كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية | الاجتماعيات | الرياضيات

الصفحة الرسمية على التلغرام | الاسلامية | العلوم

الصفحة الرسمية على الفيسبوك | الانجليزية

التربية الاخلاقية لجميع الصفوف | اللغة العربية

التربية الرياضية

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

الوحدة السابعة

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

مراجعة الصيغ وطرائق التكامل INTEGRATION TECHNIQUES

التكاملُ غيرُ المحدودِ
(1) (a) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
(2) $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
(3) $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
(4) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
(5) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
(6) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
(7) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

dlMnahj.com/ae

8) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

9) $\int sinax\,dx = \frac{-cosax}{a} + c$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + c$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = sin^{-1} x + c$

12) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = sec^{-1}x + c$

وسوف نعمم ما يلي عن طريق استخدام تعويض بسيط:

**) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

**) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

**) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}sec^{-1}\frac{x}{a} + c$

في الأمثلة التالية انتبه للتكاملات التي تحل عن طريق التعويض العادي والتكاملات التي تستخدم ln في الإجابة

مثال أوجد قيمة التكامل

1. $\int \frac{2}{16+x^2}dx$

alManahj.com/ae

2. $\int \frac{3}{4+4x^2}dx$

3. $\int \frac{5}{x^2+36}dx$

4. $\int \frac{5}{3\sqrt{1-x^2}}dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

6. $\int \frac{4}{5\sqrt{4-x^2}}dx$

7. $\int \frac{9}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx$

alManahj.com/ae

8. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}dx$

9. $\int \frac{7}{|4x|\sqrt{x^2-9}}dx$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{9-(x-5)^2}}dx$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}dx$

alManahj.com/ae

12. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

13. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

14. $\int \frac{4}{5+2x+x^2}dx$

alManahj.com/ae

15. $\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2}dx$

16. $\int \frac{4x}{5+2x+x^2} dx$

17. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx$

alManahj.com/ae

18. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

19. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

20. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

alManahj.com/ae

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$

22. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

23. $\int_{-2}^{-1} \frac{lnx^2}{x}\,dx$

alManahj.com/ae

24. $\int \frac{4}{x^{1/3(1+x^{2/3})}}\,dx$

التكامل بالأجزاء Integration by Parts

قاعدة التكامل بالأجزاء

$$\int udv = uv - \int vdu$$

تكامل سهل حسابه

مثال استخدم التكامل بالأجزاء أو الجدولي(الاختزال) لحساب :

1. $\int x\,cosx\,dx$

alManahj.com/ae

2. $\int x^2 sinx\,dx$

3. $\int x^2 sin4x\ dx$

4. $\int_0^1 x^2 sin\pi x\ dx$

alManahj.com/ae

5. $\int x\ \sec^2 x\ dx$

6. $\int 3x \csc^2 x \, dx$

7. $\int (x^2 - 5x)\, e^x \, dx$

alManahj.com/ae

8. $\int x^4 \, e^{-x} \, dx$

9. $\int x^2\, e^{-3x}\, dx$

10. $\int x^2\, e^{x^3}\, dx$

alManahj.com/ae

11. $\int e^x\, cosx\, dx$

12. $\int e^{2x}\ sinx\ dx$

13. $\int e^{x}\ sin4x\ dx$

alManahj.com/ae

14. $\int\ sinx\ sin2x\ dx$

15. $\int x^3 \ lnx \ dx$

16. $\int \ lnx \ dx$

alManahj.com/ae

17. $\int (lnx)^2 \ dx$

18. $\int \sqrt{x}\, lnx\, dx$

19. $\int x^3\, e^{x^2}\, dx$

alManahj.com/ae

20. $\int sin\sqrt{x}dx$

21. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

22. $\int \sin(lnx)dx$

alManahj.com/ae

23. $\int \cos^{-1} x\, dx$

$24. \int tan^{-1} x \, dx$

طرائق تكامل الدوال المثلثية TRIGONOMETRIC TECHNIQUES OF INTEGRATION

أولا: الصيغة $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

الحالة1:اذا كان n أو m عددا فردياً موجب

مثال أوجد قيمة التكامل

alManahj.com/ae

$1. \int sin \quad x \ cos^4 x \, dx$

$2. \int sin^3 x \ cos^4 x \, dx$

3. $\int cos^3 x \ sin^4 x \ dx$

مكامل مع قوة فردية *** ****
alManahj.com/ae

4. $\int \sqrt{sinx}\ cos^3 x \ dx$

5. $\int \sqrt{sinx}\ cos^2 x \ dx$

6. $\int \sqrt{sinx}\, cos^5 x\, dx$

7. $\int \sqrt{cosx}\, sin^3 x\, dx$

alManahj.com/ae

الحالة2: اذا كان n أو m عددان صحيحان زوجيان موجبان

8. $\int sin^2 x\, dx$

9. $\int \cos^4 x \, dx$

10. $\int \cos^2(x+1)\, dx$

alManahj.com/ae

11. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} cos^3 3x \; sin^3 3x \, dx$

ثانياً: الصيغة $\int tan^m x \ \sec^n x \ dx$

الحالة1:اذا كان m عدد صحيح فردي موجب

مثال أوجد قيمة التكامل

12. $\int tan^3 x \ \sec^3 x \ dx$

alManahj.com/ae

13. $\int tan x \ \sec^3 x \ dx$

14. $\int tan(2x+1)\, sec^3(2x+1)\, dx$

15. $\int x\, tan^3(x^2+1)\, \sec(x^2+1)\, dx$

alManahj.com/ae

الحالة2:اذا كان n عدد صحيح زوجي موجب

مثال أوجد قيمة التكامل

1. $\int tan^2 x\ \sec^4 x\, dx$

2. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

3. $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

alManahj.com/ae

4. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

اوجد قيمة التكامل:

$$\int secx\ dx$$

التعويض مع الدوال المثلثية

alManahj.com/ae

ملخص التعويضات في الدوال المثلثية في الجدول التالي:

التعبير	التعويض مع الدوال المثلثية	الفترة	المتطابقة
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

مثال أوجد قيمة التكامل

1. $\int\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx$

2. $\int x^3 \sqrt{8+x^2}\, dx$

alManahj.com/ae

3. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$

alManahj.com/ae

5. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

الكسور الجزئية Partial Fractions

أولاً : **درجة البسط أقل من درجة المقام**

أ) المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى)

مثال أ) أوجد الكسور الجزئية بتفكيك $\frac{5x-1}{x^2-2x-15}$

alManahj.com/ae

ب) أوجد $\int f(x)\,dx$ حيث $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-2x-15}$

مثال أوجد الكسور الجزئية بتفكيك $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ ثم أوجد $\int f(x)\,dx$

alManahj.com/ae

مثال أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب والدالة الأصلية.

1. $\frac{2}{(x-5)(x-3)}$

2. $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$ (عامل مكرر)

3. $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ (عامل مكرر)

alManahj.com/ae

ب) المقامات التي بها عامل من الدرجة الثانية ولا يحلل

مثال أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب

1. $\frac{x+2}{x^3+x}$

alManahj.com/ae

2. $\frac{x^2+3x+2}{x^3-1}$

3. $\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$

ثانياً : **درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام**

alManahj.com/ae

مثال اكتب الدالة النسبية على الصورة $q(x)+\frac{r(x)}{h(x)}$ حيث درجة r (x) أصغر من درجة h (x)

ثم أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب من $\frac{r(x)}{h(x)}$ ثم أوجد التكامل غير المحدود لكل كسر

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}$$

جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية

من خلال جدول التكامل المذكور في الدرس هنالك بعض الصيغ التي تستخدم لحساب قيم بعض التكاملات مباشرة والتي كنا نجدها باستخدام التعويض مع الدوال المثلثية .

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c$$

مثال أوجد قيمة التكامل

alManahj.com/ae

1. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}\,dx$

2. $\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx$

ملاحظة راجع بعض الصيغ الأخرى الموجودة في الدرس.

يتبع درسي المعادلات التفاضلية في وقت لاحق .