



الثاني عشر المتقدم
الرياضيات
الفصل الثاني 2018/2017

www.almarahj.com
الوحدة الرابعة: تطبيقات التفاضل



رائد النصيرات

raed.bein@hotmail.com

0551424288

raed1976.classtell.com

تعريف (1-1)

التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

سؤال (1) أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \cos x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$ واستخدمه لتقريب قيمة $f(1)$ ؟

الحل:

سؤال (2) أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin x$ عند جميع قيم x التي تقترب من 0 ؟

الحل:

سؤال (3) استخدم تقريباً خطياً لتقريب قيمة $\sqrt[3]{8.05}$ ؟

الحل:

سؤال (4) مستخدماً التقريب الخطي قدر قيمة $f(9)$ من خلال بيانات الجدول التالي

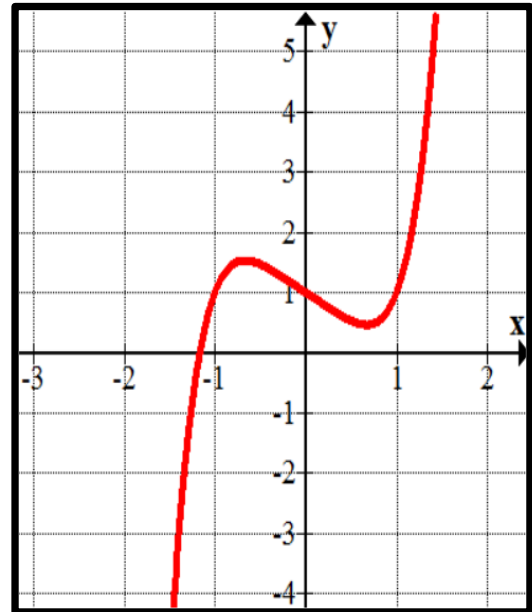
x	6	10	14
$f(x)$	84	60	32

الحل:

طريقة نيوتن: تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة تقريبية لصفر الدالة.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

سؤال (5) أوجد الصفر التقريبي للدالة $f(x) = x^5 - x + 1$ مستخدماً طريقة نيوتن؟



سؤال (6) استخدم طريقة نيوتن لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt[5]{31}$ ؟

الحل:

أسئلة الكتاب صفحة 236:

3 ، 5 ، (a)7 ، (a)8 ، 10 ، 12 ، (a)13 ، 20 ، 23 ، 25 ، 27 ، (a)53

www.almanahj.com

الدرس الثاني: الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

الصيغ الغير معرفة التي نستخدم معها قاعدة لوبيتال هي $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ كما يمكن استخدامها مع صيغ غير معرفة أخرى مثل 1^{∞} , 0^0 , $0 \cdot \infty$, ∞^0 , $\infty - \infty$

نظرية (2-1):

على فرض أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق في الفترة (a, b) و $g'(c) \neq 0$ ، إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ أو } \pm\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

سؤال: أوجد قيمة النهاية في كل مما يلي مستخدماً قاعدة لوبيتال.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos x}{2\sin x}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{3x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 3x}{\csc x}$

www.almanahj.com

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(x+2)} - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} \ln x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$$

www.almanahj.com

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)^{\frac{3}{x}}$$

www.almanahj.com

أسئلة الكتاب صفحة 247 :

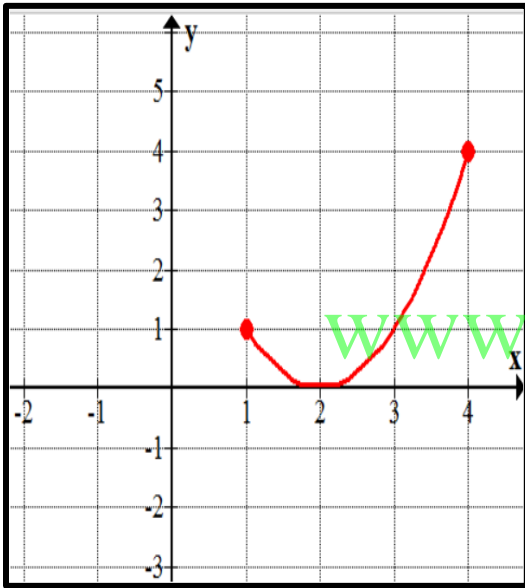
1 ، 5 ، 7 ، 10 ، 13 ، 18 ، 22 ، 25 ، 29 ، 33 ، 39

تعريف (3-1):

إذا كانت f دالة معرفة في مجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$ فإن:

- (1) $f(c)$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$.
- (2) $f(c)$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

سؤال (1) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 4$ في الفترة $[1, 4]$ ؟



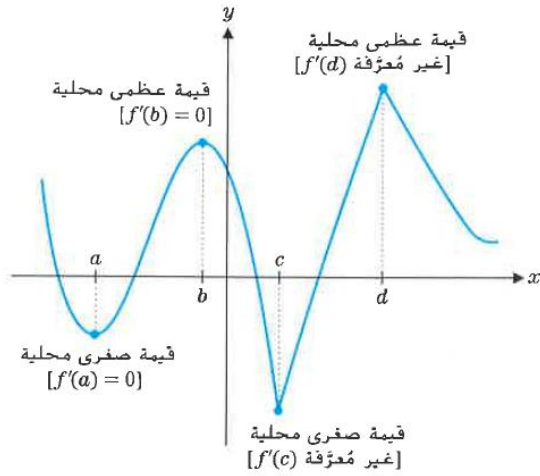
تعريف: نقول أن العدد c في مجال الدالة f عدداً حرجاً إذا كانت $f'(c) = 0$ أو غير موجودة .

تعريف (3-1):

إذا كانت f دالة معرفة في مجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$ فإن:

- (1) $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .
- (2) $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

سؤال (2) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة 5



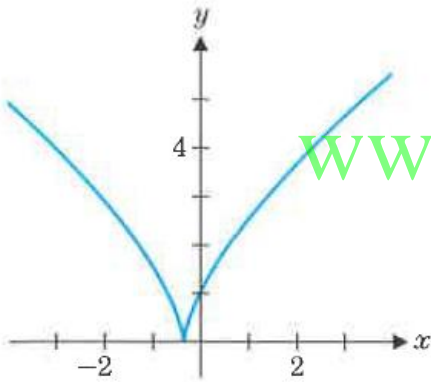
القيم القصوى عند نقطة حيث تكون المشتقة غير معرفة

أوجد الأعداد الحرجة والقيمة القصوى المحلية لـ $f(x) = (3x + 1)^{2/3}$

نظرية (3-2) (نظرية فيرما):

إذا كان $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى) فإن c

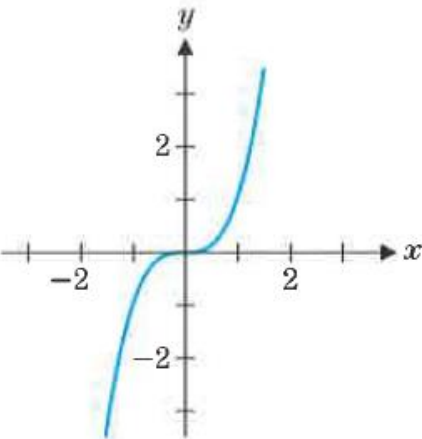
سؤال (3) أوجد القيم الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ؟



مماس أفقي عند نقطة ليست قيمة قصوى محلية

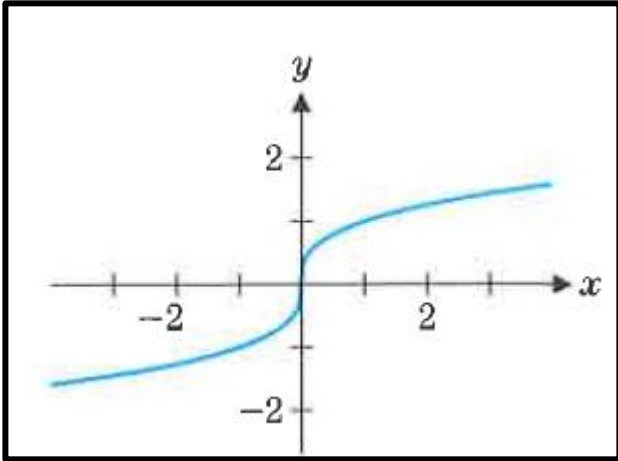
أوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية لـ $f(x) = x^3$

سؤال (4) أوجد القيم الحرجة للدالة $g(x) = \frac{3x^2}{x+3}$ ؟



مماس رأسي عند نقطة ليست قيمة

أوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية لـ $f(x) = x^{1/3}$



النظرية 3.3

على فرض أن f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$. يجب على كل قيمة قصوى مطلقة لـ f ان تكون موجودة عند نقطة نهاية (a أو b) أو عند عدد حرج.

www.almanahj.com

كيف نجد القيم القصوى المطلقة لدالة معرفة على فترة مغلقة

1. أوجد كل الأعداد الحرجة في الفترة واحسب قيم الدالة عند تلك النقاط.
2. احسب قيم الدالة عند نقاط النهاية.
3. أكبر قيمة لهذه الدوال هي قيمة عظمى مطلقة وأصغر قيمة لهذه الدوال هي قيمة صغرى مطلقة.

سؤال (5) أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من الدوال التالية على الفترة المعطاة.

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, $[-2, 4]$

$$2) f(x) = 4x^{\frac{5}{4}} - 8x^{\frac{1}{4}}, [0, 4]$$

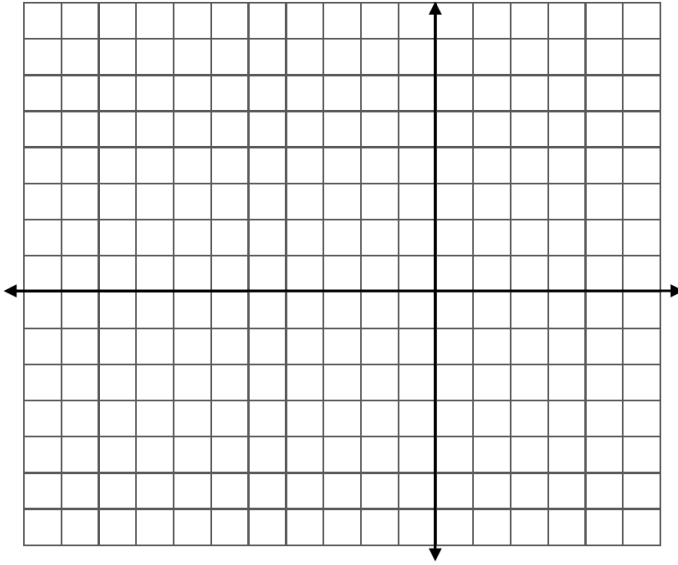
أسئلة الكتاب صفحة :

في التمارين 7-24، أوجد كل الأعداد الحرجة.
www.almanahj.com

$$8. f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$$

$$11. f(x) = \sin x \cos x, [0, 2\pi]$$

39. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفاصل $[-2, 2]$ يساوي 3 وتكون القيمة الصغرى المطلقة غير موجودة.



40. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة متصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ غير موجودة وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2.

41. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة متصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ يساوي 4 وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2.

42. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة f بحيث لا توجد قيمة عظمى مطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$ وكذلك لا توجد قيمة صغرى مطلقة.

في التمارين 25-34، أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة محددة في كل فترة مُشار إليها.

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ في الفترتين (a) $[-3, 1]$ و (b) $[-1, 3]$

28. $f(x) = \sin x + \cos x$ في الفترتين (a) $[0, 2\pi]$ و (b) $[\pi/2, \pi]$

www.almanahj.com

30. $f(x) = x^2 e^{-4x}$ في الفترتين (a) $[-2, 0]$ و (b) $[0, 4]$

32. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ في الفترتين (a) $[0, 1]$ و (b) $[-3, 4]$

31. $f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$ في الفترتين (a) $[-2, 2]$ و (b) $[2, 8]$

www.almanahj.com

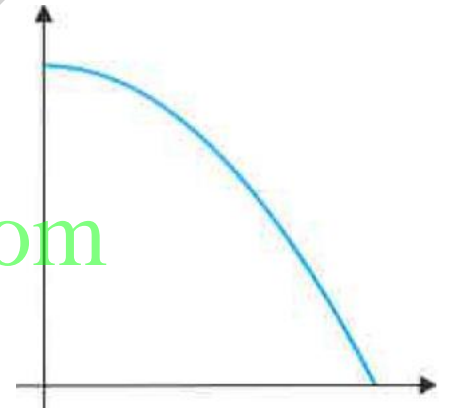
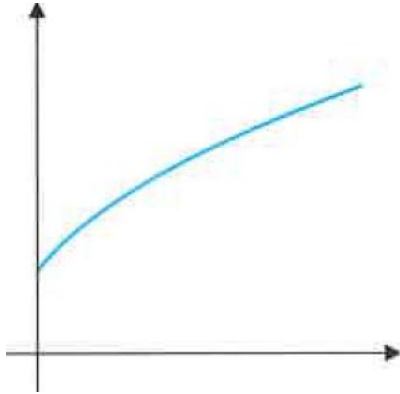
34. $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 16}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[0, 6]$

الدرس الرابع: الدوال المتزايدة والمتناقصة

التعريف 4.1

تكون f دالة متزايدة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ عندما $x_1 < x_2$. فإن $f(x_1) < f(x_2)$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أكبراً].

تكون f دالة متناقصة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$. فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أصغراً].

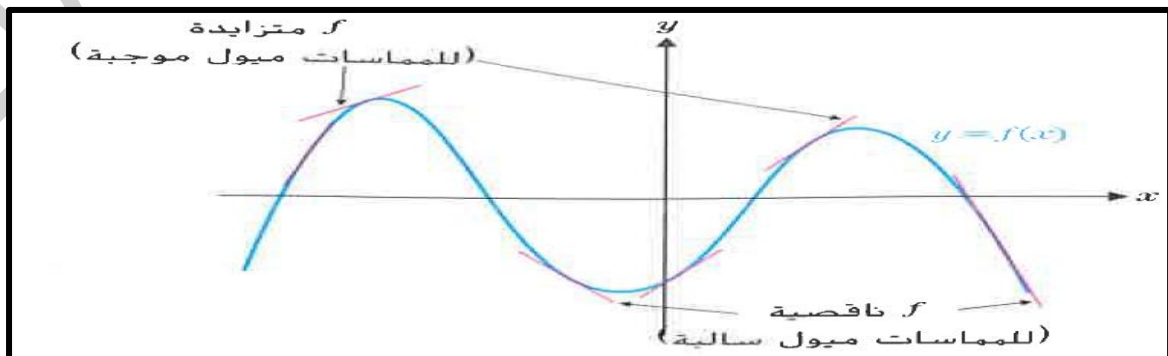


www.almanahj.com

النظرية 4.1

على فرض أن f قابلة للتفاضل في الفترة I .

- (i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in I$. فإن f تكون متزايدة في I .
- (ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in I$. فإن f تكون متناقصة في I .



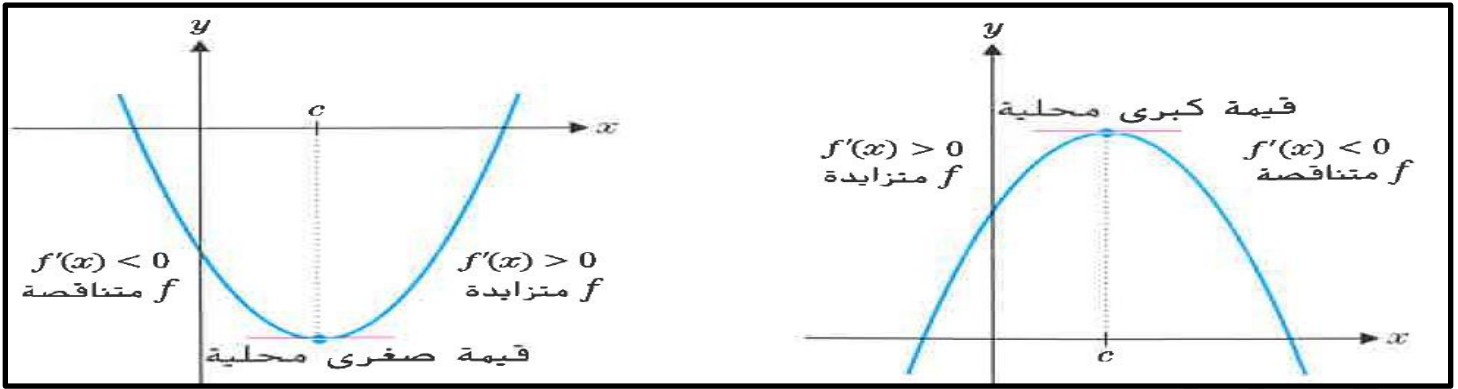
سؤال (1) إذا كانت $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ فأجب عما يلي:

- 1- أوجد قيم x الحرجة.
- 2- حدد فترات التزايد والتناقص.
- 3- أرسم منحنى الدالة f .

www.almanahj.com

النظرية 4.2 اختبار المشتقة الأولى

- على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ و $c \in (a, b)$ هو عدد حرج.
- (i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, c)$ و $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c, b)$ أي f تتغير من التزايد إلى التناقص عند c . فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.
 - (ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, c)$ و $f'(x) > 0$ لكل $x \in (c, b)$ أي f تتغير من التناقص إلى التزايد عند c . فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.
 - (iii) إذا كانت $f'(x)$ لها الإشارة نفسها في الفترتين (a, c) و (c, b) . فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية.



سؤال (2) إذا كانت $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$ فأوجد القيم القصوى المحلية؟

www.almanahj.com

سؤال (3) إذا كانت $f(x) = \frac{3-x}{1-x^2}$ فأوجد ما يلي:

- 1- قيم x الحرجة.
- 2- فترات التزايد والتناقص.
- 3- القيم القصوى المحلية.

في التمارين 1-10، أوجد (يدويًا) الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة. استخدم هذه المعلومات في تحديد جميع القيم القصوى المحلية وارسم تمثيلًا بيانيًا.

3. $y = x^4 - 8x^2 + 1$

6. $y = (x - 1)^{1/3}$

www.almanahj.com

7. $y = \sin x + \cos x$

8. $y = \sin^2 x$

9. $y = e^{x^2-1}$

www.almanahj.com

10. $y = \ln(x^2 - 1)$

في التمارين 11-20، أوجد (بدويًا) جميع الأعداد الحرجة وأستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف كل واحدة على أنها قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك.

11. $y = x^4 + 4x^3 - 2$

12. $y = x^5 - 5x^2 + 1$

13. $y = xe^{-2x}$

14. $y = x^2e^{-x}$

15. $y = \tan^{-1}(x^2)$

16. $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

17. $y = \frac{x}{1+x^3}$

18. $y = \frac{x}{1+x^4}$

19. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

20. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

www.almanahj.com

في التمارين 33-38، أوجد (يدويًا) كافة خطوط التقارب والقيم القصوى، وارسم تمثيلًا بيانيًا.

$$33. y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$34. y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$35. y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$36. y = \frac{x}{1 - x^4}$$

$$37. y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$38. y = \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^2}$$

www.almanahj.com

2017/2018

في التمارين 27-32، ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة بالخصائص التالية.

27. $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $x > 2$, $f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 2$

28. $f(-1) = 1$, $f(2) = 5$, $f'(x) < 0$ لكل $x < -1$ و $x > 2$, $f'(x) > 0$ لكل $-1 < x < 2$, $f'(-1) = 0$, $f'(2)$ غير موجودة.

29. $f(3) = 0$, $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $x > 3$, $f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 3$, $f'(3) = 0$, $f(0)$ و $f'(0)$ غير موجودة.

www.almanahj.com

45. اذكر مجال الدالة $\sin^{-1} x$ وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

46. اذكر مجال الدالة $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right)$ وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

47. إذا كانت f و g دالتين تزايديتين، فهل صحيح أن $f(g(x))$ تُعد كذلك متزايدة؟ إما أن تثبت صحة العبارة أو اعرض مثالاً يثبت خطأها.

www.almanahj.com

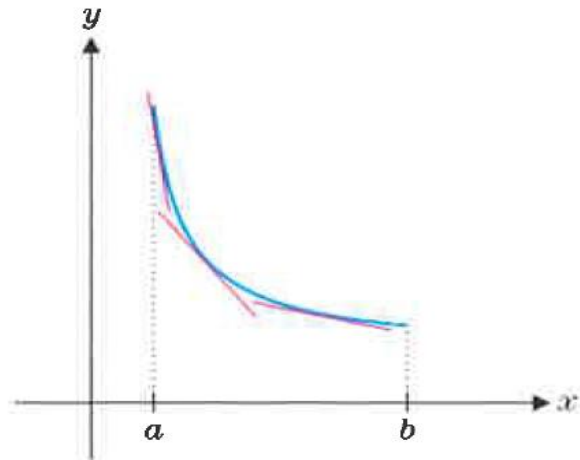
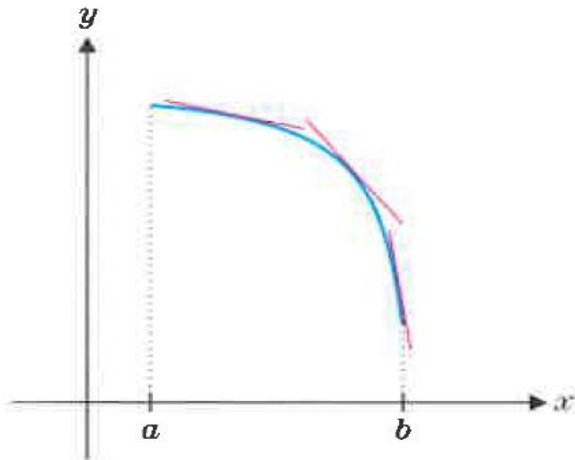
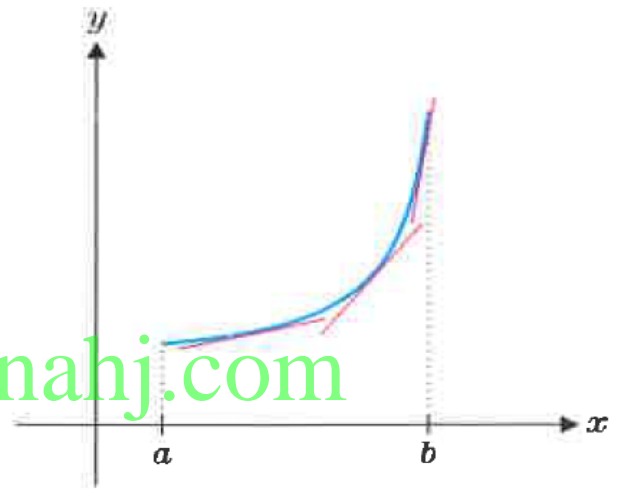
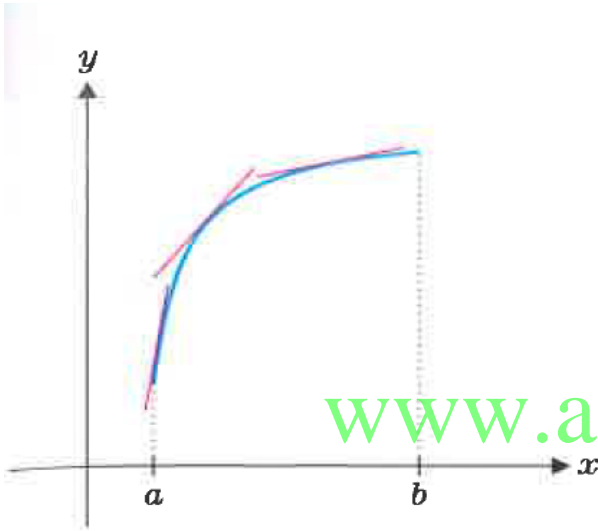
سؤال/ إذا كانت $f(x) = 3x^3 - 2ax^2 + 4x - 1$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = -2$ فما قيمة الثابت a ؟

سؤال/ إذا كانت $f(x) = ax^4 - bx^2 + 3x - 1$ لها قيمة قصوى محلية عند النقطة $(-1, 2)$ فما قيمة الثابتين a و b ؟

www.almanahj.com

التعريف 5.1

- لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f
- تقعرًا إلى الأعلى في I إذا كانت f' متزايدة في I أو
 - تقعرًا إلى الأسفل في I إذا كانت f' متناقصة في I .



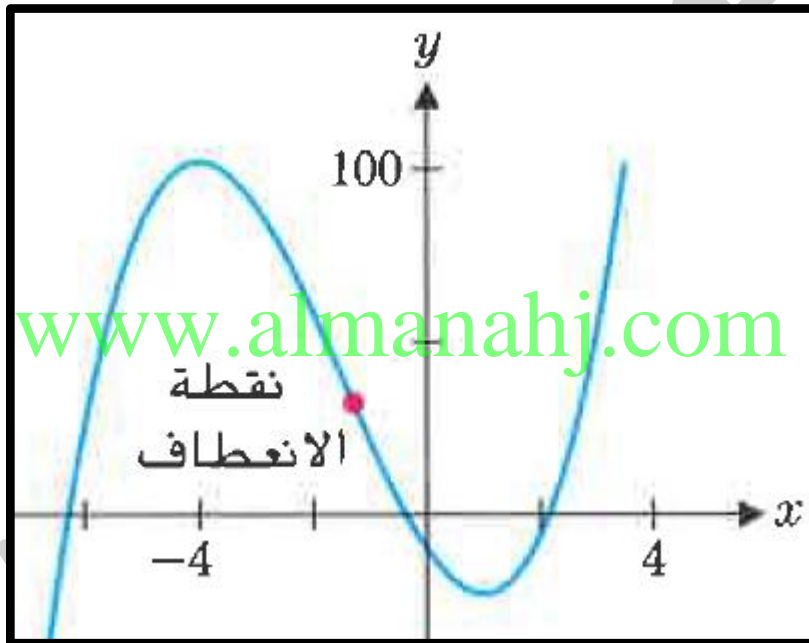
www.almanahj.com

النظرية 5.1

- على فرض أن f'' موجودة في الفترة I .
- (i) إذا كانت $f''(x) > 0$ في I . فإن التمثيل البياني للدالة f يمثل تقعرًا إلى الأعلى في I .
- (ii) إذا كانت $f''(x) < 0$ في I . فإن التمثيل البياني للدالة f يمثل تقعرًا إلى الأسفل في I .

التعريف 5.2

على فرض أن f متصلة في الفترة (a, b) وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $c \in (a, b)$ (أي، يتقعر التمثيل البياني إلى الأسفل على جانب واحد من c ، بينما يتقعر إلى الأعلى على الجانب الآخر). إذا، يُطلق على النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف** لـ f .



سؤال (1) إذا كانت $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ فأوجد مجالات التقعر لأعلى ولأسفل وحدد نقاط الانعطاف إن وجدت.

سؤال (2) إذا كانت $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ فأوجد مجالات التقعر لأعلى ولأسفل وحدد نقاط الانعطاف إن وجدت.

النظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية)

- على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a, b) و $f'(c) = 0$ لكل $c \in (a, b)$.
- (i) إذا كانت $f''(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.
- (ii) إذا كانت $f''(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

سؤال (3) إذا كانت $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ فأوجد القيم القصوى المحلية مستخدماً اختبار المشتقة الثانية؟

إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفتين، فإن اختبار المشتقة الثانية لا يعطي أي استنتاج. بمعنى أنه قد تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك. في هذه الحالة، يجب أن نعتد على طرائق أخرى (مثل اختبار المشتقة الأولى) في تحديد ما إذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية. نوضح هذا في المثال 5.5.

سؤال (4) إذا كانت $f(x) = (x + 1)^4$ فأوجد القيم القصوى المحلية مستخدماً اختبار المشتقة الثانية؟

www.almanahj.com

سؤال (5) أرسم تمثيل بياني للدالة $f(x) = 4 - \frac{16}{x}$ يوضح جميع مميزات الدالة؟

في التمارين 1-8، حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل
البياني لدالة معطاة متقعرًا إلى الأعلى والفترات التي
يكون فيها متقعرًا إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$
3. $f(x) = x + 1/x$
4. $f(x) = x + 3(1 - x)^{1/3}$
5. $f(x) = \sin x - \cos x$
6. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$
7. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
8. $f(x) = xe^{-4x}$

www.almanahj.com

في التمارين 9-14، أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية.

9. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

10. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$

11. $f(x) = xe^{-x}$

12. $f(x) = e^{-x^2}$

13. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$

14. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

www.almanahj.com

في التمارين 15–26، حدد جميع المميزات المهمة يدويًا وارسم تمثيلًا بيانيًا.

15. $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$

16. $f(x) = x \ln x$

17. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

18. $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

19. $f(x) = \sin x + \cos x$

20. $f(x) = e^{-x} \sin x$

21. $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

22. $f(x) = x^{2/3} - 4x^{1/3}$

23. $f(x) = x|x|$

24. $f(x) = x^2|x|$

25. $f(x) = x^{1/5}(x + 1)$

26. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

www.almanahj.com

في التمارين 37-40، ارسم تمثيلاً بيانياً بالخصائص التالية.

37. $f(0) = 0$. $f'(x) > 0$ لكل $x < -1$ و $-1 < x < 1$ ، $f'(x) < 0$ لكل $x > 1$ و $0 < x < 1$. $f''(x) > 0$ لكل $x > 1$ و $-1 < x < 0$. $f''(x) < 0$ لكل $x < -1$

38. $f(0) = 2$. $f'(x) > 0$ لكل x . $f'(0) = 1$. $f''(x) > 0$ لكل $x < 0$. $f''(x) < 0$ لكل $x > 0$

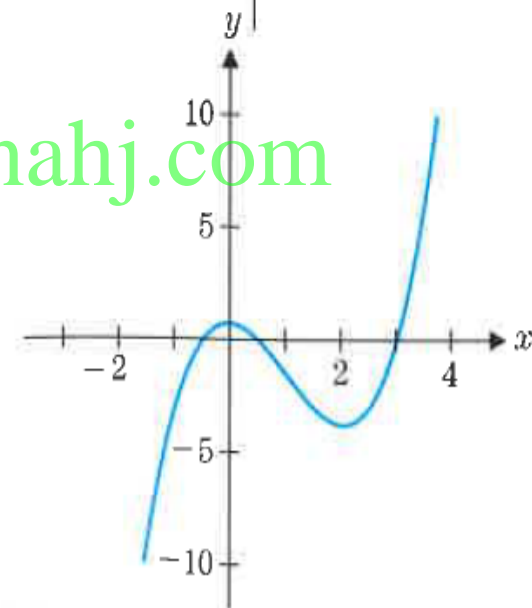
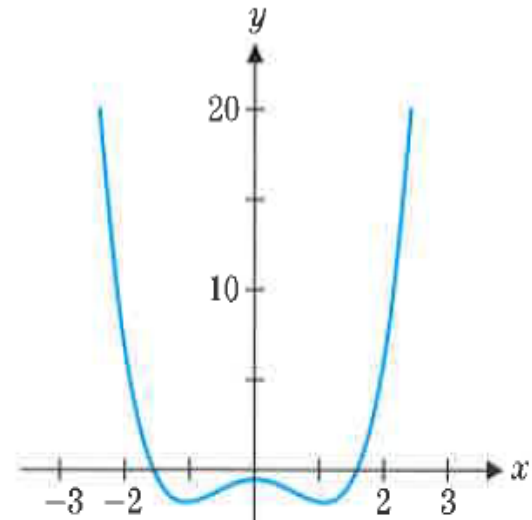
39. $f(0) = 0$. $f(-1) = -1$. $f(1) = 1$. $f'(x) > 0$ لكل $x < -1$ و $0 < x < 1$. $f'(x) < 0$ لكل $-1 < x < 0$ و $x > 1$. $f''(x) < 0$ لكل $x < 0$ و $x > 0$

40. $f(1) = 0$. $f'(x) < 0$ لكل $x < 1$. $f'(x) > 0$ لكل $x > 1$. $f''(x) < 0$ لكل $x < 1$ و $x > 1$

www.almanahj.com

2017/2018

في التمرينين 45 و 46، قدر الفترات المتزايدة والمتناقصة،
ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التفرع، ومواقع
نقاط الانعطاف.



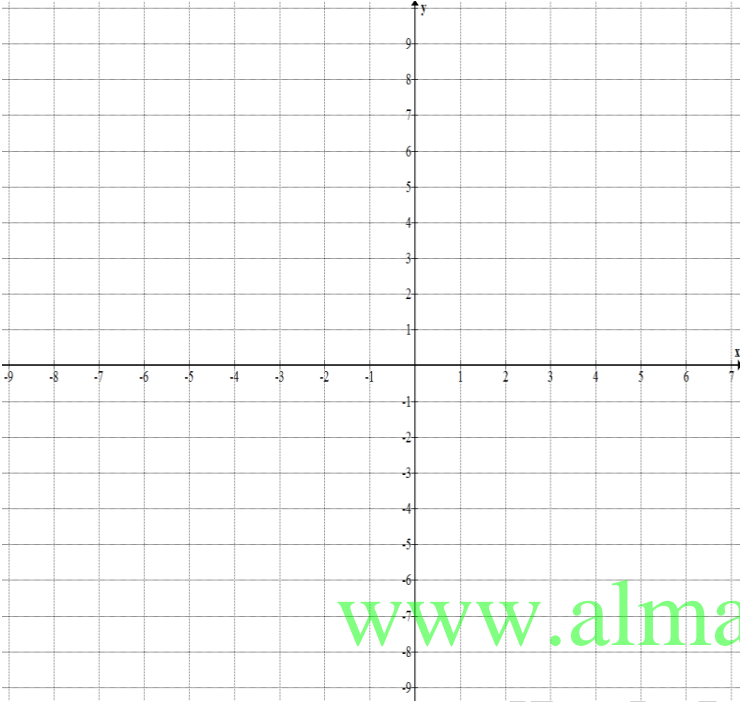
www.almanahj.com

2017

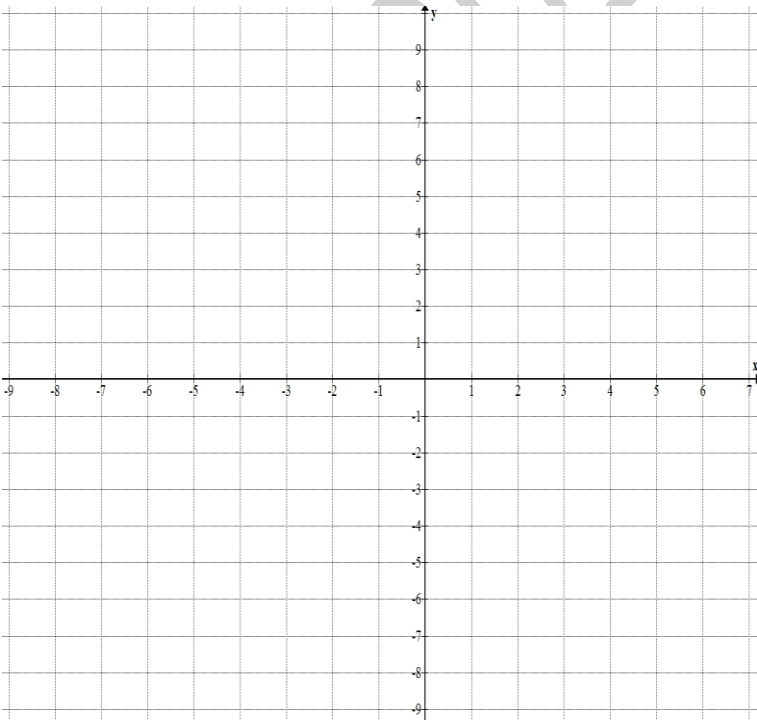
الدرس السادس: نظرة عامة على رسم المنحنيات

لرسم دالة بشكل معطاة يجب تحديد جميع المميزات المهمة لها (النقاط الحرجة – القيم القصوى – فترات التزايد والتناقص – مجالات التقعر – نقاط الانعطاف – خطوط التقارب إن وجدت)

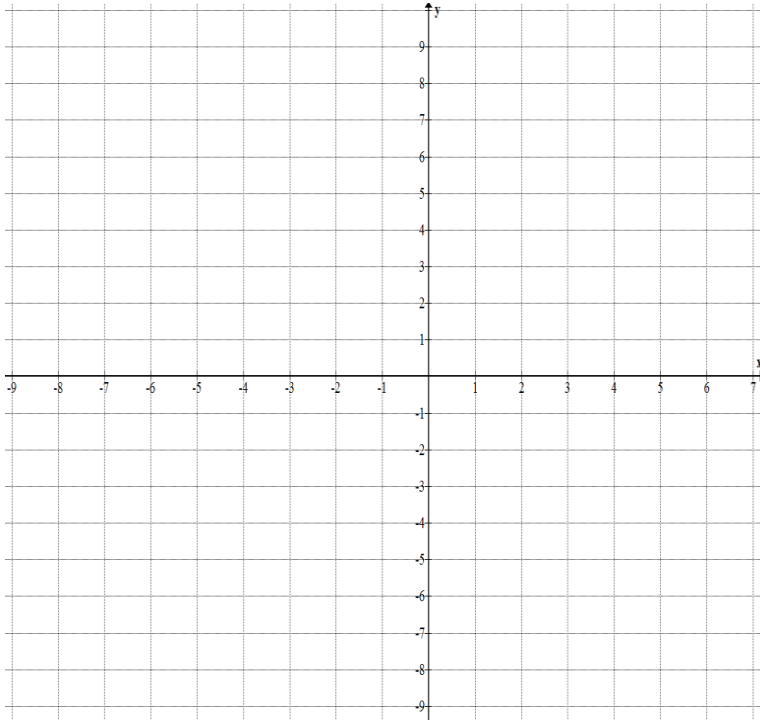
سؤال (1) أرسم منحنى الدالة $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ ؟



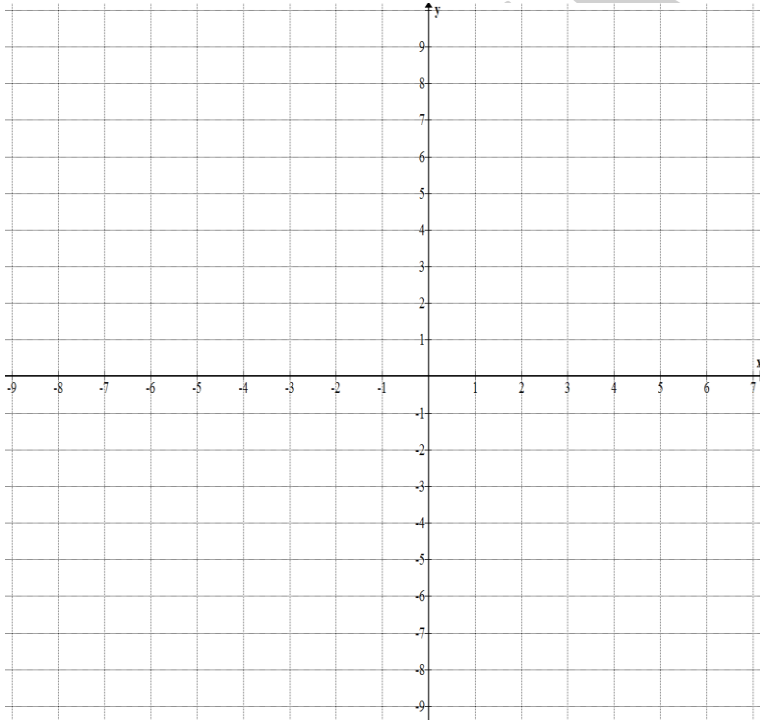
سؤال (2) أرسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$ ؟



سؤال (3) أرسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ ؟

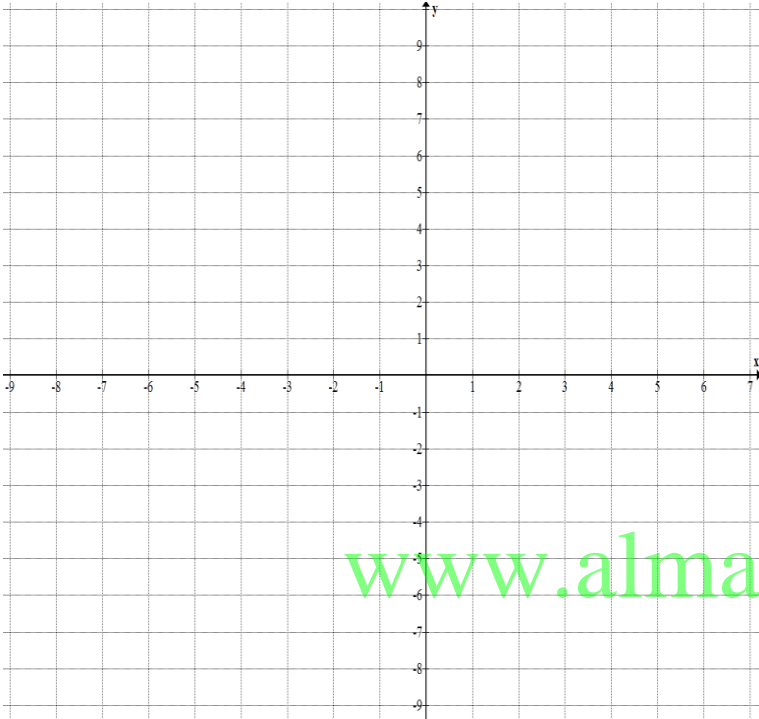


سؤال (4) أرسم منحنى الدالة $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ؟ www.almanahj.com



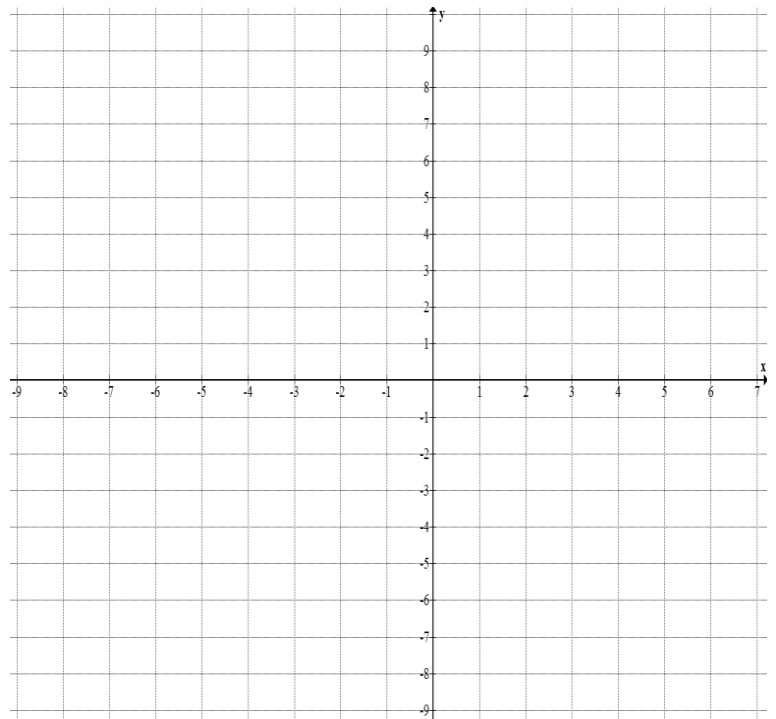
في تمارين 1-22، ارسم بيانياً الدالة التي تناقش بشكل تام التمثيل البياني كما في المثال 6.2.

4. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

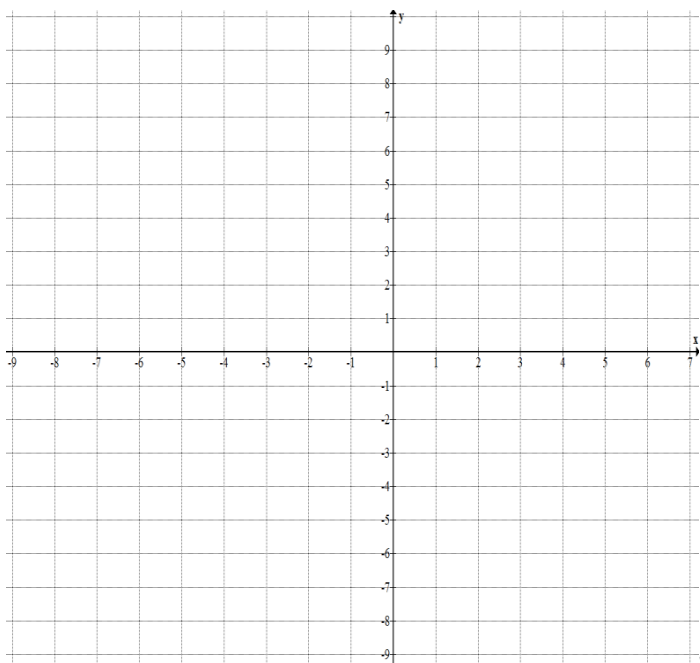


www.almanahj.com

9. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$



16. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$



21. $f(x) = e^{-2/x}$ www.almanahj.com

