كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية	الاجتماعيات	الرياضيات
الصفحة الرسمية على التلغرام	الاسلامية	العلوم
الصفحة الرسمية على الفيسبوك	الانجليزية	
التربية الاخلاقية لجميع الصفوف	اللغة العربية	
التربية الرياضية		

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

السؤال الأول :- لكل فقرة أربع إجابات ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة :-

1) يكون رمز المجموع للعبارة $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\dots\dots\dots\dots\dots\sqrt{15-1}$ هو

1) $\sum_{i=1}^{14}\sqrt{i}$ 2) $\sum_{i=1}^{15}\sqrt{i-2}$

3) $\sum_{i=1}^{15}\sqrt{2-i}$ 4) $\sum_{i=1}^{14}\sqrt{2i}$

2) قيمة c التي تجعل الدالة $f(x)=ce^{-2x}$; $0\le x\le 1$ دالة كثافة احتمال هي

a) 2.5 b) -2.5 c) 1.7 d) -1.7

3) ايا من الدوال التالية ليس pdf على $[0,1]$

a) $f(x)=3x^2$ b) $f(x)=\dfrac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f(x)=\dfrac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

4) إذا كانت $A(x)=2(x+1)^2$ تمثل مساحة مقطع عرضي حيث $1\le x\le 4$ فإن حجم المجسم يكون :-

1) $V=\int_1^4 2(x+1)^2dx=78$ 2) $V=2\pi\int_1^4 2(x+1)^2dx=156\pi$

3) $V=\pi\int_1^4 2(x+1)^2dx=78\pi$ 4) $V=\int_1^4 4(x+1)^4dx=\dfrac{2372}{5}$

5) إذا كان $\int_9^7 f(x)dx=-4$, $\int_{-1}^9 \frac{1}{2}f(x)dx=5$, $\int_5^7 f(x)dx=2$ فإن $\int_{-1}^5 f(x)dx=$

1) -4 2) 3

3) 4 4) 10

6) $\int \dfrac{5}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx=$

1) $5\cos^{-1}x+c$ 2) $5\sec^{-1}x+c$

3) $5\sin^{-1}x+c$ 4) $5\csc^{-1}x+c$

7) قيمة التكامل غير المحدود $\int \frac{x}{1+x^2}dx =$

1) $\tan^{-1}x + c$ 2) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

3) $2\ln(1+x^2)+c$ 4) $\ln(1+x^2)+c$

---

8) إذا كانت $F(x) = x^3 + \int_x^2 (3t^2 - t)dt$ فإن $F'(2) =$

1) -10 2) 10

3) 2 4) -2

---

9) $\int (\frac{3}{2x} - e^{-3x} + \cos x)dx =$

1) $\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{1}{3}e^{-3x} + \sin x + c$ 2) $\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}e^{-3x} - \sin x + c$

3) $\frac{3}{2}\ln|x| + 3e^{-3x} + \sin x + c$ 4) $\frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{3}e^{-3x} + \sin x + c$

---

10) إذا كانت $f(x) = \cot x$ فإن $\int f''(x)dx =$

1) $\tan x + c$ 2) $\sec^2 x + c$

3) $-\csc^2 x + c$ 4) $-\csc x \cdot \cot x + c$

---

11) $\ln x =$

1) $\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ 2) $\int_0^x \frac{1}{t}dt$

3) $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}dt$ 4) $\int_1^x \frac{1}{t}dt$

---

12) إذا كان $\int_k^2 f(x)dx = 12$ وكانت القيمة المتوسط للدالة $f(x)$ تساوي 4 فإن قيمة $k =$

1) 0 2) -1

3) 1 4) 2

13) إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[-3,4]$ تساوي 5 فإن $\int_{-3}^{4} f(x)dx =$

1) -5 2) -35

3) 35 4) -12

---

14) مركز الكتلة لجسم ما ؟ بكثافة $p(x)=\frac{x}{6}+2$ حيث $0 \le x \le 6$ هي :-

1) 3.2 2) 15

3) 43.55 4) 3

---

15) طول القوس الخاص بجزء من المنحنى $y=x^2$ على الفترة $[0,1]$ هو :-

1) ≈ 2.4789 2) ≈ 0.4789

3) ≈ 1.4789 4) ≈ 3.4789

---

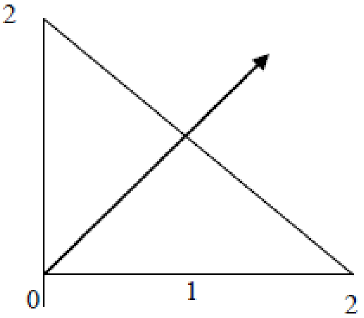
16) مساحة السطح المتولد من دوران $y=\sqrt{x}$ حول المحور x بالفترة $[1,2]$ يساوي

1) ≈ 8.5483 2) ≈ 0.4789

3) ≈ 8.11 4) ≈ 8.28315

---

17) المساحة المحددة بالمنحنيات $y=0$, $y=2-x$, $y=x$ كما في الشكل المجاور تساوي



1) 3 2) 4

3) 1 4) 2

---

18) قيمة $\int_{1}^{3} e^{2\ln x} dx =$

1) $\frac{26}{5}$ 2) 8

3) $\frac{26}{3}$ 4) 4

---

19) قيمة c التي تجعل الدالة $f(x) = ce^{-2x}$; $0 \le x \le 1$ دالة كثافة احتمال هي :

$a)\ 2.5$ $\quad b)\ -2.5$ $\quad c)\ 1.7$ $\quad d)\ -1.7$

---

20) دون حساب عملية التكامل يكون الحدين الأدنى والأعلى للتكامل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx$

1) $\left[\frac{-\sqrt{2}\pi}{24}, \frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right]$ $\qquad$ 2) $\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{6}, \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right]$

3) $\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{24}, \frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right]$ $\qquad$ 4) $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right]$

السؤال الثاني :- 1): باستخدام التكامل بالتعويض أوجد :-

1) $\int \tan^5 x \cdot \sec^4 x\, dx$

$u = \tan x \to dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\qquad$ $u = \tan x \to dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u^5 \cancel{\sec^4 x} \cdot \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$ $\qquad$ $\int u^5 (\tan^2 x + 1)\, du \to \int (u^7 + u^5)\, du = \ldots\ldots\ldots$

2) $\int 3x^2 \sqrt{1+x^3}\, dx$

$u = 1 + x^3 \to dx = \frac{du}{3x^2}$

2)استخدم التكامل بالكسور الجزئية لإيجاد

3) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x-10}\, dx$

$\frac{2x-1}{x^2-3x-10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$

$A(x+2) + B(x-5) = 2x - 1$

$A = \frac{9}{5}\ , B = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $\int \frac{2x-1}{x^2-3x-10}\, dx = \frac{9}{5}\ln|x+2| + \frac{5}{7}\ln|x-5| + c$

3)احسب حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة المحددة بواسطة $y=\sqrt{x}\ , y=2 , x=0$

حول 1) محور x 2) محور

$$1)\quad V=\pi\int_0^4 (2^2-(\sqrt{x})^2)dx$$

$$2)\quad V=\pi\int_0^4 \left|(2^2-(4-\sqrt{x})^2\right|dx$$

4)حدد أولاً نصف قطر وارتفاع الصدفة التالية ثم أحسب الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بواسطة

$y=0\ ,\ y=x^2$ حول محور $x=2$ حيث $-1\le x\le 1$

$r=2-x$

$h=x^2$

5) بطريقة التكامل بالأجزاء (التجزئ) أوجد :- $\int x^3 \ln x\, dx$

$$u=\ln x \qquad dv=x^3dx$$

$$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3\ln x\,dx=uv-\int v du$$

$$\int x^3\ln x\,dx=\frac{x^4}{4}.\ln x-\int\frac{x^4}{4}.\frac{1}{x}dx$$

$$\int x^3\ln x\,dx=\frac{x^4}{4}.\ln x-\frac{1}{16}x^4+c$$

6) أوجد الموقع النهائي $s(t)$ حيث السرعة المتجهة هي $v(t)=30e^{\frac{-t}{4}}\ ,\quad s(0)=1$

$$s(t)=\int 30e^{\frac{-t}{4}}dt\quad ,\quad s(0)=1$$

$$S(t)=-120e^{\frac{-t}{4}}+c \qquad S(t)=-120e^{\frac{-t}{4}}+121$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$\int \frac{\sin x \,.\cos x}{1-\cos x}dx$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}dx$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{cox^2 x}dx$$

6) $\int \left(\frac{5}{3\sqrt{1-x^2}} - \sin x\right)dx =$

1) $\frac{5}{3}\cos^{-1}x - \cos x + c$

2) $\frac{3}{5}\sin^{-1}x + \cos x + c$

3) $\frac{5}{3}\sin^{-1}x + \cos x + c$

4) $\frac{5}{3}\tan^{-1}x - \sin x + c$

---

7) إذا كانت $F(x) = \int_x^{-4} (2t^2 + t - 6)dt + 4x^2$ فإن $F'(2) =$

1) -4

2) 20

3) 12

4) -12

---

8) $\int \left(2e^{0.01x} - \sec^2 x + \frac{2}{x}\right)dx =$

1) $200e^{0.01x} - \tan x + \ln|x| + c$

2) $200e^{0.01x} - \tan x - 2\ln|x| + c$

3) $200e^{0.01x} + \sec x - \ln|x| + c$

4) $200e^{0.01x} - \tan x + 2\ln|x| + c$

---

9) إذا كانت $f(x) = x + \tan^{-1}x + 4$ فإن $\int f''(x)dx =$

1) $\frac{x^2}{1+x^2} + c$

2) $\frac{2+x^2}{1-x^2} + c$

3) $\frac{2+x^2}{1+x^2} + c$

4) $\frac{2+x^2}{x^2-1} + c$

---

10) إذا كانت $\int_2^4 f(x)dx = 12$ وكانت $F(x)$ دالة أصلية . وكانت $F(2) = 8$ فإن

$F(4) =$

1) 20

2) 12

3) -20

4) 4

11) إذا كان $\int_{2}^{a} f(x)dx = 18$ وكانت القيمة المتوسط للدالة $f(x)$ تساوي 6 فإن قيمة $a =$

1) 5 2) -5

3) -6 4) 6

---

12) يعبر عن المساحة الواقعة بين $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ والمحور x حيث $0 \le x \le 2$ بالشكل :-

1) $\int_{0}^{2} f(x)dx$ 2) $-\int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

3) $\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$ 4) $\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$

---

13) إذا كان $\sum_{i=3}^{8} 3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} k \sin x \, dx$ فإن قيمة $k =$

1) 24 2) -24

3) 18 4) -18

---

14) حجم المجسم مع مساحة المقطع العرضي $A(x) = \tan^2 x$ حيث $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ يساوي :-

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = 1 + \frac{\pi}{4}$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \sqrt{2}$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = 1 - \frac{\pi}{4}$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15) يكون نصف القطر r وإرتفاع الصدفة الإسطوانية h المحدد بالتمثيل البيانيّ $y=4-x^2$ والمحور x حول المستقيم $x=3$ هما :-

1) $r=3-x \quad , h=x^2-4$ 2) $r=3+x \quad , h=x^2-4$

3) $r=3-x \quad , h=x^2+4$ 4) $r=3-x \quad , h=4-x^2$

---

16) قيمة الحدين الأدنى والأعلى للتكامل $\int_{-2}^{2}(4x^2+3)dx$ دون حساب عملية التكامل هما :-

1) $[76,76]$ 2) $[3,19]$

3) $[12,76]$ 4) $[0,19]$

---

17) $\int \frac{1+\cos^2 x \, . \sin x}{\cos^2 x} dx =$

1) $\sec^2 x+\sin x+c$ 2) $\tan x+\cos x+c$

3) $\tan x-\cos x+c$ 4) $-\tan x-\cos x+c$

---

18) بإستخدام الطريقة العددية لتقريب مساحة السطح المتولد من تدوير المنحنى $y=x^4$ لكل $0 \le x \le 1$ حول المحور x هي :-

1) $s=2\pi\int_0^1 x^4\sqrt{1+x^4}dx \approx 1.56$ 2) $s=2\pi\int_0^1 x^4\sqrt{1+(4x^3)^2}dx \approx 3.43$

3) $s=2\pi\int_0^1 x^4\sqrt{1+4x^3}dx \approx 2.32$ 4) $s=\pi\int_0^1 x^4\sqrt{1+(4x^3)^2}dx \approx 1.71$

(19 إذا كانت $F(x)=x.\ln x+c$ فإن المشتقة العكسية لها هي :-

1) $f(x)=x+\ln x$ 2) $f(x)=1-\ln x$

3) $f(x)=1+\ln x$ 4) $f(x)=x-\ln x$

(20 يعبر عن مساحة المنطقة التي تحدها المنحنيات $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ دون حساب قيمتها بالشكل :-

1) $\int_0^2(\sqrt{x}-x^2)dx$ 2) $\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)dy$

3) $\int_0^1(\sqrt{x}+x^2)dx$ 4) $\int_0^1(\sqrt{y}+y^2)dy$

السؤال الثاني :- 21): باستخدام التكامل بالتعويض أوجد :- $\int\cot^3 x.\csc^4 x dx$, $\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$$u=\cot x\rightarrow\frac{du}{-\csc x}=dx$$

$$\int u^3.\csc x.\frac{du}{-\csc x}$$

$$-\int u^3du\rightarrow-\frac{u^4}{4}+c$$

$$\boxed{\int\cot^3 x.\csc^4 x\ dx=-(\cot x)^4+c}$$

$$u=x^3+2\rightarrow\frac{du}{dx}=3x^2$$

$$\int\frac{3x^2}{u^{\frac{1}{2}}}.\frac{du}{3x^2}\rightarrow\int u^{\frac{-1}{2}}du$$

$$\int u^{\frac{-1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c\rightarrow 2\sqrt{x^3+2}+c$$

22) استخدم التكامل بالكسور الجزئية لإيجاد $\int\frac{x+1}{x^2+x-6}dx$

$$\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(x+3)=x+1$$

$$x=2\rightarrow B=\frac{3}{5}$$

$$x=-3\rightarrow A=\frac{2}{5}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{\frac{2}{5}}{x+3}+\frac{\frac{3}{5}}{x-2}$$

$$\boxed{\int\frac{x+1}{x^2+x-6}dx=\frac{2}{5}\ln|x+3|+\frac{3}{5}\ln|x-2|+c}$$

<u>السؤال الثالث :-</u> 23) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $y = x^2 - 1 \quad , \quad y = 7 - x^2$

$$A = \int_{-2}^{2} (7 - x^2 - (x^2 - 1))dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx$$

$$A = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$

$$A = \ldots\ldots$$

24):- أوجد معادلة المماس للمنحنى $F(x) = \int_{4}^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{t+5}} dt$ **عند** $x = 2$

$$x = 2 \rightarrow y = 0$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} .2x$$

$$m = F'(x) = \frac{2}{3}$$

المعادلة المطلوبة $\boxed{y = \frac{2}{3}(x-2)}$

25) بطريقة التكامل بالأجزاء أوجد :- $\int (2x^2 + 5x)e^{3x} dx$ **(استخدم صيغة الإختزال)**

$$\begin{array}{ll} 2x^2 + 5x & e^{3x} \\ 4x + 5 & \frac{1}{3}e^{3x} \\ 4 & \frac{1}{9}e^{3x} \\ 0 & \frac{1}{27}e^{3x} \end{array}$$

$$\int (2x^2 + 5x)e^{3x} dx \quad = \frac{1}{3}(2x^2 + 5x)e^{3x} - \ldots\ldots\ldots$$

أكمل الحل ....

<u>السؤال الأول:-</u> اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :-

1) $\int \frac{\tan x}{\cos x} dx =$

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

$a)\ \tan^2 x + c \quad ,b)\ \sec x + c \quad ,c)\ \ln|\cos x| + c \quad ,d)\ \sec^2 x + c$

---

2) **تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية** $19.6 m/s$ **بتجاهل مقاومة الهواء فإن المعادلة التي تمثل ارتفاع الكرة في أي زمن** t **هي :-**

$a)\ h(t) = -19.6t + 4.9t^2 \quad ,c)\ h(t) = 19.6t - 4.9t^2 \quad ,b)\ h(t) = 19.6t + 4.9t^2 \quad ,d)\ h(t) = -19.6t - 4.9t^2$

---

3) **الدالة الأصلية للتكامل** $\int \ln x \, dx =$

$a)\ x\ln x + c \quad ,b)\ x\ln x + x + c \quad ,c)\ \ln x - x + c \quad ,d)\ x\ln x - x + c$

---

4) **الدالة الأصلية للتكامل** $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$ **هي :-**

$a)\ \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \quad b)\ \ln|1-x| + c \quad c)\ \tan^{-1} x + \ln(1+x^2) + c \quad d)\ \ln|1+x|$

---

5) $\int e^{\frac{1}{2}\ln x} dx =$

$\int x^{\frac{1}{2}} dx =$

$a)\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \quad ,b)\ \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + c \quad ,c)\ 2x^{\frac{1}{2}} + c \quad ,d)\ \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$

---

6) $\int \frac{3}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{3})^2}} dx =$

$a)\ 3\sin^{-1}(\frac{x-2}{3}) + c \quad ,b)\ \sin^{-1}(\frac{x+2}{3}) + c \quad ,c)\ 9\sin^{-1}(\frac{x-2}{3}) + c \quad ,d)\ \sin^{-1}(\frac{x-2}{3}) + c$

7) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx =$

$\int (\sec^2 x + 1)dx =$

a) $\tan x + x + c$, b) $\tan^2 x + x + c$, c) $\sec x + x + c$, d) $\tan x + x^2 + c$

---

8) $\int \csc^2 2x \, dx =$

a) $-2\cot x + c$ b) $-\frac{1}{2}\cot 2x + c$, c) $\frac{1}{2}\cot 2x + c$, d) $-\frac{1}{2}\cot x + c$

---

9) التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ يكتب بالشكل

a) $\lim_{R\to 1^+}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ b) $\lim_{R\to 1^-}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ c) $\lim_{R\to 0^-}\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ d) $\lim_{R\to 0^+}\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

---

10) المساحة المحددة بالدالة $f(x)=9-x^2$ ومحور x على الفترة $[-3,3]$ هي :-

a) 72 b) 36 c) 18 d) 32

$\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx =$

---

11) $\int \tan^4 x \, dx =$

a) $\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + x + c$ b) $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$ c) $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + c$ d) $\tan^3 x - \tan x + c$

---

12) لتكن R هي المنطقة المحددة بالمنحنى $y=x^2$, $y=1$ فإن الحجم الناتج من دوران R حول محور y هو :-

a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) 3π

$v=\int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2 dy =$

---

13) يكون ارتفاع الصدفة المحددة بالمنطقة $y=2-x^2$, $y=x^2$ بالدوران حول $x=2$ أنه

a) $h=2x^2-2$ b) $h=2x^2+2$ c) $h=2-2x^2$ d) $h=2+2x^2$

أوجـد قيمة كل مما يلي :

① $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x + x^2}$

② $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - x - 1}$

③ $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

④ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} x}{\sin x}$

⑤ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ على الفترة $[-2 , 3]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = 4x^{5/4} + 8x^{1/4}$ على الفترة $[0 , 4]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & : x<0 \\ x^3 - 4x & : x\geq 0 \end{cases}$ المتصلة على الفترة $[-3 , 3]$

تمــارين

① في كل مما يلي استخدم (اختبار المشتقة الأولى) لإيجاد :

a) النقاط الحرجة b) فترات تزايد الدالة c) فترات تناقص الدالة d) القيم القصوى المحلية

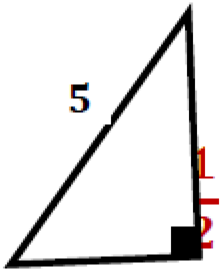
❶ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x$

تزايد $(-\infty , 1] , [5 , \infty)$ ، تناقص $[1 , 5]$ عظمى $\frac{7}{3}$ ، صغرى $\frac{-25}{3}$

$f(x)=x^3-12x+3$

❸ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية ووتره يساوي $5\ cm$ ؟ . ما أبعادة ؟



$$\frac{1}{2}x \times y \Rightarrow A = \frac{1}{2}x\left(\sqrt{25-x^2}\right) \ : x \in [0\,,5]$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left\{1 \times \left(\sqrt{25-x^2}\right) + \frac{-2x^2}{2\left(\sqrt{25-x^2}\right)}\right\} = 0$$

$$25 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.5 \in [0\,,5]$$

$$x = -\sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.5 \notin [0\,,5]$$

x	0	3.5	5
$f(x)$	0	6.25	0

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{\frac{25}{2}} \Leftarrow$ الأبعاد هما $3.5\,,3.5$

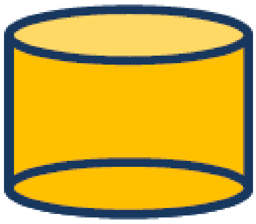
يجعلان المساحة أكبر ما يمكن

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على إسطوانةشكل دائرية قائمة . الأبعادما التي تستخدم أقل مادة ؟ممكنة

المعادلة المساعدة

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad : r > 0$$



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Longrightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

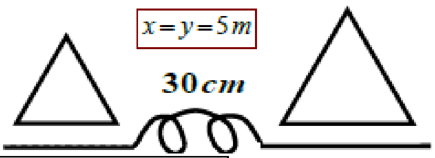
$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Longrightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$$

r	0	5.42	∞
A'	$-$	0	$+$
A	$\searrow$	$A(5.42)$	$\nearrow$

أ: توجد قيمة صغري مطلقة عند $r = 5.42$

$$\therefore \; h \approx 10.84 \,,\; r \approx 5.42$$

17) سلك طوله $30\ cm$ نريد أن نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الأضلاع عين طول ضلع كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن .



المعادلة المساعدة

$$3x + 3L = 30$$

$$x + L = 10$$

$$L = 10 - x$$

$$x \in (0\,, 10)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + L^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (10 - x)^2) \;\; = 0 \Longrightarrow x = 5$$

$$A'' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4|_{x=5} > 0$$

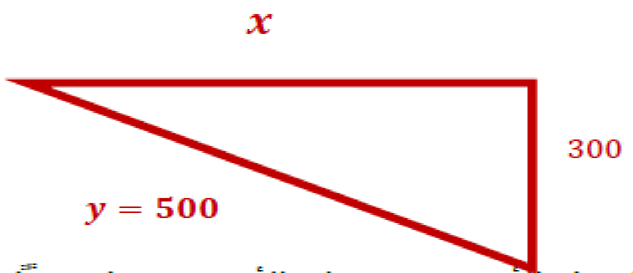
$\therefore$ توجد قيمة صغري مطلقة عند $x = 5$ طولي ضلعي المثلثين هي $5, 5\ cm$

(4) كانت طائرة محمد الورقية على ارتفاع $300ft$ قذفتها الريح بمعدل $25\ ft/sec$.

ما السرعة التي يجب أن يترك فيها محمد خيط الطائرة عندما تكون الطائرة على بعد $500\ ft$ منه؟

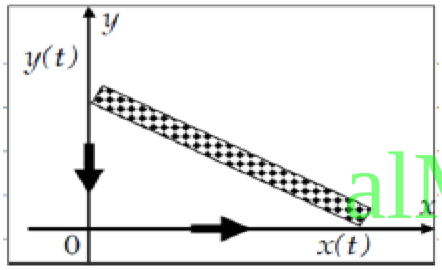
$$\therefore \quad y^2 = x^2 + (300)^2 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 500\frac{dy}{dt} = 400 \times 25$$

$$\frac{dy}{dt} = 20ft/sec$$



(5) سلم طولة $13\ ft$ موضوع أحد على جدار منــزل والطرف الآخر موضوع على الأرض, يتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل 5ft / sec عندما كان الطرف على بعد $12\ ft$ من المنزل.

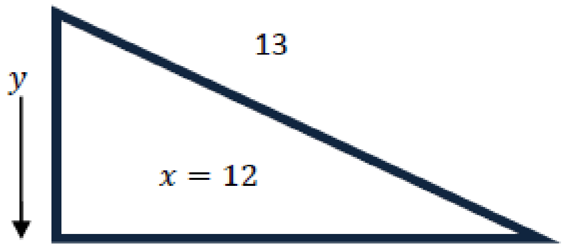
- ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم على الحائط عند تلك اللحظة؟



$$y^2 + x^2 = 169 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 10\frac{dy}{dt} + 24 \times 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -12ft/sec$$

- ما معدل تغير مساحة المثلث الذي يتكون من الحائطوالأرضالسلم عند تلك اللحظة؟



$$A = \frac{1}{2}x \times y \Rightarrow A' = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x\right) = \frac{1}{2}(5 \times 5 - 12 \times 12) = -59.5\ ft^2/sec$$

تدريب

مكعب من المعدن يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله فإذا تزايد طول حرفه بمعدّل ثابت $0.01\ cm/min$ أوجـد :

1) معدّل تغير حجمه في اللحظة التي يكون فيها طول حرفه $6\ cm$. $\boxed{1.08\ cm^3/min}$

2) معدّل تغير مساحته السطحية عند تلك اللحظة. $\boxed{0.72\ cm^2/min}$