

الاستاذ محمود مراد 0506565584

الوحدة السابعة
T3

الرياضيات

Math12

الفصل الدراسي الثالث
almanahj.com/ae/

2018-2019

الصف 12 متقدم

إعداد

محمود مراد

مراجعة صيغ التكامل

أولا : أوجد كل من التكاملات التالية

1) $\int \sin x \sin 2x dx$

2) $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} \right) dx$

almanahj.com/ae/

3) $\int (e^{3x+1} - 4) dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x} + \sin \pi x \right) dx$

$$5) \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - 4\sec^2 3x \right) dx$$

$$6) \int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$$

$$7) \int \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

almanahj.com/ae/

$$8) \int \frac{4}{1+x^2} dx$$

$$9) \int \frac{4}{25 + x^2} dx$$

$$13) \int \frac{4x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 12}} dx$$

$$10) \int \frac{4}{|x| \sqrt{9x^2 - 1}} dx$$

$$14) \int \frac{t + 1}{t^2 + 2t + 5} dx$$

almanahj.com/ae/

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$15) \int x(x^2 + 1)^2 dx$$

$$12) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

$$16) \int \sqrt{e^{3x}} dx$$

$$17) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$$

$$21) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$$18) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$22) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

almanahj.com/ae/

$$19) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$23) \int \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

$$20) \int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$24) \int \frac{1}{2+2x+x^2} dx$$

$$25) \int \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})} dx$$

$$29) \int \frac{4\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$26) \int \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}+x} dx$$

$$30) \int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} dx$$

almanahj.com/ae/

$$27) \int \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}+x} dx$$

$$31) \int x\sec(x^2+1)\tan(x^2+1)dx$$

$$28) \int \left(\frac{4}{x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$32) \int \frac{2x}{\sin^2(x^2+1)} dx$$

$$33) \int \frac{4x}{5 + 2x + x^2} dx$$

almanahj.com/ae/

$$34) \int e^{2\ln x} dx$$

$$35) \int \frac{\ln x^2}{x} dx$$

التكامل بالأجزاء

$$\int u dv = uv - \int v \cdot du$$

ثانيا : باستخدام التكامل بالأجزاء أوجد

1) $\int (\ln x)^2 dx$

2) $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$

almanahj.com/ae/

T:Mahmoud Murad

3) $\int x^{-2} \cdot \ln x dx$

T:Mahmoud Murad

$$4) \int (x^4 + x) \cdot e^{2x} dx$$

استخدم الطريقة الجدولية

$$7) \int x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$5) \int 3x \cdot \cos 2x \, dx$$

almanahj.com/ae/

$$8) \int \ln(2x) \, dx$$

$$6) \int (3x)^2 \cdot \sin \pi x \, dx$$

ثالثا : باستخدام الاجزاء و التعويض أوجد كل من التكاملات التالية

1) $\int \sin^{-1}x \, dx$

2) $\int \tan^{-1}x \, dx$

almanahj.com/ae/

3) $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$

$$4) \int e^{6x} \sin(e^{2x}) dx$$

$$5) \int x \ln(4 + x^2) dx$$

almanahj.com/ae/

$$6) \int \sin\sqrt{x} dx$$

طرق تكامل الدوال المثلثية

* قوانين التربيع (فيثاغورث):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad , \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad , \quad \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1 \quad , \quad \csc^2 x - \tan^2 x = 1$$

almanahj.com/ae/

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

رابعاً : أوجد كل من التكاملات التالية (استخدم صيغ الاختزال)

1) $\int \cos^5 x \, dx$

almanahj.com/ae/

1) $\int \sin^4 x \, dx$

T:Mahmoud Murad

خامسا : فكر و تأمل وقارن ذهنيًا ... ثم أوجد

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$$

almanahj.com/ae/

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx$$

طرق تكامل الدوال المثلثية

أولا : اوجد كل من التكاملات التالية

1) $\int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx$

almanahj.com/ae/

2) $\int \cos x \cdot \sin^5 x \, dx$

T:Mahmoud Murad

$$3) \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \, dx$$

almanahj.com/ae/

$$4) \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$5) \int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^5 x \, dx$$

$$6) \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

almanahj.com/ae/

$$7) \int \sin^3 x \, dx$$

$$8) \int \sin^2 x \, dx$$

almanahj.com/ae/

$$9) \int \cos^4 x \, dx$$

$$10) \int \cos^5 x \, dx$$

$$11) \int x \cdot \tan^3(x^2) \sec(x^2) dx$$

almanahj.com/ae/

$$12) \int \tan^4 x \sec^4 x dx$$

$$13) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \sec^4 x dx$$

$$11) \int \cot^2 x \csc^2 x dx$$

almanahj.com/ae/

$$12) \int \cot^2 x \csc^4 x dx$$

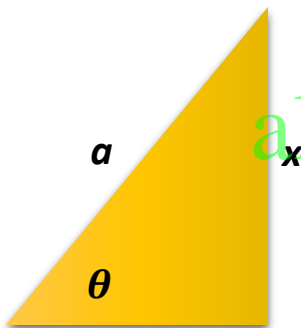
التعويض مع الدوال المثلثية

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x = a \sin \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

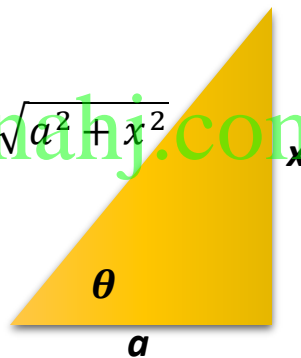
$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$x = a \tan \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$


 θ
 a

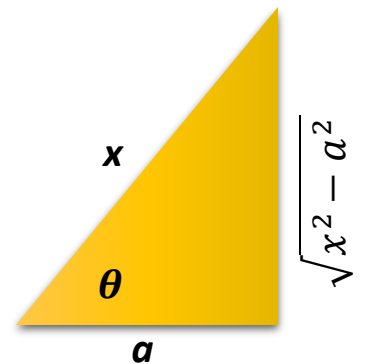
$$x = a \tan \theta$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$x = a \sec \theta$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$


 θ
 a

$$x = a \sec \theta$$

$$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

T:Mahmoud Murad

أوجد كلا من التكاملات التالية:

1) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}} dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$

almanahj.com/ae/

3) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

$$4) \int \frac{1+x}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$5) \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

almanahj.com/ae/

$$6) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}} dx$$

$$7) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$$

$$8) \int_0^2 x^2 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

almanahj.com/ae/

تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

في الدالة النسبية : اذا كانت درجة البسط (أصغر من) درجة المقام
يتم تحليل المقام الى n من العوامل الخطية المتمايزة يكون التفكيك كما يلي

$$\frac{p(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\dots(a_nx+b_n)} = \frac{A}{(a_1x+b_1)} + \frac{B}{(a_2x+b_2)} + \frac{C}{(a_3x+b_3)} \dots + \frac{D}{(a_nx+b_n)}$$

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx$$

في الدالة النسبية : اذا كانت درجة البسط (أصغر من) درجة المقام

إذا كان المقام الخاص بالتعبير النسبي يحتوي على عوامل خطية مكررة يكون التفكيك كما يلي :

$$\frac{p(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} \dots + \frac{D}{(ax+b)^n}$$

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

في الدالة النسبية : اذا كانت درجة البسط (أكبر من او يساوي) درجة المقام

يتم إجراء القسمة المطولة أولاً و يكون كما يلي

$$\frac{p(x)}{f(x)} = q(x) \text{ ناتج القسمة } + \frac{r(x) \text{ الباقي}}{f(x) \text{ المقسوم عليه}}$$

ثم استخدام الكسور الجزئية للكسر $\frac{r(x)}{f(x)}$ اذا لزم الامر

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx$$

إذا كان $f'(2) = 1, f'(0) = -2, f''(2) = 3, f''(0) = 2, f(0) = 3f(2) = 4$ فأوجد

$$\int_0^2 x^2 f'''(x) dx$$

almanahj.com/ae/

T:Mahmoud Murad

تكمال الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

السؤال الثاني

أولاً: أوجد قيمة التكاملات التالية (بتفكيك الكسور الجزئية)

$$1) \int \frac{4}{x^2 - 2x - 3} dx$$

almanahj.com/ae/

$$2) \int \frac{2x + 1}{x^3 - 4x} dx$$

$$3) \int \frac{x + 1}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$$

almanahj.com/ae/

$$4) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x} dx$$

$$1) \int \frac{6x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$$

أوجد كل من التكاملات التالية

almanahj.com/ae/

$$2) \int \frac{3x^2 + 9x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

$$3) \int \frac{x^3 + x^2 - 4x}{x^2 - 4} dx$$

almanahj.com/ae/

$$4) \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x} dx$$

إستخدام صيغ الإختزال في التكامل

$$\int \sin^n u \cdot du = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} u \cdot \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \cdot du$$

أوجد باستخدام صيغ الإختزال

$$\int \sin^6 x \cdot dx$$

almanahj.com/ae/

$$\int u^n \cdot \sin u \cdot du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \cdot du$$

$$\int u^n \cdot \cos u \cdot du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \cdot du$$

أوجد كل من التكاملات التالية

1) $\int x^3 \sin x \cdot dx$

almanahj.com/ae/

2) $\int x^3 \sin 2x \cdot dx$

$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \cdot \sqrt{a+bu} + c$$

أوجد

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}} dx$$

almanahj.com/ae/

almanahj.com/ae/