physics

دائـــرة التعليم والمعرفـة
DEPARTMENT OF EDUCATION AND KNOWLEDGE

الثالث الثانوي متقدم

المجال الكهربائي

محمد سعيد ختام

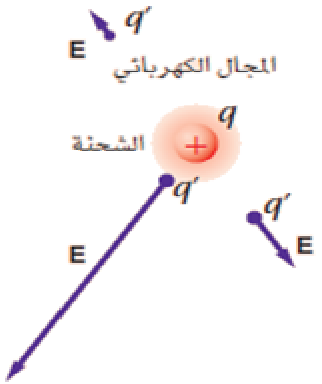
M Saeed Khattam

المجال الكهربائي :

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة بأنه محصلة القوة المؤثرة في شحنة مقسوما على مقدار تلك الشحنة .

$$\boxed{E = \frac{F}{|q|}}$$

E : شدة المجال الكهربائي عند النقطة (N/C)
F : القوة المؤثر في الشحنة q (N)
q : الشحنة المتأثرة بالمجال (C)

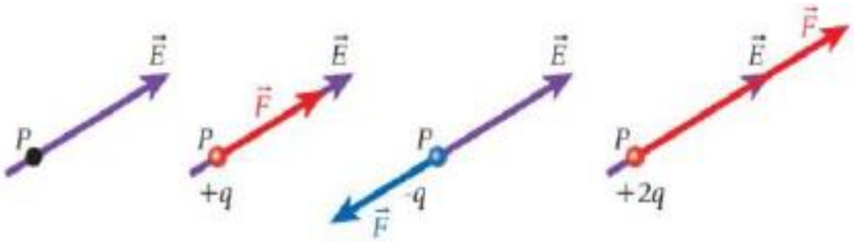


يمكن كتابة المجال بصيغة المتجهات :
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

أما اتجاه المجال الكهربائي عند نقطة فهو اتجاه القوة المؤثرة على شحنة اختبار موجبة موضوعة عند تلك النقطة . (دائما يبتعد عن الشحنة الموجبة ويتجه نحو الشحنة السالبة)

ملاحظات :

- الشحنة الاختبارية يجب أن تكون موجبة وصغيرة حتى لا تؤثر على المجال .
- المجال الكهربائي يعتبر خاصية لتلك المنطقة من الفضاء ومقدار المجال الكهربائي عند نقطة لا يعتمد على مقدار شحنة الاختبار لأن النسبة بين القوة و الشحنة الاختبارية تكون ثابتة دائما أما القوة الكهربائية فتعتمد على مقدار شحنة الاختبار ونوعها.
- يمكن أن نحصل على مقدار القوة المؤثرة في شحنة وضعت في مجال من العلاقة : $F = |q| E$ أما اتجاه القوة فيكون : باتجاه المجال إذا كانت الشحنة موجبة ، وعكس اتجاه المجال إذا كانت الشحنة سالبة .



قانون المجال الكهربائي بدلالة الشحنة النقطية المولدة له :

إن مقدار المجال الناتج عن شحنة نقطية q عند نقطة تبعد عن الشحنة مسافة r يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = k\frac{|q|}{r^2}}$$

في حالة وجود مصادر متعددة للمجالات الكهربائية في الوقت نفسه مثل الشحنات النقطية المتعددة يتم إيجاد المجال الكهربائي عند أي نقطة محددة من خلال تراكب المجالات الكهربائية الناتجة من كل المصادر.

أمثلة :

١- وُضِعت كرة بيلسان وزنها 2×10^{-3} N في مجال كهربائي شدته 6×10^{4} N/C ، يتجه رأسيًّا إلى أسفل .ما مقدار ونوع الشحنة التي يجب أن توضع على الكرة، بحيث توازِن القوة الكهربائية المؤثرة فيها قوة الجاذبية الأرضية، وتبقى الكرة معلّقة في المجال؟

....

....

٢- وضعت شحنة ($q_1 = + 2 \times 10^{-9}$ C) عند (x = 3 m) وشحنة أخرى ($q_2 = + 4 \times 10^{-9}$ C) عند (x = -2 m)

أ- أوجد مقدار المجال عند نقطة الأصل وحدد اتجاهه ؟

....

....

....

....

ب- مقدار القوة التي يخضع لها الكترون يوضع عند نقطة الأصل واتجاهها ؟

....

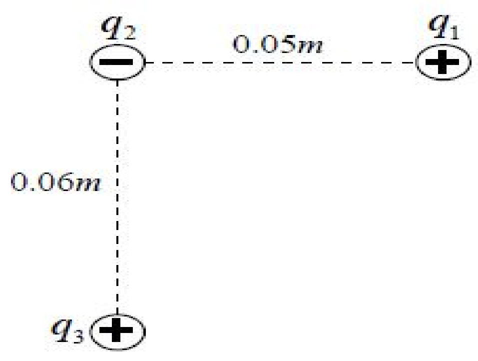
....

ج- موقع النقطة التي ينعدم عندها المجال الكهربائي ؟

....

....

٣- ثلاث شحنات نقطية ($q_1 = +6\ nC$) و ($q_2 = +4nC$) و ($q_3 = -9nC$) كما في الشكل اوجد مقدار المجال الكهربائي عند الشحنة (q_2) وحدد اتجاهه ثم أوجد مقدار القوة التي تخضع لها (q_2) وحدد اتجاهها .



....

....

....

....

المدرس : محمد سعيد ختام

٤- النقطتان A , B تقعان في المجال الكهربائي لشحنة نقطية q فإذا كان بعد A عن الشحنة يساوي ثلاثة أمثال بعد B عن الشحنة فأوجد النسبة بين شدة المجال عند A إلى شدة المجال عند b .

....

....

٥- ثلاث شحنات نقطية ثابته $(q_1 =+3x10^{-9}\ C)$ ، $(q_2 =+25x10^{-9}\ C)$ ، $(q_2 = -4x10^{-9}\ C)$

موضوعة على الترتيب في النقاط (0,a) ، (0,0) ، (b,0) ما المجال الكهربائي عند النقطة p (b,a)

علما بأن : a = 3m , b = 4m

....

....

....

....

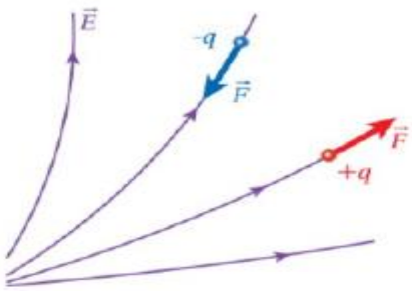
....

....

....

خطوط المجال الكهربائي :

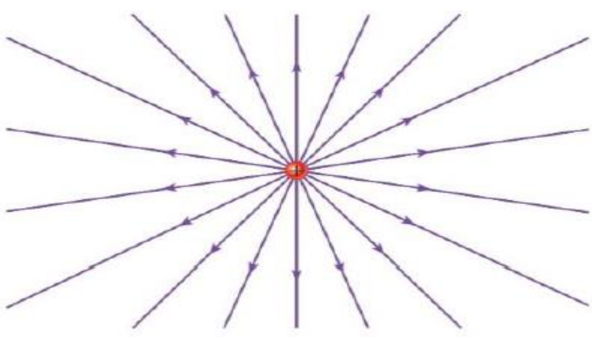
يمكن ان نتصور تغير المجال الكهربائي وشدته من خلال رسم خطوط المجال الكهربائي وهي تمثل بيانيا محصلة القوى المتجهة المبذولة على وحـــدة شحنة اختبار موجبة

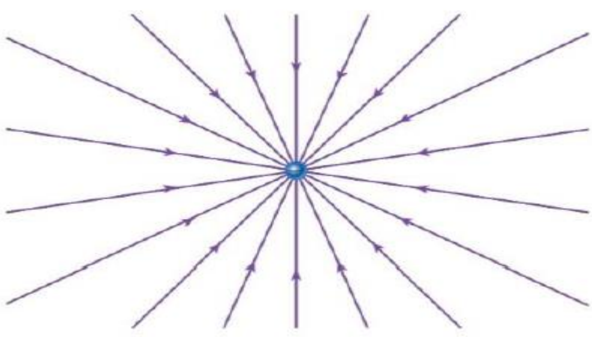


وكثافة خطوط المجال تعبر عن مقدار المجال . ويكون اتجاه القوة هو نفسه اتجاه خط المجال في المجال الكهربائي غير المنتظم تكون القوة الكهربائية عند نقطة معينة مماسية لخطوط المجال .

- الشحنات النقطية المنفردة:

الشحنات الموجبة تنشأ الخطوط من هذه الشحنات وتنتهي في الشحنات السالبة في اللانهاية وبالعكس للموجبة

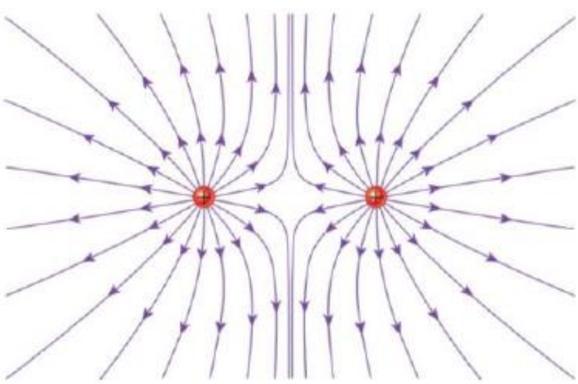


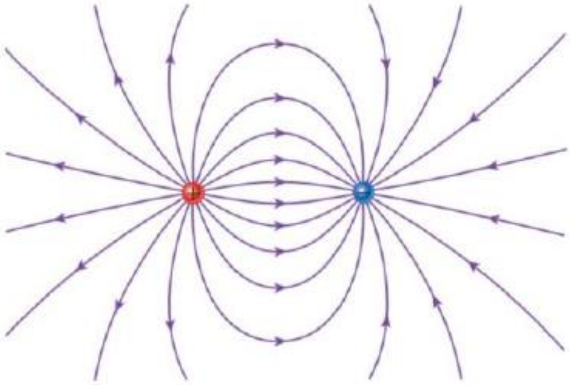


المدرس : محمد سعيد ختام

ـ شحنتان نقطتين متساويتان بالمقدار :

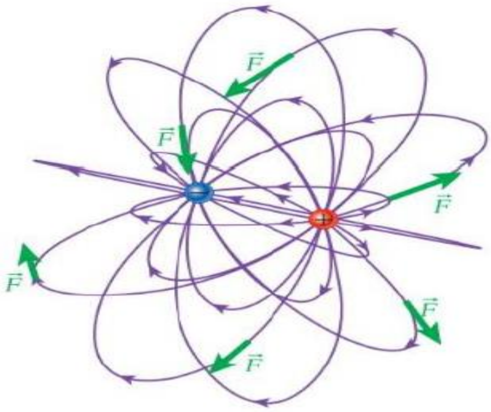
اذا كانت الشحنتان مختلفتان في النوع فتنشأ خطوط المجال من الشحنة الموجبة وتنتهي في الشحنة السالبة وبالقرب من الشحنتين تكون تشبه خطوط المجال الناتجة من شحنة نقطية واحدة لأن تأثير الشحنة الثانية يكون أضعف وكلما اقتربنا من الشحنتين تكون الخطوط أكثر كثافة وبالتالي المجال أكبر.
أما اذا كانت الشحنتان متماثلتان في النوع فإن خطوط المجال لا تتصل بين الشحنتين بل تنتهي في اللانهاية





ملاحظات :

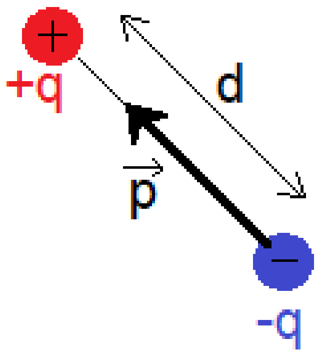
ـ خطوط المجال لا تتقاطع مع بعضها البعض أبدا لأنه لو تقاطعت لأصبح في نقطة التقاطع اتجاهين للقوة المحصلة في هذه النقطة وهذا مستحيل .



ـ في الشكل المجاور توضيح للقوة المؤثرة في شحنة موجبة والناتجة عن المجال الكهربائي لشحنتين مختلفتين في النوع متساويتين في المقدار في وسط ثلاثي الأبعاد .

المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي قطب :

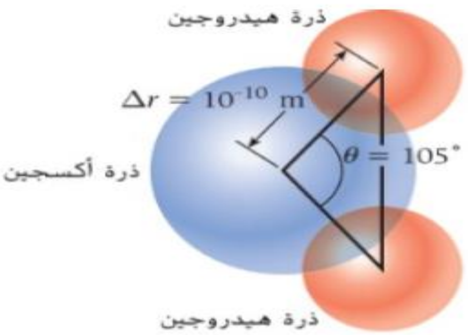
يسمى النظام المكون من جسمين مشحونين بشحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة ثنائي القطب الكهربائي **وندعو الخط الواصل بين الشحنتين بمحور ثنائي القطب .**



نعرف كمية متجهة باسم عزم ثنائي القطب الكهربائي P يكون اتجاه عزم ثنائي القطب هذا من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة وهو عكس اتجاه خطوط المجال الكهربائي ونحصل على المقدار p لعزم ثنائي القطب الكهربائي من خلال المعادلة :

$$\boxed{P = q\,d}$$

حيث q مقدار أي من الشحنتين ، d المسافة الفاصلة بين الشحنتين ، وحدة قياس P هي : C m



مثال : باعتبار جزئ الماء شحنتين موجبتين عند نواتي الهيدروجين وشحنتين سالبتين عند موقع نواة الأكسجين ما عزم ثنائي القطب الكهربائي الناتج للماء معتمدا على القياسات على الرسم ؟

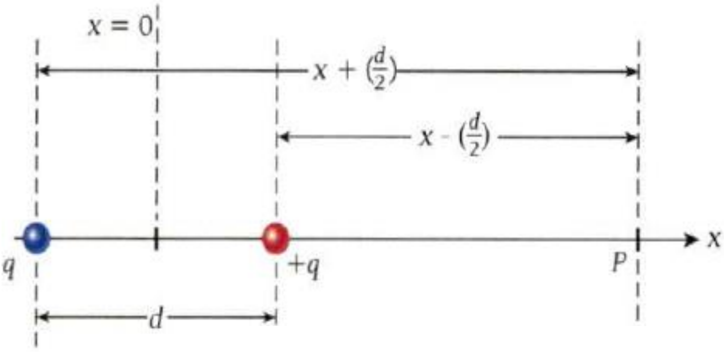
....

....

....

المجال الكهربائى الناتج عن ثنائى القطب على محور ثنائى القطب :

يمكن إيجاد المجال الكهربائي عند نقطة على مسافة x عن مركز ثنائي القطب كبيرة بالمقارنة مع البعد بين الشحنتين كما يلي :



$$E = k\frac{q}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} - k\frac{q}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2}$$

$$E = k\,q\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2}\right)$$

بتوحيد المقامات :

$$E = k\,q\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2}\right)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \qquad \left(x-\frac{1}{2}d\right)^2$$

$$E = k\,q\left(\frac{x^2+xd+d^2-x^2+xd-d^2}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2}\right)$$

$$E = k\,q\,\frac{2xd}{\left[(x)^2-\left(\frac{1}{2}d\right)^2\right]^2}$$

و عندما $x>>d$ تصبح العلاقة :

$$E = k\,q\,\frac{2xd}{x^4}$$

$$E = k\,\frac{2qd}{x^3}$$

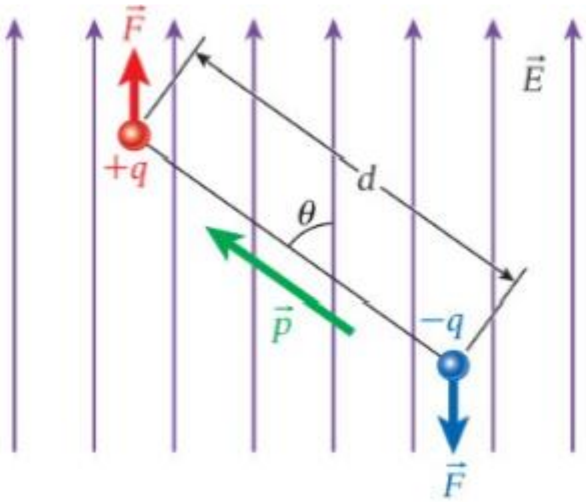
النتيجة : تناقص المجال عند الابتعاد عن ثنائي القطب أكبر من تناقصه عند ابتعاده عن الشحنة النقطية .

$$\boxed{\mathbf{E} = k\frac{2qd}{x^3} = k\frac{2p}{x^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}}$$

مثال : استنتج عبارة المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب على مسافة Y عمودية من مركز ثنائي القطب وأكبر بكثير من البعد بين الشحنتين ؟

....
....
....
....
....
....
....
....
....

ثنائي القطب في مجال كهربائي منتظم :

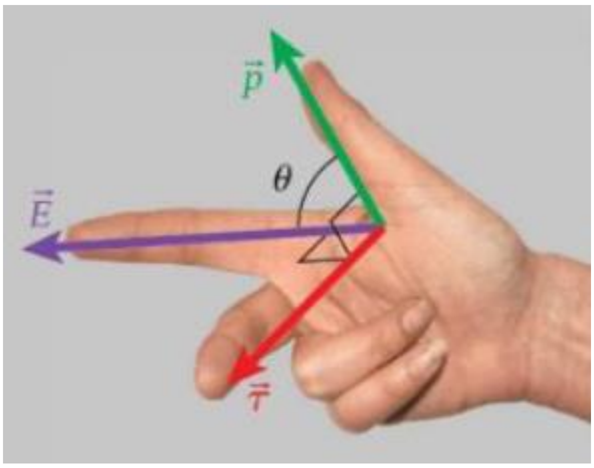


عند وضع ثنائي قطب في مجال منتظم فإن المجال الكهربائي يبذل على كل من الشحنتين قوتين متساويتين بالمقدار متعاكستين بالاتجاه وهذا يولد عزم دوران **τ** يمكن استنتاجه لنصل للعلاقة :

$$\boxed{\tau = P\,E\,\sin\Theta}$$

حيث Θ هي الزاوية بين متجه عزم ثنائي القطب ومتجه المجال الكهربائي .

ويمكن كتابته بصورة ضرب اتجاهي كما يلي : $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$



ويتحدد اتجاه عزم دوران ثنائي القطب باستخدام قاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهي حيث يشير الإبهام إلى الحد الأول في الضرب الاتجاهي وهو P في هذه الحالة ويشير إصبع السبابة إلى اتجاه الحد الثاني E فيشير الإصبع الوسطى إلى اتجاه ناتج الضرب الاتجاهي **τ** المتعامد على الحدين .

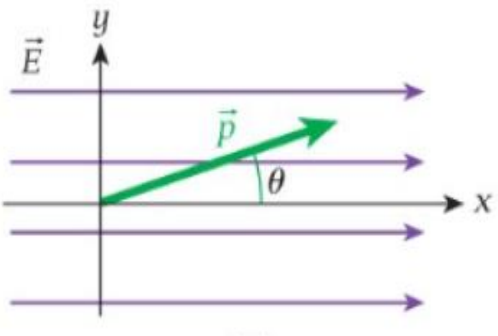
المدرس : محمد سعيد ختام

ملاحظات :

١- يكون عزم دوران ثنائي القطب معدوم إذا كان متجه عزم ثنائي القطب منطبق على متجه المجال الخارجي ويكون أكبر ما يمكن عندما يكون متجه عزم ثنائي القطب عمودي على متجه المجال الخارجي

٢- عند وضع ثنائي القطب في مجال منتظم فإن محصلة القوى المؤثرة به معدوم أما إذا كان المجال غير منتظم فهناك محصلة للقوى وفي الحالتين هناك عزم دوران .

٣- مبدأ عمل فرن المايكروويف هو أن جزيئات الماء لها عزم ثنائي قطب ولذلك عند تعرضها لمجال خارجي تتعرض لعزم دوران يسبب دورانها فإذا كان المجال الخارجي متغير الاتجاه بشكل سريع جدا فإن جزيئات الماء تتحرك في ذبذبات دورانية مسببة احتكاك شديد مما يولد حرارة ٠



مثال : وضع ثنائي قطب كهربائي مقدار عزمه $P=1.5{\bullet}10^{-12}$ C m في مجال كهربائي مقداره 500 N/C اوجد عزم دوران ثنائي القطب عندما كانت الزاوية بين المجال وعزم ثنائي القطب 15^{o}.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حساب المجال الكهربائي لشحنات موزعة بانتظام :

عندما تكون الشحنات موزعة بشكل منتظم على أجسام ذات أشكال هندسية مختلفة فإننا يمكن أن نوجد كثافة الشحنة كما يلي :

التوزيع الخطى للشحنات :

عندما تكون الشحنة موزعة بشكل منتظم على طول خط مستقيم فإن الكثافة الخطية للشحنة λ تمثل شحنة وحدة الأطوال :

$$\lambda = \frac{q}{x} \quad ⇨ \quad q = \lambda x$$

وحدة قياس λ هي : $C.m^{-1}$

التوزيع السطحى للشحنات :

عندما تكون الشحنة موزعة بشكل منتظم على سطح فإن الكثافة السطحية للشحنة σ تمثل شحنة وحدة المساحات :

$$\sigma = \frac{q}{A} \quad ⇨ \quad q = \sigma A$$

وحدة قياس σ هي : $C.m^{-2}$

التوزيع الحجمى للشحنات :

عندما تكون الشحنة موزعة بشكل منتظم على حجم فإن الكثافة الحجمية للشحنة ρ تمثل شحنة وحدة الحجوم :

$$\rho = \frac{q}{V} \quad ⇨ \quad q = \rho V$$

وحدة قياس ρ هي : $C.m^{-3}$

لحساب المجال عند نقطة الناتج عن توزيعات عامة للشحنة ، نقوم بتقسيم الشحنة إلى عناصر تفاضلية صغيرة dq ونوجد المجال الكهربائي dE كما لو كانت شحنة نقطية ثم نوجد المجال الكلي بحساب المجموع الاتجاهي لهذه المجالات وهو ما نحصل عليه باستخدام التكامل .

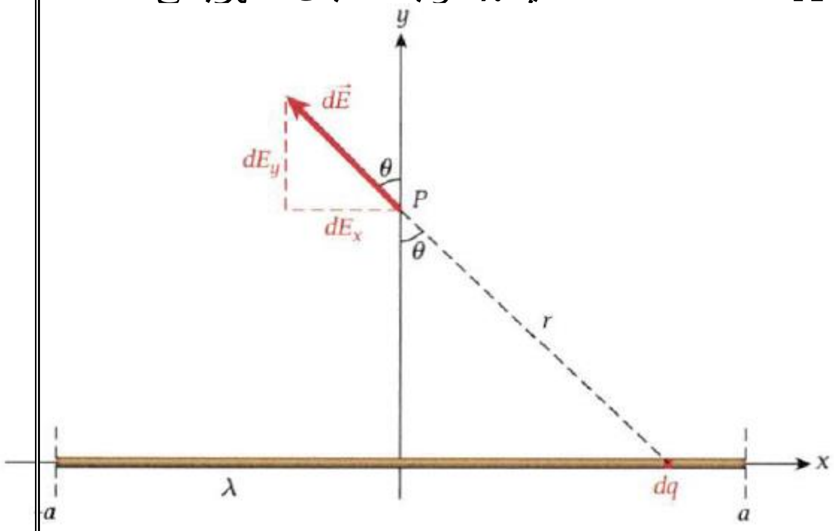
بالنسبة للشحنات التفاضلية نكتب :

$$dq = \lambda dx$$
$$dq = \sigma dA$$
$$dq = \rho dV$$

أما مقدار المجال الناتج عن الشحنة التفاضلية dq فهو :

$$dE = k\frac{dq}{r^2}$$

مثال١ : سلك طوله 2a يقع على امتداد المحور X كثافة شحنته الخطية λ اوجد المجال الكهربائى عند نقطة على المحور y المار من منتصف السلك



الحل :

بسبب التماثل تكون مركبات المجال على

المحور X تعاكس بعضها البعض لذلك

المجال على المحور y فقط .

$$dE_y = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = k\frac{dq}{r^2}\frac{y}{r}$$

لكن : $dq = \lambda dx$ ومنه :

$$dE_y = k\frac{\lambda dx}{r^2}\frac{y}{r} = k\,\lambda\, y\frac{dx}{r^3} = k\,\lambda\, y\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

وبما أنه لكل عنصر شحنة على يمين المحور x وعلى يساره مركبة على المحور y فإن المجال الكلي :

$$E_y = 2\int_0^a dE_y = 2k\lambda y\int_0^a \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

وبحساب التكامل نحصل على :

$$E_y = 2k\lambda y\frac{1}{y^2}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}} = \frac{2k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

عندما يكون السلك لانهائي الطول $a \to \infty$ فإن : $\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}} \to 1$ لأننا نهمل y أمام a

وتصبح العلاقة للمجال على مسافة y على خط يمر بمنتصف السلك تساوي :

$$\boxed{E_y = \frac{2k\lambda}{y}}$$

ملاحظة :

اذا كانت النقطة بعيدة جدا عن سلك محدود الطول فإن المجال يصبح مماثلا للمجال الناتج عن شحنة نقطية

تطبيق : وضع عدد 5×10^6 من الإلكترونات الفائضة على سلك متعادل كهربائيا طوله 2 m ما مقدار المجال الكهربائي عند نقطة على مسافة عامودية 0.1 m عن منتصف السلك ؟

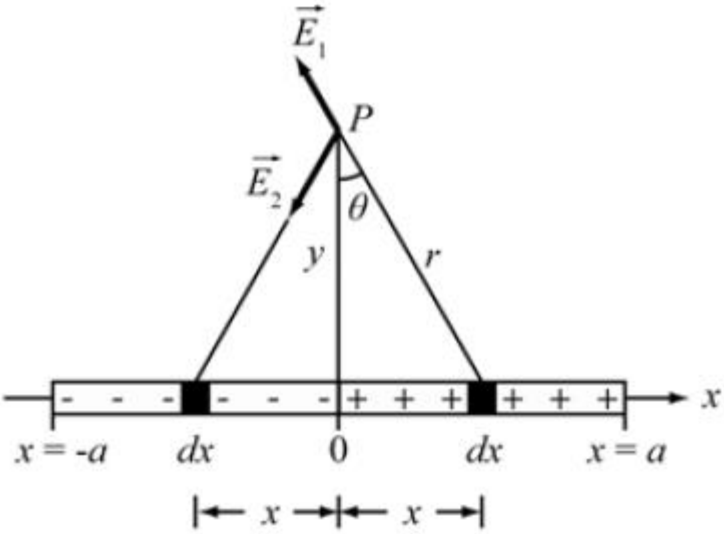
....

....

....

المدرس : محمد سعيد ختام

مثال٢ : سلك طوله 2a يقع على امتداد المحور X كثافة شحنته الخطية λ + عندما 0< x <a كثافة شحنته الخطية λ = عندما -a < x <0 اوجد المجال الكهربائي عند نقطة على المحور y المار من منتصف السلك ؟



الحل :

بسبب التماثل تكون مركبات المجال على

المحور y تعاكس بعضها البعض لذلك

المجال على المحور x فقط .

$$dE_x = -k\frac{dq}{r^2}\sin\theta = -k\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r}$$

لكن : $dq = \lambda dx$

ومنه :

$$dE_x = -k\frac{\lambda dx}{r^2}\frac{x}{r} = -k\lambda\frac{x\,dx}{r^3} = -k\lambda\frac{x\,dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

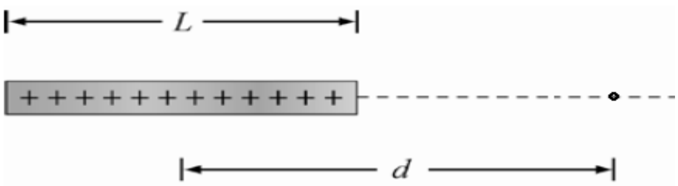
وبما أنه لكل عنصر شحنة على يمين المحور x وعلى يساره مركبة على المحور x فإن المجال الكلي :

$$E = 2\int_0^a dE_x = -2k\lambda\int_0^a \frac{x\,dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

وبحساب التكامل نحصل على :

$$E = -2k\lambda\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^a = -2k\lambda\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]$$

مثال٣: قضيب رقيق طوله L شحنته الكلية Q كثافة شحنته λ أوجد عبارة المجال الكهربائي لنقطة تبعد مسافة d من منتصف القضيب .

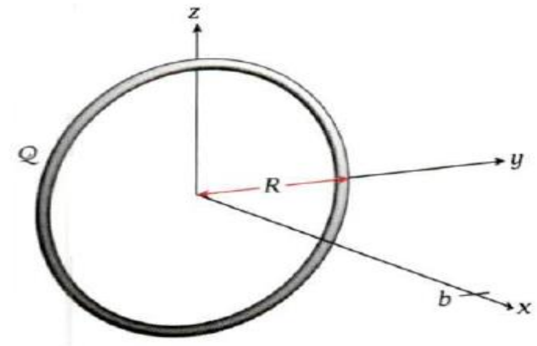


الحل :

$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda dx}{x^2}$$

$$E = \int_{d-L/2}^{d+L/2} dE = \int_{d-L/2}^{d+L/2} k\frac{\lambda dx}{x^2} = k\lambda\int_{d-L/2}^{d+L/2}\frac{1}{x^2}dx$$

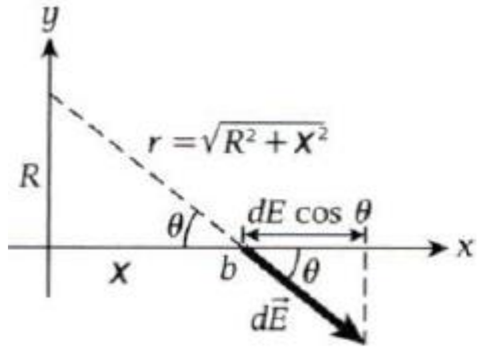
$$E = k\lambda\left(\frac{-1}{x}\right)_{d-L/2}^{d+L/2} = 2k\lambda\left(\frac{1}{2d-L} - \frac{1}{2d+L}\right) = \frac{4k\lambda L}{4d^2-L^2} = \frac{4kQ}{4d^2-L^2}$$



مثال ٤: حلقة مشحونة نصف قطرها R=0.25m لديها كثافة شحنة خطية منتظمة شحنتها 5μC أوجد المجال الكهربائي عند نقطة 0.5 m على محور الحلقة ؟

الحل :

بسبب التماثل تكون مركبات المجال الكهربائي العمودية على محور الحلقة صفر، ويكون المجال الناتج موازيا لمحور الحلقة فقط .



إن المركبة dE_x الموازية للمحور X :

$$dE_x = dE\cos\theta = dE\frac{x}{r} = \frac{x}{r}\,k\frac{dq}{r^2} = \frac{xk}{r^3}\,dq$$

ولدينا : $dq = \lambda\, ds = \dfrac{Q}{2\pi R}ds$ ومنه : $dE_x = \dfrac{xk}{r^3}\,\dfrac{Q}{2\pi R}\,ds$

وبأجراء التكامل على محيط الحلقة نجد :

$$E_x = \int_0^{2\pi R} dE_x = \int_0^{2\pi R}\frac{xk}{r^3}\,\frac{Q}{2\pi R}\,ds = \frac{xk}{r^3}\,\frac{Q}{2\pi R}\int^{2\pi R} ds = \frac{xk}{r^3}\,\frac{Q}{2\pi R}\Big|s\Big|_0^{2\pi R} = \frac{xk}{r^3}\,\frac{Q}{2\pi R}(2\pi R)$$

ويصبح الشكل النهائي :

$$E_x = kQ\frac{x}{r^3} = \frac{k\,Q\,x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

بالتعويض :

$$E_x = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}\right)\left(5.00\cdot10^{-6}\ \mathrm{C}\right)\left(0.500\ \mathrm{m}\right)}{\left[(0.250\ \mathrm{m})^2+(0.500\ \mathrm{m})^2\right]^{3/2}} = 128{,}654\ \mathrm{N/C}$$

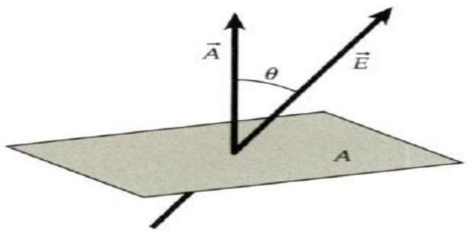
ملاحظة : في مركز الحلقة x=0 ومنه $E_x=0$ وهو متوقع بسبب التناظر .

عند نقطة بعيد جدا عن الحلقة فإننا يمكن أن نهمل R^2 من المقام فنحصل على علاقة تماثل علاقة المجال الناتج عن شحنة نقطية :

$$E_x = k\frac{Q}{r^2}$$

التدفق الكهربائي :

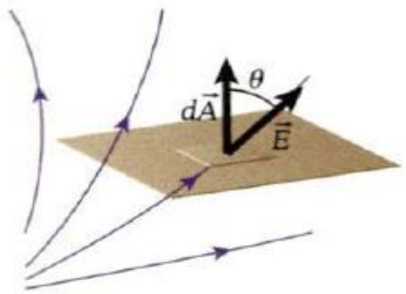
هو عدد خطوط المجال الكهربائي الذي يمر عموديا عبر مساحة معينة وهو يساوي حاصل الضرب العددي لمتجه المجال $\vec{E}$ في متجه المساحة $\vec{A}$ وهو متجه مقداره A واتجاهه عمودي على السطح ويتجه خارجه .



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E\ A\ \text{Cos}\ \Theta$$

حيث Θ الزاوية بين متجه المجال ومتجه المساحة .

تعتبر العبارة السابقة بسيطة في حالة مجال منتظم لكن في حالة مجال غير منتظم يمر عبر سطح مغلق فإننا نحصل على التدفق الكلي من خلال تكامل المجال الكهربائي على السطح المغلق .

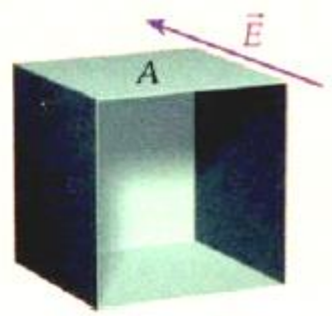


$$\Phi = \oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \oiint E\ dA\ \cos\theta$$

حيث dA عنصر المساحة التفاضلي للسطح المغلق .

Θ الزاوية المحصورة بين المجال الكهربائي وعنصر المساحة التفاضلي .

وحدة قياس التدفق Nm^2/C



مثال : في الشكل مكعب مساحة وجهه A له وجه ناقص يوجد هذا المكعب ذو الأوجه الخمسة في مجال كهربائي منتظم E كما في الشكل ما محصلة التدفق الكهربائي عبر المكعب ؟

....
....
....
....
....
....
....
....
....

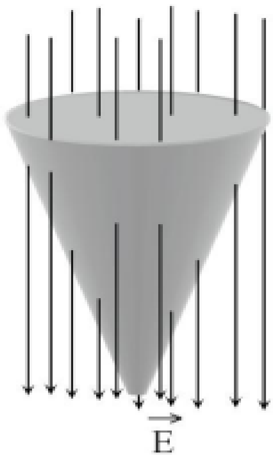
قانون جاوس :

ينص قانون جاوس أن التدفق الكهربائي من خلال سطح مغلق يساوي حاصل قسمة الشحنة الكلية داخل السطح المغلق على السماحية الكهربائية للفراغ :

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

يسمى السطح المغلق بالسطح الجاوسي .

حيث q هي محصلة الشحنة الكلية داخل السطح المغلق بمعنى أخر عند عدم وجود محصلة للشحنات داخل سطح مغلق فإن التدفق الكهربائى معدوم .

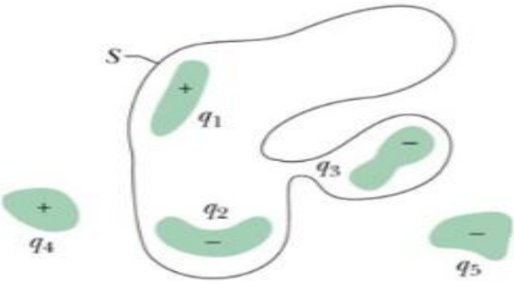


مثال١ : في الشكل مخروط قطر قاعدته 0.4 m وارتفاعه 2 m يجتازه عموديا على قاعدته مجال كهربائيا منتظما مقداره 5000N/C كما في الشكل ما مقدار التدفق الذي يجتاز السطح المخروطي فقط وماذا يصبح هذا التدفق عندما يصبح المجال أفقي نحو x الموجب .

....

....

مثال٢ : في الشكل إذا كانت $q_1=q_4=4\mu C$ ، $q_2=q_3=q_5=-2\ \mu C$ أوجد التدفق من خلال السطح المغلق ؟



....

....

....

....

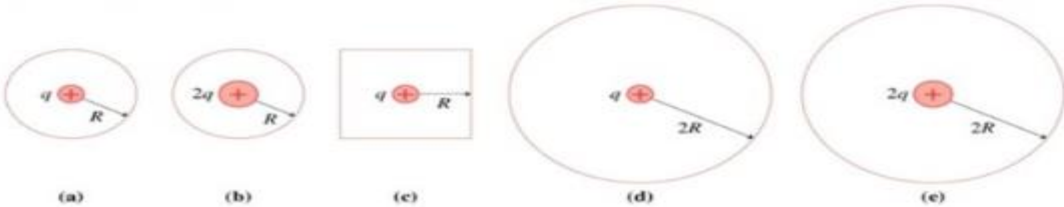
....

مثال٣ : وضعت شحنة Q داخل مكعب مغلق طول ضلعه a احسب التدفق الكهربائي من خلال أحد وجوهه

....

....

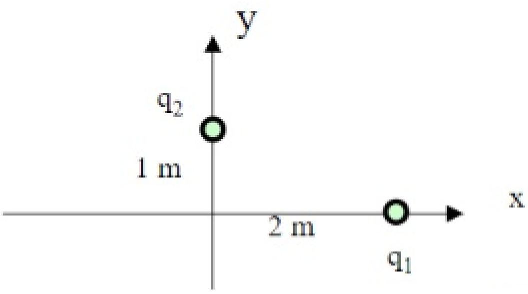
مثال٤ : رتب السطوح حسب مقدار التدفق من الأقل للأعلى .



....

المدرس : محمد سعيد ختام

مثال٥ : في الشكل إذا كانت $q_1=4nC$ ، $q_2=-6nc$ أوجد التدفق من خلال مكعب مركزه عند نقطة الأصل وطول ضلعه يأخذ القيم التالية : 1.5m ، 0.75m , 2.1m أعد المسألة إذا كان الشكل كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها له نفس القيم .



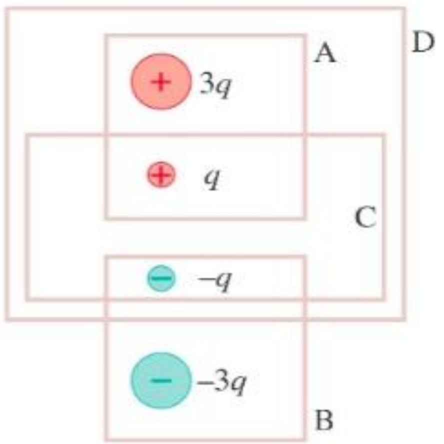
....

....

....

....

مثال٦ : رتب السطوح حسب مقدار التدفق من الأعلى للأقل .



....

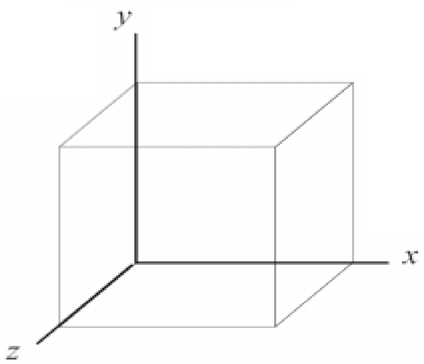
....

....

....

مثال٧ : في الشكل المجاور مكعب طول ضلعه 0.4 m يجتازه مجال كهربائي باتجاه المحور x الموجب ومقداره يتغير وفق المعادلة : $E_x=(5-2x-4x^2)\times10^4\ N/C$

أ- أوجد التدفق الكهربائي الذي يجتاز المكعب .



....

....

....

....

....

ب- كمية الشحنة الكلية الموجودة داخل المكعب .

....

....

....

صيغة أخرى لقانون جاوس :

باستخدام قانون التدفق الكهربائي السابق يمكن كتابة قانون جاوس بالشكل التالي :

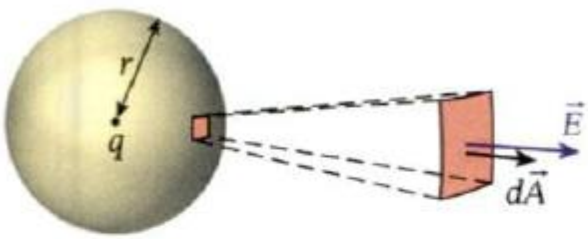
$$\boxed{\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

لهذه الصيغة لقانون جاوس قوة حسابية كبيرة يمكن استخدامها في **حساب المجال الكهربائي** الناتج عن كل أنواع توزيعات الشحنة المتصلة والمنفصلة بشكل أسهل من السابق بشرط أن يكون لتوزيع الشحنة تماثل بدرجة عالية يسمح بوضع افتراضات حول تماثل مجاله الكهربائي وبالتالي الاستفادة من حالات التماثل .

استنتاج قانون جاوس من قانون كولوم :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

نأخذ سطحا جاوسيا كرة نصف قطرها r بحيث تكون الشحـنة في مركـز الكـــرة ، يكون المجال الكهربائي متعامدا مع كل عنصر تفاضلي للسطح الكروي وبالتالي متجه المجال يوازي متجه السطح التفاضلي ويكون متجه السطح التفاضلي مبتعدا دائـــما عن السطح الكروي .



$$\Phi = \oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \oiint E\, dA \cos 0^\circ = \oiint E\, dA$$

لكن المجال له المقدار نفسه في أي مكان في الفراغ على بعد r لذلك يمكن إخراجه E من التكامل :

$$\Phi = \oiint E\, dA = E \oiint dA$$

ومنه :

$$\Phi = (E)\left(\oiint dA\right) = \left(\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وهو تعبير قانون جاوس وهو ينطبق على أي توزيع للشحنة داخل السطح المغلق .

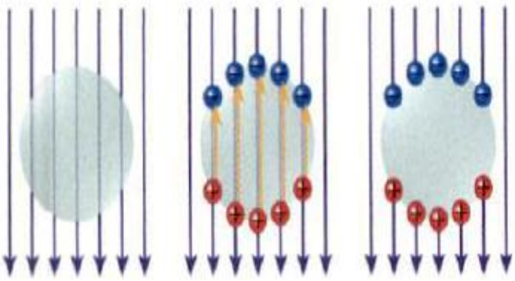
الحماية الكهروستاتيكية :
نستنتج من قانون جاوس نتيجتان مهمتان هما :

١ـ يكون المجال الكهروستاتيكي داخل أي موصل معزول صفرا دائما .

٢ـ تكون التجاويف داخل الموصلات محمية من المجالات الكهربائية .

المدرس : محمد سعيد ختام

ويمكن أن نتحقق من نتيجة جاوس أن المجال الكهروستاتيكي داخل موصل معدوم كما يلي :



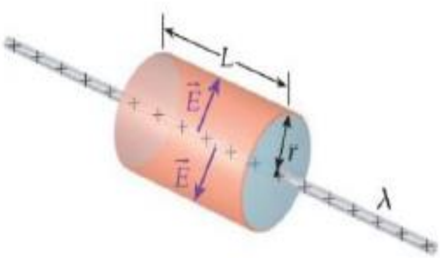
لنفترض وجود محصلة مجال كهربائي للحظة ما عند نقطة معينة داخل موصل معزول ، لكن يحتوي كل موصل على الكترونات حرة داخله وهي تتحرك الى السطح الخارجي تاركة أيونات موجبة الشحنة وتنتج هذه الشحنات مجالا كهربائيا داخل الموصل يعاكس المجال الخارجي ولن تكون هناك أي شحنة متراكمة داخل حجم الموصل وستتحرك الشحنات حول السطح الى ان يلغي المجال الكهربائي الناتج عنها المجال الكهربائي الخارجي لذا تصبح محصلة المجال الكهربائي صفرا .

<u>تطبيق :</u> عند وضع وعاء بلاستيكي ممتلئ بقطع فلين صغيرة أعلى مولد فان دي غراف فإن قطع الفلين تتطاير إلى خارج الوعاء لأن المجال الكهربائي الناتج عن جهاز فان دي غراف يكسب قطع الفلين كمية صغيرة من عزم ثنائي القطب ولذلك المجال الكهربائي غير المنتظم يكون له محصلة قوى على قطع الفلين وهو ما يسبب تطايرها أما اذا وضعت قطع الفلين الصغيرة نفسها داخل علبة فلزية مفتوحة فإنها لا تتطاير لأنه طبقا لقانون جاوس يمكن ان يوفر الفلز الموصل حماية داخله (المجال داخله معدوم) ويمنع قطع الفلين الصغيرة في اكتساب عزم ثنائي القطب .

ملاحظة : ليس بالضرورة ان يكون الموصل المحيط بالتجويف قطعة معدنية صلبة بل تكفي شبكة من السلك لتوفير الحماية ويسمى بقفص فاراداي .

يمكن اعتبار السيارة مثال عن قفص فاراداي فالسيارة تحمي من في داخلها من البرق حيث يوفر اللوح والاطار الفولاذيان المحيطان بمقصورة الركاب الحماية اللازمة لكن مع بداية استخدام الفيبرجلاس والبلاستيك والياف الكربون كبديل للألواح الفلزية في هياكل السيارات لم تعد هذه الحماية مضمونة .

حساب المجال من سلك مستقيم باستخدام قانون جاوس :



لحساب المجال الناتج عن ســـــــلك موصل مستقيم وطويل منتظم الشحنة كثافـــة شحنته الخطية λ نفترض سطحا جاوسيا على شكل أسطوانة قائمة نصف قطرها r وطولها L تحيط بالسلك بحيث يكون السلك على امتداد محور الأسطوانة .

ان المجال الكهربائي الناتج عن السلك شعاعيا عموديا على السلك نحو الخارج في حالة الشحنة الموجبة ونحو الداخل في حال الشحنة السالبة . المجال عمودي على متجه المساحة لقاعدتي الأسطوانة لذلك يكون التدفق من خلال هذين السطحين معدوم ويكون التدفق فقط من خلال جدار الأسطوانة حيث المجال الكهربائي عمودي على جدار الأسطوانة عند أي نقطة . (مساحة جدار الأسطوانة $2\pi rL$)

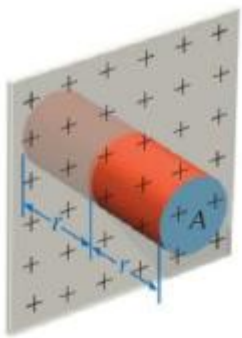
$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \oiint dA = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

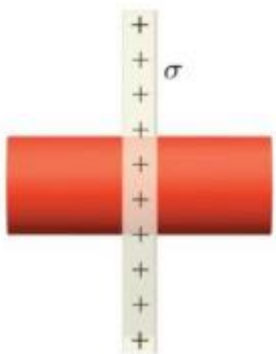
ومنه :

$$EA = E(2\pi rL) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

وبالتالي : $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2k\lambda}{r}$ وهي النتيجة التي حصلنا عليها سابقا .

حساب المجال من سطح غير موصل مشحون باستخدام قانون جاوس :





لدينا لوح مسطح رقيقا وغير موصل مساحته لا نهائية ويحمل شحنة موجبة كثافة شحنته السطحية σ لإيجاد المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة r عن السطح نختار سطحا جاوسيا على شكل أسطوانة قائمـة مغلقة مساحة مقطعها العرضي A وطولها 2r تقطع المستوى بشكل عمودي .

المجال الكهربائي عموديا على طرفي الأسطوانة وموازيا لجدارها لذلك التدفق يكون فقط من خلال قاعدتي الأسطوانة باستخدام قانون جاوس نجد :

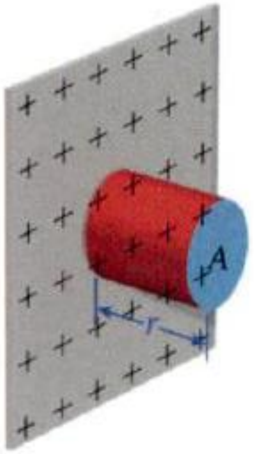
$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow (EA + EA) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\,EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

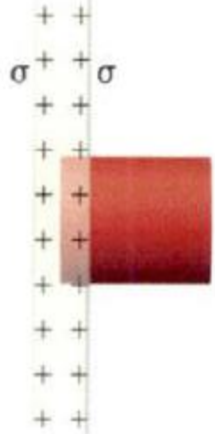
ومنه :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$$

المدرس : محمد سعيد ختام

حساب المجال من سطح موصل مشحون باستخدام قانون جاوس :





عندما يكون اللوح موصل مساحته لا نهائية كثافة شحنته السطحية σ موجبة **على كل سطح** لإيجاد المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة r عن السطح نختار سطحا جاوسيا على شكل أسطوانة قائمة مساحة مقطعها العرضي A وطولها r تقطع المستوى بشكل عمودي لكن في هذه الحال يحيط الموصل بأحد طرفي الأسطوانة وبما أن المجال الكهربائي داخل الموصل معدوم لذلك التدفق من خلال هذا الطرف صفر وبالتالي المجال من خلال الطرف الأخر فقط لأن المجال أيضا موازي لجدار الأسطوانة باستخدام قانون جاوس نجد :

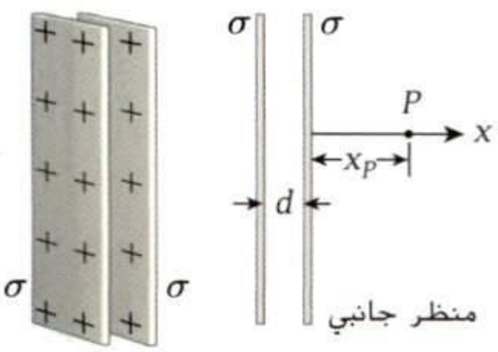
$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

ملاحظة هامة :

في حالة وجود سطحين غير موصلين لا نهائيين متوازيين مشحونتين بشحنتين مختلفتين فإن المجال بينهما يساوي مجموع المجالين وخارجهم طرح المجالين (في حالة نفس كثافة الشحنة فإن داخلهما ضعف مجال أحدهما وخارجهم صفر) وفي حالة نفس الشحنة يكون العكس خارجهم جمع وداخلهما طرح .

(يمكن التطبيق بشكل مشابه في حالة سلكين مع أخذ الأبعاد هنا بعين الاعتبار)

أمثلة :



١- لوحان لانهائيان غير موصلين يوازي أحدهما الأخر تفصل بينهما مسافة 10 cm كما في الشكل فإذا كان كل لوح يحمل توزيع منتظم للشحنة قدره $\sigma = 4.5\ \mu C/m^2$ فما هو المجال الكهربائي عند النقطة p علما بأن $x_p = 20\ cm$.

....

....

....

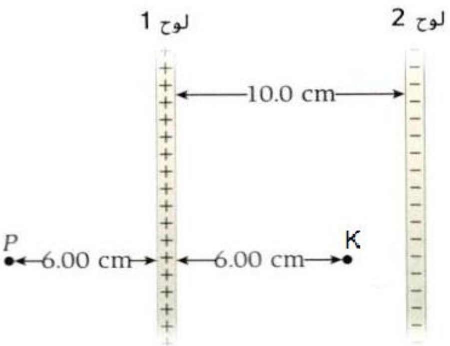
....

٢- لوحان متوازيان لا نهائيان وغير موصلين تفصل بينهما مسافة 10cm ولهما توزيعان للشحنة +1μC ، -1μC ما القوة المؤثرة في الكترون موجود في الفراغ بين اللوحين ثم ما القوة عندما يقع خارج اللوحين بالقرب من سطح أحد اللوحين ؟

....

....

....



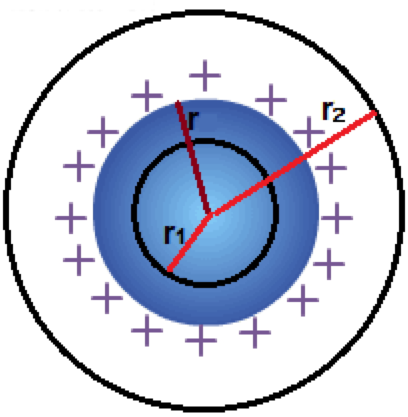
٣- يبعد لوحا شحنة لا نهائيان عن بعضهما مسافة 10 cm كما في الشكل وتوزيع الشحنة السطحي للوح 1 هو $3\mu C/m^2$ وللوح الثاني $-5\mu C/m^2$ أوجد المجال الكهربائي الكلي عند النقطة P على مسافة 6cm يسار اللوح 1 وعند النقطة K على مسافة 6cm يمين اللوح 1

....

....

....

حساب المجال لموصل كروي مصمت مشحون باستخدام جاوس :



موصل مصمت نصف قطره r مشحون لإيجاد المجال

أولا داخل الموصل نأخذ سطح جاوسي على شكل كرة نصف قطرها $r_1 < r$ بتطبيق قانون جاوس :

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = 0$$

لا يوجد شحنات داخل السطح لأن الشحنات تتوضع على السطح الخارجي للموصل . ومنه $E = 0$

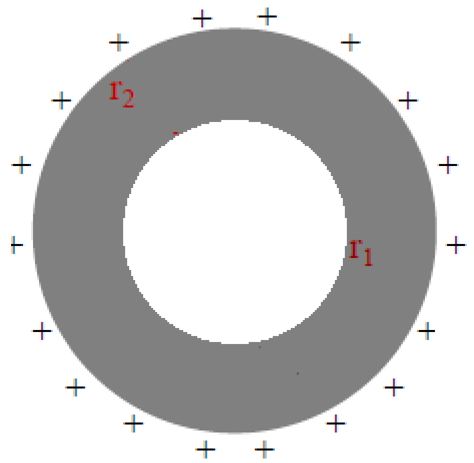
أما بالنسبة للمجال خارج الموصل نأخذ سطح جاوسي كرة نصف قطرها $r_2 > r$ بتطبيق قانون جاوس :

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r_2^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}}$$

اذا المجال خارج الموصل الكروي يماثل المجال الكهربائي لشحنة نقطية تماثل شحنة الموصل في مركز الموصل .

<u>ملاحظة هامة :</u> نفس الاستنتاج السابق تماما لهيكل كروي رقيق سواء كان موصلا أم غير موصل .

حساب المجال لموصل كروي مشحون مجوف له سماكة باستخدام جاوس :



موصل كروي مجوف نصف قطره الداخلي r_1 ونصف قطره الخارجي r_2 مشحون بشحنة موجبة لإيجاد المجال

أولا داخل الموصل نأخذ سطح جاوسي على شـكل كرة نصف قطرها $r < r_1$ بتطبيق قانون جاوس :

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = 0$$

لا يوجد شحنات داخل السطح ومنه $E = 0$

بالنسبة لنقطة داخل مادة الموصل نأخذ سطح جاوسي كرة نصف قطرها $r_1 < r < r_2$:

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = 0$$

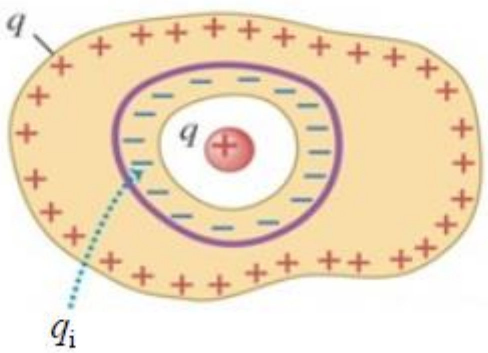
لأنه أيضا لا يوجد شحنات داخل السطح لذلك $E = 0$

أما بالنسبة للمجال خارج الموصل نأخذ سطح جاوسي كرة نصف قطرها $r > r_2$ بتطبيق قانون جاوس :

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

ملاحظة هامة :

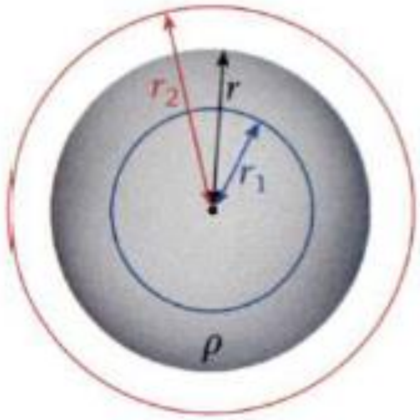


- عند وضع شحنة q داخل موصل مجوف فإنه يتولد شحـنة مساوية لها بالمقدار ومعاكسة على السطح الداخلي للموصل وبالمقابل شحـــنة مماثلة على السطح الخارجـي ويمكن أن نبرهن على ذلك بأخذ سطح غاوسي يحيط بالتجويف فيكون التدفق من هذا السطح معدوم لأن المجال داخـــل الموصل معدوم ومنه :

$$E = \frac{q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(q + q_i)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (q + q_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_i = -q$$

حساب المجال لكرة عازلة الشحنات موزعة عليها بشكل منتظم :

نأخذ سطح جاوسي على شكل كرة نصف قطرها $r_1 < r$



بتطبيق قانون جاوس :

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)$$

الشحنة q هي الشحنة الموجودة داخل السطح الجاوسي فقط

حيث $\frac{4}{3}\pi r_1^3$ الحجم الذي يحيط به سطح جاوس

وكذلك $4\pi r_1^2$ مساحة السطح الجاوسي .

وبعد الاختصار : $\boxed{E = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}}$ المجال عند نقطة داخل الكرة العازلة المشحونة على بعد r_1

كذلك يمكن استنتاج أيضا مقدار المجال بدلالة الشحنة الكلية للكرة كما يلي :

$$\rho = \frac{q_t}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} \Longrightarrow \frac{q_t}{r^3} = \frac{q}{r_1^3} \Longrightarrow q = \frac{q_t\, r_1^3}{r^3}$$

وبالتعويض في صيغة قانون جاوس نجد :

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{q_t}{\varepsilon_0}\frac{r_1^3}{r^3}$$

ومنه :

$$\boxed{E = \frac{q_t r_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{k q_t r_1}{r^3}}$$

أما بالنسبة للمجال خارج الموصل نأخذ سطح جاوسي كرة نصف قطرها $r_2 > r$ بتطبيق قانون جاوس :

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E\left(4\pi r_2^2\right) = \frac{q_t}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_t}{r_2^2}}$$

اذا أيضا المجال خارج التوزيع الكروي للشحنة يماثل المجال الكهربائي لشحنة نقطية تماثل الشحنة موضوعة في مركز الكرة .

أمثلة :

١- موصل كروي مجوف شحنته الكلية +10e نضع في مركزه شحنة -4e ماهو مقدار الشحنة على السطحين الداخلي والخارجي للكرة ثم ماهي الشحنة الصافية الكلية للكرة ؟

....

....

المدرس : محمد سعيد ختام

٢- شحنة نقطية $-6\ nC$ في مركز موصل كروي نصف قطره الداخلي $2\ m$ والخــارجي $4\ m$ وشحنته $7\ nC$ والمطلوب : أوجد المجال الكهربائي عند النقاط التالية : $r = 1m\ ,\ r = 2m\ ,\ r = 5m$ ثم ماهي كثافة الشحنة على السطح الخارجي للموصل ؟

....

....

....

....

....

....

٣- كرة نصف قطرها $12\ cm$ ومتمركزة عند نقطة الأصل كثافة الشحنات الحجمية $120\ nC/cm^3$ وتتمركز هذه الكرة داخل هيكل كروي موصـــل نصف قطره الداخلي $30\ cm$ ونصف قطره الخارجي $50\ cm$ ومقدار الشحنة على الهيكل الكروي $-2mC$ والمطلوب اوجد مقدار المجال عند كل مسافة من المسافات التالية من نقطة الأصل ؟

أ- عند $r = 10\ cm$ ، ب – $r = 20\ cm$ ، ت- $r = 40\ cm$ ، ج- $r = 80\ cm$

....

....

....

....

....

....

الحواف الحادة ومانعات الصواعق :

وجدنا ان المجال الكهربائي عمودي على سطح موصل (اذا كانت هناك مركبة مجال موازية لسطح الموصل فستتحرك الشحنات داخل الموصل حتى تصل الى الاتزان) الشحنات تتوزع على السطوح الخارجية للموصلات لكن كثافة الشحنات على سطح طرف موصل المدبب تكون أكبر بسبب أن الإنحناء أكبر عند الطرف الحاد الموصل ولذلك يكون المجال عند الطرف المدبب أكبر وخطوطه أكثر تقاربا من الجزء المسطح للموصل وقد اقترح بنيامين فرانكلين استخدام القضبان الفلزية ذات النقاط الحادة كمانعات للصواعق بحيث تتفرغ شحنة البرق في هذه القضبان عوضا عن تفرغها في البناء لكن اشارت النتائج الحديثة الى ان مانعات الصواعق التي تستخدم لحماية المباني من البرق يجب ان تكون ذات نهايات دائرية مصمتة لأن مانعات الصواعق ذات الرؤوس المدببة تزيد في معدل ضربات البرق بسبب تأين الهواء حول الرأس المدبب وفي الحالتين يجب تأريض مانعة للصواعق بشكل جيد لكي تحمل الشحنة الناتجة من ضربة البرق بعيدا عن المنشلة المثبتة عليها .