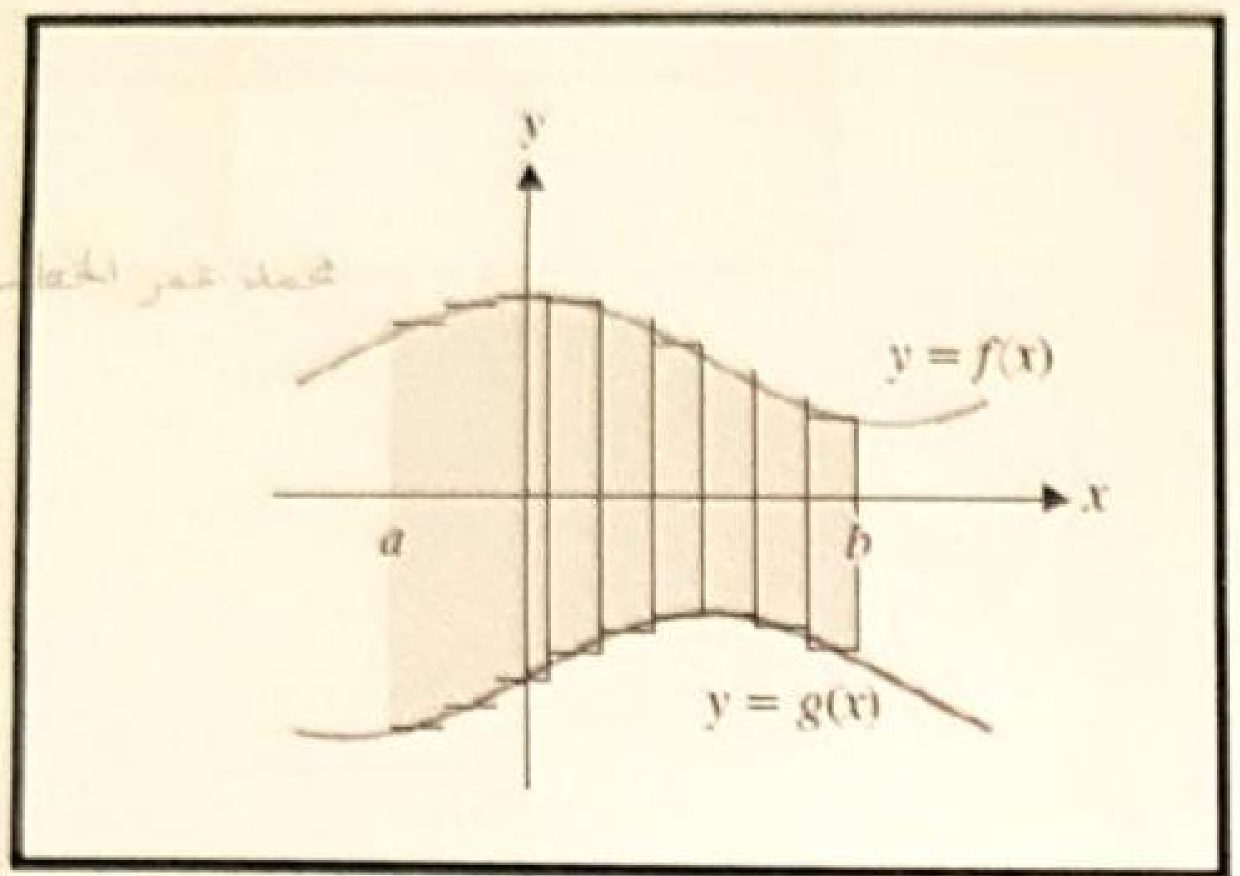
الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الأول : المساحة بين منحنيين

المساحة بين منحنيين



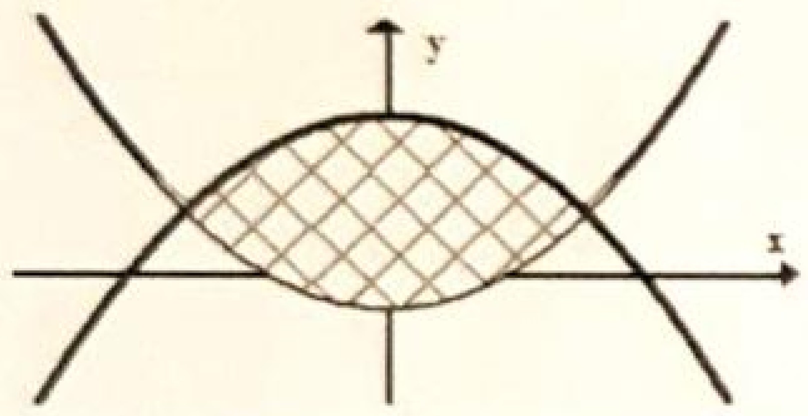
الحالة الأولى : المكامل (dx)

عرض المستطيل (السماكة) (dx) موازي لمحور السينات

وطول (ارتفاع) المستطيل ($(f(x)$) موازي لمحور الصادات

إذا كانت كل من f و g متصلتين حيث $f(x) \geq g(x)$ على الفترة $[\ a\ ,\ b\ ]$ فإن :

المساحة بين المنحنين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ من a إلى b هي تكامل لـ $[\ f - g\ ]$ من a إلى b



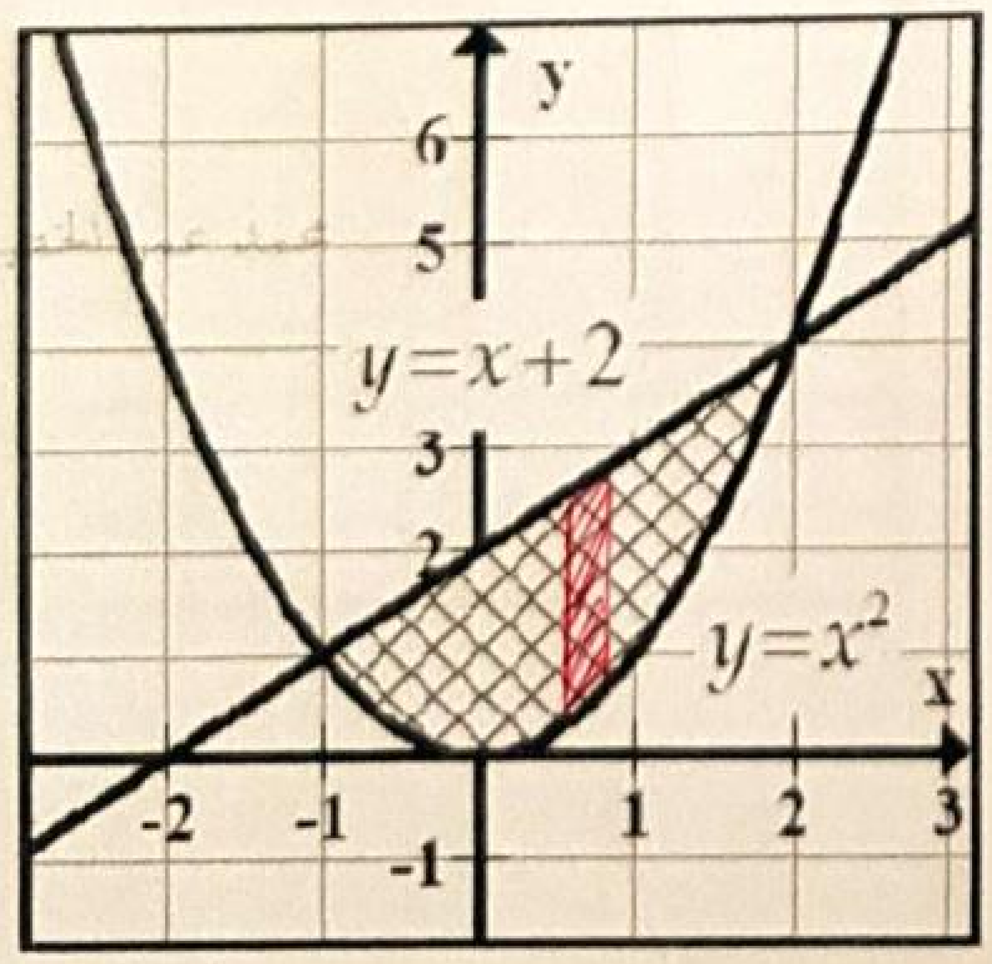
$$A = \int_a^b [\ f(x) - g(x)\ ]\, dx$$

خطوات ايجاد المساحة

ارسم الشكل ← ظلل المنطقة ← حدد التكامل (dx ام dy) ←

اوجد حدود التكامل (نقاط التقاطع) ← كامل ← عوض الحدود

اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x + 2$ و $y = x^2$



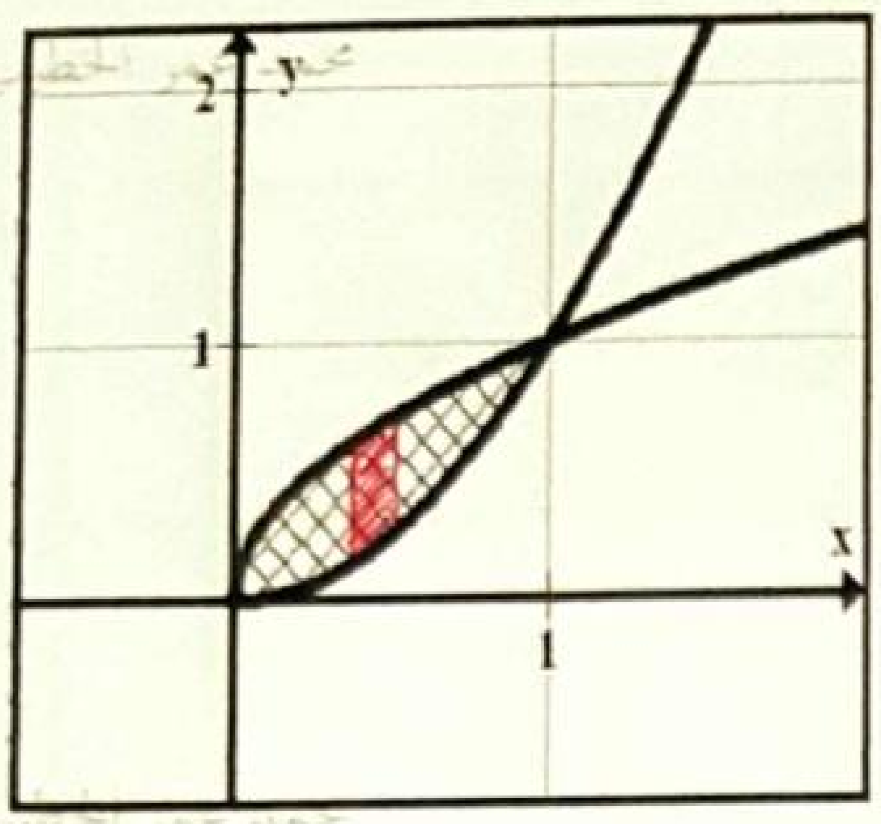
$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right]$$

$$= \frac{9}{2}$$

(1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$



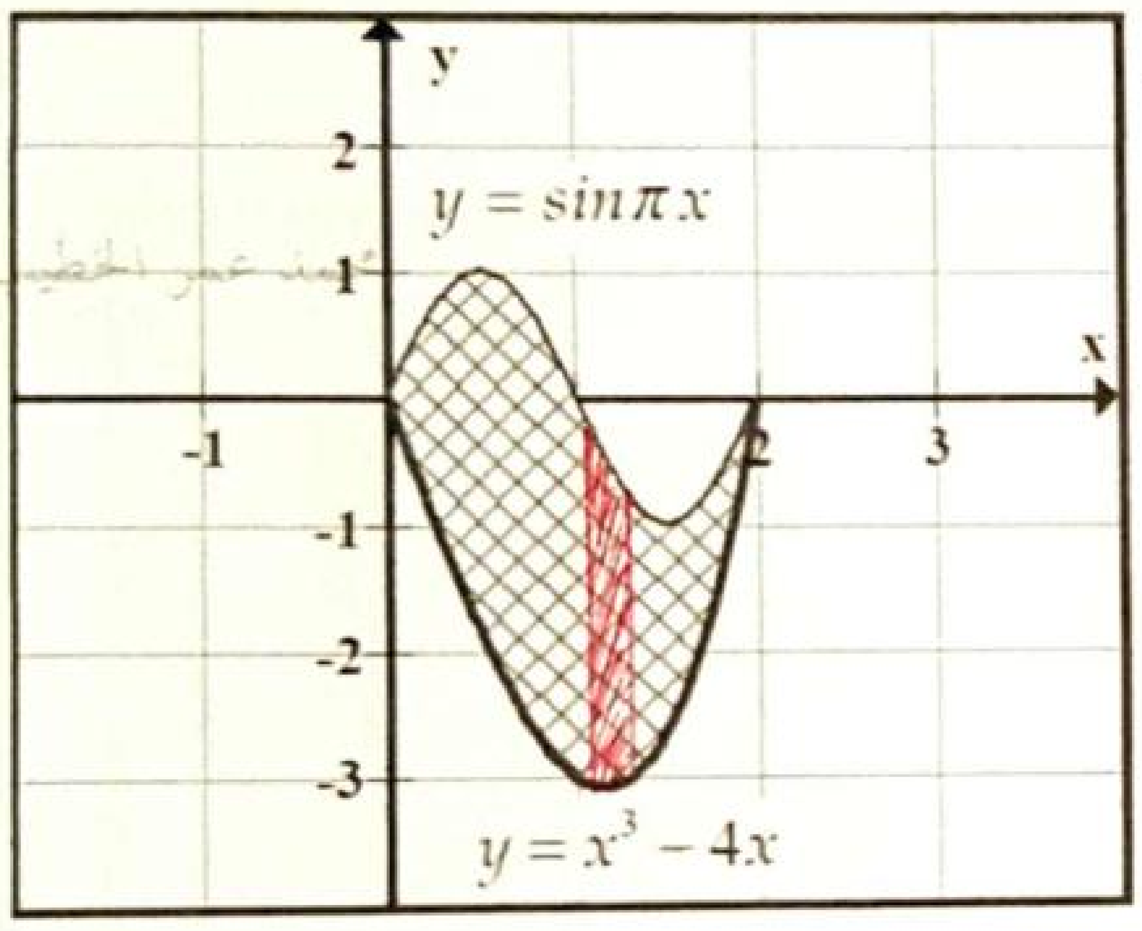
$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(1)^3\right]-\left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(0)^3\right]$$

$$=\frac{1}{3}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y=\sin\pi x$ و $y=x^3-4x$



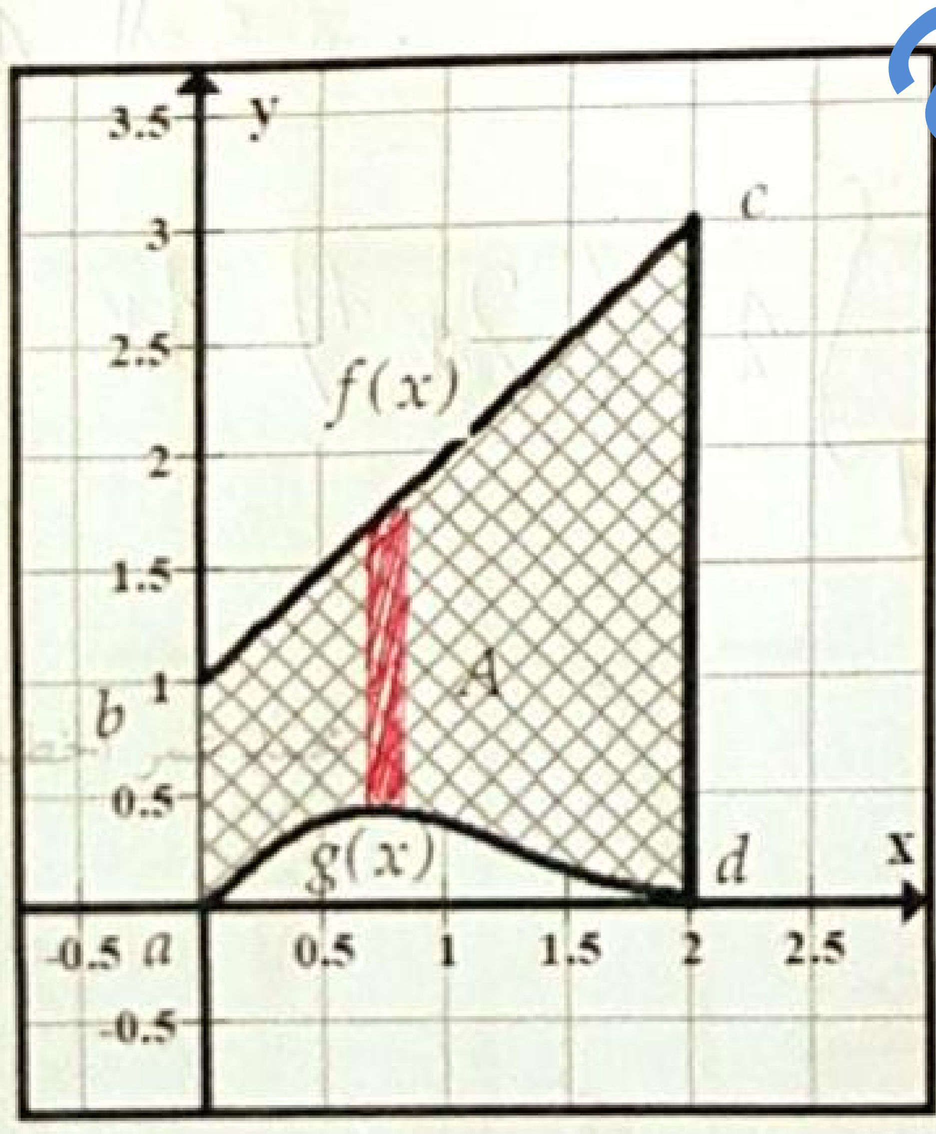
$$A=\int_0^2 (\sin\pi x-(x^3-4x))\,dx$$

$$A=\int_0^2 (\sin\pi x-x^3+4x)\,dx$$

$$=\frac{-\cos\pi x}{\pi}-\frac{1}{4}x^4+2x^2\Big]_0^2$$

$$=\left[\frac{-\cos(\pi\times 2)}{\pi}-\frac{1}{4}(2)^4+2(2)^2\right]-\left[\frac{-\cos(\pi\times 0)}{\pi}-\frac{1}{4}(0)^4+2(0)^2\right]=4$$

(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x)=x+1$ و $g(x)=xe^{-x^2}$



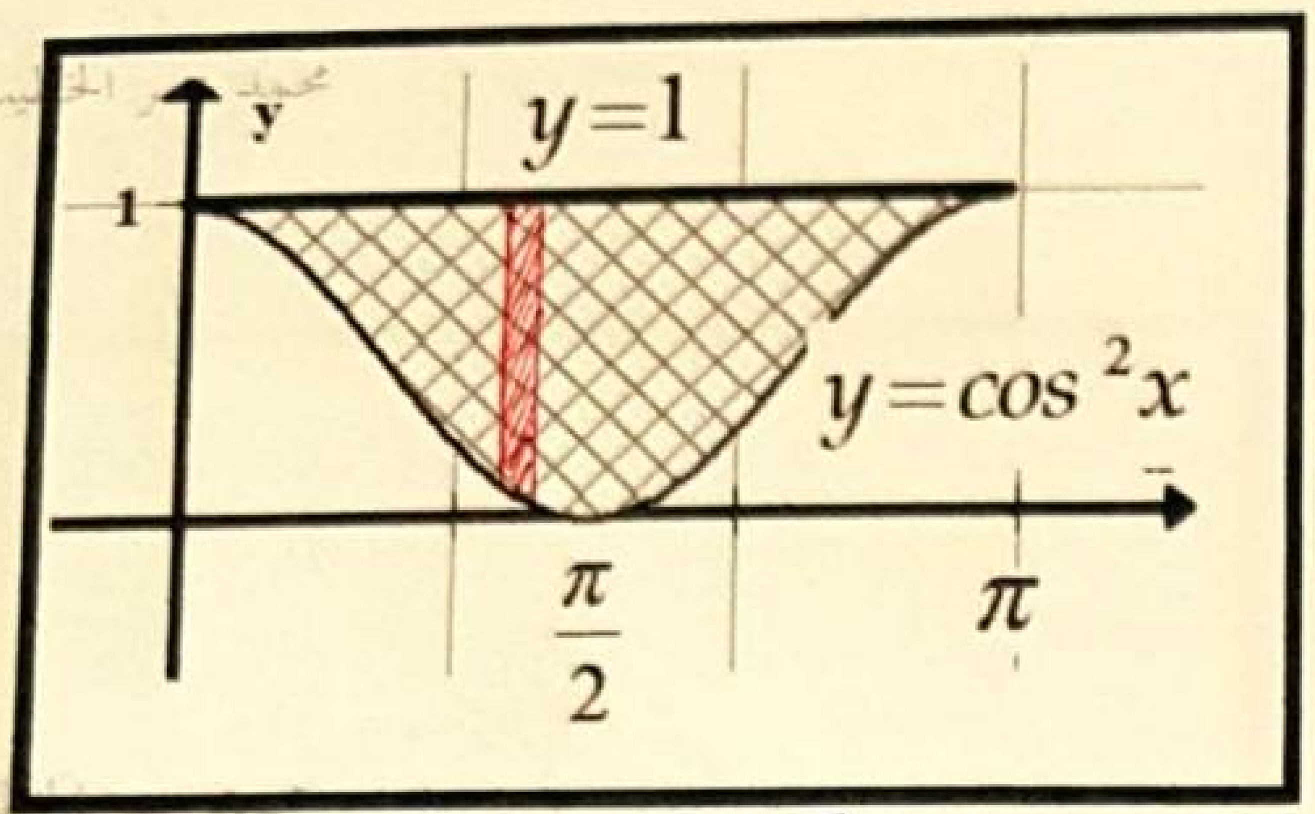
$$A=\int_0^2 (x+1-xe^{-x^2})\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(2)^2+2+\frac{1}{2}e^{-(2)^2}\right]-\left[\frac{1}{2}(0)^2+0+\frac{1}{2}e^{-(0)^2}\right]$$

$$=3.5$$

(1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين



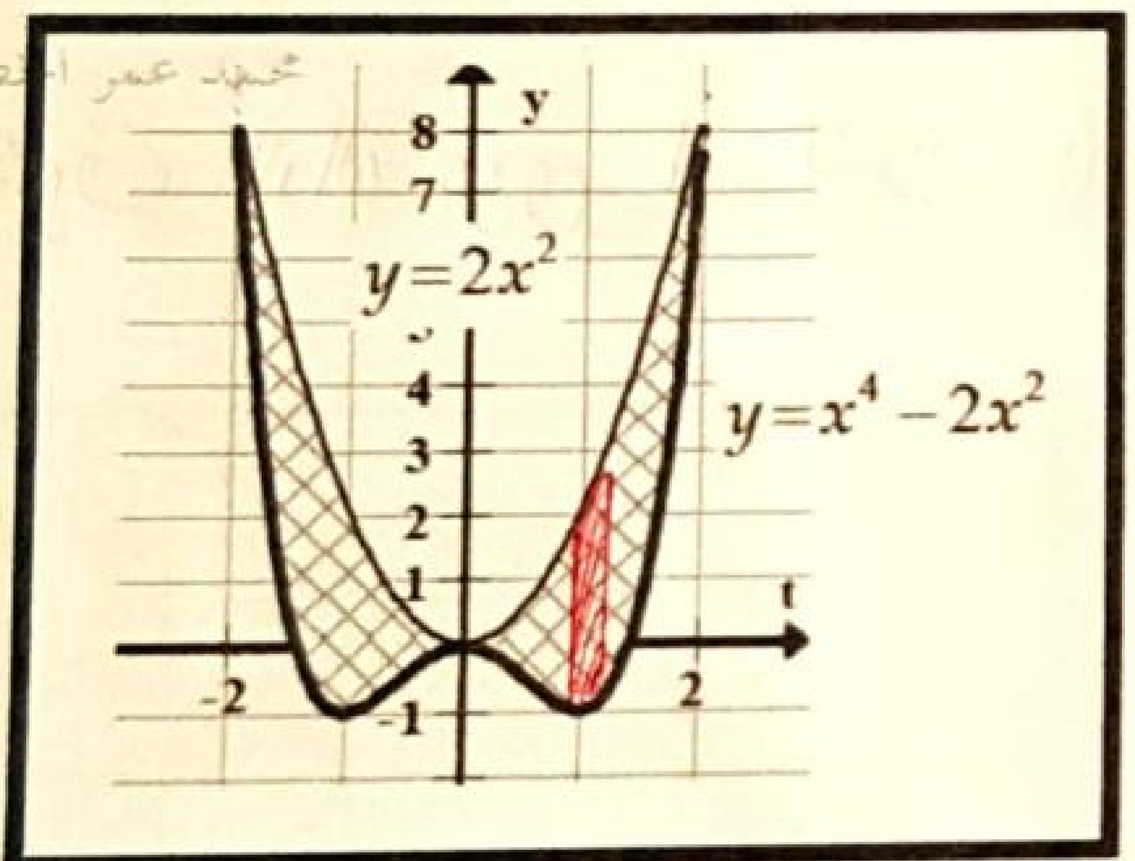
$$A=\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$A=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx \qquad A=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\left[\frac{1}{2}(\pi)-\frac{\sin(2\times\pi)}{4}\right]-\left[\frac{1}{2}(0)-\frac{\sin(2\times 0)}{4}\right]=\frac{\pi}{2}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين

ملاحظة (استفد من التماثل)



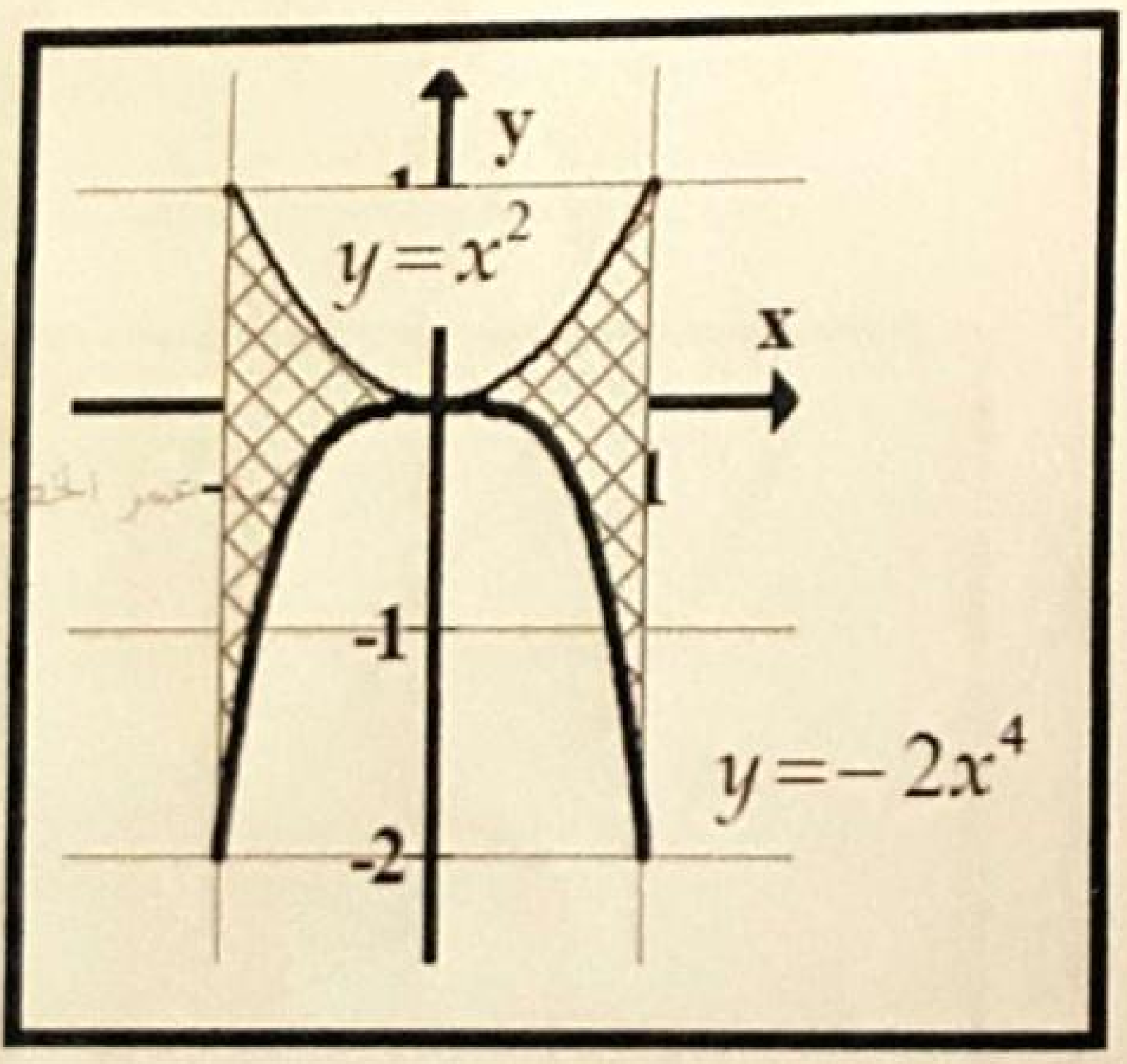
$$A=\int_0^{2}2x^2-(x^4-2x^2)\,dx$$

$$A=\int_0^{2}(2x^2-x^4+2x^2)\,dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^{2}$$

$$=\left[\frac{4}{3}(2)^3-\frac{1}{5}(2)^5\right]-\left[\frac{4}{3}(0)^3-\frac{1}{5}(0)^5\right]=4.26 \qquad A_{TOT}=4.26\times 2=8.52$$

(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين



$$A=\int_0^{1}x^2-(-2x^4)\,dx$$

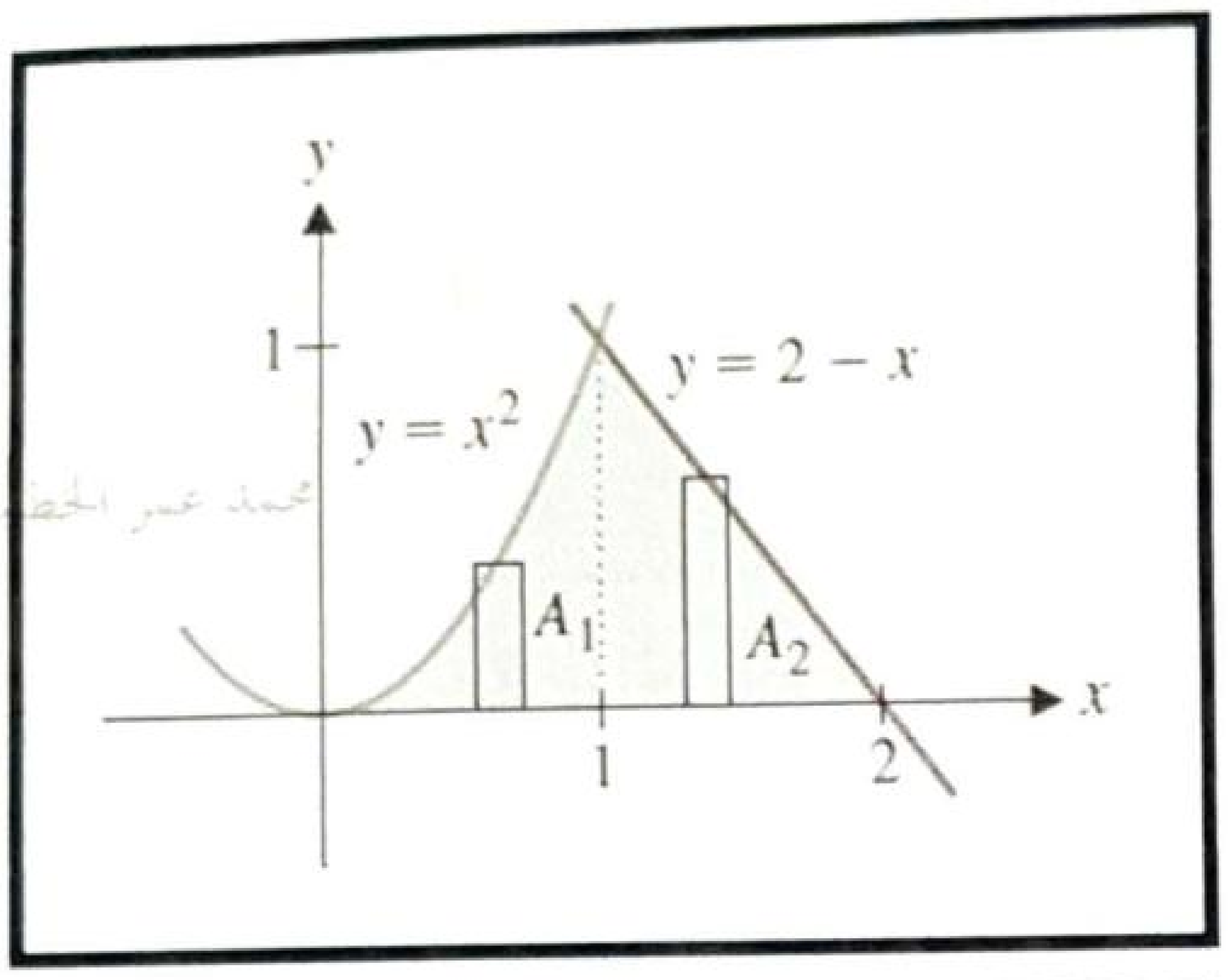
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\Big]_0^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(1)^3+\frac{2}{5}(1)^5\right]-\left[\frac{1}{3}(0)^3+\frac{2}{5}(0)^5\right]=\frac{11}{15}$$

$$A_{TOT}=2\times\frac{11}{15}=\frac{22}{15}$$

تجزئية المساحة

(1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور السينات



جزء المساحة عندما يتغير ارتفاع الشريحة

$$A_1 = \int_0^1 x^2 \, dx$$

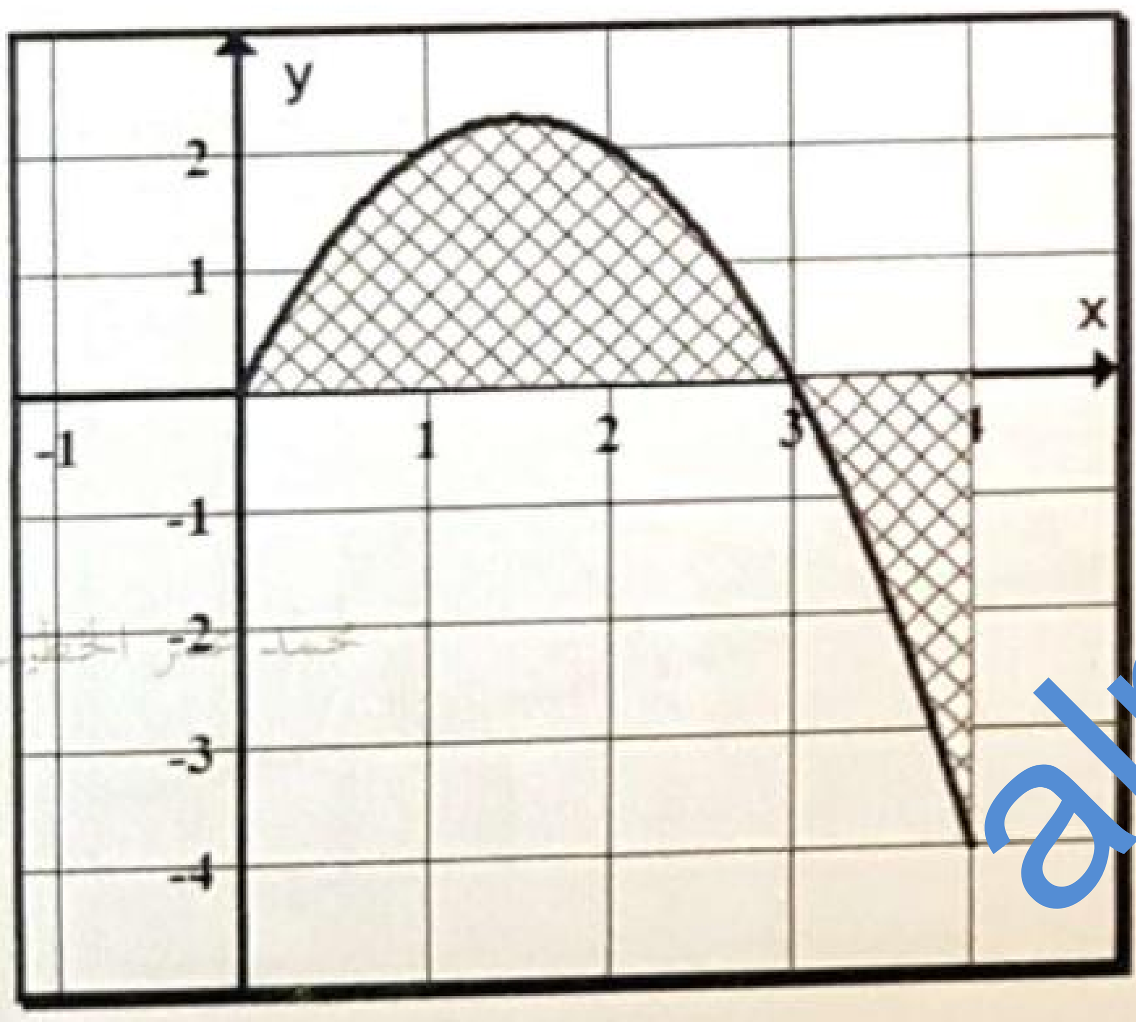
$$= \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^1 = \left[\frac{1}{3}(1)^3\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3\right] = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 2 - x \, dx$$

$$= 2x - \frac{1}{2}x^2 \Big]_1^2 = \left[2(2) - \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[2(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right] = \frac{1}{2}$$

$$A_{TOT} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = 3x - x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 0, x = 4$



$$A_1 = \int_0^3 (3x - x^2 - 0) \, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^3$$

$$= \left[\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[\frac{3}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(0)^3\right] = \frac{9}{2}$$

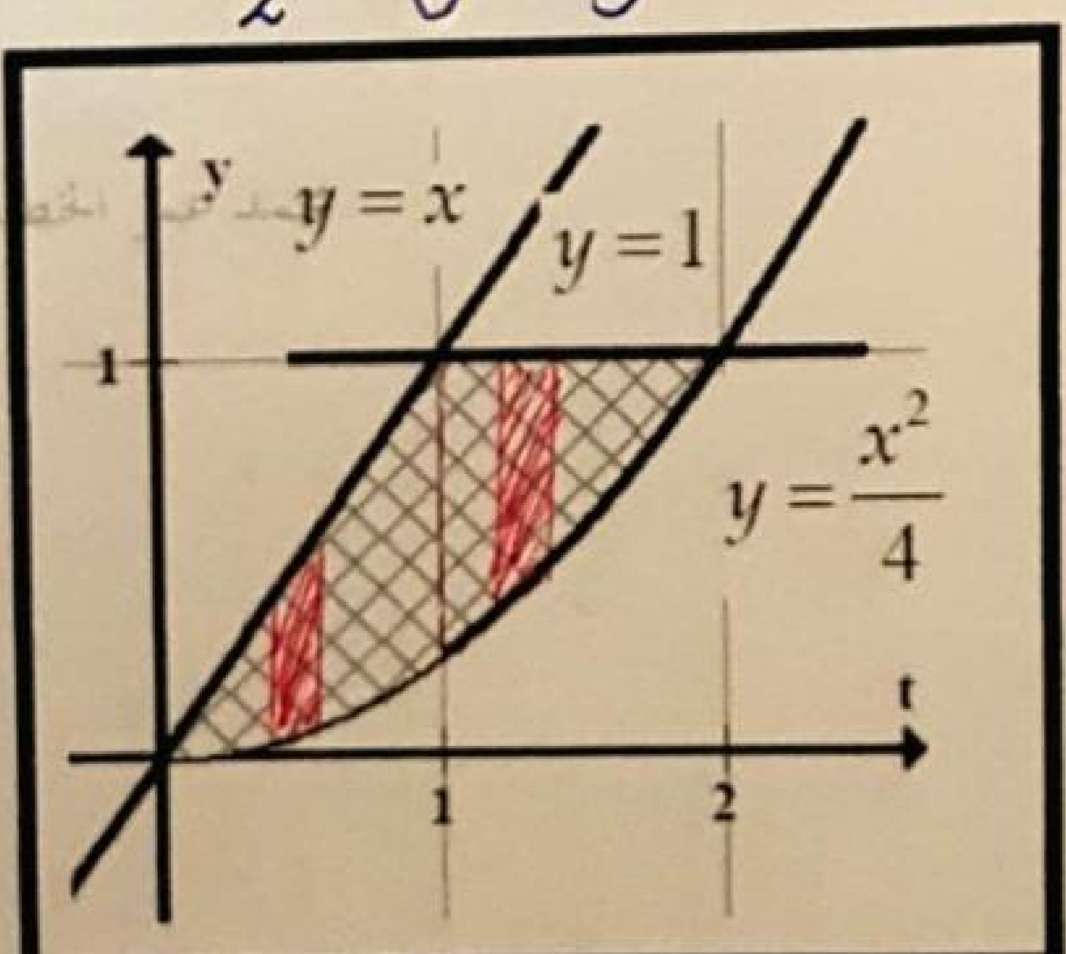
$$A_2 = \int_3^4 (0 - (3x - x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big]_3^4$$

$$= \left[-\frac{3}{2}(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[-\frac{3}{2}(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3\right] = \frac{11}{6}$$

$$A_{TOT} = A_1 + A_2$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$$

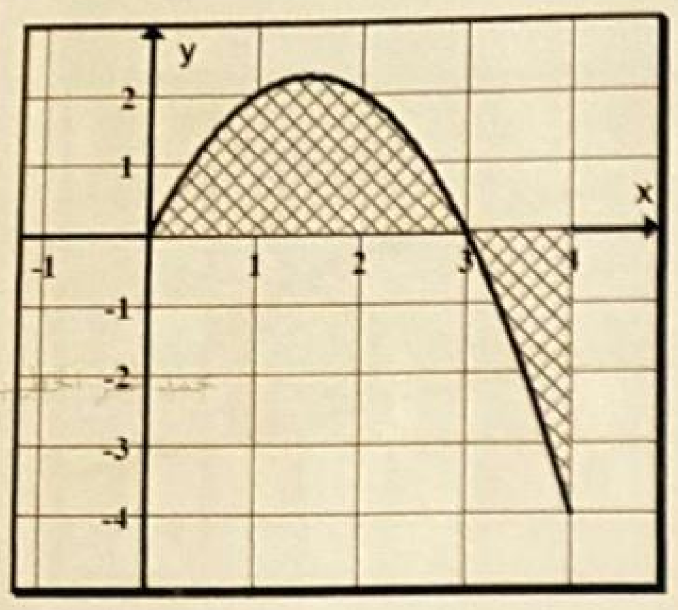
(3) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1 = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \Big]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{12}(1)^3\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{12}(0)^3\right] = \frac{15}{12}$$



$$A_1 = \int_0^3 (3x - x^2 - 0)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^3$$

$$= \left[\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[\frac{3}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(0)^3\right] = \frac{9}{2}$$

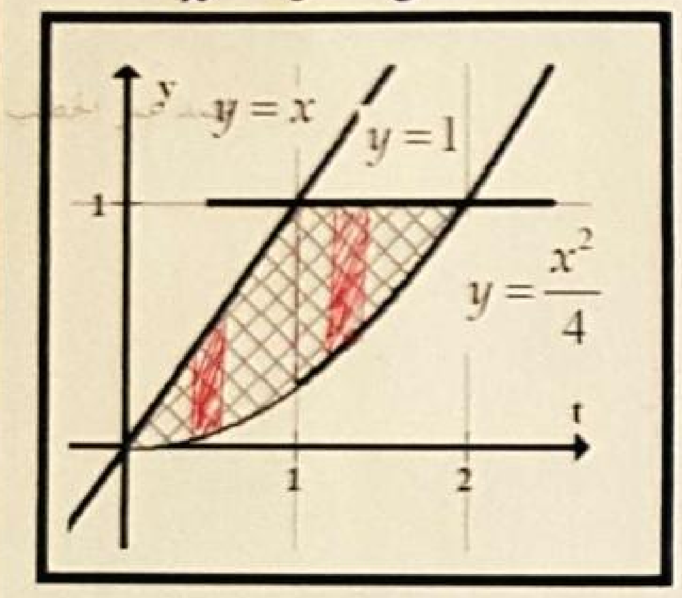
$$A_2 = \int_3^4 (0 - (3x - x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big]_3^4$$

$$= \left[-\frac{3}{2}(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[-\frac{3}{2}(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3\right] = \frac{11}{6}$$

$$A_{TOT} = A_1 + A_2$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$$

(3) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1 = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \Big]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{12}(1)^3\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0)^3\right] = \frac{5}{12}$$

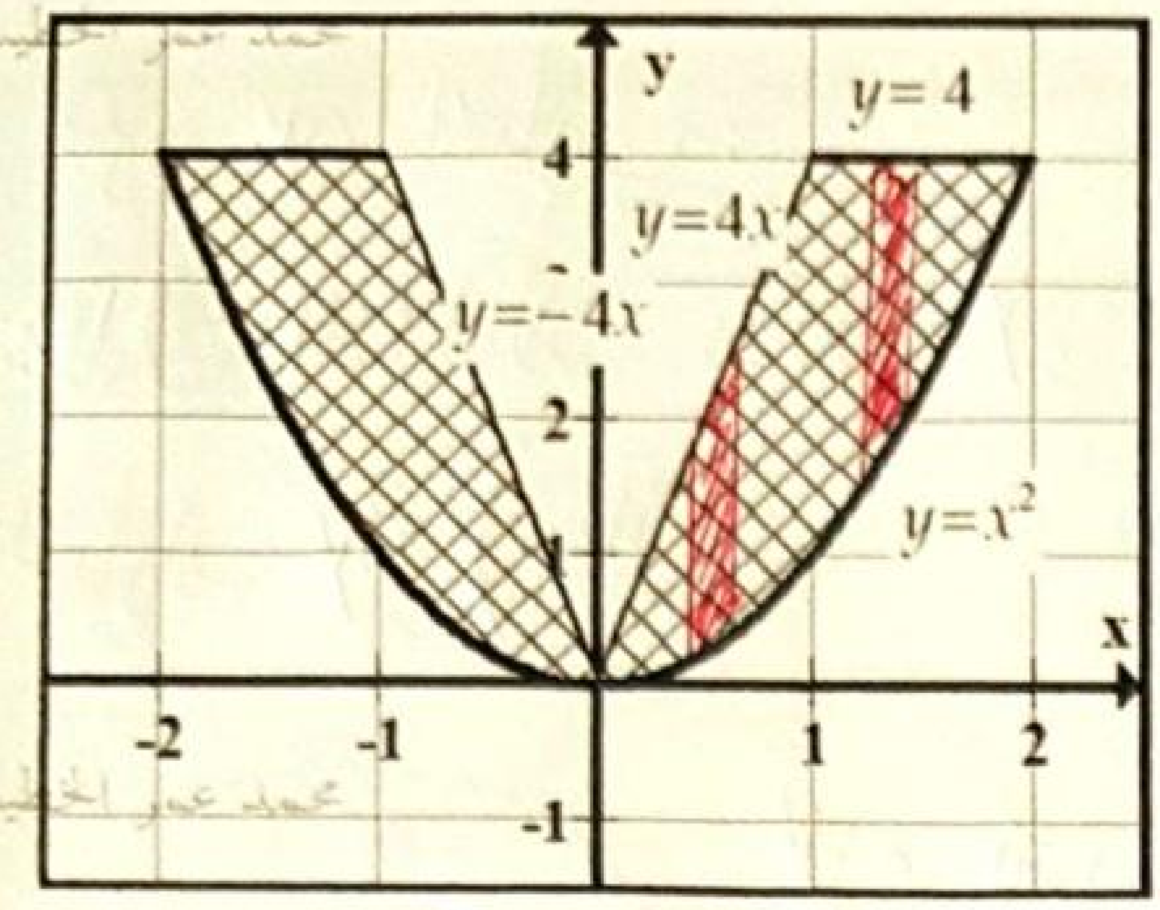
$$A_2 = \int_1^2 1 - \frac{x^2}{4}\,dx$$

$$= x - \frac{1}{12}x^3 \Big]_1^2$$

$$= \left[2 - \frac{1}{12}(2)^3\right] - \left[1 - \frac{1}{12}(1)^3\right] = \frac{5}{12}$$

$$A_{TOT} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

(1) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1 = \int_0^1 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^1$$

$$= \left[2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right] - \left[2(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right] = \frac{5}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 (4 - x^2)\,dx$$

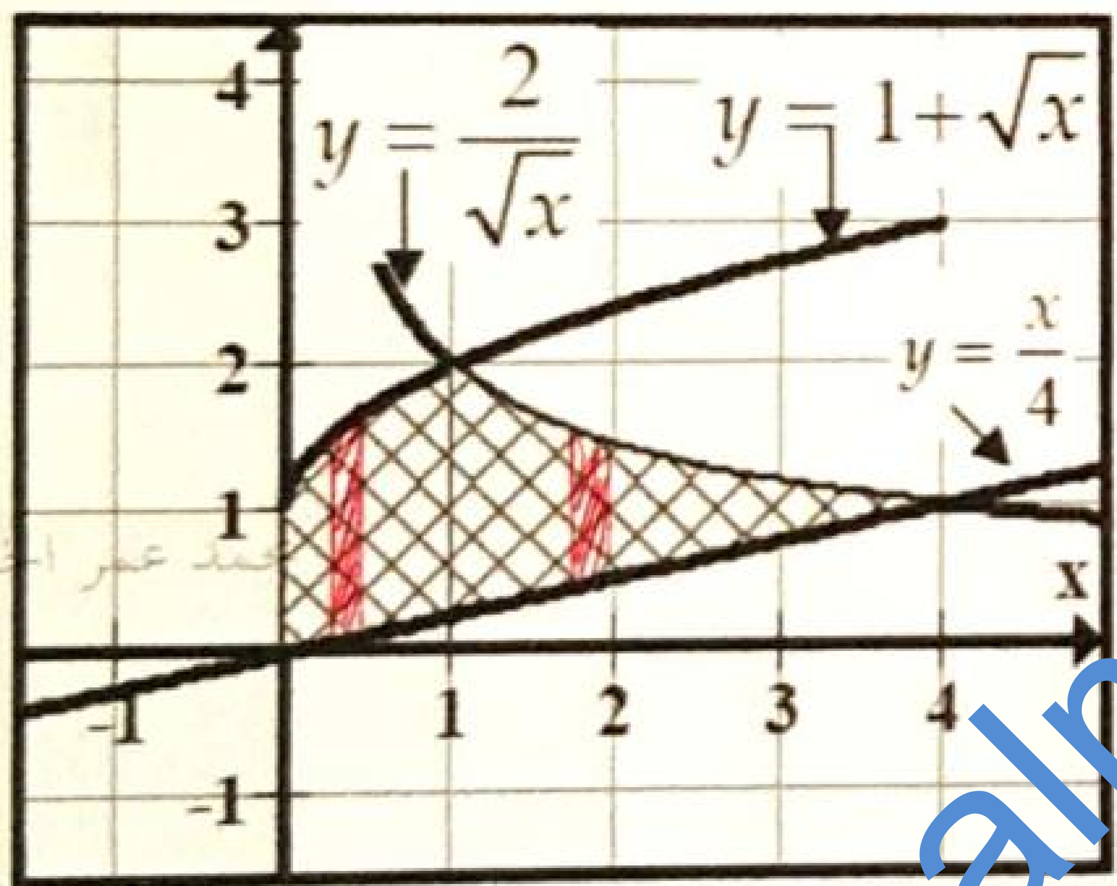
$$= 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_1^2$$

$$= \left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right] - \left[4(1) - \frac{1}{3}(1)^3\right] = \frac{5}{3}$$

$$A_{TOT} = 2(A_1 + A_2)$$

$$A_{TOT} = 2\left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1 = \int_0^1 \left(1 + \sqrt{x} - \frac{x}{4}\right) dx$$

$$= x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^2 \Big]_0^1$$

$$= \left[1 + \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(1)^2\right] - \left[0 + \frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(0)^2\right] = \frac{37}{24}$$

$$A_2 = \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{4}\right) dx$$

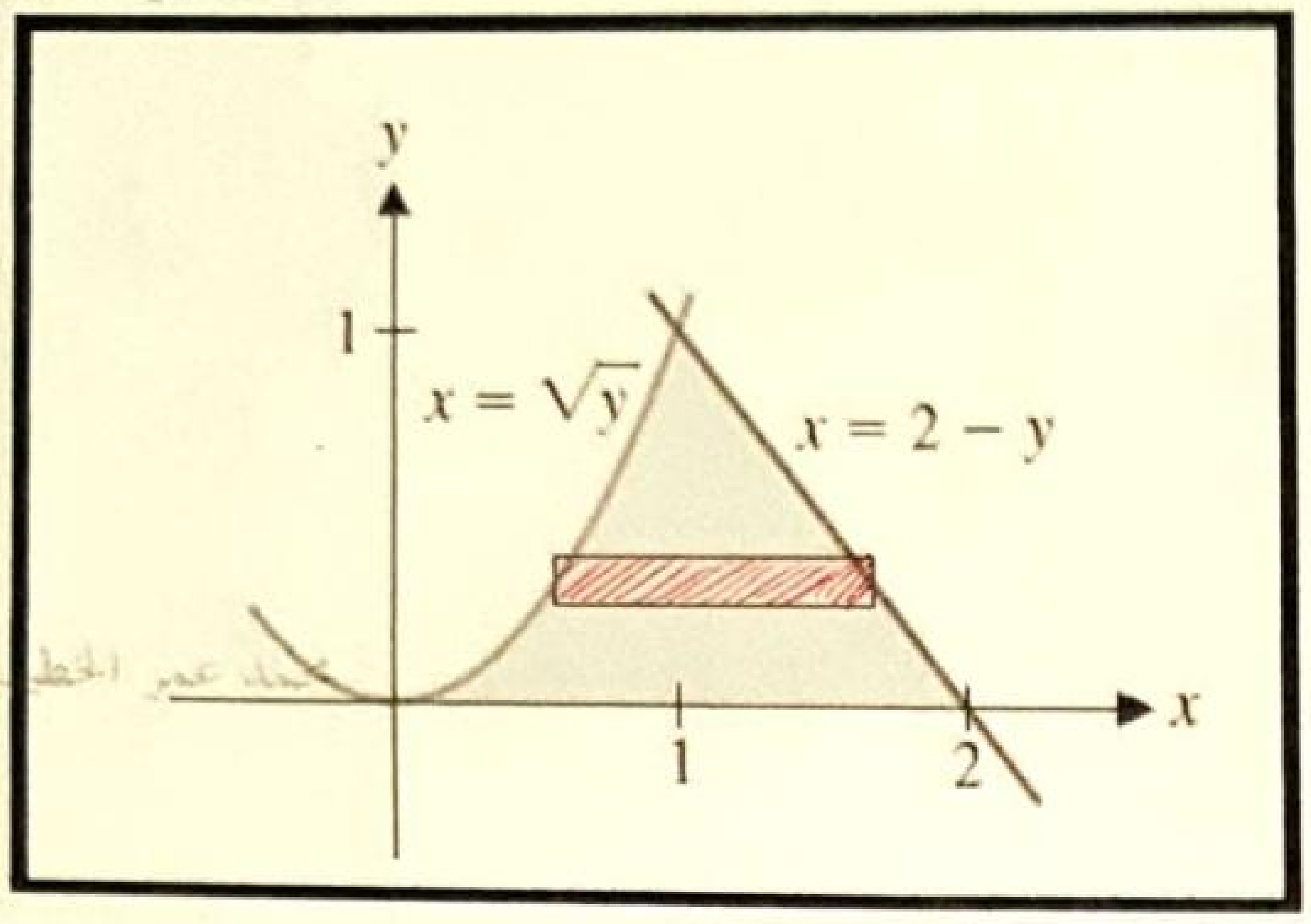
$$= 4x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^2 \Big]_1^4$$

$$= \left[4(1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}(4)^2\right] - \left[4(1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}(1)^2\right] = \frac{17}{8}$$

$$A_{TOT} = A_1 + A_2$$

$$= \frac{37}{24} + \frac{17}{8} = \frac{11}{3}$$

الحالة الثانية : المكامل (dy)



عرض المستطيل (السماكة) (dy) موازي لمحور الصادات

وطول (ارتفاع) المستطيل$(g(y))$ موازي لمحور السينات

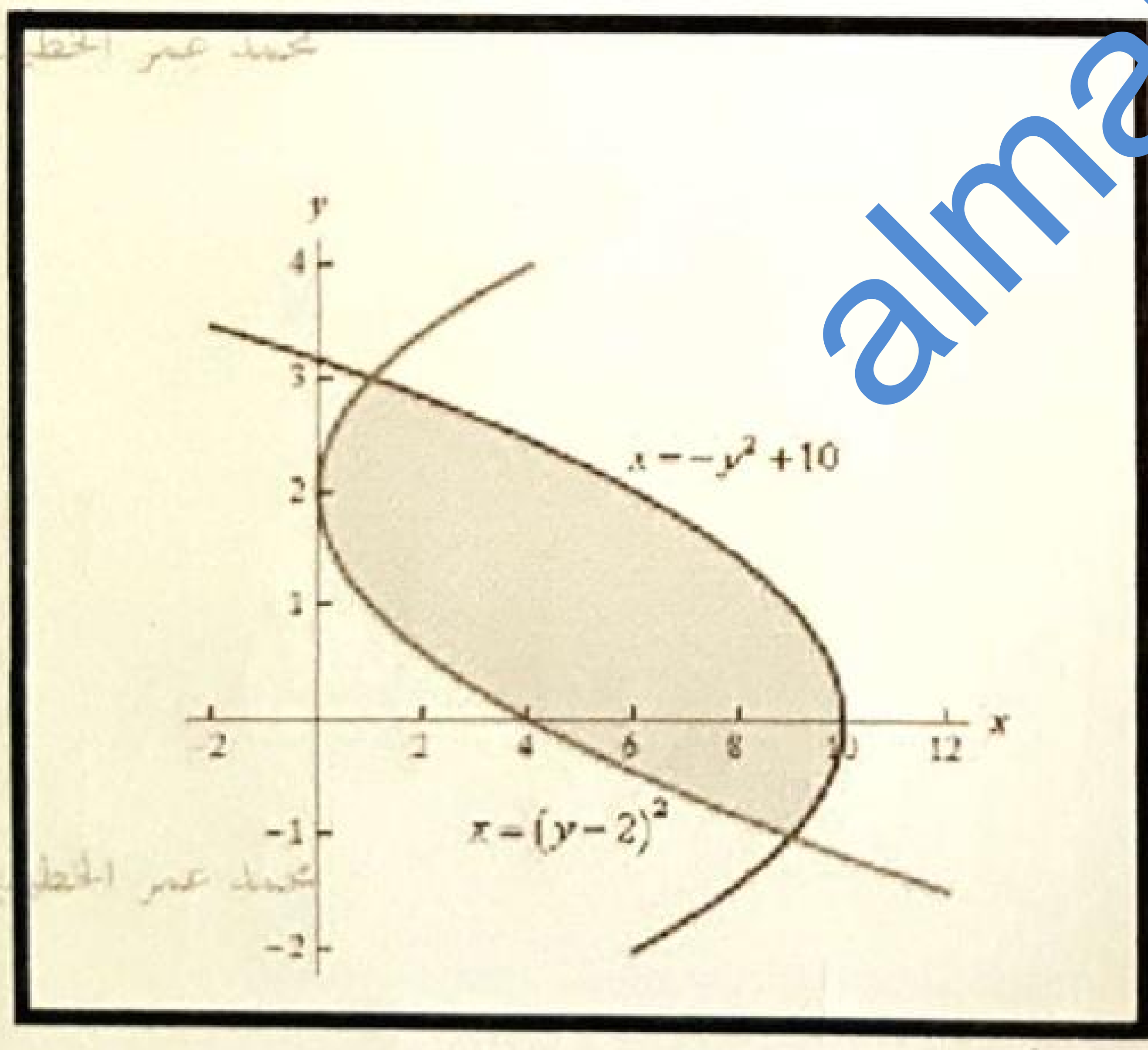
(1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور السينات

$$A=\int_0^1 2-y-\sqrt{y}\ dy$$

$$=2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$$

$$=\left[2(1)-\frac{1}{2}(1)^2-\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[2(0)-\frac{1}{2}(0)^2-\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{5}{6}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



$$A=\int_{-1}^{3}-y^2+10-(y-2)^2\ dy$$

$$A=\int_{-1}^{3}-y^2+10-(y^2-4y+4)\ dy$$

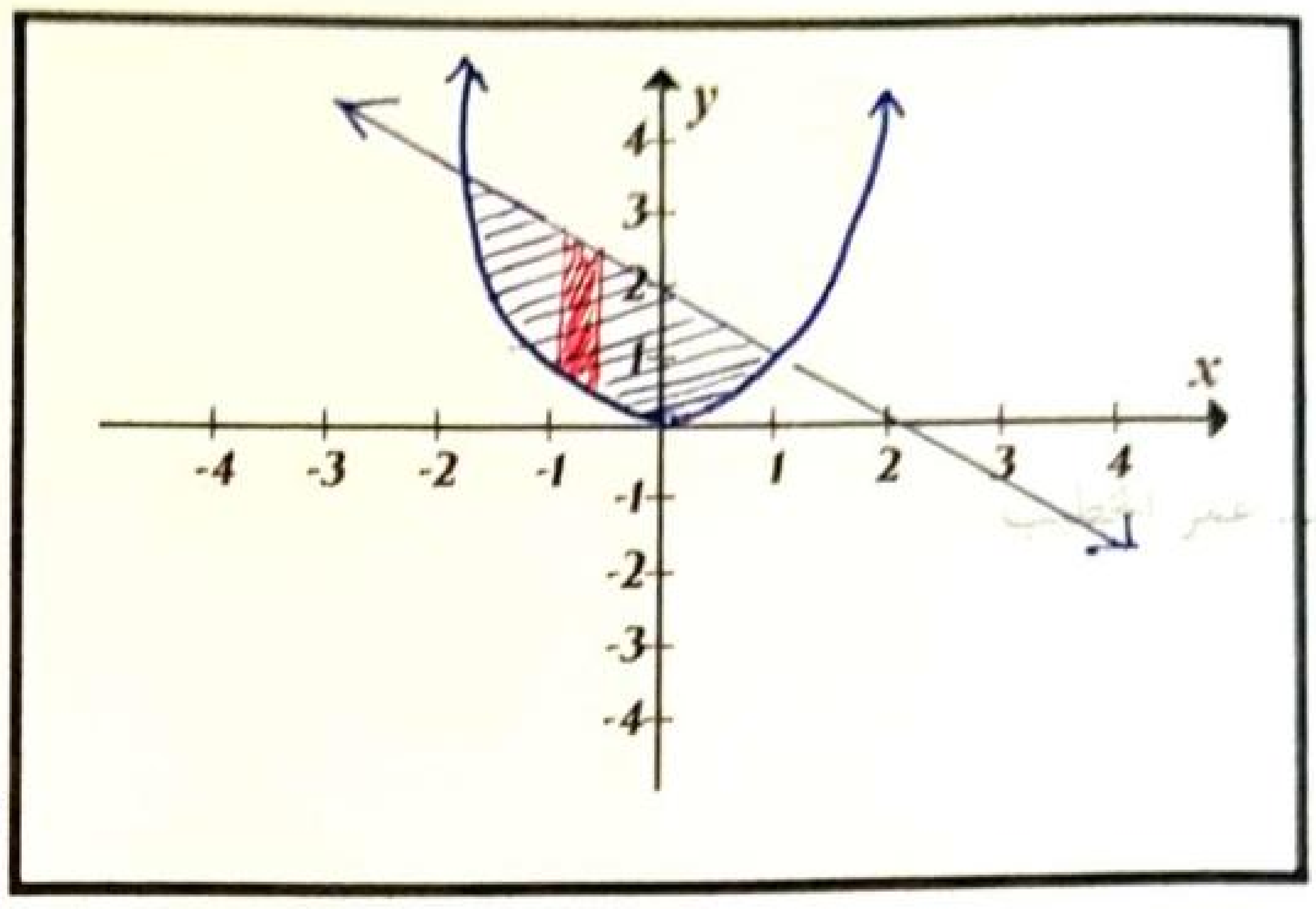
$$A=\int_{-1}^{3}(-2y^2+4y+6)\ dy$$

$$=-\frac{2}{3}y^3+2y^2+6y\Big]_{-1}^{3}$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(3)^3+2(3)^2+6(3)\right]-\left[-\frac{2}{3}(-1)+2(-1)^2+6(-1)\right]$$

$$=\frac{64}{3}$$

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ و المستقيم $y = 2 - x$



$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

$$= 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_{-2}^{1}$$

$$= \left[2(1) - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{3}(1)^3\right] - \left[2(-2) - \frac{1}{2}(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

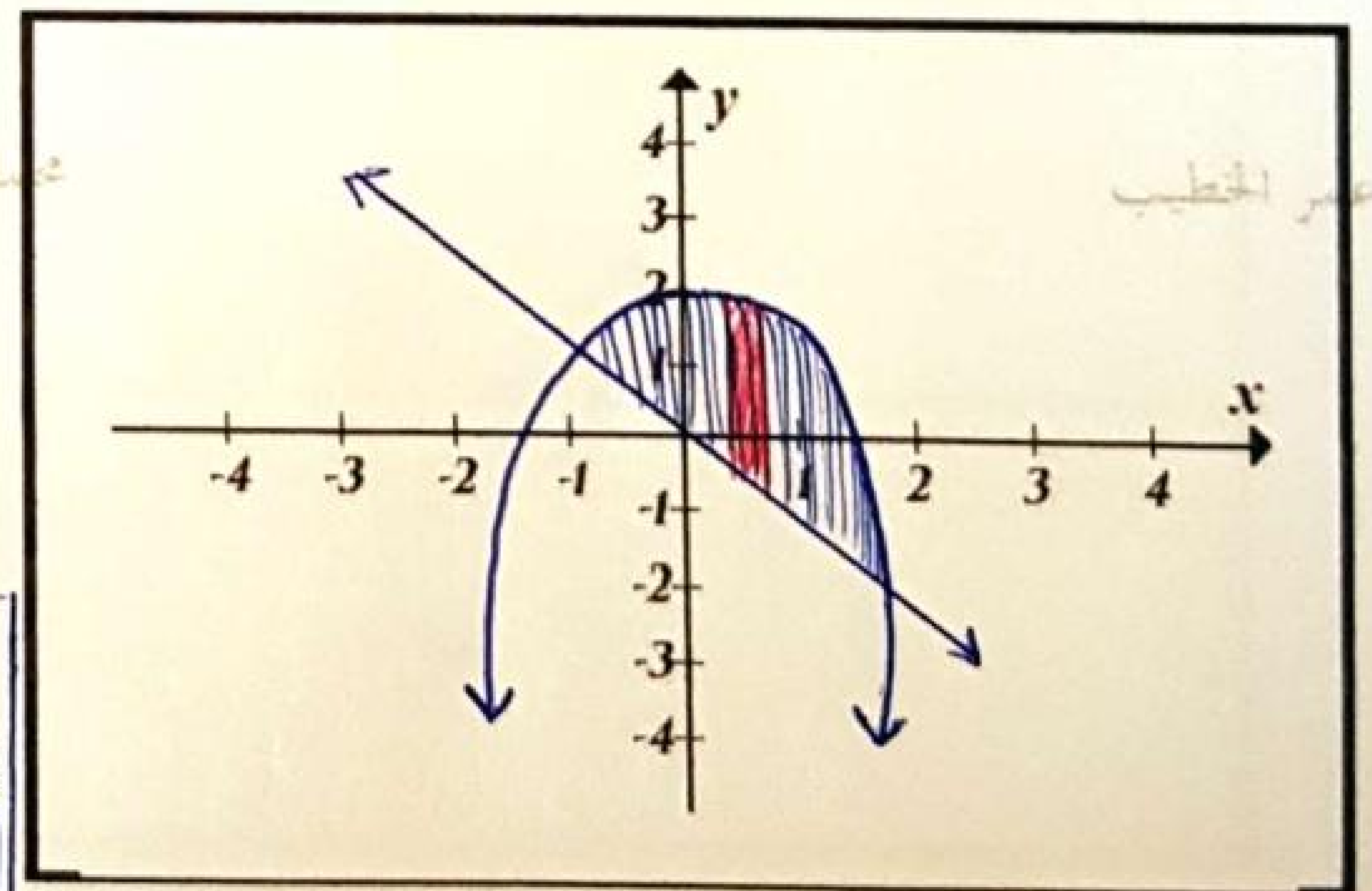
* ايجاد حدود التكامل :

$$2 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -2$$

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = 2 - x^2$ و المستقيم $y = -x$



$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\, dx$$

$$= 2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left[2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[2(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2\right]$$

$$= \frac{9}{2}$$

* ايجاد حدود التكامل :

$$2 - x^2 = -x$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -1$$

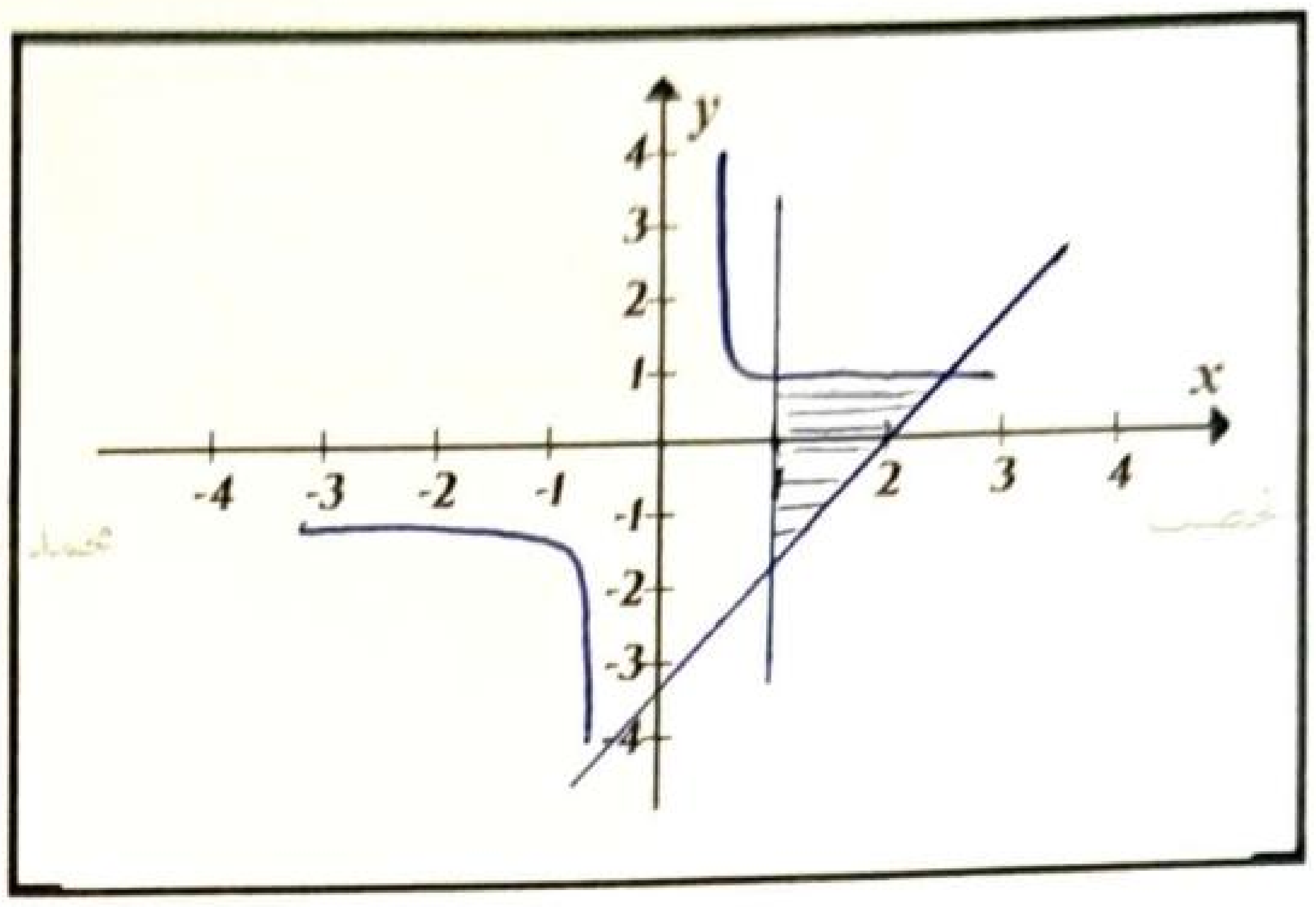
(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=\frac{3}{x}$ و المستقيمين $y=x-2$ ، $x=1$

$$A=\int_1^3 \frac{3}{x}-x+2\ dx$$

$$=3\ln|x|-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^3$$

$$=\left[3\ln(3)-\frac{1}{2}(3)^2+2(3)\right]-\left[3\ln(1)-\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right]$$

$$=3.29$$



$$\frac{3}{x}=x-2$$

$$3=x^2-2x$$

$$x^2-2x-3=0$$

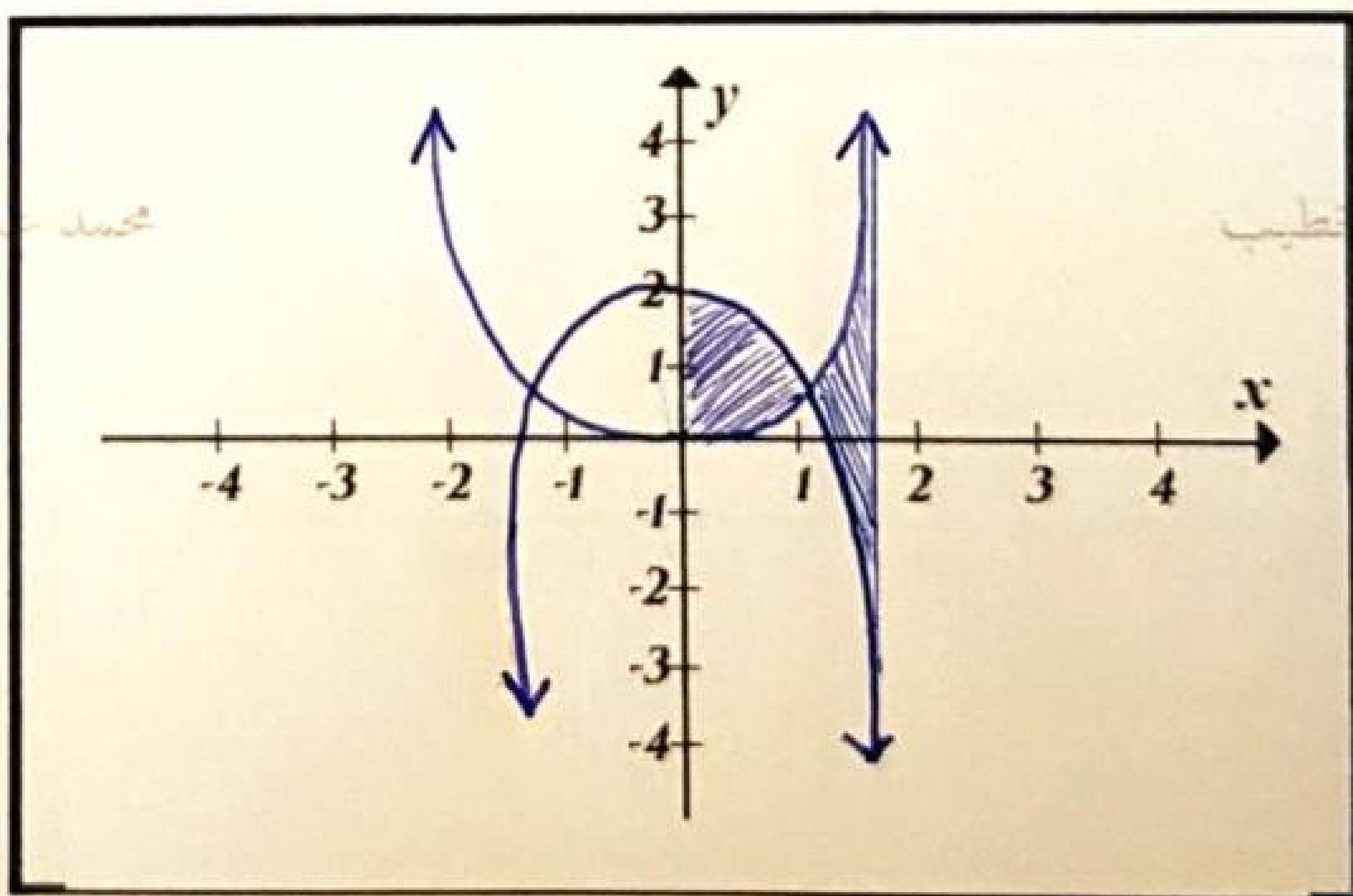
$$x=3\checkmark \quad x=-1$$

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ على $[0,2]$

$$A_1=\int_0^1 2-2x^2\ dx$$

$$=2x-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=\left[2(1)-\frac{2}{3}(1)^3\right]-\left[2(0)-\frac{2}{3}(0)^3\right]=\frac{4}{3}$$



$$2-x^2=x^2$$

$$x^2+x^2-2=0$$

$$2x^2-2=0$$

$$x=-1 \quad x=1\checkmark$$

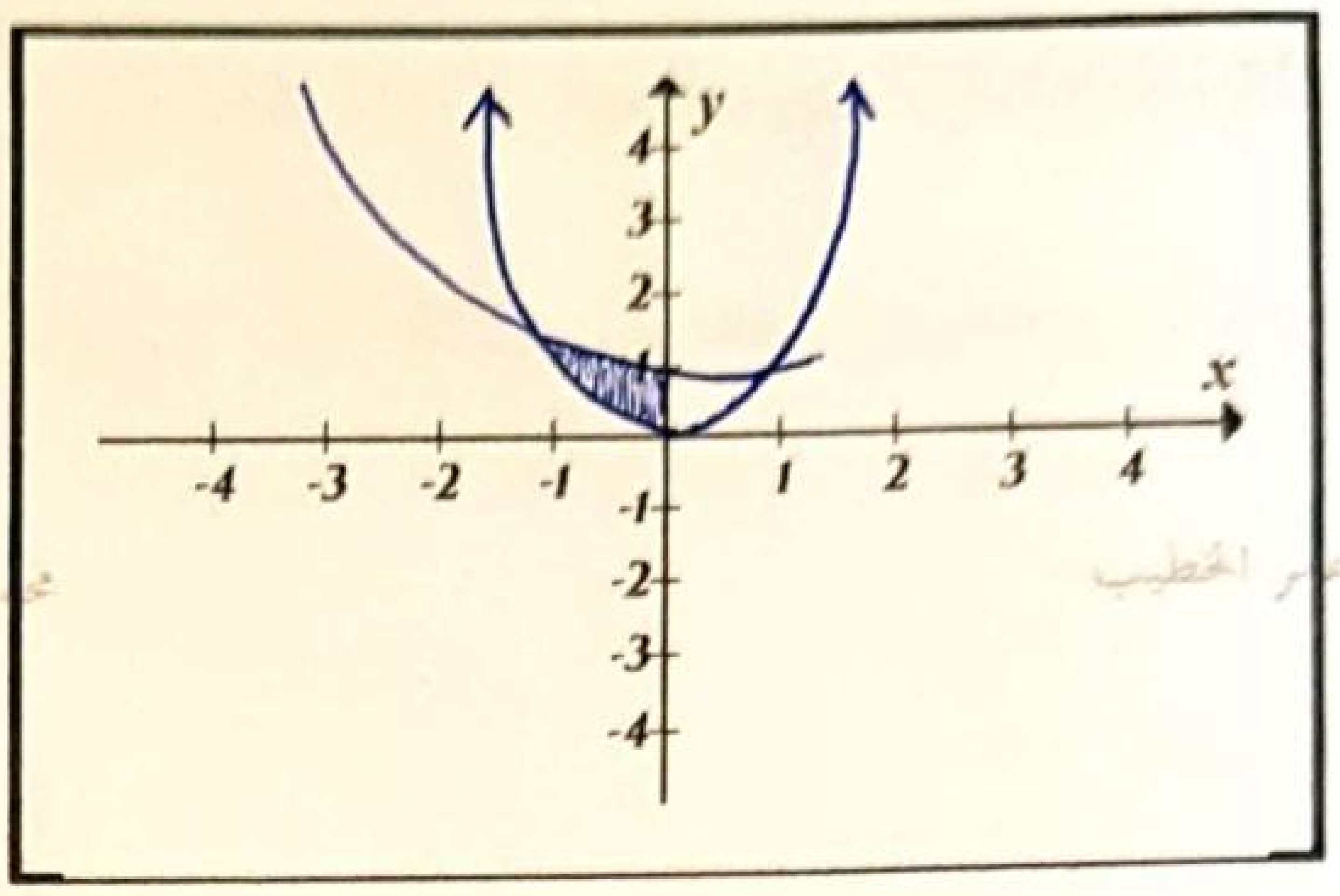
$$A_2=\int_1^2 x^2-2+x^2\ dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$

$$=\left[\frac{1}{3}(2)^3-2(2)+\frac{1}{3}(2)^3\right]-\left[\frac{1}{3}(1)^3-2(1)+\frac{1}{3}(1)^3\right]=\frac{8}{3}$$

$$A_{TOT}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$$

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=e^{-x}$ على الفترة $[-1,0]$



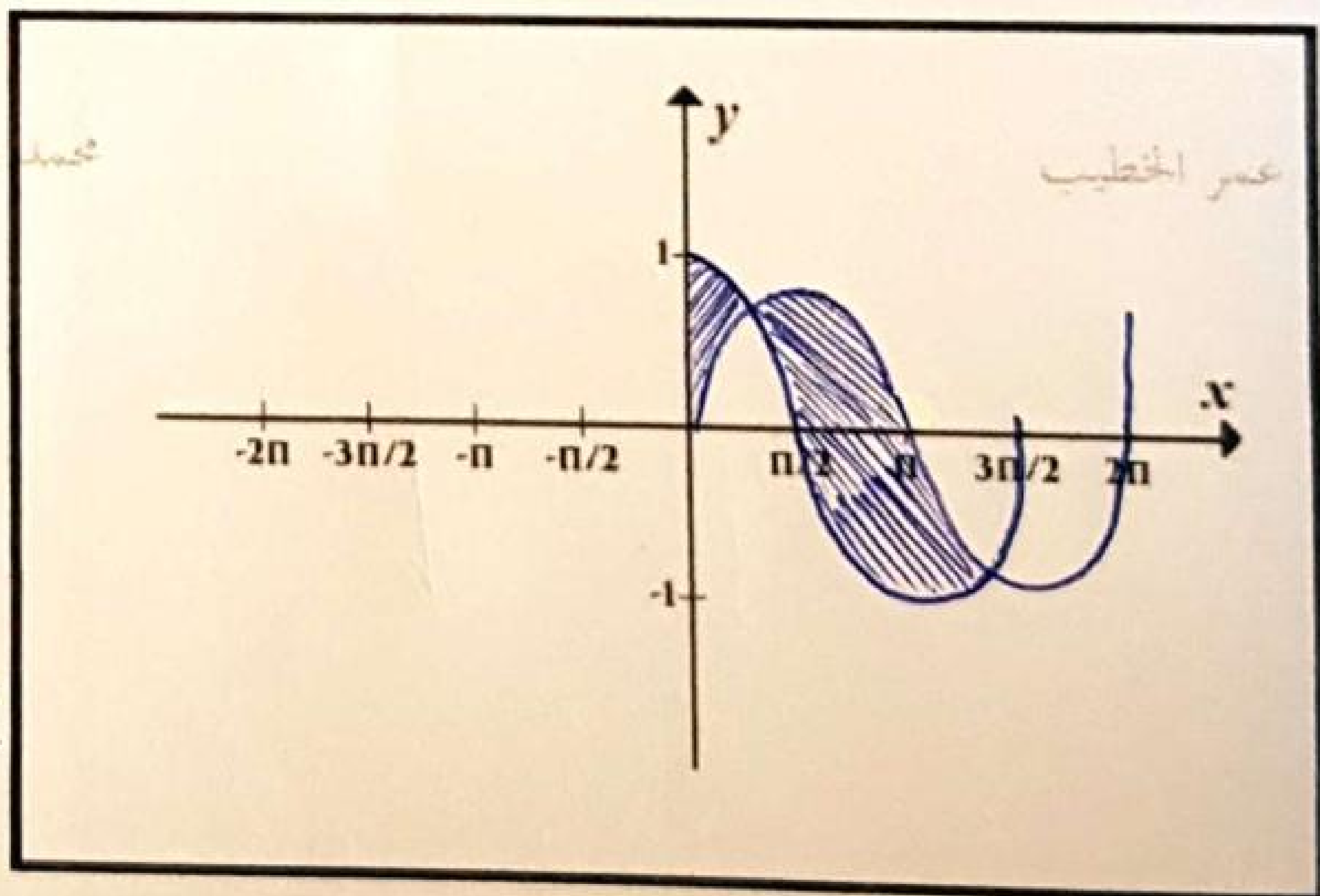
$$A=\int_{-1}^{0} e^{-x}-x^2 \, dx$$

$$=-e^{-x}-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{0}$$

$$=\left[-e^{-(0)}-\frac{1}{3}(0)^3\right]-\left[-e^{-(-1)}-\frac{1}{3}(-1)^3\right]$$

$$=1.38$$

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$



$$A_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x-\sin x \, dx$$

$$=\sin x+\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right]-\left[\sin 0+\cos 0\right]=0.4$$

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x-\cos x \, dx$$

$$=-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=\left[-\cos\pi-\sin\pi\right]-\left[-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right]=1+\sqrt{2}$$

$A_{TOT}=A_1+A_2$

$A_{TOT}=2.8$

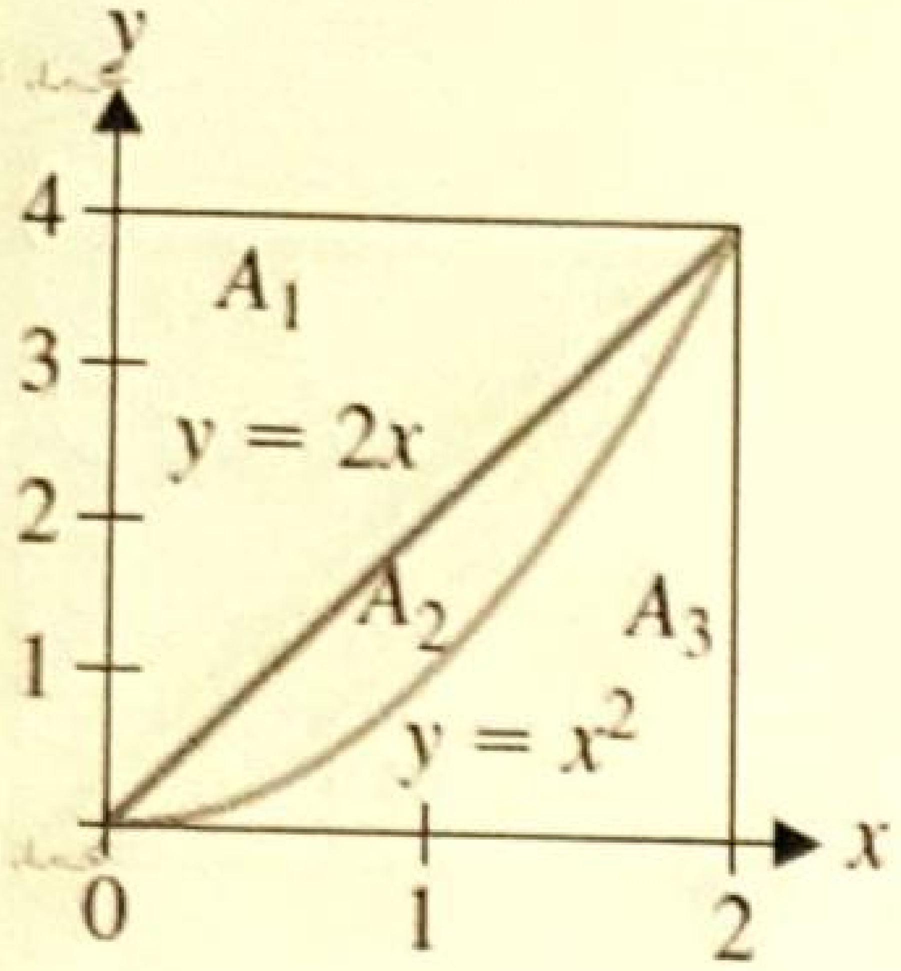
$\sin x=\cos x$

$\tan x=1$

$x \to Q_1 \quad x=\frac{\pi}{4}$

$x \to Q_3 \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi$

خارج الفترة



اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن المساحات التالية

بدلالة التكامل الذي يناسبه في كل مما يلي

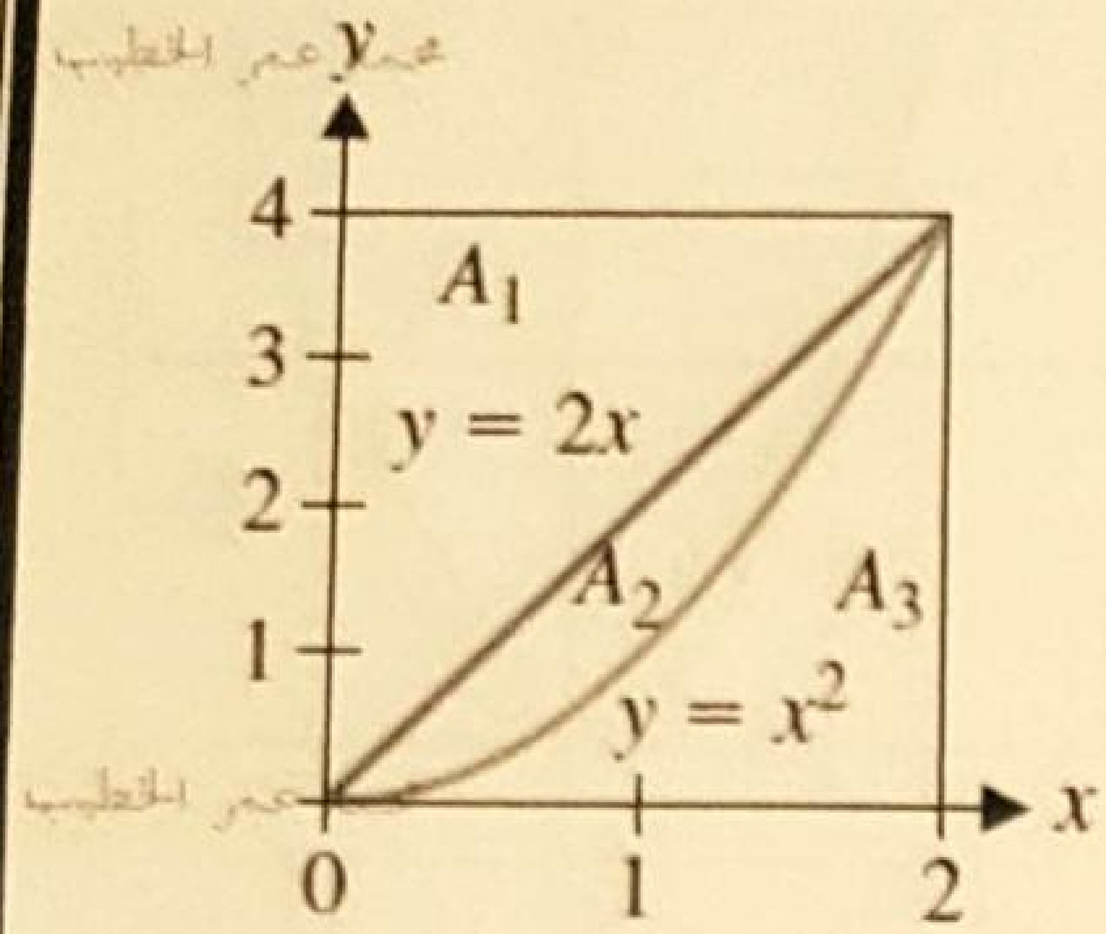
ملاحظة : اكتب التكامل بدلالة dx وبدلالة dy

بدلالة dx	بدلالة dy
(a) A_3: $= \int_0^2 x^2 \, dx$	$= \int_0^4 2 - \sqrt{y} \, dy$
(b) A_2: $= \int_0^2 2x - x^2 \, dx$	$= \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2} \, dy$
(c) A_1: $= \int_0^2 4 - 2x \, dx$	$= \int_0^4 \frac{y}{2} \, dy$
(d) $A_2 + A_3$: $= \int_0^2 2x \, dx$	$= \int_0^4 2 - \frac{y}{2} \, dy$
(e) $A_1 + A_2$: $= \int_0^2 4 - x^2 \, dx$	$= \int_0^4 \sqrt{y} \, dy$

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن كل من التكاملات التالية

بدلالة A_3, A_2, A_1 في كل مما يلي

ثم أكتب التكامل بدلالة المكامل الاخر



$$(a) \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$$

$$= A_2$$

$$(b) \int_0^2 (4 - x^2)\, dx$$

$$= A_1 + A_2$$

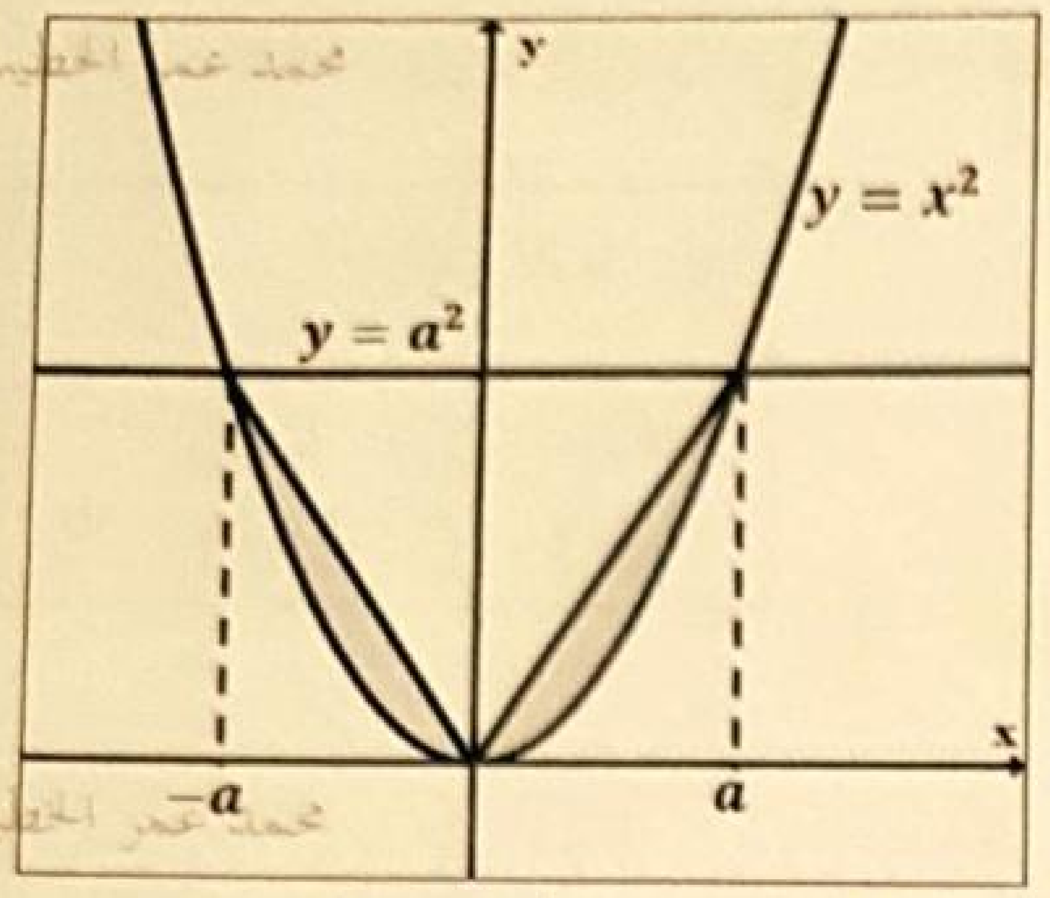
$$(c) \int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$$

$$= A_3$$

$$(d) \int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$$

$$= A_2$$

(1) اعتمد على الشكل الذي يمثل بيان الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = a^2$ في ايجاد قيمة a التي تجعل المساحة المحصور 9 وحدات مربعة



نستخدم التماثل :

$$2\int_0^a ax - x^2\,dx = 9$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = 9$$

$$= \frac{2}{6}a^3 = 9$$

$$a^3 = 27 \quad \boxed{a=3}$$

* ايجاد معادلة المستقيم :

$$(0,0)\ ,\ (a, a^2)$$

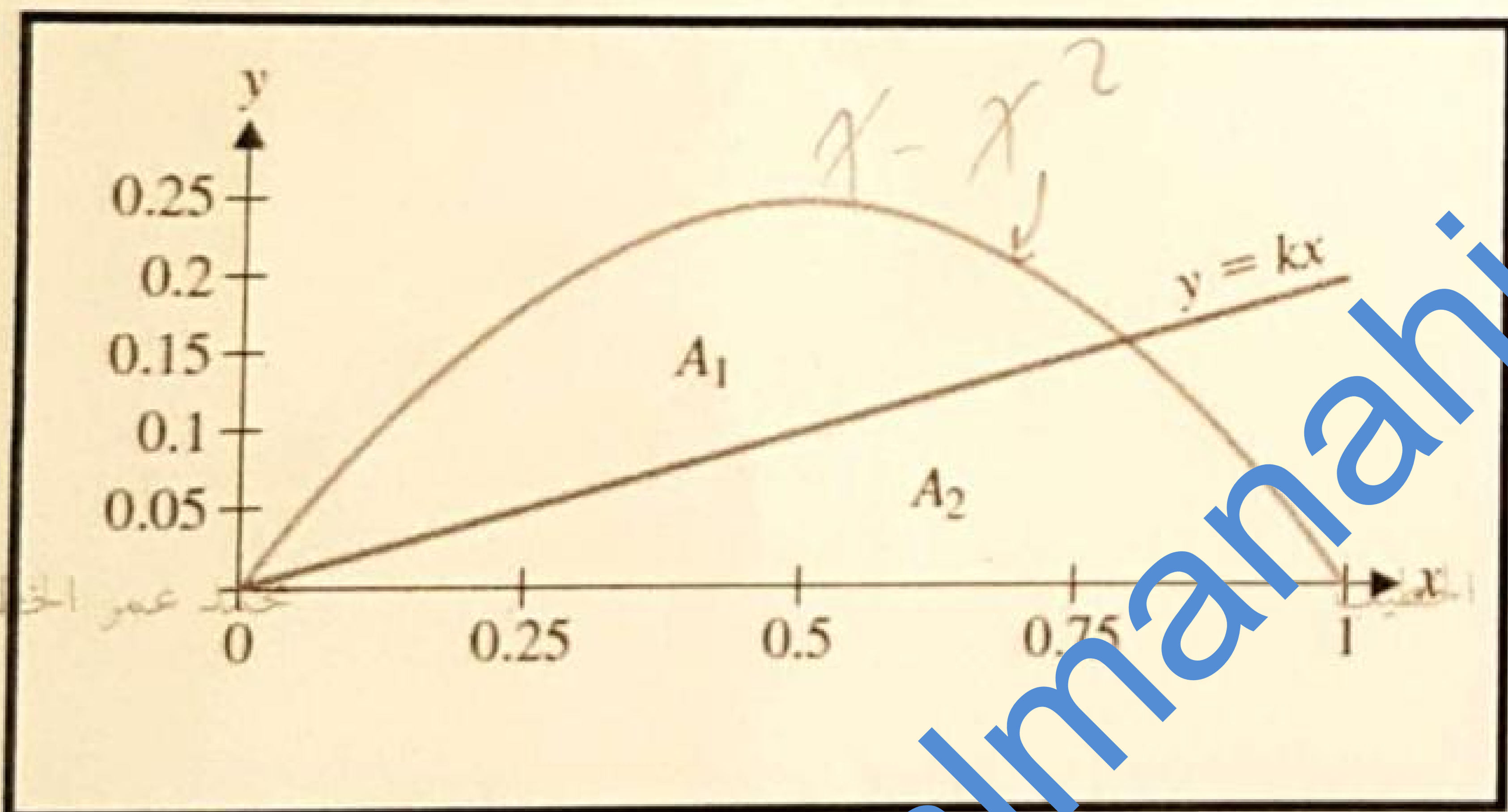
الميل

$$m = \frac{a^2 - 0}{a - 0} = a$$

$$y - 0 = a(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = ax$$

(2) اعتمد على الشكل المجاور في ايجاد قيمة k التي تجعل المساحتين A_1, A_2 متساويتين



$$A_1 + A_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$$

$$A_1 = A_2 \implies A_2 = 1/12$$

لايجاد نقاط التقاطع بين المنحنى والمستقيم

$$x - x^2 = kx$$

$$\implies$$

$$x = 0, x = 1 - k$$

$$A_2 = \int_0^{1-k} kx\,dx + \int_{1-k}^1 (x - x^2)dx$$

$$= \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{1-k} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1-k}^1$$

$$= \frac{k(1-k)^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{(1-k)^2}{2} + \frac{(1-k)^3}{3}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot[1 - (1-k)^3] = 1/12$$

$$\implies 1 - (1-k)^3 = \frac{1}{2}$$

$$(1-k)^3 = \frac{1}{2}$$

$$1 - k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$k = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

اذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة هو $B(t)=2e^{0.04t}$ مليون نسمة ومعدل الوفيات هو $D(t)=3e^{0.02t}$ مليون نسمة حيث t بالسنوات

عدد السكان $\mathrm{P}(t)$ معدل صافي عدد السكان $\mathrm{P}'(t)=B(t)-D(t)$

(1) اوجد متى يتزايد و ومتى يتناقص عدد السكان على الفترة الزمنية $[0,30]$

$$P'(t)=2e^{0.04t}-3e^{0.02t}$$

$$2e^{0.04t}-3e^{0.02t}=0$$

$$2e^{0.04t}=3e^{0.02t}$$

$$\frac{e^{0.04t}}{e^{0.02t}}=\frac{3}{2} \quad e^{0.02t}=\frac{3}{2} \quad \cancel{\ln} e^{0.02t}=\ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad t=20 \text{ سنة}$$

$P'(t)$: 0 $- - -$ 20 $+ + +$ 30

التناقص $(0,20)$

التزايد $(20,30)$

(2) اوجد المساحة بين المنحنيين على الفترة الزمنية $[0,30]$ وفسر ماذا تعني هذه المساحة

$$A=\int_0^{30} 2e^{0.04t}-3e^{0.02t}\,dt$$

$$=\frac{2e^{0.04t}}{0.04}-\frac{3e^{0.02t}}{0.02}\Bigg]_0^{30}$$

$$=\left[\frac{2e^{0.04(30)}}{0.04}-\frac{3e^{0.02(30)}}{0.02}\right]-\left[\frac{2e^{0.04(0)}}{0.04}-\frac{3e^{0.02(0)}}{0.02}\right]=-7.3$$

مليون

تمثل المساحة صافي التغير (الزيادة او النقصان) في عدد السكان

(3) اوجد متوسط صافي التغير في عدد السكان على الفترة الزمنية $[0,30]$

$$A_{ave}=\frac{1}{30-0}\int_0^{30} 2e^{0.04t}-3e^{0.02t}\,dt$$

$$=\frac{1}{30}(-7.3)=0.24$$

مليون نسمة