

الصف الثاني عشر
مراجعة الفصل الثاني

التقريب الخطي أو المماس للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$
 $L(X) = F(X_0) + F'(X_0)(X - X_0)$

اوجد التقريب الخطي للدالة $F(X)$ عند $X = X_0$ استخدم التقريب لتقدير العدد المعطى

1) $F(X) = \sqrt{X}, X_0 = 1, \sqrt{1.4}$

2) $F(X) = (X - 4)^{\frac{1}{3}}, X_0 = 0, \sqrt[3]{1.3}$

4) $F(X) = \sqrt{2X - 3}, X_0 = 0, \sqrt{8.8}$

$$5) F(X) = \sin 3x, x_0 = 0, \sin(0.3)$$

$$6) f(x) = \sin x, x_0 = \pi, \sin(3.0)$$

استخدم الاستكمال الداخلي الخطي لتقدير الكمية المطلوبة :

www.almanahj.com

قدرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ الف لعبة برمجية بالسعر x \$ كما هو معطي في الجدول

x	20	30	40	50
F(x)	18	14	12	11

قدر عدد اللعبات التي يمكن بيعها 29 \$ و 24 \$

قاعدة نيوتن للتقريب

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

استخدم طريقة نيوتن لتقريب العدد المعطى:

1) $\sqrt{17}$

2) $\sqrt{12}$

3) $\sqrt[3]{11}$

4) $\sqrt[4]{17}$

www.almanahj.com

استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر تقريبي عند x_1 و x_2

$$1) x^3 + 3x^2 - 1 = 0, x_0 = 1$$

$$2) x^4 - 3x^2 + 1 = 0, x_0 = 1$$

www.almanahj.com

$$3) x^4 - 3x^2 + 1 = 0, x_0 = -1$$

قاعدة لوبيتال

الصيغة غير المعرفة لاستخدام لوبيتال هي :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0, (0 \cdot \infty), (\infty - \infty)$$

اوجد النهايات المعطاة:

$$1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - 1}{t}$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{e^{2t} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$6) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

www.almanahj.com

$$11) \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t}$$

$$12) \lim_{t \rightarrow \infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$13) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$$

www.almanahj.com

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$$

www.almanahj.com

$$19) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

$$21) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-3}{t+2} \right)^t$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)^{\frac{2}{x}}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

www.almanahj.com

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \ln x \right)$$

$$25) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(t+1)} - \frac{1}{t} \right)$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$27) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right)$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x)$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{x+1} \right|^{\sqrt{x}}$$

www.almanahj.com

أوجد كل الأخطاء:

$$30) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} = \frac{-e^{-x}}{1} = 0$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1} = 2$$

33) اوجد الدالة f حيث $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x)$ لها الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ ولكن

a) حيث لا توجد النهاية

b) تساوي 0

c) تساوي 3

34) اوجد الدالة f حيث $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ لها الصيغة $\infty - \infty$

a) حيث لا توجد النهاية

b) تساوي 0

c) تساوي 2

القيم العظمى والصغرى المطلقة

لإيجاد القيم القصوى المطلقة نتبع:

1- إيجاد مجال الدالة

2- إيجاد النقاط الحرجة للدالة والتأكد من وجود النقاط الحرجة في مجال الدالة

3- التعويض بالنقاط الحرجة واطراف الفترة في الدالة الاصلية قبل الاشتقاق

4- اكبر قيمة هي عظمي مطلقة واصغر قيمة هي صغري مطلقة

اوجد القيم القصوى المطلقة للدوال المحدد بالفترة:

$$35) f(x) = x^4 - 8x^2 + 2 \quad [-1, 3]$$

www.almanahj.com

$$36) f(x) = x^{2/3} \quad [-4, -2]$$

$$37) f(x) = \sin x + \cos x \quad [0, 2\pi]$$

$$38) f(x) = e^{-x^2} \quad [0, 2]$$

$$39) f(x) = \frac{3x^2}{x-3} \quad [-2, 2], [2, 8]$$

40) $f(x) = x^2 e^{-4x}$ $[-2, 0]$ $[0, 4]$

www.almanahj.com

41) $f(x) = \tan^{-1} x^2$ $[0, 1]$ $[-3, 4]$

القيم العظمى والصغرى المحلية:
لإيجاد القيم القصوى المحلية نتبع الآتي:
1- إيجاد مجال الدالة

2- ايجاد النقاط الحرجة للدالة

3- رسم خط الاعداد وتعين القيم الحرجة علي خط الاعداد واختبار التزايد والتناقص

4- اذا كانت الفترة قبل النقطة الحرجة متزايدة وبعدها متناقص تكون قيمة عظمي محلية

5- اذا كانت الفترة قبل النقطة الحرجة متناقصة وبعدها متزايد تكون قيمة صغري

اوجد الاعداد الحرجة للدالة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوي المحلية للدالة ان امكن:

$$42) f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$$

$$44) f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}}$$

$$45) f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}}$$

$$46) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$47) f(x) = e^{x^2-1}$$

$$48) f(x) = x|x - 2|$$

www.almanahj.com

$$49) f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$50) f(x) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$51) f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

ارثيلا بيانيا للءالة مءصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة ل $f(x)$ في $(-2, 2)$ غير موجودة والصغرى المطلقة 2 (52)

www.almanahj.com

اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية:
نتبع الخطوات الآتية:

إيجاد مجال الدالة
إيجاد النقطة الحرجة للدالة

التعويض بالنقاط الحرجة في المشتقة الثانية
إذا كانت قيمة النقطة الحرجة في المشتقة الثانية أكبر من صفر تكون قيمة صغرى محلية
إذا كانت قيمة النقطة الحرجة للدالة في المشتقة الثانية أقل من صفر قيمة عظمى محلية

ملاحظة هامة:

عند التعويض بالنقاط الحرجة للدالة في المشتقة الثانية وكانت القيمة صفر أو غير معرفة
نستخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية

باستخدام اختبار المشتقة الثانية اوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$52) f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$$

$$53) f(x) = e^{-x^2}$$

www.almanahj.com

$$54) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$55) f(x) = xe^{-x}$$

$$56) f(x) = x^2|x|$$

$$57) f(x) = x \ln x$$

رسم المنحنيات
1- رسم منحنيات الدوال كثيرة الحدود نتبع الآتي:

ايجاد مجال الدالة
ايجاد فترات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الاولى
ايجاد القيم الصغرى والعظمى المحلية للدالة
ايجاد فترات التفرع الي اعلي وفترات التفرع الي اسفل باستخدام المشتقة الثانية
ايجاد نقاط الانقلاب
ايجاد نقاط التقاطع مع المحورين
استخدام بعض النقاط المساعدة والتعويض في الدالة

رسم منحنيات الدوال النسبية نتبع الآتي
بالإضافة الي المعلومات السابقة نحدد:
نوجد النهاية للدالة عند اصفار المقام
نوجد السلوك الطرفي للدالة
نوجد خطوط التقارب الراسية والافقية ان وجدت

ارسم التمثيل البياني للدوال الآتية:

$$58) f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

$$59) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

www.almanahj.com

$$60) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

القيم المثلي:
القيم المثلي هي تطبيقات علي القيم العظمي والصغرى
نربط بين المتغيرات
نعبر عن الكمية المطلوبة ايجاد لها اكبر قيمة او اصغر قيمة بدلالة متغير واحد
نعين النقاط الحرجة باستخدام المشتقة الاولي
نعوض بالنقاط الحرجة في الدالة ذات المتغير الواحد لإيجاد اكبر واصغر قيمة

او جد عددين مجموعهما 12 بحيث يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن (61)

62) سياج من ثلاث جوانب بجوار القسم المستقيم من النهر الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة
96_ قدما من السياج اوجد القيمة العظمي للمساحة المحاطة بالسياج وابعاد السياج

62) طبل مكون من حظيرتين يشكل مخطط الاسطبل مستطلين متطابقين متجاورين اذا كان هناك 120 متر من السياج متوفر فما هي الابعاد التي سيضيفها الاسطبل الي المساحة المحاطة بالسياج

63) ناء صندوق مفتوح من الاعلي باخذ لوح من الورق المقوي مساحته 6 في 10 سم وقص مربعات بحجم x سم من كل زاوية وطي الجوانب اوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمي لحجم الصندوق

www.almanahj.com

64) اوجد النقطة علي القطع المكافئ $y = 2 - x^2$ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (0, 1) اقل ما يمكن

المعدلات الزمنية المرتبطة:
نشتق الدالة اشتقاق ضمني بالنسبة للزمن
المعدل هو الاشتقاق بالنسبة للزمن
السمك ضرب المساحة تساوي الحجم

- 65) $1ft^3$ نظرا لان $\frac{1}{4}$ من ناقله النفط بمعدل 120 غالونا في الدقيقة ينتشر النفط في دائرة بسمك 7.5 غالونات حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر الي 100ft

www.almanahj.com

- 66) ان حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 اقدام في الدقيقة عندما يصل نصف القطر الي 200 قدم فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة

- 67) علي فرض ان قطرة مطر تتبخر بطريقة تحافظ معها علي شكلها الكروي علما بان حجمها الكروي

$$v = Ar' \text{ وان مساحة سطحه } A = \pi r^2 \text{ فاذا تغير نصف القطر مع الزمن واصبح الحجم}$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

اذا كان معدل التبخر (v') يتناسب مع مساحة السطح بين ان نصف القطر يتغير بمعدل ثابت

طول 10 اقدام علي جانب المبني فاذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدا عن الجدار بمعدل 3 ft/s (68)

لامسا للجدار (a) اوجد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدا بمقدار

6 اقدام عن الجدار

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

التكلفة الحدية هي مشتقة دالة التكلفة وكذلك الربح الحدي مشتقة دالة الربح

$$\text{متوسط التكلفة} = c'(x) = \frac{c(x)}{x}$$

$$\text{مرونة الطلب} = E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

$$\text{ثابت } c, 0 < x < 1, \text{ الرقم الهيدروجيني} = c + \ln \frac{x}{1-x}$$

عندما $x = 1$ تسمى نقطة التكافؤ

$$x = x_1 \text{ الكثافة الخطية عندما } p(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

$$\text{متوسط التيار} = \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}, \text{ التيار اللحظي } I(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1} = Q'(t_1)$$

$$\text{معدل تغير تعداد سكاني} = p'(t) = r(t)[1 - p(t)]$$

69) اوجد دالة التكلفة $c(x)$

$$= x^3 + 20x^2 + 90x + 15 \text{ هي } x \text{ منتج}$$

الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية ل 50منتجا .

www.almanahj.com

اوجد متوسط الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى:

$$70) c(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$$

$$71) c(x) = \sqrt{x^2 + 800}$$

اوجد مرونة الطلب ومدى الاسعار الذي يكون فيه الطلب $E < -1$
72) $f(x) = 100p(20 - p)$

www.almanahj.com

73) اوجد التركيز $x'(t)$
اذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقا للمعادلة $= 2x(t)[4 - x(t)]$
الذي تصل فيه سرعة التفاعل الي القيمة العظمي واوجد حدود التركيز

اوجد الكثافة الكتلية:

74) $m(x) = 4x - \sin x$ لكل جرام $0 \leq x \leq 6$

75) اوجد التيار $Q(t)$
 $= e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ علي فرض أن الشحنة الدائرة الكهربائية

76) اوجد التعداد السكاني $p'(t)$
 $= 4p(t)[5 - p(t)]$ علي فرض أن النمو السكاني وفقا للمعادلة
الذي يصل فيه معدل النمو الي القيمة العظمي

www.almanahj.com

www.almanahj.com

عبدالله جابر شوقي