موقع التعليم فى الإمارات
https://emarat-education.blogspot.com

محمد عمر الخطيب

اوراق عمل

مادة

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر متقدم

2019/2018

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الوحدة الأولى : التمهيدات

1-1 كثيرات الحدود والدوال النسبية

2-1 الدوال العكسية

3-1 الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

4-1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

5-1 تحويلات الدوال

الوحدة الثانية : النهايات والاتصال

1-2 المماسات وطول المنحنى

2-2 مفهوم النهاية

3-2 حساب النهايات

4-2 الأتصال ونتائجه

5-2 النهايات التي تتضمن اللانهاية: خطوط التقارب

6-2 التعريف الرسمي للنهاية

الوحدة الثانية : التفاضل

1-3 المماسات والسرعة المتجهة

2-3 الاشتقاق

3-3 حساب المشتقات : قاعدة القوى

4-3 قاعدة الضرب والقسمة

5-3 قاعدة السلسلة

6-3 مشتقات الدوال المثلثية

7-3 اشتقاق الدوال الأسية والدوال المثلثية اللوغاريتمية

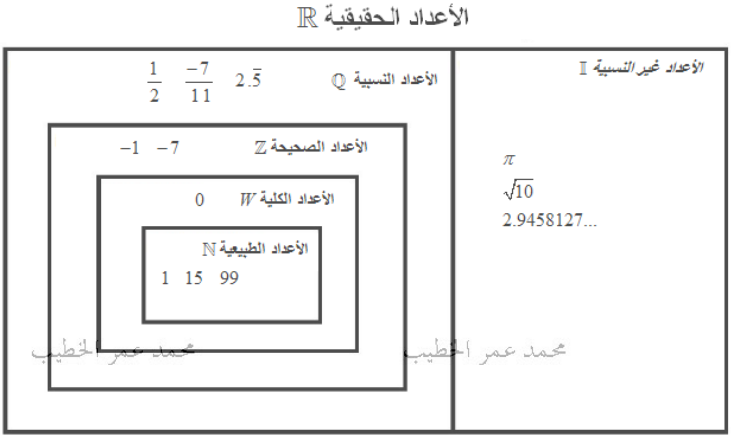
8-3 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

9-3 دوال القطع الزائد

10-3 نظرية القيمة المتوسطة

محمد عمر الخطيب

الأعداد الحقيقية



وصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية $R=(-\infty,\infty)$

اذا كانت a,b **إعداد حقيقية حيث** $a<b$ **فان:**

	رمز بناء المجموعة	المتباينة	الفترة	التمثيل البياني على خط الأعداد
1	$\{x \mid a<x<b, x\in R\}$	$a<x<b$	(a,b)	
2	$\{x \mid a\le x\le b, x\in R\}$	$a\le x\le b$	$[a,b]$	
3	$\{x \mid a<x\le b, x\in R\}$	$a<x\le b$	$(a,b]$	
4	$\{x \mid a\le x<b, x\in R\}$	$a\le x<b$	$[a,b)$	
5	$\{x \mid a<x, x\in R\}$	$a<x$	(a,∞)	
6	$\{x \mid a\le x, x\in R\}$	$a\le x$	$[a,\infty)$	
7	$\{x \mid x<b, x\in R\}$	$x<b$	$(-\infty,b)$	
8	$\{x \mid x\le b, x\in R\}$	$x\le b$	$(-\infty,b]$	
9	$\{x \mid -\infty<x<\infty, x\in R\}$	$-\infty<x<\infty$	$(-\infty,\infty)$	

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اكمل الجدول التالي .

	رمز بناء المجموعة	المتباينة	الفترة	التمثيل البياني على خط الأعداد
1	$\{x \mid -1 < x < 1, x \in R\}$			
2		$-2 \le x < 5$		
3			$[3,\infty)$	
4	$\{x \mid x < -1 \text{ or } 2 \le x, x \in R\}$			

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

المتباينات:

حل المتباينات التالية:

(1) $2x - 4 \le 5x + 8$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $-2 < 2x - 4 \le 2$

(3) $5 \le 2 - 3x \quad , \quad 2x + 7 > 9$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

حل المتباينات التالية:

(1) $x^2 - x - 6 \le 0$

(2) $\frac{x-1}{5-x} \le 0$

(3) $\frac{x^2-4}{x} > 0$

(4) $|2x-6| \le 8$

(5) $\left|\frac{8}{x-1}\right| \le 4$

تذكر ان

اذا كان $a > 0$ **فان**

(1) $|x| = a \Leftrightarrow x = a, x = -a$

(2) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

(3) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a, x \ge a$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المسافة والميل ومعادلة الخط المستقيم

لتكن $P_1(-1,3), P_2(2,7)$ اوجد

(1) المسافة بين النقطتين

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(2) احداثي منتصف القطعة المستقيمة

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

(3) ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(4) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(5) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة P_1 ويوازي المستقيم الذي معادلته $2x+y+5=0$

يكون المستقيمان $\overleftrightarrow{L_1},\overleftrightarrow{L_2}$ متوازيان $\longleftrightarrow$ $m_1=m_2$

يكون المستقيمان $\overleftrightarrow{L_1},\overleftrightarrow{L_2}$ متعامدان $\longleftrightarrow$ $m_1=\frac{-1}{m_2}$

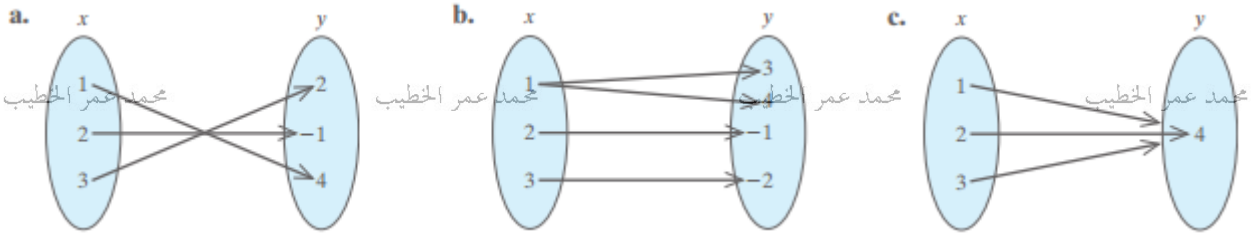
(6) معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين عند احداثي المنتصف

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الدالة:

الدالة: هي علاقة بحيث ان لكل عنصر في المجال صورة واحدة فقط في المدى .

(1) اي من العلاقات التالية هي دالة

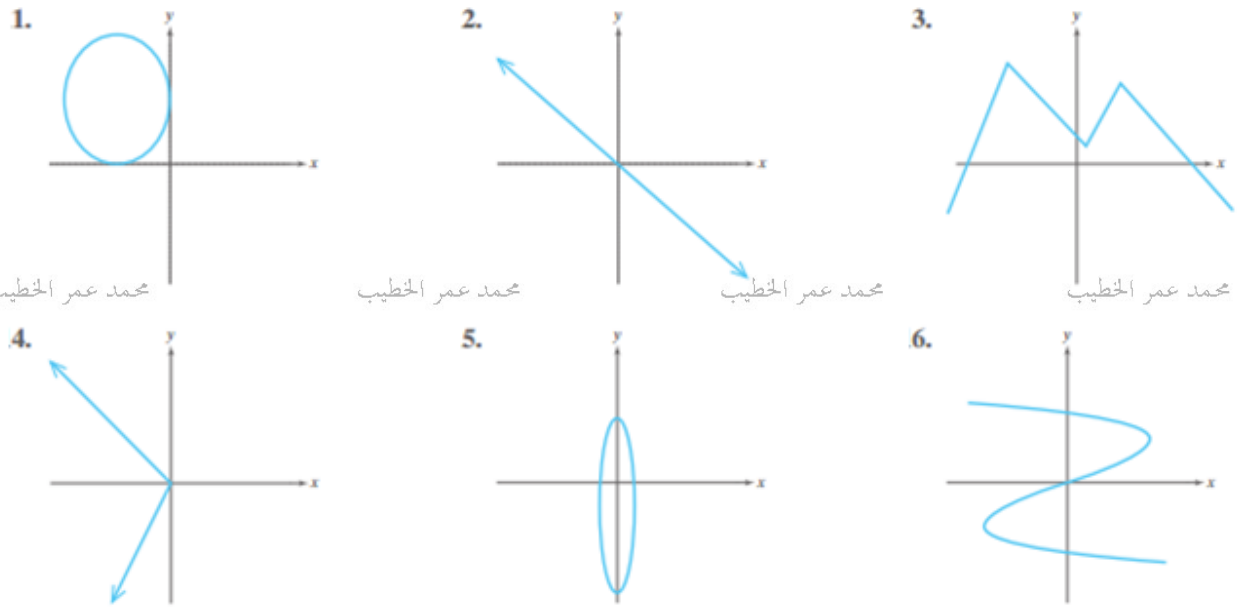


اختبار الخط العمودي (الرأسي)

اذا قطع اي خط رأسي العلاقة في نقطة واحدة فان العلاقة تكون دالة .

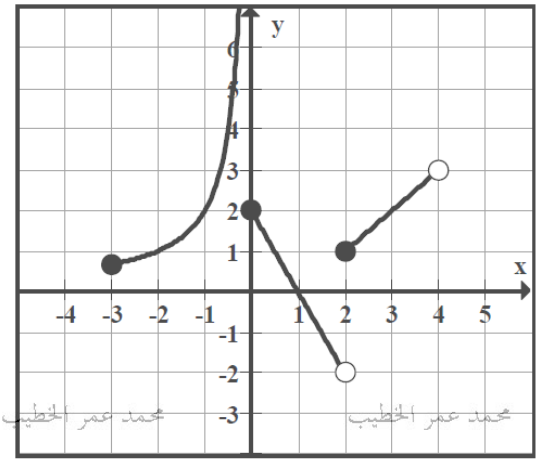
محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اي من العلاقات التالية هي دالة :



محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



$(a)\quad f(-1) =$

$(b)\quad f(3) =$

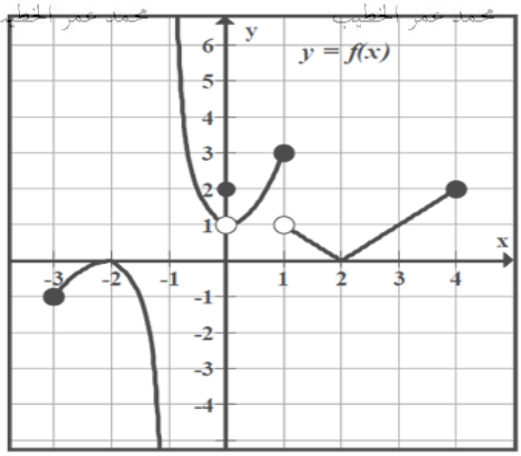
$(c)\quad f(0) =$

$(d)\quad f(2) =$

(e) مجال الدالة $f(x)$

(f) مدى الدالة $f(x)$

(2) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



$(a)\quad f(2) =$

$(b)\quad f(0) =$

$(c)\quad f(1) =$

(d) هل الدالة $f(x)$ معرفة عند $x = -1$

(e) مجال الدالة $f(x)$

(f) مدى الدالة $f(x)$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت : $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,-5\le x<1 \\ 2x+3 & ,x\ge 1 \end{cases}$ فأوجد :

$(a)\quad f(-2)=$

$(b)\quad f(4)=$

$(c)\quad f(1)=$

(d) مجال الدالة $f(x)$

(2) اذ ا كانت دالة التكلفة لشراء عدد من الاقلام x تعطى بالدالة : $c(x)$ حيث

$$c(x)=\begin{cases} 5x & 1\le x\le 75 \\ 4x+75 & 75<x\le 150 \\ 3x+225 & x>150 \end{cases}$$

أ) أوجد إجمالي تكلفة شراء 60 قلم.

ب) أوجد إجمالي تكلفة شراء 100 قلم

ت) أوجد إجمالي تكلفة شراء 150 قلم.

ث) أوجد إجمالي تكلفة شراء 200 قلم.

ج) اكتب مجال الدالة $c(x)$

محمد عمر الخطيب

دوال كثيرات الحدود

تذكر أن دالة كثيرة الحدود تكون على الصورة

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث الأسس اعداد صحيحة غير سالبة والمعاملات تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية

الدوال النسبية

تذكر أن الدالة النسبية تكون على الصورة

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x), q(x)$ كثيرات حدود

ملاحظات:

(1) مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية . ما لم يذكر غير ذلك

(2) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق $g(x) \geq 0$

(3) مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة

بين مجال $g(x)$ و مجال $h(x)$ عدا اصفار المقام

محمد عمر الخطيب

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $f(x)=x^2-5x+3$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

(3) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+8}$

(4) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

(5) $f(x)=\sqrt{2x-6}$

(6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x-15}$

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{x-2}$

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x+2 & ,-5\le x\le 1 \\ \sin x & ,x>1 \end{cases}$

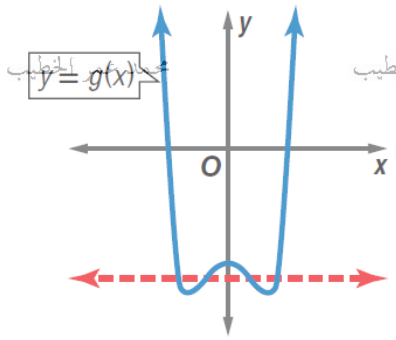
(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x-1}}$

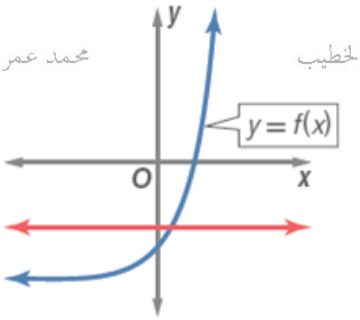
(4) $f(x)=\dfrac{\log(5-x)}{\sqrt{x-1}}$

الدالة واحد لواحد

اختبار الخط الافقي

تكون الدالة $y = f(x)$ دالة واحد لواحد اذا كان كل خط افقي يقطع الدالة في نقطة واحدة فقط





الدالة العكسية

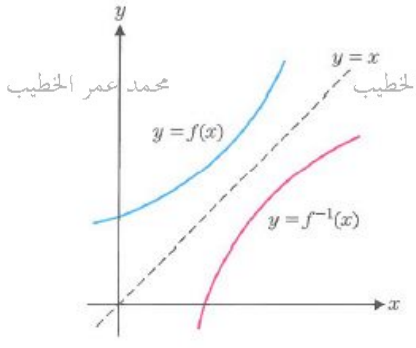
تسمى الدالة $g(x)$ دالة عكسية للدالة $f(x)$ اذا تحقق الشرطان

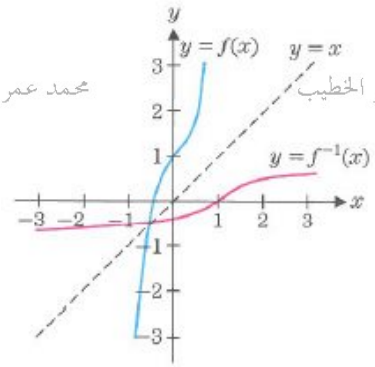
(1) الدالة $f(x)$ دالة واحد لواحد

(2) $f(g(x)) = x \quad , \quad g(f(x)) = x$

ويرمز للدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$

التمثيل البياني للدالة ومعكوسها (الدالة $f(x)$ والدالة العكسية لها متماثله حول المستقيم $y = x$)





ملاحظة: (1) مجال الدالة $f^{-1}(x)$ هو نفس مدى الدالة $f(x)$ ومدى الدالة $f^{-1}(x)$ هو مجال الدالة $f(x)$

(2) حتى نجد القيد على الدالة العكسية يجب ان نجد مدى الدالة الاصلية

(1) اذا كانت الدالة : $g(x)=x^3+4x-1$ فأوجد $g^{-1}(-1)$

(2) بين ان الدالة $g(x)$ هي دالة عكسية للدالة $f(x)$

$(a)\ f(x)=-6x+3 \quad , \quad g(x)=\dfrac{3-x}{6}$

$(b)\ f(x)=(x+8)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad g(x)=x^{\frac{2}{3}}-8 \quad ,x\geq 0$

(3) اذا كانت الدالة $f(x)=\dfrac{x+4}{x}$ لها الدالة العكسية $g(x)=\dfrac{a}{x-1}$ فاوجد قيمة الثابت a

محمد عمر الخطيب

اذا علمت ان الدالة f هي دالة واحد لواحد فاوجد f^{-1} في كل مما يلي مع تحديد اي قيود.

(1) $f(x)=2x-3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $f(x)=x^3-8$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $f(x)=\sqrt{x-2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اذا علمت ان الدالة f هي دالة واحد لواحد فاوجد f^{-1} في كل مما يلي مع تحديد اي قيود.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $f(x)=x^2-4 \quad , \quad x\geq 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $f(x)=x^2-4 \quad , \quad x\leq 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الدوال الدورية

تكون الدالة $f(x)$ دالة دالة دورية وزمنها الدوري T اذا كان:

$$f(x+T)=f(x)$$

حيث T اصغر عدد حقيقي موجب يحقق الخاصية

ومن اهم الدوال الدورية هي الدوال المثلثية.

(1) بين ان الدالة $g(x)=\sqrt{x-[x]}$ هي دالة دورية زمنها الدوري 1

(2) بين ان الدالة $g(x)=\cos x$ هي دالة دورية زمنها الدوري 2π

النسب المثلثية والمتطابقات المهمة

محمد عمر الخطيب

متطابقات فيثاغورس

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

متطابقات المقلوب

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$
$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

متطابقات القسمة

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$=2\cos^2 a-1$$
$$=1-2\sin^2 a$$
$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

متطابقات الفرق

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

متطابقات المجموع

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

متطابقات الاشارة

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$
$$\csc(-\theta)=-\csc\theta$$
$$\sec(-\theta)=\sec\theta$$
$$\cot(-\theta)=-\cot\theta$$

متطابقات الزاوية المتممة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

متطابقات الضرب الى الجمع

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

متطابقات الجمع الى الضرب

$$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

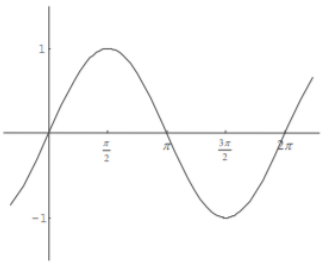
ملاحظة مهمة ⇦

$$\csc^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\quad,\quad\sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\quad,\quad\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمثيل البياني للدوال المثلثية ومعكوساتها

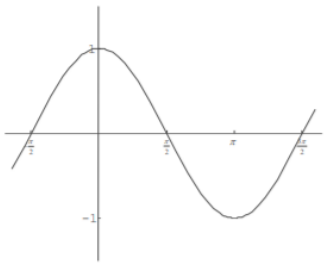
محمد عمر الخطيب

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $[-1,1]$
Period: 2π



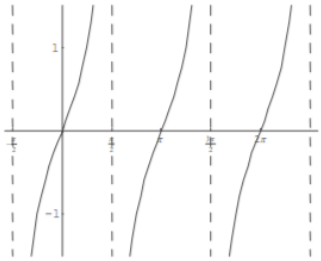
$f(x)=\sin x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $[-1,1]$
Period: 2π



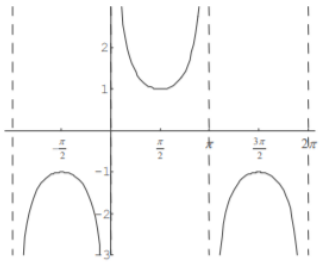
$f(x)=\cos x$

Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$
Range: $(-\infty,\infty)$
Period: π



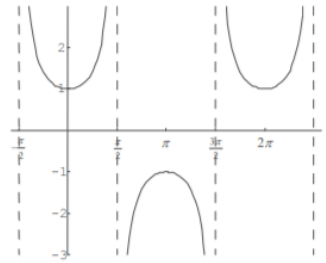
$f(x)=\tan x$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



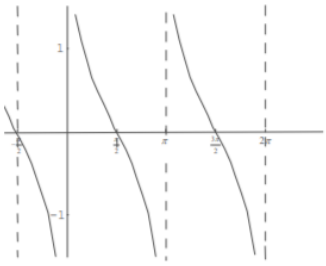
$f(x)=\csc x=\frac{1}{\sin x}$

Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



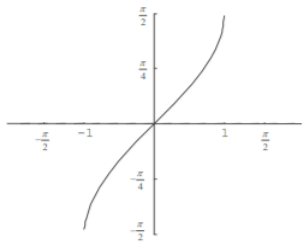
$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$
Range: $(-\infty,\infty)$



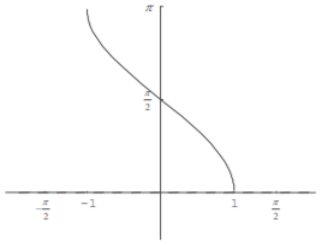
$f(x)=\cot x=\frac{1}{\tan x}$

Domain: $[-1,1]$
Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



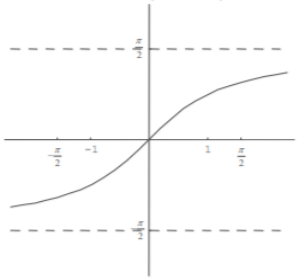
$f(x)=\sin^{-1}x$
$f(x)=\arcsin x$

Domain: $[-1,1]$
Range: $[0,\pi]$



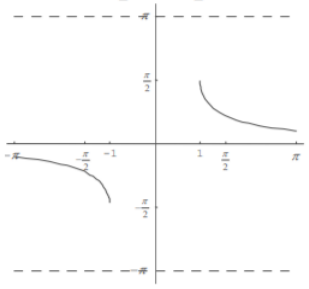
$f(x)=\cos^{-1}x$
$f(x)=\arccos x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



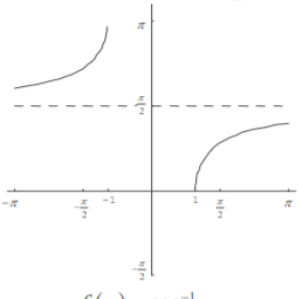
$f(x)=\tan^{-1}x$
$f(x)=\arctan x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y\neq 0$



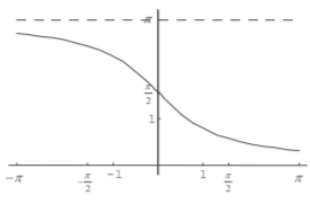
$f(x)=\csc^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arc}\csc x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
Range: $[0,\pi], y\neq\frac{\pi}{2}$



$f(x)=\sec^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arc}\sec x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $(0,\pi)$



$f(x)=\cot^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arc}\cot x$

محمد عمر الخطيب

السعة والدورة والتكرار لبعض الدوال الدورية

(1) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة : $y = -3sin2x$

$y = AsinBx$

$y = AcosBx$

السعة: $|A|$

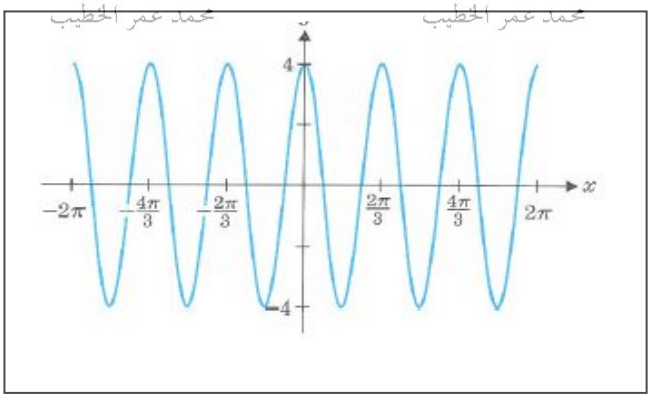
الدورة : $\frac{2\pi}{|B|}$

التكرار: $\frac{|B|}{2\pi}$

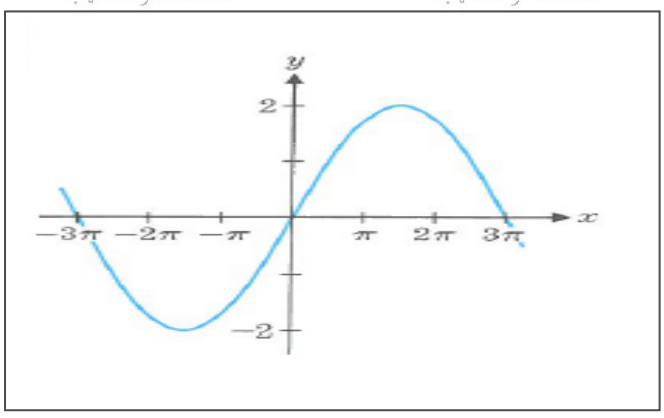
(2) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة : $y = 4cos(6\pi x - \frac{\pi}{2})$

(3) اوجد السعة والدورة للدالة : $y = AcosBx$

ثم اكتب قاعدة الدالة.



(4)اعتمد على الشكل المجاور لكتابة قاعدة الدالة.



محمد عمر الخطيب

ملاحظة:

(1) راجع الرسومات البيانية للتعرف على مجال ومدى الدوال المثلثية العكسية

(2) كل الزوايا يجب ان تكون بالراديان

(1) اوجد الدالة العكسية للدالة $y = 3\sin(2x - \pi)$ ثم اوجد مجالها ومداها

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad , \quad x \in [-1,1]$$

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \quad , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) اوجد الدالة العكسية للدالة $y = -2\cos^{-1}(x+1)$ ثم اوجد مجالها ومداها

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad , \quad x \in [-1,1]$$

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يأتي

(1) $\sin^{-1}-\frac{1}{2}$

(2) $\cos^{-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan^{-1}1$

(4) $\sec^{-1}\sqrt{2}$

(5) $\cos(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})$

(6) $\csc(\sin^{-1}\frac{2}{3})$

(7) $\tan(\cos^{-1}\frac{1}{4})$

(8) $\sin(\cot^{-1}-1)$

(9) $\sin^{-1}1-\sin^{-1}-1$

(10) $\sin 2\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$

(11) $\cos 2\sin^{-1}(-\frac{3}{5})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

بسط كل مما ياتي

(1) $\tan(\sin^{-1} x)$

(2) $\sin(\cos^{-1} x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\cos(\cot^{-1} x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\sin 2(\cos^{-1} x)$

(5) $\sin(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

المعادلات المثلثية

حل المعادلات المثلثية التالية (جميع الحلول)

(1) $2\sin x - 1 = 0$

(2) $3\tan x + 4 = 1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\sin 2x = 1$

(4) $\cos^2 x + \cos x = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\sin 2x + \cos x = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

قواعد الأسس

1. $a^m a^n = a^{m+n}$ 2. $(a^m)^n = a^{mn}$ 3. $(ab)^m = a^m b^m$

4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ 6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$

7. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 8. $a^0 = 1, a \neq 0$ 9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

الدالة الأسية:

هي الدالة التي تكون على الشكل التالي: $f(x) = a \times b^x$ **حيث** a **عدد حقيقي غير الصفر**

وأن $b \neq 1, b > 0$

الدالة الأسية الطبيعية

$$f(x) = e^x$$

حيث e يسمى العدد الطبيعي وهو عدد غير نسبي يساوي تقريبا $e \approx 2.718$

$$e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 2.718281828... \quad , \quad e^a = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$$

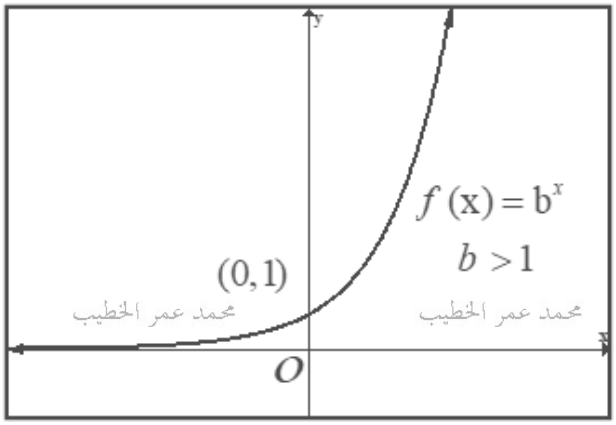
اوجد قيمة

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}) =$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}) =$$

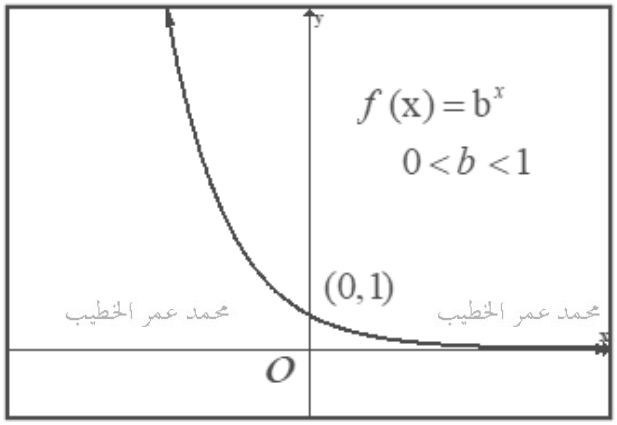
محمد عمر الخطيب

النمو الأسي



الدالة	$f(x)=b^x$ $b>1$
المجال :	
المدى	
التقاطع مع محور السينات	
التقاطع مع محور الصادات	

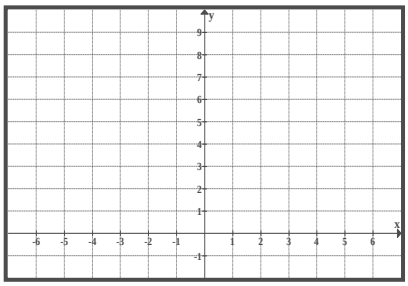
التضاؤل الأسي



الدالة	$f(x)=b^x$ $0<b<1$
المجال :	
المدى	
التقاطع مع محور السينات	
التقاطع مع محور الصادات	

مثل الدالة $f(x)=2^x$ بيانيا . موضحاً المجال والمدى ونقاط التقاطع مع المحاور

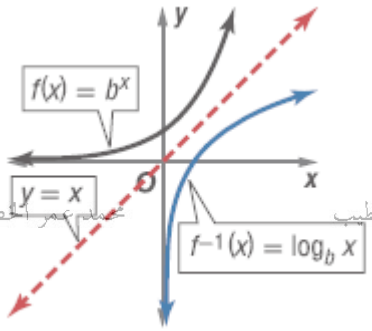
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



محمد عمر الخطيب

الدالة الوغاريتمية : هي معكوس (الدالة العكسية) للدالة الاسية $f(x)=b^x$ **ويرمز لها الرمز** $\log_b x$

$$f(x)=b^x \quad ,b>0, b\neq 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\log_b x$$



نلاحظ من التمثيل البياني أن الدالتين

$f(x)=b^x$ $\qquad$ $f^{-1}(x)=\log_b x$

تمثل انعكاسا لبعضهما البعض حول المستقيم $y=x$

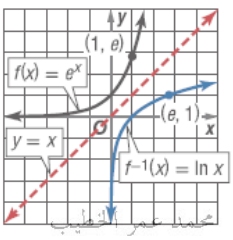
الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسي	
$f(x)=b^x \quad ,b>0, b\neq 1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_b x$	
الشكل اللوغاريتمي $y=\log_b x$	**الشكل الأسي** $b^y=x$

ملاحظة هامة :

(1) اذا كانت $b=10$ **فأن اللوغارتم يسمى اللوغارتم المعتاد ويرمز له** $\log x$

(2) اذا كانت $b=e$ **فأن اللوغارتم يسمى اللوغارتم الطبيعي ويرمز له** $\ln x$

دالة اللوغاريتم الطبيعي : $y=\ln x$ **هي معكوس للدالة الأسية الطبيعية :** $y=e^x$



محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

خواص اللوغارتمات

اذا كانت $x, y > 0, a \neq 1$ **فأن**

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$
3. $\log_a x^r = r \log_a x.$
4. $\log_a 1 = 0.$
5. $\log_a(a^x) = x.$
6. $a^{\log_a x} = x.$
7. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$

اذا كانت $x, y > 0$ **فأن**

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y.$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$
3. $\ln x^r = r \ln x.$
4. $\ln 1 = 0.$
5. $\ln(e^x) = x.$
6. $e^{\ln x} = x.$
7. $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$

اذا كانت $a, b, c > 0, b, c \neq 1$ **فأن**

(1) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\ln a}{\ln b}$ ، (2) $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظة:

مجال الدالة اللوغارتمية $y = \log_b x$ **هو** $(0, \infty)$ **حيث** $b > 0, b \neq 1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يأتي (بدون استخدام الآلة الحاسبة)

(1) $\frac{1}{2}log_4 16 - log_4 2$

(2) $log\ 25 + 2log\ 4 - 2log\ 2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $ln 12 - 2ln 2 + e^{ln 2} - ln 3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\log(\log x^2) - \log(\log x) + \log 50$

(5) $2ln\ e^{0.5} - ln\ \frac{1}{e^4} + e^{ln 2} + 10^{\log e^{\ln 4}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $log_2 7 \times log_5 2 \times log_7 5$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $y = log_2\ x^2 + \sqrt{x+1}$

(2) $y = log\ (\ln(x-1))$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \sqrt{\ln x - 1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y = \dfrac{\ln(x-2}{\log(5-x)}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد قاعدة الدالة الأسية التي تمر بالنقطتين $(1,2), (0,5)$ هي

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

المعادلات الأسية واللوغارتمية

حل المعادلات التالية

(1) $e^{2x}-5=0$

(2) $e^{2\ln x}-4=0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $x^2e^x-e^x=0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $2\ln x+8=0$

(5) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)=1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(1) $3^{3x-3} = 2^{x+1}$

(2) $(\frac{1}{2})^{2x} = e^{2x}$

(3) $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$

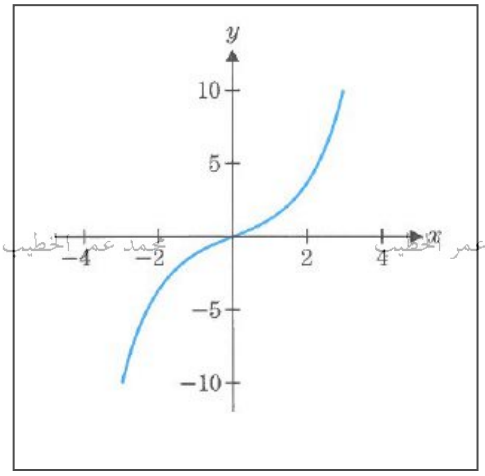
(4) $\frac{400}{1+3e^{-2x}} = 300$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الدوال الزائدية

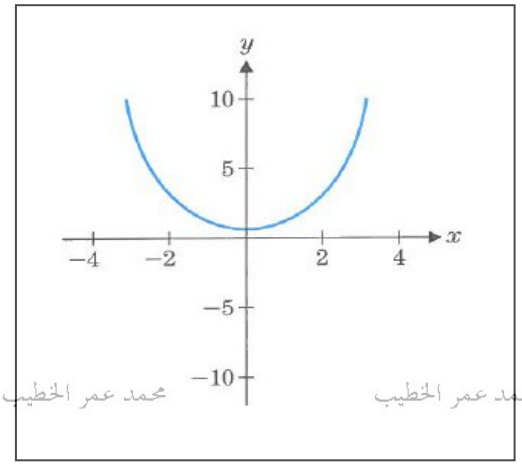
اوجد مجال ومدى الدالة $f(x)=\sinh x$ ثم اوجد $f(0)$

$$1)\quad \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$



اوجد مجال ومدى الدالة $f(x)=\cosh x$ ثم اوجد $f(0)$

$$2)\quad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$



ملاحظة:

كل المتطابقات المثلثية التي تنطبق على الدوال الدائرية تنطبق على الدوال الزائدية ولكن يتم وضع اشارة سالب امام كل دوال $\sinh x$ ذات القوى الزوجية

$$(1)\ \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

$$(2)\ \sinh(-x)=-\sinh x$$

$$(3)\ \cosh(-x)=\cosh x$$

يقوم خبراء الطب الشرعي بعمليات التشريح لتحديد وقت وسبب الوفاة . يمكن حساب الوقت t بالساعات منذ الوفاة بواسطة المعادلة $t = -10\ln(\frac{T - R_t}{98.6 - R_t})$

حيث T تمثل درجة حرارة الجسم و R_t درجة حرارة الغرفة

(1) إذا قام خبير الطب الشرعي بقياس درجة حرارة الجسم ووجد أنها $93^\circ F$ في غرفة درجة حرارتها $72^\circ F$ ، فما وقت الوفاة ؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) توفي مريض في مستشفى منذ 4 ساعات . فإذا علمت أن متوسط درجة حرارة الغرفة في المستشفى $75^\circ F$ فما درجة حرارة الجسم ؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) كانت درجة حرارة مريض $89^\circ F$ بعد 3.5 ساعات من وفاته . حدد درجة حرارة الغرفة ؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اذا كان عدد الاشخاص الذين يصابون بفيروس معين هو $p(t)=\frac{53}{1+0.03e^{0.75t}}$ حيث t تمثل عدد الايام

اوجد

(1) اوجد عدد الاشخاص الذين اصيبوا بالفيروس بعد 5 ايام

(2) حل المعادلة بالنسبة الى t

(3) بعد كم يوم يصبح عدد المصابين واحد فقط

محمد عمر الخطيب

يقيس مقياس ريختر للزلازل شدة الزلزال M (بالرختر) المتولد عن الطاقة الناتجة عنه E (بالجول) بالعلاقة التالية:

$$M = \frac{2}{3} log \frac{E}{10^{4.4}}$$

اجب عما يلي

(1) اوجدة شدة زلازال طاقتة 7.47×10^{11} جول

(2) اوجدة طاقة زلازال شدتة 9 ريختر

محمد عمر الخطيب

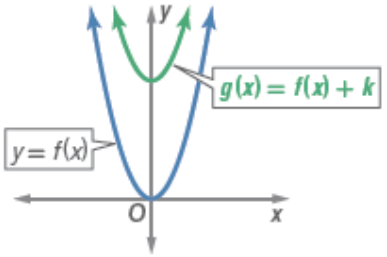
التحويلات الهندسية

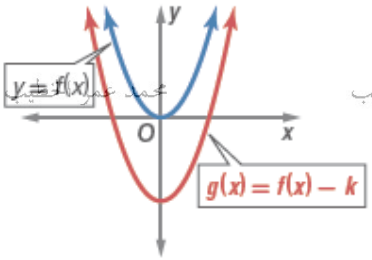
(1) الأزاحات الافقية والراسية

الإزاحة الرأسية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x) + k$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

- تُحرك k الرسم للأعلى، عندما تكون $k > 0$.
- تُحرك k الرسم للأسفل، عندما $k < 0$.

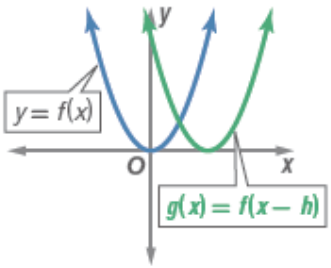


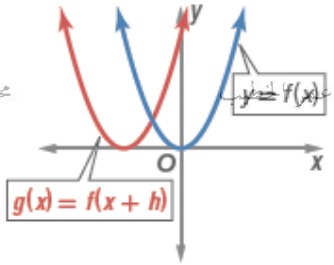


الإزاحات الأفقية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x - h)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

- تُحرك h الرسم لليمين، عندما تكون $h > 0$.
- تُحرك h الرسم لليسار، عندما تكون $h < 0$.

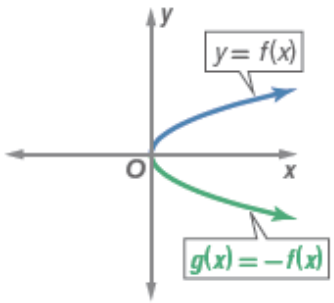




(2) الانعكاس في المحاور الافقية والرأسية

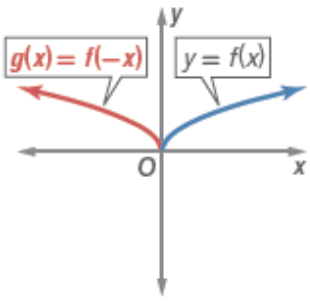
الإنعكاس حول المحور الأفقي x

الرسم البياني للدالة $g(x) = -f(x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الأفقي x**.



الانعكاس في المحور الرأسي y

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(-x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الرأسي y**.

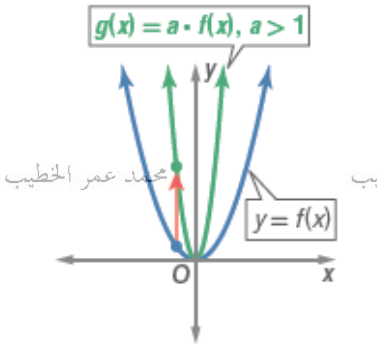


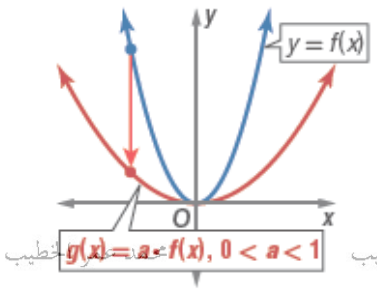
(3) الانكماش والتمدد

تغيير الأبعاد بمقياس بشكل رأسي

إذا كان a عدد حقيقي موجب، و $g(x) = a \cdot f(x)$، فإن

- الرسم البياني للدالة $f(x)$ سيتوسع رأسياً **إذا كان** $a > 1$.
- سينضغط الرسم البياني للدالة $f(x)$ رأسيًا **إذا كان**، $0 < a < 1$.

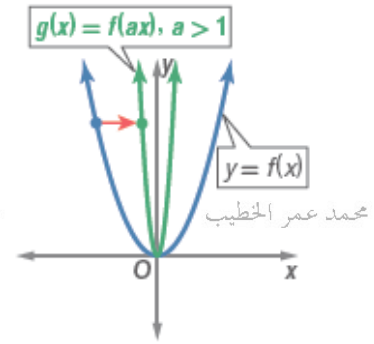


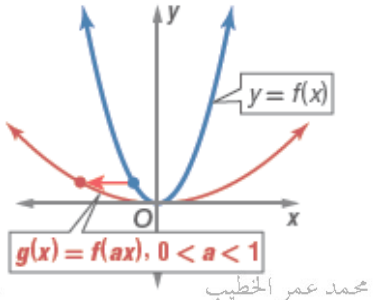


تغيير الأبعاد بمقياس بشكل الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، و $g(x) = f(ax)$، فإن

- الرسم البياني للدالة $f(x)$ سينضغط أفقيًا، **إذا كان** $a > 1$.
- سيتوسع الرسم البياني أفقياً للدالة $f(x)$ **إذا كان**، $0 < a < 1$.

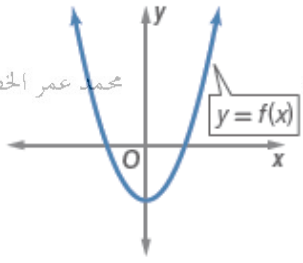


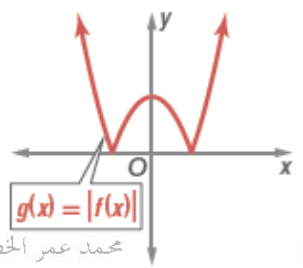


(4) التحويلات بالقيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

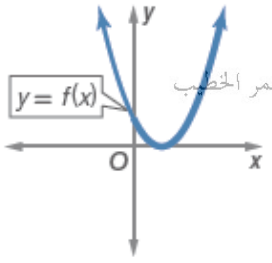
يعكس هذا التحويل كل جزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ تحت المحور الأفقي x فيصبح فوق المحور الأفقي x.

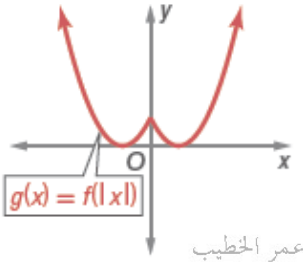




$g(x) = f(|x|)$

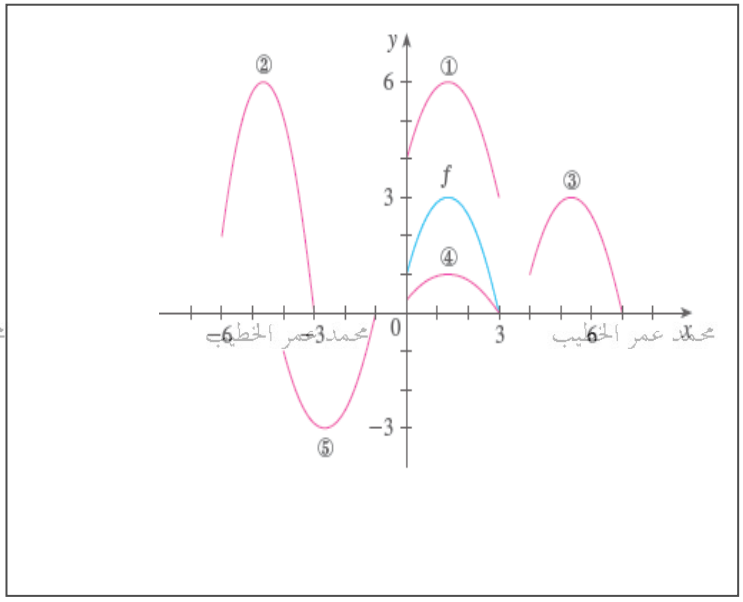
يستبدل هذا التحويل الجزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ لليسار من المحور الرأسي y بانعكاس الجزء الموجود لليمين من المحور الرأسي y.



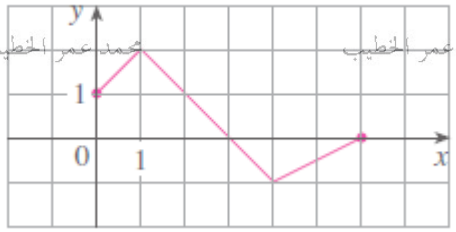


(1) اعتمد على الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ وبعض التحويلات الهندسية للدالة $f(x)$ في اكمال الجدول التالي

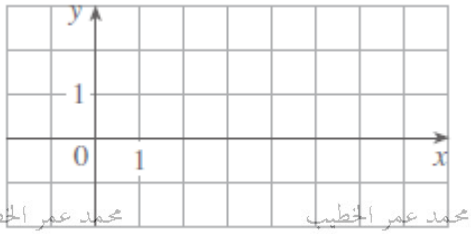
رقم الدالة	الدالة
	$f(x-4)$
	$f(x)+3$
	$-f(x+4)$
	$2f(x+6)$
	$\frac{1}{3}f(x)$



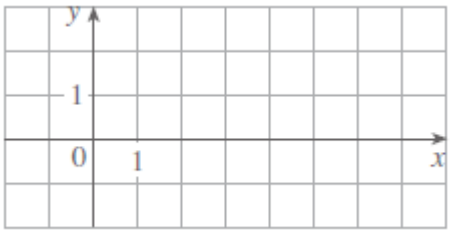
(2) اعتمد على الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في رسم الدالة $g(x)$ في الحالات التالية:



(1) $g(x)=\frac{3}{2}f(x-1)$



(2) $g(x)=f(2x)+1$



(1) اعتمد على الدالة $f(x)=x^2$ في وصف كل من الدوال التالية:

(a) $g(x)=x^2+2$

$(b)\ g(x)=(x-2)^2-1$

$(c)\ g(x)=2x^2+3$

$(d)\ g(x)=-x^2+1$

$(e)\ g(x)=|x^2-1|$

(2) اعتمد على الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ في وصف كل من الدوال التالية:

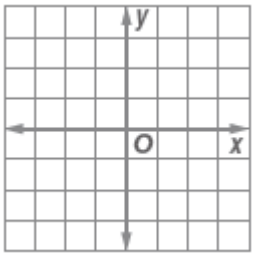
$(a)\ h(x)=\frac{1}{x-1}+3$

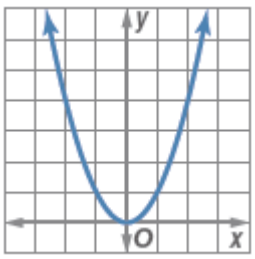
$(b)\ h(x)=\frac{-3}{x}$

$(c)\ h(x)=\frac{1}{|x|}+2$

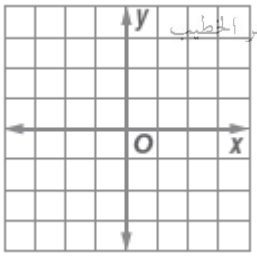
اعتمد على الرسم المجاور للدالة $f(x)$ في رسم بيان الدالة $g(x)$ في كل مما يلي:

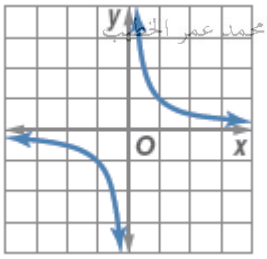
(1) $g(x)=x^2-4$



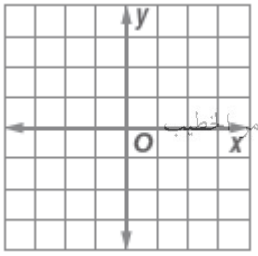


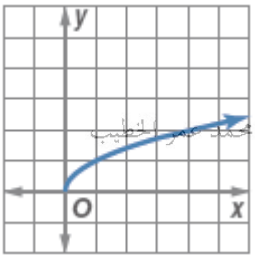
(2) $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$



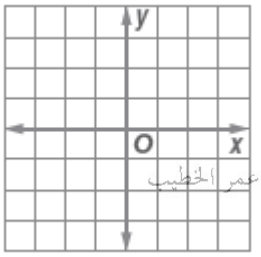


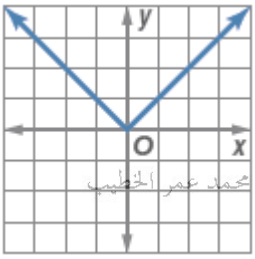
(3) $g(x)=\sqrt{x+2}-1$



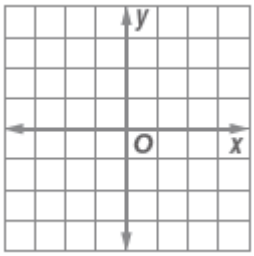


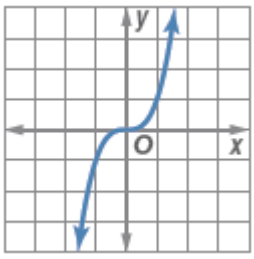
(4) $g(x)=|x+1|-2$





(5) $g(x)=\dfrac{1}{2}x^3$





محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اذا كان كل من f و g دالة فان كل من $f+g$, $f-g$, $f\times g$, $\frac{f}{g}$ هي دالة معرفة كما يلي:

$$(1)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(2)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(3)\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$(4)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$$

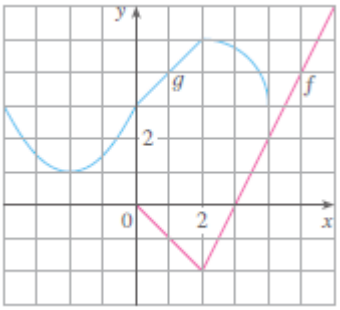
حيث

(1) مجال كل من $f+g$, $f-g$, $f\times g$ هو المجال المشترك(التقاطع) لمجال كل من f و g

(2) مجال $\frac{f}{g}$ هو المجال المشترك(التقاطع) لمجال كل من f و g ما عدى اصفار الدالة g

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f و g في الاجابة عن الاسئلة التالية:



$$(1)\ (f+g)(2)$$

$$(2)\ (f-g)(0)$$

$$(3)\ (f\times g)(3)=$$

$$(4)\ (\frac{f}{g})(1)=$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) مجال الدالة: $(f+g)(x)$

(6) مجال الدالة: $(\frac{g}{f})(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اذا كانت $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x+5$, $h(x)=\sqrt{x-2}$

فاوجد كل من الدوال التالية ثم اوجد مجالها.

(1) $(f+g)(x)$

(2) $(g\times h)(x)$

(3) $(\frac{g}{f})(x)$

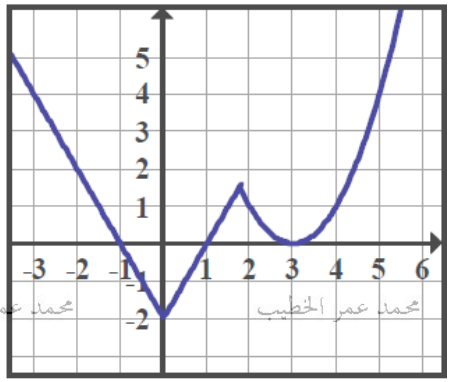
(4) $(\frac{f}{h})(x)$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مستعيناً بالرسم المجاور للدالة $f(x)$

اوجد مجال الدالة $h(x)$ في الحالات التالية:



(1) $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $h(x)=\dfrac{x+1}{f(x)}$

(3) $h(x)=|f(x)|$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $h(x)=f(x)+4$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $h(x)=\sqrt{f(x)}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اذا كان كل من f و g دالة فان ناتج تركيب الدالتين $f \circ g$ هي دالة معرفة كما يلي:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ملاحظة:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

حيث

مجال $f \circ g$ هو كل قيم x في مجال الدالة g بحيث ان $g(x)$ تنتمي الى مجال f

او

نجد المجال المشترك(التقاطع) للدالتين g و $f \circ g$

اعتمد على الجدول المجاور في الاجابة عن الاسئلة التالية

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

(1) $(f \circ g)(1)$

(2) $(f \circ f)(4)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $(f \circ g)(0)$

(4) $(g \circ f)(5)$

(5) $(g \circ f)(6)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اذا كانت $f(x)=x^2-3x-2$, $g(x)=e^x$, $h(x)=\sqrt{x-2}$

فاوجد كل من الدوال التالية.

(1) $(f\circ g)(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $(g\circ h)(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $(f\circ h)(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $(g\circ g)(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\tan^{-1}x$ فاوجد كل من الدوال التالية ثم اوجد مجالها

(a) $(f\circ g)(x)$

(b) $(g\circ f)(x)$

(2) اذا كانت $f(x)=x^2-5$, $g(x)=\sin x^2$ فاوجد الدالة $(f\circ g)(x)$

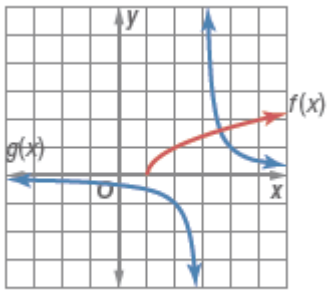
(3) اوجد كل من الدوال f و g و h التي تحقق:

$(a)\ f\circ(g\circ h)=\left[\tan^{-1}(3x+1)\right]^2$

$(b)\ f\circ(g\circ h)=\dfrac{3}{\sqrt{\sin x+2}}$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان كل من الدوال f و g في ايجاد مجال كل من الدوال التالية:

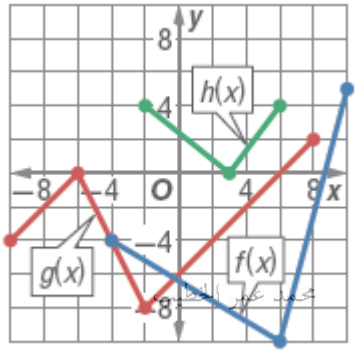
$(a)\ (f \circ g)(x)$



$(b)\ (g \circ f)(x)$

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان كل من الدوال f و g و h في ايجاد مجال كل من الدوال التالية:

$(a)\ (f \circ g)(x)$



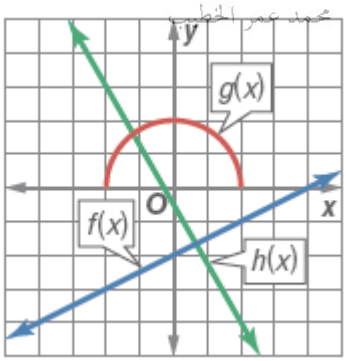
$(b)\ (g \circ f)(x)$

$(c)\ (h \circ g)(x)$

$(d)\ (h \circ f)(x)$

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان كل من الدوال f و g و h في ايجاد كل من الدوال التالية:

$(a)\ (f + h)(x)$



$(b)\ (f + g)(x)$

اجابات التمارين العامة موجودة في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة الأولى

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\ln 4 + 2\ln 3 - 2\ln 6 =$

(a) $\ln 2$ (b) 2 (c) 1 (d) 0

(2) $\cos^{-1}(\sin(-\frac{\pi}{4})) =$

(a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $-\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

(3) $\sin 2(\cos^{-1}\frac{4}{5}) =$

(a) $-\frac{24}{25}$ (b) $\frac{24}{25}$ (c) $-\frac{25}{24}$ (d) $\frac{24}{5}$

(4) حل المبيانة $x^2 + 2x - 15 < 0$ هو

(a) $(-5,3)$ (b) $(-3,5)$ (c) $[-3,5]$ (d) $(-\infty,-3),(5,\infty)$

(5) حل المبيانة $\frac{\sqrt{9-x}}{\log x} \geq 0$ هو

(a) $[1,9]$ (b) $(-\infty,9]$ (c) $(1,9]$ (d) $(0,9]$

محمد عمر الخطيب

(6) مجال الدالة $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ متصلة هي

(a) $[0,2]$ (b) $(0,2]$ (c) $[0,2)$ (d) $(0,2)$

(7) مجال الدالة $g(x)=\log(\frac{x^2-1}{x+1})$ متصلة هي

(a) $[-1,1]$ (b) $(-\infty,-1]$ (c) $[1,\infty)$ (d) $(1,\infty)$

(8) مجال الدالة $g(x)=\frac{2x-6}{x^2-9}$ هو

(a) $R/\{-3\}$ (b) $R/\{-3,3\}$ (c) R (d) $\{-3,3\}$

(9) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(1,3)$ ويعامد المستقيم $x+2y+1=0$ هو

(a) $y=2x+1$ (b) $y=2x-1$ (c) $y=-2x-1$ (d) $y=-2x+1$

(10) اذا كان $g(x)=x^3+4x-1$ فأن $g^{-1}(-1)=$

(a) $x=0$ (b) $x=2$ (c) $x=-2$ (d) $x=-1$

(11) اي من الدوال التالية له دالة عكسية

(a) $f(x)=5$ (b) $h(x)=x^2+1$ (c) $k(x)=x^{-1}$ (d) $r(x)=x^{-2}$

(12) دورة الدالة $f(x)=3\sin(\pi-2x)$ هي

(a) $-\pi$ (b) π (c) 2π (d) 3

(13) اذا كان للدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x}-1$ فان $f(g(x))$ الدالة

(a) $h(x)=x$ (b) $k(x)=-x$ (c) $r(x)=1$ (d) $m(x)=-1$

(14) سعة الدالة $f(x)=-2\cos(3x+\pi)$ هي

(a) -2 (b) 2 (c) 3 (d) π

(15) مجال الدالة $y=3\sin^{-1}(x-1)$ هو

(a) $[-1,1]$ (b) $[-2,0]$ (c) $[-\pi,\pi]$ (d) $[0,2]$

(16) اي من الدوال التالية معرفة عند $x=0$

(a) $f(x)=\frac{x^2+x}{x}$ (b) $g(x)=\frac{x+1}{x^2+x}$ (c) $h(x)=e^{1/x}$ (d) $k(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le 0\end{cases}$

(17) اي من الدوال التالية هي الدالة العكسية للدالة $y=\log(x-1)$

(a) $f(x)=2^x+1$ (b) $g(x)=10^x+1$ (c) $h(x)=e^x+1$ (d) $k(x)=\log(x+1)$

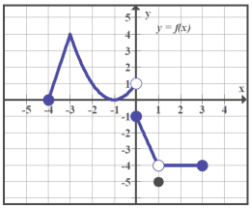
(18) حل المعادلة $\tan x = 1$ هو

(a) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4} \pm n\pi$ (c) $\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$ (d) $\frac{\pi}{4} \pm n\frac{\pi}{2}$

(19) ان قيمة $\tan(\sin^{-1} x)$ يساوي

(a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(20) في الشكل المجاور ان قيمة $f(0) =$



(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) غير موجودة

(21) ان قيمة $\cosh 0$ يساوي

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(22) ان قاعدة الدالة $f(x) = x^3$ بعد ازاحة 4 وحدات للاعلى و 3 وحدات لليسار هي

(a) $f(x) = 3x^3 + 4$ (b) $f(x) = (x-3)^3 + 4$ (c) $f(x) = (x-3)^3 - 4$ (d) $f(x) = (x+3)^3 + 4$

(23) حل المعادلة $e^{2\ln x} = 4$ هي

(a) $2, -2$ (b) 2 (c) -2 (d) 1

(24) حل المعادلة $|6-2x| \le 2$ هي

(a) $[-2,4]$ (b) $(-\infty,2],[4,\infty)$ (c) $[2,4]$ (d) $(2,4)$

(25) مدى الدالة $g(x)=3\cos x+1$ هي

(a) $[-2,4]$ (b) $[-3,3]$ (c) $[-1,1]$ (d) $[-4,2]$

(26) مدى الدالة $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$ هي

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $[0,1)$ (c) $[0,\infty)$ (d) $[0,1]$

(27) ان قاعدة الدالة $y=f(x)$ بعد ازاحة 3 وحدات للاعلى وتمدد رأسي وحدتين هي

(a) $y=2f(x+3)$ (b) $y=2f(x)+3$ (c) $y=0.5f(x)+3$ (d) $y=f(2x+3)$

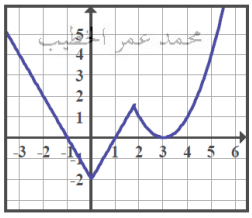
(28) ان قاعدة الدالة الأسية التي تمر بالنقطتين $(0,5),(1,2)$ هي

(a) $y=5e^{x\ln(\frac{5}{2})}$ (b) $y=5e^{x\ln(\frac{2}{5})}$ (c) $y=2e^{x\ln(\frac{5}{2})}$ (d) $y=e^{x\ln(\frac{5}{2})}$

(29) ان الدالة $\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)$ لها دالة عكسية على الفترة

(a) $[-1,1]$ (b) $[0,\pi]$ (c) $[-\pi,\pi]$ (d) $(-\infty,\infty)$

(30) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ فأن مجال الدالة $h(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ هو



(a) $R/\{0\}$ (b) $R/\{0,1,-1,3\}$ (c) $R/\{1,-1,3\}$ (d) $(-\infty,\infty)$

(31) اي من العلاقات التالية ليست دالة

(a) $y = 3x^3 + 4$ (b) $y = x^2 + 1$ (c) $x = y^2$ (d) $x = y^{-1}$

(32) مدى الدالة $g(x) = \cosh$ هي

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $[1, \infty)$ (c) $[0, \infty)$ (d) $[0,1]$

(33) اذا كانت $g(x) = -\sqrt{x-2}$ فأن مدى الدالة $g^{-1}(x)$ هو

(a) $[2, \infty)$ (b) $(-\infty, 2]$ (c) $[0, \infty)$ (d) $(-\infty, 0]$

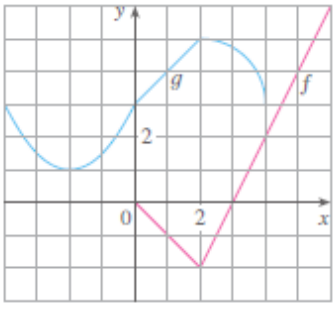
(34) $\sin(\sec^{-1}\frac{5}{4}) =$

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{3}{4}$

(35) $\sinh x + \cosh x =$

(a) 0 (b) 1 (c) e^x (d) $2e^x$

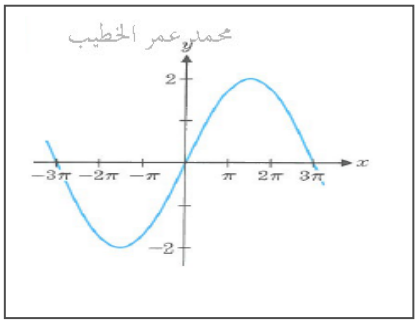
(36) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x), g(x)$ فأن مجال الدالة



$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ هو

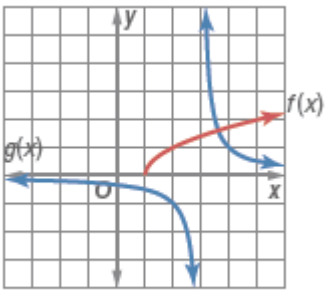
(a) $[0,4]$ (b) $[-4,6]$ (c) $(0,3) \cup (3,4]$ (d) $(-\infty, \infty)$

(37) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ فأن قاعدة الدالة هي



(a) $f(x)=2\sin\frac{1}{3}x$ (b) $f(x)=2\sin\frac{\pi}{3}x$ (c) $f(x)=2\cos\frac{1}{3}x$ (d) $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$

(38) الشكل المجاور الذي يمثل بيان كل من f و g فان مجال الدالة $g(f(x))$ هو



(a) $R/\{0\}$ (b) $[1,\infty)$ (c) $(3,4]$ (d) $(-\infty,\infty)$

(39) ان قيمة $log_2 7\times log_5 2\times log_7 5$ هو

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

(40) حل المعادلة $e^{2x}+e^{x}-12=0$ هي

(a) 3 (b) 4 (c) $\ln 3$ (d) $\ln 4$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الاجابات

1	D	11	C	21	B	31	C
2	C	12	B	22	D	32	B
3	B	13	A	23	B	33	D
4	A	14	B	24	A	34	B
5	C	15	D	25	A	35	C
6	D	16	D	26	B	36	C
7	D	17	B	27	B	37	A
8	B	18	B	28	B	38	C
9	A	19	A	29	B	39	B
10	A	20	C	30	C	40	C

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إنتهت الوحدة الأولى بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الصف الثاني عشر متقدم

2019/2018

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

2-1 المماسات وطول المنحنى

2-2 مفهوم النهاية

2-3 حساب النهايات

2-4 الأتصال ونتائجه

2-5 النهايات التي تتضمن اللانهاية: خطوط التقارب

2-6 التعريف الرسمي للنهاية

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اولاً: تقدير ميل المنحنى عند نقطة

(1) قدر منحنى الدالة : $y = x^2$ عند النقطة $(2,4)$

(2) قدر منحنى الدالة : $y = \cos x$ عند $x = 0$

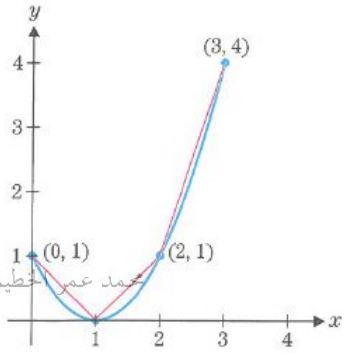
(3) قدر منحنى الدالة : $y = e^x$ عند $x = 0$

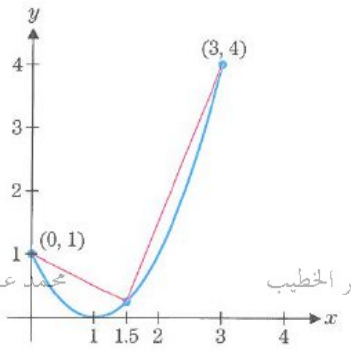
محمد عمر الخطيب

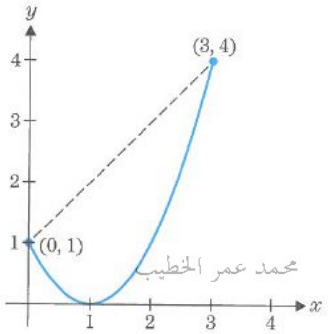
محمد عمر الخطيب

ثانياً: تقدير طول منحنى دالة على فترة

(1) قدر منحنى الدالة : $y=(x-1)^2$ على الفترة $[0\ ,\ 3]$ باستخدام 3 قطع مستقيمة



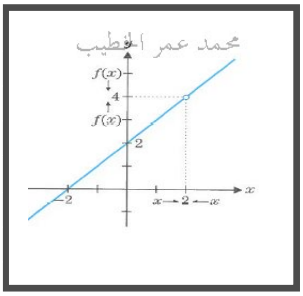




(2) قدر منحنى الدالة : $y=\sin x$ على الفترة $[0\ ,\ \pi]$ باستخدام 4 قطع مستقيمة

نهاية دالة عند نقطة:

تعلمنا بالصفوف السابقة كيف نجد صورة اي عدد ضمن مجال الدالة بالتعويض المباشر، ولكن اذا ارادنا توقع صورة الدالة لعدد خارج مجال الدالة، فاننا سنقوم بدراسة هذه الدالة بجاور هذا العدد وليس عنده، والفكرة الرياضية التي تساعدنا في دراسة سلوك الدالة بجوار عدد معين تسمى النهاية (lim).



فمثلا اذا كانت الدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ فان الدالة غير معرفة عند $x=2$

اي لا يوجد صورة للعدد 2 (نقطة خارج المجال) ولكن يمكن توقع من الرسم البياني للدالة انه كلما :

اقتربنا للعدد 2 من جهة اليسار او من جهة اليمين فان الدالة تقترب من العدد 4

فنقول ان نهاية الدالة $f(x)$ تقتترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد 2

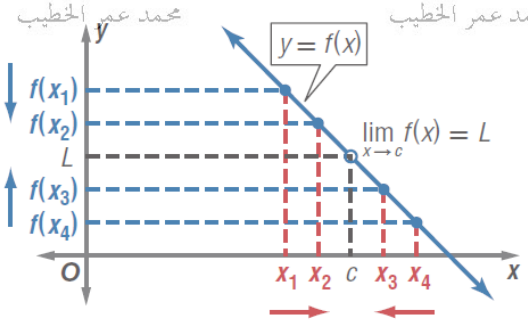
ونعبر عن ذلك باستخدام الرموز الرياضية

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

وبشكل عام

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول: إن $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



محمد عمر الخطيب

يمكن ايجاد نهاية دالة عند نقطة من خلال:

(1) الجدول (رقمياً)

(2) الرسم البياني (بيانياً)

(3) الحل الجبري (جبرياً)

اولاً: نهاية دالة عند نقطة من الجدول:

(1) اوجد: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ من خلال الجدول

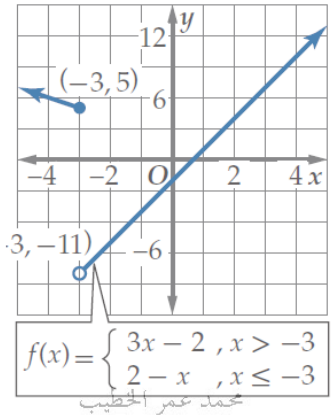
x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

اي ان $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=8$

(2) اذا كان : $f(x)=\begin{cases}3x-2 & ,x>-3\\ 2-x & ,x\le -3\end{cases}$ فاوجد $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ من خلال الجدول

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7



$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=5$

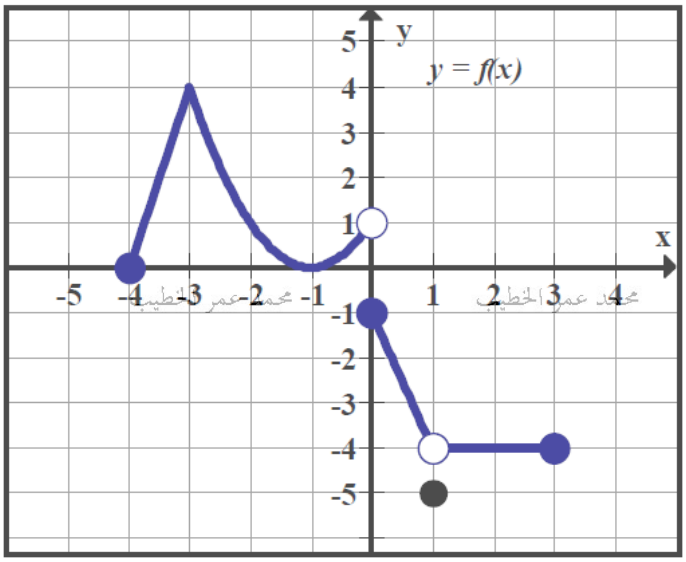
$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-11$

اي ان $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ غير موجودة لان النهاية من اليمن لا تساوي النهاية من اليسار

محمد عمر الخطيب

ثانياً: نهاية دالة عند نقطة بيانياً:

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة: $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) =$

(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

(3) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

(4) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

(5) $f(1) =$

(6) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

(7) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

(8) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

(9) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

(10) $\lim_{x\to -3} f(x) =$

(11) $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x) =$

تكون النهاية موجودة

اذا كانت

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

اي ان

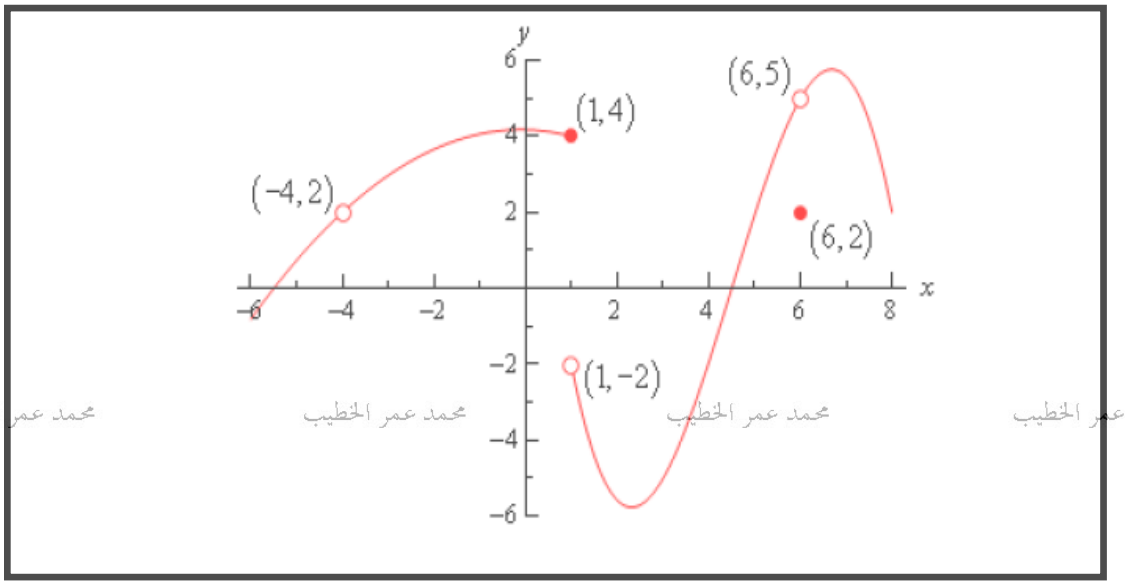
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L, \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

اما اذا كانت

النهاية من اليمين ≠ النهاية اليسار

فان النهاية غير موجودة

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



محمد عمر الخطيب

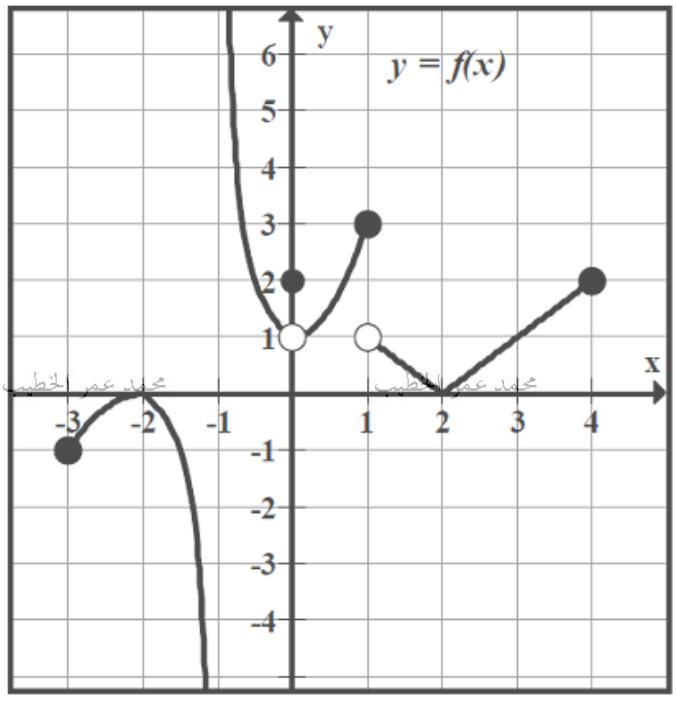
(a) $f(-4)$ (b) $\lim_{x\to -4^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to -4} f(x)$

(e) $f(1)$ (f) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (g) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(i) $f(6)$ (j) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (k) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$ (l) $\lim_{x\to 6} f(x)$

محمد عمر الخطيب

(2) استخدم الرسم البياني المجاور للدالة $f(x)$ حيث $-3 \le x \le 4$



$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x\to 1} f(x) =$ .....

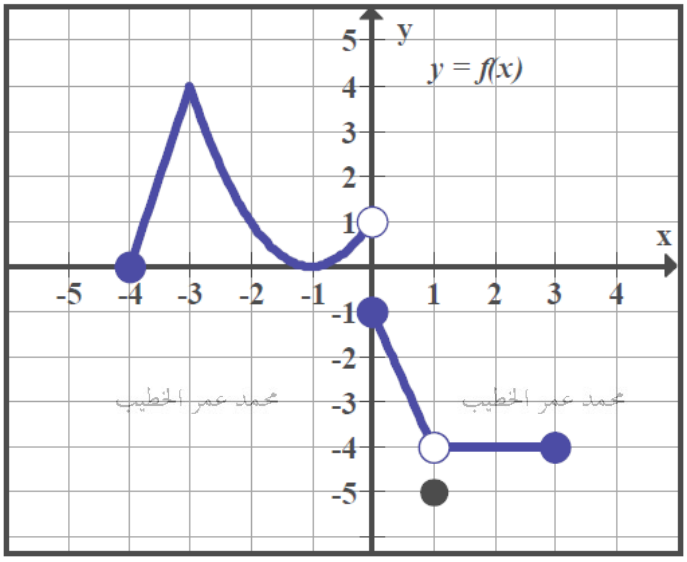
$f(1) =$ .....

$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$ .....

محمد عمر الخطيب

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $\lim_{x\to -1} f(x) =$

(2) $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$

(3) $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$

(4) $\lim_{x\to 3} f(x) =$

(5) $\lim_{x\to -4^+} f(x) =$

(6) $\lim_{x\to -4^-} f(x) =$

(7) $\lim_{x\to -4} f(x) =$

(8) $\lim_{x\to 0} |f(x)| =$

(9) $\lim_{x\to 1} |f(x)| =$

(10) $\lim_{x\to -1} \sqrt{f(x)} =$

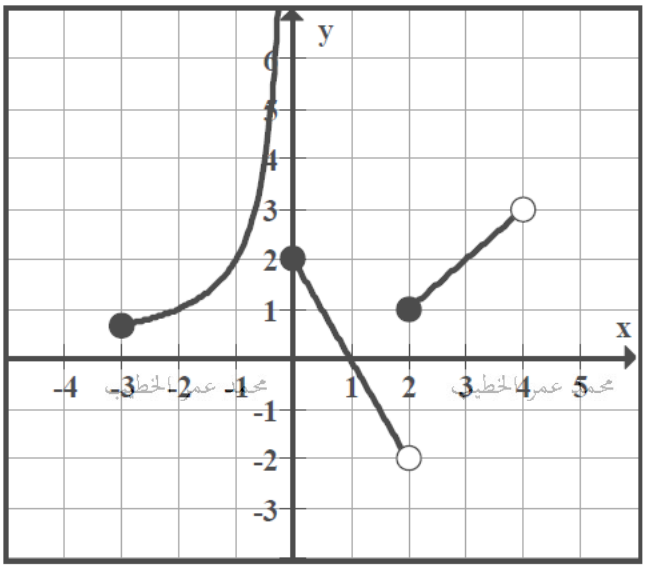
(11) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة هي.....

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x\to c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي.....

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x\to c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي.....

(14) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x\to c} f(x) = -4$ هي.....

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) =$

(2) $f(2) =$

(3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

(4) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

(5) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

(6) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

(7) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

(8) $\lim_{x \to -3} f(x) =$

(9) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

(10) $\lim_{x \to 2} |f(x)| =$

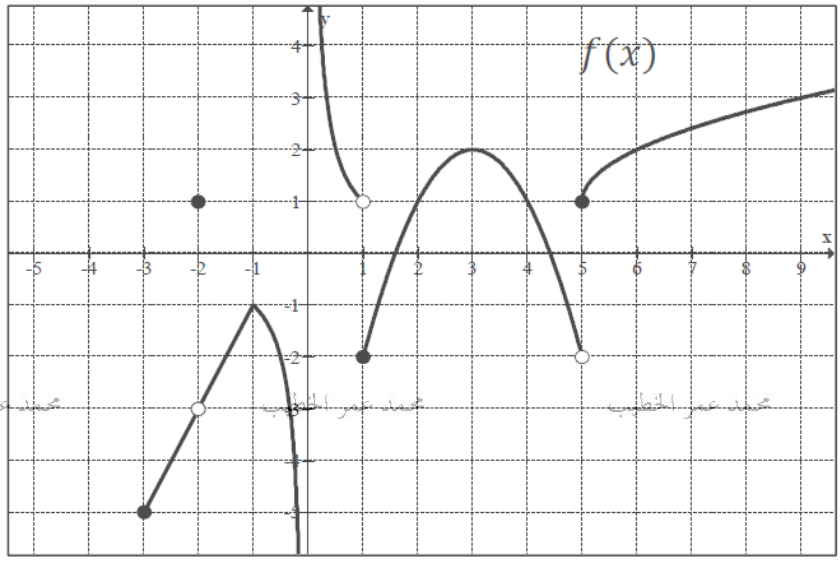
(11) $\lim_{x \to 1} \sqrt{f(x)} =$

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة هي.....

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي.....

(14) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي.....

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الداله $f(x)$ حيث $x \geq -3$ لإكمال الجدول التالي:

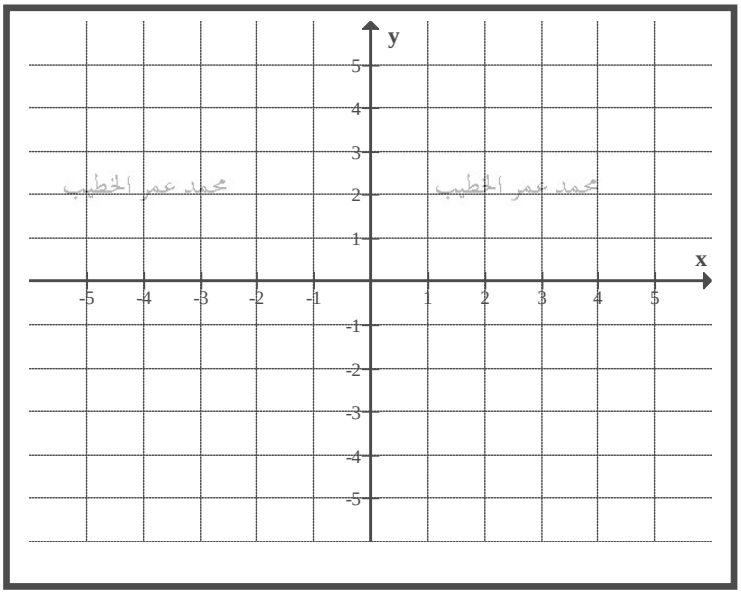


$\lim_{x \to x_1} f(x)$	قيمة x_1
.....	$x_1 = -2$
.....	$x_1 = -1$
.....	$x_1 = 3$
.....	$x_1 = 5$

(2) إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , x \geq 2 \\ 2 - 2x & , x < 2 \end{cases}$$

(أ) ارسم الشكل البياني للدالة (f)



(ب) اوجد:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

(ج) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ **موجودة ؟ اذكر السبب.**

محمد عمر الخطيب

خواص النهايات:

ملاحظة: يمكن استخدام خواص النهايات اذا كانت النهايات موجودة اما اذا كانت غير موجودة نبحث عن طرق اخرى

1) نهاية الدالة الثابتة حيث K ثابت $\lim_{x\to c}(k) = k$

2) نهاية الدالة المحايدة $f(x)=x$ $\lim_{x\to c}(x) = c$

3) إذا كانت $k , c , M . L$ أعداد حقيقية ، $\lim_{x\to c} f(x)=L$, $\lim_{x\to c} g(x)=M$ فـــإن :

(1) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$

(2) قاعدة الفرق : $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$

(3) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c}(f(x).g(x))=L.M$

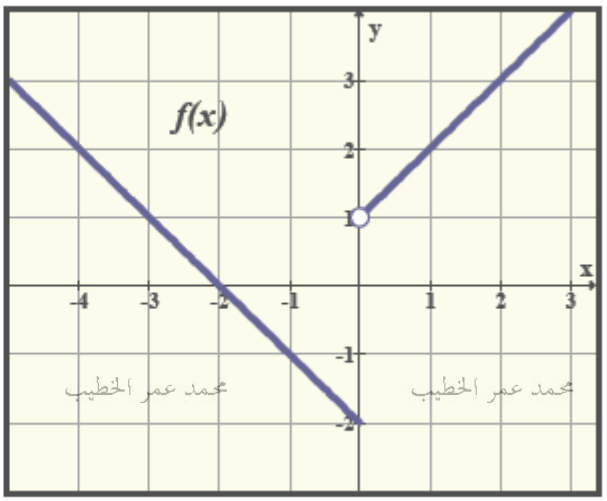
(4) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c}(k.f(x))=k.L$

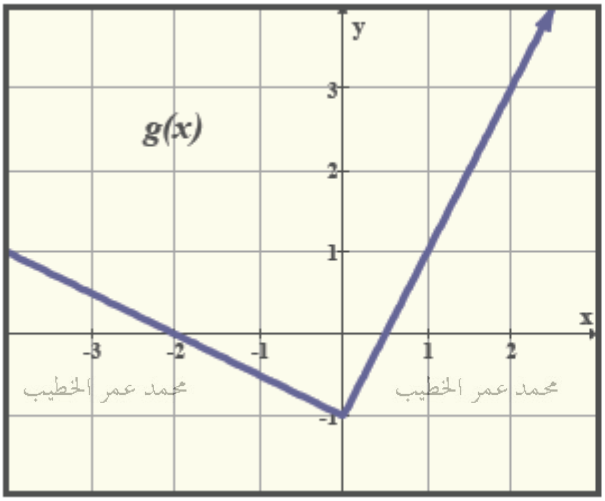
(5) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}, M\neq 0$

(6) قاعدة القوة : $\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$

محمد عمر الخطيب

استخدم الرسم البياني المجاور في الإجابة عن الأسئلة التالية:





(1) $\lim_{x\to 2}\,(f(x)+g(x))=$

(2) $\lim_{x\to 1}\sqrt{g(x)}=$

(3) $\lim_{x\to -1}\sqrt{f(x)}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\,(g(x)+f(x))=$

(5) $\lim_{x\to -2}\dfrac{3\,f(x)-3}{x^2}$

(6) $\lim_{x\to -1}\sqrt{f\,(x)+1}$

محمد عمر الخطيب

إذا علمت أن: $\lim_{x\to5} f(x) = -3$, $\lim_{x\to5} g(x) = 4$ **فاوجد:**

(1) $\lim_{x\to5}(4f(x)+7)$

(2) $\lim_{x\to5}(f(x)\times g(x)-x)$

(3) $\lim_{x\to5}(f^2(x)-\sqrt{g(x)})$

(4) $\lim_{x\to5}\dfrac{f(x)+2x}{g(x)-1}$

(5) $\lim_{x\to5}\dfrac{(f(x)+11)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{g(x)}}$

(1) إذا علمت ان $\lim_{x\to 1} f(x) = 8$ $\lim_{x\to 1}\big(g(x)-3\big)=0$

أوجـــــــــــد :

(1) $\lim_{x\to 1}\big(2f(x)\big)$

(2) $\lim_{x\to 1}\big(3g(x)-\sqrt[3]{f(x)}\big)$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{g(x)}$

(2) إذا كان $\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=1$

أوجد مستخدماً خواص النهايات $\lim_{x\to 5} f(x)$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ثالثاً: نهاية دالة عند نقطة جبرياً:

طرق حساب النهايات جبرياً

(1) التعويض المباشر:

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+3}{x-2}=$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3}{x+1}=$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{9x^2-4}=$

(4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x}{x^2+9}=$

(5) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2+5}$

(6) $\lim\limits_{x\to -5}\sqrt[3]{3x-12}$

(7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$

(8) $\lim\limits_{x\to -1} e^x$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{-1}x^2$

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} ln\ sinx+x$

(11) $\lim\limits_{x\to 3}\log_2(x+5)$

(2) التحليل إلى العوامل:

1. العامل المشترك
2. الفرق بين مربعين
3. الحدود الثلاثية
4. الفرق بين مكعبين
5. مجموع مكعبين

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=$

(2) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-9x}{18-2x}=$

(3) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=$

(4) $\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-75}{10-2x}=$

(5) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{3x-x^2}=$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{(x-4)^2-16}{x}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=$

(2) $\lim_{x\to 3}\dfrac{6-2x}{x^2-2x-3}=$

(3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}=$

(4) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^3-4x}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^3-8}{h}=$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^2-5x+6}=$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{e^x-1}=$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)^{10}}{(x^2-2x+1)^5}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}=$

(2) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2}{18-2x}=$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=$

(4) $\lim_{x\to 5}\frac{-3}{10-2x}=$

(5) $\lim_{x\to 3}\frac{x}{3x-x^2}=$

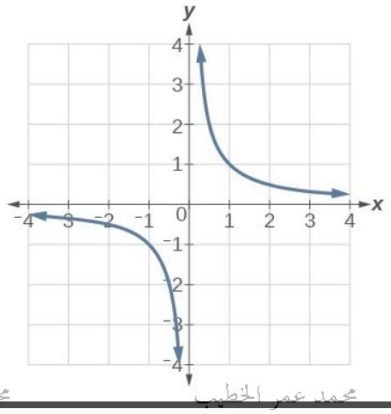
(6) $\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{(4-x)^3}=$

ملاحظة:

(1) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

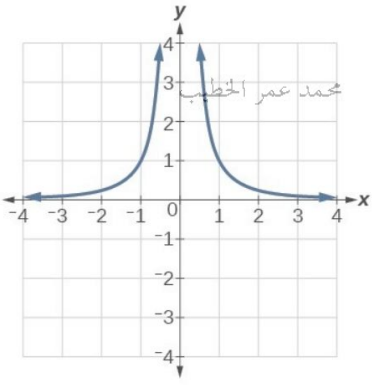
(2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=not\ exist$



ملاحظة:

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

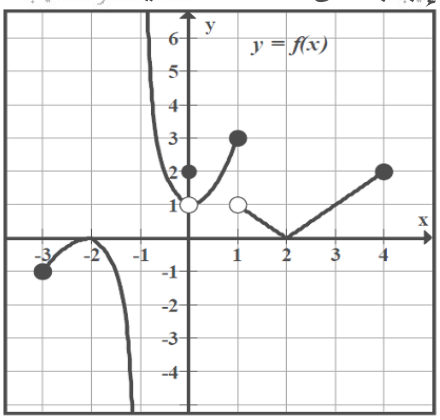


(1) إذا كانت: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+a\,x+b}{x-2}=7$ فاوجد قيمة a,b .

(2) إذا كانت : $\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)^{2n}}{(x^2-2x+1)^n}=81$ فاوجد قيمة n

محمد عمر الخطيب

(1) استخدم الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

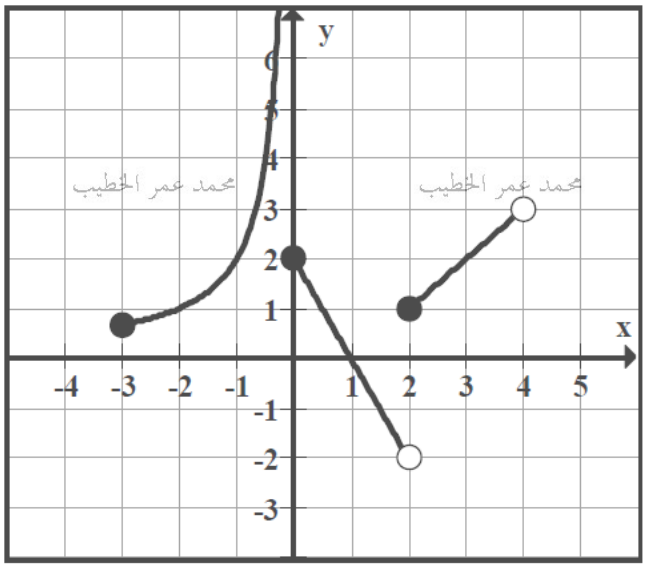


هل يمكن استخدام التعويض لإيجـــــــاد : $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)}{x-2}$

ابحث عن طريقة لتوضيح كيفية إيجاد هذه النهاية . ثم أوجـــــــد قيمتهـــــا .

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) استخدم الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{f(x)-1} =$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-4}{f(x)+2} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) التبسيط (توحيد المقامات):

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim_{x\to 3}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{x}{x^2-9}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4})=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}(\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5-x})=$

(2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5})(\frac{1}{x-1})=$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{4x^2-4}=$

(1) في إحدى الدراسات على عيون القطط وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقطط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينيه وفق العلاقة:

$$f(x)=\frac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$$

اوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تسع شدة الإضاءة إلى الصفر(تتعدم الرؤية).

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد قيمة الثوابت a,b : التي تجعل $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{a}{x+a}-b}{2x}=-1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) الدوال المتفرعة (الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة وتشمل دالة المطلق والصحيح):

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة:

(1) إذا كانت :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,x<-2 \\ 2x+3 & ,x\geq -2 \end{cases}$$

فأوجد:

$(a)\quad f(-2)$

$(b)\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$(c)\quad \lim\limits_{x\to -2} f(x)$

(2) إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases} -x & ,x>-1 \\ 2x+3 & ,x<-1 \end{cases}$$

فأوجد:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(3) إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x\neq 2 \\ 5 & ,x=2 \end{cases}$$

فأوجد:

$(a)\ f(2)=$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}\log x+4 & ,x\geq 1\\ 5x-1 & ,x<1\end{cases}$ ، $g(x)=\dfrac{x-1}{1-x}$

فأوجد:

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))=$$

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}x^2+\cos x & ,x\geq 0\\ e^x-1 & ,x<0\end{cases}$ ، $g(x)=x^2-x$

وكان $h(x)=f(x)\times g(x)$

اشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين في إيجاد قيمة $\lim_{x\to 0}h(x)$

ابحث عن طريقة تحليلية لايجاد قيمة هذه النهاية

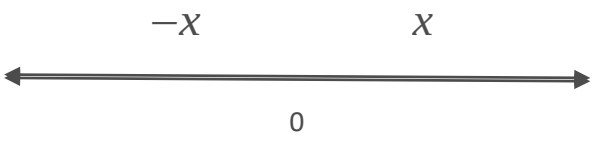
دالة المطلق :

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

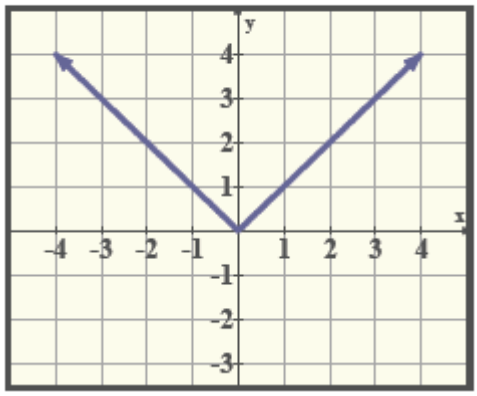
$$|x| = a \leftrightarrow x = a \quad or \quad x = -a$$

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$



دالة المطلق : $y = |x|$



اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1)\lim_{x\to -1}\frac{x+|x|-2}{x^2+1}=$$

$$(2)\lim_{x\to 3}\frac{|x-5|-2}{x^2-9}=$$

$$(3)\lim_{x\to 3}\frac{x|1-x|-6}{x^2-3x}=$$

$$\boxed{|a-x|=|x-a|}$$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد قيمة كل من النهايات الآتية: (إن أمكن).

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$(2)\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4|}{|x-2|}$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+|x|}{x}-\frac{1-x}{|x|}\right)$$

$$(5)\lim_{x\to 0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}$$

(2) اوجد قيمة b اذا كانت $\lim_{x\to b}\frac{x^2-b}{x-b}=\lim_{x\to -2}(|x|+8)$

محمد عمر الخطيب

دالة الصحيح:

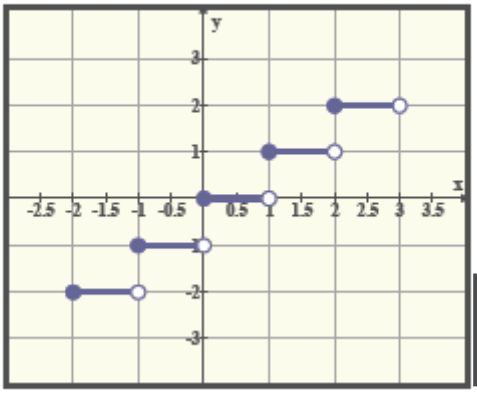
$[5]=5$

$[5.7]=5$

$[-5.99]=-6$

ملاحظة: اذا كانت n عدد صحيح فان $[x+n]=[x]+n$

دالة الصحيح : $y=[x]$



محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :(إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 2.9}[x]$

(2) $\lim[3x+1]=$ $x\to\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]$

(4) $\lim\limits_{x\to -3}[x+0.5]$

(5) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{|x|}{[x]}$

(6) $\lim\limits_{x\to -2.1}|[x]|$

(7) $\lim\limits_{x\to -3.8}x[x]=$

(8) $\lim\limits_{x\to 2^-}3[x]-|x|=$

(9) $\lim\limits_{x\to 2^-}|x-2|+[x]+x=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-[x+1]}{|x-3|}=$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+[x+1]}{x-2}=$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x([x]+3)}{x^2+x}=$

(4) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-2}{|x-2|+[x-2]}=$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}([x]+5)^{[x]}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت) .

(1) $\lim_{x\to 2}[x]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}[3x+1]=$

(3) $\lim_{x\to -3}[x+2]=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\lim_{x\to 0} x[x+2]=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\lim_{x\to 1}(x+2)^{[x]}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ايجاد الثوابت من خلال وجود نهاية دالة عند نقطة

(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ,x\le -1 \\ 2x-b & ,x>-1 \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ فأوجد كلا من الثابتين a,b

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} \log_2 x & ,0<x\le 8 \\ 3^{a-3} & ,x>8 \end{cases}$ فأوجد قيمة a حيث $\lim\limits_{x\to 8} g(x)$ موجودة

(3) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} a^2x+4 & ,x\ge 1 \\ 4a & ,x<1 \end{cases}$ فأوجد قيم a حيث $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ موجودة

.

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} a\,x^2-3 & ,x<2 \\ 3x-b & ,\quad x>2 \end{cases}$

وكانت: $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=6$ ، $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=4$ **فأوجد كلا من الثابتين** a,b **؟ ثم اوجد** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

(2) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} x+a & ,x\geq b \\ 5x-7a & ,x<b \end{cases}$

وكانت: $\lim\limits_{x\to b} g(x)=3$ **فأوجد كلا من الثابتين** a,b **؟**

(3) لتكن: $f(x)=\begin{cases} 2ax-5 & ,x<2 \\ \dfrac{x-3}{|x-3|} & ,x>2 \end{cases}$ **فما قيمة** a **التي تجعل** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ **موجودة.**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) الجذر والمرافق:

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ملاحظة:

$\sqrt{x^2}=|x|$

(4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{1-x^2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{25-x^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x-[x]}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(8) $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-[x]}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

تذكر أن :

$$(\sqrt{x})^2 = x \ , \ \sqrt{x^2} \neq x \qquad \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \ , \ \sqrt{x^2} = |x|$$

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

مساعدة:اكمل المربع

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x^2+2x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

المرافق:

ملاحظة: مرافق المقدار الجبري $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ **هو** $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ **ويكون حاصل ضربهم هو** $x-a$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=$

(2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{2x-1}-1}=$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}=$

(4) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x\sqrt{x}-27}{x-9}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}=$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=$

(1) لتكن $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة فاوجد قيمة a.

(2) لتكن $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a\,x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}=4$ فاوجد قيمة a.

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(6) نهاية الدوال الدائرية :

تذكر أن:

Quotient Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Reciprocal Identities

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Pythagorean Identities

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Sum Identities
Addition Formulas

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

Difference Identities
Subtraction Formulas

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

Double Angle Formulas

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Co-function Identities

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

Even-Odd Identities

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Half-Angle Formulas

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Sum-to-Product Formulas

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Product-to-Sum Formulas

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

نظرية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a\,x)}{b\,x}=\frac{\sin(a\,x)}{\tan b\,x}=\frac{\tan(a\,x)}{\sin b\,x}=\frac{a}{b}\quad b\neq 0$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x+\cos x)=$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x)=$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=$

(5) $\lim_{x\to 0^-}\frac{6\sin 3x}{5|x|}=$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{2x\cos 3x}=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{2x^2}=$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin^2 3x}{3x|x|}=$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x[x]}=$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\sin^2 3x}=$

موقع التعليم فى الإمارات
https://emarat-education.blogspot.com

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{3x^2\sin x}=$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x}{\tan 2x}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2\sin 2x}=$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}=$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\tan 5x}=$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x\sin^2 8x}}{x}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x+\tan 3x}{x}=$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ \cos x}{x^{2}+x}=$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{(x^{2}+x)\csc 2x}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\tan x}{4x-\sin x}=$

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2}3x+x^{2}\tan 2x}{x^{2}+4x\tan x}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan 2x \csc \pi x) =$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}[x](x\cot 2x) =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}-2[x-2]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{3}{x}\right)\sin x =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0}(\csc \pi x \ \sin 5x + \tan x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim_{x\to 0}(3x^2 \csc 3x \cot 2x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - x^3 \cot x}{x \cot x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{\sin 2x}-\sqrt{x}} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\sqrt{1+x}} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim_{x\to 0^-}(2x\sqrt{1+\cot^2 x})=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{2x-2}=$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}=$

(4) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=$

(5) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{3x}=$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{2x}=$

(1) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x+1|-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin kx}$ فاوجد قيمة k.

(2) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to k}4^x$ فاوجد قيمة k.

(3) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 3^-}a[x]$ فاوجد قيمة a.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(نظرية الشطيرة)

إذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل $x \neq c$ في فترة حول c

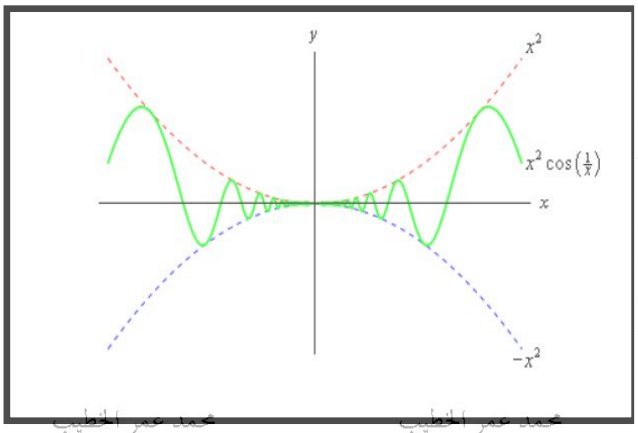
وكان $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$

فإن $\lim_{x \to c} f(x) = l$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام نظرية الشطيرة:

(1) $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} =$



محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim_{x \to 0}(5 + x^2 \cos\frac{1}{x^2}) =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $h(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ استخدم نظرية الشطيرة في إيجاد : $\lim_{x\to 0^+} h(x)$.

(2) استخدم نظرية الشطيرة في إيجاد $\lim_{x\to 0}(\cos^2 x + x^2 \sin\frac{1}{x})$

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **حيث :** $\dfrac{2\sin x - x}{x + \tan 2x} \le f(x) \le \dfrac{x^2 + x}{3x}$

(2) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **حيث :** $\dfrac{2x^{\,2} - x^{\,3}}{2} \le x^{\,2} f\,(x) \le \dfrac{x^{\,2} + \sin^2 x}{2 + 3x^{\,2}}$

محمد عمر الخطيب

(1) استخدام نظرية الشطيرة اوجد $\lim_{x\to 3} g(x)$ حيث $|g(x)+4| \le 2(3-x)^4$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اذا كانت : $|g(x)| \le M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim_{x\to 0} x^2\ g(x) = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الاتصال عند نقطة:

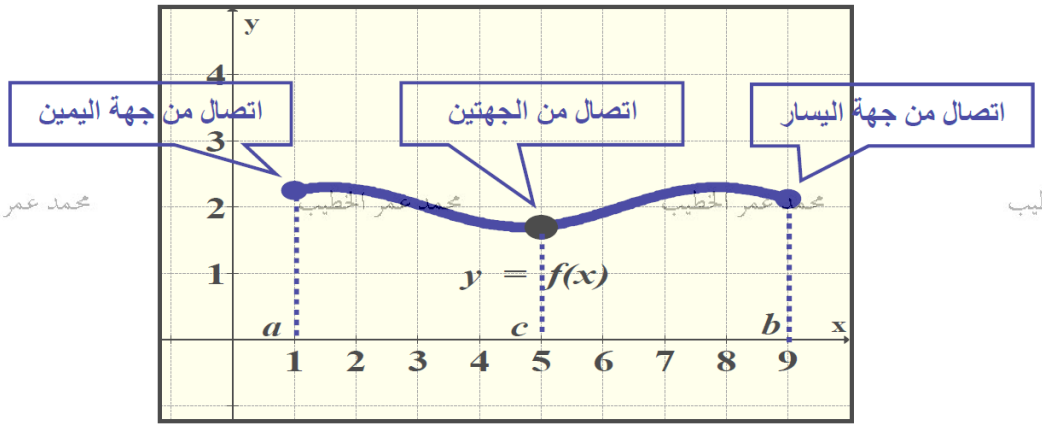
نقطة داخلية: تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها اذا كانت

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

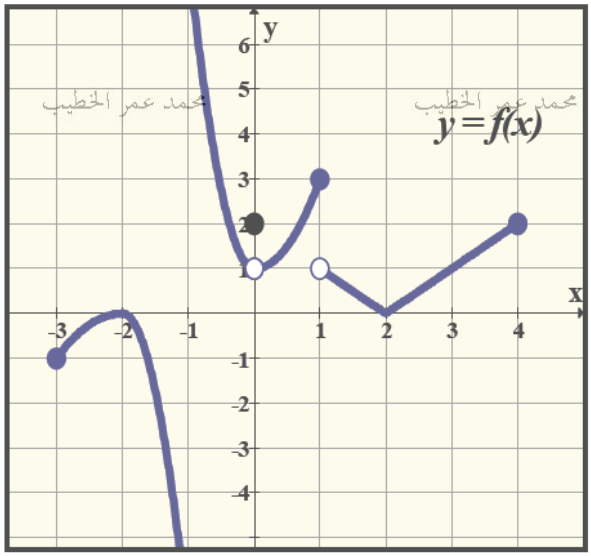
نقطة طرفية: تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية a لها نهاية من جهة اليمين

اونقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار اذا كان

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad , \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



أوجد النقاط التي عندها منحنى الدالة $f(x)$ متصل والنقاط الأخرى التي عندها منحنى الدالة $f(x)$ غير متصل



إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب:

(1) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<1 \\ 2-x & ,\ x>1 \end{cases}$$

تذكر

شروط الاتصال عند $x=c$

(1) الدالة معرفة عند $x=c$

(2) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

(2) $$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

(3) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1 \\ 3 & ,x=1 \end{cases}$$

(4) $$f(x)=[x]$$

استنتج جميع النقاط التي عندها الدالة غير متصلة.

محمد عمر الخطيب

إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب.

(1) $$f(x)=\begin{cases}5x & ,x<1\\ 5 & ,x=1\\ 6-x & ,\ x>1\end{cases}$$

(2) $$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

(3) $$f(x)=|x-1|$$

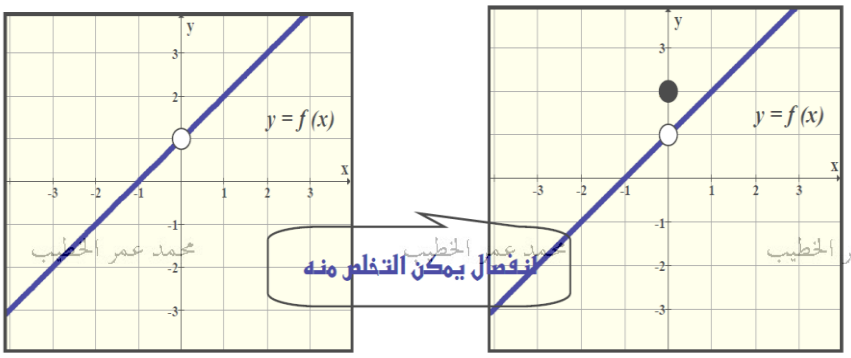
(4) $$f(x)=\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أنواع نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

(اولاً) يمكن التخلص منه (الفجوة)

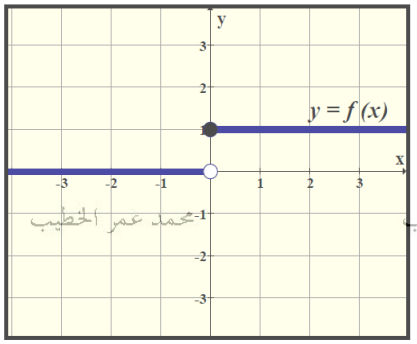


النهاية موجودة

ولكن لا تساوي الصورة

(ثانياً) لا يمكن التخلص منه وهو ثلاث انواع

(1) القفزة

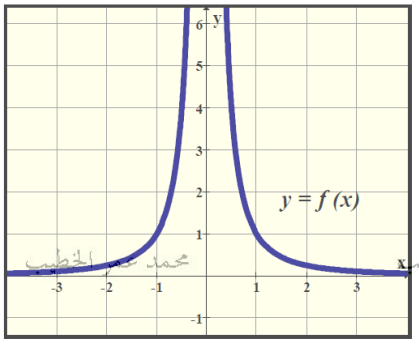


النهاية غير موجودة

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

وكلاهم عدد حقيقي

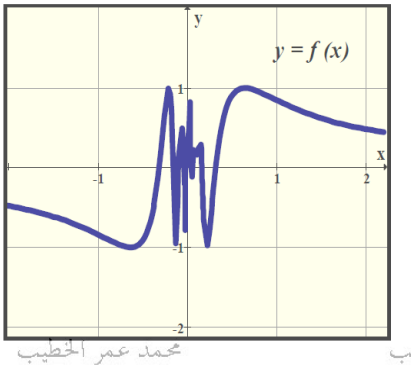
(2) لانهائي



النهاية غير موجودة

احدى النهايتين تساوي ملانهاية او كلاهم

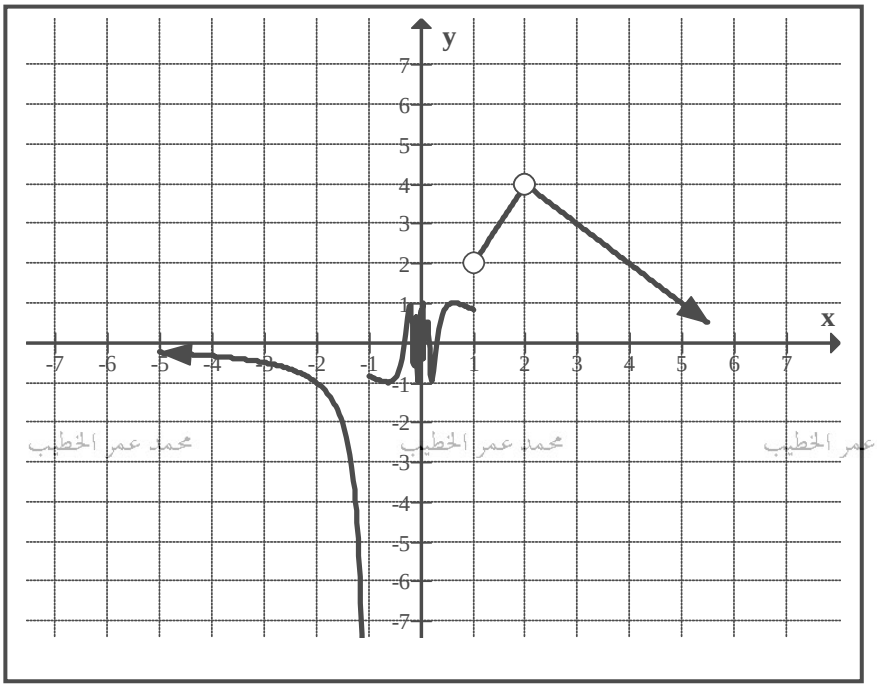
(3) تذبذبي



النهاية غير موجودة

الدالة تتذبذب عند نقطة الانفصال

(1) في الشكل المجاور اوجد نقاط انفصال الدالة . ثم حدد نوع كل منها:



(2) استعن بالجدول التالي:

نقطة انفصال الدالة	نوع الانفصال	السبب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ملاحظات مهمة

اولاً: الدوال المتصلة على مجالها

(1) كثيرات الحدود

(2) الدوال المثلثية

(3) الدوال الاسية

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) الدوال الجذرية

(5) الدوال اللوغارتمية

(6) الدوال النسبية

(7) دوال المطلق

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ثانياً: الدوال المتصلة على جزء من مجالها

(1) دالة الصحيح

ثالثاً: العمليات على الدوال المتصلة

(1) حاصل جمع وطرح وضرب وتركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) حاصل قسمة دالتين متصلتين هي دالة متصلة بشرط ان المقام لا يساوي صفر

(3) حاصل تركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

رابعاً: اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فان

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أكمل الجدول التالي:

الدالـــــــــــــة	نوع الانفصال عند $x = o$	سبب الانفصال
$f(x) = sin\ \frac{1}{x^2}$	.....	.....
$g(x) = \frac{1}{x}$	.....	.....
$L(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \geq 0 \\ x + cos\, x, & x > 0 \end{cases}$	.....	.....
$N(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$	.....	.....

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدالة	نقاط الانفصال	نوع الانفصال
(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$		
(2) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$		
(3) $f(x)=\begin{cases}3-x & ,x>1\\ x^2 & ,x\le 1\end{cases}$		
(4) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$		
(5) $f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$		
(6) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-2x-15}$		
(7) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$		

اوجد نقاط الانفصال للدالة . ثم حدد نوع كل منها :

(1) $f(x)=\begin{cases}[x] & ,-1\le x<0\\ x|x| & ,0\le x\le 1\end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3}$

(3) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

اوجد نقاط الانفصال للدالة . ثم حدد نوع كل منها :

(1) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & ,x<1\\ x^2-2x+5 & ,x\geq 1\end{cases}$$

(2) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & ,x<3\\ x^2 & ,x\geq 3\end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الاتصال عند فترة:

تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت

(1) متصلة على كل نقطة في الفترة المفتوحة (a,b)

(2) متصلة عند النقطة a من جهة اليمين اي ان $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

(3) متصلة عند النقطة b من جهة اليسار اي ان $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

وتكون الدالة $y=f(x)$ متصلة على مجموعة الاعداد الحقيقة اذا كانت متصلة عند كل نقطة

أي من الدوال الآتية متصلة على الفترة $[0,1]$ ... فسر ذلك حيث:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(2) $g(x)=[x]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$

(4) $f(x)=\begin{cases}5 & ,0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 12x-1 & ,\dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $f(x)=\sqrt{1-x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أي من الدوال الآتية متصلة على مجالها فسر ذلك حيث:

(1) $f(x)=x^2+5x-1 \quad ,x\in[1,2]$

(2) $f(x)=\sqrt{x-1} \quad ,x\in[1,\infty)$

(3) $f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2 \\ 2 & ,x=2 \end{cases}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

(2) $f(x) = \tan x$

(3) $f(x) = ln(x-2)$

(4) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

(5) $f(x) = \sin^{-1} x$

(6) $f(x) = \begin{cases} [x] & ,1 \le x < 3 \\ x^2 - 6 & ,x \ge 3 \end{cases}$

محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

(3) $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{2}}+e^x$

(4) $f(x)=ln(x^2-4)$

(5) $f(x)=ln(x^2-x-6)$

(6) $f(x)=\dfrac{ln(x-2)}{\sqrt{5-x}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^{x}-1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $f(x)=\sqrt{x^{2}-4x+4}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $f(x)=\sin^{-1}(x-1)$

(4) $f(x)=\tan^{-1}(2x+1)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الدالة الموسعة (إزالة الفجوة):

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على مجال معين بأستثناء عدد محدود من النقاط التي عندها اتفصال يمكن التخلص منه فانه يمكن تعريف دالة جديدة متصلة على مجالها تسمى الدالة الموسعة وتعتمد على الدالة $f(x)$.

(1) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ حتى تصبح متصلة عند $x=3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\tan x}{x}$ حتى تصبح متصلة عند $x=0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اعد تعريف الدلة الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة لجميع قيم x.

(اكتب الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$, $x\neq 8$

(2) $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2-1}$, $x\neq \pm 1$

محمد عمر الخطيب

اعد تعريف كل من الدوال الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة لجميع قيم x.

(اوجد الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3} \qquad x\neq 3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $f(x)=\dfrac{x+3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}} \qquad x\neq -3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}$ حتى تصبح متصلة عند $x=0$

(2) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$ حتى تصبح متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية

(3) لتكن: $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}$

(أ) اوجد نقاط انفصال الدالة وحدد نوعها:

(ب) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)$ حتى تصبح متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية:

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ايجاد الثوابت من خلال تعريف الاتصال

(1) اوجد قيمة الثابت a لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2 & , \quad x<2 \\ a & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) لتكن :

$$G(x)=\begin{cases} ax+6 & , \quad x>3 \\ bx^2-a & , \quad x<3 \\ 9 & , \quad x=3 \end{cases}$$

دالة متصلة عند $x=3$ أوجد قيم الثوابت a , b .

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) أوجد كلاً من a , b لتكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} & ,x>0\\ b & ,x=0\\ \dfrac{|x|}{x} & ,x<0\end{cases}$$

(2) ما قيـــم الثوابت a , b التي تجعل الدالـــــة :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+a}{x^2+1} & ,\ x<0\\ a+b & ,\ x=0\\ \sqrt{x+4}+b & ,\ x>0\end{cases}$$

متصـــــــلة عند $x=0$

(1) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+5 & ,x>-1 \\ 7 & ,x=-1 \\ x-b & ,x<-1 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & ,x\le 1 \\ x^2-2x & ,1<x<3 \\ b-a & ,x\ge 3 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+1 & ,x\le 0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2} & ,0<x<2 \\ x^2-x+b & ,x\ge 2 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & ,x<0\\ a & ,x=0\\ \text{b}\cos x+e^{x} & ,x>0\end{cases}$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

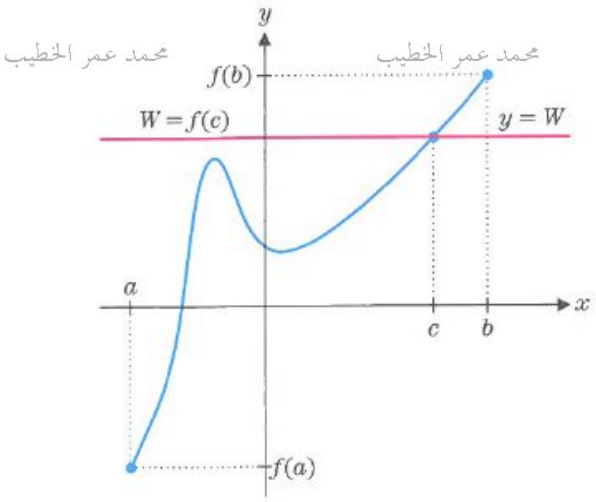
$$f(x)=\begin{cases}a(\tan^{-1}x+2) & ,x<0\\ 2b^{bx}+1 & ,\ 0\le x\le 3\\ \ln(x-2)+x^{2} & ,x>3\end{cases}$$

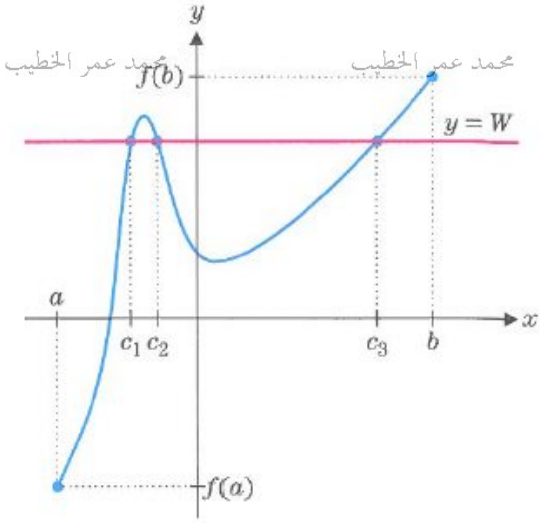
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نظرية القيمة الوسيطية

اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة على الفترة المغلقة** $[a,b]$ **, وكانت** W **اي عدد يقع بين** $f(a)$ **و** $f(b)$ **فانه يوجد عدد على الاقل مثل** c **ينتمي الى الفترة** $[a,b]$ **بحيث** $f(c)=W$





اذا كانت $f(x)=x^3-x+3$ **دالة متصلة على الفترة** $[1,2]$ **فاوجد التقريب الثاني للعدد** c **والذي تنتمي الى الفترة ويحقق** $f(c)=4$

محمد عمر الخطيب

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$, وكانت $f(a)$ و $f(b)$ لهما اشارتان مختلفتان فانه يوجد عدد على الاقل مثل c ينتمي الى الفترة $[a,b]$ بحيث $f(c)=0$

(1) اذا كانت $f(x)=x^2-7$ دالة متصلة على الفترة $[2,3]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

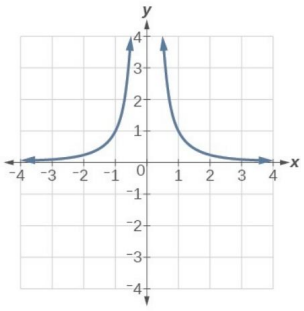
(2) اذا كانت $f(x)=\cos x-x$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاوجد التقريب الثاني لجذر الدالة.

(3) اذا كانت $f(x)=e^x+x$ دالة متصلة على الفترة $[-1,0]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

اولاً: نهاية الدالة عند ما تساوي ملانهاية

ملاحظة:

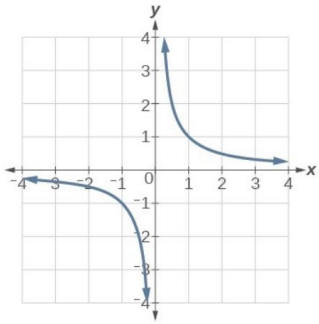
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$



ملاحظة:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$2)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

غير موجودة



اوجد قيمة كل مما ياتي

$$(1)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{(x-2)}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x-2)}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}$$

$$(5)\ \lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{x^2-1}$$

الكميات المعينة

$$\frac{a}{0}=\pm\infty \quad , \quad \frac{a}{\pm\infty}=0 \quad if \quad a\neq 0$$
$$\infty \pm a=\infty \quad , \quad \infty+\infty=\infty$$
$$a\times\infty=\pm\infty$$
$$a^0=1 \quad , \quad \infty^\infty=\infty$$
$$a^\infty=\infty \ \ if\ \ a>1 \quad , a^\infty=0 \ \ if\ \ 0<a<1$$

الكميات غير المعينة

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$
$$\infty-\infty$$
$$0\times\infty$$
$$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to -1}\dfrac{1-x}{(x^2-1)^2}$

(2) $\lim_{x\to -1^-}(x^2-2x-3)^{-2/3}$

(3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{e^x}{x^2-4}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

(6) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(7) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x$

(8) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(9) $\lim_{x\to 0}\cot x$

(10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sec^2 x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{\tan x}$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{-\tan x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

(4) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x\sin x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ثانيا: نهاية الدالة عند الملانهاية (خطوط التقارب الافقية)

محمد عمر الخطيب

اذا كانت الدالة : $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ او $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ حيث عدد حقيق L فان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي معادلتة $y=L$

ملاحظات مهمة :

(1) اذا كانت k عدد حقيق لا يساوي صفر فان : $\lim_{x\to\pm\infty} k=k$

(2) اذا كانت n عدد صحيح موجب فان : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n}=0$ حيث k عدد حقيقي لا يساوي صفر

(3) اذا كانت n عدد صحيح موجب زوجي فان :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ,a>0\\ -\infty & ,a<0\end{cases}$$

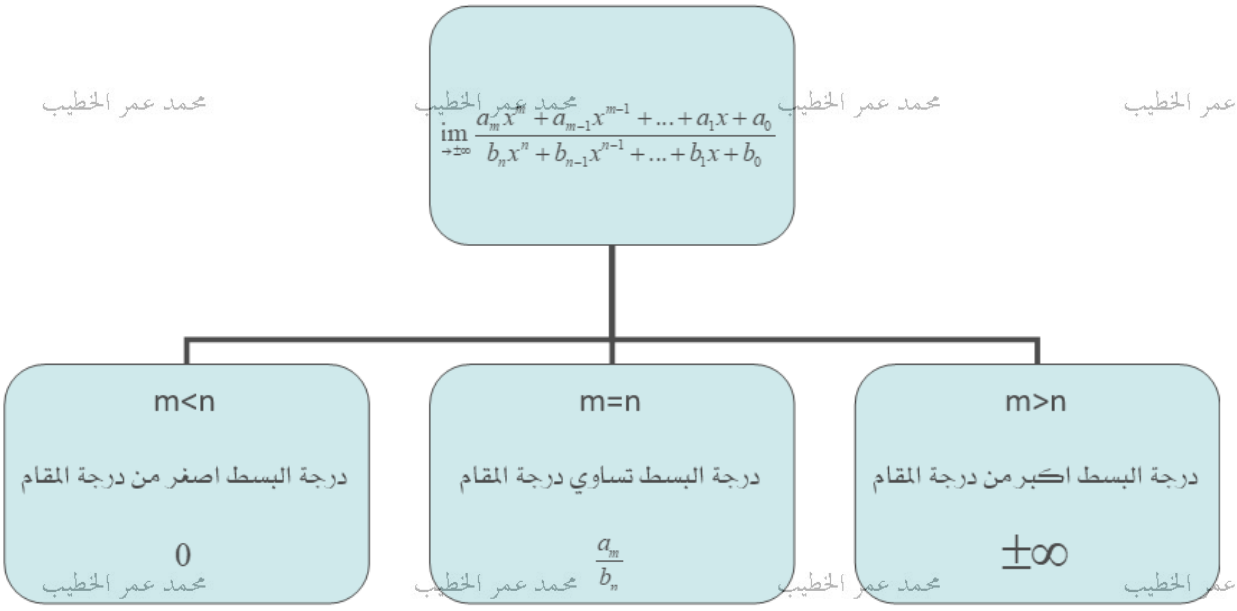
(4) اذا كانت n عدد صحيح موجب فردي فان :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ,a>0\\ -\infty & ,a<0\end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty & ,a>0\\ \infty & ,a<0\end{cases}$$

(5) اذا كانت $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود فان :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

(6) نهاية الدالة النسبية تكون حسب القاعدة التالية او (نقسم كل من البسط والمقام على اعلى درجة في المقام)



محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-5x+3$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^7-5x^4+8$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4-5x^5+7$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x+x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} (0.8)^x$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x=\begin{cases}\infty & ,b>1\\ 0 & ,0<b<1\end{cases}$$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5-\dfrac{2}{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\dfrac{3}{x}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2}$

(11) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)^{-2/3}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3+4x-5}{x^4-1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-5x^2}{10x^2-5x+1}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4+x^5}{x^4+1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{2x}$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x}{2x^2+\cos x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$

(6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2+4}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(7) $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x^2+1}{x-5})$

(8) $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x+1}{x^2-5})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\infty} \ln(e\,x-2)-\ln(x+4)$

(2) $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1}x)$

(3) $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

(4) $\lim_{x\to-\infty} e^{-1/(x^2+1)}$

(5) $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+1)/(x^2+1)}$

(6) $\lim_{x\to-\infty} e^{\cos(1/x)}$

(7) $\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}(3x-1)$

(8) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

(9) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad a\neq 0$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{80x^{-0.3}+60}{2x^{-0.3}+5}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{300}{9(0.8)^x+1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+1}-2x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية والمائلة (ان وجدت)

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+1$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-6}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية والمائلة (ان وجدت)

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-2}{x+1}$

(2) $f(x)=3\tan^{-1}x-2$

(3) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=\frac{2}{x-a}-b$ خط تقارب رأسي معادلته : $x=1$ وخط تقارب افقي معادلته $y=-3$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اذا كانت للدالة $f(x)=\frac{ax}{bx+1}$ خط تقارب رأسي معادلته : $x=-2$ وخط تقارب افقي معادلته $y=-2$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

تعريف النهاية

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على فترة مفتوحة تحتوي النفقطة a فان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ اذا تحقق الشرط التالي

لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ اذا كان $|x-a|<\delta$ فان $\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)-l\right|<\varepsilon$

(1) استخدام تعريف النهاية لايجاد قيمة δ التي تتوافق مع ε التي تجعل $\lim\limits_{x\to 2} 3x-1=5$

(2) استخدام تعريف النهاية لايجاد قيمة δ التي تتوافق مع ε التي تجعل $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

(3) استخدام تعريف النهاية لايجاد قيمة δ التي تتوافق مع $\varepsilon=0.01$ التي تجعل $\lim\limits_{x\to 1} 5x=5$

اجابات التمارين العامة موجودة في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة الثانية

محمد عمر الخطيب

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{e^{x}-1}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 1 (d) ∞

(2) $\lim_{x\to 0^{-}}\dfrac{3\sin x}{|x|}-[x]=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) -4

(3) $\lim_{x\to -\infty} x^{2}e^{x}=$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) ∞

(4) $\lim_{x\to \infty}\sin(\tan^{-1}2x)=$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^{2}}$

(a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{4}$

(6) $\lim_{x\to \infty}(1-\dfrac{2}{x})^{x}$

(a) 2 (b) -2 (c) e^{2} (d) e^{-2}

(7) $\lim_{x\to 0^{+}}\ln(x^{2}+x)-\ln x$

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

(8) $\lim_{x\to 3^+} e^{\ln\frac{x-3}{x^2-9}}$

(a) $\frac{-1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{-1}{9}$

(9) $\lim_{x\to 0} \sin^{-1}(\frac{x+1}{2})$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $-\frac{\pi}{6}$

(10) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) 0

(11) $\lim_{x\to -\infty} e^{-x^2}$

(a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) **0**

(12) $\lim_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)$

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) **0**

(13) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x-|x|}{|x|-2x}$

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) **0**

(14) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{3+\tan^{-1}\frac{1}{x}}$

(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$ (c) $\sqrt{3+\frac{\pi}{2}}$ (d) غير موجودة

(15) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2+10^{1/x}}$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{12}$ (c) $\dfrac{-1}{2}$ (d) غير موجودة

(16) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sin 2(x^2-9)}{x^2-9}$

(a) 6 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 8x^3}{4x^3}$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(18) $\lim_{x\to 0} 2x^2 \sin\dfrac{3}{x^3}$

(a) 0 (b) 3 (c) 2 (d) 6

(19) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin x+1}-1}{x}$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{4}$

(20) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x-3x^5}{2|x^5|+x}$

(a) $\dfrac{3}{2}$ (b) $-\dfrac{3}{2}$ (c) $\dfrac{5}{2}$ (d) $\dfrac{2}{3}$

(21) ان قيمة a التي تجعل النهاية $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+a\,x-6}{x-3}$ موجودة هي

(a) 1 (b) -1 (c) 5 (d) -5

(22) الفترة التي تكون عليها الدالة $g(x)=\cos^{-1}(x-1)$ متصلة هي

(a) $[0,\pi]$ (b) $[0,4]$ (c) $[0,2]$ (d) $[-1,1]$

(23) الفترة التي تكون عليها الدالة $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ متصلة هي

(a) $[0,2]$ (b) $(0,2]$ (c) $[0,2)$ (d) $(0,2)$

(24) للدالة $g(x)=\dfrac{2x-6}{x^2-9}$ انفصال لانهائي عند

(a) 3 (b) -3 (c) $3,-3$ (d) -9

(25) خط التقارب الافقي للدالة $g(x)=e^{1/x}-1$ هو

(a) $y=0$ (b) $y=-1$ (c) $y=1$ (d) $y=e$

(26) خط التقارب الرأسي للدالة $g(x)=\dfrac{3}{e^x-2}$ هو

(a) $x=0$ (b) $x=2$ (c) $x=3$ (d) $x=\ln 2$

(27) اذا كان للدالة $f(x)$ خط التقارب رأسي عند $x=3$ وخط مقارب افقي عند $y=2$ فان $\lim\limits_{x\to\infty} 2f(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(28) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x} & x>1\\ a & x\le 1\end{cases}$ متصلة عند $x=1$ هي

(a) -1 (b) 2 (c) -2 (d) 0

محمد عمر الخطيب

(29) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{4x} & x>0\\ a & x\le 0\end{cases}$ عند $x=0$ هي

(a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{4}$

(30) اذا كانت الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x)=x^2-5$ فان مجموعة قيم x التي تجعل الدالة $f(g(x))$ غير متصلة هي

(a) $-1,1$ (b) $\pm\sqrt{5}$ (c) $-1,\sqrt{5}$ (d) $-2,2$

(31) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على R حيث $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-x}{[x]-1}=3$ فان $f(3)$ تساوي

(a) 6 (b) 9 (c) 0 (d) 1

(32) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على R حيث $\lim\limits_{x\to 0} f(\dfrac{\sin x}{x})-1=3$ فان $f(1)$ تساوي

(a) 3 (b) 4 (c) 2 (d) 0

(33) اي من الدوال التالية له نقطة انفصال عند $x=0$ ويمكن التخلص منه

(a) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$ (b) $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ (c) $h(x)=e^{1/x}$ (d) $k(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le 0\end{cases}$

(34) اي من الدوال التالية متصلة على الفترة $[0,1]$

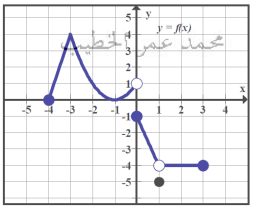
(a) $f(x)=[x+1]$ (b) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ (c) $h(x)=\sqrt{1-x}$ (d) $k(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<0.5\\ -1 & 0.5\le x\le 1\end{cases}$

(35) عند تقدير طول منحنى الدالة $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$ باستخدام قطعتين مستقيمتين فانه يكون

(a) 1.46 (b) 1.24 (c) 0.92 (d) 0.55

(36) عند استخدام تعريف النهاية في اثبات ان $\lim_{x\to 10} 2x = 20$ حيث قيمة $\varepsilon = 0.01$ فان δ تكون

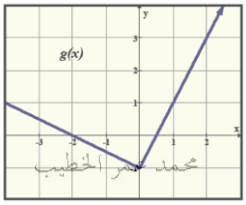
(a) 0.01 (b) 0.05 (c) 0.005 (d) 0.5



(37) في الشكل المجاور ان قيمة $\lim_{x\to 0} |f(x)|$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) غير موجودة

(38) في الشكل المجاور ان قيمة $\lim_{x\to -2} \sqrt{f(x)}$



(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) غير موجودة

(39) للدالة $f(x)=\dfrac{|2-x|}{2x-4}$ نقطة انفصال عند $x=2$ نوعها

(a) فجوة (b) قفزه (c) لانهائي (d) تذبذبي

(40) عدد خطوط التقارب الرأسية للدالة $f(x)=\tan x$ هي

(a) واحد (b) اثنان (c) لانهائي (d) لا يوجد

(41) التقريب الثاني لجذر الدالة $f(x)=x-\cos x$ على الفترة $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ هو

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi}{8}$ (c) $\dfrac{3\pi}{8}$ (d) $\dfrac{5\pi}{8}$

(42) اي من الدوال التالية تحقق نظرية القيمة الوسيطية ويكون لها جذر في الفترة $[0,1]$ هو

(a) $f(x)=x^2-1$ (b) $g(x)=x-\log x$ (c) $h(x)=x-e^x$ (d) $r(x)=x(x-2)^{-1}$

(43) اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[-1,3]$ حيث $f(-1)=-2, f(1)=-1, f(3)=4$ فأن التقريب الثاني لجذر الدالة في الفترة $[-1,3]$ هو

(a) -1.5 (b) 0.5 (c) 2 (d) 2.5

(44) ان قيمة a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة هي

(a) 1 (b) 8 (c) -8 (d) -10

(45) ان قيمة (قيم) a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ موجودة حيث $g(x)=\begin{cases} a^2x+4 & ,x\geq 1 \\ 4a & ,x<1 \end{cases}$ هي a

(a) $2,-2$ (b) -2 (c) 2 (d) $0,-4$

(46) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 3^-} a[x]$ فأ قيمة a تساوي

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) $-\dfrac{1}{3}$

(47) اذا كانت : $|g(x)|\leq M$ حيث M عدد حقيقي موجب فأن : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ g(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 1 (c) $-M$ (d) M

(48) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sin 3x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ متصلة عند $x=0$ هي

(a) $\dfrac{1}{3}$ (b) $-\dfrac{2}{3}$ (c) $\dfrac{3}{2}$ (d) $\dfrac{2}{3}$

(49) ان قيمة (قيم) a التي تجعل $\lim_{x\to\infty}\frac{|a|x^3-4}{2+3x^3}=1$ هي a

(a) 3 (b) 1 (c) $1,-1$ (d) $-3,3$

(50) عدد نقاط انفصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-x} & x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$ هي

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الاجابات

1	B	11	D	21	B	31	A	41	B
2	D	12	A	22	C	32	B	42	D
3	A	13	B	23	D	33	A	43	C
4	B	14	B	24	B	34	C	44	C
5	C	15	A	25	B	35	A	45	C
6	D	16	C	26	D	36	C	46	B
7	B	17	C	27	D	37	B	47	A
8	B	18	A	28	C	38	D	48	A
9	C	19	A	29	B	39	B	49	D
10	B	20	A	30	D	40	C	50	C

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إنتهت الوحدة الثانية بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

موقع التعليم فى الإمارات
https://emarat-education.blogspot.com

الصف الثاني عشر متقدم

2019/2018

الوحدة الثالثة

التفاضل

3-1 المماسات والسرعة المتجهة

3-2 الاشتقاق

3-3 حساب المشتقات : قاعدة القوى

3-4 قاعدة الضرب والقسمة

3-5 قاعدة السلسلة

3-6 مشتقات الدوال المثلثية

3-7 اشتقاق الدوال الأسية والدوال المثلثية اللوغاريتمية

3-8 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

3-9 دوال القطع الزائد

3-10 نظرية القيمة المتوسطة

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

تعريف المشتقة:

يسمى ميل المنحنى عند النقطة $x=a$ بمشتقة الدالة عند تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(a)$ حيث:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ويمكن استخدام التعريف البديل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ومشتقة الدالة f هي الدالة f' حيث:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة اذا كانت النهاية موجودة

يجب ان تكون الدالة متصلة عند النقطة التي نبحث في اشتقاقها

ملاحظة:

مشتقة دالة عند نقطة.

= معدل التغير للدالة عند تلك النقطة.

= ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.

= السرعة اللحظية المتجهة عند تلك النقطة.

رموز المشتقة $f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$

(1) إذا كانت: $f(x) = x^2 - 4x$ **فأوجد** $f'(3)$ **بإستخدام تعريف المشتقة او التعريف البديل.**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت: $f(x) = \sqrt{2x+1}$ **فأوجد** $f'(x)$ **بإستخدام تعريف المشتقة**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) إذا كانت: $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ **فأوجد** $f'(x)$ **بإستخدام تعريف المشتقة .**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ **فأوجد** $f'(0)$ **بإستخدام تعريف المشتقة .**

(2) إذا كانت: $f(x)=\cos x$ **فأوجد** $f'(0)$ **بإستخدام تعريف المشتقة .**

(3) إذا كان: $f'(3)=4$ **فأوجد** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f(3)-2f(3+h)}{h}$

(4) إذا كان: $f'(3)=4$ **فأوجد** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+3)-f(3)}{h[h-0.5]}$

(5) إذا كان: $f'(2)=3$ **فأوجد** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

محمد عمر الخطيب

المشتقة من جهة واحدة:

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

تكون الدالة: $y=f(x)$ **قابلة للاشتقاق عند النقطة** a **اذا كانت المشتقة على يمين النقطة** a **وهي** $f'(a^+)$ **والمشتقة على يسار النقطة** a **وهي** $f'(a^-)$ **متساويتان**

$$f'(a^+)=f'(a^-) \text{ اي ان :}$$

حيث:

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ 2x & x<1\end{cases}$$

فأوجد $f'(1)$ **بإستخدام تعريف المشتقة.**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=x|x|$ **فأوجد** $f'(0)$ **بإستخدام تعريف المشتقة.**

محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$ **فأوجد** $f'(0)$ **بإستخدام تعريف المشتقة.**

محمد عمر الخطيب

(3) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$ **فأثبت بإستخدام تعريف المشتقة أن** $f'(0)$ **غير موجودة.**

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت f **دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقة حيث:**

$$f(x+h)=x^2h+3xh^2+f(x),$$

و h **هو مقدار التغير في** x **فاوجد :** $f'(3)$.

(2) اذا كانت: $f(x+y)=f(x).f(y)$ **وكان** $f(0)=f'(0)=1$

فاثبت ان: $f(x)=f'(x)$ **لجميع قيم** x.

مساعدة: استخدم التعريف

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ومشتقاتها.

(اولاً) الرسم البياني للدالة $f'(x)$ من بيان الدالة $f(x)$.

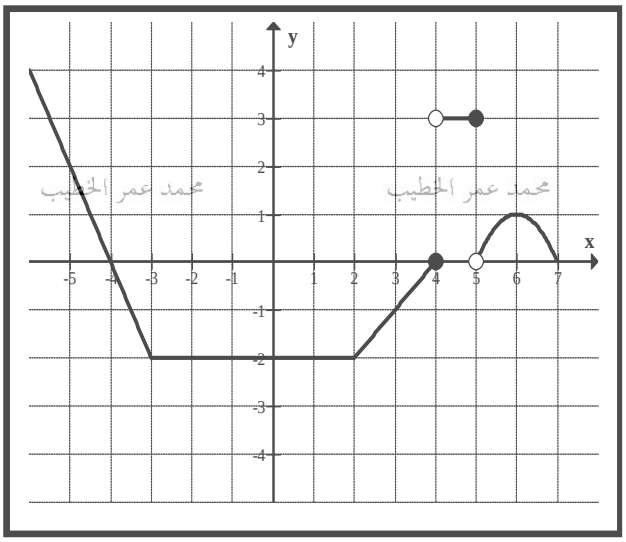
اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الاسئلة التالية

ملاحظة:

مشتقة دالة عند نقطة

=

ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.



(1) $f'(6) =$

(2) $f'(3) =$

(3) $f'(-4) =$

(4) $f'(5^-) =$

(5) $f'(2^-) =$

(6) $f'(2^+) =$

(7) $f'(2) =$

(8) $f'(-3^+) =$

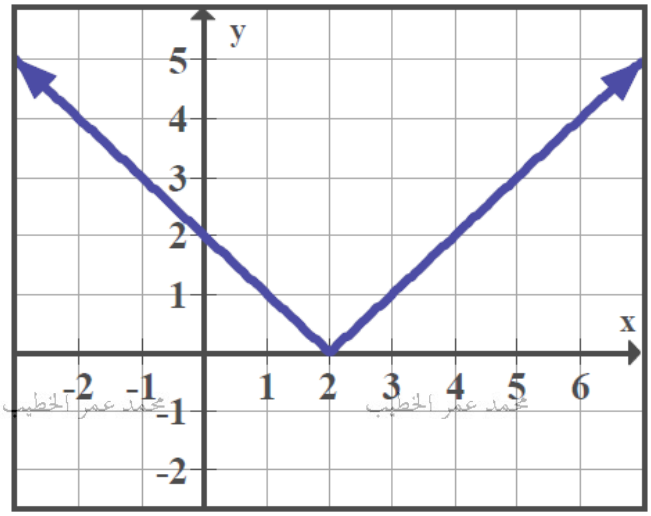
(9) $f'(-3^-) =$

(10) $f'(-3) =$

محمد عمر الخطيب

استخدم الرسم البياني لإيجاد النهايات التالية أن أمكن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$



(1) $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

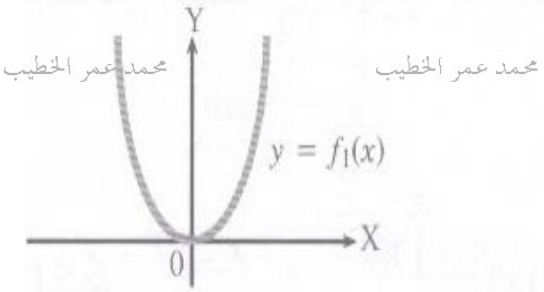
(4) $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{2h}$

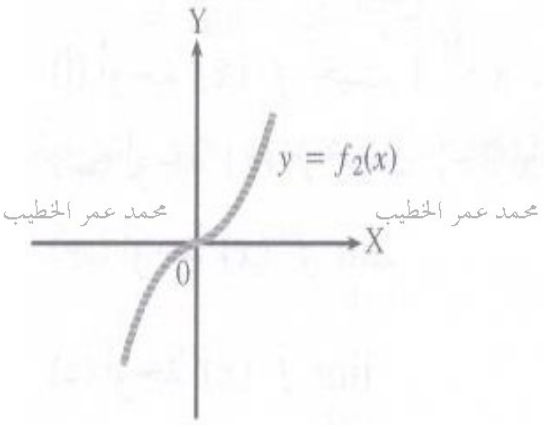
(5) $\lim_{h\to 0}\frac{2f(3)-2f(3+h)}{h}$

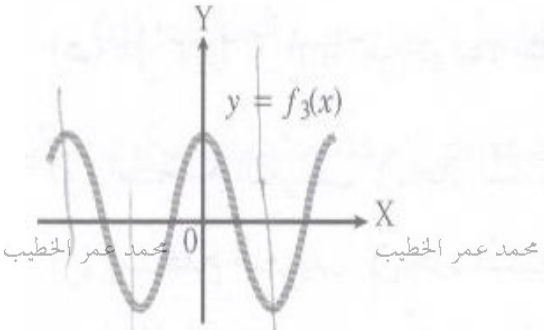
صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

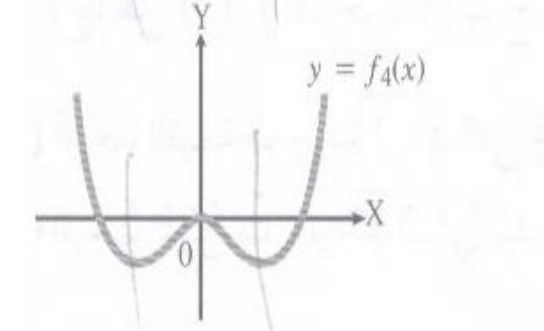
ملاحظة: عدد المماسات الافقية في بيان الدالة $f(x)$ يساوي عدد المقاطع السينية في بيان الدالة $f'(x)$

A



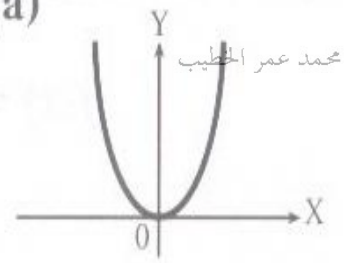




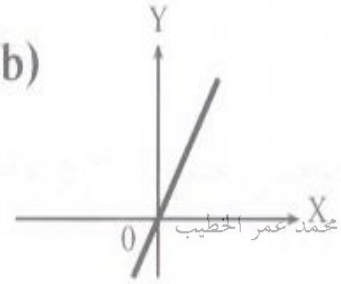


B

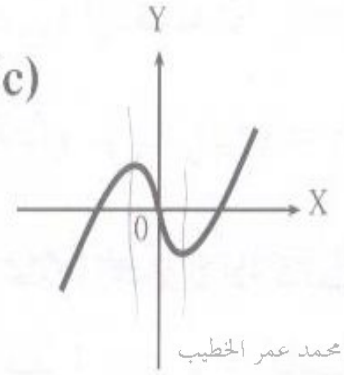
(a)



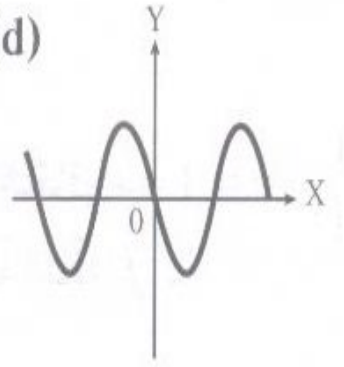
(b)



(c)

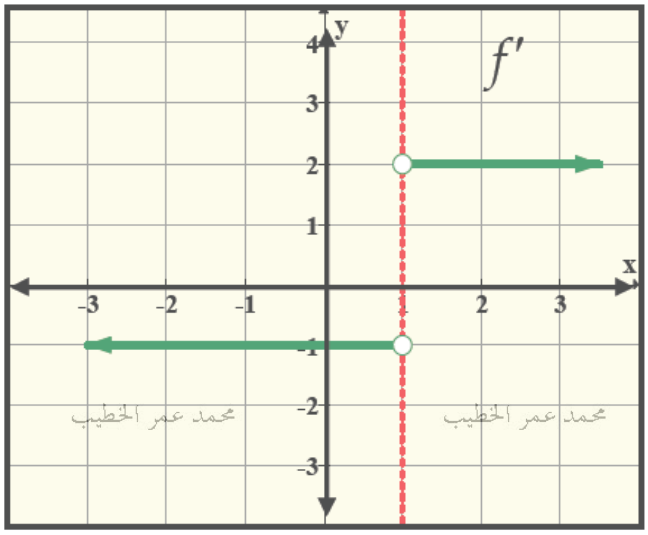


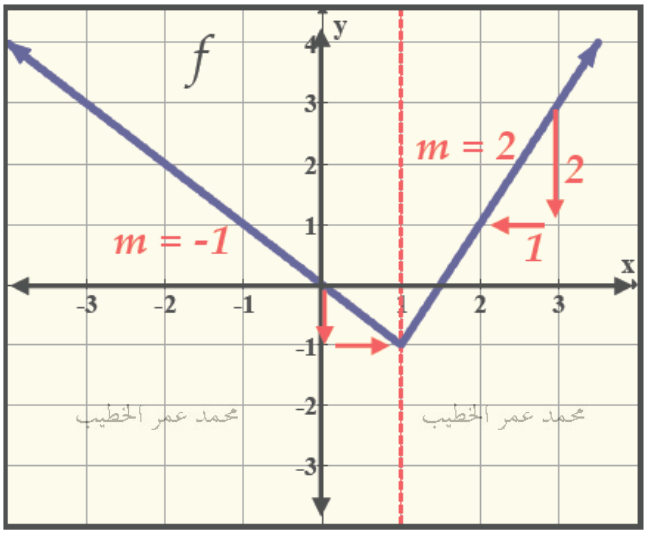
(d)

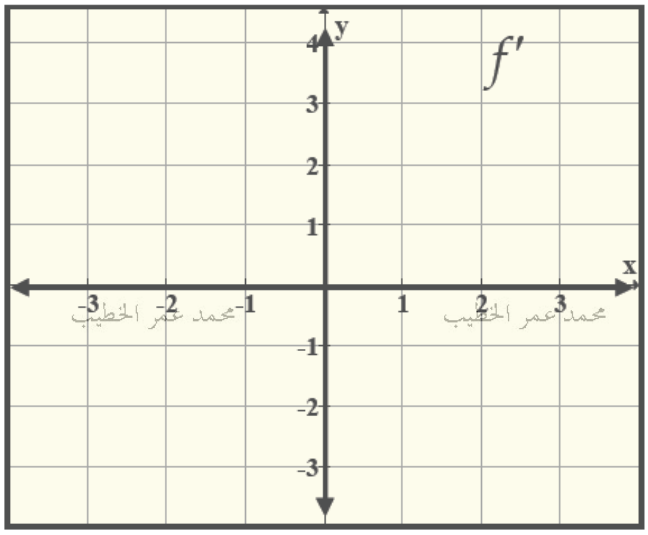


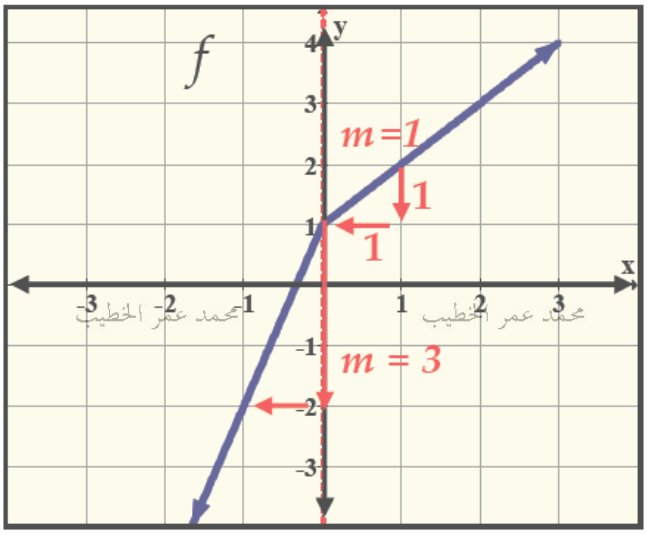
محمد عمر الخطيب

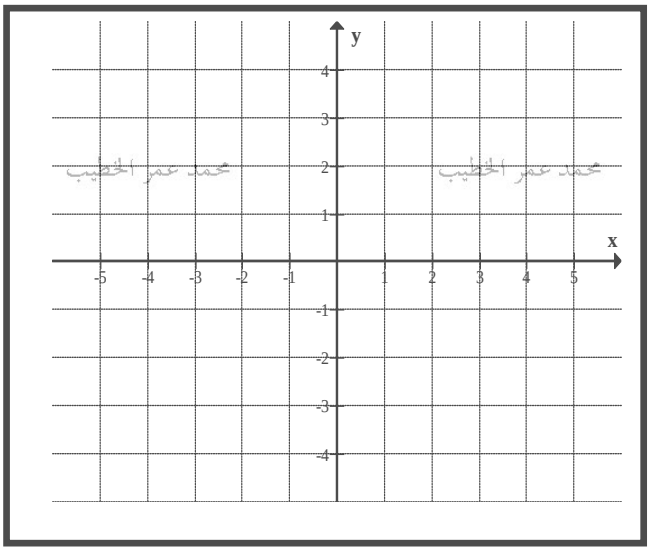
الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان الدالة f' .

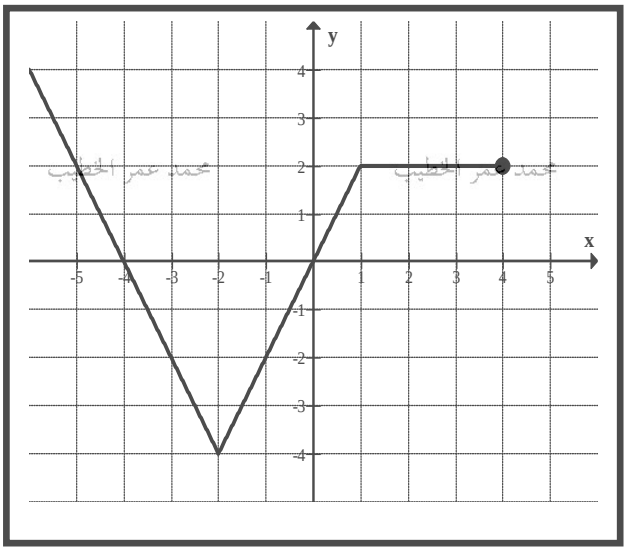




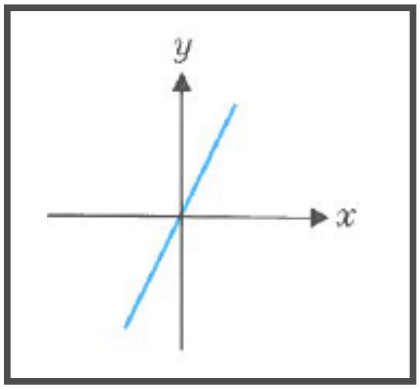


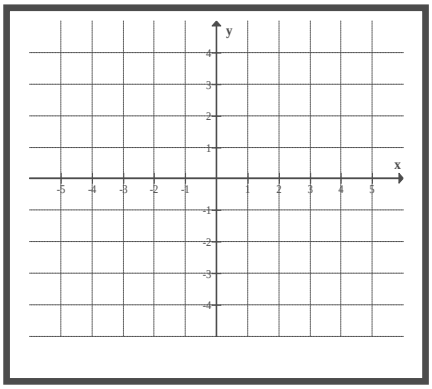


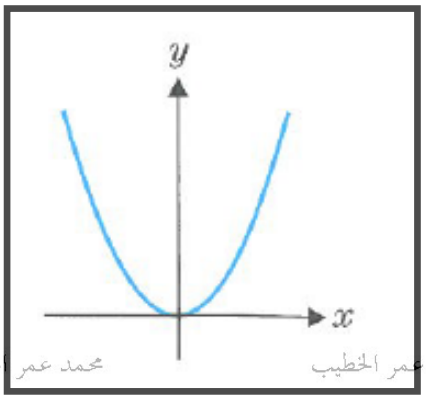


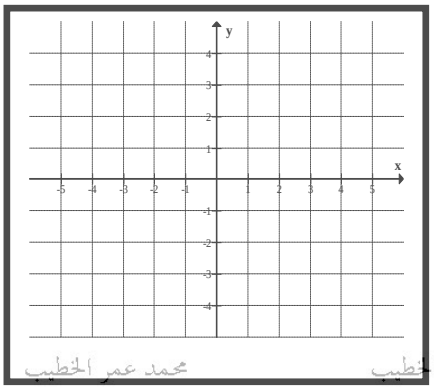


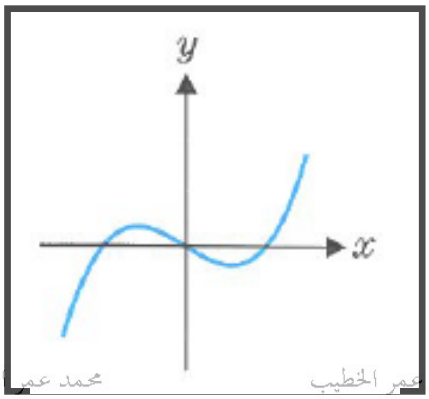
الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان تقريبي الدالة f'

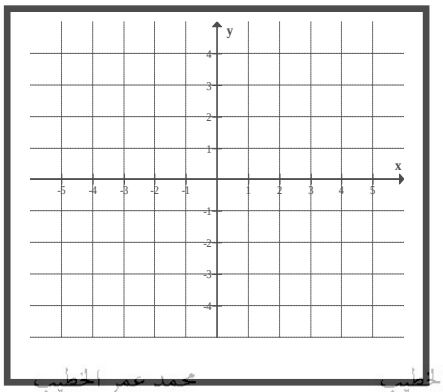


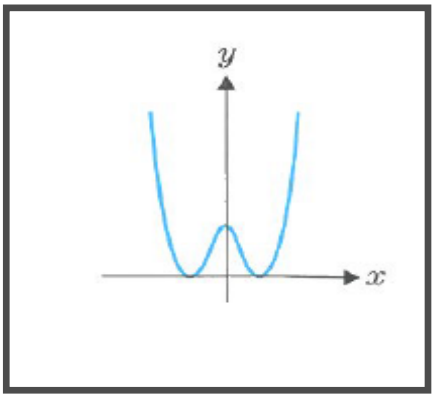


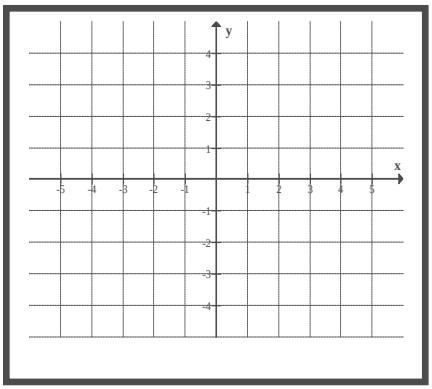








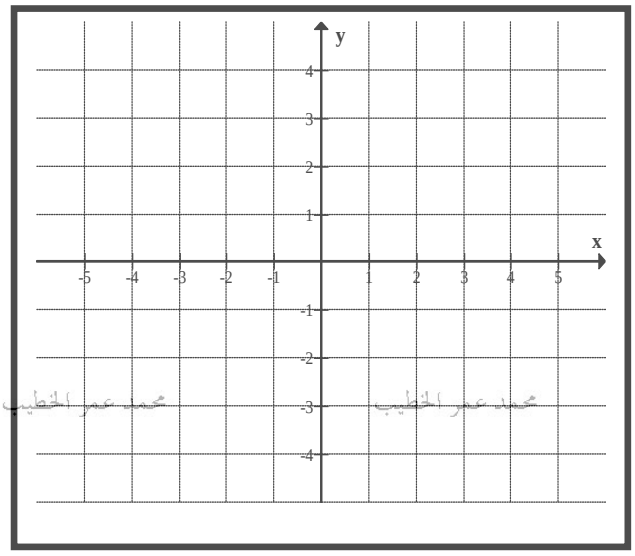




محمد عمر الخطيب

(ثانياً) الرسم البياني للدالة $f(x)$ من الدالة بيان الدالة $f'(x)$

(1) ارسم بيان الدالة: f بالشروط الاتية:



الدالة f متصلة.

$$f(0) = -1$$

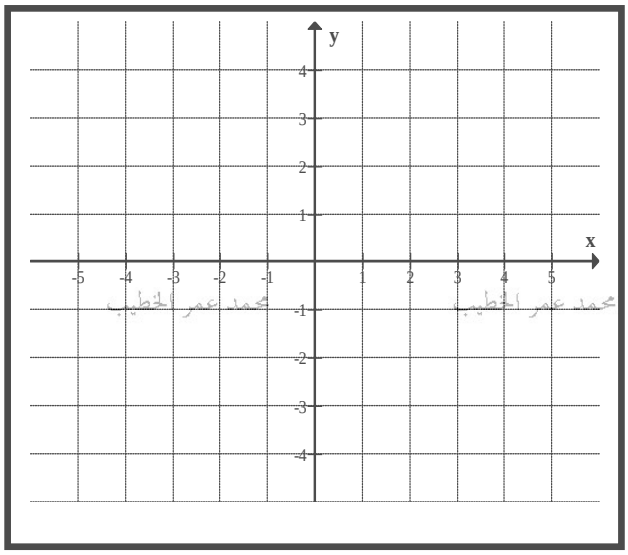
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -2 & x \geq 0 \end{cases}$$

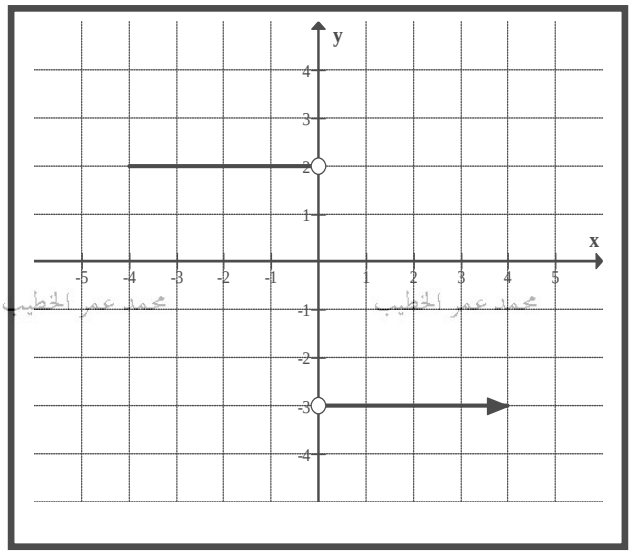
(2) ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة f والتي لها الخواص الآتية:

$$f(0) = 1$$

الرسم البياني للدالة f' (مشتقة الدالة f) كما هو بالشكل.

f متصلة لكل x على مجالها.



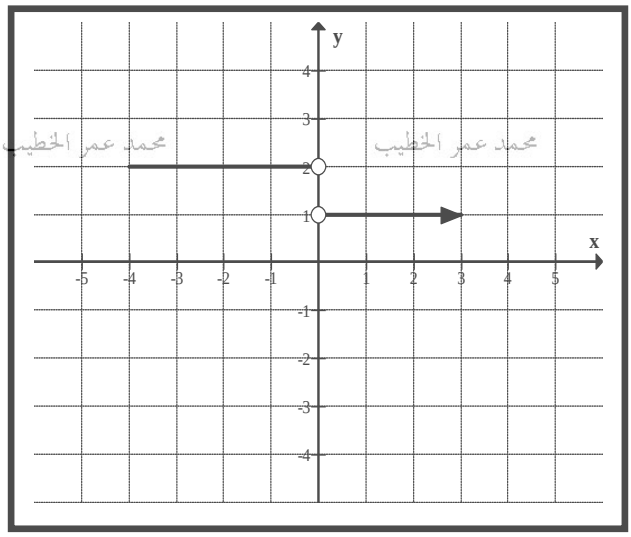


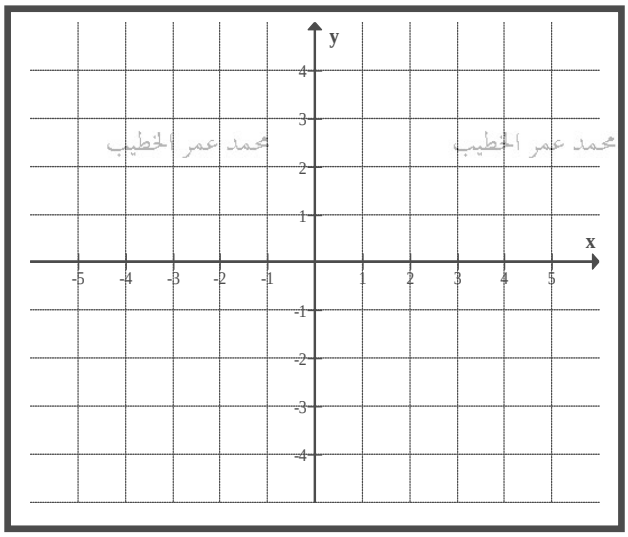
(1) ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة: f والتي لها الخواص الآتية:

$f(-1)=1$

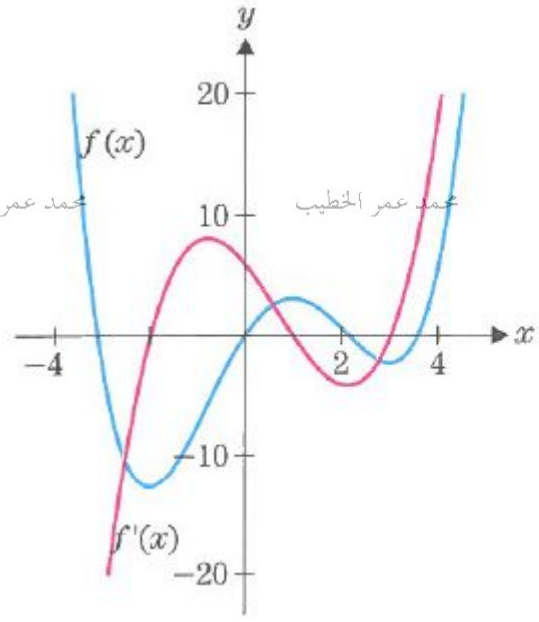
الرسم البياني للدالة f' (مشتقة الدالة f) كما هو بالشكل.

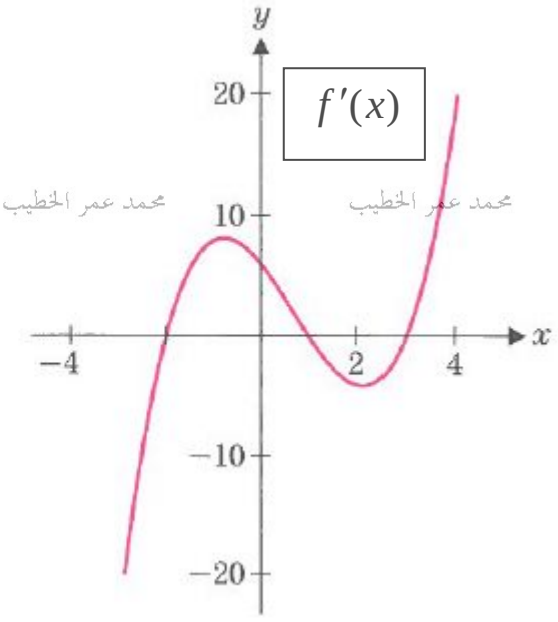
f متصلة لكل x على مجالها.





(2) ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة: f





محمد عمر الخطيب

1) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند نقطة $x=a$ فأنها تكون متصلة عند النقطة a

2) إذا كانت الدالة f غير متصلة عند $x=b$ فأن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=b$

3) إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة $x=c$ فأنه توجد حالتان :

الأولي الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=c$

الثانية الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=c$

الحالات التي تكون مشتقة الداله $f'(x)$ غير موجودة عند نقطة

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة

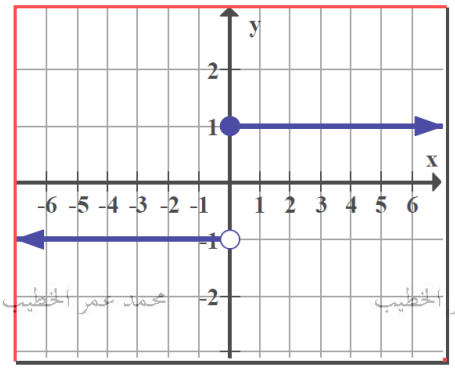
عدم الاتصال

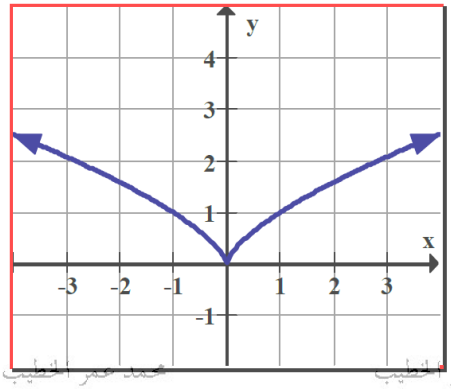
(1) فجوة

(2) قفزة

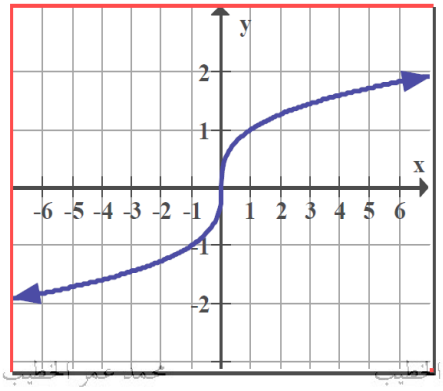
(3) لانهائي

(4) تذبذبي



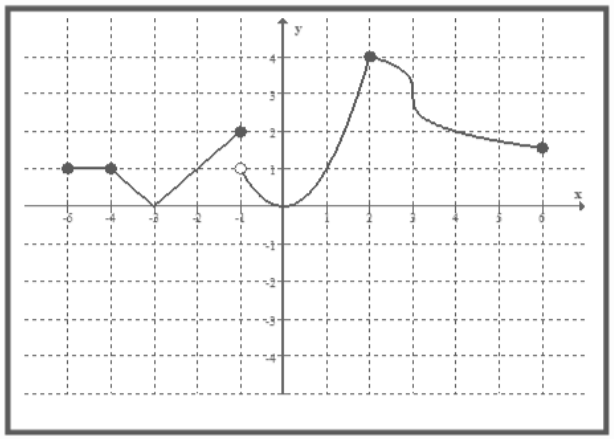


رأس مدبب



مماس رأسي

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة: $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية:

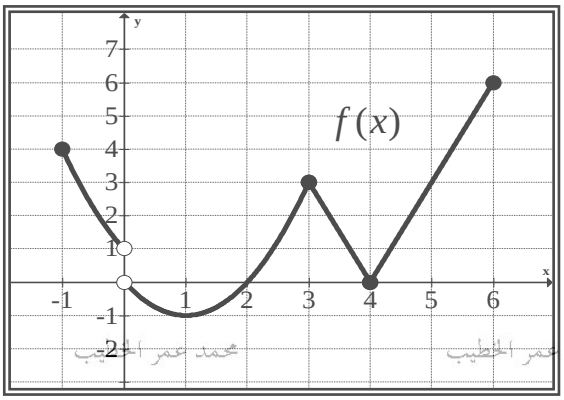


مجموعة قيم x التي تكون عندها:

$f'(x)$ غير موجودة مع بيان السبب.

(2) اعتمد على الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية :

اولاً: أوجد عند أي من نقاط المجال يمكن أن تكون :



(أ) الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق .

(ب) الدالة غير متصلة و غير قابلة للاشتقاق .

(ج) نقاط انفصال الدالة وبين هل يمكن التخلص منها أم لا ؟ مع التوضيح .

ثانياً: أوجـــد

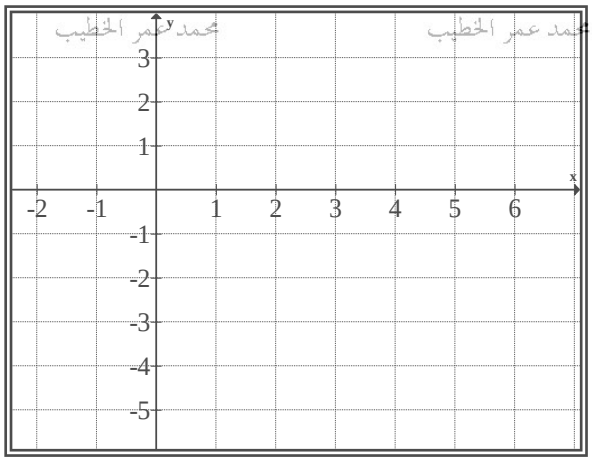
$$(1)\ \lim_{x\to 4} f(x) =$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0} f(x) =$$

$$(3)\ f'(1) =$$

$$(4)\ f'(5) =$$

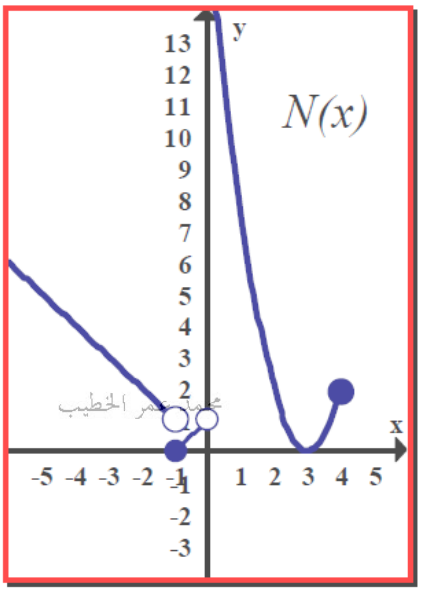
$$(5)\ \lim_{x\to 0^-} [x]\, f(x) =$$

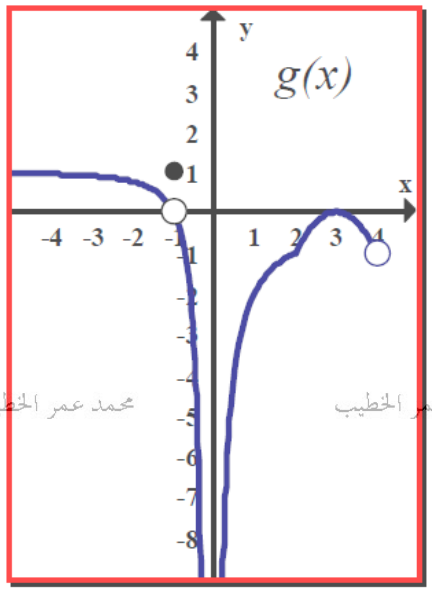


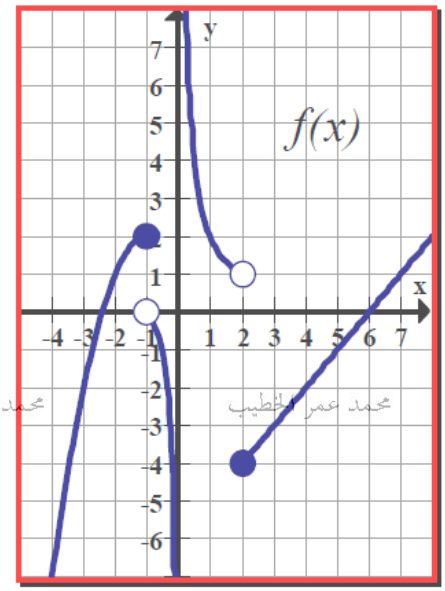
ثالثاً: ارسم بيان مشتقة الدالة $f(x)$ في الفترة $[3,6]$

محمد عمر الخطيب

الرسومات البيانية التالية تمثل بيان كل من الدوال : $N(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$







اقرأ جيداً ثم املأ الفراغات في الجدول التالي بوضع (نعم) أو (لا) :

	$f(x)$	$g(x)$	$N(x)$
متصلة عند $x=1$	.....	.....	.....
لها انفصال لا نهائي عند $x=0$	.....	.....	.....
قابلة للإشتقاق عند $x=-2$	.....	.....	.....
معدل التغير عند $x=3$ يساوي صفراً	.....	.....	.....
تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x=4$	.....	.....	.....
لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x=-1$	.....	.....	.....

الدالة التي تحقق جميع ما سبق هي : .....

قواعد الاشتقاق

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax = a$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{f(x)}\right] = \frac{-a \times f'(x)}{[f(x)]^2}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $y = 2x^7$

b) $y = -3x$

c) $y = 5^2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

d) $y = \frac{x}{2}$

e) $y = \frac{2}{x^3}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

f) $y = \sqrt{x}$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

h) $y = e^2$

i) $y = \cos \pi$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $y = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + 7x - 3\pi$

b) $y = -5x^4 - 2x^{-3} + 4x^{\frac{5}{4}} - \cos\frac{\pi}{4}$

c) $y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$

d) $y = 2x - \frac{4}{x^2} + x^{\frac{5}{7}} + \sqrt{x^3}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $y = (x^2 + 5)(1 - x^5)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

b) $y = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

c) $y = x(x + 1)(2x - 5)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

d) $y = (x^2 + 1)^2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

b) $y = \frac{x + 1}{x^2 - x - 2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

c) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

d) $y = (x^2 + 3)(2x - 5)^{-1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اشتقاق الدوال المعرفه بأكثر من قاعدة:

لتكن: $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,x\geq 1 \\ 3x & ,x<1 \end{cases}$

(1) هل الدالة: $f(x)$ **متصلة عند** $x=1$ **؟ وضح مدى ارتباط ذلك بوجود** $f'(1)$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد $f'(x)$ **حيث** $x>1$.

(3) اوجد $f'(x)$ **حيث** $x<1$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) اوجد $f'(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $g(x)=\begin{cases}2x^3 & ,x\geq 1\\ 3x-1 & ,x<1\end{cases}$

وضح ما إذا كانت الدالة $g(x)$ **متصلة عند** $x=1$.

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة: $g(x)$ **عند** $x=1$.

(2) لتكن : $g(x)=\dfrac{d}{dx}|x|$

اوجد نقاط انفصال الدالة $g(x)$ **وبين نوع الانفصال.**

(3) لتكن : $g(x)=\begin{cases}5x^2 & ,x\neq -1\\ 5 & ,x=-1\end{cases}$ **هل يوجد نقاط انفصال الدالة** $\dfrac{d}{dx}g(x)$

بفرض أن الدوال: $f(x), g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	5	-4

اوجد :

(1) $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x)) =$ فسر إجابتك

(2) $\frac{d}{dx}(3f(x)+\frac{1}{4}g(x))$ $x=2$

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\times g(x))$ $x=2$

(4) $\frac{d}{dx}(f(2)\times g(x))$ $x=2$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا علمت أن: $f(x)\times g(x)=f(x)+2g(x)$ **حيث أن كلاً من** $f(x)\ ,\ g(x)$ **دالتان قابلتان للاشتقاق وأن** $g'(1)=3\quad,\quad g(1)=2$.

اوجد:

(1) $f(1)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اذا كان: $h'(1)=2h(1)=1\quad,f(1)=f'(1)=2$.

اوجد:

$$\lim_{x\to2}\frac{(f\times h)(x)-1}{x-1}=$$

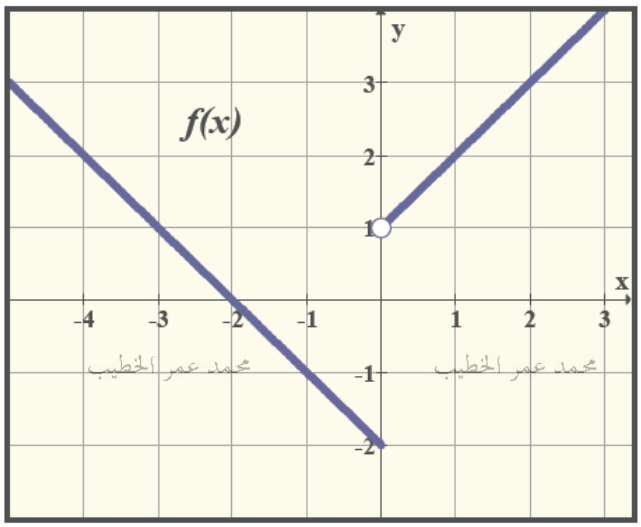
محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

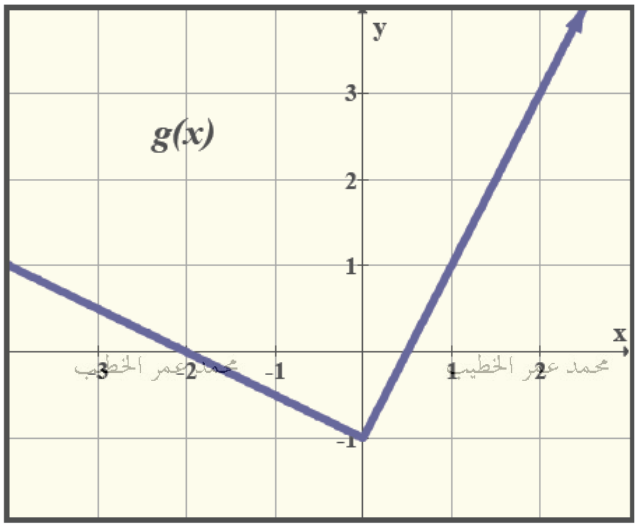
محمد عمر الخطيب

استخدم الأشكال البيانية الموضحة أدناه في إيجاد

$y = f(x)$



$y = g(x)$



اوجد

(1) $\frac{d}{dx}(2g - 3f)$, $x = 1$ عند

(2) $\frac{d}{dx}(f \cdot g)$, $x = 1$ عند

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{2f(x) - 6}{x - 2} =$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

المشتقات ذات الرتب العليا :

المشتقة الأولى : $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية : $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة : $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$

المشتقة النونية : $y^n = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $y = x^4 - 3x^2 + 5$ **فأوجد :** $\frac{d^2y}{dx^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت: $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x + 8$ **فأوجد :**

(a) $f^4(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(b) $f^{10}(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت $y = \frac{1}{x}$ فأوجد $\frac{d^5 y}{dx^5}$ ثم اكتب نمطاً لـــــ $\frac{d^n y}{dx^n}$ (حيث n عدد صحيح موجب)

(2) إذا كانت: $f(x) = xg(x)$ اوجد $f^{n}(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n).

محمد عمر الخطيب

ايجاد الثوابت للدوال القابلة للاشتقاق

(1) أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^3 & x<1 \\ 3x+k & x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$.

(2) أوجد كل من a , b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<1 \\ x^2+5 & x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(3) أوجد كل من a , b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} 3-x & ,x<1 \\ ax^2+bx & ,x\geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(1) أوجد كل من a , b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}3-x & ,x<1\\ ax^2+bx & ,x\geq 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(2) اذا كانت $f(x)=x^3-a\,x$ حيث $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+3)-f(3)}{h}=22$ فاوجد قيمة a

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

التطبيقات الهندسية:

إذا كان m_1 ميل المستقيم L_1 وكان m_2 ميل المستقيم L_2 فإن

$$L_1 // L_2 \iff m_1 = m_2$$

$$L_1 \perp L_2 \iff m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad o\mathcal{R} \quad m_1 \times m_2 = -1$$

معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل هي : $y - y_1 = m(x - x_1)$

ملاحظة: ميل المماس للدالة عند نقطة يساوي ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات

لتكن: $f(x) = x^2 - 3x$ أوجـــد :

1) ميل منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-2)$.

2) معادلة المماس عند النقطة $(1,-2)$.

3) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1,-2)$.

4) عند أي نقاط يكون المماس أفقي ؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إذا كانت: $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **فأوجد:**

(1) ميل القاطع PQ **حيث** $Q=(0,-1)$, $P=(2,1)$.

(2) ميل المماس عند $x=2$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) معادلة المماس للمنحنى عند $x=2$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) اوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات عند $x=2$.

(5) معادلة الخط العمودي على المماس عند $x=2$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الدالة : $y = \frac{8}{x^2+4}$ عند $x = 2$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت: $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد جميع النقاط التي يكون عندها الميل يساوي $-\frac{1}{4}$ ثم اوجد معادلة المماس عند كل نقطة؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) أوجد جميع النقاط التي يكون المماس للدالة: $f(x) = x^2 + 4x - 1$ أفقيا ثم أوجد معادلة هذا المماس؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) أوجد جميع النقاط التي يكون المماس للدالة: $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ أفقيا ثم أوجد معادلة هذا المماس؟

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : $y=x^2+2x$ عند النقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم الذي معادلته: $y=4x+1$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) من السؤال السابق (3) اوجد الزاوية الموجبة للمماس المرسوم عند $x=-1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) من السؤال السابق (3) اوجد الزاوية الموجبة للمماس المرسوم عند $x=\frac{-3}{2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان منحنى الدالة: $y = 2x^3 + kx + 2$ له مماس افقي عند $x = -1$, احسب قيمة k

ثم اوجد معادلة المماس عند هذه النقطة.

(2) إذا كان المستقيم الذي معادلته : $y = 3x - a$ مماساً لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x^2 - x + 1$

فاوجد قيمة الثابت a؟

(3) لتكن $f(x) = \sqrt{x}$

(أ) اوجد قيمة b التي تجعل المماس عند $x = 4$ موازياً للوتر المار بالنقطتين: $(1, f(1))$, $(b, f(b))$

(ب) اوجد قيمة a اذا كان ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{4}$

(ج) ماذا يحدث للمماس عندما تقترب a من ملانهايه

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان للدالتين $f(x)=cx-x^2$ ، $g(x)=x^2+ax+b$ مماسا مشتركا عند النقطة $(1,0)$

اوجد قيمة الثوابت a,b,c ؟

(2) اذا كانت للدالة $g(x)=\frac{2x+k}{(x-1)^2}+a$ مماس افقي عند النقطة $(0,6)$ فاوجد قيمة الثوابت

a,k ؟

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الحركة على خط مستقيم

العلاقة بين المسافة s و السرعة v والعجلة a والهزة j .

إذا كانت المسافة s دالة في الزمن t فـــــإن :

السـرعة v هي المشتقة الأولي : $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

التسارع a هي المشتقة الثانية $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$

ملاحظة: السرعة اللحظية (السرعة المتجهة) $v = \frac{ds}{dt}$ ، والسرعة العددية $|v| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

وصف حركة جسيم يتحرك على خط

الفـــــترة	[a , b]	[b, c]	[c, d]	[d, e]
v	+	–	–	+
a	–	–	+	+
وصف الحركة	- الجسيم صاعد . - الجسيم تباطؤ . - الجسيم يتحرك بعيدا عن نقط البدء .	- الجسيم هابط . - تسارع الجسيم . - يتحرك في اتجاه نقطة البدء .	- الجسيم هابط . - الجسيم تباطؤ . الجسيم يتحرك بعيدا عن نقط البدء .	الجسيم صاعد . الجسيم تسارع . الجسيم يتحرك في اتجاه نقطة البدء .

اذا كانت اشارة السرعة المتجهة موجبة(+) يكون الجسم متجهاً لليمين

اذا كانت اشارة السرعة المتجهة سالبة (-) يكون الجسم متجهاً لليسار

يكون الجسم متسارعاً اذا كانت للسرعة والتسارع نفس الاشارة (+ و +) او(-و -)

يكون الجسم متباطئاً اذا كانت السرعة والتسارع مختلفات في الاشارة (-و +) او(+ و -)

قذف جسيم رأسياً لأعلى فتحرك حسب العلاقة $s(t) = 60t - 5t^2$ حيث t بالثواني و s بالأمتار

.

1) اوجد موقع الجسيم بعد مرور 3 ثواني.

2) اوجد موقع الجسيم بعد مرور 8 ثواني.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

3) اوجد السرعة المتجهه للجسيم بعد مرور 4 ثواني.

4) اوجد السرعة المتجهه للجسيم بعد مرور 9 ثواني.

5) اوجد تسارع الجسيم بعد مرو 5 ثواني.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

6) اوجد أقصى ارتفاع يصل إلية الجسيم.

7) أوجد سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع $100\ m$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

8) أوجد سرعة الجسيم عندما يرتطم بالأرض.

9) في الثانية السابعة هل كان الجسيم صاعداً أم هابطاً؟

10) ارسم حركة الجسم على خط الاعداد

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

تحرك جسم على خط مستقيم بحيث يعطى موقعه y في أي لحظة $t \geq 0$ بالدالة التالية:

$$y = t^2 - 10t + 12$$ حيث y بالقدم , t بالثانية

فأوجد:

1) إزاحة الجسم خلال أول 10 ثواني.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

2) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة $[2,5]$

3) معدل السرعة عند الثانية الثالثة.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

4) متى تعدم سرعة الجسم.

5)ما قيم التسارع في أي لحظة.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

6)صف حركة الجسم(متى يتحرك لليمين ومتى لليسار ,متى يكون متسارعاً ومتى متباطئاً)

t	
إشارة $v(t)$	
إشارة $a(t)$	

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث يعطى موقعه S في أي لحظة $t \geq 0$ بالدالة التالية:

$s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 2$, حيث S الأمتار , t بالثانية

1) .اوجد السرعة المتوسطة خلال الفترة $[1,4]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

2) ادرس إشارة السرعة:

t	
إشارة $v(t)$	

3) ادرس إشارة التسارع:

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

t	
إشارة $a(t)$	

4) أكمل الجدول ثم صف حركة الجسم:

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

t	
إشارة $v(t)$	
إشارة $a(t)$	
وصف الحركة	

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث أن : $s(t) = t\sqrt{t} + 6\,t$ حيث s المسافة بالأمتار و t الزمن بالثانية

أ) اوجد تسارع هذا الجسيم عندما تكون سرعته 12 m/sec .

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

ب) متى يكون الجسم متسارعا ومن يكون متباطئاً:

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) تتحرك سيارتان على خط مستقيم بحيث يعطى موقعهما في اي لحظة $t \geq 0$ بالدالتين

موقع السيارة الأولى a : $s_a = 3t^2 + 2t + 2$

موقع السيارة الثانية b : $s_b = t^2 + 8t$ حيث t الزمن بالثواني ، s بالامتار

اوجد

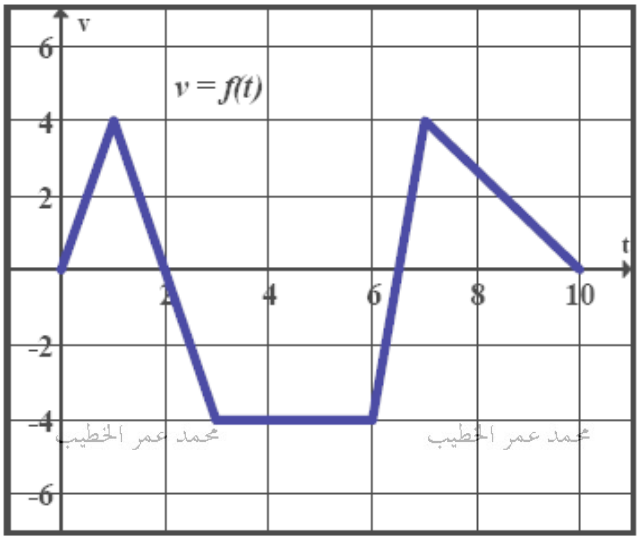
محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أ) الزمن الذي تكون عندها السرعة اللحظية للسيارتان متساوية

ب) اي السيارتان لها تسارع اكبر عند $t = 2$

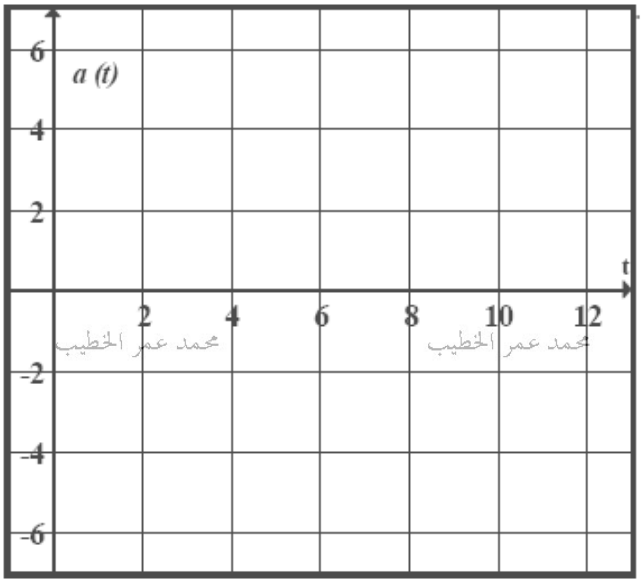
محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مستخدما الرسم المحاور الذى يمثل السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم

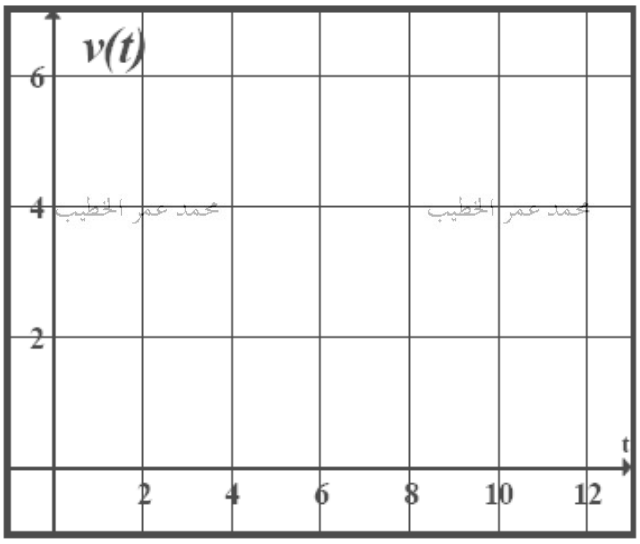


اجب عما يلي

(1) اكتب الفترة التي يتحرك فيها الجسم لليمين والفترة التي يتحرك فيه لليسار



(2) ارسم دالة التسارع ثم اكتب الفترة التي ينعدم فيها التسارع

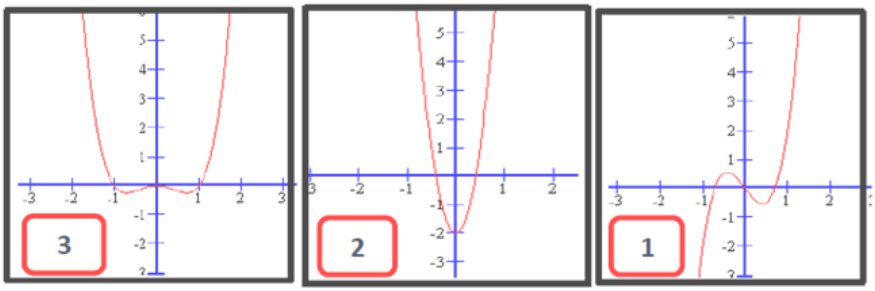


(3) ارسم الدالة التي تعبر عن سرعة الجسم

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) في الشكل المقابل اياً من المنحيات يمثل:

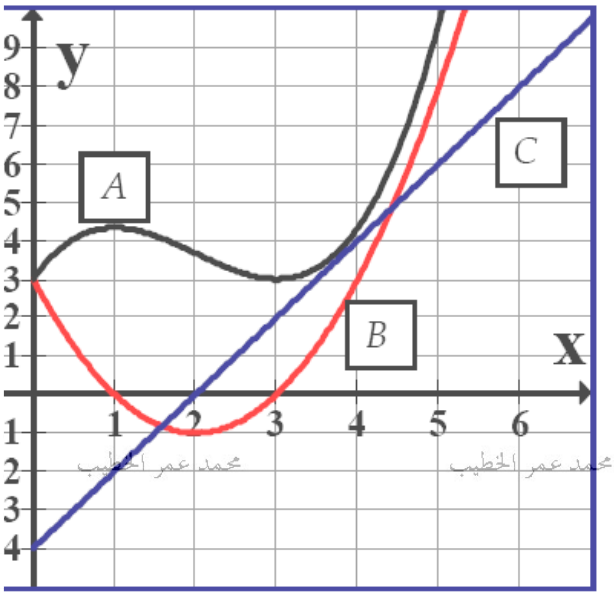


دالة الموضع (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.

(2) في الشكل المقابل اياً من المنحيات يمثل:

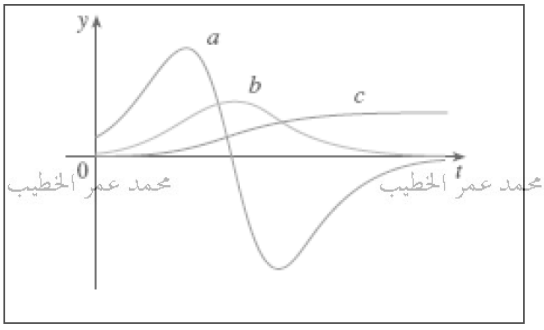


دالة الموضع. (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.

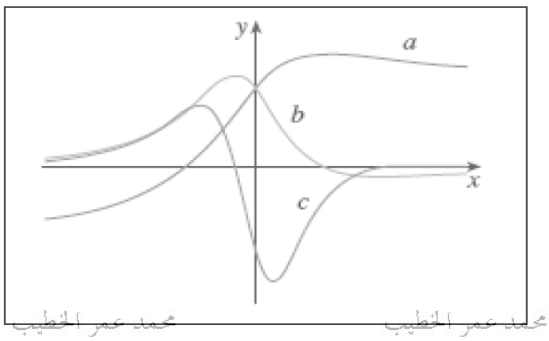
(3) في الشكل المقابل اياً من المنحيات يمثل:



دالة الموضع. (الازاحة)

دالة السرعة المتجهة.

دالة التسارع.



محمد عمر الخطيب

التطبيقات الحياتية:

ملاحظة: معدل التغير = المشتقة

(1) في بستان فاكهة به أشجار خوخ ,وجد أن الكمية P من الخوخ السليم بالكيلو غرام تنتجها شجرة متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلو غرامات x من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة حسب العلاقة:

$$P(x) = 300 - \frac{100}{x}$$

اوجد معدل التغير لإنتاج الشجرة عند استخدام 4 كيلو من المبيد الحشري.

(2) تشير دراسة بيئية لاحد المدن ان تركيز اول اكسيد الكربون في الهواء يعطى بالعلاقة:

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

حيث Q تقاس بالجزء من المليون , t تقاس بالسنوات

اوجد

أ) متوسط التغير في تركيز اول اكسيد الكربون في الفترة $[1,10]$

ب) معدل التغير في تركيز غاز اول اكسيد الكربون بعد 3 سنوات

(1) استأجر أعضاء احد النوادي بركة سباحة لمدة 10 سنوات .وتم تقسيم الايجار بالتساوي على الاعظاء المساهمين .وكان هناك 80 عضواً.حيث ايجار البركة 8000 درهم سنوياً. فأذا كان عدد الأعظاء يتزايدون بمعدل 20 عظواً في السنة وايجار البركة يتزايد بمعدل 1000 درهم سنوياً. ما المعدل اللحظي للتغير في نصيب كل واحد من الاعضاء المشاركين من ايجار بركة السباحة.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) قسم أعضاء احد النوادي إيجار خيمة بالتساوي على عدد الأعضاء. فإذا كان هناك65 عضواً وكان إيجار الخيمة 250 درهم سنوياً. فإذا كانت قيمة الخيمة تتزايد بمعدل 10 درهم كل سنة وأعضاء النادي يتزايد بمعدل 6 أعضاء سنوياً.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد معدل التغير في نصيب كل عضو من قيمة إيجار الخيمة السنوي.

(3) مزرعة دواجن تحتوي على 290 دجاجة تبيض كل دجاجة 8 بيضات اسبوعياً ,أراد صاحب المزرعة أن يزيد من عدد دجاج المزرعة بمعدل 20 دجاجة اسبوعياً ,وقد كان المتوسط الاسبوعي للبيض بعد التحسين 3.5 بيضة اسبوعياً لكل دجاجة.

اوجد المعدل اللحظي في الإنتاج الاسبوعي من البيض بعد التحسين.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

مشتقات الدوال المثلثية

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

إذا كان: $y = \tan x$ **فاثبت أن:** $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ **(استخدم قواعد الاشتقاق).**

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = 1 + x - \cos x$

(2) $y = \tan x - \sin\frac{\pi}{2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \sin x + \cot x - \frac{2}{x}$

(4) $y = \sin x \cos x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y = x^3 \tan x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $y = \frac{x}{1 + \cos x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

(2) $y = \frac{\sin x}{\sec x + x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = \frac{x}{1 + \cot x}$

(5) $y = \frac{\csc x}{x^2 - 1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \frac{-2}{1+\sec x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $y = \frac{\cot x}{x} - \sec x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \frac{\sec^2 - \tan^2 x}{\sec x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = (3x^2 + 1)\cot x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إذا كان: $y = x^3 + \sin x$

فاوجد:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$

(3) $\frac{d^{263}y}{dx^{263}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $\frac{d^{801}y}{dx^{801}}$

(5) $\frac{d^{1000}y}{dx^{1000}} \frac{d^{502}y}{dx^{502}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $\frac{d^{1000}}{dx^{1000}}(\frac{d^{404}y}{dx^{404}})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان: $y = \sec x$ **فاوجد** $\frac{d^2y}{dx^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت: $f(x) = x\sin x + \cos x$

فاثبت أن: $xf''(x) + xf(x) - 2f'(x) = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إذا كانت: $f(x)=\sin x+\cos x$

اوجد:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{x}$

(3) $\dfrac{d^{203}}{dx^{203}}f(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت : $g(x)=\begin{cases}\sin x & ,x\geq \pi \\ a\,x+b & ,x<\pi \end{cases}$

اوجد قيمة كل من الثابتين a,b **بحيث تكون الدالة** $g(x)$ **قابلة للاشتقاق عند** $x=\pi$.

(2) اوجد معادلة المماس للدالة: $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **عند** $x=\dfrac{\pi}{2}$.

محمد عمر الخطيب

قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة الأولى

(الشكل الأول)

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^n = n\times\left[f(x)\right]^{n-1} f'(x)$$

(الشكل الثاني)

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x)\right] = f'(g(x))\times g'(x)$$

قاعدة السلسلة الثانية

(الشكل الأول)

$$y = f(u) \quad , \quad u = g(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

(الشكل الثاني)

$$y = f(t) \quad , \quad x = g(t)$$

المعادلات البارمترية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مشتقة الدالة العكسية

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

او

$$\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] = \frac{1}{f'(g(x))}$$

حيث $g(x) = f^{-1}(x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=(x^2+3)^5$

(2) $y=\frac{3}{(x^3-5x+8)^3}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y=(2x+1)^5(2x-1)^5$

(4) $y=x^5(4x-1)^3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y=(\frac{x^2+3}{2x-4})^3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $y=\sqrt{x^2-5x+1}$

(7) $y=(\sin x-x)^5$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sin^2 x$

(2) $y = \sec^5 x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \tan\sqrt{x^3+1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = \sin(\cos 4x)$

(5) $y = \cos(\sqrt{x}+1)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $y = \sin^2(2x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \cot^2 x^3$

(2) $y = x\cos^2 x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \cos(\frac{1}{\cos x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = \frac{2}{\cot(\sin x)}$

(5) $y = x\sqrt{\sin x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(6) $y = \sqrt{\tan x^2 + 2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(a) $y = u^2 + \cos u \quad , u = x^2 - 2$

(b) $y = u^5 \quad , u = x^2 + \tan x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي عند النقطة المشار إليها:

(a) $y = u^2 + \frac{1}{\cos x} \quad , \ u = \pi x^2 \quad , x = \frac{1}{2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(b) $y = u^3 + u \quad , u = \cos 3w \quad , w = 5x - 10 \quad , x = 2$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(c) $y = u^2 - \frac{8}{u} \quad , u = 2x\sqrt{x} \quad , y = 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت : $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + 2\sqrt{t}$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) اذا كانت : $x = 3t^2 - t$, $y = \tan(t + \frac{\pi}{4})$, اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $t = 0$

(3) لتكن : $y = x^2 + 7x - 5$ احسب قيمة $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = 1$ و $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$

بفرض أن الدوال: $f(x)$, $g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	2	-4

اوجد $h'(2)$ في الحالات التالية

(1) $h(x)=4f(x)+g(x)-x^2$

(2) $h(x)=f^3(x)+\dfrac{1}{g(x)}$

(3) $h(x)=\sqrt{f(x)+2g(x)}$

(4) $h(x)=f(g(x))$

محمد عمر الخطيب

بفرض أن الدوال: $g(x), f(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=2,4$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	3	7	4	6
4	2	- 5	9	- 3

اوجد $h'(x)$ عند القيمة المشار إليها:

(1) $h(x)=f(\sqrt{x})$ $x=4$

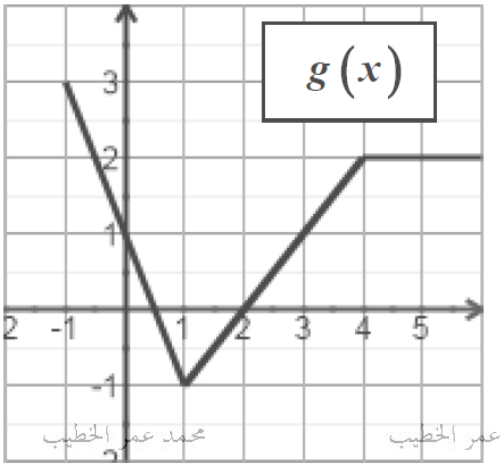
(2) $h(x)=f(g(x)$ $x=2$

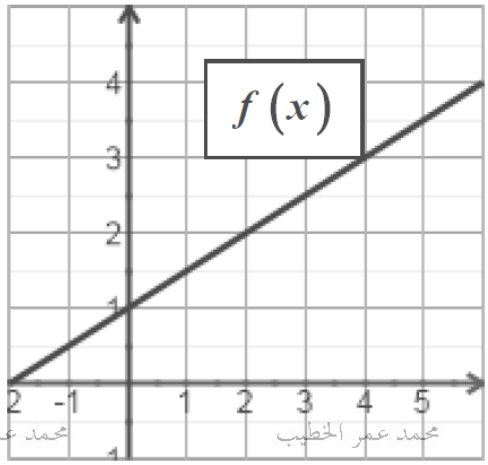
(3) $h(x)=f^3(x^2)$ $x=2$

(4) $h(x)=\sqrt[3]{g(x)+9x}$ $x=2$

(5) $h(x)=f^{-1}(x)$ $x=1$

الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة $f(x), g(x)$. استفد من ذلك لايجاد.





(1) اوجد $h'(0)$ حيث

$$h(x) = f(g(x))$$

(2) اوجد $h'(2)$ حيث

$$h(x) = g(g(x))$$

(3) اوجد $h'(1)$ حيث

$$h(x) = g(f(x))$$

(4) اوجد $h'(3)$ حيث

$$h(x) = f^{-1}(x)$$

(1) اذا كان $y = f(x^2 + x)$ وكان $f'(-2) = 1$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

(2) اذا علمت ان: $h(x) = f(x^2 + g(x))$ اوجد $h'(-2)$

$g(-2)$	$f'(3)$	$g'(-2)$
-1	-4	2

(3) اذا علمت ان : $f(x) = x^3 g(x) + h(g(x))$ فاوجد $f'(1)$ حيث $h(x) = 2x^2 + 1$

$g(1)$	$g'(1)$
1	4

(4) اذا كانت $f(x) = x^3 + 4x - 1$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فأوجد $g'(-1)$

(1) **اذا كانت** $f(x)=x^3-3$ **وكانت** $g(x)=f^{-1}(x)$ **، فأوجد** $g'(5)$

(2) **إذا كان** $f\left(\frac{1}{x}\right)=2x^3-3x+1$ **فاوجد** $f'(3)$.

(3) إذا علمت أن $y=u^3-5u$ ، $u=\frac{1}{f(x)}-3$

وكان $f'(1)=2$ ، $f(1)=1$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=1$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت $x = \sec t$, $\frac{dt}{dv} = 5$ فأوجد $\frac{dx}{dv}$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$

(2) اذا كان $x = \sqrt{t+3}$ وكانت $t = \cos y + \tan y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(3) لتكن : $y = x^2 + 7x - 5$ احسب قيمة $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = 1$ و $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$

(1) إذا كانت: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+a}$ وكانت $f'(3)=\frac{4}{9}$ فاوجد قيمة a؟

(2) إذا كانت: $f(x)=(a+3x)^2$, وكانت $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=12$ فاوجد قيمة a

(3) لتكن:

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos 2x & ,x\geq\frac{\pi}{4}\\ a+bx & ,x<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

دالة قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{\pi}{4}$ فاوجد قيمة كل من a,b

(1) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $h(x)$ عند $x = 0$ حيث:

$$h(x) = [f(x)]^4 + 1 \quad \text{و أن :} \quad f'(0) = \frac{8}{5} \,, \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

(2) اوجد معادلة المماس للمنحنى الذي معادلته :

$$\begin{aligned} y &= 4\sqrt{2}\sin t \\ x &= 3\sqrt{2}\cos t \end{aligned}$$

عند $t = \frac{\pi}{4}$

(3) اوجد قيم x على المنحنى : $f(x) = x - \sin 2x$ والتي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات .

(4) اوجد قيمة x التي يكون يصنع عندها المماس لمنحنى الدالة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها 45°

يتحرك جسم على محور السينات حسب العلاقة: $S(t)=10\cos(t+\frac{\pi}{4})$ حيث S بالمتر و t بالثانية

اجب عما يلي:

(1) ما الموضع الابتدائي للجسم

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) احسب أبعد نقطة يصل إليها الجسم من جهة اليمين.

(3) احسب أبعد نقطة يصل إليها الجسم من جهة اليسار.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) متى يصل الجسم إلى نقطة الأصل (أول مرة).

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) احسب سرعته المتجهة وتسارعة عند زمن الوصول إلى نقطة الأصل

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

إذا كـــــان $x = 3t - t^2$

$y = t^3 + 2t$

أوجـــــد $\frac{dy}{dx}$ عندمـــــا $t = 1$

أوجـــــد $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ كدالـــــة فـــــي t (بسط إجابتك)

أوجـــــد $\frac{d^2y}{dx^2}$

مشتقة الدوال الاسية

$$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$$
$$\frac{d}{dx}a^{x}=a^{x}\times \ln a$$

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\times f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}\times f'(x)\times \ln a$$

$$a^{x}=e^{x\ln a}$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\times \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\frac{d}{dx}\log_a f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\times \ln a}$$

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y=2e^{-3x}$

(2) $y=e^{x^2-1}$

(3) $y=e^{\sin x}$

(4) $y=2^{\tan x}$

(5) $y=3^{\sqrt{x}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = \frac{x^2}{e^{3x}}$

(2) $y = x^2 e^{\cos x} + \ln x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = 5^{2x} + \ln(x^2 - 5x)$

(4) $y = e^{\sqrt{x}} + \ln(2 - \cos x)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

(6) $y = \ln(\frac{1}{x}) + \ln(e^{\sec x}) + e^{\ln x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(7) $y = x\ln(x) - x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = x\ln(\sqrt{x^2+1}) - (\ln x)^2$

(2) $y = e^{\tan x}\ln(x) + e^{2\ln x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = e^{x^3} + \ln(x\sin x) + e^{e^x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = \sqrt[3]{\ln(x^2-1)}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y = \ln(\frac{x+\sin x}{1-\cos x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = \ln(\sqrt{e^x + \sin x} + \sqrt{\sin x}) + \ln(\sqrt{e^x + \sin x} - \sqrt{\sin x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

تذكر ان

$$a^x = e^{x \ln a}$$

(2) $y = x^x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = (\sin x)^{\ln x}$

(4) $y = x^{\sqrt{x}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) يتم وصف حركة زنبرك معين بالدالة $f(t)=e^{-t}\cos t$

(أ) احسب السرعة المتجهة عند اي لحظة

(ب) احسب موقع الزنبرك عندما تتعدم السرعة

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)=3^{\tan x}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$

محمد عمر الخطيب

الاشتقاق الضمني:

تسمى الدالة التي على الصورة $y = f(x)$ دالة صريحة وغير ذلك تسمى علاقة ضمنية

اشتقاق العلاقات الضمنية

$$\frac{d}{dx}g(y) = g'(y) \times \frac{dy}{dx}$$

(1) اذا كان : $x^2 + y^2 = 2xy + e^y$ **حيث** $x \neq y$ **, اوجد** $\frac{dy}{dx}$

(2) اذا كان : $x^2 y + \ln y = xy + 1$ **حيث** $x \neq y$ **, اوجد** $\frac{dy}{dx}$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان : $e^{x^2y} - e^y = x$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) اذا كان : $e^{4y} - \ln(y^2+3) = 2x$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

(3) اذا كان : $x\cos(x+y) - y^2 = 8$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

(4) اذا كان : $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ حيث $x \neq -y$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

محمد عمر الخطيب

(1) **إذا كان:** $xy + y^2 = 1$, **أوجد** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **عند** $(0,-1)$.

(2) **إذا كانت:** $x^2 + y^2 = 25$, **فأثبت أن:** $(y')^2 + yy'' + 1 = 0$.

(3) **إذا كانت** $x^2 + y^2 = 1$, **فأثبت أن:** $y^3 y'' + 1 = 0$.

(1) إذا كانت $6x^2 + 5 = 4xy$, فأثبت أن: $xy'' + 2y' = 3$

(2) إذا كانت $xy = \sin x$, فأثبت أن: $2y' + x(y + y'') = 0$

(3) اذا كان $x = \tan y$ اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$

محمد عمر الخطيب

اوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها:

(1) $y^2 - xy + x = 5$, $(-1, 2)$

(2) $y = 1 + \cos(\pi x + y)$, $(-1, 0)$

(3) $\sqrt{xy} = 2$, $(1, 4)$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها :

(a) $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^3 = 5 \qquad x = \sqrt{3}$

(b) $2xy + \pi \sin y = 2\pi \qquad , \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $x \sin 2x = y \cos 2x \qquad , \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

(2) اوجد مواقع (معادلات) كل المماسات الافقية والراسية للمعادلة $x^2 + y^2 - y = 3$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند النقطة $(0,0)$ ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

$(a)\quad y = x\sqrt{x+4}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

$(b)\quad 2y + x + y^5 = x^5$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند نقطة التقاطع ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

$(a)\quad y = x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

$(b)\quad y = \dfrac{1}{x^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\sin^{-1}x^2$

(2) $y=\cos^{-1}e^{2x}$

(3) $y=\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sec^{-1} \ln x$

(2) $y = \cot^{-1} \sin x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) $y = \csc^{-1}(\sqrt{x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $y = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $y + \sin^{-1} xy = x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد مجال الدوال التالية

(1) $f(x)=\sin^{-1}(2x-1)$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) $f(x)=\sin^{-1}(\sqrt{x})$

(3) $f(x)=\tan^{-1}(\sqrt{x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) $f(x)=\cos^{-1}(\frac{2}{x})$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(5) $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

الدوال الزايدية

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\sec x=\frac{1}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$$

مشتقة الدوال الزايدية

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x=\operatorname{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x=-\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x=-\operatorname{sech} x\tanh x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x=-\operatorname{csch} x\coth x$$

مشتقة الدوال الزايدية العكسية

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

تذكر ان

$$\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad ,|x|\geq 1$$
$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x|<1$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اوجد

$(a)\quad \sinh^{-1}1=$

$(b)\quad \cosh^{-1}2=$

$(c)\quad \tanh^{-1}\frac{1}{2}=$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

$(a)\quad y=\sinh x^2$

$(b)\quad y=\cosh^4 x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

$(c)\quad y=\tanh^{-1}(x^2)$

$(d)\quad y=\operatorname{sech}\sqrt{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

$(e)\quad y=x^2\cosh^2 x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

$(a)\quad y = \sinh e^{2x}$

$(b)\quad y = x\cosh x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

$(c)\quad y = \tanh^{-1}\sin x$

$(d)\quad y = \sqrt{\sinh x + 1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اوجد قانون صريح للدالة $\sinh^{-1} x$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

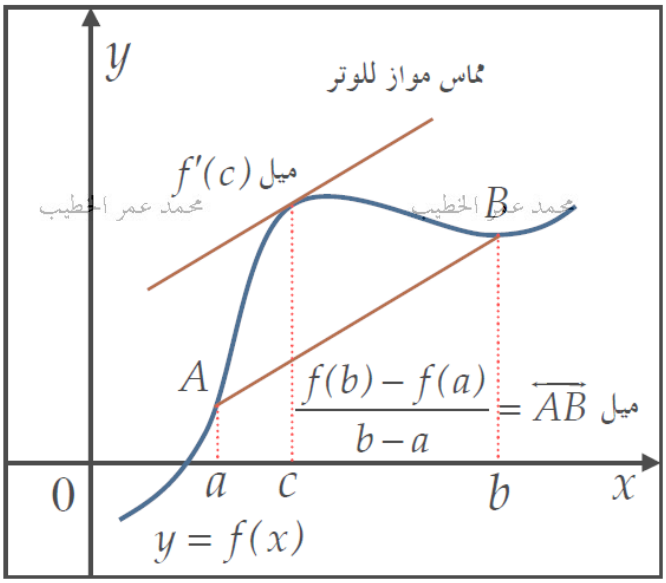
نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات

إذا كانت الدالـــة $y = f(x)$

- متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$
- قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

فأنه توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة (a, b) يكون عندهـــا

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



الدالة لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة إذ لم يتحقق أحد الشرطين أو كلاهما بمعني إذا كانت الدالة غير متصلة على الفترة $[a, b]$ أو غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

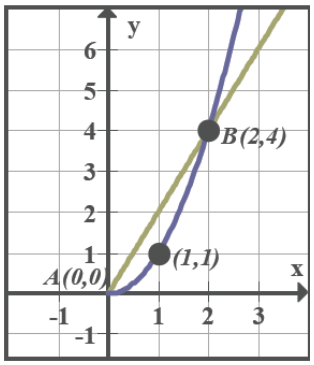
نظرية رول

في نظرية القيمة المتوسطة اذا كانت $f(a) = f(b)$ فأن يوجد c على الاقل تنتمي الى (a,b) التي تحقق $f'(c) = 0$ وتسمى نظرية رول

ملاحظات مهمة

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) ويوجد n من الجذور للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ فأن للدالة $f'(x)$ على الاقل $n-1$ من الجذور تنتمي الى الفترة (a,b)

(1) بين أن الدالة $f(x) = x^2$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة [2 , 0] . ثم أوجد c في المعادلة : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ على هذه الفتـــــرة .



محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) بين أن الدالة $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة [1 , −3] . ثم أوجد قيمة c

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) بين أن الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة [2 , 0] . ثم أوجد قيمة c

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت $f(x) = x^2 + x + 1$

أثبت أن الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفتـــــرة $[\ 0\ ,\ 4\ ]$

أوجـــــد قيمـــة C في الفترة $(\ 0\ ,\ 4\ )$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اذا كانت $f(x) = 4 - x + \sin x$ حيث x تقع في الفترة $[-\pi, \pi]$

اثبت ان الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على هذه الفترة ثم اوجد قيمة C

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & ,1 < x \le 2 \end{cases}$ بين أن الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

ثم اوجد كل قيمة من c التي تعينها النظرية .

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اي من الدوال التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ مع ذكر السبب:

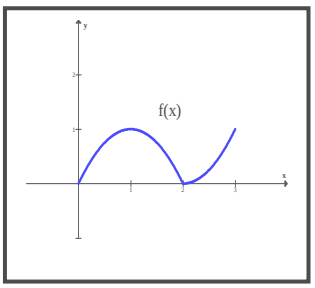
(1) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(3) $f(x)=|x+1|$

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x>2 \\ 5x-4 & x\le 2 \end{cases}$

(5)



محمد عمر الخطيب

(1) بفرض أن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[\ 2\ ,\ 5\ ]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(\ 2\ ,\ 5\ )$

أجب عن ما يلي .

(أ) هل $f(x)$ تحقق نظرية القيمـــة المتوســـطة ؟

(ب) إذا كانت $2 \le f'(x) \le 5$ من أجل جميع قيم x فـــي الفتـــــرة $(\ 2\ ,\ 5\ )$.

أثبت أن $6 \le f(5) - f(2) \le 15$

(2) اذا كانت $f(x) = x^2 + ax$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ وكان $f'(c) = 1$

حيث $c \in (0,3)$ اوجد

(أ) قيمة الثابت a

(ب) .قيمة الثابت c

(1) اذا كانت $f(x)=x^3+x^2$ فاوجد قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[-1,1]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) اذا كانت $f(x)=\sin x+\cos x$ فاوجد قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[0,\pi]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) اذا كانت: $f(x)=x+\frac{4}{x}$ اوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[1,4]$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اثبت ان للدالة $f(x)=x^5+4x-1$ لها جذر واحد فقط

(2) اثبت ان للدالة $f(x)=x^3+4x-3$ لها جذر واحد

(3) اثبت ان للمعادلة $x^4+6x-1=0$ حلان بالضبط

محمد عمر الخطيب

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin x| \le |x|$ لكل $x \neq 0$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ لكل $x \neq y$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) حيث

$f(a) = a, f(b) = b$ فأثبت انه يوجد عدد مثل c على الاقل تنتمي الى (a,b) بحيث $f(c) = 1$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(4) اذا كانت $f(x), g(x)$ دوال متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) حيث

$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ فأثبت ان للدالتين مماسان متوازيان عند نقطة ما في الفترة (a,b)

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اجابات التمارين العامة موجودة
في آخر صفحة بالوحدة
محمد عمر الخطيب

تمارين عامة على الوحدة الثانية

محمد عمر الخطيب

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\frac{d}{dx}\left[e^x \ln x\right] =$

(a) $\frac{1}{x}e^x$ (b) $e^x + \frac{1}{x}$

(c) $\frac{e^x}{x} + \ln x$ (d) $\frac{e^x}{x} + e^x \ln x$

محمد عمر الخطيب

(2) $\frac{d}{dx}\left[\sin^3 3x\right] =$

(a) $3\sin^2 3x \cos 3x$ (b) $6\sin^2 3x \cos 3x$

(c) $3\sin^2 3x$ (d) $6\sin^2 3x$

محمد عمر الخطيب

(3) $\frac{d}{dx}\left[x^x\right] =$

(a) $x^x \ln x$ (b) $e^x\left[1+\ln x\right]$

(c) $x^x\left[1+\ln x\right]$ (d) $x^x\left[1+x\right]$

محمد عمر الخطيب

(4) $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x^2\right] =$

(a) $\frac{1}{x^4+1}$ (b) $\frac{x}{x^4+1}$

(c) $\frac{4x^3}{x^4+1}$ (d) $\frac{2x}{x^4+1}$

محمد عمر الخطيب

(5) $\frac{d}{dx}\left[2^{\sin x}\right]=$

(**a**) $2^{\cos x}$ (**b**) $2^{\sin x}\cos x$

(**c**) $2^{\sin x}\cos x\ln 2$ (**d**) $-2^{\sin x}\cos x\ln 2$

(6) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+1}\right]=$

(**a**) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (**b**) $\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

(**c**) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (**d**) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$

(7) $\frac{d}{dx}\left[\csc^3 3x\right]=$

(**a**) $-3\csc^3 3x\cot 3x$ (**b**) $-9\csc^3 3x\cot 3x$

(**c**) $-27\csc^3 3x\cot 3x$ (**d**) $9\csc^3 3x\cot 3x$

(8) $\frac{d}{dx}\left[e^{-\ln x}\right]=$

(**a**) 1 (**b**) -1

(**c**) $\frac{1}{x^2}$ (**d**) $-\frac{1}{x^2}$

(9) $\frac{d}{dx}\left[\ln(\sqrt{e^x+\sin x}+\sqrt{\sin x})+\ln(\sqrt{e^x+\sin x}-\sqrt{\sin x})\right]$

(**a**) 1 (**b**) e

(**c**) 0 (**d**) -1

(10) $\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}\sin x\right]=$

(**a**) $\sec x$ (**b**) $\csc x$

(**c**) $\sin x$ (**d**) $\cos x$

(11) $\frac{d^2}{dx^2}\left[\sin^2 x\right]$

(**a**) $-2\cos 2x$ (**b**) $2\cos 2x$ (**c**) $-2\sin 2x$ (**d**) $2\sin 2x$

(12) $\sinh^{-1}2=$

(**a**) $\ln\left[2+\sqrt{5}\right]$ (**b**) $\ln\left[2+\sqrt{3}\right]$ (**c**) $\ln\left[5+\sqrt{2}\right]$ (**d**) $\ln\left[\sqrt{5}-2\right]$

(13) $\frac{d}{dx}\left[\ln\sqrt{x^2+1}\right]=$

(a) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(c) $\frac{x}{x^2+1}$ (d) $\frac{2x}{x^2+1}$

(14) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{3h}=$

(a) $3f'(x)$ (b) $-3f'(x)$

(c) $\frac{1}{3}f'(x)$ (d) $-\frac{1}{3}f'(x)$

(15) اي من الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(a) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ (b) $g(x)=|x-1|$

(c) $h(x)=\begin{cases}2x & ,x>1\\ x^2 & ,x\le 1\end{cases}$ (d) $k(x)=\begin{cases}2 & ,x>0\\ 3 & ,x\le 0\end{cases}$

(16) إذا كانت $f(x)=x^5-2x$ فأن $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=$

(a) 3 (b) 20

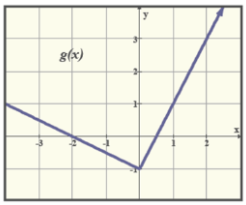
(c) 0 (d) -2

(17) اذا كانت $f'(4)=-8$ فأن $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}$

(a) -2 (b) 2

(c) 0 (d) -32

(18) في الشكل المجاور ان $f(0)\times f'(-2)$ يساوي



(a) 0 (b) -2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(19) ان قيمة x التي يكون عندها المماسان للدالتين $y=x$, $y=x^2+1$ متوازيان هي

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

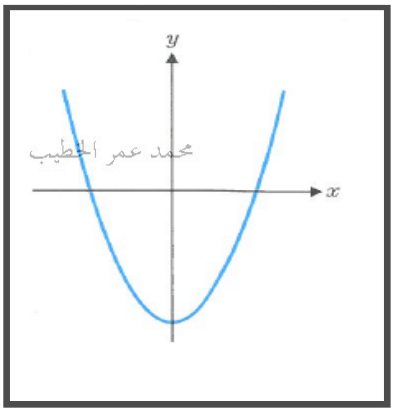
(20) اذا كانت $f(x)=\sqrt{x^3+2x+4}$ ولها الدالة العكسية $g(x)$ فأن $g'(2)$

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

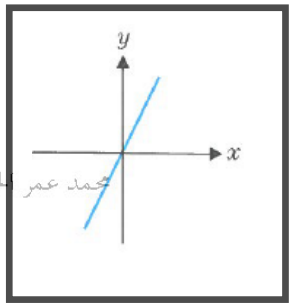
(21) اذا كانت $f(3)=2, f'(3)=-1, f''(3)=4$ فان معادلة العمودي على المماس للدالة $g(x)$ عند $x=3$ هي

(a) $y=-x+5$ (b) $y=x-1$ (c) $y=4x-9$ (d) $y=-4x+1$

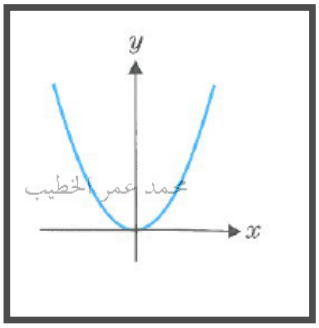
(22) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في تحديد بيان الدالة $f(x)$



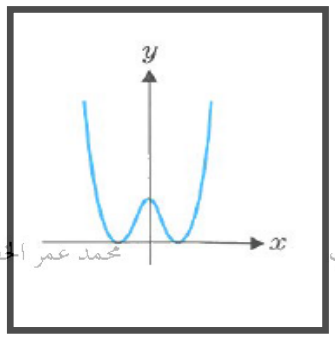
(a)



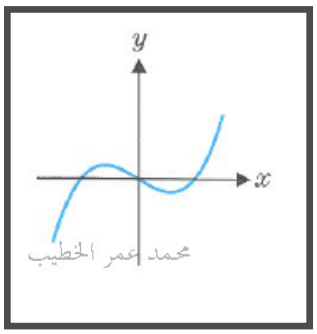
(b)



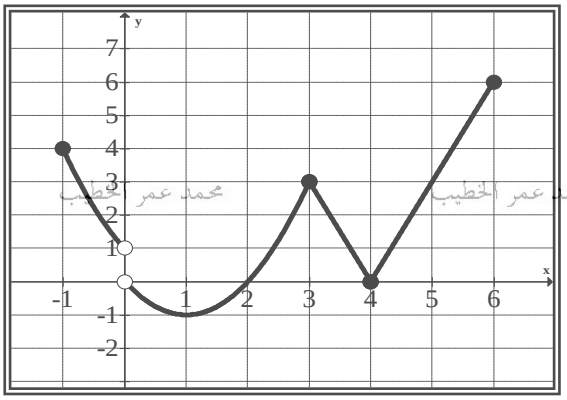
(c)



(d)



(23) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في تحديد اي الفقرات التالية صحيحة



(a) الدالة متصلة وقابلة لاستقاق عند $x=3$

(b) ميل المماس عند $x=4$ يساوي صفر

(c) معدل التغير عند $x=5$ **يساوي** 3

(d) نوع الانفصال عند $x=0$ **يمكن التخلص منه**

(24) معادلة المماس للعلاقة $x^2+2y^2=6$ عند النقطة $(2,1)$ هي

(a) $y=-x$ (b) $y=-x+3$ (c) $y=x+2$ (d) $y=x-2$

(25) ان قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول للدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$ على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$ هي

(a) $1,-1$ (b) -1 (c) 1 (d) 1.25

(26) اذا كانت $f(x)=a\,x^2-5x$ تحقق نظرية رول على الفترة $[1,3]$ فان قيمة a هي

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{20}{9}$ (d) $\frac{9}{20}$

(27) موقع المماس الرأسي للعلاقة $x^2+y^2-2y=0$ تكون عند

(a) $y=1$ (b) $y=-1$ (c) $x=1$ (d) $x=-1$

(28) يسقط جسم من قمة برج و تحدد موقعة الدالة $s(t)=64-16t^2$ حيث t بالثواني و s بالامتار فأن متوسط السرعة المتجهه في الفترة الزمنية $[1,2]$ هي

(a) $-48\ m/s$ (b) $48\ m/s$ (c) $2\ m/s$ (d) $1\ m/s$

(29) ان قيمة k التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}x^3 & x<1\\ 3x+k & x\geq 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$ هي

(a) -3 (b) 3 (c) 2 (d) -2

(30) إذا علمت أن: $f(x)\times g(x)=f(x)+2g(x)$ حيث أن كلاً من $f(x)\,,g(x)$ دالتان قابلتان للاشتقاق وأن $g'(1)=3$, $g(1)=2$ فأن $f'(1)$ تساوي

(a) 6 (b) -6 (c) -4 (d) 4

(31) اذا كانت $f(x)=x^3-a\,x$ حيث $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3)-f(3)}{h}=22$ فان قيمة a تساوي

(a) -5 (b) 49 (c) 1 (d) 5

(32) إذا كان منحنى الدالة: $y=2x^3-kx+2$ له مماس افقي عند $x=-1$, فأن قيمة k تساوي

(a) 6 (b) -6 (c) 0 (d) 2

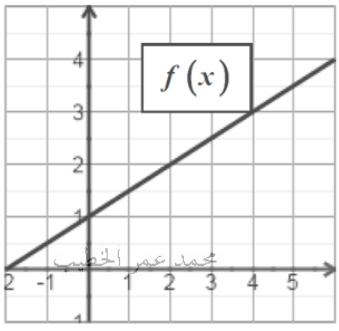
(33) ان الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة : $y=x^2+2x$ مع محور السينات الموجب عند $x=\frac{-3}{2}$ هي

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(34) قذف جسيم رأسياً لأعلى فتحرك حسب العلاقة $s(t)=60t-5t^2$ حيث t بالثواني و s بالأمتار فأن اقصى ارتفاع يصل الية الجسم هو

(a) $60m$ (b) $180m$ (c) $360m$ (d) $120m$

(35) اذا كان الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



فأن $g'(1)$ حيث $g=f^{-1}$ يساوي

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) -2

(36) اذا كانت : $x = 3t^2 - t$, $y = \tan(t + \frac{\pi}{4})$ فأن , $\frac{dy}{dx}$ عند $t = 0$

(a) 2 (b) -2 (c) $-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

(37) يبيع محل ملابس اطفال القطعة بسعر 20 درهم ويبيع سنوياً 25000 قطعة اذا كان السعرالقطعة يزداد بمعدل 2 درهم سنوياً وتنقص المبيعات بمعدل 800 قطعة سنوياً فان معدل تغير الايراد السنوي يساوي

(a) 34000 (b) -34000 (c) 50000 (d) 16000

(38) $\frac{d}{dx}[\sinh x + \cosh x] =$

(a) 1 (b) e^{-x} (c) e^{x} (d) $2e^{x}$

(39) اذا كانت : $y = xe^{x}$, فأن $\frac{d^n y}{dx^n}$ يعطى بالعلاقة

(a) $(2n + x)e^{x}$ (b) $n(1 + x)e^{x}$ (c) $(n + x)e^{x}$ (d) $(n - x)e^{x}$

(40) اذا كانت : $y = e^{xy}$, فأن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(0,1)$ يساوي

(a) 0 (b) e (c) -1 (d) 1

(41) اذا كانت : $y = x^3 + \sin x$ ، فأن $\frac{d^{2018} y}{dx^{2018}}$ يساوي

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(a) $\sin x$ (b) $-\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $-\cos x$

(42) عدد الحلول الحقيقية للمعادلة : $x^5 + 4x - 1 = 0$ هو

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(43) اذا كانت : $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos 2x & , x \geq \frac{\pi}{4} \\ a + bx & , x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ دالة قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$

فأن قيمة b تساوي

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) -1

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(44) ان الزاوية المحصورة بين المستقيم $y = x$ والمماس المرسوم للدالة $y = \frac{1}{x}$ عند النقطة $(1,1)$ تساوي

(a) 45° (b) 90° (c) 180° (d) 135°

(45) ان اذا كان $x = \tan y$ فأن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(a) $\frac{1}{x^2+1}$ (b) $\frac{x}{x^2+1}$ (c) $\frac{1}{y^2+1}$ (d) $\frac{y}{y^2+1}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(46) يتم وصف حركة زنبرك معين بالدالة $f(t)=e^{-t}\cos t$ فأن اول مرة تنعدم السرعة عند الموقع

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}$ (c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}$

(47) اذا كانت $f(x)=x^2+ax$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ وكان $f'(c)=1$

حيث $c\in(0,3)$ فأن قيمة a تساوي

(a) 2 (b) -2 (c) 1 (d) -1

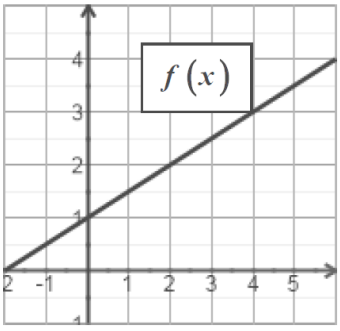
(48) اذا كان $u=2x\sqrt{x}$, $y=u^2-\frac{8}{u}$ فأن $\frac{dy}{dx}$ عند $y=0$ تساوي

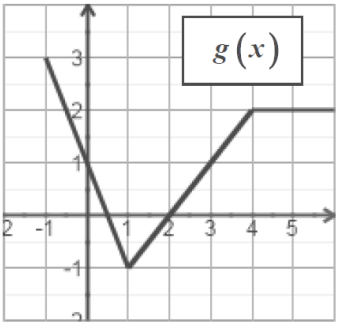
(a) 8 (b) 18 (c) 24 (d) 48

(49) اذا كانت $f(\frac{1}{x})=4x^3-7x+1$ فأن $f'(2)$ تساوي

(a) 1 (b) -1 (c) -4 (d) 4

(50) الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة $f(x),g(x)$





حيث $h(x)=f(g(x))$ فأن $h'(0)$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

محمد عمر الخطيب

الاجابات

1	D	11	B	21	B	31	D	41	B
2	B	12	A	22	D	32	A	42	A
3	C	13	C	23	C	33	C	43	B
4	D	14	D	24	B	34	B	44	B
5	C	15	D	25	C	35	A	45	A
6	A	16	B	26	B	36	B	46	C
7	B	17	D	27	A	37	A	47	B
8	D	18	C	28	A	38	C	48	B
9	A	19	A	29	D	39	C	49	A
10	A	20	B	30	B	40	D	50	D

إنتهت الوحدة الثالثة بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب