -\int (2-u)\sqrt{u}\,du$$

بينما لا يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل مباشرة، فإذا ضربنا الحدود، سنحصل على

$$\int x\sqrt{2-x}\,dx = -\int (2-u)\sqrt{u}\,du$$

$$= -\int (2u^{1/2} - u^{3/2})\,du$$

$$= -2\frac{u^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{u^{5/2}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + c$$

$$= -\frac{4}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + c$$

$$= -\frac{4}{3}(2-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(2-x)^{5/2} + c$$

لا بد من التحقق من صحة الدالة الأصلية هذه بالاشتقاق.

التعويض في التكاملات المحدودة

يوجد فارق وحيد بسيط في استخدام التعويض لإيجاد قيمة تكامل محدود: لا بد أيضًا من تغيير حدود التكامل لتتوافق مع المتغير الجديد. بالتالي، يصبح الإجراء هنا تمامًا مثل الأمثلة من 6.2 إلى 6.9، ما عدا عندما نقدم المتغير الجديد u، فنتغير حدود التكامل من $x = a$ و $x = b$ إلى الحدود المقابلة لـ u: $u = u(a)$ و $u = u(b)$. لدينا

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

مثال 6.10 **استخدام التعويض في التكامل المحدود**

أوجد قيمة $\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx$

الحل بالطبع قد لا يمكنك إيجاد قيمة هذه كما هي. مع ذلك، بما أن $\frac{d}{dx}(x^4+5) = 4x^3$، سنقوم بالتعويض $u = x^4 + 5$، فيكون $du = 4x^3dx$. لأجل حدود التكامل. لاحظ أنه عندما $x = 1$.

$$u = x^4 + 5 = 1^4 + 5 = 6$$

وعندما $x = 2$.

$$u = x^4 + 5 = 2^4 + 5 = 21$$

ولدينا الآن

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \underbrace{\sqrt{x^4+5}}_{\sqrt{u}}\,\underbrace{(4x^3)\,dx}_{du} = \frac{1}{4}\int_6^{21}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\Bigg|_6^{21} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(21^{3/2} - 6^{3/2})$$

لاحظ أنه بسبب تغيير حدود التكامل لتوافق المتغير الجديد، فنحن لم نضطر إلى التحويل مرة أخرى إلى المتغير الأصلي، مثلما فعلنا عند التعويض في تكامل غير محدود. (لاحظ أنه، إذا بدلنا المتغيرات مرة أخرى، فقد نحتاج أيضا إلى تبديل حدود التكامل مرة أخرى إلى قيمها الأصلية قبل إيجاد القيمة!) ■

تنبيه

لا بد من تغيير حدود التكامل بمجرد تغيير المتغيرات!

ربما استخدمت التعويض في تكامل محدود فقط لإيجاد دالة أصلية ثم الرجوع مرة أخرى إلى المتغير الأصلي لإيجاد القيمة. على الرغم من فاعلية هذه الطريقة مع العديد من المسائل، إلا أننا نوصي بتجنبها، لعدة أسباب. أولا، تغيير حدود التكامل ليس بالأمر الشاق وينتج عنه تعابير رياضيات أسهل في القراءة. ثانيا، في العديد من التطبيقات التي تتطلب تعويضا، سوف تحتاج لتغيير حدود التكامل، لذا من الأفضل أيضا أن تعتاد على فعل ذلك من الآن.

مثال 6.11 **التعويض في تكامل محدود يتضمن أسا**

احسب $\int_0^{15} te^{-t^2/2}dt$

الحل كالعادة نبحث عن حدود مشتقة من حدود أخرى. هنا لا بد أن تلاحظ أن $\frac{d}{dt}\left(\frac{-t^2}{2}\right) = -t$. لذا، لتكن $u = -\frac{t^2}{2}$ ونحسب $du = -t\,dt$. للحد الأعلى من التكامل، يوجد لدينا $t = 15$ تناظر $u = -\frac{(15)^2}{2} = -\frac{225}{2}$. للحد الأدنى من التكامل، يوجد لدينا $t = 0$ تناظر $u = 0$. ذلك يعطينا

$$\int_0^{15} te^{-t^2/2}dt = -\int_0^{15}\underbrace{e^{-t^2/2}}_{e^u}\,\underbrace{(-t)\,dt}_{du}$$

$$= -\int_0^{-225/2} e^u\,du = -e^u\Big|_0^{-112.5} = -e^{-112.5} + 1$$ ■

التمارين 7.6

تمارين كتابية

1. ليس من الخطأ أبدا أن تقوم بالتعويض في تكامل معين، ولكن أحيانا لا يكون الأمر مجديا. على سبيل المثال، استخدام التعويض $u = x^2$، يمكنك الاستنتاج بشكل صحيح أن

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}u\sqrt{u+1}\,du$$

ولكن التكامل الجديد ليس أسهل من التكامل الأصلي. أوجد تعويضا أفضل وجد قيمة هذا التكامل. ضع إرشادات حول الزمن الذي يجب التخلي فيه عن التعويض.

2. ليس مستبعدا على الطلاب الدارسين للتعويض استخدام رمز غير صحيح بالخطوات الوسيطة. انتبه لهذا الأمر - فقد يؤثر على درجاتك! اختبر التالي بعناية من سلسلة المعادلات وأوجد كل الأخطاء. باستخدام $u = x^2$.

$$\int_0^2 x\sin x^2 dx = \int_0^2 (\sin u)x\,dx = \int_0^2 (\sin u)\frac{1}{2}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 4 + \frac{1}{2}$$

الإجابة النهائية صحيحة. ولكن بسبب عدة أخطاء، لا يمكن الوثوق في هذه الخطوات بشكل تام. ناقش كل خطأ واكتب الخطوات بطريقة موثوق بها بشكل كبير.

3. على فرض أن التكامل يتضمن حدا بالصورة $e^{f(x)}$. على سبيل المثال، على فرض أنك تحاول إيجاد قيمة $\int x^2e^{x^3}dx$. ناقش سبب أنه يجب استخدام التعويض على الفور $u = f(x)$

4. على فرض أن المكامل يتضمن دالة مركبة بالصورة $f(g(x))$. اشرح سبب ضرورة معرفة ما إذا كان المكامل يتضمن أيضا الحد $g'(x)$. ناقش التعويضات الممكنة.

في التمارين من 1 إلى 4، استخدم التعويض المعطى لإيجاد قيمة التكامل غير المحدود.

1. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx,\ u=x^3+2$

2. $\int x^3(x^4+1)^{-2/3}dx,\ u=x^4+1$

3. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}\,dx,\ u=\sqrt{x}+2$

4. $\int \sin x\cos x\,dx,\ u=\sin x$

في التمارين من 5 إلى 30، أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

5. $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

6. $\int \sqrt{1+10x}\,dx$

7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

8. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

9. $\int t^2\cos t^3\,dt$

10. $\int \sin t(\cos t+3)^{3/4}dt$

11. $\int xe^{x^2+1}dx$

12. $\int e^x\sqrt{e^x+4}\,dx$

13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

14. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

16. $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{u}\,(\sqrt{u}+1)}\,du$

18. $\int \frac{v}{v^2+4}\,dv$

19. $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dx$

20. $\int \tan 2x\,dx$

21. $\int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

22. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$

23. (a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

24. (a) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ (b) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

25. (a) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ (b) $\int \frac{1+x}{1-x^2}\,dx$

26. (a) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$ (b) $\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx$

27. $\int \frac{2t+3}{t+7}\,dt$

28. $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t+3}}\,dt$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

في التمارين من 31 إلى 40، أوجد قيمة التكامل المحدود.

31. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

32. $\int_1^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$

33. $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$

34. $\int_0^2 t^2e^{t^3}\,dt$

35. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

36. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx$

38. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

39. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

في التمارين من 41 إلى 44، سم طريقة لإيجاد قيمة التكامل بدقة، إذا أمكن، وإلا، فقم بتقديره عدديا.

41. (a) $\int_0^\pi \sin x^2\,dx$ (b) $\int_0^\pi x\sin x^2\,dx$

42. (a) $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$ (b) $\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx$

43. (a) $\int_0^2 \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ (b) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

44. (a) $\int_0^{\pi/4} \sec x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

في التمارين من 45 إلى 48، ضع التعويض المعطى لدالة غير محددة $f(x)$.

45. $u=x^2$ for $\int_0^2 xf(x^2)\,dx$

46. $u=x^3$ for $\int_1^2 x^2f(x^3)\,dx$

47. $u=\sin x$ for $\int_0^{\pi/2} (\cos x)f(\sin x)\,dx$

48. $u=\sqrt{x}$ for $\int_0^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

49. الدالة f هي زوجية إذا كان $f(-x)=f(x)$ لكل x. الدالة f هي فردية إذا كان $f(-x)=-f(x)$. على فرض f متصلة لكل x. أثبت إذا كانت f زوجية، فإن $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$. أيضا إذا كانت f فردية، أثبت أن $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$.

50. فرضا أن f دورية على الفترة T؛ بحيث يكون، $f(x+T)=f(x)$ لكل x. أثبت أن $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$ لأي عدد حقيقي a (إرشاد، أولا، ابدأ بـ $0\le a\le T$)

51. (a) للتكامل $I=\int_0^{10} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$. استخدم تعويضا لتبين أن $I=\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$. استخدم هذين التمثيلين لـ I لإيجاد قيمة I.

(b) عمم على $I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$ لأية دالة متصلة موجبة f ثم أوجد قيمة $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

52. (a) لأجل $I = \int_2^4 \frac{\sin^2(9-x)}{\sin^2(9-x)+\sin^2(x+3)}\,dx$، استخدم التعويض $u = 6 - x$ لتثبت أن $I = \int_2^4 \frac{\sin^2(x+3)}{\sin^2(9-x)+\sin^2(x+3)}\,dx$

أوجد قيمة I.

(b) عمم على $\int_2^4 \frac{f(9-x)}{f(9-x)+f(x+3)}\,dx$ لأية دالة متصلة موجبة f على $[2, 4]$.

53. أوجد قيمة $\int_0^2 \frac{f(x+4)}{f(x+4)+f(6-x)}\,dx$ لأية دالة متصلة موجبة f على $[0, 2]$.

54. (a) استخدم التعويض $u = x^{1/6}$ لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x^{5/6}+x^{2/3}}\,dx$.

(b) أوجد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(c) عمم على $\int \frac{1}{x^{(p+1)/q}+x^{p/q}}\,dx$ للأعداد الصحيحة الموجبة p و q.

55. توجد غالبا طرائق عدة لحساب الدالة الأصلية. للتكامل $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$. استخدم التعويض أولا $u=\ln\sqrt{x}$ لإيجاد التكامل غير المحدود $2\ln|\ln\sqrt{x}|+c$. ثم أعد كتابة $\ln\sqrt{x}$. واستخدم التعويض $u=\ln x$ لإيجاد التكامل غير المحدود $2\ln|\ln x|+c$. وضح أن هاتين الإجابتين متساويتين.

56. ارسم المساحة بين $y=\pi x - x^2$ و المحور x لـ $0\le x\le 1$ والمساحة بين $y = (\pi\cos x - \cos^2 x)\sin x$ والمحور x لـ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. برهن أن المساحتين متساويتان.

57. أوجد كل خطأ في الحسابات التالية ثم بين كيفية التعويض بشكل صحيح. ابدأ و $\int_{-2}^1 4x^4\,dx = \int_{-2}^1 x(4x^3)\,dx$ ثم استخدم التعويض $u=x^4$ مع $du = 4x^3dx$. عندئذ

$$\int_{-2}^1 x(4x^3)\,dx = \int_{16}^1 u^{1/4}\,du = \frac45 u^{5/4}\Big]_{u=16}^{u=1} = \frac45 - \frac{32}{5} = -\frac{18}{5}$$

58. أوجد كل خطأ في الحسابات التالية ثم بين كيفية التعويض بشكل صحيح. ابدأ و $\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \cos x(\cos x)\,dx$ ثم استخدم التعويض $u=\sin x$ مع $du = \cos x\,dx$. عندئذ

$$\int_0^\pi \cos x(\cos x)\,dx = \int_0^0 \sqrt{1-u^2}\,du = 0$$

59. لكل $a>0$، أثبت أن $\int_a^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_1^{1/a}\frac{1}{x^2+1}\,dx$. استخدم هذه المعادلة لاشتقاق متطابقة تتضمن $\tan^{-1}x$.

60. أوجد قيمة $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx$ بإعادة كتابة المكامل بصيغة $\frac{1}{x^2\sqrt{1-1/x^2}}$ ثم إجراء التعويض $u=1/x$. استخدم إجابتك لاشتقاق متطابقة تتضمن $\sin^{-1}(1/x)$ و $\sec^{-1}x$.

التطبيقات

61. الموقع $(\bar x, \bar y)$ لمركز الجاذبية (نقطة التوازن) للوح مسطح محدود بين $y=f(x)>0, a\le x\le b$ والمحور x يعطى بالدالة

52. $\bar x = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ و $\bar y = \frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}$. لنصف الدائرة $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$. استخدم التماثل لافتراض أن $\bar x = 0$ و $\bar y = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 (4-x^2)\,dx$. احسب $\bar y$.

53. على فرض أن كثافة مجتمع لمجموعة من الحيوانات يمكن وصفها $f(x)=xe^{-x^2}$ ألف حيوان لكل كيلومتر لأجل $0\le x\le 2$، بحيث x يمثل المسافة من المركز. مثل بيانيا $y=f(x)$ وصف باختصار مكان احتمال تواجد هذه الحيوانات. أوجد الكثافة الكلية لمجتمع الحيوانات $\int_0^2 f(x)\,dx$.

54. جهد التيار المتردد (تيار متناوب) لدارة كهربائية يعطى بالدالة $V(t)=V_p\sin(2\pi ft)$. حيث f هو التردد. لا يقيس مقياس الجهد السعة V_p. ولكن، يقرأ مقياس الجهد **جذر متوسط التربيع** (rms). الجذر التربيعي للقيمة المتوسطة لمربع الجهد خلال دورة واحدة. وهكذا، $\text{rms} = \sqrt{f\int_0^{1/f} V^2(t)\,dt}$. استخدم المتطابقات المثلثية $\sin^2 x = \frac12 - \frac12\cos 2x$ لتثبت أن $\text{rms} = V_p/\sqrt2$.

55. مثل بيانيا $y=f(t)$ وأوجد جذر متوسط التربيع

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } -2\le t<-1 \\ t & \text{if } -1\le t\le 1 \\ 1 & \text{if } 1<t\le 2 \end{cases}$$

حيث $\text{rms} = \sqrt{\frac14\int_{-2}^2 f^2(t)\,dt}$

تمارين استكشافية

1. إن نظام المفترس-الفريسة عبارة عن مجموعة من معادلات التفاضل التي تمثل التغير في الكثافة الأحيائية لفصائل تفاعلية من الكائنات الحية. ومن أحد النماذج البسيطة لهذا النوع

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a - by(t)] \\ y'(t) = y(t)[dx(t) - c] \end{cases}$$

للثوابت الموجبة a و b و c و d. تتضمن كلتا المعادلتين حدا بالصيغة $x(t)y(t)$. وهذا يمثل نتيجة المواجهات بين الفصائل. لاحظ أن مشاركة هذا الحد سلبي إلى $x'(t)$ ولكنه إيجابي إلى $y'(t)$. اشرح لماذا لا بد أن يكون $x(t)$ يمثل الكثافة الأحيائية للفريسة و $y(t)$ الكثافة الأحيائية للمفترس. إذا كان $x(t)=y(t)=0$. فاحسب $x'(t)$ و $y'(t)$. في هذه الحالة. هل x و y متزايدان أم متناقصان أو يظلان ثابتين؟ اشرح لماذا يعد ذلك منطقيا على المستوى المادي. حدد $x'(t)$ و $y'(t)$ والتغير اللاحق في x و y عند النقطة التي تسمى **نقطة التوازن** $x=c/d,\ y=a/b$. إذا كانت الكثافة الأحيائية دورية، فيمكننا توضيح أن نقطة التوازن تعطي الكثافة الأحيائية المتوسطة (حتى وإن لم تظل الكثافة الأحيائية ثابتة). للقيام بذلك، لاحظ أن $\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t)$. بتكامل طرفي المعادلة من $t = 0$ إلى $t = T$ [فترة $x(t)$ و $y(t)$]. نحصل على

$\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int_0^T a\,dt - \int_0^T by(t)\,dt$. أوجد قيمة كل تكامل لتثبت أن $\ln x(T) - \ln x(0) = aT - \int_0^T by(t)\,dt$. على فرض أن $x(t)$ لها فترة T، لدينا $x(T) = x(0)$ وبذلك، $0 = aT - \int_0^T by(t)\,dt$. في النهاية، أعد ترتيب الحدود لتبرهن أن $1/T \int_0^T y(t)\,dt = a/b$، وبذلك فإن القيمة المتوسطة للكثافة الأحيائية $y(t)$ هي قيمة التوازن $y = a/b$. وبالمثل، وضح أن القيمة المتوسطة للكثافة الأحيائية $x(t)$ هي قيمة التوازن $x = c/d$.

2. حدد دالة ديراك دلتا $\delta(x)$ للحصول على الخاصية المعرفة $\int_{-a}^{b} \delta(x)\,dx = 1$ لأي $a, b > 0$. وبافتراض أن $\delta(x)$ تعمل كأنها دالة متصلة (هذه مشكلة كبيرة!). استخدم هذه الخاصية لإيجاد قيمة (a) $\int_0^1 \delta(x-2)\,dx$ و (b) $\int_0^1 \delta(2x-1)\,dx$ و (c) $\int_{-1}^{1} \delta(2x)\,dx$. لنفترض أنها قابلة للتطبيق. استخدم النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لبرهنة أن $\delta(x) = 0$ f لجميع $x \neq 0$ وأثبت أن $\delta(x)$ غير محدودة في $[-1, 1]$. ماذا يواجهك من صعوبة حيال هذا الأمر؟هل تعتقد أن $\delta(x)$ دالة متصلة حقا أو أنها دالة من الأساس؟

3. على فرض أن f دالة متصلة لكل x و $f(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} + f(x)$ and $f(2x) = 3f(x)$. احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$.

التكامل العددي

حتى الآن، لقد أدى تطويرنا للتكامل بالتوازي إلى تعزيز تطوير الاشتقاق. في كلا الحالتين، بدأنا بتعريف محدود يصعب استخدامه بالحساب ثم تابعنا تطوير القواعد المبسطة للحساب. عند هذه النقطة، يجب أن تكون قادرا على إيجاد مشتقة أي دالة تقريبا يمكن كتابتها. وقد تتوقع أنه، مع المزيد من القواعد، سوف تكون قادرا على العمل بالمثل مع تكاملات معينة. للأسف، لسنا بصدد هذا الأمر. ثمة العديد من الدوال لا يتوفر لها أي دالة أصلية أولى. (والدالة الأصلية الأولى نعني بها الدالة الأصلية التي يمكن التعبير عنها بالدوال الأولى التي تعرفنا عليها، الجبرية والمثلثية والأسية والدوال اللوغاريتمية.) على سبيل المثال،

$$\int_0^2 \cos(x^2)\,dx$$

لا يمكن حسابها بالضبط، بما أن $\cos(x^2)$ ليس لها دالة أصلية أولى. (حاول إيجاده ولكن لا تستغرق وقتا كبيرا في ذلك.)

في الواقع، لا يمكن حساب معظم التكاملات المحدودة بشكل دقيق. بما أننا لا يمكن حساب القيمة الدقيقة للتكامل، فأفضل ما نعمله هو أن نقرب القيمة عدديا. في هذا الدرس، طورنا ثلاث طرائق لتقريب التكامل المحدود. ولا تغني أية طريقة عن روتين التكامل المدمج بالآلات الحاسبة أو الحاسوب. مع ذلك، باستكشاف هذه الطرائق، سوف تكتسب فهما أساسيا لبعض الأفكار غير الأفكار الروتينية المعقدة للتكامل.

بما أن التكامل المحدود هو النهاية لمتتالية مجموع ريمان. سنستخدم أي مجموع ريمان كتقريب للتكامل.

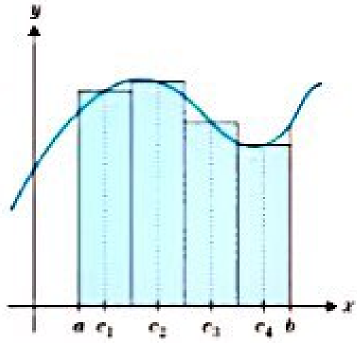
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

بحيث تكون c_i هي أي نقطة محددة من الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ لـــ $i = 1, 2, \ldots, n$. علاوة علي ذلك، كلما كبرت n، كان التقريب أفضل. الخيار الممكن لنقاط القيم $c_1, c_2, \ldots, c_n$ يرشدنا إلى طريقة تسمى قاعدة نقطة المنتصف:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

حيث c_i هي نقطة منتصف الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ و $i = 1, 2, \ldots, n$



الشكل 7.26

قاعدة نقطة المنتصف

نوضح هذا التقريب حيث $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$ في الشكل 7.26.

المثال 7.1 استخدام قاعدة نقطة المنتصف

اكتب تقريبا لقاعدة نقطة المنتصف من أجل $\int_0^1 3x^2\,dx$ مع $n = 4$.

الحل لأجل $n = 4$. التجزئة المنظمة للفترة $[0, 1]$ هي $x_0 = 0$ و $x_1 = \frac{1}{4}$ و $x_2 = \frac{1}{2}$ و $x_3 = \frac{3}{4}$ و $x_4 = 1$. نقاط المنتصف ستكون $c_1 = \frac{1}{8}$ و $c_2 = \frac{3}{8}$ و $c_3 = \frac{5}{8}$ و $c_4 = \frac{7}{8}$. باستخدام $\Delta x = \frac{1}{4}$.

تكون مجاميع ريمان

$$\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{64}+\frac{27}{64}+\frac{75}{64}+\frac{147}{64}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{252}{256}=0.984375.$$

بالطبع، من النظرية الأساسية، فإن القيمة الدقيقة للتكامل في المثال 7.1 هي

$$\int_0^1 3x^2\,dx=\left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^1=1.$$

لذا، فإن تقريبنا في المثال 7.1 ليس صحيحا بشكل دقيق. للحصول على دقة أعلى، لاحظ أنه بإمكانك دائما حساب التقريب باستخدام المزيد من المستطيلات. يمكنك تبسيط هذه العملية من خلال كتابة برنامج بسيط للآلة الحاسبة أو الحاسوب لتنفيذ قاعدة نقطة المنتصف. يتبع ذلك لمحة عامة مقترحة لهذا البرنامج.

قاعدة نقطة المنتصف

1. خزن $f(x), a, b$ و n.
2. احسب $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
3. احسب $c_1 = a + \frac{\Delta x}{2}$ وابدأ الجمع بـ $f(c_1)$.
4. احسب التالي $c_i = c_{i-1} + \Delta x$ ثم أضف $f(c_i)$ إلى المجموع.
5. كرر الخطوة 4 حتى $i = n$ [بمعنى آخر، كرر الخطوة 4 بمجموع إجمالي $(n-1)$ مرات].
6. اضرب المجموع في Δx.

المثال 7.2 استخدام برنامج لقاعدة نقطة المنتصف

كرر المثال 7.1 باستخدام برنامج لحساب تقريبات قاعدة نقطة المنتصف من أجل $n = 8, 16, 32, 64$ و 128.

الحل لا بد من التأكيد على القيم في الجدول أدناه. أدرجنا عمودا يعرض أخطاء التقريب لكل n (بمعنى آخر، الفرق بين القيمة الحقيقية للعدد 1 والقيم التقريبية).

n	قاعدة نقطة المنتصف	خطأ
4	0.984375	0.015625
8	0.99609375	0.00390625
16	0.99902344	0.00097656
32	0.99975586	0.00024414
64	0.99993896	0.00006104
128	0.99998474	0.00001526

يجب أن نلاحظ أن عدد الخطوات يتضاعف في كل مرة، ويصغر الخطأ مع العامل 4 تقريبا. على الرغم من أن هذا التصغير الدقيق للأخطاء لن يحدث مع كل التكاملات، إلا أن معدل التحسن هذا في دقة التقريب مثالي بالنسبة لقاعدة نقطة المنتصف.

بالطبع لا يمكننا معرفة الخطأ في تقريب قاعدة نقطة المنتصف. إلا إذا عرفنا قيمة التكامل بالضبط. بدأنا بتكامل بسيط، والذي نعرف قيمته بالضبط. لذا يمكنك معرفة مدى دقة تقريب قاعدة نقطة المنتصف.

لاحظ أنه، في المثال 7.3، لا يمكننا حساب القيمة الدقيقة للتكامل، لأننا لا نعرف الدالة الأصلية للمكامل.

المثال 7.3 إيجاد تقريب بدقة معطاة

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقريب $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$ بدقة إلى ثلاثة منازل عشرية.

الحل للحصول على الدقة المطلوبة، سنستمر في زيادة n حتى يبدو أنه من غير المحتمل حدوث مزيد من التغير في المنزلة العشرية الثالثة. (سيختلف كبر n بشكل جوهري من تكامل لآخر.) لا بد من تأكيد الأعداد في الجدول المرفق.

n	قاعدة نقطة المنتصف
10	2.95639
20	2.95751
30	2.95772
40	2.95779

من الجدول، يمكننا صنع التقريب المعقول

$$\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx \approx 2.958.$$

بينما يكون هذا التقريب معقولاً، لاحظ أنه لا يوجد ضمان على صحة الأعداد الظاهرة. للحصول على ضمان، سنحتاج لحدود الأخطاء المشتقة لاحقاً في هذا الدرس. ■

ملحوظة 7.1

تواجه برامج الحاسوب والحاسبات التي تقدر قيم التكاملات الصعوبة نفسها التي نواجهها في المثال 7.3 وهي معرفة مدى صحة التقريب. تتضمن مثل هذه البرامج عادة خوارزميات معقدة لتقدير دقة عمليات التقريب. يمكنك إيجاد مقدمة عن هذه الخوارزميات في معظم النصوص الخاصة بالتحليل العددي.

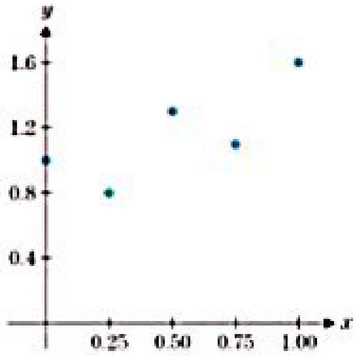
يوجد سبب مهم آخر يجعلنا نسعى خلف الطرائق العددية وهو في حالة عدم معرفتنا للدالة التي نحاول إيجاد تكاملها. هذا صحيح: فغالباً ما نعرف فقط بعض قيم الدالة في مجموعة من النقاط، بينما لا يتوفر التمثيل الرمزي للدالة. غالباً هذا هو الحال في علوم الفيزياء والأحياء والهندسة. حيث توجد المعلومات المتوفرة فقط عن الدالة التي نعرفها من القياسات المأخوذة من عدد محدود من النقاط.

المثال 7.4 تقدير التكامل من جدول قيم الدوال

قدر $\int_0^1 f(x)\,dx$، حيث يوجد لدينا قيم الدالة غير المعروفة $f(x)$ كما هي معطاة في الجدول الظاهر في الهامش.

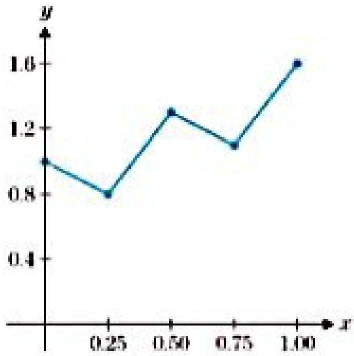
x	$f(x)$
0.0	1.0
0.25	0.8
0.5	1.3
0.75	1.1
1.0	1.6

الحل بمقاربة المسألة بيانياً، نجد أنه لدينا خمس نقاط في البيانات. (انظر الشكل 7.27a). كيف يمكن تقدير المساحة تحت المنحنى من خمس نقاط؟ من الناحية النظرية، لدينا مهمتان. أولاً، نحتاج إلى طريقة معقولة لربط النقاط الخمس المعطاة. ثانياً، نحتاج إلى حساب مساحة المنطقة الناتجة. إن أوضح طريقة لربط النقاط هي القطع المستقيمة كما هو مبين في الشكل 4.27b. لاحظ أن المنطقة محدودة بالتمثيل البياني والمحور x في الفترة $[0,1]$ تتكون من أربعة أشباه منحرف. (انظر الشكل 7.27c). من السهولة إثبات أن مساحة شبه المنحرف أضلاعه h_1 و h_2 وقاعدته b تعطى بالصيغة $\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)b$. (فكر بهذه المسألة كمتوسط مساحة المستطيل ارتفاعه قيمة الدالة عند الطرف الأيسر والمستطيل ارتفاعه قيمة الدالة عند الطرف الأيمن.)



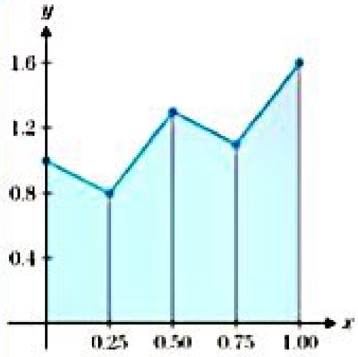
الشكل 7.27a

بيانات من دالة غير معروفة



الشكل 7.27b

ربط النقاط



الشكل 7.27c

أربعة أشباه منحرف

المساحة الكلية لأشباه المنحرف الأربعة هي:

$$\frac{f(0)+f(0.25)}{2}0.25+\frac{f(0.25)+f(0.5)}{2}0.25+\frac{f(0.5)+f(0.75)}{2}0.25+\frac{f(0.75)+f(1)}{2}0.25$$

$$=[f(0)+2f(0.25)+2f(0.5)+2f(0.75)+f(1)]\frac{0.25}{2}=1.125.$$

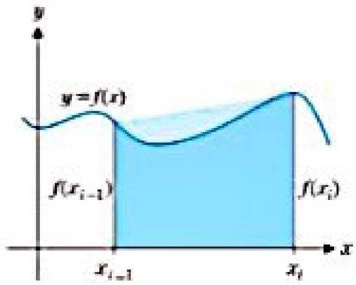
■

وعموما، لأي دالة متصلة f معرفة على الفترة $[a,b]$، تجزىء $[a,b]$ على النحو التالي:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

بحيث تكون نقاط التجزئة متباعدة المسافات ومتساوية، أي: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

في كل فترة جزئية $[x_{i-1},x_i]$، قرب المساحة تحت المنحنى باستخدام مساحة شبه المنحرف حيث أطوال أضلاعه $f(x_{i-1})$ و $f(x_i)$، كما هو مبين بالشكل 7.28. المساحة تحت المنحنى في الفترة $[x_{i-1},x_i]$ هي تقريبا



الشكل 7.28

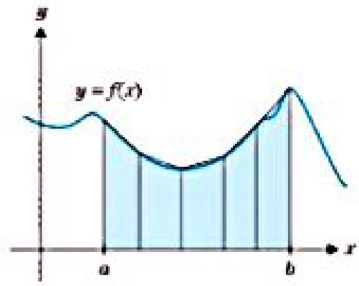
قاعدة شبه المنحرف

$$A_i\approx\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\,\Delta x$$

لكل $i=1,2,\ldots,n$. بإضافة تقريبات المساحة تحت المنحنى في كل فترة جزئية، نحصل على:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$



الشكل 7.29

$(n+1)$-نقطة لقاعدة شبه المنحرف

نوضح ذلك في الشكل 7.29. لاحظ أن كل الحدود الوسطية مضروبة في 2، بما أن كل حد يستخدم في اثنين من أشباه المنحرف، أحدهما كارتفاع لشبه المنحرف على نقطة الطرف الأيمن والآخر كارتفاع لشبه المنحرف على نقطة الطرف الأيسر. نشير لهذا على أنه: $(n+1)$-نقطة **لقاعدة شبه المنحرف**، $T_n(f)$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\approx T_n(f)=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]}$$

من طرق كتابة برنامج لقاعدة شبه المنحرف هي إضافة $[f(x_{i-1})+f(x_i)]$ لكل $i=1,2,\ldots,n$ ثم الضرب في $\Delta x/2$. كما ناقشنا في التمارين، توجد طريقة بديلة وهي إضافة مجموع ريمان معا باستخدام قيم النقاط على اليسار وعلى اليمين، ثم القسمة على 2.

المثال 7.5 استخدام قاعدة شبه المنحرف

احسب تقريبات قاعدة شبه المنحرف مع $n = 4$ (يدويا) و $n = 8, 16, 32, 64$ و 128 (باستخدام برنامج) لإيجاد $\int_0^1 3x^2 dx$.

الحل كما رأينا في الأمثلة 7.1 و 7.2، كانت القيمة الدقيقة لهذا التكامل هي 1. لقاعدة شبه المنحرف مع $n = 4$، يوجد لدينا:

$$T_4(f) = \frac{1-0}{(2)(4)}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{27}{8} + 3\right) = \frac{66}{64} = 1.03125.$$

وباستخدام برنامج، يمكنك بسهولة الحصول على القيم في الجدول المرفق.

n	$T_n(f)$	خطأ
4	1.03125	0.03125
8	1.0078125	0.0078125
16	1.00195313	0.00195313
32	1.00048828	0.00048828
64	1.00012207	0.00012207
128	1.00003052	0.00003052

أدرجنا عمودا يبين الخطأ (القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية للعدد 1 والقيمة التقريبية). لاحظ أنه (كما هو الحال مع قاعدة نقطة المنتصف) كلما تضاعف عدد الخطوات، يصغر الخطأ بما يقرب من عامل 4.

ملاحظات

بما أن صيغة قاعدة شبه المنحرف عبارة عن متوسط مجموعي ريمان، سنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_n(f).$$

قاعدة سيمبسون

لنأخذ البديل التالي لقاعدة شبه المنحرف. أولا، انشئ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$،

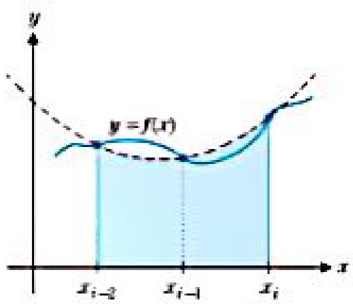
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

حيث

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وحيث أن n هو عدد زوجي. بدلا من ربط كل زوج من النقاط بقطعة مستقيمة (كما عملنا مع قاعدة شبه المنحرف)، فإننا نربط كل مجموعة من ثلاث نقاط متتابعة، $(x_{i-2}, f(x_{i-2}))$ و $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$ لكل $i = 2, 4, \ldots, n$، بقطع مكافئ. (انظر الشكل 7.30). وهكذا، نبحث عن الدالة التربيعية $p(x)$ التي يمر تمثيلها البياني بالنقاط الثلاث، بحيث

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{و} \quad p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \quad \text{و} \quad p(x_{i-2}) = f(x_{i-2})$$



الشكل 7.30

قاعدة سيمبسون

نستخدم هذه لتقريب قيمة تكامل f على الفترة $[x_{i-2}, x_i]$. لدينا:

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-2}}^{x_i} p(x)\,dx.$$

لاحظ سبب رغبتنا بتقريب f إلى كثيرة الحدود. من السهولة إيجاد تكامل لكثيرات الحدود. توفر عملية مباشرة على الرغم من صعوبة الحساب فيها (جبريها، يمكن لأنظمة الحاسوب الجبرية مساعدتك)

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-2}}^{x_i} p(x)\,dx = \frac{x_i - x_{i-2}}{6}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

ملاحظات تاريخية

توماس سيمبسون (1710-1761)

عالم رياضيات إنجليزي عمم الطريقة العددية التي تعرف الآن باسم قاعدة سيمبسون. تدرب سيمبسون كخياط، وعمل أيضا كمتنبئ للمستقبل ومحرر لمجلة Ladies' Diary وكمؤلف للكتب الدراسية. وفي كتابه الدراسي لحساب التفاضل والتكامل (بعنوان دراسة جديدة عن التدفق، مستخدما مصطلحات نيوتن بعلم حساب التفاضل والتكامل) قدم قاعدة سيمبسون للعديد من علماء الرياضيات، على الرغم من تطور الطريقة قبل سنوات.

إضافة التكاملات معا في كل فترة جزئية $[x_{i-2}, x_i]$، لكل $i = 2, 4, 6, \ldots, n$، نحصل على:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{b-a}{3n}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots$$

$$+ \frac{b-a}{3n}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

تأكد من ملاحظة النمط الذي تتبعه المعاملات. تشير لهذا باسم $(n + 1)$- نقطة قاعدة سيمبسون، $S_n(f)$.

قاعدة سيمبسون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

سنوضح لاحقا استخدام قاعدة سيمبسون لتكامل بسيط.

المثال 7.6 استخدام قاعدة سيمبسون

قرب قيمة $\int_0^1 3x^2 dx$ باستخدام قاعدة سيمبسون مع $n = 4$.

الحل لدينا

$$S_4(f) = \frac{1-0}{(3)(4)}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] = 1$$

وهذا في الواقع القيمة الحقيقية. لاحظ أن هذه أكثر دقة بكثير من قاعدة نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وأنها لا تتطلب جهدا إضافيا. ■

تذكر أن قاعدة سيمبسون تجد قيمة المساحة تحت القطوع المكافئة التقريبية. بالتالي، من الطبيعي أن تعطينا قاعدة سيمبسون المساحة الدقيقة كما في المثال 7.6. سوف تستكشف في التمارين، فإن قاعدة سيمبسون تعطي القيم الدقيقة للتكاملات لأي كثيرة حدود من الدرجة 3 أو أصغر.

في المثال 7.7، نوضح قاعدة سيمبسون لتكامل معين لا نعرف كيفية إيجاد قيمته الدقيقة.

المثال 7.7 استخدام برنامج لقاعدة سيمبسون

احسب تقريبات قاعدة سيمبسون مع $n = 4$ (يدويا)، $n = 8, 16, 32, 64$ و 128 (باستخدام برنامج) من أجل $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

الحل من أجل $n = 4$، لدينا

$$S_4(f) = \frac{2-0}{(3)(4)}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left[1 + 4\sqrt{\frac{5}{4}} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{\frac{13}{4}} + \sqrt{5}\right] \approx 2.95795560.$$

وباستخدام برنامج، يمكنك بسهولة الحصول على القيم في الجدول المرفق. وفقا لهذه الحسابات، نتوقع أن يكون 2.9578857 تقريبا دقيقا جدا لـ $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$. ■

n	$S_n(f)$
4	2.9579556
8	2.9578835
16	2.95788557
32	2.95788571
64	2.95788571
128	2.95788572

بما أن معظم التمثيلات البيانية تنحني بشكل ما، فقد نتوقع أن تقوم القطوع المكافئة لقاعدة سيمبسون بتعقب أفضل للمنحنى عن القطع المستقيمة لقاعدة شبه المنحرف. كما يوضح المثال 7.8، يمكن أن تكون قاعدة سيمبسون أكثر دقة بكثير من قاعدة نقطة المنتصف أو قاعدة شبه المنحرف.

المثال 7.8 مقارنة قواعد نقطة المنتصف وشبه المنحرف وقواعد سيمبسون

احسب تقريبات قواعد نقطة المنتصف وشبه المنحرف وسيمبسون لـ $\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx$ مع $n = 10, n = 20, n = 50$ و $n = 100$. قارن بالقيمة الدقيقة لـ π.

الحل

n	قاعدة نقطة المنتصف	قاعدة شبه المنحرف	قاعدة سيمبسون
10	3.142425985	3.139925989	3.141592614
20	3.141800987	3.141175987	3.141592653
50	3.141625987	3.141525987	3.141592654
100	3.141600987	3.141575987	3.141592654

قارن هذه القيم مع القيمة الحقيقية لـ $\pi \approx 3.141592654$. لاحظ أن قاعدة نقطة المنتصف تبدو أقرب إلى π من قاعدة شبه المنحرف، ولكن كلتيهما ليستا قريبتين مع $n = 100$ مثل قرب قاعدة سيمبسون مع $n = 10$. ■

ملحوظة 7.2

لاحظ أنه لأي قيمة معطاة لـ n، فإن عدد الحسابات (وبالتالي الجهد) المطلوبة لإجراء تقريبات قواعد نقطة المنتصف وشبه المنحرف وسيمبسون هي نفسها تقريبا. لذا، يعطي المثال 7.8 توضيحا لمدى فاعلية قاعدة سيمبسون عن الطريقتين الأخريين. يصبح هذا مهما بشكل خاص عندما يكون من الصعب إيجاد قيمة الدالة $f(x)$. على سبيل المثال، في حالة البيانات التجريبية، فكل قيمة دالة $f(x)$ قد تؤدي إلى تجربة باهظة وهدر للوقت.

في المثال 7.9، نراجع تقديرنا لقيمة المساحة في الشكل 7.27a الذي تم فحصه لأول مرة في المثال 7.4.

المثال 7.9 استخدام قاعدة سيمبسون مع بيانات

استخدم قاعدة سيمبسون لتقدير $\int_0^1 f(x)\,dx$، حيث تكون المعلومة الوحيدة المعروفة عن f معطاة في الجدول للقيم المبينة في الهامش.

الحل من قاعدة سيمبسون مع $n = 4$، يوجد لدينا

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1-0}{(3)(4)}[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)]$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)[1 + 4(0.8) + 2(1.3) + 4(1.1) + 1.6] \approx 1.066667$$

بما أن قاعدة سيمبسون بوجه عام أكثر دقة من قاعدة شبه المنحرف (العدد النقاط نفسه)، نتوقع أن يكون هذا التقريب أكثر دقة بكثير من تقريب 1.125 الموجود بالمثال 7.4 من خلال قاعدة شبه المنحرف. ■

x	$f(x)$
0.0	1.0
0.25	0.8
0.5	1.3
0.75	1.1
1.0	1.6

ملحوظة 7.3

يشمل معظم الحاسبات البيانية وأنظمة الحاسوب الجبرية برامج سريعة جدا ودقيقة للتقريب العددي للتكامل المحدود. فبعضها يطلب منك تحديد تحمل الخطأ ومن ثم حساب قيمة دقيقة ضمن هذا التحمل. تستخدم معظم الآلات الحاسبة وأنظمة الحواسيب الجبرية والتي تحسب تلقائيا عدد النقاط اللازمة للحصول على الدقة المطلوبة. ستتمتع بسهولة استخدام هذه البرامج. إذا كان التكامل المراد تقريبه يعد جزءا حيويا من مشروع مهم، فيمكنك التحقق من نتائجك باستخدام قاعدة سيمبسون، $S_n(f)$، لعدد متتالي من قيم n. بالطبع إذا كان كل ما تعرفه عن الدالة هي قيمتها عند عدد ثابت من النقاط، فلن تساعدك معظم الآلات الحاسبة وبرامج أنظمة الحاسوب الجبرية. ولكن ستساعدك الطرائق الثلاث التي تمت مناقشتها هنا، كما رأينا في الأمثلة 7.4 و 7.9. سنؤكد على هذه الفكرة أكثر في التمارين.

حدود الخطأ للتكامل العددي

لقد استخدمنا أمثلة حيث نعرف بالضبط قيمة التكامل لمقارنة دقة الطرائق الثلاث الخاصة بالتكامل العددي. ومع ذلك، وبشكل عملي، بحيث تكون قيمة التكامل غير معروفة بالضبط. كيف نحدد مدى دقة التقدير العددي المعطى؟ في النظريتين 7.1 و 7.2، نوفر حدودا على الخطأ في طرائق التكامل العددي الثلاث. أولا، نوفر بعض الرموز. لتكن ET_n تمثل الخطأ في استخدام نقطة -$(n+1)$ في قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$. أي إن،

$$ET_n = \text{القيمة الدقيقة} - \text{القيمة التقريبية} = \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)$$

وبالمثل، نرمز إلى الخطأ في قاعدة نقطة المنتصف وقاعدة سيمبسون بـ EM_n و ES_n، على الترتيب. ولدينا الآن

النظرية 7.1

على فرض أن f'' دالة متصلة على $[a, b]$ وأن $|f''(x)| \le K$، لكل x في $[a, b]$. إذا

$$|ET_n| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

$$|EM_n| \le K\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

لاحظ أن كلا التقديرين في النظرية 7.1، يفيدان بأن الخطأ في استخدام الطريقة العددية المحددة ليس أكبر (في القيمة المطلقة) من الحد المعطى. وهذا يفيد بأنه إذا كان الحد صغيرا، فسيكون الخطأ كذلك أيضا. وبالأخص، لاحظ أن حد الخطأ لقاعدة نقطة المنتصف يكون نصف حد قاعدة شبه المنحرف. هذا لا يعني أن الخطأ الفعلي في قاعدة نقطة المنتصف سيكون نصف خطأ قاعدة شبه المنحرف، ولكنه لا يفسر سبب دقة قاعدة نقطة المنتصف أكثر من قاعدة شبه المنحرف لقيمة n نفسها. لاحظ أيضا أن ثابت K يعتمد على $|f''(x)|$. كلما زاد $|f''(x)|$، ازداد انحناء التمثيل البياني وكذلك، تصغر دقة تقريبات الخط المستقيم لقاعدة نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف. ينطبق على ذلك حد الخطأ لقاعدة سيمبسون.

النظرية 7.2

على فرض أن $f^{(4)}$ دالة متصلة في $[a, b]$ وأن $|f^{(4)}(x)| \le L$، لكل x في $[a, b]$. إذا

$$|ES_n| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4}.$$

إن إثباتات النظريتين 7.1 و 7.2 غير متاحة في هذا المقرر. وأشرنا إلى القارئ المهتم لنص يتحدث عن التحليل العددي. بمقارنة النظريتين 7.1 و 7.2، لاحظ أن مقامات حدود الخطأ لكل من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة نقطة المنتصف تحتوي على عامل n^2، بينما حد الخطأ في قاعدة سيمبسون يحتوي على عامل n^4. لـ $n = 10$، لاحظ أن $n^2 = 100$، بينما $n^4 = 10\,000$. بما أن أسس n موجودة في مقامات حدود الخطأ، فهذا يعني أن حد الخطأ في قاعدة سيمبسون يكون أصغر بكثير من الموجودة في قاعدة شبه المنحرف أو قاعدة نقطة المنتصف لقيمة n نفسها. يؤيد هذا الأمر الدقة المتناهية التي وجدناها باستخدام قاعدة سيمبسون عن الطريقتين الأخريين. نوضح استخدام حدود الخطأ في المثال 7.10.

المثال 7.10 إيجاد حد الخطأ في التكامل العددي

إيجاد حدود الخطأ في استخدام كل من قاعدة نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون لتقريب قيمة التكامل $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$، باستخدام $n = 10$.

الحل قد تكون أول رغبة لك هي ملاحظة أنك تعرف بالفعل قيمة هذا التكامل بالضبط، باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

ومع ذلك، أنت لا تعرف حقا قيمة $\ln 3$. ولكن لا بد من استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية لها. ومن ناحية أخرى، يمكنك تقريب هذا التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف أو نقطة المنتصف أو قاعدة سيمبسون. وهنا، $f(x) = 1/x = x^{-1}$ بحيث يكون $f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = 2x^{-3}, f'''(x) = -6x^{-4}$ و $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$. هذا يعني أنه بالنسبة لـ $x \in [1, 3]$،

$$|f''(x)| = |2x^{-3}| = \frac{2}{x^3} \le 2.$$

من النظرية 7.1، يوجد لدينا

$$|EM_{10}| \le K\frac{(b-a)^3}{24n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{24(10^2)} \approx 0.006667$$

وبالمثل، يوجد لدينا هنا

$$|ET_{10}| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{12(10^2)} \approx 0.013333$$

بالتحول إلى قاعدة سيمبسون، لدينا $S_{10}(f) \approx 1.09866$ و لكل $x \in [1, 3]$،

$$|f^{(4)}(x)| = |24x^{-5}| = \frac{24}{x^5} \le 24$$

لذلك تعطينا النظرية 7.2 الآن

$$|ES_{10}| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4} = 24\frac{(3-1)^5}{180(10^4)} \approx 0.000427$$

من المثال 7.10، نعرف الآن أن تقريب قاعدة سيمبسون $S_{10}(f) \approx 1.09866$ بعيد بما لا يزيد عن 0.000427. ومع ذلك، فالسؤال الأكثر أهمية هو تحديد عدد النقاط اللازمة للحصول على دقة معطاة. نستكشف ذلك في المثال 7.11.

المثال 7.11 تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة معطاة

تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة على الأقل 10^{-7} لاستخدام كل من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون لتقريب $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$.

الحل من المثال 7.10، نعرف أن $|f''(x)| \le 2$ و $|f^{(4)}(x)| \le 24$، لكل $x \in [1, 3]$. لذا، من النظرية 7.1، يوجد لدينا الآن

$$|ET_n| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{12n^2} = \frac{4}{3n^2}$$

إذا اردنا ألا يكون الحد على الخطأ أعلاه أكبر من الدقة المطلوبة لـ 10^{-7}، يوجد لدينا

$$|ET_n| \le \frac{4}{3n^2} \le 10^{-7}$$

إن حل هذه المتباينة من أجل n^2 يعطينا

$$\frac{4}{3}10^7 \le n^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين ينتج عنه

$$n \ge \sqrt{\frac{4}{3}10^7} \approx 3651.48$$

لذا، فإن أي قيمة $n \ge 3652$ ستعطي الدقة المطلوبة. وبالمثل، بالنسبة إلى قاعدة سيمبسون، يوجد لدينا

$$|ES_n| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4} = 24\frac{(3-1)^5}{180n^4}$$

ومرة أخرى، فإذا أردنا ألا يكون حد الخطأ أكبر من 10^{-7} يعطينا

$$|ES_n| \le 24\frac{(3-1)^5}{180n^4} \le 10^{-7}$$

وبالحل لإيجاد n^4، يكون لدينا $n^4 \ge 24\dfrac{(3-1)^5}{180}10^7$

عند أخذ الجذر الرابع، نحصل على

$$n \ge \sqrt[4]{24\frac{(3-1)^5}{180}10^7} \approx 80.8$$

عند أخذ أي قيمة لـ $n \ge 82$ سيضمن الدقة المطلوبة. (إذا كنت تتوقع منا قول أن $n \ge 81$، فإن قاعدة سمبسون تتطلب أن يكون n عددا زوجيا). ■

في المثال 7.11، قارن عدد الخطوات اللازمة لضمان دقة 10^{-7} في قاعدة سمبسون (82) بالعدد اللازم لضمان الدقة نفسها في قاعدة شبه المنحرف (3652). عادة ما تتطلب قاعدة سمبسون خطوات أقل بكثير من قاعدة شبه المنحرف أو قاعدة نقطة المنتصف للحصول على الدقة نفسها. في النهاية، ومن المثال 7.11، لاحظ أننا على علم بأن

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{82} \approx 1.0986123$$

وهو أمر مضمونة صحته (بموجب النظرية 7.2) في حدود 10^{-7}. قارن هذه القيمة التقريبية لـ $\ln 3$ الناتجة باستخدام حاسبتك.

التمارين 7.7

تمارين كتابية

1. من الناحية المثالية، تتميز تقنيات التقريب بالبساطة والدقة. فكيف يمكن مقارنة طرائق التكامل العددي الموضحة في هذا الدرس من حيث البساطة والدقة؟ ما هو المعيار الأكثر أهمية إذا كنت تعمل يدويا بشكل تام؟ ما الطريقة التي يمكنك استخدامها؟ ما هو المعيار الأكثر أهمية إذا كنت تعمل باستخدام حاسوب سريع جدا؟ ما الطريقة التي يمكنك استخدامها؟

2. على فرض أنك ستقوم بإنشاء قاعدتك الخاصة للتكامل التقريبي. (قم بتسميتها بعد ذلك بنفسك!) في النص، تم الحصول على طرائق جديدة عبر اختيار نقاط القيم لمجموع ريمان (قاعدة نقطة المنتصف) وعبر الإنشاء الهندسي (قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون). بدون العمل على التفاصيل، اشرح كيفية وضع قاعدة دقيقة جدا إنما بسيطة.

3. اختبر حاسبتك أو الحاسوب الخاص بك في $\int_0^1 \sin(1/x)\,dx$. ناقش ما هي خياراتك عندما لا تحصل من تقنيتك على تقريب دقيق. بناء على الرسم السريع لـ $y = \sin(1/x)$، صف سبب صعوبة طريقة التكامل العددي مع هذا التكامل.

4. اشرح سبب عدم استخدامنا لقاعدة نقطة المنتصف في المثال 7.4.

في التمارين 4-1، أوجد قيم تقريبات نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون يدويا (اترك إجابتك في شكل كسر) لـ $n = 4$.

1. $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$

2. $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$

3. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

4. $\int_{-1}^1 (2x-x^2)\,dx$

في التمارين 8-5، قرب القيمة المعطاة باستخدام (a) قاعدة نقطة المنتصف، (b) قاعدة شبه المنحرف و(c) قاعدة سمبسون مع $n = 4$. وحدد إذا كان كل تقريب صغير للغاية أم كبير للغاية.

5. $\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

6. $\ln 8 = \int_1^8 \frac{1}{x}\,dx$

7. $\sin 1 = \int_0^1 \cos x\,dx$

8. $e^2 = \int_0^1 (2e^{2x}+1)\,dx$

في التمارين 14-9، استخدم حاسوب أو حاسبة لحساب تقريبات قاعدة نقطة المنتصف وشبه المنحرف وسمبسون باستخدام $n = 10, n = 20$ و $n = 50$. قارن هذه القيم بالتقريب المعطى باستخدام حاسبتك أو الحاسوب الخاص بك.

9. $\int_0^{\pi} \cos x^2\,dx$

10. $\int_0^{\pi/4} \sin \pi x^2\,dx$

11. $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$

12. $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$

13. $\int_0^{\pi} e^{\cos x}\,dx$

14. $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx$

في التمارين 18-15، احسب القيمة الدقيقة واحسب الخطأ (الفرق بين التقريب والقيمة الدقيقة) في كل من تقريبات قاعدة نقطة المنتصف وشبه المنحرف وسمبسون باستخدام $n = 10, n = 20, n = 40$ و $n = 80$.

15. $\int_0^1 5x^4\,dx$

16. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

17. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

18. $\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$

19. املأ الفراغات بالقوة الأكثر تقريبا لـ 2 (2, 4, 8 إلخ). إذا ضاعفت n، فإن الخطأ في قاعدة نقطة المنتصف يقسم على ________. إذا ضاعفت n، فإن الخطأ في قاعدة شبه المنحرف يقسم على ________. إذا ضاعفت n، فإن الخطأ في قاعدة سمبسون يقسم على ________.

20. املأ الفراغات بالقوة الأكثر تقريبا لـ 2 (2, 4, 8 إلخ). إذا قسمت طول الفترة $b-a$ إلى نصفين، فإن الخطأ في قاعدة نقطة المنتصف يقسم على ________. والخطأ في قاعدة شبه المنحرف يقسم على ________. والخطأ في قاعدة سمبسون يقسم على ________.

في التمرينين 21 و 22، استخدم (a) قاعدة شبه المنحرف و (b) قاعدة سمبسون لتقدير $\int_0^2 f(x)\,dx$ من البيانات المعطاة.

21.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$f(x)$	4.0	4.6	5.2	4.8	5.0

x	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	4.6	4.4	3.8	4.0

22.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$f(x)$	1.0	0.6	0.2	−0.2	−0.4

x	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	0.4	0.8	1.2	2.0

23. للتمرين 5، (a) أوجد حدود للأخطاء الناتجة عن استخدام كل طريقة. (b) أوجد عدد الخطوات اللازمة لضمان دقة 10^{-7}.

24. للتمرين 7، (a) أوجد حدود للأخطاء الناتجة عن استخدام كل طريقة. (b) أوجد عدد الخطوات اللازمة لضمان دقة 10^{-7}.

في التمارين 28-25، حدد عدد الخطوات لضمان دقة 10^{-6} باستخدام (a) قاعدة شبه المنحرف؛ (b) قاعدة نقطة المنتصف؛ (c) قاعدة سمبسون.

25. $\int_1^3 \ln x\,dx$

26. $\int_1^4 x\ln x\,dx$

27. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

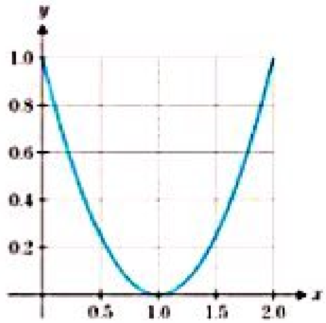
28. $\int_1^2 xe^x\,dx$

29. لكل قاعدة في التمرين 15، احسب حد الخطأ وقارنه بالخطأ الفعلي.

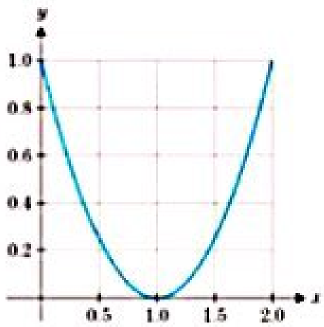
30. لكل قاعدة في التمرين 17، احسب حد الخطأ وقارنه بالخطأ الفعلي.

في التمرينين 31 و 32، استخدم التمثيل البياني لتقدير (a) مجموع ريمان باستخدام قيمة نقطة المنتصف اليسرى. (b) قاعدة نقطة المنتصف. (c) قاعدة شبه المنحرف. و (d) تقريبات قاعدة سمبسون لـ $n = 4$ لـ $\int_0^2 f(x)\,dx$.

31.



32.



في التمارين 38-33، استخدم المعلومات المعطاة عن $f(x)$ ومشتقاتها لتحديد ما إذا كانت (a) قاعدة نقطة المنتصف تقدر قيمة التكامل بشكل دقيق أم أقل من قيمته أم مبالغ في قيمته (أو في حال عدم توفر معلومات كافية لتحديد ذلك). كرر لـ (b) قاعدة شبه المنحرف و (c) قاعدة سمبسون.

33. $f''(x) > 0, f'(x) > 0$
34. $f''(x) > 0, f'(x) < 0$
35. $f''(x) < 0, f'(x) > 0$
36. $f''(x) < 0, f'(x) < 0$
37. $f''(x) = 4, f'(x) > 0$
38. $f''(x) = 0, f'(x) > 0$

39. على فرض أن R_L و R_R هما تقريبات مجموع ريمان لـ $\int_a^b f(x)\,dx$ باستخدام قواعد قيمة نقطة المنتصف اليسرى واليمنى على الترتيب. لكل $n > 0$، أثبت أن تقريب شبه المنحرف T_n يساوي $(R_L + R_R)/2$.

40. للبيانات في الشكل 7.27a، ارسم القطعين المكافئين التقريبيين لقاعدة سمبسون. قارن تقريب قاعدة سمبسون بتقريب قاعدة شبه المنحرف. اشرح بيانيا السبب في أن تقريب قاعدة سمبسون أصغر.

41. أثبت أن كلا من $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ و $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ تساوي $\frac{\pi}{4}$. استخدم قاعدة سمبسون مع كل تكامل بـ $n = 4$ و $n = 8$ وقارنه بالقيمة الدقيقة. ما هو التكامل الذي يوفر خوارزمية أفضل لتقدير π؟

42. برهن الصيغة التالية، وهي أساس قاعدة سمبسون. إذا كان $f(x) = Ax^2 + Bx + C$، فإن $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$.

43. يطلق على نوع خوارزمية التكامل العددي المستخدم عادة التربيع الغوسي. وللتكامل في الفترة $[-1, 1]$، فإن تقريب التربيع الغوسي البسيط يكون $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. كما في قاعدة سمبسون. أثبت أن هذا التربيع الغوسي يعطي القيمة الدقيقة لتكاملات كسور القوة x و x^2 و x^3.

44. بالإشارة إلى التمرين 43. قارن تقريبات قاعدة سمبسون $(n = 2)$ والتربيع الغوسي لـ $\int_{-1}^{1} \pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ بالقيمة الدقيقة.

45. اشرح سبب عدم إمكانية استخدام قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$. أوجد $L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ وناقش أنه إذا كان $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ L & \text{if } x = 0 \end{cases}$ فإن $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$. استخدم الطريقة العددية المناسبة لتخمين أن $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1.18\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

46. كما في التمرين 45، قرب $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

47. في معظم الحسابات التي تمت، صحيح أن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة نقطة المنتصف هما في الجهات المقابلة للتكامل الدقيق (أي، أحدهما كبير للغاية، والآخر صغير للغاية). قد تكون لاحظت كذلك أن قاعدة شبه المنحرف تميل إلى أن تكون أبعد عن القيمة الدقيقة بمقدار الضعف بالنسبة لقاعدة نقطة المنتصف. بالنظر إلى هذا، اشرح سبب إعطاء التوافيق الخطية $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$ تقديرا أفضل للتكامل. (هنا، T_n تمثل تقريب قاعدة شبه المنحرف باستخدام n تجزئة و M_n تقريب قاعدة نقطة المنتصف المناظرة).

48. أثبت أن قاعدة التقريب $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$ في التمرين 47 متطابقة مع قاعدة سمبسون.

لـ $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1}$. بين أن $f(x) + f(1-x) = 1$ لكل $0 \le x \le 1$. أثبت أن هذا يؤدي الى أن تقريب قاعدة شبه المنحرف لـ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ لأي n. في الحقيقة، هذه هي القيمة الدقيقة للتكامل. (للمزيد من المعلومات، راجع مقالة إم أيه خان في إصدار يناير 2008 من صحيفة كلية الرياضيات.)

50. أثبت أن تقريب قاعدة شبه المنحرف لـ $\int_0^n x^n\,dx$ يكون كبيرا للغاية (إذا كانت $n > 1$). استنتج أن $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n > n^n \frac{3n+1}{2n+2}$

التطبيقات

في التمرينين 51 و 52، تعطى السرعة المتجهة لجسم في أزمنة مختلفة. استخدم البيانات لتقدير المسافة المجتازة.

51.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
$v(t)$ (m/s)	40	42	40	44	48	50	46

t (s)	7	8	9	10	11	12
$v(t)$ (m/s)	46	42	44	40	42	42

52.

t (s)	0	2	4	6	8	10	12
$v(t)$ (m/s)	26	30	28	30	28	32	30

t (s)	14	16	18	20	22	24
$v(t)$ (m/s)	33	31	28	30	32	32

في التمرينين 53 و 54، تأتي البيانات من مخطط سرعة التنفس، الذي يقيس تدفق الهواء خلال الحنجرة (باللتر في الثانية). يساوي تكامل تدفق الهواء حجم الهواء المستنشق. قدر هذا الحجم.

53.

t (s)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(t)$ (l/s)	0	0.2	0.4	1.0	1.6	2.0	2.2

t (s)	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$f(t)$ (l/s)	2.0	1.6	1.2	0.6	0.2	0

54.

t (s)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(t)$ (l/s)	0	0.1	0.4	0.8	1.4	1.8	2.0

t (s)	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$f(t)$ (l/s)	2.0	1.6	1.0	0.6	0.2	0

تمارين استكشافية

1. احسب تقريبات قاعدة شبه المنحرف T_4، T_8 و T_{16} لـ $\int_0^1 3x^2\,dx$ واحسب الخطأ لكل منها. تحقق من أنه عند تصغير حجم الخطوة إلى النصف، فإن الخطأ يقسم على أربعة. عند ظهور هذه الأنماط، يمكنها الاستفادة من استخدام الاستكمال. علما أن $(T_4 - I) = 4(T_8 - I)$، حيث $I = 1$ هو التكامل الدقيق، أثبت أن $I = T_8 + \frac{T_8 - T_4}{3}$. بين كذلك أن

$I = T_{16} + \frac{T_{16} - T_8}{3}$. بشكل عام، لدينا التقريبات $I \approx T_8 + \frac{T_8 - T_4}{3}$ و $(T_4 - I) \approx 4(T_8 - I)$. من ثم، فإن الاستكمال $E_{2n} = T_{2n} + \frac{T_{2n} - T_n}{3}$ يكون أقرب إلى التكامل الدقيق من أي من تقريبات قاعدة شبه المنحرف T_{2n} و T_n. اثبت أن E_{2n}، في الحقيقة، تساوي تقريب قاعدة سمبسون لـ $2n$.

2. يوضح الإنشاء الهندسي لقاعدة سمبسون أن قاعدة سمبسون ستحسب التكاملات مثل $\int_0^1 3x^2 dx$ بدقة. اشرح السبب بإيجاز. احسب قاعدة سمبسون الآن باستخدام $n = 2$ لـ $\int_0^1 4x^3 dx$. تحسب قاعدة سمبسون أيضا تكاملات المنحنيات التكعيبية بدقة. في هذا التمرين، نعرف السبب في أنه يمكن حساب تكاملات المنحنيات التكعيبية بدقة باستخدام القطوع المكافئة. لمعرفة كيفية عمل قاعدة سمبسون $\int_0^1 4x^3 dx$، فإننا بحاجة إلى تحديد القطع المكافئ الفعلي المستخدم. يجب أن يمر القطع المكافئ بالنقاط $(0, 0)$، $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $(1, 4)$. أوجد الدالة التربيعية التي تكمل ذلك. (إرشاد: اشرح لماذا $0 = 0 + 0 + c$، $\frac{1}{2} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ و $4 = a + b + c$، ثم قم بالحل لإيجاد a و b و c.) مثل هذا القطع المكافئ بيانيا و $y = 4x^3$ على المحاور نفسها، مع اختيار نافذة التمثيل البياني بدقة بحيث يمكنك معرفة ما يحدث على الفترة $[0, 1]$. أين رأس القطع المكافئ؟ كيف تقارن بين تكاملات القطع المكافئ والمنحنى التكعيبي على الفترة الجزئية $[0, \frac{1}{2}]$؟ $[\frac{1}{2}, 1]$؟ لماذا تحسب قاعدة سمبسون التكامل بدقة؟

7-8 اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

في الوحدة 0، عرفنا اللوغاريتم الطبيعي على أنه اللوغاريتم المعتاد أساسه e. أي إن،

$$\ln x = \log_e x$$

حيث e عدد غامض مبهم (حتى الآن) $e \approx 2.718$ إذن، ما هو الطبيعي أو حتى المهم في هذه الدالة غير العادية من الناحية الظاهرية؟ سنقوم بحل هاتين المعضلتين في هذا الدرس.

أولا، تذكر قاعدة القوة للتكاملات.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ for } n \neq -1$$

بالتأكيد، هذه القاعدة لا تنطبق على $n = -1$، لأنه سينتج عن ذلك القسمة على صفر. الى الآن لم نعرف $\ln x$ بعد. إذن، ما الذي يمكننا قوله عن

$$\int \frac{1}{x} \, dx?$$

(بالرغم من أننا وجدنا هذا التكامل في الدرس 7.1، إلا أن ملاحظتنا تستند على التخمين بأن $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$، الأمر الذي لم يكتمل برهانه بعد). من النظرية 4.1، نعرف أنه بما أن $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة لكل $x \neq 0$، فيجب أن تكون قابلة للتكامل على أي فترة لا تتضمن $x = 0$. لاحظ أنه بموجب الجزء II من النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل،

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

هي دالة أصلية للدالة $\frac{1}{x}$ لكل $x > 0$. نعطي لهذه الدالة الجديدة (الناشئة بشكل طبيعي) اسما في التعريف 8.1.

التعريف 8.1

لكل $x > 0$، نعرف دالة **اللوغاريتم الطبيعي**، المكتوبة بالصيغة $\ln x$، كما يأتي:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

سنرى لاحقا أن هذا التعريف يتفق، في الحقيقة، مع كيفية تعريفنا للدالة في الوحدة 0. أولا، لنفسر هذه الدالة بيانيا. لاحظ أنه لكل $x > 1$ يناظر هذا التكامل المحدود المساحة A تحت

منحنى $y = \frac{1}{t}$ من 1 إلى x، على النحو المشار إليه في الشكل 7.31a. أي إن،

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = A > 0$$

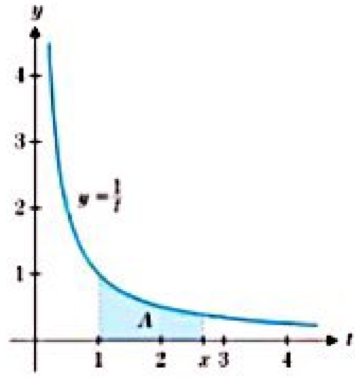
بالمثل، لكل $0 < x < 1$، لاحظ من الشكل 7.31b للمساحة A تحت المنحنى $y = \frac{1}{t}$ من x إلى 1، لدينا

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -A < 0$$

باستخدام التعريف 8.1، نحصل بموجب الجزء II من النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل على

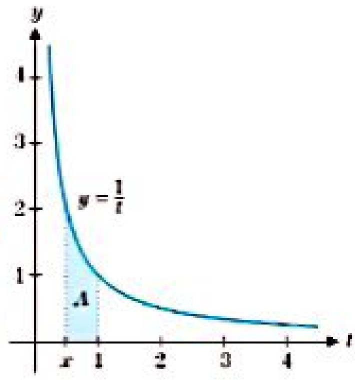
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{x}, \text{ لكل } x > 0 \qquad (8.1)$$

وهي صيغة المشتقة نفسها التي حصلنا عليها في الدرس 2.7.



الشكل 7.31a

$\ln x \ (x > 1)$



الشكل 7.31b

$\ln x \ (0 < x < 1)$

تذكر أننا بينا في الدرس 7.1 أنه لأي $x \neq 0$ يمكننا التوسع في (8.1) للحصول على $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$. هذا بدوره يعطينا قاعدة التكامل المعروفة

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c.}$$

المثال 8.1 تقريب قيم متعددة للوغاريتم الطبيعي

قرب قيمة $\ln 2$ و$\ln 3$.

الحل لاحظ أن $\ln x$ معرف على أنه تكامل محدود، فيمكننا استخدام أي طريقة تكامل عددي مناسبة لحساب القيم التقريبية للدالة. على سبيل المثال، باستخدام قاعدة سمبسون، نحصل على

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt \approx 0.693147$$

و

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{t}\, dt \approx 1.09861$$

نترك تفاصيل هذه التقريبات كتمارين. (يجب أن تتحقق كذلك من القيم باستخدام مفتاح 'ln' على حاسبتك.)

بإيجاز، نقوم الآن برسم تمثيل بياني لـ $y = \ln x$. كما لاحظنا بالفعل، فإن مجال $f(x) = \ln x$ هو $(0, \infty)$ و

$$\ln x \begin{cases} < 0 & \text{لكل } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{لكل } x = 1 \\ > 0 & \text{لكل } x > 1 \end{cases}$$

أثبتنا كذلك أن

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{لكل} \quad x > 0$$

بحيث تتزايد f في مجالها. بعد ذلك،

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{لكل} \quad x > 0$$

لذلك، ينقعر التمثيل البياني إلى الأسفل في مجاله. ببساطة، يمكنك استخدام قاعدة سمبسون أو قاعدة شبه المنحرف (يترك كتمرين) لصنع تخمينات

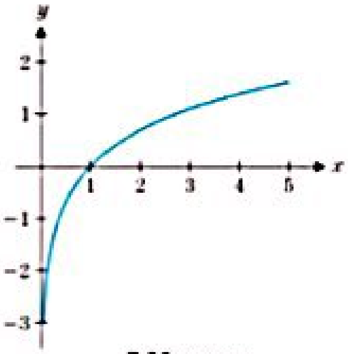
$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \qquad (8.2)$$

و

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad (8.3)$$

نؤجل برهان (8.2) إلى ما بعد النظرية 8.1. يترك برهان (8.3) كتمرين. نحصل الآن على التمثيل البياني الموضح في الشكل 7.32.

الآن، يبقى أن نشرح سبب تسمية هذه الدالة باللوغاريتم. الإجابة بسيطة: فهي تستوفي كل الخصائص التي تستوفيها اللوغاريتمات الأخرى. بما أن $\ln x$ تسلك مسلك أي لوغاريتم آخر، فإننا نسميها لوغاريتم (أم ماذا نسميها؟). نلخص ذلك في النظرية 8.1.



الشكل 7.32

$y = \ln x$

النظرية 8.1

لأي أعداد حقيقية $a > 0$، $b > 0$ وأي عدد نسبي r.

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) $\ln (ab) = \ln a + \ln b$

(iii) $\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ و

(iv) $\ln (a^r) = r \ln a$.

البرهان

(i) من التعريف 8.1.

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$$

(ii) من التعريف كذلك، لدينا

$$\ln (ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}\, dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\, dt$$

من الجزء (ii) بالنظرية 4.2 في الدرس 7.4. عوض $u = \frac{t}{a}$ في التكامل الأخير فقط. يعطينا ذلك $du = \frac{1}{a}\, dt$. أخيرا، يجب أن تتغير حدود التكامل لتظهر المتغير الجديد (عندما تكون $t = a$، يكون لدينا $u = \frac{a}{a} = 1$، وعندما تكون $t = ab$، يكون لدينا $u = \frac{ab}{a} = b$) لينتج

$$\ln (ab) = \int_1^{a} \frac{1}{t}\, dt + \int_a^{ab} \underbrace{\frac{a}{t}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) dt}_{du}$$

$$= \int_1^{a} \frac{1}{t}\, dt + \int_1^{b} \frac{1}{u}\, du = \ln a + \ln b. \qquad \text{من التعريف 8.1}$$

(iv) لاحظ أن

$$\frac{d}{dx} \ln (x^r) = \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} x^r \qquad \text{من (8.1) وقاعدة السلسلة.}$$

$$= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x} \qquad \text{من قاعدة القوة.}$$

وبالمثل،

$$\frac{d}{dx} [r \ln x] = r \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{r}{x}$$

الآن، بما أن $\ln (x^r)$ و $r \ln x$ لهما المشتقة نفسها، يتضح من النتيجة 10.1 في الدرس 2.10 أنه لكل $x > 0$.

$$\ln (x^r) = r \ln x + k$$

لثابت ما، k. بأخذ $x = 1$ تحديدا، نجد أن

$$\ln(1^r) = r\ln 1 + k$$

حيث أن $1^r = 1$ و $\ln 1 = 0$، يكون لدينا

$$0 = r(0) + k$$

إذن، $k = 0$ و $\ln(x^r) = r\ln x$، لكل $x > 0$.

الجزء (iii) نستنتجه من (ii) و(iv) ونترك كتمرين ■

كثيرا ما يؤدي استخدام خصائص اللوغاريتمات إلى تبسيط حساب الإشتقاق. نوضح ذلك في المثال 8.2.

المثال 8.2 **استخدام خصائص اللوغاريتمات لتبسيط الأشتقاق**

أوجد مشتقة $\ln\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x^2+5}}$

الحل بدلا من اشتقاق هذا التعبير مباشرة بتطبيق قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج القسمة، لاحظ أنه يمكننا تبسيط عملنا بشكل كبير باستخدام خصائص اللوغاريتمات أولا. لدينا

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^2+5}} = \frac{d}{dx}\ln\left[\frac{(x-2)^3}{x^2+5}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\left[\frac{(x-2)^3}{x^2+5}\right] \qquad \text{من الجبر}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\ln(x-2)^3 - \ln(x^2+5)] \qquad \text{من الجبر}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[3\ln(x-2) - \ln(x^2+5)] \qquad \text{من الجبر}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{x-2}\right)\frac{d}{dx}(x-2) - \left(\frac{1}{x^2+5}\right)\frac{d}{dx}(x^2+5)\right] \qquad \text{من (8.1) وقاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x^2+5}\right).$$

قارن عملنا هنا لحساب المشتقة مباشرة باستخدام التعبير الأصلي لمعرفة كيفية عمل قواعد اللوغاريتمات على تبسيط عملنا. ■

المثال 8.3 **دراسة سلوك النهاية للدالة $\ln x$**

استخدم خصائص اللوغاريتمات في النظرية 8.1 لتبرهن أن

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$$

الحل يمكننا التحقق من هذا على النحو التالي. أولا، تذكر أن $\ln 3 \approx 1.0986 > 1$. بأخذ $x = 3^n$، يكون لدينا قواعد اللوغاريتمات بحيث إنه لأي عدد n.

$$\ln 3^n = n\ln 3$$

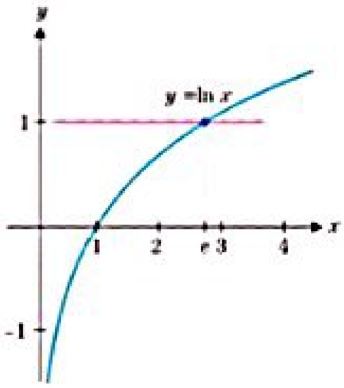
بما أن $x = 3^n \to \infty$، عندما $n \to \infty$، يتضح الآن أن

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \lim_{n\to\infty}\ln 3^n = \lim_{n\to\infty}(n\ln 3) = +\infty$$

حيث تعتمد المساواة الأولى على حقيقة أن $\ln x$ دالة متزايدة بشكل تام. ■

الدالة الأسية كدالة عكسية للوغاريتم الطبيعي

لاحقا، سنقوم بمراجعة الدالة الأسية الطبيعية، e^x. وكما فعلنا مع اللوغاريتم الطبيعي، فإننا نقوم في الوقت الحالي بتعريف هذه الدالة وتطوير خصائصها. أولا تذكر أنه في الوحدة 0، أعطينا الوصف الغامض (المعتاد) لـ e على أنه عدد غير نسبي $e = 2.71828...$ بدون محاولة شرح سبب أهمية هذا العدد. ثم تابعنا لنعرف $\ln x$ على أنه $\log_e x$، لوغاريتم له أساس e. الآن، وبعد أن عرفنا $\ln x$ (مستقلا عن تعريف e)، يمكننا تعريف e، فضلا عن حساب قيمتها التقريبية.



الشكل 7.33
تعريف e

> **التعريف 8.2**
>
> نعرف e على أنه العدد الذي
>
> $$\ln e = 1$$

أي أن، e هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية لـ $y = \ln x$ و $y = 1$. (انظر الشكل 7.33). بمعنى آخر، e هو حل المعادلة

$$\ln x - 1 = 0$$

يمكنك حل هذه المعادلة تقريبيا (باستخدام طريقة نيوتن، على سبيل المثال) للحصول على

$$e \approx 2.71828182846.$$

في الوحدة 0، عرفنا e باستخدام $e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$. وتركناه كتمرين لتبين أن هذين التعريفين لـ e يعرفان العدد نفسه. إذن، بتعريف العدد غير النسبي e، قد تتساءل ما أهمية تعريف الدالة e^x؟ بالتأكيد، لا توجد مشكلة على الإطلاق عندما يكون x نسبي. على سبيل المثال، لدينا

$$e^2 = e \cdot e$$

$$e^3 = e \cdot e \cdot e$$

$$e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$e^{5/7} = \sqrt[7]{e^5}$$

وهكذا دواليك. في الحقيقة، لأي قوة نسبية، $x = p/q$ (حيث p و q أعداد صحيحة)، لدينا

$$e^x = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$$

من ناحية أخرى، ما الذي يعنيه رفع العدد إلى قوة غير نسبية؟ على سبيل المثال، ما هو e^{π}؟ في الوحدة 0، أعطينا إجابة مبهمة عن هذا السؤال الهام. والآن يمكننا إعطاء الإجابة الكاملة.

أولا، لاحظ أنه لأجل $f(x) = \ln x \, (x > 0)$، $f'(x) = 1/x > 0$. إذن، f متزايدة باستمرار وبالتالي، هي دالة واحد لواحد (تقابلية). من ثم لها، دالة عكسية، f^{-1}. وكما هو الحال في كثير من الأحوال، لا توجد طريقة جبرية لحل هذه الدالة العكسية. مع ذلك، ومن النظرية 8.1 (iv)، يكون لدينا لأي قوة نسبية x.

$$\ln(e^x) = x \ln e = x$$

بما أننا عرفنا e بحيث $\ln e = 1$. لاحظ أن هذا يعني أن

$$f^{-1}(x) = e^x \quad \text{لكل } x \text{ نسبية.}$$

أي أن، الدالة العكسية (غير المعروفة)، $f^{-1}(x)$، تتفق مع e^x عند كل عدد نسبي x. وبما أن e^x ليس له معنى حتى الآن عندما يكون x غير نسبي، فإننا نعرفه على أنه قيمة $f^{-1}(x)$، على النحو التالي.

التعريف 8.3

للعدد x غير النسبي، فإننا نعرف أن $y = e^x$ على أنها هذا العدد الذي فيه

$$\ln y = \ln(e^x) = x$$

يعني ذلك أنه لأي أس نسبي x، فإننا نعرف e^x على أنه هذا العدد الحقيقي حيث $\ln(e^x) = x$. بناء على هذا التعريف، لاحظ أنه لأي $x > 0$، $e^{\ln x}$ هو العدد الحقيقي حيث

$$\ln(e^{\ln x}) = \ln x \tag{8.4}$$

بما أن $\ln x$ دالة واحد لواحد (تقابلية)، فإن (8.4) يعني أن

$$\boxed{e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \text{ لكل}} \tag{8.5}$$

لاحظ أن (8.5) يعني أن

$$\ln x = \log_e x$$

أي أن التعريف التكاملي لـ $\ln x$ يتفق مع تعريفنا السابق لـ $\ln x$ على أنه $\log_e x$. لاحظ أيضا أنه، بهذا التعريف للدالة الأسية، يكون لدينا

$$\boxed{\ln(e^x) = x, \qquad x \in (-\infty, \infty) \text{ لكل}}$$

بالإضافة إلى (8.5)، فإن هذا يعني أن e^x و $\ln x$ هي دوال عكسية. ضع في الاعتبار أنه، للعدد x غير النسبي، يعرف e^x فقط من علاقة الدالة العكسية الموضحة في التعريف 8.3. نذكر الآن بعض القوانين المعروفة للأسس ونبرهن أنها تظل صالحة في حالة الأسس غير النسبية.

النظرية 8.2

لأجل r, s أي أعداد حقيقية و t أي عدد نسبي،

(i) $e^r e^s = e^{r+s}$

(ii) $\dfrac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

(iii) $(e^r)^t = e^{rt}$ و

البرهان

هذه القوانين معروفة بالفعل عندما تكون الأسس نسبية. وإذا كان الأس غير نسبي، فإننا نعرف فقط قيمة هذه الدوال الأسية بشكل غير مباشر، من خلال علاقة الدالة العكسية بـ $\ln x$ الموضحة في التعريف 8.3.

(i) لاحظ أنه باستخدام قواعد اللوغاريتمات، يكون لدينا

$$\ln(e^r e^s) = \ln(e^r) + \ln(e^s) = r + s = \ln(e^{r+s})$$

وبما أن $\ln x$ دالة واحد لواحد (تقابلية)، فيجب أن تتبع

$$e^r e^s = e^{r+s}$$

البراهين للجزئين (ii) و(iii) متشابهان ويتركان كتمرينين. ■

في الوحدة 2، أوجدنا المشتقة لـ e^x باستخدام نهاية تعريف المشتقة. وقد تتذكر أن الاشتقاق كان كاملا، باستثناء ما يتعلق بقيمة النهاية

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

وفي الزمن نفسه، خمنا أن قيمة هذه النهاية هي 1. إلا أننا لم نتمكن من برهان ذلك. باستخدام الأدوات التي توفرت لنا، سنقوم بمراجعة هذه النهاية في التمرينين 37 و38 في نهاية هذا الدرس. أما الآن، فسنقوم بتقديم مشتقة بديلة، بناء على تعريفنا الجديد والمنقح للدالة الأسية. مرة أخرى، ومن التعريف 8.3، لدينا

$$y = e^x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \ln y = x$$

وباشتقاق هذه المعادلة الأخيرة بمعلومية x نحصل على

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}x = 1$$

من قاعدة السلسلة هذه، يكون لدينا الآن

$$1 = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \tag{8.6}$$

بضرب كلا طرفي (8.6) في y، نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

أو

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{8.7}$$

لاحظ أن (8.7) هي صيغة المشتقة نفسها المخمنة في الوحدة 2، إلا أننا تحققنا منها بدقة. بالتأكيد، يؤكد ذلك أيضا قاعدة التكامل المناظرة

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

لدينا الآن الأدوات لمراجعة التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$. بما أن $e = 2.718\ldots > 1$ يكون

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

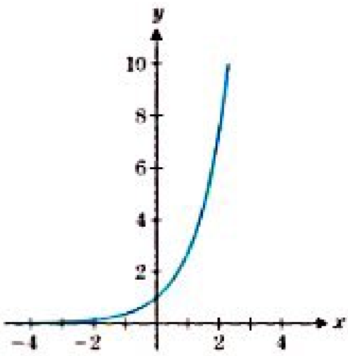
لدينا أيضا

$$f'(x) = e^x > 0$$

بحيث f متزايدة لكل x و

$$f''(x) = e^x > 0$$

لذلك، يتقعر التمثيل البياني إلى الأعلى في مجاله. ينبغي أن تحصل الآن بسهولة على التمثيل البياني في الشكل 7.34.



الشكل 7.34

$y = e^x$

وبالمثل، بالحل لإيجاد $f(x) = e^{-x}$، يكون لدينا

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$

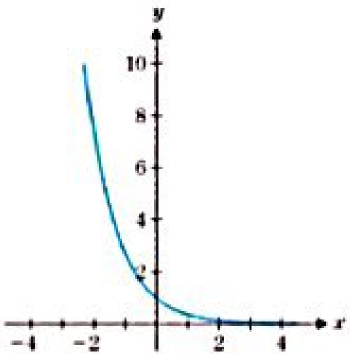
من قاعدة السلسلة أيضا،

$$f'(x) = -e^{-x} < 0$$

بحيث f متناقصة لكل x. لدينا أيضا

$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

لذلك، يتقعر التمثيل البياني إلى الأعلى في مجاله. ينبغي أن تحصل بسهولة على التمثيل البياني في الشكل 7.35.



الشكل 7.35

$y = e^{-x}$

يسهل التعبير عن الدوال الأسية الأكثر عموما، مثل $f(x) = b^x$، لأي أساس $b > 0$، من حيث الدالة الأسية الطبيعية، على النحو التالي. لاحظ أنه، باستخدام قواعد اللوغاريتمات العادية والدوال الأسية، يكون لدينا

$$\boxed{b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x\ln b}}$$

يتضح الآن أن

$$\frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln b} = e^{x\ln b}\frac{d}{dx}(x\ln b)$$
$$= e^{x\ln b}(\ln b) = b^x(\ln b)$$

كما خمنا في الدرس 2.7. وبالمثل، لأجل $b > 0\ (b \neq 1)$، يكون لدينا

$$\int b^x\,dx = \int e^{x\ln b}\,dx = \frac{1}{\ln b}\int e^{\overbrace{x\ln b}^{u}}\underbrace{(\ln b)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{\ln b}e^{x\ln b} + c = \frac{1}{\ln b}b^x + c$$

يمكنك الآن ملاحظة أنه يسهل التعامل مع الدوال الأسية العامة من حيث الدالة الأسية الطبيعية. في الحقيقة، ينبغي ألا تقلق حيال حفظ صيغ الاشتقاقات والأعداد الصحيحة للدوال الأسية العامة. بل، في كل مرة تواجهك دالة أسية $f(x) = b^x$، أعد كتابتها بالصيغة $f(x) = e^{x\ln b}$ ثم استخدم القواعد المعروفة للاشتقاق وتكامل الدالة الأسية الطبيعية وقاعدة السلسلة.

ملاحظات

أحيانا سنقوم بكتابة $e^x = \exp(x)$. وهذا مفيد لاسيما عندما يكون الأس تعبيرا معقدا. على سبيل المثال،

$$\exp(x^3 - 5x^2 + 2x + 7) = e^{x^3-5x^2+2x+7}$$

حيث السابق أسهل في القراءة من الأخير.

مثال 8.4 اشتقاق الدالة الأسية

أوجد مشتقة $f(x) = 2^{x^2}$.

الحل نقوم أولا بإعادة كتابة الدالة في الشكل

$$f(x) = e^{\ln 2^{x^2}} = e^{x^2\ln 2}$$

من قاعدة السلسلة هذه، يكون لدينا الآن

$$f'(x) = e^{x^2\ln 2}(2x\ln 2) = (2\ln 2)x2^{x^2}$$ ■

بطريقة مماثلة، يمكننا استخدام معرفتنا باللوغاريتم الطبيعي لمناقشة اللوغاريتمات الأكثر عموما. أولا، نذكر أنه، لأي أساس $a > 0\ (a \neq 1)$ وأي $x > 0$، $y = \log_a x$ إذا وفقط إذا $x = a^y$. بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي هذه المعادلة، يكون لدينا

$$\ln x = \ln(a^y) = y\ln a$$

بالحل لإيجاد y نحصل على

$$y = \frac{\ln x}{\ln a},$$

الذي يبرهن النظرية 8.3.

النظرية 8.3

لأي أساس $a > 0\ (a \neq 1)$ وأي $x > 0$، $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

عادة ما تحتوي الحاسبات على برامج مدمجة لإيجاد قيمة $\ln x$ و $\log_{10} x$. ولكن ليس للوغاريتمات العامة. تمكننا النظرية 8.3 من إيجاد قيمة اللوغاريتمات لأي أساس بسهولة. على سبيل المثال، لدينا

$$\log_7 3 = \frac{\ln 3}{\ln 7} \approx 0.564575$$

الأهم من ذلك، لاحظ أنه يمكننا استخدام النظرية 8.3 لإيجاد مشتقات اللوغاريتمات العامة بدلالة مشتقة اللوغاريتم الطبيعي. بالتحديد، من أجل أي أساس $a > 0\ (a \neq 1)$، يكون لدينا

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\ln a}$$

وكما هو الحال مع صيغة المشتقة للدوال الأسية العامة، توجد نقطة صغيرة في تعلم هذه بصفتها قاعدة اشتقاق جديدة. كل ما عليك فعله بدلا من ذلك هو استخدام النظرية 8.3.

ما وراء الصيغ

قد تتساءل عن سبب عودتنا إلى اللوغاريتم الطبيعي والدوال الأسية لتعريفها بدقة. جزء من الإجابة هو تعددية الاستخدام. يعطيك تعريف التكامل للوغاريتم صيغة مناسبة للعمل مع خصائص اللوغاريتم الطبيعي. أما السبب الأكثر أهمية بهذا الدرس فهو ضمان أن دالة اللوغاريتم ليست مجرد زر في حاسبتك. بل، يمكن التفكير في $\ln x$ من حيث المساحة. ويمكن تصور ذلك بسهولة واستخدام هذه الصورة للمساعدة في فهم خصائص الدالة. ما هي بعض الأمثلة الحياتية (مثل قواعد السلوك أو التقنيات في الرياضيات) حيث استخدمت قاعدة قبل فهم سبب القاعدة؟ هل فهم القاعدة يفيد؟

تمرينات 7.8

تمارين كتابية

1. اشرح سبب قانوني لتعريف $\ln x$ على أنها $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ من ناحية الرياضيات. بالنسبة للبعض، يعتبر هذا النوع من التعريف غير مقنع. جرب المقارنة التالية. ووضح الاستخدام أنه من السهولة حساب قيم الدالة لـ x^2 من حسابها لـ $\ln x$ من ثم x^2 أسهل للفهم. مع ذلك، قارن كيفية حسابك لقيم الدالة (بدون حاسبة) لـ $\sin x$ مقابل قيمة الدالة لـ $\ln x$. صف أيهما أكثر «طبيعية» وأيسر للفهم.

2. في هذا الدرس، ناقشنا «تعريفين» مختلفين لـ $\ln x$. اشرح سبب عدم صحة إعطاء تعريفين مختلفين من الناحية المنطقية ما لم يمكنك إيضاح أنهما يعرفان الشيء نفسه. إذا كانا يعرفان الشيء نفسه، فإن كلا التعريفين صحيحان بالتساوي وينبغي أن تستخدم أي تعريف أوضح للمهمة المطروحة. في هذا الدرس، اشرح سبب مناسبة تعريف التكامل أكثر من لوغاريتم الأساس e.

3. استخدم تعريف التكامل لـ $\ln x$ (المفسر على أنه المساحة) لشرح سبب معقولية $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

4. استخدم تعريف التكامل لـ $\ln x$ (المفسر على أنه المساحة) لشرح سبب تزايد التمثيل البياني لـ $\ln x$ وتقعره لأسفل لكل $x > 0$.

في التمارين 4–1، عبر عن العدد بصفته تكاملا وارسم المساحة المناظرة.

1. $\ln 4$
2. $\ln 5$
3. $\ln 8.2$
4. $\ln 24$

5. استخدم قاعدة سمبسون مع $n = 4$ لتقدير $\ln 4$.
6. استخدم قاعدة سمبسون مع $n = 4$ لتقدير $\ln 5$.
7. استخدم قاعدة سمبسون مع (a) $n = 32$ و (b) $n = 64$ لتقدير $\ln 4$.
8. استخدم قاعدة سمبسون مع (a) $n = 32$ و (b) $n = 64$ لتقدير $\ln 5$.

في التمارين 12–9، استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة التعبير كحد واحد.

9. $\ln \sqrt{2} + 3\ln 2$
10. $\ln 8 - 2\ln 2$
11. $2\ln 3 - \ln 9 + \ln \sqrt{3}$
12. $2\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

في التمارين 20–13، أوجد قيمة المشتقة باستخدام خصائص اللوغاريتمات عند الحاجة.

13. $\frac{d}{dx}(\ln \sqrt{x^2+1})$
14. $\frac{d}{dx}[\ln(x^5 \sin x \cos x)]$
15. $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{x^4}{x^5+1}\right)$
16. $\frac{d}{dx}\left(\ln \sqrt{\frac{x^3}{x^5+1}}\right)$
17. $\frac{d}{dx}\log_7 \sqrt{x^2+1}$
18. $\frac{d}{dx}\log_{10}(2^x)$
19. $\frac{d}{dx}(3^{\sin x})$
20. $\frac{d}{dx}\left(4^{\sqrt{x}}\right)$

في التمارين 30–21، أوجد قيمة التكامل

21. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$
22. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x}dx$
23. $\int x3^{x^2}dx$
24. $\int 2^x \sin(2^x)\,dx$
25. $\int \frac{e^{2/x}}{x^2}dx$
26. $\int \frac{\sin(\ln x^3)}{x}dx$
27. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-4}dx$
28. $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$
29. $\int_0^1 \tan x\,dx$
30. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$

31. استخدم الخاصية (ii) للنظرية 8.1 لتبرهن أن الخاصية (iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

32. استخدم خصائص اللوغاريتمات في النظرية 8.1 لتبرهن أن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

33. اشرح بيانيا أنه، لأي عدد صحيح $n > 1$، $\ln(n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$. استنتج أن $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

34. اشرح بيانيا أنه، لأي عدد صحيح $n > 1$، $\ln(n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$.

35. استخدم التعريف 8.1 لتبين أن التمثيل البياني لـ $y = \ln x$ يتقعر لأسفل لأجل $x > 0$.

36. أثبت الأجزاء (ii) و(iii) من النظرية 8.2.

37. في الدرس، أجلنا برهان $\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ إلى التمارين. في هذا التمرين، نقوم بتوجيهك خلال أحد البراهين الممكنة. (يوضح التمرين 38 برهانا آخر). بدءا بـ $h > 0$، اكتب $h = \ln e^h = \int_1^{e^h} \frac{1}{x}\,dx$. استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لكتابة $\int_1^{e^h} \frac{1}{x}\,dx = \frac{e^h - 1}{\bar{x}}$ لبعض الأعداد $\bar{x}$ بين 1 وe^h. يعطيك ذلك $\frac{e^h - 1}{h} = \bar{x}$. خذ النهاية عندما $h \to 0^+$. لأجل $h < 0$، كرر هذا البرهان، مع استبدال h بـ $-h$.

38. في هذا التمرين، نقوم بتوجيهك خلال برهان آخر لـ $\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$. ابدأ بـ $f(x) = \ln x$ وحقيقة أن $f'(1) = 1$. باستخدام التعريف البديل للاشتقاق، نكتب ذلك في شكل $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1$. اشرح سبب تضمن ذلك لـ $\lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{\ln x} = 1$. في النهاية، استبدل $x = e^h$.

39. بدءا بـ $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$، بين أن $\ln x = \lim_{n\to\infty}[n(x^{1/n} - 1)]$. على فرض أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، فإن $\lim_{n\to\infty}\left[n(x_n^{1/n} - 1)\right] = \lim_{n\to\infty}[n(x^{1/n} - 1)]$.

40. في هذا التمرين، نثبت أنه إذا كانت $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$، فإن $\ln e = 1$. عرف $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. باستمرارية $\ln x$، يكون لدينا $\ln e = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$. استخدم قاعدة لوبيتال في $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1/n}\right]$ لإيجاد قيمة هذه النهاية.

41. طبق طريقة نيوتن على الدالة $f(x) = \ln x - 1$ لإيجاد المخطط التكراري لتقريب e. اكتشف عدد الخطوات اللازمة للبدء عند $x_0 = 3$ والحصول على خمسة أرقام من الدقة.

42. أثبت أن $\ln(1 + x) \approx x$ لأجل x صغيرة (a) باستخدام التقريب الخطي و(b) اعتبار المساحة تحت التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{t}$ بين 1 و $1 + x$.

التطبيقات

43. على فرض أنه لديك فرصة 1 في الـ 10 للفوز بجائزة باستخدام بعض المشتريات (مثل اليانصيب). إذا قمت بـ 10 عمليات شراء (أي، حصلت على 10 محاولات)، فإن احتمال فوزك بجائزة واحدة على الأقل هي $1 - (9/10)^{10}$. إذا كان احتمال الفوز بالجائزة هو 1 في الـ 20 وحاولت 20 مرة، فهل سيكون احتمال الفوز بجائزة واحدة على الأقل أعلى أم أقل؟ قارن $1 - (9/10)^{10}$ و$1 - (19/20)^{20}$ لاكتشاف ذلك. لمعرفة ماذا يحدث للأعداد الفردية الأكبر والأكبر، احسب $\lim_{n\to\infty}[1 - ((n-1)/n)^n]$.

44. تستخدم الدالة السينية $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ لنمذجة مواقف ذات حد، على سبيل المثال، في الدماغ، تستقبل كل خلية عصبية مدخلات من خلايا عصبية أخرى وتطلقها فقط بعد تجاوز إجمالي المدخلات لحد معين. مثل $y = f(x)$ بيانيا وأوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و$\lim_{x\to -\infty} f(x)$. عرف الدالة $g(x)$ لتكون قيمة $f(x)$ مقربة إلى أقرب عدد صحيح. ما قيمة حد x لهذه الدالة لتتحول من «إيقاف التشغيل» (0) إلى «تشغيل» (1)؟ كيف يمكنك تعديل الدالة لنقل الحد إلى $x = 4$ بدلا من ذلك؟

45. يصنع كابل التلغراف من لفيفة خارجية حول قلب داخلي. إذا كانت x معرفة على أنها نصف قطر القلب مقسوما على نصف القطر الخارجي، فإن سرعة الإرسال تتناسب مع $s(x) = x^2 \ln(1/x)$. أوجد x التي تزيد من سرعة الإرسال.

تمارين استكشافية

1. تعتبر دالة الخطأ، دالة خاصة تستخدم في العديد من التطبيقات تعرف بـ $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(x)$، حيث $f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du$. استكشف الدالة $f(x)$. لأي x تكون $f(x)$ موجبة؟ سالبة؟ متزايدة؟ متناقصة؟ تتقعر إلى الأعلى؟ تتقعر إلى الأسفل؟ قدر بعض قيم الدالة لأجل x الكبيرة. خمن $\lim_{x\to\infty} f(x)$. ارسم التمثيل البياني لـ $f(x)$.

2. برهن أن $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$. (ارشاد: اوجد مشتقة الدالة الأصلية المقترحة وبين أنك حصلت على المكامل). يظهر هذا التكامل في إنشاء نوع خاص من الخرائط يسمى خريطة مركاتور. في هذه الخريطة، لا تكون خطوط العرض متباعدة بطريقة متساوية، وإنما توضع بحيث تناظر الخطوط المستقيمة في خريطة مركاتور مسارات عنوان ثابت. (إذا سافرت في اتجاه الشمال الشرقي، فإن مسارك على خريطة ذات خطوط عرض متباعدة بالتساوي سيبدو منحنيا نحو انحناء الأرض). لتكن R (متوسط) نصف قطر الأرض. بفرض أن الأرض كروية، فإن المسافة الفعلية من خط الاستواء إلى مكان على خط العرض $b°$ هي $\frac{\pi}{180}Rb$. على خريطة مركاتور، تقاس هذه المسافة بـ $\frac{\pi}{180}R\int_0^b \sec x\,dx$. لتامبا وفلوريدا خط العرض 28° شمالا. تبعد موسكو، روسيا على ضعف المسافة من خط الاستواء عند 56° شمالا. ما هي مسافة تامبا وموسكو على خريطة مركاتور؟

3. عرف دالة التكامل للوغاريتم $x > 1$ لكل $Li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt$.

لأجل $n = 4$ و $x = 4$. اشرح سبب عدم إعطاء قاعدة سمبسون تقديرا لـ $Li(4)$. ارسم صور للمساحة الممثلة بواسطة $Li(4)$. يتضح أن $Li(x) = 0$ لأجل $x \approx 1.45$. اشرح لم $Li(4) \approx \int_{1.45}^{4} \frac{1}{\ln t}\,dt$ وقدر ذلك باستخدام قاعدة سمبسون مع $n = 4$. نستخدم

هذه الدالة لتقدير $\pi(N)$، عدد الأعداد الرئيسية أصغر من N. تقدير آخر شائع لـ $\pi(N)$ هو $\frac{N}{\ln N}$. قدر $\frac{N}{\ln N}$ و $\pi(N)$ لـ (a) $N = 20$ و (b) $N = 40$ و (c) $N = 100,000,000$، حيث سنعطيك $\pi(N) = 5,761,455$. ناقش أي نمط نجده. (راجع الاستحواذ الرئيسي بواسطة جون دربيشاير لمعرفة المزيد عن هذا المجال من نظريات الأعداد).

تمارين مراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدم تعريفا أو عبارة دقيقة. (2) اذكر ما تعنيه عموما (3) صف أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

المساحة	قيمة متوسطة	التكامل غير المحدود
المساحة المشار إليها	التكامل بالتعويض	قاعدة سمبسون
قاعدة نقطة المنتصف	قاعدة شبه المنحرف	اللوغاريتم الطبيعي
نظرية القيمة المتوسطة في التكامل	النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل	
مجموع ريمان	التكامل المحدود	

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صواب أم خطأ واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خطأ، فحاول أن "تصلحها" عبر تعديل العبارة المعطاة لإنشاء عبارة جديدة تكون صائبة.

1. عادة ما تعطي قاعدة نقطة المنتصف تقريبات أفضل من القيمة في النقطة الطرفية اليسرى.
2. كلما كانت n أكبر، كلما كان تقريب مجموعة ريمان أفضل.
3. إن الدوال المتصلة متعددة التعريفات قابلة للتكامل.
4. يعطي التكامل المحدود للسرعة المتجهة إجمالي المسافة المجتازة.
5. توجد بعض الدوال الأولية ليس لها دالة أصلية.
6. لإيجاد التكامل المحدود، يمكنك استخدام أي دالة أصلية.
7. لا يكون التعويض صحيحا إذا لم يكن حد الاشتقاق du موجود في المكامل الأصلي.
8. باستخدام قاعدة سمبسون. إذا كانت n مضاعفة، فإن الخطأ يصغر بمعامل قدره 16.

في التمارين 20–1، أوجد الدالة الأصلية.

1. $\int (4x^2 - 3)\,dx$
2. $\int (x - 3x^5)\,dx$
3. $\int \frac{4}{x}\,dx$
4. $\int \frac{4}{x^2}\,dx$
5. $\int 2\sin 4x\,dx$
6. $\int 3\sec^2 x\,dx$
7. $\int (x - e^{4x})\,dx$
8. $\int 3\sqrt{x}\,dx$
9. $\int \frac{x^2+4}{x}\,dx$
10. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$
11. $\int e^x(1 - e^{-x})\,dx$
12. $\int e^x(1 + e^x)^2\,dx$
13. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$
14. $\int x(x^2+4)\,dx$
15. $\int 6x^2\cos x^3\,dx$
16. $\int 4x\sec x^2\tan x^2\,dx$
17. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
18. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
19. $\int \tan x\,dx$
20. $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

21. أوجد دالة $f(x)$ تحقق $f'(x) = 3x^2 + 1$ و $f(0) = 2$.
22. أوجد دالة $f(x)$ تحقق $f'(x) = e^{-2x}$ و $f(0) = 3$.
23. حدد موقع الدالة إذا كانت السرعة المتجهة $v(t) = -9.8t + 10$ والموقع الابتدائي $s(0) = 2$.
24. حدد موقع الدالة إذا كان التسارع $a(t) = 6$ باستخدام سرعة متجهة ابتدائية $v(0) = 10$ وموقع ابتدائي $s(0) = 0$.
25. اكتب كل الحدود واحسب $\sum_{i=1}^{6}(i^2 + 3i)$.
26. حول إلى رموز تجميع واحسب: مجموع مربعات أول 12 عدد صحيح موجب.

في التمرينين 27 و28، استخدم قواعد التجميع لحساب المجموع.

27. $\sum_{i=1}^{100}(i^2 - 1)$
28. $\sum_{i=1}^{100}(i^2 + 2i)$

29. احسب مجموع $\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2 - i)$ ونهاية المجموع عندما تقترب n من ∞.

30. لأجل $f(x) = x^2 - 2x$ على الفترة $[0, 2]$، اذكر نقاط قيم قاعدة نقطة المنتصف باستخدام $n = 4$. ارسم الدالة ومستطيلات التقريب وأوجد قيم مجموع ريمان.

في التمرينين 31–34. قرب المساحة تحت المنحنى باستخدام n مستطيلات وقاعدة إيجاد القيم المعطاة.

31. $y = x^2$ في $n = 8$ ،$[0, 2]$. إيجاد القيم من نقطة المنتصف

32. $y = x^2$ في $n = 8$ ،$[-1, 1]$. إيجاد القيم من النقطة الطرفية اليمنى

33. $y = \sqrt{x+1}$ في $n = 8$ ،$[0, 3]$. إيجاد القيم من نقطة المنتصف

34. $y = e^{-x}$ في $n = 8$ ،$[0, 1]$. إيجاد القيم من النقطة الطرفية اليسرى

في التمرينين 35 و36. استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام (a) إيجاد القيم من النقطة الطرفية اليسرى و(b) إيجاد القيم من النقطة الطرفية اليمنى و(c) قاعدة شبه المنحرف و(d) قاعدة سمبسون.

35.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	1.0	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0	1.6	1.4

36.

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2
$f(x)$	4.0	3.4	3.6	3.0	2.6	2.4	3.0	3.6	3.4

37. في التمرينين 35 و36، أي من تقديرات المساحة الأربعة تتوقع أن يكون أكثر دقة؟ اشرح بإيجاز.

38. إذا كانت $f(x)$ موجبة وتتقعر لأعلى، فهل تبالغ قاعدة نقطة المنتصف في المساحة الفعلية أم تقلل من قيمتها؟ هل تبالغ قاعدة شبه المنحرف في المساحة الفعلية أم تقلل من قيمتها؟

في التمرينين 39 و40. أوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجاميع ريمان.

39. $\int_0^1 2x^2\,dx$

40. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

في التمرينين 41 و42. اكتب إجمالي المساحة كتكامل أو مجموع تكاملات ثم أوجد قيمتها.

41. المساحة فوق المحور x وتحت $y = 3x - x^2$

42. المساحة بين المحور x و $y = x^3 - 3x^2 + 2x,\ 0 \le x \le 2$

في التمرينين 43 و44. استخدم دالة السرعة المتجهة لحساب المسافة المجتازة على الفترة الزمنية المعطاة.

43. $v(t) = 40 - 10t, [1, 2]$

44. $v(t) = 20e^{-t/2}, [0, 2]$

في التمرينين 45 و46. احسب متوسط قيمة الدالة على الفترة.

45. $f(x) = e^x, [0, 2]$

46. $f(x) = 4x - x^2, [0, 4]$

في التمارين 47–58. أوجد قيمة التكامل.

47. $\int_0^2 (x^2 - 2)\,dx$

48. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x)\,dx$

49. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$

50. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

51. $\int_0^{10} (1 - e^{-t/4})\,dt$

52. $\int_0^1 te^{-t^2}\,dt$

53. $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

54. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

55. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx$

56. $\int_0^2 x(x^2+1)\,dx$

57. $\int_0^1 (e^x - 2)^2\,dx$

58. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\,dx$

في التمرينين 59 و60. أوجد المشتقة.

59. $f(x) = \int_2^x (\sin t^2 - 2)\,dt$

60. $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2+1}\,dt$

في التمرينين 61 و62. احسب تقريبات (a) قاعدة نقطة المنتصف و(b) قاعدة شبه المنحرف و(c) قاعدة سمبسون باستخدام $n = 4$ يدويا.

61. $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,dx$

62. $\int_0^2 e^{-x^2/4}\,dx$

63. كرر التمرين 61 باستخدام الحاسوب أو الحاسبة و $n = 20; n = 40$.

64. كرر التمرين 62 باستخدام الحاسوب أو الحاسبة و $n = 20; n = 40$.

65. بين أنه إذا كانت $u = \tanh\ (t/2)$، فإن $\cosh t = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ و $\sinh t = \frac{2u}{1-u^2}$. استخدم التعويض $u = \tanh(t/2)$ لإيجاد قيمة (a) $\int \frac{1}{\sinh t + \cosh t}\,dt$ و (b) $\int \frac{\sinh t + \cosh t}{1 + \cosh t}\,dt$.

تمارين استكشافية

1. على فرض أن $f(t)$ هو معدل وقوع بعض الأحداث (مثل، ولادة حيوان أو إضاءة يراعة). فإن متوسط معدل حدوث R خلال فترة زمنية $[0, T]$ هو $R = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. سنفترض أن الدالة $f(t)$ دورية بزمن T. [أي أن، $f(t + T) = f(t)$ لكل t.] **اللاتزامن المثالي** يعني أن ترجيح وقوع الحدث متساوي في جميع الأزمنة. ناقش أن هذا يناظر دالة المعدل الثابت $f(t) = c$ وأوجد قيمة c (بدلالة R و T). **التزامن المثالي** يعني أن الحدث يقع مرة واحدة فقط في كل دورة (مثل، إضاءة

2. كل اليراعات في الزمن نفسه. (أو ولادة كل الصغار بالتزامن). سنتعرف على شكل دالة المعدل $f(t)$ في هذه الحالة. أولاً، عرف **درجات التزامن** لتكون $\frac{\text{المساحة تحت } f \text{ وفوق } R}{RT}$. بين أنه، إذا كانت $f(t)$ ثابتاً، فإن درجة التزامن تكون 0. ثم مثل بيانياً وأوجد درجة تزامن الدوال التالية (فرضاً أن $T > 2$).

$$f_1(t) = \begin{cases} (RT)(t - \frac{T}{2}) + RT & \text{if } \frac{T}{2} - 1 \le t \le \frac{T}{2} \\ (-RT)(t - \frac{T}{2}) + RT & \text{if } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + 1 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} (4RT)(t - \frac{T}{2}) + 2RT & \text{if } \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ (-4RT)(t - \frac{T}{2}) + 2RT & \text{if } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

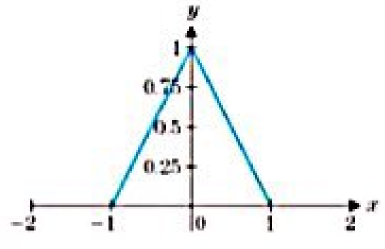
$$f_3(t) = \begin{cases} (9RT)(t - \frac{T}{2}) + 3RT & \text{if } \frac{T}{2} - \frac{1}{3} \le t \le \frac{T}{2} \\ (-9RT)(t - \frac{T}{2}) + 3RT & \text{if } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ما هو تخمينك عندما تكون نهاية درجات تزامن $f_n(t)$ عندما $n \to \infty$؟ يطلق على "الدالة" التي تقترب منها $f_n(t)$ عندما $n \to \infty$ اسم **دالة دفع** لقوة RT. ناقش ملاءمة هذا الاسم.

3. تستخدم **دالة أوميجا** لتحليل مخاطر/مكافآت الاستثمارات المالية. على فرض أن $f(x)$ هي دالة معرفة على الفترة (A, B) التي تعطي توزيع عائدات الاستثمار. (هذا يعني أن $\int_A^b f(x)\,dx$ هي الاحتمال بأن عائدات الاستثمار تتراوح بين a و b AED). لتكن $F(x) = \int_A^x f(t)\,dt$ هي **دالة التوزيع التراكمي** للعائدات.

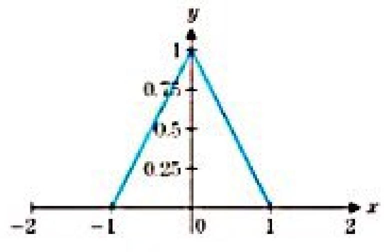
إذن $\Omega(r) = \dfrac{\int_r^B [1 - F(x)]\,dx}{\int_A^r F(x)\,dx}$ هي دالة أوميجا للاستثمار.

(a) لتوزيع $f_1(x)$ الموضح، احسب دالة التوزيع التراكمي $F_1(x)$.



$y = f_1(x)$

(b) كرر الجزء (a) لتوزيع $f_2(x)$ الموضح.



$y = f_2(x)$

(c) احسب $\Omega_1(r)$ لتوزيع $f_1(x)$. لاحظ أن $\Omega_1(r)$ ستكون غير معرفة (∞) لأجل $r \le -1$ و $\Omega_1(r) = 0$ لأجل $r \ge 1$.

(d) احسب $\Omega_2(r)$ لتوزيع $f_2(x)$. لاحظ أن $\Omega_2(r)$ ستكون غير معرفة (∞) لأجل $r \le -10$ و $\Omega_2(r) = 0$ لأجل $r \ge 10$.

(e) بالرغم من أن المتوسطات (متوسط القيم) واحد، إلا أن **الاستثمارات ذات التوزيعات $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ليست متساوية.** استخدم التمثيلات البيانية لأجل $f_1(x)$ و $f_2(x)$ لشرح سبب مطابقة $f_2(x)$ لاستثمار أكثر خطورة من $f_1(x)$.

(f) بين أن $\Omega\ (r) > \Omega\ (r)$ لكل $r > 0$ و $\Omega_1(r) < \Omega_2(r)$ لكل $r < 0$. بشكل عام، كلما كانت $\Omega(r)$ أكبر، كان الاستثمار أفضل. اشرح ذلك في ما يتعلق بهذا المثال.