مساعد الطالب

في

الرياضيات

الجزء الاول.

السادس علمي

اعداد

نوار الأسدي

07815655515

الأساسيات

مراجعة للنسب المثلثية والزوايا :

القياس الستيني	القياس الدائري	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
0°	0	0	1	0
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞
360°	2π	0	1	0

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

4) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

5) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

6) $\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} \Leftrightarrow \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \Leftrightarrow \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \Leftrightarrow \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

قوانين ضعف الزاوية :

1) $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\sin^2 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$

$\sin^2 3\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6\theta$

2) $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\cos^2 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta$

$\cos^2 3\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6\theta$

قوانين نادرة الاستخدام :

1) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$

2) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

3) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

قوانين نصف الزاوية :

1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$\sin 8\theta = 2\sin 4\theta\cos 4\theta$

2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 4\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$

$\cos 6\theta = \cos^2 3\theta - \sin^2 3\theta$

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$

3) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta$

$\cos 6\theta = 1 - 2\sin^2 3\theta$

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

4) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$

$\cos 6\theta = 2\cos^2 3\theta - 1$

$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

القياس الرئيسي للزاوية :-

- كل زاوية يجب أن يكون قياسها ضمن القياس الرئيسي بين الصفر و 2π وأية زاوية يكون قياسها اكبر من 2π يكون قياسها خارج القياس الرئيسي.

- اذا كان البسط (بدون π) اكبر من ضعف المقام فإنها خارج القياس الرئيسي ، لذلك :
نقسم البسط على ضعف المقام ثم نكتب $\frac{\pi \text{ (باقي القسمة)}}{\text{نفس المقام الاصلي}}$

أمثلة :-

1) $\frac{7\pi}{4}$ قياس رئيسي يبقى كما هو

2) $\frac{13\pi}{3}$ بما ان البسط اكبر من ضعف المقام $\Leftarrow$ $6 \overline{)13}$ ، $13-12=1$ $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{16\pi}{3}$ بما ان البسط اكبر من ضعف المقام $\Leftarrow$ $6 \overline{)16}$ ، $16-12=4$ $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $\frac{4\pi}{3}$

4) $\frac{21\pi}{4}$ بما ان البسط اكبر من ضعف المقام $\Leftarrow$ $8 \overline{)21}$ ، $21-16=5$ $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $\frac{5\pi}{4}$

5) 13π بما ان البسط اكبر من ضعف المقام $\Leftarrow$ $2 \overline{)13}$ ، $13-12=1$ $\Leftarrow$ القياس الرئيسي π
$\Leftarrow$ المقام $=1$

6) 8π بما ان البسط اكبر من ضعف المقام $\Leftarrow$ $2 \overline{)8}$ ، $8-8=0$ $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $0\pi=0$

- الحالات التي يكون فيها المقام يساوي واحد (كما في المثالين 5,6 اعلاه) فهي كالاتي :-

اولاً : $n\pi$ اذا كانت n زوجي $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $=0$

ثانياً : $n\pi$ اذا كانت n فردي $\Leftarrow$ القياس الرئيسي $=\pi$

- يجب الاختصار (إن وجد) قبل التحويل الى قياس رئيسي.

مثال: $\frac{25\pi}{5} = 5\pi \Rightarrow$ القياس الرئيسي $= \pi$

مثال: $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ تبقى هي نفسها قياس رئيسي

- اذا كان قياس الزاوية سالب فنطبق القوانين:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

مثال $\sin(-\frac{65}{3}\pi) = -\sin(\frac{65}{3}\pi) = -\sin\frac{5\pi}{3}$

ايجاد قيم الدوال المثلثية للزاوية $\frac{a\pi}{b}$:

أولاً: نجد قيمة الدالة للزاوية $\frac{\pi}{b}$ ((a=1)) علماً ان $\frac{\pi}{3}=60$, $\frac{\pi}{4}=45$, $\frac{\pi}{6}=30$.

ثانياً: نحدد الاشارة من موقع الزاوية $\frac{a\pi}{b}$ في اي ربع مستخدماً المخطط التالي:

$\frac{\pi}{2}$

الربع الثاني	الربع الاول
sin = +	sin = +
cos = −	cos = +
tan = −	tan = +

π ←→ 0 2π

الربع الثالث	الربع الرابع
sin = −	sin = −
cos = −	cos = +
tan = +	tan = −

$\frac{3\pi}{2}$

أمثلة:

1) $\sin\frac{5\pi}{4}$ $\xrightarrow{\text{بدون البسط}}$ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\xrightarrow{\text{الاشارة}}$ $5\frac{\pi}{4} = 5(45) = 225$

← في الربع الثالث (sin في الربع الثالث سالب)

$\therefore \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

2) $\cos\frac{14\pi}{3}$

في البداية نحول $\frac{14\pi}{3}$ الى قياس رئيسي $= \frac{2\pi}{3}$

$\cos\frac{2\pi}{3}$ $\xrightarrow{\text{بدون البسط}}$ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\text{الاشارة}}$ $2\frac{\pi}{3} = 2(60) = 120$

← في الربع الثاني (cos في الربع الثاني سالب)

$\therefore \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

* يمكن اجراء ما ورد اعلاه بصورة مباشرة.

- يستثنى من ذلك الزوايا الحدودية الربعية والتي تقع على المحاور وهي (0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π) ويمكنك ايجادها من جدول الزوايا الخاصة مباشرة.

3) $\sin 8\pi$ → نحول الى قياس رئيسي → $\sin 0 = 0$

4) $\sin\frac{6\pi}{4}$ → نختصر → $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

الفصل الأول

الأعداد

المركبة

الفصل الأول

«الأعداد المركبة»

ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها b^2-4ac عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية ، لذلك سنحتاج الى مجموعة اوسع منها نسميها مجموعة الاعداد المركبة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$

تعريف :- يقال للعدد $c=a+bi$ حيث b و a عددان حقيقيان $i=\sqrt{-1}$ عدداً مركباً ، ويسمى a جزءه الحقيقي و b جزءه التخيلي

وتسمى $a+bi$ الصيغة العادية او الجبرية للعدد المركب

الجزء الحقيقي ← → الجزء التخيلي

$$\boxed{a+bi}$$

$$\rightarrow i=\sqrt{-1}$$

العدد المركب	جزءه الحقيقي	جزءه التخيلي	الصيغة الديكارتية (الزوج المرتب)
$2+7i$	2	7	$(2,7)$
$8-i$	8	-1	$(8,-1)$
$\sqrt{3}i-2$	-2	$\sqrt{3}$	$(-2,\sqrt{3})$
3	3	0	$(3,0)$
$-4i$	0	-4	$(0,-4)$
$x+yi$	x	y	(x,y)
x^2+y^2-2xyi	x^2+y^2	$-2xy$	$(x^2+y^2,-2xy)$

قوى i :

بما أن $i = \sqrt{-1}$

$\Rightarrow i^2 = -1$

$i^3 = (i^2)(i) = (-1)i = -i$

$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1$

$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

لذلك أثناء سير الشرح سنكتب مباشرة

أما i تبقى نفسها (i) ولا تكتب $\sqrt{-1}$

أما اذا كان الاس اكبر من (4) ⟸ نقسم الاس على 4 ونكتب ⟸ i باقي القسمة

أمثلة :

1) $i^5 = i^1$

$5 \div 4 = 1$, $5 - 4 = 1$ ⟵ الاس الجديد

2) $i^6 = i^2 = -1$

$6 \div 4 = 1$, $6 - 4 = 2$ ⟵ الاس الجديد

3) $i^8 = i^0 = 1$

$8 \div 4 = 2$, $8 - 8 = 0$ ⟵ الاس الجديد

4) $i^{53} = i^1$

$53 \div 4 = 13$, $53 - 4 = 13$, $13 - 12 = 1$ ⟵ الاس الجديد

ملاحظة: لا يسمح بوجود (i) في المقام

$1)\ i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$

نعوض عن الـ (1) في البسط

ما يساويها مثل i^4 أو i^8 أو i^{12} ...

لكي نتخلص من المقام.

$2)\ i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i$

$3)\ i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{i^8}{i^5} = i^3 = -i$

$4)\ i^{-9} = \frac{1}{i^9} = \frac{i^{12}}{i^9} = i^3 = -i$

ملاحظة: لا يسمح بوجود عدد سالب داخل الجذر حيث يمكن كتابته بدلالة (i)، فمثلاً:

$1)\ \sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$

$2)\ \sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = 4i$

$3)\ \sqrt{-9} = 3i$

$4)\ \sqrt{-7} = \sqrt{7}\,i$

جمع الأعداد المركبة: عملية جمع الأجزاء الحقيقية معاً والتخيلية معاً.

$1)\ (2+3i)+(1+4i) = (2+1)+(3+4)i = 3+7i$

$2)\ (5+2i)+(3+7i) = (5+3)+(2+7)i = 8+9i$

$3)\ (6-2i)+(3+5i) = 9+7i$

$4)\ 4+(2-5i) = 6-5i$

$5)\ (1-i)+3i = 1+2i$

$6)\ (x+2i)+(3+yi) = (x+3)+(2+y)i$

طرح الاعداد المركبة: هو عملية جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للثاني.

1) $(7-5i)-(9+2i) = (7-5i)+(-9-2i) = -2-7i$

ويمكن اجراء الطرح كالاتي (بفتح الاقواس):

$(7-5i)-(9+2i) = 7-5i-9-2i = -2-7i$

2) $(3+5i)-(1+2i)^2$

لاحظ: لا يمكن دخول الاشارة السالبة على القوس الثاني بوجود الاس على القوس لذلك نفتح القوس بالقانون الاتي:

$= (3+5i) - [1 + 4i + 4i^2]$

مربع الثاني + ضعف الاول × الثاني + مربع الاول

$= (3+5i) - (-3+4i)$

$= (3+5i) + (3-4i)$

$= 6+i$

ملاحظة: يجب ان يوضع العدد المركب بالصورة العادية (الصورة الجبرية)

مثلاً العدد المركب $3x-2yi+2xi-5m-7i-4y$

(الجزء الحقيقي) + (الجزء التخيلي) i

$(3x-5m-4y)+(-2y+2x-7)i$

ضرب الاعداد المركبة: الطريقة الاولى «الضرب بالتوزيع»

1) $(2+3i)(1+5i) = 2+10i+3i+15i^2$

$\quad\quad -15$

$= -13+17i$

2) $(2-3i)(5-7i) = 10-14i-15i+21i^2$

$= 10-29i-21 = -11-29i$

3) $(2x-3yi)(5+4i) = 10x+8xi-15yi-12yi^2$

$= (10x+12y)+(8x-15y)i$

4) $(3x+4yi)(2x-7yi) = 6x^2-21xyi+8yxi-28y^2i^2$

$= (6x^2+28y^2)+(-21xy+8yx)i$

$= (6x^2+28y^2)+(-31xy)i$

الطريقة الثانية «الضرب بالقانون»: ليكن $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$

$c_1 \cdot c_2 = (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$

1) $(4+5i)(2+3i) = (8-15)+(12+10)i = -7+22i$

2) $(2-3i)(5-7i) = (10-21)+(-14-15)i = -11-29i$

3) $(2x-3yi)(5+4i) = (10x+12y)+(8x-15y)i$

مرافق العدد المركب: اذا كان $c=a+bi$ فأن $\bar{c}=a-bi$ مرافقه «بتغير اشارة الجزء التخيلي»

$c \cdot \bar{c} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$$\boxed{\text{كل عدد مركب} \times \text{مرافقه} = (\text{الحقيقي})^2 + (\text{التخيلي})^2}$$

بدون i

مثال/ جد ناتج ضرب الاعداد المركبة في مرافقها:

1) $(2+3i) \Rightarrow (2+3i)(2-3i) = 4+9 = 13$

2) $(4-5i) \Rightarrow (4+5i)(4+5i) = 16+25 = 41$

3) $(3+i) \Rightarrow (3+i)(3-i) = 9+1 = 10$

4) $(1-i) \Rightarrow (1-i)(1+i) = 1+1 = 2$

5) $(-3+4i) \Rightarrow (-3+4i)(-3-4i) = 9+16 = 25$

6) $-5i \Rightarrow (0-5i)(0+5i) = 0+25 = 25$

- كل عدد مركب مكون من جزء تخيلي فقط عند ضربه في مرافقه يكون الناتج فقط (التخيل)²

7) $3i \Rightarrow (3i)(-3i) = 9$

8) $i \Rightarrow (i)(-i) = 1$

ملاحظة: لا يسمح بوجود العدد المركب في المقام لأنه ليس بالصورة العادية وللتخلص منه نضرب ونقسم في مرافق المقام

مثال/ ضع ما يلي بالصورة العادية او (الصورة الجبرية) او (الصيغة $a+bi$)

1) $\dfrac{1}{2+3i} \Rightarrow \dfrac{1}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{2-3i}{(2)^2+(3)^2} = \dfrac{2-3i}{13} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

2) $\dfrac{1+2i}{-2+i} \Rightarrow \dfrac{1+2i}{-2+i} \cdot \dfrac{-2-i}{-2-i} = \dfrac{-2-i-4i-2i^2}{4+1} = \dfrac{-5i}{5} = -i = 0-i$

3) $\dfrac{7+2i}{3+2\sqrt{-1}} \Rightarrow \dfrac{7+2i}{3-2i} \cdot \dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{21+14i+6i+4i^2}{9+4}$

$= \dfrac{17+20i}{13} = \dfrac{17}{13} + \dfrac{20}{13}i$

4) $\dfrac{2i}{1+\sqrt{-3}} \Rightarrow \dfrac{2i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{2i-2\sqrt{3}i^2}{1+3} = \dfrac{2i+2\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{2}{4}i$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

ملاحظة: العدد المركب $(a+bi)$

نظيره الضربي $\frac{1}{a+bi}$ ← (مقلوبه بنفس الاشارات)

مرافقه $a-bi$ ← (تغير اشارة الجزء التخيلي فقط)

نظيره الجمعي $-a-bi$ ← (تغير كلا الاشارتين)

مثال / ما هو النظير الضربي للعدد $3+5i$ ثم ضعه بالصورة العادية

الحل

النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{3+5i}$$

$$=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}=\frac{3-5i}{9+25}$$

$$=\frac{3-5i}{34}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$$

ملاحظة: اذا كانت $n\in N$

1) $i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i^{1}=(i^{4})^{n}\cdot i=(1)^{n}\cdot i=(1)\cdot(i)=i$

- العدد (1) مهما يكن اسه فهو يساوي واحد

2) $i^{2n+1}=i^{2n}\cdot i^{1}=(i^{2})^{n}\cdot i=(-1)^{n}\cdot i=\begin{cases}1\cdot i=i\\-1\cdot i=-i\end{cases}$

- العدد (-1) اذا كان الاس زوجي فهو يساوي 1
واذا كان الاس فردي فهو يساوي -1

ملاحظة / لفتح القوس مربع كامل نستخدم القانون التالي:

مربع الثاني + ضعف الأول × الثاني ∓ مربع الأول

1) $(2+5i)^2 = 4+20i+25i^2 = -21+20i$

2) $(-3+4i)^2 = 9-24i+16i^2 = -7-24i$

3) $(-5-3i)^2 = 25+30i+9i^2 = 16+30i$

4) $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = [\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}](1+i) = 2i+2i^2 = -2+2i$

5) $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = [1+2i+i^2] = [2i]^2 = 4i^2 = -4$

6) $(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = [(1+i)^2]^2(1+i) = [\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}]^2(1+i)$

$= -4(1+i) = -4-4i$

ملاحظة: $x^n y^n = (xy)^n$ تجوز هذه الملاحظة في الضرب والقسمة

ولا تجوز في الجمع والطرح $x^n \mp y^n \neq (x \mp y)^n$

$(\sqrt{2}-\sqrt{8}i)^3(\sqrt{2}+\sqrt{8}i)^3 = [(\sqrt{2}-\sqrt{8}i)(\sqrt{2}+\sqrt{8}i)]^3$

$= [2+8]^3 = 10^3 = 1000$

مثال / ضع $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$ بالصورة العادية

الحل $\left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)^3$

$= \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}-\frac{2}{2}i\right)^3 = (2-i)^3$

$= (2-i)^2(2-i) = (4-4i+i^2)(2-i)$

$= (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2 = 2-11i$

خواص الترافق :- الترافق يحقق الخواص الاتية :

1) $\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1}+\overline{c_2}$

2) $\overline{c_1-c_2} = \overline{c_1}-\overline{c_2}$

3) $\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1}\cdot\overline{c_2}$

4) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

5) $c_1 = c_1$

مثال / اذا علمت ان $c_1 = 1+2i$, $c_2 = 3-4i$ أثبت خواص الترافق اعلاه.

1) خاصية الجمع

- اذا كانت علامة الترافق متصلة فيجب ان نجمع وبعد ذلك نجد المرافق.

$L.H.S = \overline{c_1+c_2}$
$= \overline{(1+2i)+(3-4i)}$
$= \overline{4-2i}$
$= 4+2i$

- أما اذا كانت علامة الترافق منفصله يجب ان نجد المرافق وبعد ذلك نجمع.

$R.H.S = \overline{c_1}+\overline{c_2}$
$= \overline{(1+2i)}+\overline{(3-4i)}$
$= (1-2i)+(3+4i)$
$= 4+2i$

$\therefore \overline{c_1+c_2} = \overline{c_1}+\overline{c_2}$

$L.H.S = R.H.S$

4) خاصية القسمة

$$L.H.S = \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+2i}{3-4i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3+4i+6i+8i^2}{9+16}\right)} = \overline{\left(\frac{-5+10i}{25}\right)} = \overline{\left(\frac{-1}{5}+\frac{2}{5}i\right)}$$

$$= \frac{-1}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$R.H.S = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{1+2i}}{\overline{3-4i}} = \frac{1-2i}{3+4i}$$

$$= \frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i-6i+8i^2}{9+16} = \frac{-5-10i}{25} = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} \Rightarrow \therefore L.H.S = R.H.S$$

× وبنفس الطريقة تبرهن خاصية الطرح والضرب (واجب).

التحليل :- تعلمت سابقاً أن x^2-y^2 يتحلل فرق مربعين كما يلي $(x-y)(x+y)$ ، أما x^2+y^2 فأنه لا يتحلل لانه مجموع مربعين ولكن يمكن تحويله الى فرق مربعين كالاتي :

1) $x^2+y^2 = x^2-y^2i^2 = (x-yi)(x+yi)$

2) $x^2+4 = x^2-4i^2 = (x-2i)(x+2i)$

3) $x^2-7xi-12 = x^2-7xi+12i^2 = (x-4i)(x-3i)$

قانون تحليل (فرق او مجموع مكعبين) = (الاول$\sqrt[3]{}$ الثاني$\sqrt[3]{}$) (مربع الاول الاول×الثاني مربع الثاني)

اشارة مشابهه — اشارة مخالفه — اشارة موجبة دائماً

4) $8-27i = 8+27i^3 = (2+3i)(4-6i+9i^2) = (2+3i)(-5-6i)$

ملاحظة / الاسئلة في التحليل قد تأتي بصورة مباشرة ← حلل أو لا يذكر ذلك في السؤال ولكن نحتاج الى التحليل لغرض اختصار الكسور ((لأنه من الصعوبة الضرب في المرافق احياناً عند وجود x او مجاهيل في المقام))

فمثلاً :

1) $\dfrac{x^2+4x+5}{x-i} = \dfrac{x^2+4x-5i^2}{x-i} = \dfrac{(x+5i)\cancel{(x-i)}}{\cancel{(x-i)}} = x+5i$

2) $\frac{x^3 - y^3 i}{x+yi} = \frac{x^3 + y^3 i^3}{x+yi} = \frac{x^3 + y^3 i^3}{x+yi} = \frac{\cancel{(x+yi)}(x^2 - xyi + y^2 i^2)}{\cancel{(x+yi)}}$

$= (x^2 - y^2) + (-xy)i$

3) $\frac{9y^2+49}{3y+7i} = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y+7i} = \frac{(3y-7i)\cancel{(3y+7i)}}{\cancel{(3y+7i)}} = 3y - 7i$

4) $\frac{1}{\cos x - i\sin x} \xrightarrow{\text{قانون}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x - i\sin x} = \frac{\cos^2 x - i^2 \sin^2 x}{\cos x - i\sin x}$

$= \frac{\cancel{(\cos x - i\sin x)}(\cos x + i\sin x)}{\cancel{(\cos x - i\sin x)}} = \cos x + i\sin x$

ملاحظة / 1- إذا كان السؤال حلل الى عوامل بالصورة $(a+bi)$ حيث a,b عددان نسبيان المقصود أن لا تكون a,b : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$

2- يمكن الاستفادة من التحليل بأي صورة كانت لغرض الاختصار (اذا لم يذكر a,b عددان نسبيان ولم يذكر حلل الى عوامل اولية).

أمثلة:

1) $29 = 4 + 25 = 4 - 25i^2 = (2-5i)(2+5i)$

ويمكن بالعكس لان الجمع عملية ابدالية

$29 = 25 + 4 = 25 - 4i^2 = (5-2i)(5+2i)$

2) $85 = 81 + 4 = 81 - 4i^2 = (9-2i)(9+2i)$

3) $53 = 49 + 4 = 49 - 4i^2 = (7-2i)(7+2i)$

4) $41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5-4i)(5+4i)$

5) $10 = 9 + 1 = 9 - i^2 = (3-i)(3+i)$

6) $125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11-2i)(11+2i)$

ويمكن التحليل كالاتي :

$125 = 100 + 25 = 100 - 25i^2 = (10-5i)(10+5i)$

7) ضع ما يلي بالصورة العادية بدون الضرب في المرافق:

a) $\frac{4}{1+\sqrt{3}i}$ b) $\frac{125}{10+5i}$

الحل a) $\frac{4}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+3}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1-3i^2}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)\cancel{(1+\sqrt{3}i)}}{\cancel{(1+\sqrt{3}i)}} = 1-\sqrt{3}i$

b) $\frac{125}{10+5i} = \frac{100+25}{10+5i} = \frac{100-25i^2}{10+5i} = \frac{(10-5i)\cancel{(10+5i)}}{\cancel{(10+5i)}} = 10-5i$

تساوي الاعداد المركبة: الحقيقي من الثاني = الحقيقي من الاول
التخيلي من الثاني = التخيلي من الاول

ملاحظة / لايجاد قيم $x, y \in R$:

1- اذا كان x في قوس و y في قوس آخر فنفتح تلك الاقواس ونكمل الحل.

2- اذا كان y و x في قوس واحد فمن الافضل ان نجعل ذلك القوس في طرف لوحده، وننقل الباقي للطرف الآخر ونكمل الحل.

امثلة:

1- جد x, y الحقيقية التي تحقق صحة المعادلة $y+5i=(2x+i)(x+2i)$

الحل
$$y+5i = 2x^2+4xi+xi+2i^2$$
$$\underset{\text{حقيقي}_1}{y} + \underset{\text{تخيلي}_1}{5i} = \underset{\text{حقيقي}_2}{(2x^2-2)} + \underset{\text{تخيلي}_2}{(4x+x)i}$$

$$y = 2x^2-2 \quad \text{--- } ①$$

$$5 = 4x+x \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$

وبتعويض قيمة x في المعادلة الاولى نحصل:

$$y = 2-2 \Rightarrow y=0$$

2 - جد x, y الحقيقية $(x+yi)(2-5i)=3+i$

* لاحظ: x, y في طرف لوحده فلذلك سنجعله في طرف لوحده.

الحل

$$x+yi=\frac{3+i}{2-5i}\cdot\frac{2+5i}{2+5i}$$

$$x+yi=\frac{6+15i+2i+3i^2}{4+25}$$

$$x+yi=\frac{6+17i-5}{29} \Rightarrow x+yi=\frac{1+17i}{29}$$

$$x+yi=\frac{1}{29}+\frac{17}{29}i \Rightarrow x=\frac{1}{29} , y=\frac{17}{29}$$

ملاحظة / اذا كان العددان احدهما نظير ضربي للآخر فأن :

مقلوب الاول = الثاني أو مقلوب الثاني = الاول

(وبدون تغير الاشارات)

3 - اذا كان العدد $\frac{y}{1+i}$ هو نظير ضربي للعدد $\frac{x+2i}{x^2+4}$

جد $x, y \in R$

الحل

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{\cancel{(x+2i)}(x-2i)}{\cancel{(x+2i)}} \Rightarrow y=(1+i)(x-2i)$$

$$\Rightarrow y=x-2i+xi-2i^2 \Rightarrow y+0i=(x+2)+(-2+x)i$$

$$\Rightarrow y=x+2 \quad ...①$$

$$0=-2+x \Rightarrow x=2$$

وبتعويض قيمة x في الاولى ينتج : $y=4$

ملاحظة / اذا كان العددان مترافقان فأن :

$\overline{(\text{الاول})} = \text{الثاني}$ أو $\overline{(\text{الثاني})} = \text{الاول}$

4 - اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد x, y الحقيقيه

الحل $\frac{3-2i}{i} = \overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}$

$$\frac{3-2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{x+yi}{1-5i} \Rightarrow \frac{-3i+2i^2}{-i^2} = \frac{x+yi}{1-5i}$$

$-i^2 \leftarrow 1$

$$\Rightarrow (-3i-2)(1-5i) = x+yi \Rightarrow x+yi = -(2+3i)(1-5i)$$

$$\Rightarrow x+yi = -(2-10i+3i-15i^2) \Rightarrow x+yi = -(2-7i+15)$$

$$\Rightarrow x+yi = -17+7i \Rightarrow x=-17 \ , \ y=7$$

ملاحظة / اذا كان العددان احدهما نظير جمعي فأن :

$-(\text{الاول}) = \text{الثاني}$ أو $-(\text{الثاني}) = \text{الاول}$

5 - اذا كان العدد $\frac{3+i}{2-i}$ هو النظير الجمعي $\frac{6}{x+yi}$ جد $x, y \in R$.

لاحظ : النظير الجمعي هو تغيير اشارات الجزء الحقيقي والتخيلي للبسط فقط او المقام فقط.

الحل $\frac{6}{x+yi} = \frac{-(3+i)}{2-i}$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{-3-i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{-6-3i-2i-i^2}{4+1}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{-6-5i+1}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{-5-5i}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{-\cancel{5}(1+i)}{\cancel{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x+yi} = -(1+i) \Rightarrow -(1+i)(x+yi) = 6$$

$$\Rightarrow (x+yi) = \frac{-6}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow x+yi = \frac{-\overset{3}{\cancel{6}}(1-i)}{\underset{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow x+yi = -3+3i$$

$$\Rightarrow x=-3 \ , \ y=3$$

حل تمارين (1-1)

1) ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب:

1) $i^5 = 0+i$ 2) $i^6 = -1+0i$ 3) $i^{124} = 1+0i$ 4) $i^{999} = 0-i$

5) $i^{4n+1} = 0+i$ 6) $(2+3i)^2 + (12+2i) = (4+12i+9i^2)+(12+2i) = 7+14i$

7) $(10+3i)(0+6i) = (10+3i)(6i) = -18+60i$

8) $(1+i)^4 - (1-i)^4 = [(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2 = (\cancel{1}+2i\cancel{-1})^2 - (\cancel{1}-2i\cancel{-1})^2$

$= -4-(-4) = 0+0i$

9) $\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{12i-1}{-1} = 1-12i$

10) $\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+12i+12i+16i^2}{9+16} = \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$

11) $\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i+3}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

12) $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^2$ (محلول كمثال)

13) $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1} = \frac{-10+11i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i}$

$= \frac{-50-30i+55i-33}{25+9} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$

14) $(1+i)^3 + (1-i)^3 = (1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$

$= (2i)(1+i) - 2i(1-i)$

$= 2i-2-2i-2 = -4+0i$

2) جد قيمة كل من x و y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية:

a) $y+5i = (2x+i)(x+2i)$

(محلول كمثال)

b) $8i = (x+2i)(y+2i)+1$

$0+8i = xy+2ix+2iy-4+1$

$0+8i = xy+2ix+2iy-3$

$0 = xy-3 \quad \ldots ①$

$[8i = 2ix+2iy] \div 2i \Rightarrow x+y=4 \Rightarrow y=4-x \quad \ldots ②$

$0 = x(4-x)-3$: نعوض ② في ①

$0=4x-x^2-3 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

إما $x=3 \Rightarrow y=4-3 \Rightarrow y=1$

أو $x=1 \Rightarrow y=4-1 \Rightarrow y=3$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

$(x+yi)=1+4i-4-\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)$

$x+iy=-3+4i-\left(\frac{-2i}{2}\right) \Rightarrow x+iy=-3+4i+i$

$\Rightarrow x+iy=-3+5i \Rightarrow x=-3 \ , \ y=5$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$ * يُفضل توحيد المقامات :

$\frac{(2-i)x}{1+i}+\frac{(3-i)y}{2+i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$

$\frac{(2-i)(2+i)x+(3-i)(1+i)y}{(1+i)(2+i)}=\frac{-i}{1} \Rightarrow \frac{(4+1)x+3y+3yi-iy+y}{2+i+2i-1}=-i$

$\Rightarrow \frac{5x+4y+2iy}{1+3i}=-i \Rightarrow 5x+4y+2iy=-i+3$

$5x+4y=3 \quad \ldots ①$

$2yi=-i \Rightarrow y=\frac{-1}{2}$

$5x+4\left(\frac{-1}{2}\right)=3$: نعوض في ①

$5x-2=3 \Rightarrow x=1$

3) اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

$L.H.S = \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1} = \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i}$

$= \frac{(3+4i)-(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i-3+4i}{25} = \frac{8i}{25} = R.H.S$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

$L.H.S = \frac{1-2i-1}{1+i} + \frac{1+2i-1}{1-i} = \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$

$= \frac{-2i(1-i)+2i(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i-2+2i-2}{2} = \frac{\overset{-2}{\cancel{-4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = -2 = R.H.S$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

$L.H.S = (1-i)(1+1)(1+i) = (1-i)(1+i)2 = 2(2) = 4 = R.H.S$

4) حلل كلاً من الاعداد 85 , 41 , 125 , 2 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a, b عددان نسبيان . (محلول مثال)

5) جد قيمة x, y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقتان

الحل

$\frac{6}{x+iy} = \overline{\left(\frac{3-i}{2+i}\right)} \Rightarrow \frac{6}{x+iy} = \frac{3-i}{2+i}$

$(x+yi)(3-i) = 12+6i$

$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} \Rightarrow x+yi = \frac{36+12i+18i-6}{9+1}$

$x+yi = \frac{30+30i}{10} = \frac{30}{10} + \frac{30}{10}i = 3+3i \Rightarrow x=3 , y=3$

الجذور التربيعية للأعداد المركبة :-

لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب نتبع ما يلي :-

1- نضع العدد المركب بالصيغة العادية .

2- نفرض الجذر التربيعي للعدد المركب بـ $x+yi$

3- نربع الطرفين ونرفع الجذر التربيعي من الطرف الايسر بينما يصبح الطرف الايمن مربعاً كاملاً ، نبسطه فيصبح بالشكل $(x^2-y^2)+(2xy)i$.

4- يصبح لدينا طرفين متساويين ، فنساوي الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي .

5- تصبح لدينا معادلتين بدلالة x و y نحلهما آنياً فنحصل على قيم x و y والتي تمثل قيم الجذر التربيعي للعدد المركب المطلوبة .

مثال / جد الجذور التربيعية للعدد المركب $8+6i$.

الحل نفرض $\sqrt{8+6i} = x+yi$

بتربيع الطرفين $8+6i = x^2+2xyi+y^2i^2$

$8+6i = (x^2-y^2)+(2xy)i$

من خاصية التساوي $x^2-y^2 = 8 \quad ...①$

$2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1} x} \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad ...②$

بتعويض ② في ① :

نضرب المعادلة في x^2 $\quad \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4-8x^2-9=0 \Rightarrow (x^2-9)(x^2+1)=0$

أما $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1} \Rightarrow x=i$ يهمل لأن x حقيقي

أو $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\mp 3$ نعوضها في ② $\Rightarrow y=\frac{3}{\mp 3} \Rightarrow y=\mp 1$

$\therefore$ الجذران التربيعيان للعدد $8+6i$ هو $\mp(3+i)$

مثال / جد الجذور التربيعية للعدد $(8i)$

الحل نفرض $\sqrt{8i} = x+yi$

$8i = x^2+2xyi+y^2i^2$

$8i = (x^2-y^2)+2xyi$

$x^2+y^2=0 \quad ...①$

$2xy=8 \Rightarrow y=\frac{8}{2x} \Rightarrow y=\frac{4}{x} \quad ...②$

بتعويض ② في ①: $\left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right]\cdot x^2$

$x^4-16=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0$

إما $x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2 \rightarrow$ نعوضها في ② $\rightarrow y=\frac{4}{\mp 2} \Rightarrow y=\mp 2$

أو $x^2=-4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}=2i$ يهمل

∴ الجذران التربيعيان هما $\mp(2+2i)$

مثال / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{7+i}{1-i}$

الحل $\frac{7+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(7-1)+(7+1)i}{2}=\frac{6+8i}{2}=3+4i$

نفرض $\sqrt{3+4i}=x+yi \Rightarrow 3+4i=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2$

$\Rightarrow 3+4i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$3=x^2-y^2 \quad ①$, $4=2xy \Rightarrow x=\frac{4}{2y} \Rightarrow x=\frac{2}{y} \quad ②$

نعوض ② في ① $\rightarrow \left[3=\frac{4}{y^2}-y^2\right]\cdot y^2 \Rightarrow 3y^2=4-y^4$

$\Rightarrow y^4+3y^2-4=0 \Rightarrow (y^2+4)(y^2-1)=0$

أما $y^2=-4 \notin R$ تهمل

أو $y^2=1 \Rightarrow y=\mp 1 \rightarrow$ ② نعوضها $\rightarrow x=\frac{2}{\mp 1} \Rightarrow x=\mp 2$

∴ الجذران التربيعيان هما $\mp(2+i)$

مثال / ما هو العدد المركب الذي أحد جذريه التربيعين $3+i$

الحل $(3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$

ملاحظة / الاعداد التي لا تحتوي على i يمكن ايجاد الجذور التربيعية لها بصورة مختصرة كما في الامثلة ادناه

مثال / جد الجذر التربيعي للعدد -25

الحل نفرض $c^2 = -25 \Rightarrow c = \mp\sqrt{-25} = \mp 5i$

مثال / جد الجذر التربيعي للعدد -3

الحل نفرض $c^2 = -3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{-3} = \mp\sqrt{3}\, i$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$:

يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2+bx+c=0$ باستخدام قانون الدستور

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث a = معامل x^2 , b = معامل x , c = الحد المطلق (بدون x)

- هذا في حين اذا كانت المعادلة من الدرجة الثانية ومكونة من ثلاث حدود . اما اذا كانت مكونة من حدين فمباشرة نصفر المعادلة ونضرب حدها الثاني في $(-i^2)$ فمثلاً :

$x^2 = -9 \Rightarrow x^2 - 9i^2 = 0 \Rightarrow (x-3i)(x+3i) = 0$

اما $x = 3i$ او $x = -3i$

$\therefore S = \{3i, -3i\}$ مجموعة الحل

مثال / جد مجموعة حل المعادلة $ix^2-2x-2i=0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل $a=i,\ b=-2,\ c=-2i$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-2)\mp\sqrt{(-2)^2-4\cdot i\cdot(-2i)}}{2i}=\frac{2\mp\sqrt{4-8}}{2i}=\frac{2\mp\sqrt{-4}}{2i}$$

$$x=\frac{2\mp\sqrt{4}\,i}{2i}$$

- نلاحظ ان i موجودة خارج الجذر فلذلك نبسط المعادلة فقط.

$$x=\frac{2\mp 2i}{2i}=\frac{\cancel{2}(1\mp i)}{\cancel{2}i}$$

اما $x=\frac{1-i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=-i-1=-1-i$

أو $x=\frac{1+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=-i+1=1-i$

$\therefore S=\{-1-i,\ 1-i\}$

مثال / جد مجموعة حل المعادلة $x^2-3x+1-3i=0$ حيث $x \in \mathbb{C}$ ،

الحل $x=\frac{-(-3)\mp\sqrt{(-3)^2-4(1)(1-3i)}}{2(1)}$ ← $a=1,\ b=-3,\ c=1-3i$

- نلاحظ ان i موجودة داخل الجذر فلذلك يجب ان نستخرج قيمة الجذر بطريقة الفرض.

$$x=\frac{3\mp\sqrt{5+12i}}{2}\ \ldots ①$$

نفرض $\sqrt{5+12i}=x+yi \Rightarrow 5+12i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$5=x^2-y^2\ \ldots ②$ ، $12=2xy \Rightarrow x=\frac{12}{2y}=\frac{6}{y}\ \ldots ③$

نعوض ③ في ② $\rightarrow \left[5=\frac{36}{y^2}-y^2\right]\cdot y^2 \Rightarrow 5y^2=36-y^4$

$y^4+5y^2-36=0 \Rightarrow (y^2+9)(y^2-4)=0$

اما $y^2=-9 \notin \mathbb{R}$ تهمل ، أو $y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$ نعوضها في ③

$\Rightarrow x=\frac{6}{-2}=-3 \Rightarrow \therefore \sqrt{5+12i}=\mp(3+2i)$

نعوض احدى قيم الجذر التربيعي في ① $\rightarrow x=\frac{3\mp(3+2i)}{2}$

اما $x=\frac{3-(3+2i)}{2}=0-i$ ، أو $x=\frac{3+(3+2i)}{2}=3+i$ ، $\therefore S=\{0-i,\ 3+i\}$

ملاحظة / اذا كان الحد المطلق مكونا من العدد $a+bi$ فقط فيمكننا ان نجد مجموعة حل المعادلة بدون استخدام قانون الدستور، حيث نجزئ العدد a الى (عدد + ١) . وكما موضح في الامثلة الاتية:

1) $x^2-5x+7+i=0$

$x^2-5x+6+i+1=0 \Rightarrow x^2-5x+\underline{6+i-i^2}=0$ نحل بالتجربة

$\Rightarrow x^2-5+(2+i)(3-i)=0$ نحل بالتجربة ايضاً

$\Rightarrow [x-(2+i)][x-(3-i)]=0$

أما $x=2+i$ أو $x=3-i$

$\therefore S=\{2+i, 3-i\}$

2) $Z^2-4Z+4+2i=0$

$Z^2-4Z+3+2i+1=0$

$Z^2-4Z+3+2i-i^2=0$

$Z^2-4Z+(1+i)(3-i)=0$

$[Z-(1+i)][Z-(3-i)]=0$

اما $Z=1+i$

او $Z=3-i$

$\therefore S=\{1+i, 3-i\}$

تكوين المعادلة التربيعية :-

لتكوين المعادلة التربيعية نستخدم القانون الاتي :

$$\boxed{x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\,x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0}$$

مثال / كون المعادلة التربيعية والتي جذراها $L=(2+5i)$, $m=(4+3i)$

الحل

مجموع الجذرين $= L + m = (2+5i)+(4+3i) = 6+8i$

حاصل ضرب الجذرين $= L.m = (2+5i)(4+3i) = 8+6i+20i+15i^2 = -7+26i$

$x^2 - (\text{مج})\,x + (\text{ضرب}) = 0$

$x^2 - (6+8i)x + (-7+26i) = 0$

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$

الحل

الاول $= 2+2i$, الثاني $= -2-2i$

مجموع الجذرين $= (2+2i)+(-2-2i) = 0$

حاصل ضرب الجذرين $= (2+2i)(-2-2i) = -4-4i-4i-4i^2 = -8i$

$x^2 - (\text{مج})\,x + (\text{ضرب}) = 0$

$x^2 - (0)x + (-8i) = 0 \Rightarrow x^2 - 8i = 0$

ملاحظة / اذا كانت معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها العدد المركب $a+bi$ فأن الجذر الآخر مرافقاً له وهو $a-bi$

ملاحظة للفائدة /

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-(\text{معامل } x)}{\text{معامل } x^2}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^2}$$

مثال/ كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها $(3-4i)$

الحل

- بما ان معاملاتها حقيقية فإن الجذران مترافقان

اي ان الجذر الثاني هو $(3+4i)$

مجموع الجذرين $= (3-4i) + (3+4i) = 6$

حاصل ضرب الجذرين $= (3-4i)(3+4i) = 9 + 16 = 25$

$$x^2 - (\text{مج})x + (\text{ضرب}) = 0$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

مثال/ كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها هو $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

الحل

الجذر الاول $= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i$ ، الجذر الثاني (مرافقه) $= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i$

مجموع الجذرين $= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \cancel{\frac{3}{4}i}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \cancel{\frac{3}{4}i}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ضرب الجذرين $= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i\right) = \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$

$$x^2 - (\text{مج})x + (\text{ضرب}) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{11}{16} = 0$$

مثال/ اذا كان $(3+i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة a وما هو الجذر الآخر؟

الحل (الطريقة الاولى)

م/ بالمقارنة (a) تمثل مجموع الجذرين و $(5+5i)$ تمثل ضرب الجذرين.

نفرض الجذر الاخر هو m

$$(m)(3+i) = 5+5i \Rightarrow m = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$$

$$m = \frac{15 - 5i + 15i - 5i^2}{9+1} \Rightarrow m = \frac{20+10i}{10} \Rightarrow \boxed{m = 2+i} \text{ الجذر الاخر}$$

$\therefore a =$ مجموع الجذرين $= (3+i) + (2+i) = 5+2i$

(الطريقة الثانية لحل التمرين السابق):

بما أن $3+i$ هو احد جذور (احد حلول) المعادلة

∴ يحقق هذه المعادلة.

اي أنه نعوض $3+i$ بدلاً من كل x في المعادلة ونجد قيمة a

$$x^2 - ax + (5+5i) = 0$$

$$(3+i)^2 - a(3+i) + (5+5i) = 0$$

$$(9+6i+i^2) - a(3+i) + (5+5i) = 0$$

$$(8+6i) + (5+5i) = a(3+i)$$

$$13+11i = a(3+i)$$

$$a = \frac{13+11i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{39-13i+33i-11i^2}{9+1} = \frac{50+20i}{10} = 5+2i$$

ولايجاد الجذر الآخر / نكتب المعادلة كالاتي:

$$x^2 - (5+2i)x + (5+5i) = 0$$

نفرض الجذر الآخر هو m

ضرب الجذرين $= (m)(3+i) = 5+5i$

$$m = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{20+10i}{10}$$

$m = 2+i$ هو الجذر الاخر

- أو يمكن ايجاد الجذر الآخر من خلال:

مجموع الجذرين $= (m) + (3+i) = 5+2i$

$$m = -3-i + 5+2i$$

$m = 2+i$ الجذر الآخر

حل تمارين (2 - 1)

1) حل المعادلات التربيعية الآتية وبين ايّا منها يكون جذراها مترافقين؟

a) $Z^2=-12 \Rightarrow Z^2+12=0 \Rightarrow Z^2-12i^2=0$

$\Rightarrow (Z-\sqrt{12}\,i)(Z+\sqrt{12}\,i)=0$

اما $Z=\sqrt{12}\,i$ او $Z=-\sqrt{12}\,i \rightarrow$ ∴ $S=\{\mp\sqrt{12}\,i\}$

b) $Z^2-3Z+3+i=0$		* يمكن الحل بالدستور او من خلال الطريقة الاخرى:

$Z^2-3Z+2+i-i^2=0$

$Z^2-3Z+(1+i)(2-i)=0$

$[Z-(1+i)][Z-(2-i)]=0$

اما $Z=1+i$ او $Z=2-i$

∴ $S=\{1+i,\,2-i\}$

c) $2Z^2-5Z+13=0$

$a=2,\ b=-5,\ c=13$

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\mp\sqrt{25-4(2)(13)}}{2(2)}=\frac{5\mp\sqrt{25-104}}{4}$$

$$Z=\frac{5\mp\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\mp\sqrt{79}\,i}{4}=\frac{5}{4}\mp\frac{\sqrt{79}}{4}i$$

∴ $S=\{\frac{5}{4}\mp\frac{\sqrt{79}}{4}i\}$

d) $Z^2+2Z+i(2-i)=0$

$[Z+(2-i)][Z+i]=0$

اما $Z=-2+i$ او $Z=-i$

∴ $S=\{-2+i,\,-i\}$

e) $4Z^2+25=0 \Rightarrow 4Z^2-25i^2=0 \Rightarrow (2Z-5i)(2Z+5i)=0$

اما $Z=\frac{5}{2}i$ او $Z=\frac{-5}{2}i$

∴ $S=\{\mp\frac{5}{2}i\}$

f) $Z^2 - 2iZ + 3 = 0 \Rightarrow Z^2 - 2iZ - 3i^2 = 0$

$\Rightarrow (Z+i)(Z-3i) = 0 \Rightarrow$ اما $Z = -i$ او $Z = 3i$

$\therefore S = \{3i, -i\}$

الفروع a, c, e كل منها جذراها مترافقين لأن معاملات هذه المعادلات اعداد حقيقية وان الفروع الاخرى جذراها غير مترافقان.

2) كون المعادلة التربيعية التي جذراها m, L حيث:

a) $m = 1+2i \;,\; L = 1-i$

مجموع الجذرين $= (1+2i) + (1-i) = 2+i$

ضرب الجذرين $= (1+2i)\cdot(1-i) = (1+2) + (-1+2)i = 3+i$

$x^2 - (\text{مج})x + (\text{ضرب}) = 0 \Rightarrow x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$

b) $m = \frac{3-i}{1+i} \;,\; L = (3-2i)^2$

$m = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-1)+(-3-1)i}{2} = 1-2i$

$L = (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

مجموع الجذرين $= (1-2i) + (5-12i) = 6 - 14i$

ضرب الجذرين $= (1-2i)\cdot(5-12i) = -19 - 22i$

$\therefore$ المعادلة هي $x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$

3) جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية: a) $-6i$

نفرض $\sqrt{-6i} = x + yi \Rightarrow -6i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$x^2 - y^2 = 0 \;\ldots ①$, $2xy = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{2x} \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \;\ldots ②$

نعوض ② في ① $\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2-3)(x^2+3) = 0$

إما $x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-3}{\mp\sqrt{3}} \Rightarrow y = \mp\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \mp\sqrt{3}$

او $x^2 = -3 \Rightarrow x = \sqrt{-3} = \sqrt{3}i \notin R$ يهمل

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\mp(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

b) $7+24i$

نفرض $\sqrt{7+24i} = x+yi \Rightarrow 7+24i = x^2+2xyi+y^2i^2$

$x^2-y^2=7$ --- ① , $2xy=24 \Rightarrow y=\frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}x}=\frac{12}{x}$ --- ②

نعوض ② في ① $\rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right]\cdot x^2$

$\Rightarrow x^4-144=7x^2 \Rightarrow x^4-7x^2-144=0$

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$16 = 2\cdot2\cdot2\cdot2$, $9 = 3\cdot3$

$\Rightarrow (x^2-16)(x^2+9)=0$

اما $x^2=16 \Rightarrow x=\mp4 \xrightarrow{\text{نعوض في ②}} y=\frac{12}{\mp4}=\mp3$

او $x^2=-9 \Rightarrow x=\sqrt{-9}=3i \notin R$ يهمل

الجذران التربيعيان هما $\mp(4+3i)$

c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

لا يُسمح بوجود عدد مركب في المقام لذلك نتخلص منه ثم نجد الجذور

$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{1+3}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i$

نفرض $\sqrt{1+\sqrt{3}i}=x+yi \Rightarrow 1+\sqrt{3}i=x^2+2xyi-y^2$

$x^2-y^2=1$ --- ① , $2xy=\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$ --- ②

نعوض ② في ① $\rightarrow \left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right]\cdot 4x^2$

$\Rightarrow 4x^4-3=4x^2 \Rightarrow 4x^4-4x^2-3=0$

$\Rightarrow (2x^2-3)(2x^2+1)=0$

اما $x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ --- ③

نعوض ③ في ② $\rightarrow y=\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\left(\mp\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}=\mp\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

او $x^2=\frac{-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{-1}{2}} \notin R$ يهمل

∴ الجذران التربيعيان هما $\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

4) ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو:

a) i

بما ان المعاملات حقيقية فإن الجذران مترافقان

اي ان الجذر الثاني هو $(-i)$

$0 = (-i) + i =$ مجموع الجذرين

$1 = (-i) \cdot i =$ ضرب الجذرين

$x^2 - (\text{مجـ})x + (\text{ضرب}) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

b) $5 - i$

$5 - i =$ الجذر الاول ، الجذر الثاني (مرافقه) $= 5 + i$

$10 = (5+i) + (5-i) =$ مجموع الجذرين

$(5-i)\cdot(5+i) = 25 + 1 = 26 =$ ضرب الجذرين

$x^2 - (\text{مجـ})x + (\text{ضرب}) = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 26 = 0$

c) $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i =$ الجذر الاول ، الجذر الثاني $= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i$

$\frac{\sqrt{2}}{4} + \cancel{\frac{3}{4}i} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \cancel{\frac{3}{4}i} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ = مجموع الجذرين

$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i\right) = \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$ = ضرب الجذرين

$x^2 - (\text{مجـ})x + (\text{ضرب}) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{11}{16} = 0$

5) اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$

فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟ وما هو الجذر الآخر؟

(محلول بطريقتين في الأمثلة)

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

نفرض $Z = \sqrt[3]{1}$

تكعيب الطرفين $Z^3 = 1$

$Z^3 - 1 = 0 \Rightarrow$ فرق بين مكعبين $\Rightarrow (Z-1)(Z^2+Z+1)=0$

اما $Z=1$

أو $Z^2+Z+1=0$ تحل بالدستور

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$Z = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

∴ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي

$\boxed{1}$, $\boxed{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$, $\boxed{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

خواصها :

1) الجذران التخيليان مترافقان .

2) مجموع الجذور الثلاثة = صفر .

$1 + \left(\frac{-1}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} i}\right) + \left(\frac{-1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} i}\right) = 0$

3) حاصل ضرب الجذرين التخيليين = 1 .

$\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

4) مربع أحد الجذرين التخيليين = الآخر .

$\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

- اذا رمزنا لاحد الجذور التخيليه بالرمز ω فأن الاخر ω^2

وبذلك ستكون الجذور التخيليه للواحد الصحيح هي $1, \omega, \omega^2$

- الرمز (ω) يقرأ (أوميكا)

قوى ω :-

$\omega^3 = 1$ ⇐ $\omega . \omega^2 = 1$ ⇐ من الخاصية الثالثة نحصل

- أما اذا كان الأس اكبر من 3 نتبع ما يلي:

نجمع ارقام الأس ← نقسم المجموع على 3 ونكتب ← $\omega^{\text{باقي القسمة}}$

أمثلة:

1) $\omega^8 = \omega^2 \xleftarrow{\text{باقي القسمة}}$ $\xrightarrow{\text{توضيح}}$ $3\overline{)8}$ ، الناتج 2 ، $8-6=2$

2) $\omega^{16} = \omega^1 \xrightarrow{\text{توضيح}} 1+6=7$ ، $3\overline{)7}$ ، الناتج 2 ، $7-6=1$

3) $\omega^{18} = \omega^0 = 1 \xrightarrow{\text{توضيح}} 1+8=9$ ، $3\overline{)9}$ ، الناتج 3 ، $9-9=0$

4) $\omega^{113} = \omega^2 \xrightarrow{\text{توضيح}} 1+1+3=5$ ، $3\overline{)5}$ ، الناتج 1 ، $5-3=2$

- اذا كان المجموع أقل من 3 نكتب $\omega^{\text{المجموع}}$ وبدون قسمة

5) $\omega^{11} = \omega^2$

6) $\omega^{100} = \omega^1$

- ممكن ان نستمر في عملية الجمع الى ان نحصل على مرتبة واحدة

7) $\omega^{7255} = \omega^1 \xrightarrow{\text{توضيح}} 7+2+5+5=19$

$1+9=10$

$1+0=1$

$$1+\omega+\omega^2=0$$

$1+\omega=-\omega^2$	$\omega^2=-1-\omega$
$1+\omega^2=-\omega$	$\omega=-1-\omega^2$
$\omega+\omega^2=-1$	$1=-\omega-\omega^2$

ملاحظات مهمة:

1) يمكن التخلص من الكسور في الامثلة ادناه وذلك بوضع ω^3 في البسط والاختصار مع المقام.

1) $\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^{\cancel{3}}}{\cancel{\omega}}=\omega^2$

2) $\frac{7}{\omega^2}=\frac{7\omega^3}{\omega^2}=7\omega$

3) $\omega^{-5}=\frac{1}{\omega^5}=\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\cancel{\omega^2}}=\omega$

4) $\omega^{3n-5}=\omega^{3n}\cdot\omega^{-5}$
$=(\omega^3)^n\cdot\frac{1}{\omega^5}$
$=(1)^n\cdot\frac{1}{\omega^2}$
$=1\cdot\frac{\omega^3}{\omega^2}=\omega$

2) يمكن التخلص من الكسور في الامثلة ادناه وذلك بوضع ω^3 في الحد الخالي من ω في البسط او في المقام، وتستخدم هذه الطريقة اذا وجدنا البسط مشابه للمقام عند قراءة الكسر بدون ω, ω^2.

1) $\frac{2-5\omega}{2\omega^2-5}=\frac{2\omega^3-5\omega}{2\omega^2-5}=\frac{\omega\cancel{(2\omega^2-5)}}{\cancel{(2\omega^2-5)}}=\omega$

2) $\frac{7\omega^2+3}{7+3\omega}=\frac{7\omega^2+3\omega^3}{7+3\omega}=\frac{\omega^2\cancel{(7+3\omega)}}{\cancel{(7+3\omega)}}=\omega^2$

3) $\frac{1+2\omega-3\omega^2}{2-3\omega+\omega^2}=\frac{\omega^3+2\omega-3\omega^2}{2-3\omega+\omega^2}=\frac{\omega\cancel{(\omega^2+2-3\omega)}}{\cancel{(2-3\omega+\omega^2)}}=\omega$

3) نستخرج المشترك (ان وجد) اذا كان ذلك يؤدي الى قانون.

1) $2\omega+2=2(\omega+1)=-2\omega^2$
قانون $=-\omega^2$

2) $3\omega+3\omega^2=3(\omega+\omega^2)=3(-1)=-3$

3) $i\omega+i\omega^2=i(\omega+\omega^2)=-i$

4) $5\omega-5=5(\omega-1)$

5) $3-3\omega^2=3(1-\omega^2)$

4) اذا كان المشترك بإشارة سالبة تغير اشارات داخل القوس.

1) $-3\omega-3\omega^2=-3(\omega+\omega^2)=3$

2) $-7i-7i\omega=-7i(1+\omega)=7i\omega^2$

5) أي حد نضع له ω^3 أو نضع i^4 لا تغير اشارة الحد بينما الحد الذي نضع له i^2 تغير الاشارة.

6) كل مقدار مكون من ثلاث حدود فأكثر ويحتوي على ω , ω^2 من الافضل تحويله الى حدين بالطرائق الآتية:

أولاً / طريقة تحويل ω^2 الى $-1-\omega$:

$2+5\omega+9\omega^2=2+5\omega+9(-1-\omega)=2+5\omega-9-9\omega$
$=-7-4\omega$

ثانياً / طريقة تحويل ω الى $-1-\omega^2$

$2+5\omega+9\omega^2=2+5(-1-\omega^2)+9\omega^2=2-5-5\omega^2+9\omega^2$
$=-3+4\omega^2$

ثالثاً / طريقة التجزئة واخراج مشترك.

$2+5\omega+9\omega^2=2+2\omega+3\omega+9\omega^2=2(1+\omega)+3\omega+9\omega^2$
$=-2\omega^2+3\omega+9\omega^2$
$=7\omega^2+3\omega$

ويمكن التجزئة كالاتي :

$$2+5w+9w^2 = 2+5w+5w^2+4w^2 = 2+5(w+w^2)+4w^2$$
$$= 2-5+4w^2$$
$$= -3+4w^2$$

- ويمكن ان تكتشف طرائق أخرى غير هذه الطرائق الثلاثة .

7) بالإمكان التخلص من الجذور كما في الامثلة ادناه

1) $\sqrt{w} = \sqrt{w \cdot w^3} = \sqrt{w^4} = w$

2) $\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{w \cdot w^3} = \sqrt[4]{w^4} = w$

3) $\sqrt[5]{w^8}$ نحذف الاسس البالية $\sqrt[5]{w^2} = \sqrt[5]{w^2 \cdot w^3} = \sqrt[5]{w^5} = w$

4) $\sqrt[7]{w^4} = \sqrt[7]{w} = \sqrt[7]{w \cdot w^6} = \sqrt[7]{w^7} = w$

أمثلة حول الموضوع :

1) أثبت أن $w^7+w^5+1=0$

الحل $L.H.S = w^7+w^5+1 = w+w^2+1 = 0 = R.H.S$

2) أثبت ان $(1+w^2)^3+(1+w)^3 = -2$

الحل $L.H.S = (-w)^3+(-w^2)^3 = -w^3-w^6 = -1-1 = -2 = R.H.S$

3) اثبت ان $\frac{1}{7-w} - \frac{w^2}{7+8w} = \frac{5}{19}$

الحل $L.H.S = \frac{1}{7-w} - \frac{w^2}{7+8w}$ نوحد المقامات

$$= \frac{(7+8w)-w^2(7-w)}{(7-w)(7+8w)} = \frac{7+8w-7w^2+1}{49+56w-7w-8w^2}$$

$$= \frac{8+8w-7w^2}{49+49w-8w^2} = \frac{8(1+w)-7w^2}{49(1+w)-8w^2}$$

$$= \frac{-\cancel{15}^{5}w^2}{-\cancel{57}_{19}w^2} = \frac{5}{19} = R.H.S$$

4) اثبت ان $\frac{w}{6+5w+4w^2} - \frac{4}{1+3w+5w^2} = 1$

الحل

$$L.H.s = \frac{w}{6+w+4w+4w^2} - \frac{4}{1+3w+3w^2+2w^2}$$

$$= \frac{w}{6+w+4(w+w^2)} - \frac{4}{1+3(w+w^2)+2w^2}$$

$$= \frac{w}{6+w-4} - \frac{4}{1-3+2w^2} = \frac{w}{2+w} - \frac{4}{-2+2w^2}$$

$$= \frac{w(-2+2w^2)-4(2+w)}{(2+w)(-2+2w^2)} = \frac{-2w+2-8-4w}{-4+4w^2-2w+2}$$

$$= \frac{-6w-6}{4w^2-2w-2} = \frac{-6(w+1)}{4w^2-2(w+1)} = \frac{6w^2}{4w^2+2w^2} = \frac{\cancel{6w^2}}{\cancel{6w^2}} = 1 = R.H.s$$

5) اثبت ان $w - w^2 = \mp\sqrt{3}\,i$

الحل $L.H.s = w - w^2 = -1 - w^2 - w^2 = -1 - 2w^2$

$$= -1 - 2\left(\frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \cancel{-1} + \cancel{1} \mp \sqrt{3}\,i = \mp\sqrt{3}\,i = R.H.s$$

ملاحظة / اذا اختلفت اشارتي w و w^2 وبشرط تساوي معاملاتها عندها نستخدم:

$$\left.\begin{matrix} w^2 - w \\ \text{او} \\ w - w^2 \end{matrix}\right\} = \mp\sqrt{3}\,i$$

فمثلاً:

A) $5w^2 - 5w = 5(w^2 - w) = 5(\mp\sqrt{3}\,i) = \mp 5\sqrt{3}\,i$

B) $8(w - w^2)^3 = 8(\mp\sqrt{3}\,i)^3 = \mp 8(9i^3) = \mp 72(-i)$

$= \mp 72 i$

6) جد ناتج :
$$\left(\frac{5-3\omega}{5\omega^2-3} - \frac{2\omega^2-7}{2-7\omega}\right)^6$$

الحل

$$\left(\frac{5\omega^3-3\omega}{5\omega^2-3} - \frac{2\omega^2-7\omega^3}{2-7\omega}\right)^6$$

$$=\left(\frac{\omega\cancel{(5\omega^2-3)}}{\cancel{(5\omega^2-3)}} - \frac{\omega^2\cancel{(2-7\omega)}}{\cancel{(2-7\omega)}}\right)^6 = (\omega-\omega^2)^6 = \left[(\mp\sqrt{3}i)^2\right]^3$$

$$=(-3)^3 = -27$$

7) اثبت ان $\left(\frac{1}{1+3\omega-\omega^2} - \frac{1}{1-\omega+3\omega^2}\right) = \mp\frac{i}{\sqrt{3}}$

الحل

$$L.H.S = \frac{1}{1+3\omega+1+\omega} - \frac{1}{1+1+\omega^2+3\omega^2} = \frac{1}{2+4\omega} - \frac{1}{2+4\omega^2}$$

$$=\frac{(2+4\omega^2)-(2+4\omega)}{(2+4\omega)(2+4\omega^2)} = \frac{\cancel{2}+4\omega^2-\cancel{2}-4\omega}{4+8\omega^2+8\omega+16} = \frac{4(\omega^2-\omega)}{20+8(\omega^2+\omega)}$$

$$=\frac{4(\mp\sqrt{3}i)}{20+8(-1)} = \frac{4(\mp\sqrt{3}i)}{20-8} = \frac{\mp\cancel{4}(\sqrt{3}i)}{\cancel{12}_{3}}$$

$$=\mp\frac{\sqrt{3}i}{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}} = \mp\frac{i}{\sqrt{3}} = R.H.S$$

8) اكتب العدد المركب التالي بالصيغة العادية $\left(\sqrt{\omega^{91}+\omega^{32}}-\omega+\sqrt{\frac{1}{\omega}}\right)^2$

الحل

$$\left(\sqrt{\omega^{91}+\omega^{32}}-\omega+\sqrt{\frac{1}{\omega}}\right)^2 = \left(\sqrt{\omega+\omega^2}-\omega+\sqrt{\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{-1}-\cancel{\omega}+\cancel{\omega}\right)^2 = (\sqrt{-1})^2$$

$$=-1+0i$$

9) جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(3\omega^{32}+8\omega^{64}+5\omega^{137})i$

الحل $(3\omega^{32}+8\omega^{64}+5\omega^{137})i=(3\omega^{2}+8\omega+5\omega^{2})i$

$=(8\omega^2+8\omega)i=8(\omega^2+\omega)i=-8i$

نفرض $\sqrt[3]{-8i}=Z \Rightarrow -8i=Z^3 \Rightarrow Z^3+8i=0$

$\Rightarrow Z^3-8i^3=0 \Rightarrow (Z-2i)(Z^2+2iZ-4)=0$

اما $Z=2i$ او $Z^2+2iZ-4=0$ تحل بالدستور

$Z=\frac{-2i\mp\sqrt{(2i)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{-2i\mp\sqrt{-4+16}}{2}=\frac{-2i\mp\sqrt{12}}{2}$

$=\frac{-2i\mp2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(-i\mp\sqrt{3})}{2}$

اما $Z=-i-\sqrt{3}$ او $Z=-i+\sqrt{3}$

10) اذا علمت ان $x=2+\sqrt{3}i$, $y=2-\sqrt{3}i$ جد قيمة المقدار $\omega^2x^2+\omega y^2$

الحل $\omega^2x^2+\omega y^2=\omega^2(2+\sqrt{3}i)^2+\omega(2-\sqrt{3}i)^2$

$=\omega^2(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+\omega(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$

$=\omega^2(1+4\sqrt{3}i)+\omega(1-4\sqrt{3}i)$

$=\omega^2+4\sqrt{3}i\omega^2+\omega-4\sqrt{3}i\omega$

$=(\omega^2+\omega)+4\sqrt{3}i(\omega^2-\omega)=-1+4\sqrt{3}i(\mp\sqrt{3}i)$

أما $=-1+4\sqrt{3}i(\sqrt{3}i)=-1+12i^2=-1-12=-13$

أو $=-1+4\sqrt{3}i(-\sqrt{3}i)=-1-12i^2=-1+12=11$

ملاحظة / في الاسئلة: 1- جد الجذر التربيعي 2- جد $x,y\in R$

3- جد المقياس والسعة 4- ضع بالصيغة القطبية 5- ديموافر ...

يجب التخلص من ω^2 , ω في البداية.

11) جد الجذر التربيعي للعدد $\dfrac{7+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$

الحل

$$= \frac{7+i(\omega+\omega^2)}{1-i(\omega+\omega^2)} = \frac{7-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$

$$= \frac{7-7i-i+i^2}{1+1} = \frac{6-8i}{2} = 3-4i$$

نفرض $\sqrt{3-4i} = x+yi$

ونكمل الحل ، والجواب $\mp(2-i)$

12) كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1-i\omega$, $1-i\omega^2$

الحل

مجموع الجذرين $= 1-i\omega + 1-i\omega^2 = 2-i(\omega^2+\omega) = 2+i$

ضرب الجذرين $= (1-i\omega)(1-i\omega^2) = 1-i\omega-i\omega^2+\underbrace{i^2}_{-1}\cdot\underbrace{\omega^3}_{1}$

$$= -i\underbrace{(\omega+\omega^2)}_{-1} = i$$

$x^2 - (\text{جمع})x + (\text{ضرب}) = 0$

$x^2 - (2+i)x + i = 0$

ملاحظة خارجية /

ان مرافق ω هو ω^2 وبالعكس
مرافق ω^2+1 هو $\omega+1$ وبالعكس
مرافق $2-5\omega$ هو $3-5\omega^2$ وبالعكس

لاحظ بدون تغير الاشارة كل ω تكون ω^2 وبالعكس

اما مرافق ωi هو $-\omega^2 i$ وبالعكس
مرافق $\omega i+1$ هو $1-\omega^2 i$ وبالعكس
مرافق $3\omega+i$ هو $3\omega^2-i$ وبالعكس
مرافق $5+2\omega i$ هو $5-2\omega^2 i$ وبالعكس
مرافق $3\omega^2-5\omega i$ هو $3\omega+5\omega^2 i$ وبالعكس

لاحظ:
1) تغير اشارة الجزء الخيالي i
2) تغير كل ω الى ω^2 وبالعكس.

١٢) كوّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}$

الحل

الجذر الأول $= \frac{a\omega^3+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} = \frac{\omega(a\omega^2+b+c\omega)}{(b+c\omega+a\omega^2)} = \omega$

الجذر الثاني (مرافقه) $= \omega^2$

مجموع الجذرين $= \omega+\omega^2 = -1$

ضرب الجذرين $= \omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$

$x^2 -$ (جمع) $x +$ (ضرب) $= 0 \Rightarrow x^2-(-1)x+1=0 \Rightarrow x^2+x+1=0$

١٣) اكتب العدد $\frac{6}{2+\omega}$ بالصورة $a+bi$.

الحل $\frac{6}{2+\omega} \cdot \frac{2+\omega^2}{2+\omega^2}$

$= \frac{12+6\omega^2}{4+2\omega^2+2\omega+\omega^3} = \frac{12+6\omega^2}{4+2(\omega^2+\omega)+1} = \frac{12+6\omega^2}{3} = 4+2\omega^2$

$= 4+2\left(\frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4-1 \mp \sqrt{3}i = 3 \mp \sqrt{3}i$

١٤) أثبت أن : $\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega}\right)^6 = -1$

الحل

$L.H.S = \left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega}\right)^6 = \left(\frac{5\omega^2 i-\omega^3(-i^2)}{5+i\omega}\right)^6 = \left(\frac{5\omega^2 i+\omega^3 i^2}{5+i\omega}\right)^6$

$= \left(\frac{\omega^2 i(5+i\omega)}{(5+i\omega)}\right)^6 = (\omega^2 i)^6 = \omega^{12} i^6 = (1)i^2 = -1 = R.H.S$

حل تمارين (1-3)

1) اكتب المقادير الاتية في ابسط صورة:

$a)\ \omega^{64}=\omega \qquad b)\ \omega^{-325}=\frac{1}{\omega^{325}}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$

$c)\ \frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^{32}})^{12}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^{32}})^{12}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^2})^{12}}$

$=\frac{1}{(1+\omega)^{12}}=\frac{1}{(-\omega^2)^{12}}=\frac{1}{\omega^{24}}=\frac{1}{1}=1$

$d)\ (1+\omega^2)^{-4}=(-\omega)^{-4}=\frac{1}{(-\omega)^4}=\frac{1}{\omega}=\omega^2$

$e)\ \omega^{9n+5}=\omega^{9n}\cdot\omega^5=(1)(\omega^2)=\omega^2$

2) كون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$a)\ 1+\omega^2\ ,\ 1+\omega$

الحل مجموع الجذرين $=(1+\omega^2)+(1+\omega)=2+\omega+\omega^2=2-1=1$

ضرب الجذرين $=(1+\omega^2)\cdot(1+\omega)=(-\omega)(-\omega^2)=1$

$x^2-(\text{مج})x+(\text{ضرب})=0 \Rightarrow x^2-x+1=0$

$b)\ \frac{\omega}{2-\omega^2}\ ,\ \frac{\omega^2}{2-\omega}$

الحل مجموع الجذرين $=\frac{\omega}{2-\omega^2}+\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega(2-\omega)+\omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

$=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega-2\omega^2+1}=\frac{\omega+\omega^2}{5-2(\omega+\omega^2)}=\frac{-1}{5+2}=\frac{-1}{7}$

ضرب الجذرين $=\frac{\omega}{2-\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{1}{4-2\omega-2\omega^2+1}=\frac{1}{5-2(\omega+\omega^2)}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7}$

$x^2-(\text{مج.})x+(\text{ضرب})=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}=0$

ج) $\frac{3i}{\omega^2}$, $\frac{-3\omega^2}{i}$

الحل مجموع الجذرين $= \frac{3i \cdot \omega^3}{\omega^2} + \frac{-3\omega^2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 3\omega i + 3\omega^2 i$

$= 3i(\omega+\omega^2) = -3i$

ضرب الجذرين $= \left(\frac{3\cancel{i}}{\cancel{\omega^2}}\right) \cdot \left(\frac{-3\cancel{\omega^2}}{\cancel{i}}\right) = -9$

$x^2 - (\text{جمع})x + \text{ضرب} = 0 \Rightarrow x^2 + 3ix - 9 = 0$

3) اذا كان : $Z^2 + Z + 1 = 0$ فجد قيمة : $\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$

الحل

$Z^2 + Z + 1 = 0$ تحل هذه المعادلة بالدستور

$Z = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$

__الاحتمال الاول__ اذا كانت $Z = \omega$

المقدار $= \frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8} = \frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

__الاحتمال الثاني__ اذا كانت $Z = \omega^2$

المقدار $= \frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}} = \frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2} = \frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2}$

ملاحظه/ قد تعطى المعادلة اعلاه كالاتي $Z^2 + \frac{1}{Z} + 1 = 0$ وبعد ضربها في Z وترتيبها تكون $Z^2 + Z + 1 = 0$ وقد تعطى بحروف أخرى A , C , X .

4) اثبت ان :

a) $\left(\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

الحل

$L.H.S=\left(\frac{(2+w^2)-(2+w)}{(2+w)(2+w^2)}\right)^2=\left(\frac{2+w^2-2-w}{4+2w^2+2w+w^3}\right)^2$

$=\left(\frac{w^2-w}{4+2(w^2+w)+1}\right)^2=\left(\frac{w^2-w}{4-2+1}\right)^2=\left(\frac{w^2-w}{3}\right)^2$

$=\frac{w-2+w^2}{9}=\frac{-1-2}{9}=\frac{\cancel{-3}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,3}}=\frac{-1}{3}$

b) $\frac{w^{14}+w^7-1}{w^{10}+w^5-2}=\frac{2}{3}$

الحل $L.H.S=\frac{w^2+w-1}{w+w^2-2}=\frac{-1-1}{-1-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}=R.H.S$

c) $\left(1-\frac{2}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5}{w}\right)=18$

الحل

$L.H.S=(1-2w+w^2)(-w^2-5w^2)=(1+w^2-2w)(-6w^2)$

$=(-w-2w)(-6w^2)=(-3w)(-6w^2)=18=R.H.S$

d) $(1+w^2)^3+(1+w)^3=2$

الحل

$L.H.S=(1+w^2)^3+(1+w)^3$

$=(-w)^3+(-w^2)^3$

$=-w^3-w^6=-1-1=-2=R.H.S$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة (اشكال ارجاند):

لايجاد الشكل الهندسي للعدد المركب (او الشكل البياني) فنعتبر الجزء الحقيقي يمثل احداثي x والجزء التخيلي يمثل احداثي y

$$x = a + bi \longrightarrow (a, b)$$

متجه العدد المركب: لرسم متجه العدد المركب على المحورين الاحداثيين فيجب ان نعين الشكل الهندسي لهذا العدد المركب كنقطة على المحورين ثم نصل الشعاع المرسوم من نقطة الاصل الى هذه النقطة فيكون هذا الشعاع هو الذي يمثل متجه العدد المركب.

الجمع البياني للاعداد المركبة: لايجاد ناتج جمع عددين مركبين بيانياً (اي ناتج الجمع من خلال الرسم البياني) او يسمى بشكل ارجاند فيجب ان نرسم متجه كل عدد مركب على المحورين الاحداثيين ثم نكمل متوازي الاضلاع فيكون قطر هذا المتوازي الاضلاع المرسوم من نقطة الاصل هو الذي يمثل متجه ناتج الجمع البياني والذي يسمى بشكل ارجاند.

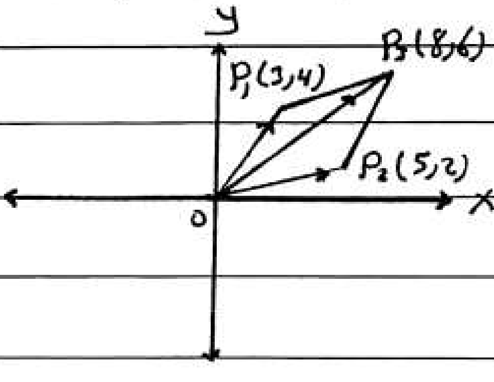
مثال / مثل $(3+4i)+(5+2i)$ على شكل ارجاند.

الحل $(3+4i)+(5+2i) = 8+6i$

$Z_1 = 3+4i \Rightarrow P(Z_1) = P_1(3,4)$

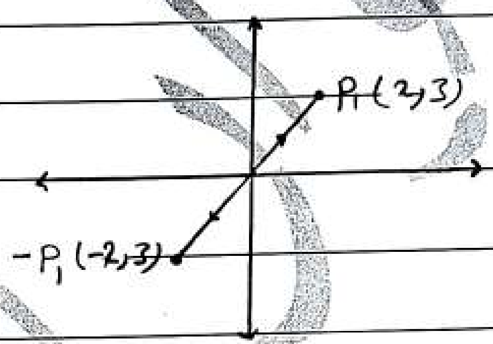
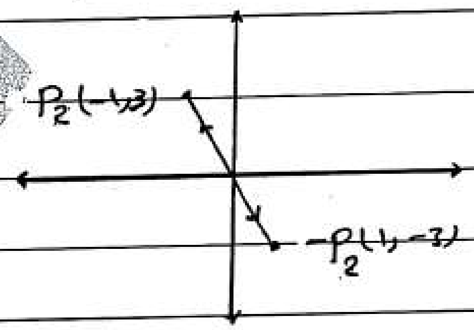
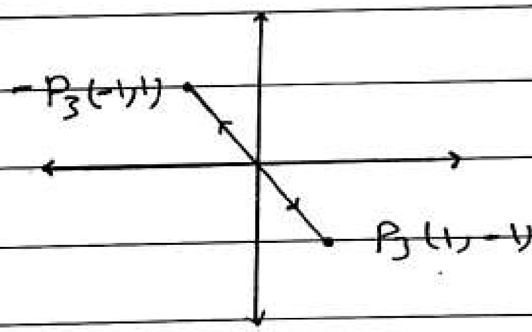
$Z_2 = 5+2i \Rightarrow P(Z_2) = P_2(5,2)$

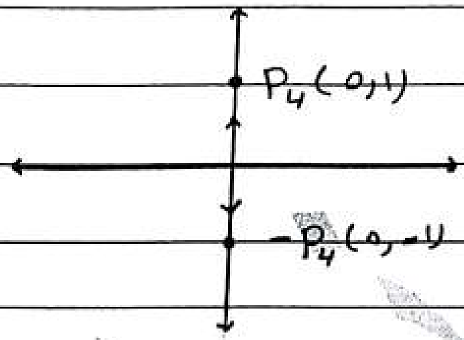
$Z_3 = 8+6i \Rightarrow P(Z_3) = P_3(8,6)$



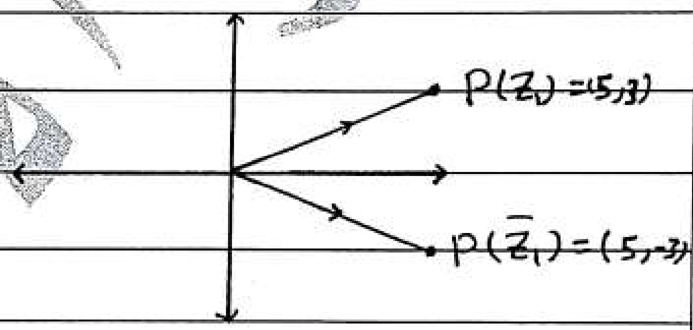
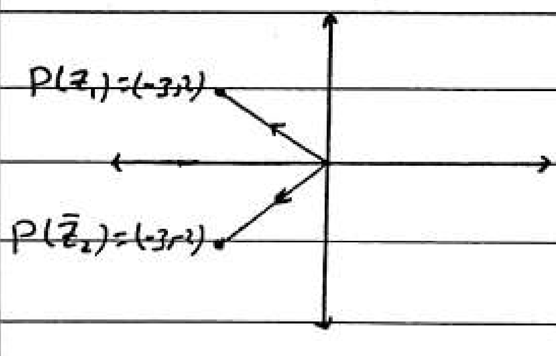
حل تمارين (1-4)

1) اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الاتية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل أرجاند.

العدد	نظيره الجمعي	التمثيل البياني
$Z_1 = 2+3i$ $P_1 = (2,3)$	$-Z_1 = -2-3i$ $-P_1 = (-2,-3)$	
$Z_2 = -1+3i$ $P_2 = (-1,3)$	$-Z_2 = 1-3i$ $-P_2 = (1,-3)$	
$Z_3 = 1-i$ $P_3 = (1,-1)$	$-Z_3 = -1+i$ $-P_3 = (-1,1)$	

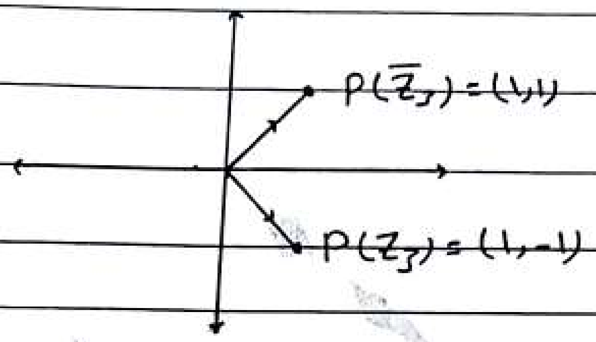
$Z_4 = i$ $P_4 = (0, i)$	$-Z_4 = -i$ $-P_4 = (0, -1)$	

2) اكتب العدد المرافق لكل من الاعداد الاتية ثم مثل هذه الاعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند

العدد	مرافقه	التمثيل البياني
$Z_1 = 5+3i$ $P(Z_1) = (5,3)$	$\bar{Z}_1 = 5-3i$ $P(\bar{Z}_1) = (5,-3)$	
$Z_2 = -3+2i$ $P(Z_2) = (-3,2)$	$\bar{Z}_2 = -3-2i$ $P(\bar{Z}_2) = (-3,-2)$	

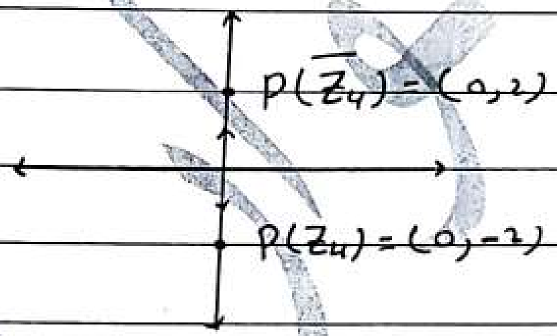
$z_3 = 1 - i$ $\quad \bar{z}_3 = 1 + i$

$P(z_3) = (1,-1)$ $\quad P(\bar{z}_3) = (1,1)$



$z_4 = -2i$ $\quad \bar{z}_4 = 2i$

$P(z_4) = (0,-2)$ $\quad P(\bar{z}_4) = (0,2)$



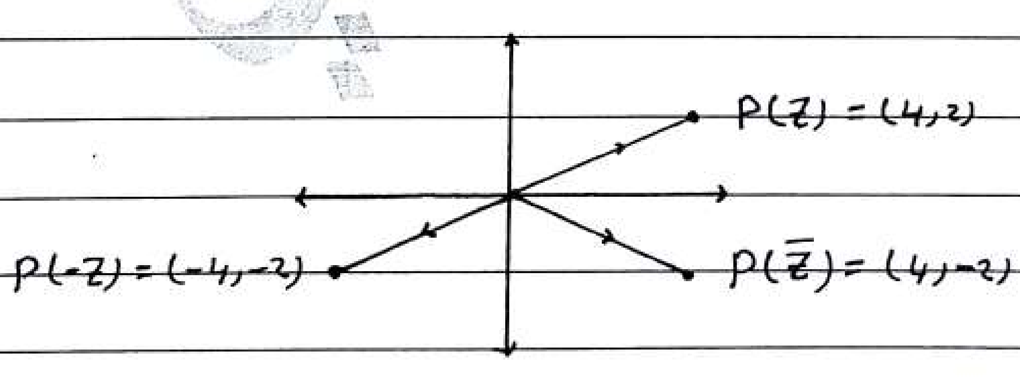
3) اذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :
$z, \bar{z}, -z$.

الحل

$z = 4 + 2i \Rightarrow P(z) = (4,2)$

$\bar{z} = 4 - 2i \Rightarrow P(\bar{z}) = (4,-2)$

$-z = -4 - 2i \Rightarrow P(-z) = (-4,-2)$



4) اذا كان $Z_1 = 4-2i$ ، $Z_2 = 1+2i$ فوضح على شكل ارجاند: $Z_1 - Z_2$, $Z_1 + Z_2$, $-3Z_2$, $2Z_1$

الحل

$Z_1 - Z_2 = (4-2i) - (1+2i) = 3-4i$

$P(Z_1 - Z_2) = (3,4)$

$Z_1 + Z_2 = 4-2i+1+2i = 5+0i$

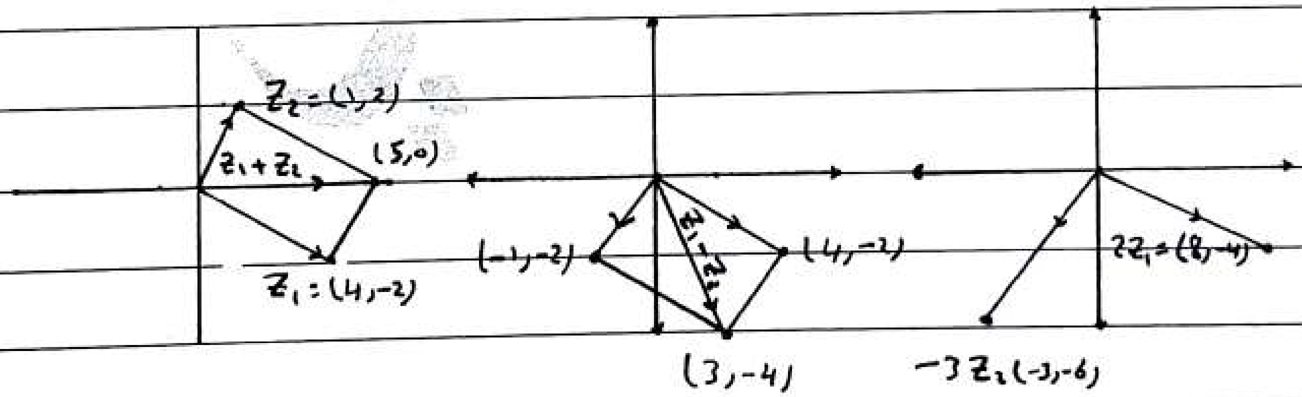
$P(Z_1 + Z_2) = (5,0)$

$-3Z_2 = -3(1+2i) = -3-6i$

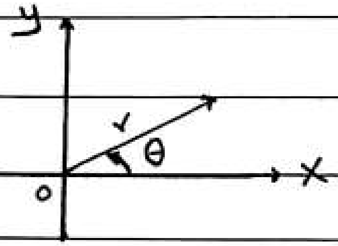
$P(-3Z_2) = (-3,-6)$

$2Z_1 = 2(4-2i) = 8-4i$

$P(2Z_1) = (8,-4)$



الصيغة القطبية للعدد المركب :



مقياس العدد المركب :

ليكن $z = x + yi$ عدد مركب يمثل بالنقطة $p(x,y)$
فأن مقياس العدد z هو طول المتجه $\overrightarrow{OP}$
وهو عدد حقيقي غير سالب.

رموز المقياس هي:
① r
② $\text{mod } z$
③ $\|z\|$

قانون المقياس : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

سعة العدد المركب :

هو قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{OP}$ مع الاتجاه الموجب للمحور x-axis .

رموز السعة هي:
① $\arg(z)$
② θ

$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\sin\theta = \frac{y}{r}$

لايجاد θ نطبق أحد القوانين ادناه وحسب الربع الذي تقع فيه الزاوية

① $\theta =$ الاسناد
② $\theta = \pi -$ الاسناد
③ $\theta = \pi +$ الاسناد
④ $\theta = 2\pi -$ الاسناد

مثال/ جد المقياس والسعة الاساسية للعدد المركب $Z=-1-i$

الحل

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

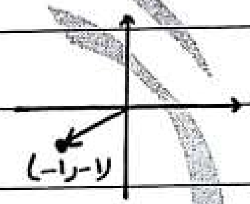
زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$

ولان θ تقع في الربع الثالث

$\theta=\arg(Z)=\pi+$ الاسناد

$=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi+\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

* لمعرفة الربع نحول العدد الى شكل ديكارتي $(-1,-1)$ وهذه النقطة تقع في الربع الثالث



وهكذا في كل سؤال

مثال/ جد المقياس والسعة الاساسية للعدد $Z=2\sqrt{3}-2i$

الحل

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=4$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$

ولان θ تقع في الربع الرابع

$\theta=\arg(Z)=2\pi-$ الاسناد

$=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

* في كل الاسئلة سيكون المطلوب هو «سعة اساسية» وفي حالات نادرة يكون المطلوب «سعة» فنضيف للجواب $2n\pi$ ففي السؤال المجاور السعة هي $\frac{11\pi}{6}+2n\pi$

ملاحظة: تسمى الصيغة $\boxed{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ الصيغة القطبية للعدد المركب.

ففي المثال السابق لو كان المطلوب جد الصيغة القطبية سيكون نفس الحل ونضيف الخطوة التالية:

$$Z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

مثال / عين العدد المركب $(1-\sqrt{3}i)^2$ بالصورة القطبية

الحل

$$Z = (1-\sqrt{3}i)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

ولان θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi+\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

مثال / ضع بالصورة القطبية $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$

الحل

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i} = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-6i^2}{1+12} = \frac{13-13\sqrt{3}i}{13} = 1-\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ ، ولان θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

الصيغة القطبية للأعداد المركبة ١ ، i ، -1 ، $-i$:

ملاحظات :

١) ان الاعداد المركبة ١ ، i ، -1 ، $-i$ مقياسها $r=1$

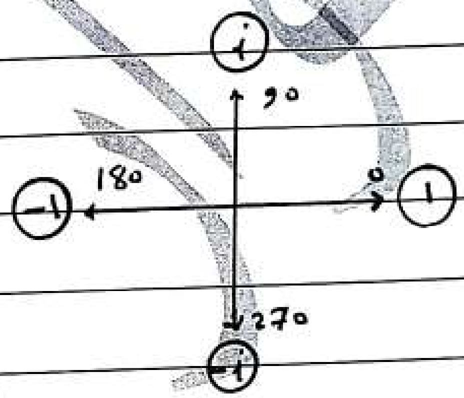
٢) اي عدد مركب منها عند تمثيله بيانياً سيقع على أحد المحاور وليس في داخل الارباع ، لذلك ليس له زاوية اسناد ، اي يمكن ايجاد θ مباشرة

1) $1 \Rightarrow Z = (\cos 0 + i \sin 0)$

2) $i \Rightarrow Z = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

3) $-1 \Rightarrow Z = (\cos \pi + i \sin \pi)$

4) $-i \Rightarrow Z = (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$



مثال / ضع 3 ، $5i$ ، -2 ، $-7i$ بالصورة القطبية

الحل

1) $3 = 3(1) = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

2) $5i = 5(1) = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

3) $-2 = 2(-1) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$

4) $-7i = 7(-i) = 7(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

ملاحظة / في الاسئلة الماضية تعلمنا كيف نحول العدد المركب من الصيغة الجبرية الى الصيغة القطبية وفي الامثلة القادمة سنتعلم العكس كيف نحول العدد المركب من الصيغة القطبية الى صيغة جبرية .

مثال/ اكتب العدد المركب $Z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

الحل

$Z = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i)$

$Z = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} i = \frac{\cancel{\sqrt{2}}.\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{\cancel{\sqrt{2}}.\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}} i = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

مثال/ اكتب العدد Z بالصيغة الجبرية اذا علمت ان مقياسه 2 والقيمة الاساسية لسعته $\frac{5\pi}{6}$.

الحل

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$Z = 2(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)$

$Z = -\sqrt{3} + i$

* يجب مراجعة ص 4 من المراجعة العامة في بداية الملزمة.

مثال/ جد الجذر التربيعي للعدد المركب الذي مقياسه 2 وسعته الاساسية $\frac{5\pi}{3}$

الحل

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

$Z = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

$Z = 1 - \sqrt{3} i$

نفرض $\sqrt{1-\sqrt{3}i} = x + yi$

$1 - \sqrt{3} i = (x+yi)^2$

ونكمل الحل والجواب النهائي:

$\mp(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i)$

مثال / اكتب العدد المركب Z بالصيغة العادية اذا علمت أن $\|Z\|=2$ و $\arg(Z)=\frac{-3\pi}{2}$

الحل

$$Z=r\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]$$

$$Z=2\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right]$$

$$Z=2\left[\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$Z=2\left[0-i(-1)\right]$$

$$Z=0+2i$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

ملاحظة: كل عدد مركب سعته الاساسية معلومة وجزءه الحقيقي أو التخيلي يحتوي مجهول فنطبق مايلي:

نفس العدد بالصيغة القطبية = العدد المركب المعطى في السؤال

مثال / اذا علمت ان $Z=-1+hi$ عدد مركب سعته الاساسية $\frac{5\pi}{4}$ جد قيمة h

الحل

$$-1+hi=r\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$-1+hi=r\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$-1+hi=\frac{-r}{\sqrt{2}}-\frac{r}{\sqrt{2}}i$$

الحقيقي$_1$ = الحقيقي$_2$ $\rightarrow -1=-\frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow r=\sqrt{2}$ ... ①

التخيلي$_1$ = التخيلي$_2$ $\rightarrow h=\frac{-r}{\sqrt{2}}$ ... ②

بتعويض ① في ② $\rightarrow h=\frac{-\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}=-1$

ملاحظة / قد يأتي منطوق هذا السؤال كالآتي: عدد مركب جزءه الحقيقي -1 وسعته الاساسية $\frac{5\pi}{4}$ جد جزءه التخيلي، الحل / نفرض الجزء التخيلي hi وسيكون العدد المركب $Z=-1+hi$ ويكمل الحل كما عرض سابقاً.

مثال / عدد مركب $z=h+4i$ مقياسه $3\sqrt{2}$ جد قيمة h .

الحل $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{h^2+16}$ ← نربع الطرفين ← $18=h^2+16$

$\Rightarrow h^2=2 \Rightarrow h=\mp\sqrt{2}$

ملاحظة هامة / في بعض الاسئلة وعند ايجاد المقياس يجب التبسيط كما في الامثلة ادناه :

$r=\sqrt{8}=\sqrt{(4)(2)}=2\sqrt{2}$

$r=\sqrt{12}=\sqrt{(4)(3)}=2\sqrt{3}$

$r=\sqrt{18}=\sqrt{(9)(2)}=3\sqrt{2}$

$r=\sqrt{6}=\sqrt{(3)(2)}=\sqrt{3}.\sqrt{2}$

وبعدها هذا التبسيط لا يمكن معرفة الزاوية الخاصة .

مبرهنة ديموافر :

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

ويمكن برهنتها كالاتي :

$L.H.S=\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta+i^2\sin^2\theta$

$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i\sin2\theta$

$=\cos2\theta+i\sin2\theta=R.H.S$

وقد توصل العالم ديموافر الى تعميم ذلك كالاتي :

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

حيث : $n\in N$

$\theta\in R$

مثال/ أحسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4$

الحل $= \cos 4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin 4\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i(-1) = -i$

مثال/ أحسب $\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4$

الحل $= \cos 4\left(\frac{5\pi}{24}\right) + i\sin 4\left(\frac{5\pi}{24}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

مثال/ أحسب $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{11}$

الحل $= \cos\frac{11\pi}{3} + i\sin\frac{11\pi}{3}$

$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- راجع ص3 من المراجعة العامة

$3\times 2 \to 6 \,\overline{)\,11\,}$, 1, $\frac{-6}{5}$

ملاحظة/

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta}$$

لأن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الآتي:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta}$$

مثال / أحسب $\dfrac{1}{(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})^3}$

الحل

$$=\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$

$$=\cos\cancel{3}\left(\frac{7\pi}{\cancel{12}}\right)-i\sin\cancel{3}\left(\frac{7\pi}{\cancel{12}}\right)$$

$$=\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}-\left(-\frac{1}{\sqrt2}i\right)=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i$$

مثال / بسط: $\dfrac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

الحل

$$=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^3}$$ بتطبيق عكس ديموافر

$$=\frac{[\cos\theta+i\sin\theta]^{\cancel{10}}}{[\cos\theta+i\sin\theta]^{\cancel{9}}}$$

$$=\cos\theta+i\sin\theta$$ عند القسمة نطرح الاس

مثال / بسط: $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

الحل

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\right]^4$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$$ عند الضرب نجمع الاس

$$=\cos4\theta+i\sin4\theta$$ تطبيق مبرهنة ديموافر

نتيجة مبرهنة ديموافر الاولى (اذا كان الاس عدد صحيح):

ملاحظة/ لتطبيق مبرهنة ديموافر ونتائجها يكون الحل جزئين:
اولاً: نأخذ العدد المركب المعطى في السؤال بدون الاس ونضعه بالصورة القطبية.
ثانياً: نطبق ديموافر.

$\theta \in R \ , \ n \in N$

$$Z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال / احسب بواسطة ديموافر $(1+i)^{11}$

الحل

اولاً: العدد بدون الاس نضعه بالصورة القطبية:

$Z = 1+i \rightarrow (1,1)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ ، ولان θ تقع في الربع الاول:

$\theta = arg(Z) = \frac{\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

ثانياً: الان نطبق ديموافر:

$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$

لاحظ: بما ان البسط اكبر من ضعف المقام اذن نحول الى قياس رئيسي، راجع ص3 من المراجعة العامة

$Z^{11} = 32\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$Z^{11} = 32(-1+i) = -32+32i$

ملاحظة / يمكن ايجاد $(\sqrt{2})^{11}$ كالاتي:

$$(\sqrt{2})^{11} = (\sqrt{2})^{10}(\sqrt{2}) = (2^{\frac{1}{2}})^{10}(\sqrt{2}) = (2)^5(\sqrt{2}) = 32\sqrt{2}$$

كذلك: $(\sqrt{2})^7$:

$$(\sqrt{2})^7 = (\sqrt{2})^6(\sqrt{2}) = (2^{\frac{1}{2}})^6(\sqrt{2}) = (2)^3(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

كذلك: $(\sqrt{2})^6$:

$$(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = (2)^3 = 8$$

كذلك: $(\sqrt{3})^5$:

$$(\sqrt{3})^5 = (\sqrt{3})^4(\sqrt{3}) = (3^{\frac{1}{2}})^4(\sqrt{3}) = (3)^2(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$$

مثال / أحسب $(\sqrt{3}+i)^{-9}$ بواسطة ديموافر:

الحل

$$Z = \sqrt{3}+i \rightarrow (\sqrt{3}, 1)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$ ، ولان θ تقع في الربع الاول:

$$\theta = \arg(Z) = \frac{\pi}{6}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$Z^{-9} = 2^{-9}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}$$

$$= 2^{-9}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6})$$

$$= 2^{-9}(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$= 2^{-9}[0 - (-1)i] = 2^{-9}(0+i) = \frac{1}{2^9}i = \frac{1}{512}i$$

نتيجة مبرهنة ديموافر الثانية (للجذور والاسس الكسرية):

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos\theta + i\sin\theta]^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2K\pi}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$K = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

مثال/ جد الجذور الاربعة للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموافر.

الحل $Z = -16 + 0i \longrightarrow (-16, 0)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-16)^2+0} = 16$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$

$\therefore \theta = \pi$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

$Z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\,(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$Z^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi K}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi K}{4}\right)$

$Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ بوضع $K=0 \leftarrow$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ بوضع $K=1 \leftarrow$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$Z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ بوضع $K=2 \leftarrow$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$Z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ بوضع $K=3 \leftarrow$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ملاحظة / اذا كان مقام الزاوية (6,4,3,2,1) فالزاوية خاصة وغير ذلك فتكون الزاوية غير خاصة ويبقى الناتج بالشكل القطبي

مثال/ جد الجذرين التربيعيين للعدد $(1+i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

الحل

$Z = 1+i \rightarrow (1,1)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$Z^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{2}\right)$

بوضع $K=0$:

$Z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

بوضع $K=1$:

$Z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$

حل بعض المعادلات بطريقة ديموافر :

$x^n - \text{عدد} = 0 \Rightarrow x^n = \text{العدد}$ ← بأخذ الجذر للطرفين ← $x = \sqrt[n]{\text{العدد}}$

$\Rightarrow x = (\text{العدد})^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$ ثم بنفس أسلوب ايجاد الجذور يحل السؤال

وبنفس الطريقة للمعادلة : $x^n + \text{عدد} = 0$

مثال / حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = (-1)^{\frac{1}{3}}$

$Z = -1 + 0i \rightarrow (-1, 0)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 0} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\therefore \theta = \pi$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$

$Z^{\frac{1}{3}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$

$Z^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)$

$Z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ← بوضع $k=0$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_2 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}$ ← بوضع $k=1$

$= -1 + 0 = -1$

$Z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ ← بوضع $k=2$

$Z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

حل الاسئله بالصورة $(عدد مركب)^{\frac{m}{n}}$ بطريقة ديمواڤر :

نأخذ $(العدد المركب بالصوره القطبيه)^{m}$ بدون مقام الاس ونحل السؤال بتطبيق النتيجة الاولى لديمواڤر، ثم نأخذ $(الناتج)^{\frac{1}{n}}$ ونطبق عليه النتيجه لديمواڤر.

مثال / باستخدام مبرهنه ديمواڤر جد ناتج $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$

الحل

$$Z=\sqrt{3}+i \rightarrow (\sqrt{3},1)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} , \sin\theta=\frac{1}{2}$$

الاسناد $\frac{\pi}{6}$ ، ولان θ تقع في الربع الاول

$$\theta=\arg(Z)=\frac{\pi}{6}$$

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{5}}=(4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$$

$$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right) \leftarrow k=0$$

$$Z_2=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right) \leftarrow k=1$$

$$Z_3=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right) \leftarrow k=2$$

$$Z_4=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right) \leftarrow k=3$$

$$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \leftarrow k=4$$

- قد يأتي السؤال اعلاه كالاتي / أوجد الصيغه القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له . وهو نفس الحل اعلاه وهكذا بالنسبة للامثله المشابهة.

حل تمارين (5 – 1)

١) احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right]^4$

(محلول كمثال)

b) $\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$

(محلول كمثال)

٢) احسب باستخدام مبرهنة ديموافر ما يأتي:

a) $(1-i)^7$

<u>الحل</u> $Z = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^7$

$Z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$

$Z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z^7 = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8 + 8i$

$8 \overline{)49}$ ، الناتج 6 ، 48 ، الباقي $1 \leftarrow$ للبسط

b) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$

(محلول كمثال)

3) بسط ما يأتي:

a) $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$ (محلول كمثال)

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta - i\sin\theta)^4$ ...... بطريقتين

الحل

الطريقة الاولى/ $= (\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

الطريقة الثانية/

$(\cos\theta + i\sin)^4 \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^4 (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin)^4 \, [\cos^2\theta + \sin^2\theta]^4$

$= (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)\, [1]^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

---

4) جد الجذور التربيعية للعدد $(-1+\sqrt{3}i)$ بطريقتين

الحل

الطريقة الاولى/ (ديموافر)

$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow (-1, \sqrt{3})$

$r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ θ تقع في الربع الثاني

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$Z^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$Z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$

$k=0 \rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

$k=1 \rightarrow Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

الطريقة الثانية /

نفرض $\sqrt{-1+\sqrt{3}i} = x+yi$

$-1+\sqrt{3}i = (x+yi)^2$

$-1+\sqrt{3}i = x^2+2xyi-y^2$

$x^2-y^2=-1$ ... ①

$2xy=\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$ ... ②

نعوض ② في ① $\rightarrow$ $\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=-1\right]\cdot 4x^2$

$\Rightarrow 4x^4-3=-4x^2 \Rightarrow 4x^4+4x^2-3=0$

$\Rightarrow (2x^2+3)(2x^2-1)=0$

إما $2x^2=-3$ يهمل لأن $x\in R$

أو $2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

عندما $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ نعوض في الثانية

$y=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$c_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ الجذر التربيعي الاول

عندما $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ نعوض في الثانية

$y=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$c_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ الجذر التربيعي الثاني

∴ الجذران التربيعيان هما $\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right)$

5) باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27i)$.

الحل

$Z = 0 + 27i \rightarrow (0, 27)$

$r = \sqrt{0 + (27)^2} = 27$

$\cos\theta = \frac{0}{27} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{27}{27} = 1$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$

$k = 0 \rightarrow Z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$k = 1 \rightarrow Z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$k = 2 \rightarrow Z_3 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3(0 - i) = -3i$

ملاحظة / يمكن ان يأتي السؤال اعلاه بالاسلوب الآتي:
حل المعادلة $x^3 - 27i = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

ويكون الحل / $x^3 = 27i \Rightarrow x = (27i)^{\frac{1}{3}}$

ثم نكمل الحل كما ورد اعلاه ، وتكون مجموعة الحل :

$S = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \; , \; -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \; , \; -3i\right\}$

6) جد الجذور الاربعة للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموافر.
(محلول كمثال)

7) اوجد قيم $(-64)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديمواڤر .

الحل $Z = 0 - 64i \rightarrow (0, -64)$

$r = \sqrt{0 + (-64)^2} = 64$

$\cos\theta = \frac{0}{64} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{-64}{64} = -1$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$

$Z = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2K\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2K\pi}{6}\right)$

$K = 0 \rightarrow Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$K = 1 \rightarrow Z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$K = 2 \rightarrow Z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$K = 3 \rightarrow Z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$K = 4 \rightarrow Z_5 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

$K = 5 \rightarrow Z_6 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

أسئلة عامة حول الفصل الأول :

س١/ جد قيمة $x, y \in R$: $\frac{6}{x+yi} - \frac{3+i}{2-i} = (1-i)^3$

الحل

$$\frac{6}{x+yi} - \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = (1-i)^2(1-i)$$

$$\frac{6}{x+yi} - (1+i) = -2i-2 \Rightarrow \frac{6}{x+yi} - 1 - i = -2i-2$$

$$\frac{6}{x+yi} = -1-i \rightarrow$$ نكمل وضعيتم أرقنيا $x=-3, y=3$

س٢/ جد x, y الحقيقية : $(x+yi)^2(1+2i) = 11+2i$

الحل $(x+yi)^2 = \frac{11+2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$

أكمل الحل والجواب $x = 2, -2$, $y = 1, -1$

س٣/ اذا كان L, M عددان مترافقان حيث $L = \frac{x-i}{2-i}$, $M = \frac{y-i}{4+i}$

جد x, y الحقيقية.

الحل $\frac{x-i}{2-i} = \overline{\left(\frac{y-i}{4+i}\right)} \Rightarrow \frac{x-i}{2-i} = \frac{y+i}{4-i}$

$$(x-i)(4-i) = (2-i)(y+i)$$

$$4x - xi - 4i + i^2 = 2y + 2i - yi - i^2$$

$$(4x-1) + (-x-4)i = (2y+1) + (2-y)i$$

$$4x - 1 = 2y + 1 \Rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \quad \text{---} ①$$

$$-x - 4 = 2 - y \Rightarrow -x + y - 6 = 0 \quad \text{---} ②$$

نحل المعادلتين آنياً $\longrightarrow$ والجواب $x = 7$, $y = 13$

س4/ اذا كان $x=3+2i$ وان $\overline{xy}=1-5i$ جد $y\in\mathbb{C}$.

الحل $\overline{xy}=1-5i \Rightarrow \bar{x}\,\bar{y}=1-5i \Rightarrow (3-2i)\,\bar{y}=1-5i$

$\bar{y}=\frac{1-5i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i}=1-i \Rightarrow y=1+i$

س5/ اذا كان $Z=(3,2x)$ حيث $Z\in\mathbb{C}$ ، $x\in\mathbb{R}$ وكان $\|Z-2i\|=3$ جد x .

الحل $Z=3+2xi$

$Z-2i=3+2xi-2i=3+(2x-2)i$

$\|Z-2i\|=\sqrt{(3)^2+(2x-2)^2}=3$

$\sqrt{9+(2x-2)^2}=3 \Rightarrow 9+(2x-2)^2=9 \Rightarrow (2x-2)^2=0$

$\Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

س6/ حل المعادلة حيث $x\in\mathbb{C}$ $\quad x\bar{x}+8\|x\|^2+x^2=40$

الحل نفرض $x=a+bi$

$(a+bi)(a-bi)+8(\sqrt{a^2+b^2})^2+(a+b)^2=40$

$10a^2+8b^2+2abi=40+0i$

$[10a^2+8b^2=40]\div 2 \Rightarrow 5a^2+4b^2=20$ ---①

$[2ab=0]\div 2 \Rightarrow ab=0$

اما $a=0 \rightarrow$ نعوضها في الاولى $\rightarrow b=\mp\sqrt{5}$

$\therefore x=0\mp\sqrt{5}i$

او $b=0 \rightarrow$ نعوضها في الاولى $\rightarrow a=\mp 2$

$\therefore x=\mp 2+0i$

س7 / جد x, y الحقيقية :

$$\sqrt{\sin\theta + i\cos\theta} - \sqrt{\sin\theta - i\cos\theta} - \sqrt{x+yi} = 0$$

الحل

نربع الطرفين $\sqrt{\sin\theta + i\cos\theta} - \sqrt{\sin\theta - i\cos\theta} = \sqrt{x+yi}$

$$\sin\theta + \cancel{i\cos\theta} - 2\sqrt{\sin\theta + i\cos\theta}\cdot\sqrt{\sin\theta - i\cos\theta} + \sin\theta - \cancel{i\cos\theta} = x+yi$$

$$2\sin\theta - 2\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = x+yi$$

$$2\sin\theta - 2\sqrt{1} = x+yi$$

$$2\sin\theta - 2 + 0i = x+yi \Rightarrow x = 2\sin\theta - 2 \ , \ y = 0$$

س8 / اذا كان $\frac{x^3 - y^3 i}{x+yi} = -3+2i$ جد x, y الحقيقية.

الحل

$$\frac{x^3 + y^3 i^3}{x+yi} = -3+2i$$

لاحظ / نضع i^2 وتغير اشارة الحد لكي نحصل على مجموع مكعبين

$$\frac{\cancel{(x+yi)}(x^2 - xyi + y^2 i^2)}{\cancel{(x+yi)}} = -3+2i$$

$$(x^2 - y^2) + (-xy)i = -3+2i$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \text{......①}$$

$$-xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{-x} \quad \text{......②}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{-x}\right)^2 = -3 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right]\cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2+4)(x^2-1) = 0$$

اما $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

عندما $x = 1 \Rightarrow y = -2$

عندما $x = -1 \Rightarrow y = 2$

او $x^2 + 4 = 0$ تهمل

س9 / حلل x^2+x+1 بطريقتين .

الحل 1) $x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$ — نضيف ونطرح $(\frac{1}{2}\times معامل\ x)^2$

$= (x^2+x+\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{4})$ — $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$= (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$= (x+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}i^2$

$= [(x+\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}i][(x+\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$

2) $x^2+x+1 = x^2+(-w-w^2)x+w^3$

$= (x-w^2)(x-w)$

س10 / اذا كان $(2-4i)$ هو احد جذري المعادلة $2x^2-x-bx+c-6=0$ معاملاتها حقيقية ، جد $b,c\in R$.

الحل $[2x^2-(1+b)x+(c-6)=0]\div 2$

$x^2-(\frac{1+b}{2})x+(\frac{c-6}{2})=0$

الجذر الاول $= 2-4i$ ، الجذر الثاني (مرافقه) $= 2+4i$

مجموع الجذرين $= \frac{1+b}{2} \Rightarrow (2-4i)+(2+4i)=\frac{1+b}{2}$

$\frac{1+b}{2}=\frac{4}{1} \Rightarrow 1+b=8 \Rightarrow b=7$

ضرب الجذرين $= \frac{c-6}{2} \Rightarrow (2-4i)(2+4i)=\frac{c-6}{2}$

$4+16=\frac{c-6}{2} \Rightarrow \frac{c-6}{2}=20$

$c-6=40 \Rightarrow c=46$

س11 / اذا كان النظير الضربي للعدد $\frac{h+2i}{h^2+4}$ هو احد الجذور التربيعية للعدد $3h-8mi$.

الحل

$\frac{h+2i}{h^2+4}$ ← نظير الضربي ← $\frac{h^2+4}{h+2i} = \frac{h^2-4i^2}{h+2i}$

$\Rightarrow \frac{(h-2i)\cancel{(h+2i)}}{\cancel{(h+2i)}} = h-2i$

$3h-8mi = (h-2i)^2 \Rightarrow 3h-8mi = h^2-4hi+4i^2$

$3h-8mi = (h^2-4)-4hi$ نكمل الحل مثال التساوي

الجواب : $m = 2, \frac{-1}{2}$ ، $h = 4, -1$

س12 / جد $x, y \in R$: $(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

الحل

$(-2x-x)+(2-x^2)i = \frac{(3y-7i)\cancel{(3y+7i)}}{\cancel{(3y+7i)}}$

$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$

ونكمل الحل ، الجواب : $x = \mp 3$ ، $y = \mp 3$

س13 / برهن ان $(\omega i)^{184} + (\omega i)^{32} + (i\omega+i)^6 = -2$

الحل

$L.H.S = \omega^{184} \cdot i^{184} + \omega^{32} i^{32} + [i(\omega+1)]^6$

$= \omega(1) + \omega^2(1) + [-i\omega^2]^6$

$= \omega + \omega^2 + i^6 \omega^{12}$

$= -1 - 1 = -2 = R.H.S$

س14 / اثبت ان $\frac{w}{(2+5w+2w^2)^2}+\frac{w^2}{(2+2w+5w^2)^2}=\frac{-1}{9}$

الحل

$$L.H.S=\frac{w}{[5w+2(1+w^2)]^2}+\frac{w^2}{[5w^2+2(1+w)]^2}$$

$$=\frac{w}{[5w-2w]^2}+\frac{w^2}{[5w^2-2w^2]^2}=\frac{w}{[3w]^2}+\frac{w^2}{[3w^2]^2}$$

$$=\frac{w}{9w^2}+\frac{w^2}{9w^4}=\frac{1}{9w}+\frac{1}{9w^2}=\frac{w+1}{9w^2}=\frac{-w^2}{9w^2}=\frac{-1}{9}=R.H.S$$

س15 / باستخدام مبرهنة ديموافر احسب $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{\frac{5}{3}}$

الحل

$$Z=\frac{-1+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=i \rightarrow (0,1)$$

ونكمل الحل، ويكون الناتج $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $-i$

س16 / ضع العدد $Z=\left(\frac{w}{2+3w^2+4w}+\frac{1}{1-w}\right)^{4n}$

الحل

الجواب: بعد التبسيط $\rightarrow Z=(1)^{4n}=1 \rightarrow Z=\cos 0+i\sin 0$

س17 / ضع العدد المركب الذي احد جذريه التربيعين $1-\sqrt{3}i$ بالصورة القطبية

الحل

$$(1-\sqrt{3}i)^2=1-2\sqrt{3}i+3i^2=-2-2\sqrt{3}i$$

ليكن $Z=-2-2\sqrt{3}i$

نكمل الحل، والجواب: $Z=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

س18 / جد الجذور الستة للعدد $\frac{w}{6+5w+4w^2}-\frac{4}{1+3w+5w^2}$

الحل ليكن $Z=\frac{w}{6+5w+4w^2}-\frac{4}{1+3w+5w^2}$

نجد التبسيط $\rightarrow Z=1 \Rightarrow Z=\cos 0+i\sin 0$

$Z^{\frac{1}{6}}=(\cos 0+i\sin 0)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{6}}=\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}$

ونكمل الحل ، والجواب : $1 ، -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i ، -1 ، -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i ، \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i ،$
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

س19 / عدد مركب $M=-1+hi$ سعته الأساسية تساوي السعة الأساسية للعدد $(1+i)^{11}$ ، جد قيمة h .

الحل $Z=1+i \rightarrow (1,1)$

$r=\sqrt{2} ، \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} ، \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} ، \theta=\frac{\pi}{4}$

$Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z^{11}=32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$-1+hi=r\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$-1+hi=-\frac{r}{\sqrt{2}}+\frac{r}{\sqrt{2}}i$

$-1=-\frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow r=\sqrt{2} ، h=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

س20 / ضع بالصورة القطبية : $\frac{(-1-i)^5(-1+i)^6}{32}$

الحل
$\frac{(-1-i)^5(-1+i)^5(-1+i)}{32}=\frac{[(-1-i)(-1+i)]^5(-1+i)}{32}=\frac{(1+1)^5(-1+i)}{32}=\frac{\cancel{32}(-1+i)}{\cancel{32}}=-1+i$

أكمل والجواب : $Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

س21/ اذا كانت $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ برهن ان: 1) $Z+\frac{1}{Z}=2\cos\theta$

2) $Z^n-\frac{1}{Z^n}=2i\sin n\theta$

الحل 1) $L.H.S=Z+Z^{-1}=\cos\theta+i\sin\theta+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$

$=\cos\theta+\cancel{i\sin\theta}+\cos\theta-\cancel{i\sin\theta}=2\cos\theta=R.H.S$

2) $L.H.S=Z^n-Z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$

$=\cos n\theta+i\sin n\theta-(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

$=\cancel{\cos n\theta}+i\sin n\theta-\cancel{\cos n\theta}+i\sin n\theta$

$=2i\sin n\theta=R.H.S$

س22/ اذا كان $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ اثبت ان $\frac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\frac{1}{2\cos n\theta}$

الحل

الطريقة الاولى/

$L.H.S=\frac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}$

$=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta}=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta+2i\sin n\theta\cos n\theta}$

$=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{2\cos n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta)}=\frac{1}{2\cos n\theta}=R.H.S$

الطريقة الثانية/

$L.H.S=\frac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\frac{1}{Z^{-n}(1+Z^{2n})}=\frac{1}{Z^{-n}+Z^n}$

$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}+(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta-i\sin n\theta+\cos n\theta+i\sin n\theta}$

$=\frac{1}{2\cos n\theta}=R.H.S$

س23 / اذا كان $Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$ عدد مركباً جد باستخدام ديموافر $Z^{\frac{1}{2}}$.

الحل

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{1+3}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow \left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r=1 \quad , \cos\theta=\frac{-1}{2} \quad , \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \theta=\frac{4\pi}{3}$$

وبكمل الحل والجواب : $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

س24 / جد ناتج : $\left(3w^{9n}+\frac{5}{w^5}+\frac{4}{w^4}\right)^6$

الحل

$$=\left[3(w^9)^n+\frac{5}{w^2}+\frac{4}{w}\right]^6=\left[3(1)^n+\frac{5w^3}{w^2}+\frac{4w^3}{w}\right]^6$$

$$=\left[3+5w+4w^2\right]^6=\left[3+5w+4(-1-w)\right]^6$$

$$=\left[3+5w-4-4w\right]^6=\left[-1+w\right]^6=\left[(-1+w)^2\right]^3$$

$$=\left[1-2w+w^2\right]^3=\left[-w-2w\right]^3=\left[-3w\right]^3=-27w^3=-27$$

س25 / بدون الضرب بالمرافق ضع بالصورة الجبرية : 1) $\frac{5}{2-i}$ 2) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

الحل

1) $\frac{4+1}{2-i}=\frac{4-i^2}{2-i}=\frac{\cancel{(2-i)}(2+i)}{\cancel{(2-i)}}=2+i$

2) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1+3}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1-3i^2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\cancel{(1-\sqrt{3}i)}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{(1-\sqrt{3}i)}}=1+\sqrt{3}i$

س 26 / برهن أن: $\frac{2w^2}{2+3w^2}+\frac{3}{3+w}-\frac{1}{w}=\frac{15}{7}$

الحل

$$L.H.S=\frac{2w^2(3+w)+3(2+3w^2)}{(2+3w^2)(3+w)}-\frac{w^3}{w}$$

$$=\frac{6w^2+2w^3+6+9w^2}{6+2w+9w^2+3w^3}-w^2=\frac{15w^2+8}{9+2w+9w^2}-w^2$$

$$=\frac{15w^2+8}{9+2(-1-w^2)+9w^2}-w^2=\frac{15w^2+8}{7+7w^2}-w^2$$

$$=\frac{15w^2+8}{-7w}-w^2=\frac{15w^2+8+7w^3}{-7w}=\frac{15w^2+15}{-7w}$$

$$=\frac{-15w}{-7w}=\frac{5}{7}=R.H.S$$

س 27 / ضع $\frac{1}{\cos x-i\sin x}$ بالصورة القطبية وبثلاث طرائق:

الحل

1) $\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos x-i\sin x}=\frac{\cos^2x-i^2\sin^2x}{\cos x-i\sin x}=\frac{\cancel{(\cos x-i\sin x)}(\cos x+i\sin x)}{\cancel{(\cos x-i\sin x)}}$

$$=\cos x+i\sin x$$

2) $(\cos x-i\sin x)^{-1}=[(\cos x+i\sin x)^{-1}]^{-1}=\cos x+i\sin x$

3) الضرب في المرافق

س28 / جد ناتج $(-1-\sqrt{3}i)^5 + (-1+\sqrt{3}i)^5$

الحل $= \left[2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right]^5 + \left[2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]^5$

$= \left[2\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^5 + \left[2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^5$

* اذا كان $w = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ فأن $w^2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= [2w]^5 + [2w^2]^5 = 32w^5 + 32w^{10} = 32w^2 + 32w = -32$

س29 / اذا كان $2+i = \frac{7-4i}{a+bi}$ جد الجذر التربيعي للعدد $2a-bi$

الحل $(a+bi)\cdot(2+i) = 7-4i$

$a+bi = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = 2-3i$

$a=2 \ , \ b=-3$

$\therefore \ 2a-bi = 4+3i$

نجد الجذر التربيعي للعدد $(4+3i)$ بطريقة الفرضية والجواب $\mp\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

س30 / اذا علمت ان $\frac{2x+2y-i}{x-2y+2i}$, $\frac{1+i}{1+wi+w^2i}$ عددان مترافقان.

الحل

$\overline{\left(\frac{2x+2y-i}{x-2y+2i}\right)} = \frac{1+i}{1+wi+w^2i}$

$\frac{2x+2y+i}{x-2y-2i} = \frac{1+i}{1+i(w+w^2)} \Rightarrow \frac{2x+2y+i}{x-2y-2i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$\frac{2x+2y+i}{x-2y-2i} = i \longrightarrow$ ثم وضعها في طرفية ومن التساوي نحصل

على : $x=1 \ , \ y=0$

س31/ أثبت ان: $9 = \left(\frac{a-b\omega^2}{a\omega-b} - \frac{c-d\omega}{c\omega^2-d}\right)^4$

س32/ اذا علمت ان: $z+\bar{z}=4$ ، $z^2-(\bar{z})^2=8i$ حيث $z\in\mathbb{C}$

جد: 1) الجذر التربيعي للعدد $z-2$.

2) الجذر التكعيبي للعدد $z-2$.

الحل نفرض $z=x+yi$

$z+\bar{z}=4 \Rightarrow (x+yi)+(x-yi)=4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

$z^2-(\bar{z})^2=8i \Rightarrow (x+yi)^2-(x-yi)^2=8i$

$\Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2-(x^2-2xyi+y^2i^2)=8i$

$4xyi=8i \Rightarrow xy=2$ ← $x=2$ نعوض ← $y=1$

$\therefore z=2+i \Rightarrow \therefore z-2=2+i-2=i$

نفرض $H=i$ ← $(0,1)$

$H=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ أكمل لتجد الجذر التربيعي والتكعيبي

والجواب: 1) $\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i$ ، $-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i$

2) $\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{\sqrt2}i$ ، $-\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{\sqrt2}i$ ، $-i$

× يمكن ايجاد الجذر التربيعي بطريقة الفرضية او بواسطة ديموافر ما لم يحدد

س33/ اذا كان $z=a+bi$ وان $\|z+2\|=\|z+2i\|$ اثبت ان $a=b$

الحل $\|a+bi+2\|=\|a+bi+2i\|$

$\|(a+2)+bi\|=\|a+(b+2)i\|$

$\sqrt{(a+2)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2}$ بتربيع الطرفين

$\cancel{a^2}+4a+\cancel{4}+\cancel{b^2}=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+4b+\cancel{4}$

$4a=4b \Rightarrow \therefore a=b$

س34 / اذا كان $Z=\cos 2x+i\sin 2x$ فاثبت ان : $\frac{2}{1+Z}=1-i\tan x$

الحل

الطريقة الاولى:

$$L.H.S=\frac{2}{1+Z}=\frac{2}{1+(\cos 2x+i\sin 2x)}$$

$$=\frac{2}{\cancel{\sin^2 x}+\cos^2 x+\cos^2 x-\cancel{\sin^2 x}+2i\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2}{2\cos^2 x+2i\sin x\cos x}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos x(\cos x+i\sin x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x(\cos x+i\sin x)}=\frac{\cos^2 x-i^2\sin^2 x}{\cos x(\cos x+i\sin x)}$$

$$=\frac{(\cos x-i\sin x)\cancel{(\cos x+i\sin x)}}{\cos x\cancel{(\cos x+i\sin x)}}=\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}-i\frac{\sin x}{\cos x}=1-i\tan x=R.H.S$$

الطريقة الثانية:

$$L.H.S=\frac{2}{1+Z}=\frac{2}{1+\cos 2x+i\sin 2x}\cdot\frac{1+\cos 2x-i\sin 2x}{1+\cos 2x-i\sin 2x}$$

$$=\frac{2(1+\cos 2x-i\sin 2x)}{1+2\cos 2x+\cos^2 2x+\sin^2 2x}$$

$$=\frac{\cancel{2}(1+\cos 2x-i\sin 2x)}{\cancel{2}(1+\cos 2x)}$$

$$=\frac{\cancel{1+\cos 2x}}{\cancel{1+\cos 2x}}-i\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

$$=1-i\frac{\cancel{2}\sin x\cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x}=1-i\tan x=R.H.S$$

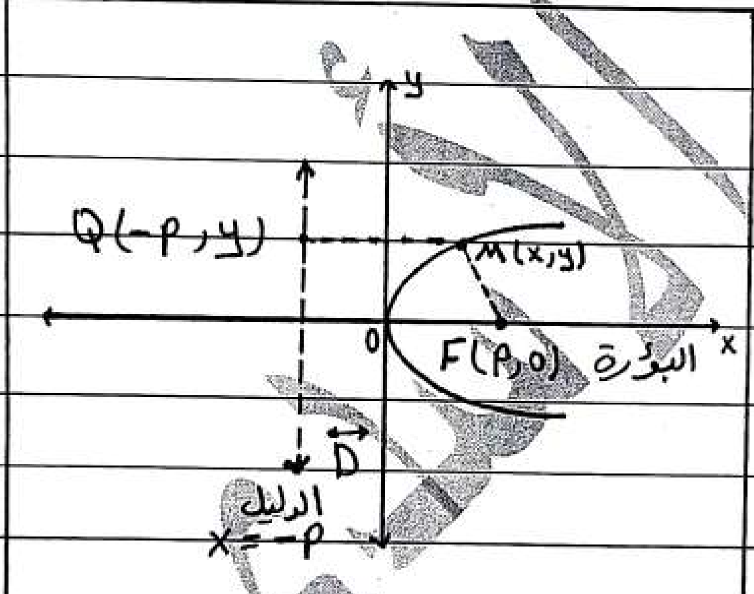
الفصل الثاني

القطوع المخروطية

الفصل الثاني
(القطوع المخروطية)

القطع المكافئ: هو مجموعة النقاط في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.

اولاً: معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته على محور السينات x-axis الموجب والرأس في نقطة الأصل.



لتكن $F(p,0)$ هي البؤرة
والمستقيم $\overleftrightarrow{D}$ هو الدليل
والنقطة $Q(-p,y)$ نقطة من نقط الدليل.
والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع.
والرأس $(0,0)$ نقطة الأصل.
وليكن $\overline{MQ}$ عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{D}$ ومن تعريف القطع المكافئ: بعدها عن الدليل = بعد النقطة M عن البؤرة F
أي أنه:

$$\overline{MF} = \overline{MQ}$$

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين: $\left[d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right]$

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

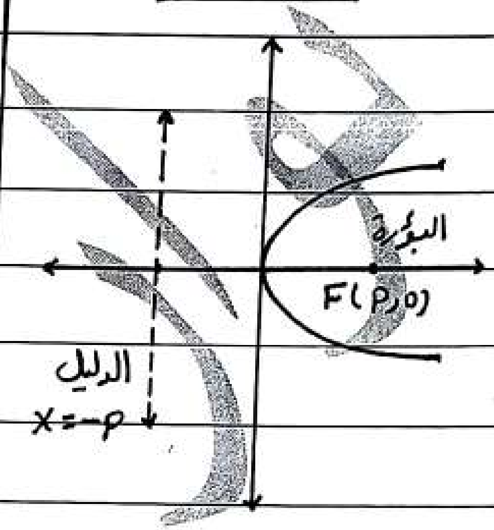
$$\cancel{x^2}-2px+\cancel{p^2}+y^2=\cancel{x^2}+2px+\cancel{p^2}$$

$$\boxed{y^2=4px} \quad \forall p>0$$

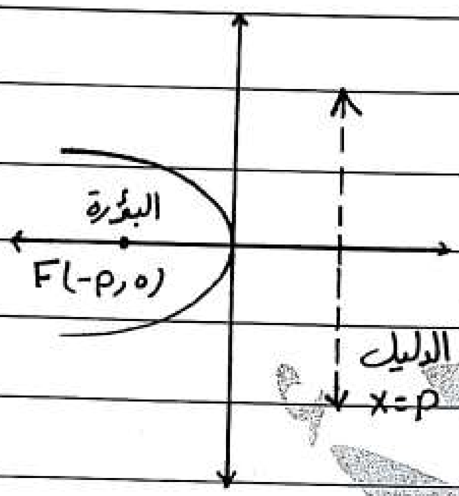
وبنفس الطريقة يمكن اشتقاق بقية معادلات القطع المكافئ.

خلاصة : الحالات الاتية تمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

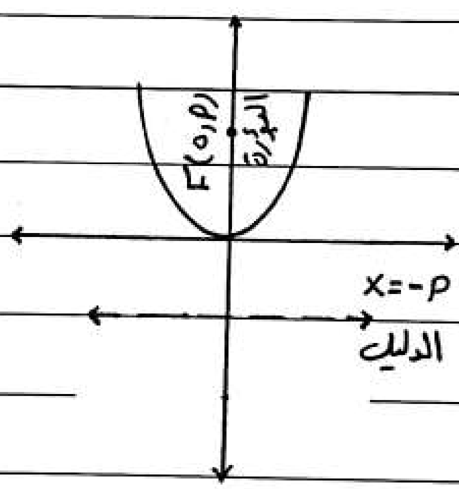
أولاً: $\boxed{y^2=4px}$



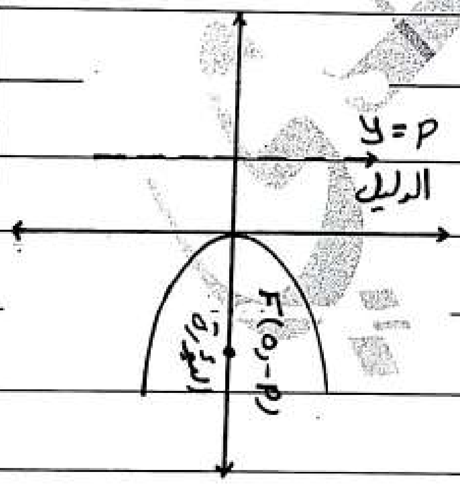
ثانياً: $\boxed{y^2=-4px}$



ثالثاً: $\boxed{x^2=4py}$



رابعاً: $\boxed{x^2=-4py}$



ملاحظة ١ : معادلة اي قطع مكافئ (رأسه نقطة الاصل) تحتوي على y^2 , x فقط أو تحتوي على x^2 , y فقط.

(البؤرة على السينات) (البؤرة على الصادات)

ملاحظة 2 : x البؤرة = x الدليل (بعكس الاشارة)

y البؤرة = y الدليل (بعكس الاشارة)

أمثلة

$F(3,0) \Rightarrow$ الدليل $x=-3$

$F(0,3) \Rightarrow$ الدليل $y=-3$

$F(-5,0) \Rightarrow$ الدليل $x=5$

الدليل $x=-\sqrt{3} \Rightarrow F(\sqrt{3},0)$

الدليل $y=8 \Rightarrow F(0,-8)$

الدليل $2y+5=0$

$2y=-5$

$y=\frac{-5}{2}$

$\Rightarrow F(0,\frac{5}{2})$

ملاحظة 3 : نجد p من البؤرة أو من الدليل باشارة موجبة بغض النظر ان كانت البؤرة او الدليل موجب او سالب.

أمثلة : $F(3,0) \Rightarrow p=3$

$F(-3,0) \Rightarrow p=3$

$F(0,-2) \Rightarrow p=2$

$F(0,\frac{2}{5}) \Rightarrow p=\frac{2}{5}$

الدليل $x=2 \Rightarrow p=2$, الدليل $y+4=0 \Rightarrow y=-4 \rightarrow p=4$

ملاحظة 4 : لايجاد معادلة القطع المكافئ اذا علمت البؤرة او الدليل نتبع مايلي :

1- نجد p من البؤرة أو من الدليل بإشارة موجبة دائماً.

2- نختار المعادلة القياسية بإشارة مشابهة لإشارة البؤرة ومعاكسه لإشارة الدليل وحسب ما ورد في الخلاصة.

مثال : جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي :

1) بؤرته $(3,0)$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل $F(3,0) \Rightarrow p=3$

$\rightarrow y^2=4px$ المعادلة القياسية

$\therefore$ المعادلة $\Rightarrow y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

2) بؤرته $(0,-2\sqrt{3})$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل $F(0,-2\sqrt{3}) \Rightarrow p=2\sqrt{3}$

$\rightarrow x^2=-4py$ المعادلة القياسية

$\therefore$ المعادلة $\Rightarrow x^2=-4(2\sqrt{3})y \Rightarrow x^2=-8\sqrt{3}y$

3) معادلة دليله $y=8$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل الدليل $y=8 \Rightarrow p=8$

$\rightarrow x^2=-4py$ المعادلة القياسية

$\Rightarrow x^2=-4(8)y \Rightarrow x^2=-32y$

4) معادلة دليله $2x+3=0$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل $2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \Rightarrow p=\frac{3}{2}$

$\rightarrow y^2=4px$ المعادلة القياسية

$\Rightarrow y^2=4(\frac{3}{2})x \Rightarrow y^2=6x$ المعادلة

ملاحظة 5 : معكوس الملاحظة السابقة:
لايجاد البؤرة ومعادلة الدليل اذا علمت معادلة القطع المكافئ نتبع التالي
1- نضع المعادلة بالصيغه القياسية.
2- بالمقارنة نجد قيمه p (وتكون دائماً موجبه).
3- نكتب البؤرة باشارة مشابهه لاشارة المعادلة ونكتب الدليل باشارة معاكسة لإشارة المعادلة.

مثال: جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئة الاتية:

1) $y^2 = 5x$

$y^2 = 4px$ بالمقارنة مع $\Rightarrow 4p = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{4}$

$\therefore F(\frac{5}{4}, 0)$, الدليل $x = \frac{-5}{4}$

2) $2x^2 + 3y = 0$

$2x^2 = -3y \Rightarrow x^2 = \frac{-3}{2}y \Leftrightarrow x^2 = -4py$

$-4p = \frac{-3}{2} \Rightarrow 4p = \frac{3}{2} \Rightarrow 8p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{8}$

$\therefore F(0, \frac{-3}{8})$, الدليل $y = \frac{3}{8}$

3) $y = \frac{4}{3}x^2$ نضرب في 3

$3y = 4x^2$

$x^2 = \frac{3}{4}y \Leftrightarrow x^2 = 4py$

$4p = \frac{3}{4} \Rightarrow 16p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{16}$

$\therefore F(0, \frac{3}{16})$, الدليل $y = \frac{-3}{16}$

ملاحظة 6: كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ تحقق معادلته وبالعكس.

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته على السينات ويمر بالنقطة $(-2,-4)$ ورأسه نقطة الاصل.

الحل
$\because$ البؤرة على السينات
$\therefore$ المعادلة القياسية $y^2=-4px$

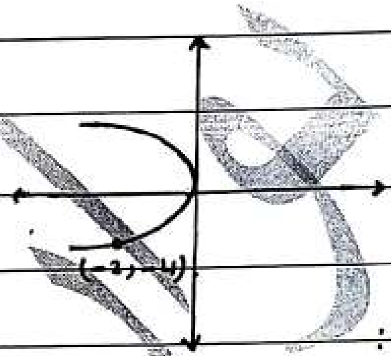
$\because (-2,-4) \in$ للقطع
$\therefore$ تحقق معادلته (نعوضها):

$16=-4p(-2)$

$16=8p \Rightarrow p=2$

$\therefore$ المعادلة هي $y^2=-4(2)x$

$y^2=-8x$



لاحظ:
موقع النقطة في الرسم هو الذي يحدد اشارة المعادلة القياسية موجبة ام سالبة
ويمكن ايضاً:
1- اذا كانت البؤرة على السينات نعتمد على اشارة الاحداثي السيني.
2- اذا كانت البؤرة على الصادات نعتمد على اشارة الاحداثي الصادي.

مثال / جد قيمة h اذا علمت ان النقطة $(2,h)$ تنتمي للقطع المكافئ $3x^2+5y=0$

الحل
$(2,h) \in$ للقطع
$\therefore$ تحقق المعادلة:

$12+5h=0$

$5h=-12$

$h=\frac{-12}{5}$

لاحظ:
ليس من الضروري ان تضع المعادلة بالصورة القياسية عند تعويض النقطة ولكن يجب ذلك عند ايجاد البؤرة والدليل.

مثال / جد قيمة h اذا علمت ان النقطة (٢،١) تنتمي للقطع المكافئ
$hy^2 - 4x = 0$

الحل $(1,2) \in$ للقطع ← نحقق معادلته
$4h - 4 = 0 \Rightarrow h = 1$

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور الصادات ويمر بالنقطة (٣،٥-)
اي ان البؤرة على الصادات
((واجب)) والجواب النهائي : $x^2 = \frac{9}{5}y$

ملاحظة / عندما يذكر في منطوق السؤال
حيث $x > 0$: تعني البؤرة على محور السينات الموجب .
$x < 0$: تعني البؤرة على محور السينات .
$y > 0$: تعني البؤرة على محور الصادات الموجب .
$y < 0$: تعني البؤرة على محور الصادات السالب .

ملاحظة 7 / التناظر :
١) منحني القطع المكافئ الذي بؤرته على السينات متناظر مع محور السينات، أي أنه كل نقطة (x,y) تنتمي اليه ، فأنه يوجد نقطة أخرى $(x,-y)$ تنتمي اليه ايضاً .
٢) منحني القطع المكافئ الذي بؤرته على الصادات متناظر مع محور الصادات ، أي انه كل نقطة (x,y) تنتمي اليه ، فأنه يوجد نقطة أخرى $(-x,y)$ تنتمي اليه ايضاً .

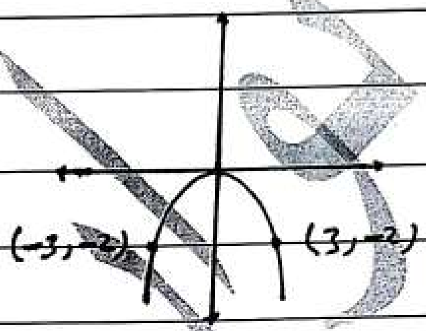
مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3,-2)$ و $(-3,-2)$.

الحل

∵ النقطتين متناظرتين حول محور الصادات ((من الرسم))

∴ المعادلة القياسية هي ← $x^2=-4py$

نعوض احدى النقطتين ولتكن $(3,-2)$



$\Rightarrow 9=-4p(-2)$

$\Rightarrow 9=8p$

$\Rightarrow p=\frac{9}{8}$

$\Rightarrow x^2=-4\left(\frac{9}{8}\right)y$

$\Rightarrow x^2=-\frac{9}{2}y$

ملاحظة / يمكن معرفة موقع البؤرة في المثال اعلاه من خلال الاعتماد على الاحداثي الذي لم تتغير اشارته بالنقطتين فتكون البؤرة على ذلك المحور.

ملاحظة 8 / اذا كان الدليل يمر بالنقطة (x_1,y_1) فأن:

1- معادلة الدليل $x=x_1$ اذا كانت البؤرة على محور السينات.

2- معادلة الدليل $y=y_1$ اذا كانت البؤرة على محور الصادات.

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته على السينات ودليله يمر بالنقطة $(-2,-4)$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل معادلة الدليل $x=-2 \Rightarrow p=2$

$$y^2=4px \Rightarrow y^2=4(2)x \Rightarrow y^2=8x$$

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(3,8)$ ورأسه نقطة الاصل.

الحل معادلة الدليل $y=8 \Rightarrow p=8$

$$x^2=-4py \Rightarrow x^2=-4(8)y \Rightarrow x^2=-32y$$

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (3,-5) ورأسه نقطة الاصل.

الحل

م/ اذا لم يذكر موقع البؤرة فهنالك احتمالين

الاحتمال الاول : (البؤرة على السينات)

$x = 3 \Rightarrow p = 3$

$y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -4(3)x \Rightarrow y^2 = -12x$

الاحتمال الثاني : (البؤرة على الصادات)

معادلة الدليل $y = -5 \Rightarrow p = 5$

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ودليله يوازي محور السينات.

الحل

م/ اذا كان الدليل يوازي محور السينات فالبؤرة على الصادات ، اما اذا كان الدليل يوازي محور الصادات فالبؤرة على السينات.

الدليل $y = 4 \Rightarrow p = 4$

$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(4)y$

$\Rightarrow x^2 = -16y$

لاحظ : يجب الانتباه في كل سؤال هل النقطة تنتمي للقطع ام الى الدليل

فاذا كانت النقطة تنتمي ← للقطع المكافئ نطبق الملاحظة 6

← الدليل نطبق الملاحظة 8

* " تنتمي او تقع على أو يمر بها أو أحد نقاطه "

ملاحظة ٥: ايجاد معادلة القطع المكافئ بواسطة التعريف.

مثال/ جد بواسطة التعريف معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (٧،٠).

الحل $F(7,0) \Rightarrow$ الدليل $x=-7$

نفرض النقطة $M(x,y)$ تنتمي اليه

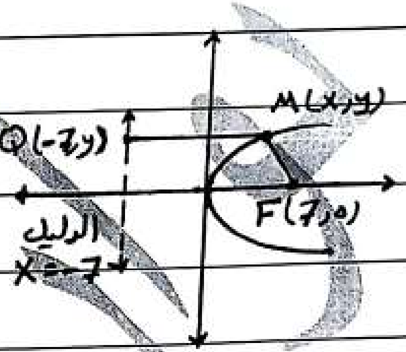
$\overline{MF} = \overline{MQ}$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

$$\cancel{x^2} - 14x + \cancel{49} + y^2 = \cancel{x^2} + 14x + \cancel{49}$$

$$y^2 = 28x$$



ملاحظة/ يمكنك التأكد من صحة الحل وذلك بحل التمرين بالطريقة الاعتيادية

مثال/ جد باستخدام التعريف معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $y=\sqrt{3}$.

الحل $y=\sqrt{3} \Rightarrow F(0,-\sqrt{3})$

نفرض النقطة $M(x,y)$ تنتمي اليه

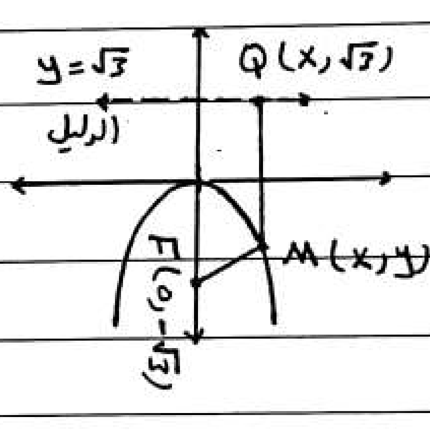
$\overline{MF} = \overline{MQ}$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$

بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

$$x^2 + \cancel{y^2} + 2\sqrt{3}\,y + \cancel{3} = \cancel{y^2} - 2\sqrt{3}\,y + \cancel{3}$$

$$x^2 = -4\sqrt{3}\,y$$



ملاحظة ١٥ : e يسمى الاختلاف المركزي وفي القطع المكافئ e=1

$$e = \frac{MF}{MQ} = \frac{\text{بعد أية نقطة تنتمي للقطع المكافئ عن البؤرة}}{\text{بعد نفس النقطة عن الدليل}}$$

بما أن البعدين متساويين فأن e=1

ملاحظة ١١ : رسم القطع المكافئ :

اولاً : لرسم القطع المكافئ الذي بؤرته على محور السينات :

١- نجد البؤرة والدليل.

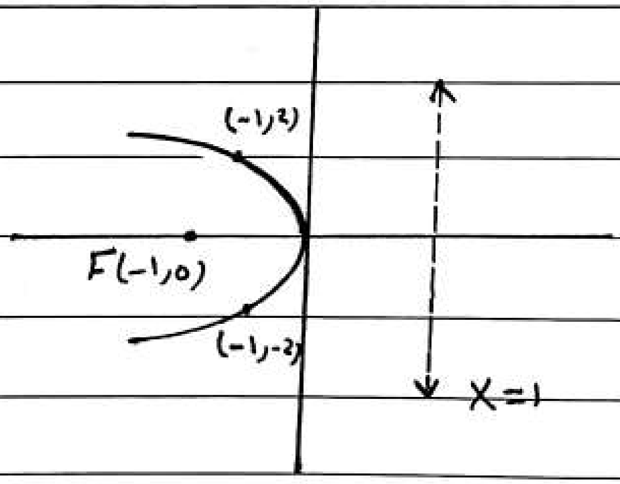
2- نختار قيماً لـ x بحيث تكون موجبة اذا كان معامل x موجب وسالبة اذا كان معامل x سالب.

مثال / ارسم القطع المكافئ $y^2=-4x$.

الحل $y^2=-4x \Leftrightarrow y^2=-4px \Rightarrow -4p=-4 \Rightarrow p=1$

$F(-1,0)$, الدليل $x=1$

x	0	-1	-2
y	0	∓ 2	$\mp 2\sqrt{2}$



ثانياً : لرسم القطع المكافئ الذي بؤرته على الصادات :

١- نجد البؤرة و الدليل .

٢- نختار قيماً لـ y بحيث تكون موجبة اذا كان معامل y موجب وسالبة اذا كان معامل y سالب .

مثال / ارسم القطع المكافئ $x^2 = 2y$.

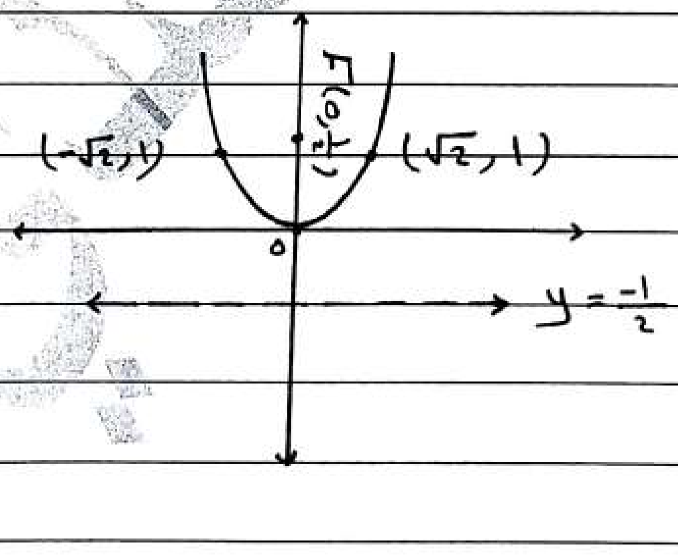
الحل

$x^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 = 4py$

$\Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$F(0, \frac{1}{2})$, الدليل $y = \frac{-1}{2}$

x	0	$\mp\sqrt{2}$	∓ 2
y	0	1	2



إنسحاب المحاور للقطع المكافئ :

في كل حالات القطع المكافئ الدرجة يكون الرأس (٠,٠) وعند انسحاب الرأس الى النقطة (h,k) سوف تتغير مكونات القطع المكافئ كالاتي :

اولاً	القطع المكافئ الذي بؤرته على محور السينات الموجب	مكوناته بعد الانسحاب
معادلته	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
رأسه	$V(0,0)$	$V(h,k)$
بؤرته	$F(p,0)$	$F(p+h, k)$
معادلة الدليل	$x = -p$	$x = -p+h$
معادلة المحور	$y = 0$	$y = k$
اتجاه الفتحة	نحو اليمين	نحو اليمين

ثانياً	القطع المكافئ الذي بؤرته على محور السينات السالب	مكوناته بعد الانسحاب
معادلته	$y^2 = -4px$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$
رأسه	$V(0,0)$	$V(h,k)$
بؤرته	$F(-p,0)$	$F(-p+h, k)$
معادلة الدليل	$x = p$	$x = p+h$
معادلة المحور	$y=0$	$y = k$
اتجاه الفتحة	نحو اليسار	نحو اليسار

مكونات بعد الانسحاب	القطع المكافئ الذي بؤرته على محور الصادات الموجب	ثالثاً
$(x-h)^2=4p(y-k)$	$x^2=4py$	معادلته
$V(h,k)$	$V(0,0)$	رأسه
$F(h,p+k)$	$F(0,p)$	بؤرته
$y=-p+k$	$y=-p$	معادلة الدليل
$x=h$	$x=0$	معادلة المحور
الى الاعلى	الى الاعلى	اتجاه الفتحة

مكوناته بعد الانسحاب	القطع المكافئ الذي بؤرته على محور الصادات السالب	رابعاً
$(x-h)^2=-4p(y-k)$	$x^2=-4py$	معادلته
$V(h,k)$	$V(0,0)$	رأسه
$F(h,-p+k)$	$F(0,-p)$	بؤرته
$y=p+k$	$y=p$	دليله
$x=h$	$x=0$	معادلة المحور
الى الاسفل	الى الاسفل	اتجاه الفتحة

ويمكنك اعتماد الاستنتاج والخلاصة ادناه والاستغناء عن الجداول السابقة

1- كل احداثي سيني يضاف له h وكل احداثي صادي يضاف له k باستثناء معادلة القطع المكافئ نطرح h, k .

2- المحور المنطبق على محور السينات او موازٍ له فمعادلته $y=k$.
المحور المنطبق على محور الصادات أو موازٍ له فمعادلته $x=h$.
((اذا كانت معادلة الدليل x فمعادلة المحور y وبالعكس))

3- هذا الاستنتاج ينطبق على القطع المكافئ والناقص والزائد.

مثال / عين الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور لكل من القطوع المكافئة الاتية :

1) $(y+1)^2 = 4(x-2)$

بالمقارنة مع $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$h = 2 , k = -1 \Rightarrow V(h,k) = V(2,-1)$

$4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$\bar{F}(p+h,k) \Rightarrow \bar{F}(1+2,-1) = \bar{F}(3,-1)$

معادلة الدليل $x = -1+2 = 1$

معادلة المحور $y = -1$

2) $x^2 + 4x - y = 0$

- نضع الحدود التي تحتوي على y في جهة والحدود التي تحتوي على x في جهة.
- ونضيف الى طرفي المعادلة $\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2$ لكي نحصل على مربع كامل في الجهة اليسرى . اي : $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$
- ثم نحول المقدار في الطرف الايسر الى مربع كامل (جذر الثالث $\mp$ جذر الاول)^2 حسب اشارة الوسط

$x^2 + 4x - y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = y$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = y + 4$

$(x+2)^2 = (y+4) \Leftrightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h = -2 , k = -4 \Rightarrow V(-2,-4)$

$4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

$\bar{F}(h, p+k) \Rightarrow \bar{F}(-2, \frac{1}{4} - 4) = \bar{F}(-2, \frac{-15}{4})$

معادلة الدليل $y = \frac{-1}{4} - 4 \Rightarrow y = \frac{-17}{4}$

معادلة المحور $x = -2$

ملاحظة / نجعل معامل x^2 يساوي واحد قبل جعل المقدار مربع كامل كما في المثال الاتي :

بالقسمة على 3 لكي نجعل معامل x^2 يساوي واحد $3x^2+12x-3y=0$

ثم نكمل الحل كما جاء في المثال السابق $x^2+4x-y=0$

3) $y^2+4y+2x+6=0$

- نجعل الحدود التي تحتوي على y في جهة والحدود التي تحتوي على x في جهة اخرى أما الحد المطلق الخالي من x او y فنضعه في جهة المتغير من الدرجة الاولى.

$y^2+4y=-2x-6$

- نضيف الى طرفي المعادلة $\left(\frac{y\text{ معامل}}{2}\right)^2$.

$y^2+4y+4=-2x-6+4$

- يجب ان يكون معامل x يساوي 1 لذلك نستخرج المشترك.

$y^2+4y+4=-2x-2$

$y^2+4y+4=-2(x+1)$

- نحول المقدار في الطرف الايسر الى مربع كامل.

$(y+2)^2=-2(x+1)$

بالمقارنة $(y-k)^2=-4p(x-h)$

$h=-1\ ,\ k=-2 \Rightarrow V(h,k)=V(-1,-2)$

$-4p=-2 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

$F(-p+h,k) \Rightarrow F(\frac{-1}{2}-1,-2) \Rightarrow F(\frac{-3}{2},-2)$

معادلة الدليل $x=\frac{1}{2}-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

معادلة المحور $y=-2$

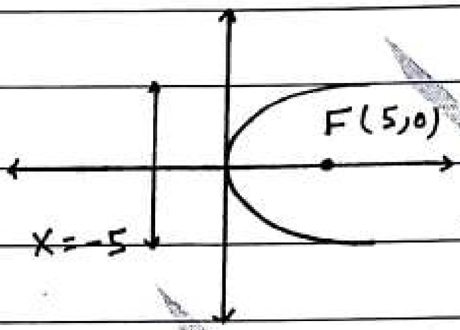
حل تمارين (1-2)

1) جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني.

أ- البؤرة (5,0) والرأس نقطة الأصل

الحل $p=5 \Rightarrow y^2=4px \Rightarrow y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

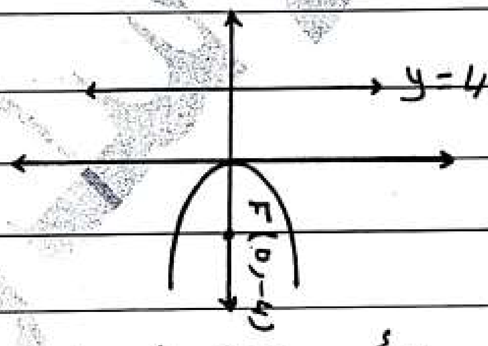
$x=-5$



ب- البؤرة (0,-4) والرأس نقطة الأصل

الحل $p=4 \Rightarrow x^2=-4py \Rightarrow x^2=-16y$

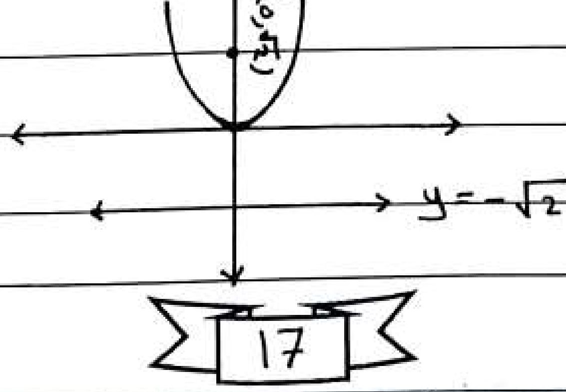
$y=4$



جـ- البؤرة $(0,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل

الحل $p=\sqrt{2} \Rightarrow x^2=4py \Rightarrow x^2=4\sqrt{2}y$

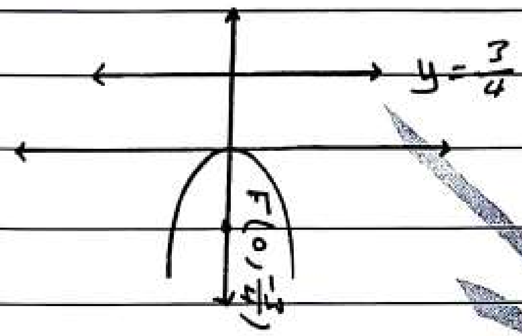
$y=-\sqrt{2}$



د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y-3=0$ والرأس نقطة الاصل.

الحل $y=\frac{3}{4} \Rightarrow p=\frac{3}{4} \Rightarrow F(0,\frac{-3}{4})$

$x^2=-4py \Rightarrow x^2=-3y$



2) في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ.

a) $x^2=4y$

الحل $x^2=4py$ بالمقارنة $\Rightarrow V(0,0)\,,\ p=1 \Rightarrow F(0,1)$

معادلة الدليل $y=-1$, معادلة المحور $x=0$

b) $2x+16y^2=0$

الحل $2x=-16y^2 \Rightarrow y^2=\frac{-1}{8}x \Leftrightarrow y^2=-4px$

$4p=\frac{1}{8} \Rightarrow p=\frac{1}{32} \Rightarrow F(\frac{-1}{32},0)$

معادلة الدليل $x=\frac{1}{32}$, معادلة المحور $y=0$, $V(0,0)$

c) $y^2=-4(x-2)$

الحل $(y-0)^2=-4(x-2) \Leftrightarrow (y-k)^2=-4p(x-h)$

$h=2,\ k=0,\ p=1 \Rightarrow V(h,k)=V(2,0)$

$F(h-p,k)=F(2-1,0)=F(1,0)$

معادلة الدليل $x=h+p \Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3$

معادلة المحور $y=k \Rightarrow y=0$

d) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

الحل $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ بالمقارنة $\Rightarrow h=1 , k=1 , 4p=8 \Rightarrow p=2$

$V(h,k) = V(1,1)$, $F(h, k+p) \Rightarrow F(1,3)$

معادلة الدليل $y = k-p \Rightarrow y = 1-2 \Rightarrow y=-1$

معادلة المحور $x = h \Rightarrow x=1$

e) $y^2+4y+2x=-6$ (محلول كمثال)

f) $x^2+6x-y=0$

الحل $x^2+6x+9 = y+9$

$(x+3)^2 = (y+9) \Leftrightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h=-3 , k=-9 \Rightarrow V(-3,-9)$

$4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$

$F(h, p+k) \Rightarrow F(-3, \frac{1}{4}-9) = F(-3, \frac{-35}{4})$

$y=-p+k \Rightarrow y=\frac{-1}{4}-9 \Rightarrow y=\frac{-37}{4}$ الدليل

$x=h \Rightarrow x=-3$ المحور

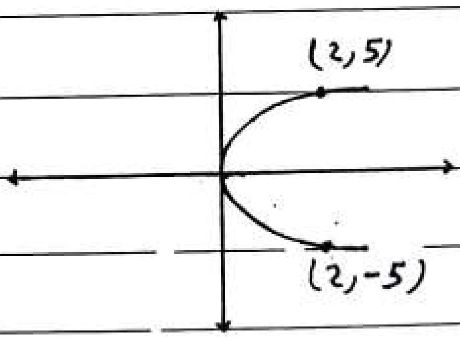
3) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$ ، $(2,-5)$ والرأس في نقطة الاصل.

الحل $y^2 = 4px$

نعوض احدى النقطتين ولتكن $(2,-5)$:

$(-5)^2 = 4p(2) \Rightarrow p=\frac{25}{8}$

$\therefore y^2 = 4(\frac{25}{8})x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$



4) اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (4,3-) والرأس نقطة الاصل. جد معادلته علماً أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

الحل

لعدم معرفتنا بموقع البؤرة يوجد احتمالين

الاحتمال الاول: اذا كانت البؤرة على محور السينات:

معادلة الدليل $x=-3$, $F(3,0) \Rightarrow p=3$

$y^2=4px \Rightarrow y^2=12x$

الاحتمال الثاني: اذا كانت البؤرة على محور الصادات:

معادلة الدليل $y=4$, $F(0,-4) \Rightarrow p=4$

$x^2=-4py \Rightarrow x^2=-16y$

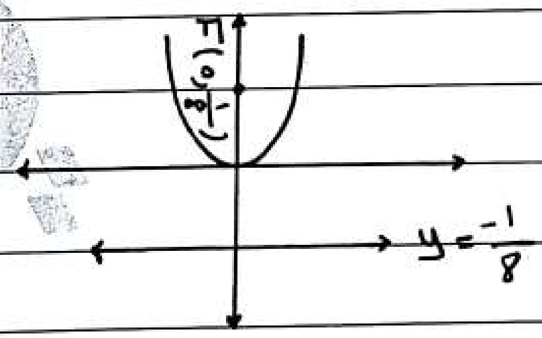
5) قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y=0$ يمر بالنقطة (1,2). جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله وارسم القطع.

الحل النقطة (1,2) تحقق المعادلة:

$A(1)^2+8(2)=0 \Rightarrow A=-16$

$\therefore -16x^2+8y=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}y \Leftrightarrow x^2=4py$

$4p=\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{8} \Rightarrow F(0,\frac{1}{8})$, $y=\frac{-1}{8}$



6) باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ:

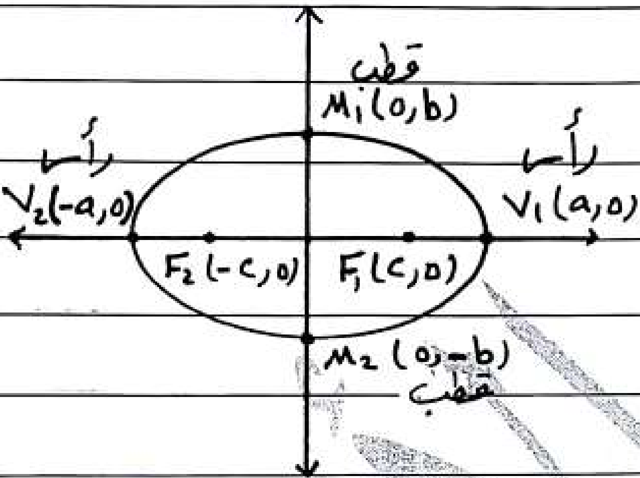
أ- البؤرة (7,0) والرأس نقطة الاصل.

ب- معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل.

محلول كمثال

القطع الناقص: مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت.

اولاً: القطع الناقص الذي بؤرتاه ورأساه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.



معادلته:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

بؤرتاه $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$

رأساه $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

طول محوره الكبير (المسافة بين الرأسين) $= 2a$

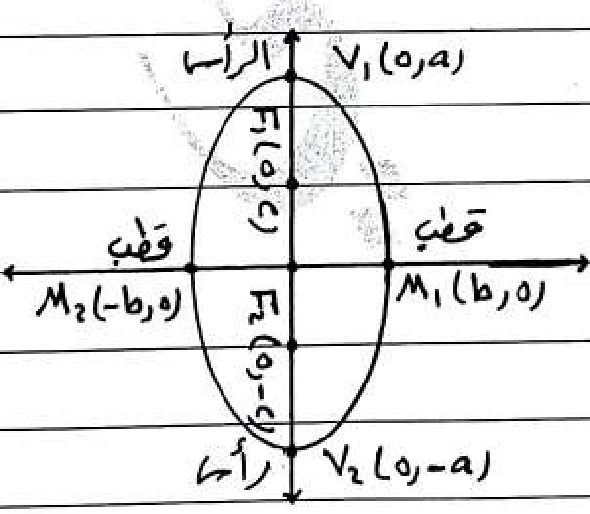
القطبين $M_1(0,b)$, $M_2(0,-b)$

طول محوره الصغير (المسافة بين القطبين) $= 2b$

ثانياً: القطع الناقص الذي بؤرتاه ورأساه على محور الصادات ومركزه الاصل.

معادلته:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$



بؤرتاه $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$

رأساه $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$

طول محوره الكبير $= 2a$

القطبين $M_1(b,0)$, $M_2(-b,0)$

طول محوره الصغير $= 2b$

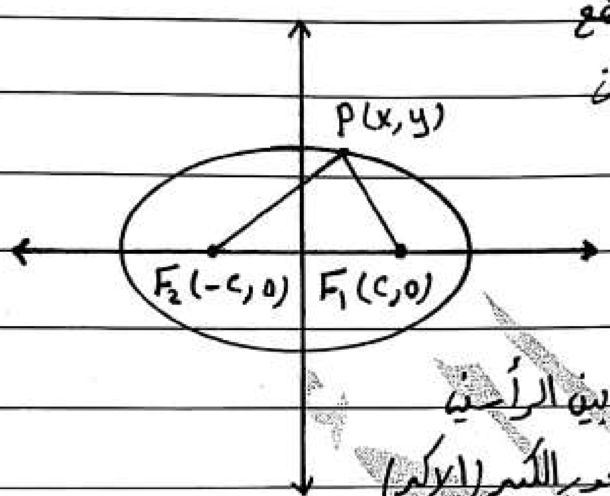
ملاحظات :

1- المحور الكبير $= 2a$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين.
المحور الصغير $= 2b$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين القطبين.
المسافة بين البؤرتين (البعد البؤري) $= 2c$

2- اذا كانت $p(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص الذي بؤرتاه F_1 , F_2 فان

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

(حسب تعريف القطع الناقص)



3- يسمى $2a$
← المسافة بين الرأسين
← طول المحور الكبير (الاكبر)
← البعد الثابت (العدد الثابت)
← المحور الرئيسي
← مجموع بعدي اية نقطة تنتمي اليه عن بؤرتيه

4- مساحة القطع الناقص : $A = ab\pi$

5- محيط القطع الناقص : $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

6- المستقيم المار بالبؤرتين يسمى المحور البؤري.

7- يسمى (e) بالاختلاف المركزي حيث $1 >$ $e = \frac{c}{a}$

8- $c^2 = a^2 - b^2$ حيث $a > b$ ، $a > c$

9- المجهول في معادلة القطع الناقص هو a, b
ولايجاد a, b نجعل الطرف الايمن من المعادلة $= 1$ ونلاحظ ما يلي :

أولاً: اذا كان مقام x^2 اكبر من مقام y^2 فالمعادلة من النوع الاول ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) اي ان البؤرتين والرأسين على محور السينات.

ثانياً: اذا كان مقام y^2 اكبر من مقام x^2 فالمعادلة من النوع الثاني ($\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$) اي ان البؤرتين والرأسين على محور الصادات.

مثال/ جد الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي.

أو يأتي السؤال/ ناقش القطع الناقص.

1) $9x^2+16y^2=144$

نجعل الطرف الايمن يساوي واحد بقسمة المعادلة على 144

$$\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

نلاحظ مقام x^2 اكبر من مقام y^2 اذن من النوع الاول

(ودائماً المقام الاكبر هو a^2 والمقام الاصغر هو b^2)

الرأسان $a^2=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow V_1(4,0),\ V_2(-4,0)$

القطبان $b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow M_1(0,3),\ M_2(0,-3)$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$

البؤرتان $F_1(\sqrt{7},0),\ F_2(-\sqrt{7},0)$

وحدة $8=2(4)=2a=$ طول محوره الكبير

وحدة $6=2(3)=2b=$ طول محوره الصغير

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}<1$

ملاحظة / في كل الاسئلة: نستخدم a للرأسين ، b للقطبين ، c للبؤرتين.

$2)\ 5x^2 + y^2 = 1$

ملاحظة/ اذا كان الطرف الايمن من المعادلة يساوي واحد فكل معامل يكون مقام المقام.

$$\frac{x^2}{\frac{1}{5}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

لاحظ: مقام y^2 > مقام x^2 . فالاكبر a^2 والاصغر b^2

الرأسان $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow V_1(0,1),\ V_2(0,-1)$

القطبان $b^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow M_1(\frac{1}{\sqrt{5}},0),\ M_2(\frac{-1}{\sqrt{5}},0)$

$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{5}}$

البؤرتان $\Rightarrow F_1(0,\frac{2}{\sqrt{5}}),\ F_2(0,\frac{-2}{\sqrt{5}})$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(1) = 2$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ وحدة

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{1} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

$3)\ 4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

نضرب طرفي المعادلة في $\frac{3}{4}$ لكي نجعل الطرف الايمن يساوي واحد

$$3x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

لاحظ: $\frac{4}{9}$ اكبر من $\frac{1}{3}$ اذن سيكون:

الرأسان $a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow V_1(0,\frac{2}{3}),\ V_2(0,\frac{-2}{3})$

القطبان $b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_1(\frac{1}{\sqrt{3}},0),\ M_2(\frac{-1}{\sqrt{3}},0)$

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

البؤرتان $\Rightarrow F_1(0,\frac{1}{3}),\ F_2(0,\frac{-1}{3})$

طول محوره الكبير $= 2a = 2(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$ وحدة

طول محوره الصغير $= 2b = 2(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = (\frac{1}{\cancel{3}})(\frac{\cancel{3}}{2}) = \frac{1}{2} < 1$

مثال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل :
١) بؤرتاه هما النقطتين (٥،5) ، (٥،5-) وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة.

الحل من البؤرتين $\Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=36-b^2 \Rightarrow b^2=36-25=11$

$\Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

٢) الاختلاف المركزي $e=\frac{2}{3}$ ونصف طول محوره الصغير = 4 وحدات وبؤرتاه على محور السينات

الحل $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3c=2a \Rightarrow c=\frac{2}{3}a \Rightarrow c^2=\frac{4}{9}a^2$ ...①

نصف محوره الصغير $=\frac{1}{2}(2b)=4 \Rightarrow \therefore b=4 \Rightarrow b^2=16$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow [\frac{4}{9}a^2=a^2-16]\cdot 9$

$\Rightarrow 4a^2=9a^2-144 \Rightarrow 144=5a^2$

$\Rightarrow a^2=\frac{144}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{144}{5}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{5y^2}{144}=1$

٣) احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2=20x$ وطول محوره الكبير ضعف محوره الصغير.

الحل $y^2=20x \Leftrightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=20 \Rightarrow p=5$

$\Rightarrow F(5,0)$ بؤرة المكافئ $\Rightarrow F_1(5,0), F_2(-5,0)$ للناقص

$\Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

طول محوره الكبير = ضعف طول محوره الصغير $\Rightarrow 2a=2(2b) \Rightarrow 2a=4b$

$\Rightarrow a=2b \Rightarrow a^2=4b^2$ ...② ، $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=4b^2-b^2$

$\Rightarrow 25=3b^2 \Rightarrow b^2=\frac{25}{3} \therefore a^2=4(\frac{25}{3})=\frac{100}{3} \Rightarrow \frac{3x^2}{100}+\frac{3y^2}{25}=1$ المعادلة

4) النسبة بين طولي محوريه $= \frac{2}{3}$ والفرق بينهما $= 4$ وحدات وبؤرتيه على الصادات.

* النسبة بين طولي المحورين في القطع الناقص:

$\frac{\text{محور كبير}}{\text{محور صغير}} = \frac{2a}{2b}$

$\frac{\text{محور صغير}}{\text{محور كبير}} = \frac{2b}{2a}$

الحل $\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{2}{3}$

$3b = 2a \Rightarrow b = \frac{2}{3}a \quad ...1$

$[2a - 2b = 4] \div 2$

$a - b = 2 \quad ...2$

نعوض 1 في 2 :

$[a - \frac{2}{3}a = 2] \cdot 3 \Rightarrow 3a - 2a = 6 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$\therefore b = \frac{2}{3}(6) = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

5) احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه 36 وحدة.

الحل $x^2 = 24y \Leftrightarrow x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6$

$\Rightarrow F(0,6)$ للمكافئ $\Rightarrow F_1(0,6), F_2(0,-6)$ للناقص

$\Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$[2a + 2b = 36] \div 2 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b \quad ...1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 36 = (18 - b)^2 - b^2 \Rightarrow 36 = 324 - 36b + \cancel{b^2} - \cancel{b^2}$

$36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow b^2 = 64$

$\therefore a = 18 - 8 = 10 \Rightarrow a^2 = 100$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ معادلته $\therefore$

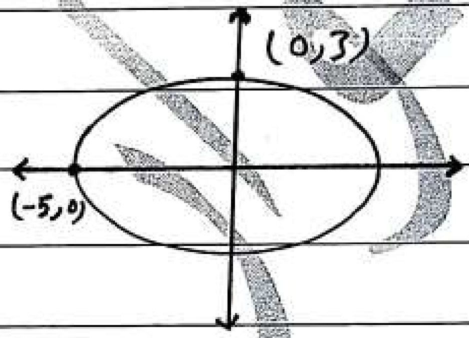
6) يمر بالنقاط $(-5,0)$ ، $(0,3)$

ملاحظة هامة / كل نقطة تنتمي (تقع على او يمر بها) القطع الناقص وكان احد احداثياتها يساوي صفر فهي أما

أ- احد الرأسين ← منه نجد a (بإشارة موجبة)

ب- أو احد القطبين ← منه نجد b (بإشارة موجبة)

الحل



بما ان كلا النقطتين احد احداثياتها صفراً فنغض النظر عن الإشارة السالبة وان النقطة التي تحوي العدد الاكبر هي الرأس ويمكن التحقق من ذلك بالرسم.

$$5 > 3$$

$$\therefore a = 5 \ , \ b = 3$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

فكر / البؤرة احد احداثياتها = صفر . فلماذا لم تكن النقط اعلاه احد البؤرتين ؟!

ملاحظة / 1- القطع الناقص اذا مس الدليل $x = m$ فإن نقطة التماس $(m,0)$ تنتمي للقطع الناقص ولان احد احداثياتها = صفر فهي ؛

أما احد الرأسين منه نجد a (بإشارة موجبة)

أو احد القطبين منه نجد b (بإشارة موجبة)

2- القطع الناقص اذا مس الدليل $y = n$ فإن نقطة التماس $(0,n)$ تنتمي للقطع الناقص ولان احد احداثياتها = صفر فهي :

أما احد الرأسين منه نجد a (بإشارة موجبة) .

أو احد القطبين منه نجد b (بإشارة موجبة) .

7) يمس دليلي القطعين المكافئين $y^2=16x$, $x^2=-8y$

الحل $y^2=16x \Leftrightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=16 \Rightarrow p=4$

∴ دليل المكافئ الاول $x=-4$

القطع الناقص يمس هذا الدليل في النقطة $(-4,0)$

$x^2=-8y \Leftrightarrow x^2=-4py \Rightarrow -4p=-8 \Rightarrow p=2$

∴ دليل المكافئ الثاني $y=2$

القطع الناقص يمس هذا الدليل في النقطة $(0,2)$

∴ القطع الناقص يمر بالنقط $(0,2)$, $(-4,0)$

وبما ان $4>2$

∴ $a=4 \Rightarrow a^2=16$, $b=2 \Rightarrow b^2=4$

∴ معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

ملاحظة / لايجاد نقطة تقاطع اي منحني (دائرة - مستقيم - قطوع) مع المحورين

1- مع محور السينات / نجعل $y=0$ ونجد قيم x

2- مع محور الصادات / نجعل $x=0$ ونجد قيم y

8) لبؤرتاه هما نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل المكافئ $y^2=12x$.

الحل نجعل $x=0 \Rightarrow (0)^2+y^2-3(0)=16$

$\Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4 \Rightarrow F_1(0,4), F_2(0,-4) \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

دليل المكافئ $y^2=12x \Leftrightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=12 \Rightarrow p=3 \Rightarrow x=-3$

القطع الناقص يمس الدليل $x=-3$ في النقطة $(-3,0)$

∴ $b=3 \Rightarrow b^2=9$ [انظر الملاحظة القادمة]

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=a^2-9 \Rightarrow a^2=25$

∴ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

ملاحظة/ لو كانت (٥،٣-) هي أحد الرأسين سيكون خطأ للاسباب :
١- سيكون الرأسين على السينات والبؤرتين على الصادات وهذا غير ممكن.
٢- سيكون $a=3$ ، $c=4$ وهذا غير ممكن في القطع الناقص لان دائماً فيه $a>c$ ، $a>b$
* بعض الاسئلة يتحقق فيها سبب واحد من الاسباب اعلاه.
- ويمكن التوصل الى الحل من خلال الرسم. (جرب ذلك)

و) بؤرتاه هما $(0,\mp2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\mp4$

الحل نقطتا التقاطع $y=0$ نجعل $\Rightarrow$ ∴ $(\mp4,0)$
ولان احد احداثيها صفر فهي اما الرأسين او القطبين
وان : $(\mp4,0)$ هي القطبين حتماً [لانه في خلاف ذلك سيكون الرأسين على السينات والبؤرتين على الصادات]

$(\mp4,0) \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$ ، $c=2 \Rightarrow c^2=4$

$c^2=a^2-b^2$

$4=a^2-16 \Rightarrow a^2=20 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$ ∴ معادلة الناقص

حل آخر /

النقطة $(\mp4,0)$ تنتمي للقطع الناقص $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
(اي تحقق المعادلة)

$\frac{16}{b^2}+\frac{0}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=16$

∵ $F(0,\mp2) \Rightarrow c=2 \Rightarrow c^2=4$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=a^2-16 \Rightarrow a^2=20$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$ ∴ معادلة الناقص

ملاحظة / اذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور ما جزءاً ، فان هذا الجزء المقطوع أما $2a$ او $2b$

$2a$ ← الجزء الاكبر
$2b$ ← الجزء الاصغر
والقطع يقع على المحور الاكبر

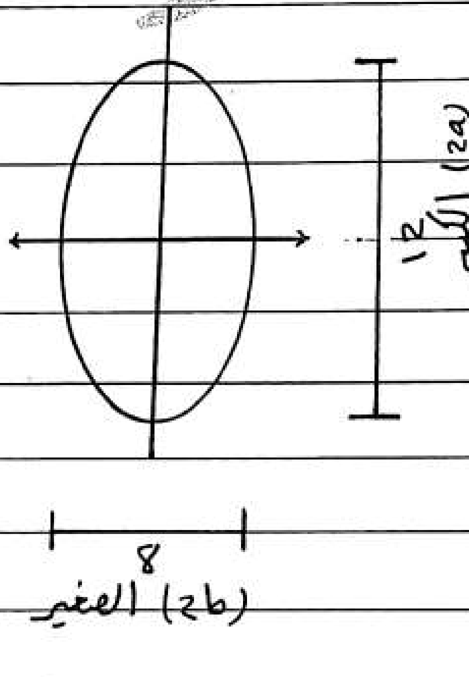
مثال / جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة . ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط .

الحل

الاكبر $2a = 12 \Rightarrow a = 6$ (صادات)

الاصغر $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$



$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$

$c = \sqrt{20} = \sqrt{5(4)} = 2\sqrt{5}$

$2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$ وحدة

$A = ab\pi = (6)(4)\pi = 24\pi$ units^2

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi\sqrt{26} \text{ Unit}$$

مثال/ لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$. جد قيمة k.

الحل $[kx^2+4y^2=36]\div 36 \Rightarrow \frac{kx^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$ ← لان بؤرتيه على السينات ← $a^2=\frac{36}{k}$, $b^2=9$

$F_1(\sqrt{3},0) \Rightarrow c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$

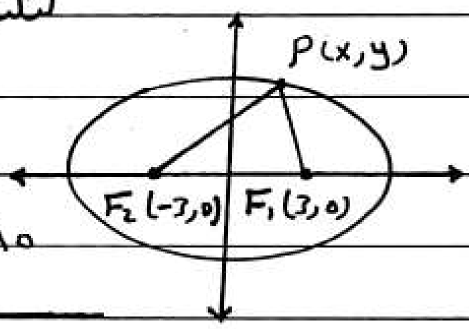
$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 3=\frac{36}{k}-9 \Rightarrow 12=\frac{36}{k} \Rightarrow k=3$

مثال/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدة $\underbrace{\text{والعدد الثابت}}_{2a}$ 10 وبؤرتاه على السينات ومركزه الاصل

الحل $2c=6 \Rightarrow c=3 \Rightarrow F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

لتكن $P(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص

$PF_1+PF_2=2a$ حسب التعريف



$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=10$

$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}=10-\sqrt{x^2+6x+9+y^2}$ بتربيع الطرفين

$\cancel{x^2}-6x+\cancel{9}+\cancel{y^2}=100-20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+\cancel{x^2}+6x+\cancel{9}+\cancel{y^2}$

$[20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=100+12x]\div 4 \Rightarrow 5\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=25+3x$

$25(x^2+6x+9+y^2)=625+150x+9x^2$

$25x^2+\cancel{150x}+225+25y^2=625+\cancel{150x}+9x^2$

$[16x^2+25y^2=400]\div 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلته

إنسحاب المحاور للقطع الناقص :

فيما سبق درسنا القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0,0) وعند انسحاب المركز الى النقطة (h,k) سوف تتغير مكونات القطع الناقص كالاتي :

أولاً	القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات	مكونات بعد الانسحاب
معادلته	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
مركزه	$c(0,0)$	$\bar{c}(h,k)$
الرأسان	$V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$	$\bar{V}_1(a+h,k)$, $\bar{V}_2(-a+h,k)$
القطبان	$M_1(0,b)$, $M_2(0,-b)$	$\bar{M}_1(h,b+k)$, $\bar{M}_2(h,-b+k)$
البؤرتان	$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$	$\bar{F}_1(c+h,k)$, $\bar{F}_2(-c+h,k)$
طول محوره الكبير	منطبق على محور السينات $2a$	يوازي محور السينات $2a$
معادلة المحور الكبير	$y=0$	$y=k$
طول محوره الصغير	منطبق على محور الصادات $2b$	يوازي محور الصادات $2b$
معادلة المحور الصغير	$x=0$	$x=h$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}<1$	$e=\frac{c}{a}<1$

ثانياً	القطع الناقص الذي بؤرتاه على الصادات	
معادلته	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
مركزه	$c(0,0)$	$\bar{c}(h,k)$
الرأسان	$V_1(0,a)$ و $V_2(0,-a)$	$\bar{V_1}(h,a+k)$, $\bar{V_2}(h,-a+k)$
القطبان	$M_1(b,0)$, $M_2(-b,0)$	$\bar{M_1}(b+h,k)$, $\bar{M_2}(-b+h,k)$
البؤرتان	$F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$	$\bar{F_1}(h,c+k)$, $\bar{F_2}(h,-c+k)$
طول محوره الكبير	$2a$ منطبق على محور الصادات	$2a$ يوازي محور الصادات
معادلة المحور الكبير	$x=0$ معادلة المحور الكبير	$x=h$ معادلة المحور الكبير
طول محوره الصغير	$2b$ منطبق على محور السينات	$2b$ يوازي محور السينات
معادلة محوره الصغير	$y=0$	$y=k$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}<1$	$e=\frac{c}{a}<1$

ويمكنك اعتماد الاستنتاج والخلاصة ادناه والاستغناء عن الجداول :

١- كل احداثي سيني يضاف له h وكل احداثي صادي يضاف له k باستثناء معادلة القطع الناقص نطرح k , h .

٢- المحور المنطبق على محور السينات أو موازٍ له فمعادلته $y=k$.
المحور المنطبق على محور الصادات أو موازٍ له فمعادلته $x=h$.

٣- هذا الاستنتاج ينطبق على القطع المكافئ والناقص والزائد.

مثال/ عين المركز والرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الاتية:

أو يأتي السؤال/ ناقش القطع الناقص:

1) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ بالمقارنة مع

$h = -3 \;,\; k = -2 \Rightarrow$ المركز $\bar{C}(h,k) \Rightarrow C(-3,-2)$ المركز

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \;,\; b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\bar{V}_1(-3,3) \;,\; \bar{V}_2(-3,-4)$ الرأسين

$\bar{F}_1(h, k+c) \;,\; \bar{F}_2(h, k-c) \Rightarrow \bar{F}_1(-3,2) \;,\; \bar{F}_2(-3,-6)$

القطبين $\bar{M}_1(h+b, k) \;,\; \bar{M}_2(h-b, k) \Rightarrow \bar{M}_1(0,-2) \;,\; \bar{M}_2(-6,-2)$

طول محوره الكبير $2a = 10$ وحدة

طول محوره الصغير $2b = 6$ وحدة

معادلة المحور الكبير $x = -3$

معادلة المحور الصغير $y = -2$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

2) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

- يجب وضع المعادلة بالصورة القياسية ولاجل ذلك نتبع الاتي :

اولاً: نضع الحدود التي تحتوي على x متجاورة في اقواس وكذلك الحدود التي تحتوي على y متجاورة في اقواس والحد المطلق في جهة اليمين.

$(9x^2-72x)+(16y^2-96y)=-144$

ثانياً: نستخرج المشترك من هذه الاقواس بحيث يكون كل من معامل x^2 ومعامل y^2 يساوي واحد.

$9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$

ثالثاً: نضيف الى القوس الاول $\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$ ونضيف الى القوس الثاني $\left(\frac{\text{معامل } y}{2}\right)^2=\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$

وفي الطرف الايمن نضيف 16 مضروب في معامل القوس الاول $=16\times 9=144$

ونضيف 9 مضروب في معامل القوس الثاني $=9\times 16=144$

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=\cancel{-144}+\cancel{144}+144$

رابعاً: نحول كل قوس الى مربع كامل.

$9(x-4)^2+16(y-3)^2=144$

خامساً: نقسم المعادلة 144

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1 \Longleftrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$\Rightarrow h=4,\ k=3 \Rightarrow C(4,3)$ المركز

$a^2=16 \Rightarrow a=4,\ b^2=9 \Rightarrow b=3,\ c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$

الرأسين $V_1(8,3),\ V_2(0,3)$

القطبين $M_1(4,6),\ M_2(4,0)$

البؤرتين $F_1(\sqrt{7}+4,3),\ F_2(-\sqrt{7}+4,3)$

$2b=6$ طول محوره الصغير ، وحدة $2a=8$ طول محوره الكبير وحدة

$x=4$ معادلة المحور الصغير ، $y=3$ معادلة المحور الكبير ، $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

3) $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

$(x^2+4x)+(25y^2-150y)=-204$

$(x^2+4x)+25(y^2-6y)=-204$

$(x^2+4x+4)+25(y^2-6y+9)=-204+4+225$

$[(x+2)^2+25(y-3)^2=25] \div 25$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$$

بالمقارنة مع $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$a^2=25 \Rightarrow a=5 \quad , \quad b^2=1 \Rightarrow b=1$

المركز $h=-2 \; , \; k=3 \Rightarrow C(h,k) \Rightarrow C(-2,3)$

الرأسان $V_1(h+a,k) \; , \; V_2(h-a,k)$

$V_1(3,3) \; , \; V_2(-7,3)$

البؤرتان $F_1(h+c,k) \; , \; F_2(h-c,k)$

$F_1(-2+\sqrt{24},3) \; , \; F_2(-2-\sqrt{24},3)$

القطبين $M_1(h,k+b) \; , \; M_2(h,k-b)$

$M_1(-2,4) \; , \; M_2(-2,-2)$

طول المحور الكبير $2a=10$ وحدة

طول المحور الصغير $2b=2$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=k \Rightarrow y=3$

معادلة المحور الصغير $x=h \Rightarrow x=-2$

الاختلاف المركزي $e=\dfrac{c}{a} \Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

حل تمارين (2-2)

1) عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلاتها في كل مما يأتي:

a) $x^2+2y^2=1$

الحل $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow V_1(1,0),\ V_2(-1,0)$

$b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ القطبين

$c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$F_1(\frac{1}{\sqrt{2}},0),\ F_2(\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$

$2a=2(1)=2$ وحدة طول المحور الكبير

$2b=2(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ وحدة طول المحور الصغير

$y=0$ معادلة المحور الكبير , $x=0$ معادلة المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ الاختلاف المركزي

b) $9x^2+13y^2=117$] $\div 117$

الحل $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a^2=13 \Rightarrow a=\sqrt{13} \Rightarrow V(\mp\sqrt{13},0)$ الرأسان

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow (0,-3),(0,3)$ القطبين

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=13-9=4 \Rightarrow c=2$

$F_1(+2,0),\ F_2(-2,0)$ البؤرتان

وحدة طول $2\sqrt{13}=2a=$ طول المحور الكبير

وحدة طول $6=2(3)=2b=$ طول المحور الصغير

$\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{c}{a}=e=$ الاختلاف المركزي

c) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

الحل $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ بالمقارنة

$a^2=81 \Rightarrow a=9 \quad , b^2=25 \Rightarrow b=5$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=81-25=56 \Rightarrow c=\sqrt{56}$

$h=4 , k=-1 \Rightarrow c(h,k) \Rightarrow c(4,-1)$ المركز

$V_1(h+a,k) , V_2(h-a,k)$

$V_1(13,-1) , V_2(-5,-1)$ الرأسان

$F_1(h+c,k) , F_2(h-c,k)$

$F_1(4+\sqrt{56},-1) , F_2(4-\sqrt{56},-1)$ البؤرتان

$M_1(h,k+b) , (h,k-b)$

$M_1(4,4) , (4,-6)$ القطبان

وحدة $18 = 2a =$ طول المحور الكبير

وحدة $10 = 2b =$ طول المحور الصغير

معادلة المحور الكبير $\Rightarrow y=-1$

معادلة المحور الصغير $\Rightarrow x=4$

الاختلاف المركزي $= e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{56}}{9}$

d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

e) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

f) $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

الحل مر سابقاً في الامثلة

2) جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل في كل مما يأتي:

أ- البؤرتان هما $(5,0)$ ، $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة [محلول كمثال]

ب- البؤرتان هما $(0,\pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm 4$. [محلول كمثال]

جـ- احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1، 5 وحدة على الترتيب.

الحل

م/ عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فيكون:

$2a =$ مجموع العددين

$2c =$ حاصل طرح العددين

أي:

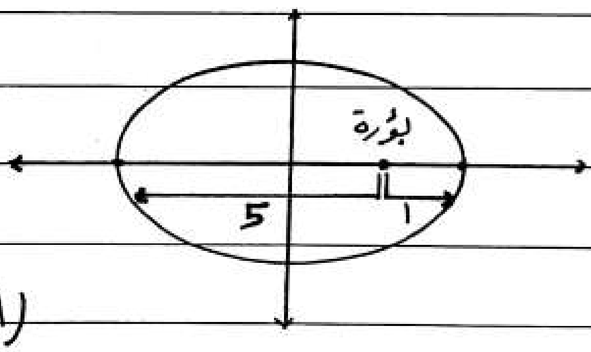
$$2a = 5+1 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$2c = 5-1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4 = 9 - b^2$$

$$b^2 = 5$$



لم يذكر موقع البؤرة لذلك سنأخذ الاحتمالين:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$ (السينات)

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$ (الصادات)

د) الاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحده طوليه .

الحل

$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{6} \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ اذا كان المحور الكبير على السينات

$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ اذا كان المحور الكبير على الصادات

هـ) المسافة بين بؤرتيه (البعد البؤري) تساوي (8) وحدات . ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة .

الحل

$2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 25$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ اذا كان المحور الكبير على السينات

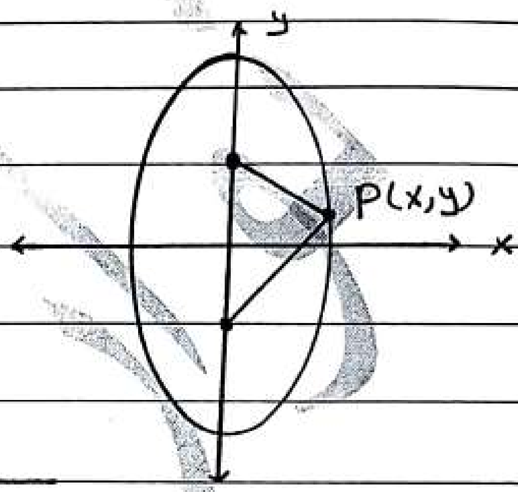
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ اذا كان المحور الكبير على الصادات

٣) باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم:

أ- بؤرتاه $(0,\pm 2)$ ورأساه $(0,\pm 3)$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل $a=3 \Rightarrow 2a=6$

$PF_1+PF_2=2a$



$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}=6$$

$$\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=6-\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

وبتربيع الطرفين:

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}=36-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4y+\cancel{4}$$

$$[12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}=36+8y]\div 4$$

$$3\sqrt{x^2+y^2+4y+4}=9+2y$$

نربع الطرفين:

$$9(x^2+y^2+4y+4)=81+36y+4y^2$$

$$9x^2+9y^2+36y+36=81+36y+4y^2$$

$$9x^2+9y^2-4y^2=81-36$$

$$[9x^2+5y^2=45]\div 45 \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$ المعادلة

ب) المسافة بين البؤرتين (6) وحده والعدد الثابت (١٠) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

[محلول كمثال]

4) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

الحل $y^2=-8x \Leftrightarrow y^2=-4px \Rightarrow -4p=-8 \Rightarrow p=2$

$F(-2,0)$ بؤرة المكافئ $\Rightarrow F_1(-2,0), F_2(+2,0)$ بؤرتا الناقص

$c=2 \Rightarrow c^2=4$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-4$ ... ①

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ تحقق المعادلة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\therefore [\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1] \cdot a^2b^2 \Rightarrow 12b^2+3a^2=a^2b^2$ ... ②

بتعويض ① في ② $\Rightarrow 12(a^2-4)+3a^2=a^2(a^2-4)$

$\Rightarrow 12a^2-48+3a^2=a^4-4a^2$

$\Rightarrow a^4-19a^2+48=0 \Rightarrow (a^2-16)(a^2-3)=1$

إما $a^2=16 \Rightarrow$ نعوضها في ① $\Rightarrow b^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

أو $a=3 \Rightarrow$ نعوضها في ① $\Rightarrow b^2=-1$ تهمل

5) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2)$, $(3,4)$.

الحل $[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1] \cdot a^2b^2 \Rightarrow x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$

$36b^2+4a^2=a^2b^2$ ... ① النقطة $(6,2)$ تحقق معادلته

$\mp 9b^2 \pm 16a^2 = \mp a^2b^2$ ... ② النقطة $(3,4)$ تحقق معادلته

$[27b^2-12a^2=0] \div 3 \Rightarrow 9b^2-4a^2=0 \Rightarrow a^2=\frac{9}{4}b^2$ ... ③

نعوض ③ في ① $\rightarrow 36b^2+9b^2=\frac{9}{4}b^2 \cdot b^2 \Rightarrow 36b^2+9b^2=\frac{9}{4}b^4$

$\Rightarrow [45b^2=\frac{9}{4}b^4] \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow 20b^2=b^4 \Rightarrow b^4-20b^2=0$

$\Rightarrow b^2(b^2-20)=0 \Rightarrow$ اما $b^2=0$ تهمل , او $b^2=20$

$\Rightarrow a^2=\frac{9(20)}{4}=45 \Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ المعادلة :

6) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

[محلول كمثال]

7) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

الحل $[2a=2(2b)]\div 2$

$a=2b \Rightarrow a^2=4b^2 \quad \dots ①$

$\because x=-2 \Rightarrow y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2-16=0$

$\Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4 \Rightarrow (-2,\mp 4)$ نقطتا التقاطع

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2} \Rightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17$

$\Rightarrow a^2=4(17) \Rightarrow a^2=68$

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$

8) قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) ، واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h,k\in R$ ؟

الحل $[4a^2+4b^2=60]\div 4$

$a^2+b^2=15 \quad \dots ①$

$y^2=4\sqrt{3}x \Leftrightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=4\sqrt{3} \Rightarrow p=\sqrt{3}$

بؤرة المكافئ $F(\sqrt{3},0) \Rightarrow F(\mp\sqrt{3},0)$ بؤرتا الناقص

$c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$

$c^2 = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{...} ②$

$a^2 + b^2 = 15 \quad \text{...} ①$

$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$ نعوض في ①

$9 + b^2 = 15 \Rightarrow b^2 = 6$

$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 9 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = 4$

$b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 6 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = 6$

٩) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

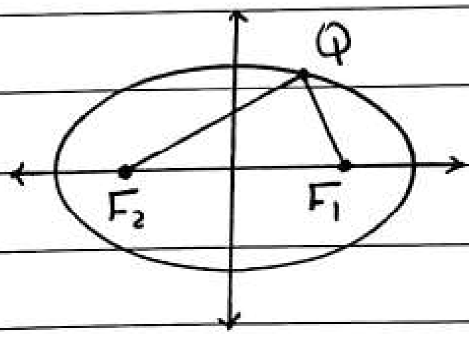
[محلول بالكتاب]

١٠) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.

الحل

محيط المثلث = مجموع اضلاعه

$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$



$\because F_1F_2 = 2c$

$\because QF_1 + QF_2 = 2a$ [حسب التعريف]

$\therefore [2a + 2c = 24] \div 2$

$a + c = 12 \Rightarrow a + 4 = 12$

$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

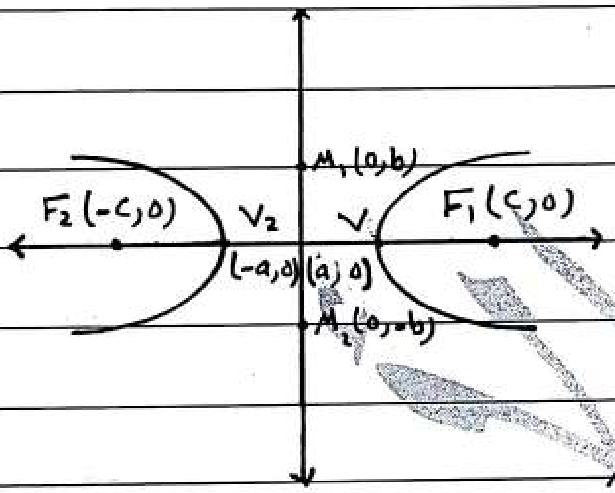
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 64 - b^2 \Rightarrow b^2 = 48$

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

القطع الزائد: هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً.

أولاً: معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



بؤرتاه $F_2(-c,0)$, $F_1(c,0)$

رأساه $V_2(-a,0)$, $V_1(a,0)$

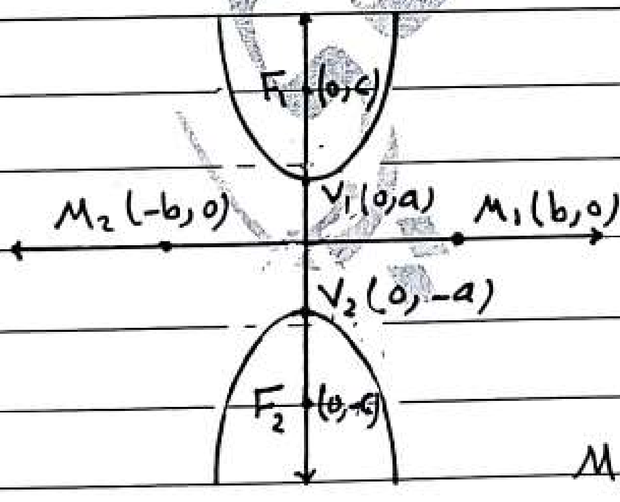
طول محوره الحقيقي $= 2a$

القطبين $M_2(0,-b)$, $M_1(0,b)$

طول المحور المرافق (التخيلي) $= 2b$

ثانياً: معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



بؤرتاه $F_2(0,-c)$, $F_1(0,c)$

رأساه $V_2(0,-a)$, $V_1(0,a)$

طول محوره الحقيقي $= 2a$

القطبين $M_2(-b,0)$, $M_1(b,0)$

طول محوره المرافق (التخيلي) $= 2b$

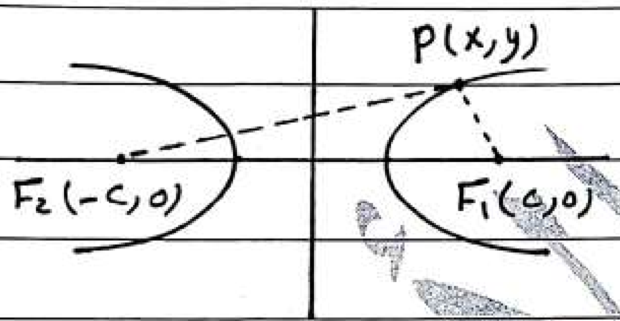
ملاحظات :

أولاً: المحور الحقيقي = $2a$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين.

المحور التخيلي (المرافق) = $2b$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين القطبين.

البعد البؤري = $2c$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين.

ثانياً: اذا كانت $P(x,y)$ نقطة تنتمي للقطع الزائد الذي بؤرتاه F_1 ، F_2 فأن:



$$\boxed{2a = |PF_1 - PF_2|}$$

(حسب تعريف القطع الزائد)

ثالثاً: PF_1 ، PF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من P.

رابعاً: يسمى $2a$
- ← المسافة بين الرأسين
- ← طول المحور الحقيقي
- ← طول المحور الرئيسي
- ← البعد الثابت ((العدد الثابت))
- ← مطلق الفرق بين بعدي اية نقطة للقطع الزائد عن بؤرتيه.

خامساً: $\boxed{c^2=a^2+b^2}$ حيث $c>a$ ، $c>b$ اي انه اكبرهم جميعاً.

سادساً: الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} > 1$

سابعاً: القطع الزائد الذي يكون فيه $a=b$

1- يكون فيه طول محوره الحقيقي = طول محوره التخيلي.

2- يكون الاختلاف المركزي $e=\sqrt{2}$.

3- يسمى القطع الزائد القائم او (المتساوي الاضلاع) لأن النقط الاربعة تشكل رؤوس مربع.

ثامناً: المجهول في معادلة القطع الزائد هو a , b.

ولايجاد a , b نجعل الطرف الايسر من المعادلة = 1 ونلاحظ:

1- اذا كان معامل x^2 موجب فأن المعادلة من النوع الاول:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ اي ان البؤرتين والرأسين على السينات.

2- اذا كان معامل y^2 موجب فأن المعادلة من النوع الثاني:

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$ اي ان البؤرتين والرأسين على الصادات.

مثال/ عين الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي:

$$1)\ [4x^2-y^2=16]\div 16$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2 \Rightarrow V_1(2,0), V_2(-2,0)$$

$b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow (0,4),(0,-4)$ القطبين

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=4+16=20 \Rightarrow c=\sqrt{20} \Rightarrow c=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow F_1(2\sqrt{5},0), F_2(-2\sqrt{5},0)$$

طول محوره الحقيقي $2a=2(2)=4$ وحدة

طول محوره المرافق $2b=2(4)=8$ وحدة

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}>1$

2) $2y^2 - 4x^2 = 1$

$\frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{4}} = 1$ اذا كان الطرف الايمن = ١ فكل معامل يكون مقام المقام

$a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}}), V_2(0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$

$b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0), (\frac{-1}{2}, 0)$ القطبين

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_1(0, \frac{\sqrt{3}}{2}), F_2(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

طول محوره الحقيقي $= 2a = 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ وحده

طول محوره المرافق $= 2b = 2(\frac{1}{2}) = 1$ وحده

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

3) $[y^2 - x^2 = 25] \div 25$

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{25} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow V_1(0,5), V_2(0,-5)$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow (5,0), (-5,0)$ القطبين

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow c = \sqrt{50} \Rightarrow c = 5\sqrt{2}$

$F_1(0, 5\sqrt{2}), F_2(0, -5\sqrt{2})$

طول محوره الحقيقي $= 2a = 2(5) = 10$ وحده

طول محوره المرافق $= 2b = 2(5) = 10$ وحده

$e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2} > 1$

لاحظ / في السؤال الاول $a > b$

وفي الثاني $a > b$ ، والثالث $a = b$

اما في القطع الناقص $a > b$ فقط

مثال/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت:
١) بعده البؤري ١٢ ومطلق الفرق بين بعدي أية نقطة تنتمي اليه عن بؤرتيه = 8 ورأساه على السينات.

الحل $2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$ لان الرأسين على السينات

2) يتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 2$ واختلافه المركزي $2\sqrt{5}$

الحل [لان التقاطع مع السينات] نجعل $y = 0$

اذن يتقاطع مع محور السينات بالنقطة $(\mp 2, 0)$

وبما ان القطع الزائد اذا مر بنقطة احد احداثيها صفر فهي الرأس حتماً $\Leftarrow$ $\therefore a = 2$

$a^2 = 4$

اختلافه المركزي $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow c^2 = 80$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 80 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 76$

ولان الرأسين $(\mp 2, 0)$ على محور السينات فإن:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{76} = 1$$

3) اختلافه المركزي $\sqrt{2}$ ويمس دليل المكافئ $x^2=-12y$

الحل $\sqrt{2}=\frac{c}{a} \Rightarrow c=\sqrt{2}a \Rightarrow c^2=2a^2 \ldots ①$

$x^2=-12y \Leftrightarrow x^2=-4py$

$-4p=-12 \Rightarrow p=3 \Rightarrow y=3$ الدليل

القطع الزائد يمس الدليل $y=3$ في النقطة $(0,3)$

وبما ان كل نقطة احد احداثيها صفر يمر بها القطع الزائد هي الرأس

$a=3 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow$ ① نعوض في $\Rightarrow c^2=18$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 18=9+b^2 \Rightarrow b^2=9$

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$ [لان الرأس على الصادات]

م/ حالة خاصة ((في القطع الزائد فقط)) اذا كان الاختلاف المركزي $\sqrt{2}$ فأن $a=b$ وبالعكس اذن $b^2=a^2$ ويمكن تكملة الحل بطريقة بسيطة

ويكون $a=b$ اذا كان في منطوق السؤال $e=\sqrt{2}$ او قائم الزاوية او متساوي الاضلاع

4) جد معادلة الزائد الذي مركزه الاصل و اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 و 1 وحدات على الترتيب و ينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين

الحل

م/ اذا اعطى البعد بين البؤرتين واحد الرأسين بالترتيب فأن:

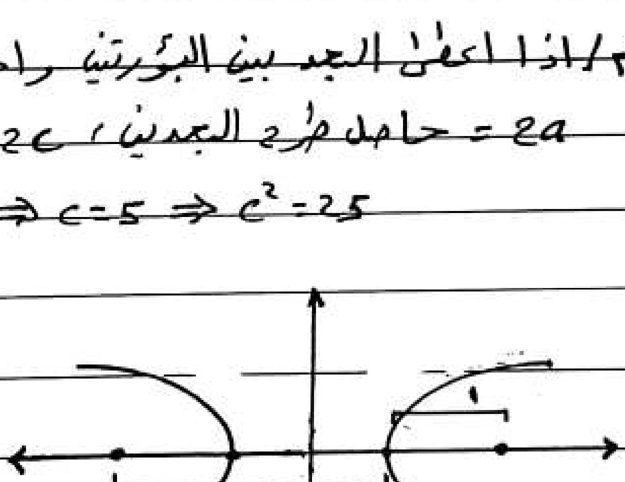
$2a=$ حاصل طرح البعدين ، $2c=$ مجموع البعدين

$2c=9+1 \Rightarrow [2c=10] \div 2 \Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

$2a=9-1=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2$

$b^2=9$



لم يحدد موقع البؤرة

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ [سينات]

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ [صادات]

5) قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1 , 2\sqrt{5})$, $(1 , -2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافئ والزائد .

الحل

$y^2 = 4px$ ((من الرسم))

نعوض احدى النقطتين ولتكن $(1 , 2\sqrt{5})$

$20 = 4p \Rightarrow p = 5 \Rightarrow y^2 = 20x$ معادلة المكافئ

$F(5 , 0)$ للمكافئ

$\Rightarrow F(\mp 5 , 0)$ للناقص

$c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

6) النقطة $P(6 , L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلاً من: أ- قيمة L .

ب- طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P

الحل أ) $36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow L^2 = \frac{24}{3} \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \mp\sqrt{8}$

ب) $[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 12 , b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(4 , 0)$, $F_2(-4 , 0)$

بعد البؤرة اليمنى $F_1(4 , 0)$ عن النقطة $P(6 , \mp\sqrt{8})$ يسمى نصف قطر بؤري أيمن ، ونطبق قانون المسافة بينهما لايجاده

$PF = \sqrt{(6-4)^2 + (\mp\sqrt{8} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة

7) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ ويمس دليل المكافئ $x^2+12y=0$

الحل في القطع الناقص $a^2=25$, $b^2=9$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$

$F_1(0,4)$, $F_2(0,-4) \Rightarrow c^2=16$ للناقص

$\therefore$ $c^2=16$ للزائد

$x^2=-12y \Leftrightarrow x^2=-4py \Rightarrow -4p=-12 \Rightarrow p=3$

$y=3$ دليل المكافئ

الدليل يمس القطع الزائد في النقطة $(0,3)$

وهي حتماً أحد رأسي القطع الزائد

$a=3 \Rightarrow a^2=9$, $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2 \Rightarrow b^2=7$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

ملاحظة / اذا كان في السؤال قطع ناقص وقطع زائد كل منهما يمر ببؤرة الآخر فيكون الحل بالشكل التالي:

ناقص c^2 $\downarrow$ زائد a^2 ، ناقص a^2 $\downarrow$ زائد c^2

مثال / قطع زائد وقطع ناقص كل منهما يمر ببؤرتي الآخر اذا علمت ان طول المحور الاكبر للقطع الناقص = $8\sqrt{5}$ وطول المحور الحقيقي للقطع الزائد يساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2-16x=0$ ودليله علماً ان بؤرتي القطع الزائد والناقص واقعتان على نفس المحور الذي تقع عليه بؤرة القطع المكافئ. جد معادلتيهما.

الحل $2a = 8\sqrt{5} \Rightarrow a = 4\sqrt{5}$ للناقص

$y^2 = 16x \Leftrightarrow y^2 = 4px$

$4p = 16 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow F(4,0)$, $x = -4$ دليل المكافئ

$2a = 2p = 2(4) = 8$

$a = 4$ للزائد ∴ $\Rightarrow c = 4$ للناقص

للناقص $c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 80 - b^2$

$b^2 = 64$

$\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{64} = 1$ ∴ معادلة القطع الناقص

للزائد $c^2 = a^2 + b^2$

$80 = 16 + b^2$

$b^2 = 64$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ ∴ معادلة القطع الزائد

ملاحظة / لرسم القطع الزائد نتبع ما يلي:

١- نعين نقط الرأسين والقطبين.

٢- نكون مستطيلاً ((وقد يكون مربعاً)) من هذه النقاط بحيث اضلاعه توازي المحورين.

٣- نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع الزائد.

٤- نعين البؤرتين ثم نرسم ذراعي القطع الزائد.

مثال / ارسم القطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$

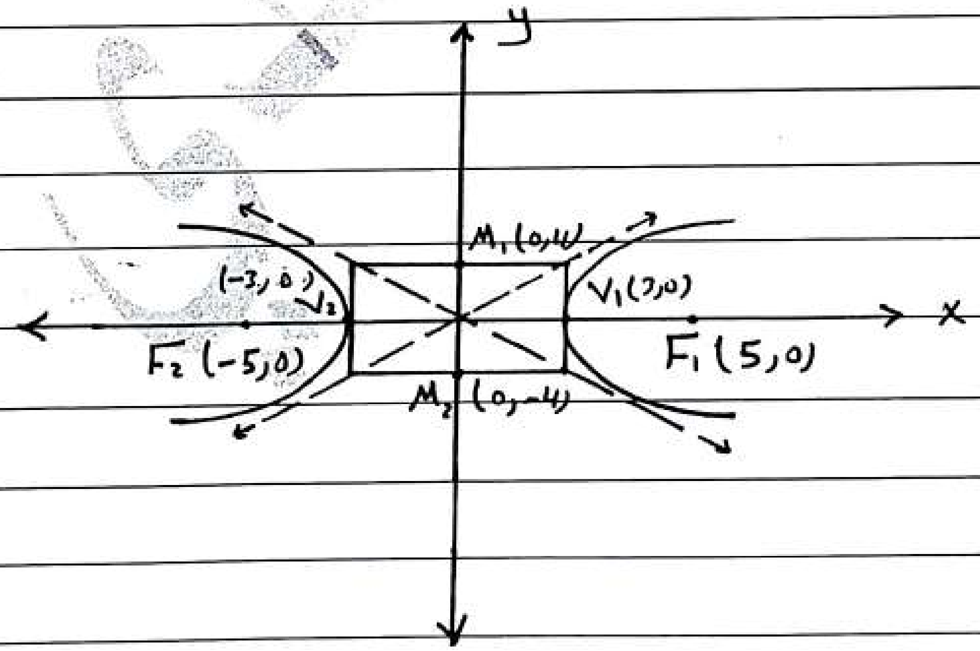
الحل

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow V_2(-3,0) , V_1(3,0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow (0,-4) , (0,4)$ القطبان

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

$F_1(5,0) , F_2(-5,0)$



مثال/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوراه على المحورين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة تنتمي اليه عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات .

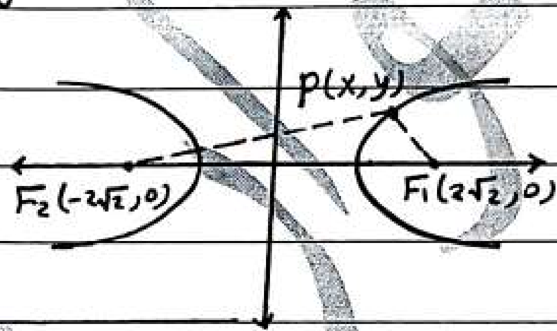
الحل

لتكن $p(x,y) \in$ للقطع الزائد

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$|PF_1 - PF_2| = 4$

$PF_1 - PF_2 = \mp 4$



$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \mp 4$$

$$\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2} = \mp 4 + \sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2}$$

$$\cancel{x^2}-4\sqrt{2}x+\cancel{8}+\cancel{y^2} = 16 \mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2}+\cancel{x^2}+4\sqrt{2}x+\cancel{8}+\cancel{y^2}$$

$$\left[\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2} = 16+8\sqrt{2}x\right] \div 8$$

$$\mp\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2} = 2+\sqrt{2}x$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2 = 4+4\sqrt{2}x+2x^2$$

$$[-x^2+y^2=-4] \div (-1)$$

$$[x^2-y^2=4] \div 4$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

انسحاب المحاور للقطع الزائد :

عند انسحاب مركز القطع الزائد من النقطة (0,0) الى النقطة (h,k) سوف تتغير مكونات القطع الزائد كالاتي:

اولاً	القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات	مكوناته بعد الانسحاب
معادلته	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
مركزه	$C(0,0)$	$\bar{C}(h,k)$
الرأسان	$V_1(0,0)\ ,\ V_2(-a,0)$	$\bar{V}_1(a+h,k),\bar{V}_2(-a+h,k)$
القطبان	$M_1(0,b)\ ,\ M_2(0,-b)$	$\bar{M}_1(h,b+k),\bar{M}_2(h,-b+k)$
البؤرتان	$F_1(c,0)\ ,\ F_2(-c,0)$	$\bar{F}_1(c+h,k),\bar{F}_2(-c+h,k)$
طول المحور الحقيقي	$2a$ منطبق على محور السينات	$2a$ يوازي محور السينات
معادلة المحور الحقيقي	$y=0$	$y=k$
طول المحور المرافق	$2b$ منطبق على محور الصادات	$2b$ يوازي محور الصادات
معادلة المحور المرافق	$x=0$	$x=h$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{a}$

ثانياً	القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات	مكوناته بعد الانسحاب
معادلته	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
مركزه	$C(0,0)$	$\overline{C}(h,k)$
الرأسان	$V_1(0,a), V_2(0,-a)$	$\overline{V}_1(h,a+k), \overline{V}_2(h,-a+k)$
القطبان	$M_1(b,0), M_2(0,-a)$	$\overline{M}_1(b+h,k), \overline{M}_2(-b+h,k)$
البؤرتان	$F_1(0,c), F_2(0,-c)$	$\overline{F}_1(h,c+k), \overline{F}_2(h,-c+k)$
طول محوره الحقيقي	$2a$ منطبق على محور الصادات	$2a$ يوازي محور الصادات
معادلة المحور الحقيقي	$x=0$	$x=h$
طول المحور المرافق	$2b$ منطبق على محور السينات	$2b$ يوازي محور السينات
معادلة المحور المرافق	$y=0$	$y=k$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{a}$

ويمكنك اعتماد الاستنتاج والخلاصة ادناه والاستغناء عن الجداول

1- كل احداثي سيني يضاف له h وكل احداثي صادي يضاف له k باستثناء معادلة القطع الزائد نطرح k, h

2- المحور المنطبق على محور السينات او موازي له معادلته $y=k$

المحور المنطبق على محور الصادات او موازي له معادلته $x=h$

3- هذا الاستنتاج ينطبق على القطع المكافئ والناقص والزائد

مثال / عين كل من الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد.

او يأتي السؤال / ناقش القطع الزائد:

1) $\left[2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8\right] \div 8$

$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع

$h=1 \ , \ k=-1 \Rightarrow c(h,k) \Rightarrow c(1,-1)$

$a^2=4 \Rightarrow a=2$

$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$

$c^2=a^2+b^2=4+2=6 \Longrightarrow c=\sqrt{6}$

$V_1(h, k+a) \ , \ V_2(h, k-a)$

$V_1(1,1) \ , \ V_2(1,-3)$

$F_1(h, k+c) \ , \ F_2(h, k-c)$

$F_1(1, -1+\sqrt{6}) \ , \ F_2(1, -1-\sqrt{6})$

$2a=4$ وحدة طول المحور الحقيقي

$2b=2\sqrt{2}$ وحدة طول المحور المرافق

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ الاختلاف المركزي

2) $16x^2+160x-9y^2+18y=185$

$16(x^2+10x)-9(y^2-2y)=185$

$16(x^2+10x+25)-9(y^2-2y+1)=185+400-9$

ناتج من ضرب $(16)(25)$ ←

ناتج من ضرب $(1)(-9)$ ←

$[16(x+5)^2-9(y-1)^2=576] \div 576$

$$\frac{(x+5)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{64}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ بالمقارنة مع

$h=-5,\ k=1,\ a^2=36 \Rightarrow a=6,\ b^2=64 \Rightarrow b=8$

$c^2=36+64=100 \Rightarrow c=10$

$\overline{C}(h,k) \Rightarrow \overline{C}(-5,1)$

$\overline{V_1}(h+a,k),\ \overline{V_2}(h-a,k)$

$\overline{V_1}(1,1),\ \overline{V_2}(-1,1)$

$\overline{F_1}(h+c,k),\ \overline{F_2}(h-c,k)$

$\overline{F_1}(5,1),\ \overline{F_2}(-15,1)$

$2a=12$ وحدة طول المحور الحقيقي

$2b=2(8)=16$ وحدة طول المحور المرافق

الاختلاف المركزي

$$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

حل تمارين (3-2)

١- عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية:

a) $[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow V(\mp 2, 0)$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow F(\mp 4, 0)$

طول المحور الحقيقي $= 2a = 2(2) = 4$ وحده

طول المحور المرافق $= 2b = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ وحده

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

b) $[16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow V(\mp 3, 0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F(\mp 5, 0)$

$2a = 3(3) = 6$ وحده

$2b = 8$ وحده

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{}$

c) $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

الحل موجود في الأمثلة

٢) اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

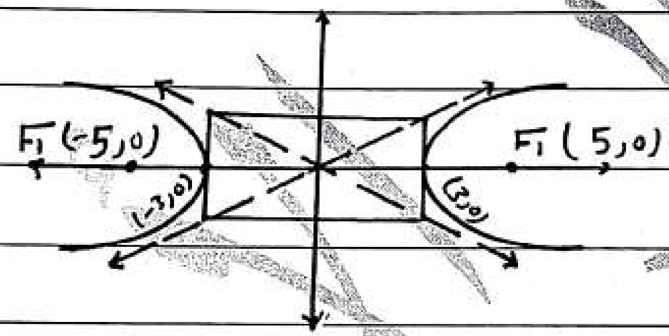
أ- البؤرتان هما $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه الاصل.

الحل $c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$, $a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

- نرسم القطع $(-a, 0)$ ، $(+a, 0)$ ونرسم المستطيل المركزي ونرسم امتداد قطريه واللذان سيكونان محاذيات للقطع.



ب- طول محوره الحقيقي (12) وطول محوره المرافق (10) وحدات ومحوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل.

الحل $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

اذا كان المحور الحقيقي على السينات : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

اذا كان المحور الحقيقي على الصادات : $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

- اما الرسم نستخدم الطريقة السابقة [واجب]

جـ- مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3).

الحل $2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \Rightarrow c^2 = 9a^2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$, $\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$ — الرسم [واجب]

3) جد باستخدام تعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه الاصل وبؤرتيه $(\mp 2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين البعدين لاية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات. [محلول كمثال]

4) قطع زائد طول محوره الحقيقي 6 وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة المكافئ الذي رأسه الاصل ويمر بالنقطتين $(2\sqrt{5}, 1)$, $(2\sqrt{5}, -1)$. جد معادلتي القطع الزائد والمكافئ. [محلول كمثال]

5) قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من h, k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية.

الحل $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 36 = 28$ للناقص

$\therefore c^2 = 28$ للزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$ للزائد

$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = 5$

$b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = 9$

6) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 8 و 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين. [محلول كمثال]

7) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل.

<u>الحل</u> $[x^2-3y^2=12]\div 12$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a^2=12,\ b^2=4$$

$c^2=a^2+b^2=12+4=16$ للزائد $\Rightarrow c^2=16$ للناقص

$\frac{2a}{2b}=\frac{5}{3} \Rightarrow a=\frac{5}{3}b \Rightarrow a^2=\frac{25}{9}b^2$ ... ① للناقص

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow [16=\frac{25}{9}b^2-b^2]\cdot(9)$

$144=25b^2-9b^2 \Rightarrow 16b^2=144 \Rightarrow b^2=9$ للناقص

$a^2=\frac{25}{9}(9) \Rightarrow a^2=25$ للناقص

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

8) النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من: أ- قيمة L.

ب- طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

[محلول كمثال]

9) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

[محلول كمثال]

اسئلة عامة حول الفصل الثاني:

س١/ جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ٢٠ وحدة ومن محور السينات الموجب جزءاً طوله 8 وحدات

الحل ما يقطعه من محور الصادات ٢٠

ما يقطعه من محور السينات $16 = 2(8)$

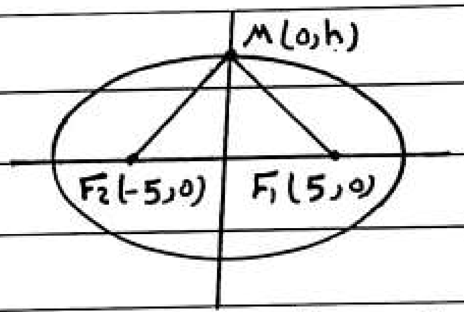
$\therefore 2a = 20$ (على محور الصادات) $\Rightarrow a = 10 \Rightarrow a^2 = 100$

$2b = 16$ (على محور السينات) $\Rightarrow b = 8 \Rightarrow b^2 = 64$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

س٢/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(5,0), F_2(-5,0)$ ويمر بالنقطة $M(0,h)$ علماً ان مساحة المثلث $MF_1F_2 = 15$ ومركزه الاصل.

الحل $MF_1F_2 = 15$



$\frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع) $= 15$

$\frac{1}{\cancel{2}} (\cancel{10}^{5})(h) = 15$

$5h = 15 \Rightarrow h = 3$

$\therefore b = 3 \Rightarrow b^2 = 9 \ , \ c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 25 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 34 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

س٣/ قطع مكافئ $y^2 + 5x = 4hx$ دليله يمر بالنقطة $(1,2)$ جد قيمة h

الحل $y^2 = 4hx - 5x \Rightarrow y^2 = (4h-5)x \Leftrightarrow y^2 = -4px$

$-4p = 4h - 5 \quad \ldots ①$

الدليل يمر بالنقطة $(1,2)$ $\Rightarrow x = 1 \ , \ p = 1$ نعوض في ①

$-4 = 4h - 5 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$

س4/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2=-4(x-3)$ واحد بؤرتيه هي رأس القطع المكافئ نفسه.

الحل $(y-0)^2=-4(x-3) \Leftrightarrow (y-k)^2=-4p(x-h)$

$h=3\ ,\ k=0 \Rightarrow V(3,0)$ للمكافئ

$-4p=-4 \Rightarrow p=1$

$F(-p+h,k)=(-1+3,0)=(2,0)$ بؤرة المكافئ

$\therefore F(3,0)$ بؤرة الزائد $\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$

$\therefore V(2,0)$ رأس الزائد $\Rightarrow a=2 \Rightarrow a^2=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 9=4+b^2 \Rightarrow b^2=5 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

س5/ اذا كانت $e+id=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e+id\|$.

الحل

$$e+id=\frac{4+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{4+4i+2i-2}{1+1}=\frac{2+6i}{2}$$

$$e+id=\frac{2}{2}+\frac{6}{2}i=1+3i$$

$e=1\ ,\ d=3$

$\therefore F_1(0,3)\ ,\ F_2(0,-3)$ بؤرتا الناقص $\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$

$2a=2\|e+id\|=2\sqrt{e^2+d^2}=2\sqrt{(1)^2+(3)^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore a=\sqrt{10} \Rightarrow a^2=10$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=10-b^2 \Rightarrow b^2=10-9=1$

$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{1}=1$ معادلة القطع الناقص

س6 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه 10π وحدة.

<u>الحل</u> $a.b\pi = 7\pi \Rightarrow a.b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{b}$ ... ①

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow [10\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}] \div 2$

$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow$ نربع الطرفين $\Rightarrow 25 = \frac{a^2+b^2}{2}$

$50 = a^2 + b^2$ ... ②

نعوض ① في ② : $[\frac{49}{b^2} + b^2 = 50] . b^2$

$49 + b^4 = 50b^2 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0 \Rightarrow (b^2-1)(b^2-49) = 0$

نعوض في ② $b^2 = 1$ او $b^2 = 49$ تهمل اما

$a^2 + 1 = 50 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

س7 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي مركز القطع الزائد $2y^2 - 4(x-3)^2 = 8$ ويمس محور المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

<u>الحل</u> $[2y^2 - 4(x-3)^2 = 8] \div 8 \Rightarrow \frac{(y-0)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{2} = 1$

مركز القطع الزائد $c(h,k) = c(3,0)$, $h = 3$, $k = 0$

للناقص $F(\mp 3, 0) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$(y+1)^2 = 4(x-2) \Leftrightarrow (y-k)^2 = 4p(x-h)$

$h = 2$, $k = -1$

معادلة المحور $\Rightarrow y = k \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

$b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = 10$

$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$

س٨/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل، كل منهما يمر ببؤرة الاخر فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة القطع الناقص فجد: أ- مساحة منطقة القطع الناقص. ب- محيط القطع الناقص. جـ- معادلة القطع الزائد ثم ارسمه. د- الاختلاف المركزي لها

الحل $[9x^2+25y^2=225] \div 225$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 , b^2=9 \Rightarrow b=3$$

أ) $A=ab\pi=5(3)\pi=15\pi$ $units^2$

ب) $p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}}=2\sqrt{17}\pi$ unit

جـ) $a^2=25$ للناقص $\Rightarrow c^2=25$ للزائد

$c^2=25-9=16$ للناقص $\Rightarrow a^2=16$ للزائد

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b^2=9$ للزائد

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

[الرسم واجب]

د) $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ للناقص ، $e=\frac{5}{4}$ للزائد

س/ اذا كانت $y=kx^2$ معادلة قطع مكافئ بؤرته هي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $3x+2y=4$ مع محور y فجد قيمة $k\in R$.

الحل $kx^2=y \Rightarrow x^2=\frac{1}{k}y \Leftrightarrow x^2=4py$

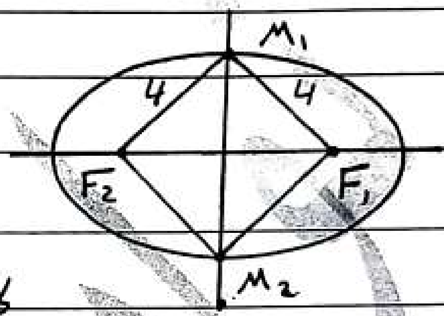
$4p=\frac{1}{k} \Rightarrow p=\frac{1}{4k}$ ---- ①

نجعل $x=0 \Rightarrow 3(0)+2y=4 \Rightarrow y=2$

$(0,2)$ نقطة التقاطع $\Rightarrow F(0,2) \Rightarrow p=2$ نعوض في ①

$\therefore 2=\frac{1}{4k} \Rightarrow k=\frac{1}{8}$

س١٠/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه F_1, F_2 على محور السينات ونقطتا تقاطعه مع محور الصادات M_1, M_2 فاصبح الشكل $M_1F_1M_2F_2$ مربع وكان محيطه 16 جد معادلة القطع الناقص.



الحل- محيط المربع = 16

(طول الضلع) $\times 4 = 16$

طول الضلع $= \frac{16}{4} = 4$

$M_1F_1 + M_1F_2 = 2a$ [تعريف القطع الناقص]

$4 + 4 = 2a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$2c = 2b$ لان اقطار المربع متساوية $\Rightarrow c = b \Rightarrow c^2 = b^2$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16 - b^2 \Rightarrow 2b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 8$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

-توجد طريقة أخرى (فيثاغورس).

س١١/ قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ فاثبت ان النقطة $P(-5, \frac{9}{5})$ تنتمي اليه، وعين طول نصفي القطرين البؤريين المرسومين من P وجد البعد البؤري.

الحل م/ نعوض النقطة في المعادلة فاذا كان الطرف الايمن = الطرف الايسر. فان النقطة تنتمي

$L.H.S = \frac{25}{16} - \frac{\frac{81}{16}}{9}$

$= \frac{25}{16} - \frac{\cancel{81}}{16}\left(\frac{1}{\cancel{9}}\right)$

$= \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1 = R.H.S$

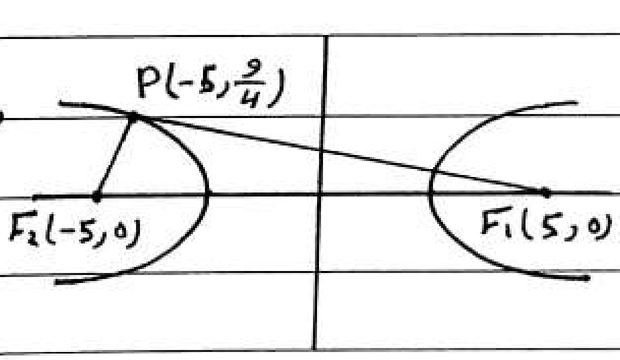
∴ النقطة تنتمي

$PF_1 = \sqrt{(-5-5)^2 + (\frac{9}{4} - 0)^2}$

$= \sqrt{100 + \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{1681}{16}} = \frac{41}{4}$ وحدة

$PF_2 = \sqrt{(-5+5)^2 + (\frac{9}{4} - 0)^2}$

$= \frac{9}{4}$ وحدة



البعد البؤري $= 2c = 2(5) = 10$ وحدة

س12/ اذا كان $7y + m = 0$ هو دليل القطع المكافئ $x^2 = 4y$ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمس القطع الناقص $\frac{x^2}{m+9} + \frac{y^2}{m+2} = 1$ واحدى بؤرتي الزائد $(0, m-3)$

الحل

$7y = -m \Rightarrow y = \frac{-m}{7}$ دليل المكافئ

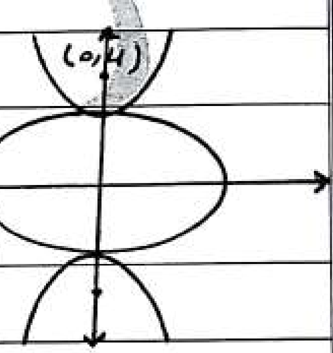
$x^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$\Rightarrow y = -1$ دليل المكافئ $\Rightarrow -1 = \frac{-m}{7} \Rightarrow m = 7$

$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

$\therefore F(0, 4)$ احدى بؤرتي الزائد $\Rightarrow c^2 = 16$

b^2 ناقص $= a^2$ زائد «من شكل التماس»



$c^2 = a^2 + b^2$

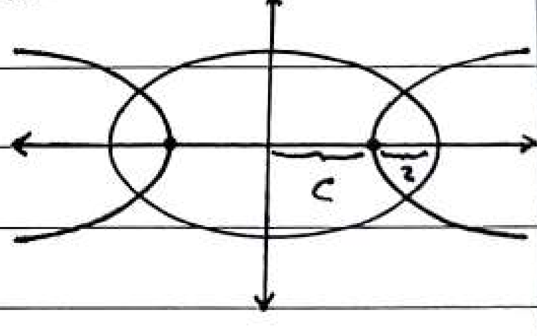
$16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ معادلة الزائد

س13/ قطع ناقص وقطع زائد كل منهما يمر ببؤرة الآخر وبؤرتيهما على السينات ، والبعد بين بؤرة الناقص وبؤرة الزائد يساوي 2 وطول المحور الصغير 8 ومركزيهما نقطة الاصل.

الحل في الناقص $2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

a للناقص $= c$ ناقص $+ 2$ «من الرسم يظهر ذلك»



$c^2 = a^2 - b^2$ في الناقص

$c^2 = (c+2)^2 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 16 \Rightarrow a^2 = 25$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ، a ناقص $= c$ زائد ، c ناقص $= a$ زائد

$a^2 = 9$ زائد ، $c^2 = 25$ زائد $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة الزائد

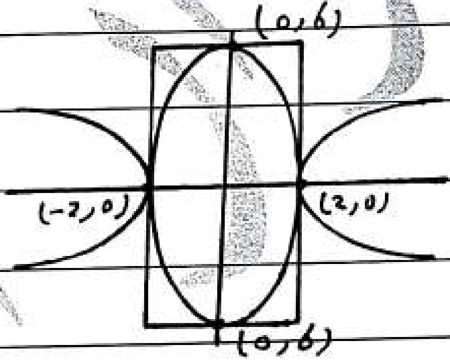
س14 / قطع زائد وقطع ناقص مركزيهما نقطة الاصل ودليل القطع المكافئ $y^2+8x=0$ مماس مشترك لهما ومساحة المستطيل المكون من رسم القطع الزائد تساوي 48 وحدة علماً ان اضلاع المستطيل مماسات للقطع الناقص جد معادلتيهما.

الحل دليل المكافئ $y^2=-8x \Leftrightarrow y^2=-4px \Rightarrow p=2 \Rightarrow x=2$

القطع الناقص والزائد يمسان الدليل ∴ نقطة التماس $(2,0)$

النقطة $(2,0)$ بالنسبة للزائد تمثل احد رأسيه

$a=2 \Rightarrow a^2=4$ زائد



مساحة المستطيل $=48$

$(2a \text{ للزائد})(2b \text{ للزائد})=48$

$4ab=48 \Rightarrow ab=12$

$a=2$ نعوض $\Rightarrow b=6$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ معادلة القطع الزائد هي

القطع الناقص يمس المستطيل (من الرسم) ∴ القطع الناقص يمر بالنقط $(0,6)$, $(2,0)$

$a=6 \Rightarrow a^2=36$, $b=2 \Rightarrow b^2=4$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ معادلة القطع الناقص هي

س15 / جد معادلة القطع الناقص الذي مجاله $[-2,2]$ ومداه $[-5,5]$.

الحل

ان عبارة مجاله تعني ان هذه الفترة تمثل نقطتان على محور x هما $(2,0)$, $(-2,0)$

وعبارة مداه تعني نقطتان على محور y هما $(0,5)$, $(0,-5)$

$\because 2<5 \Rightarrow \therefore a=5$, $b=2$

$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1$ ∴ المعادلة هي

س16/ اذا كانت $P(8,\sqrt{27})$ تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه $(\mp5,0)$ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمس القطع الزائد والذي يقطع من محور الصادات جزءاً طوله 12 وحدة.

الحل في الزائد $PF_1=\sqrt{(8-5)^2+(\sqrt{27}-0)^2}=\sqrt{9+27}=6$

$PF_2=\sqrt{(8+5)^2+(\sqrt{27}-0)^2}=\sqrt{169+27}=\sqrt{196}=14$

$2a=|PF_1-PF_2|=|6-14|=|-8|=8 \Rightarrow$ للزائد $a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow$ معادلة الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

بـ تماس القطع الزائد والناقص في نقطة فان رأس الزائد $(\mp4,0)$

بالنسبة للناقص هو اما احد الرأسين او احد القطبين

اما $a=4$ او $b=4$

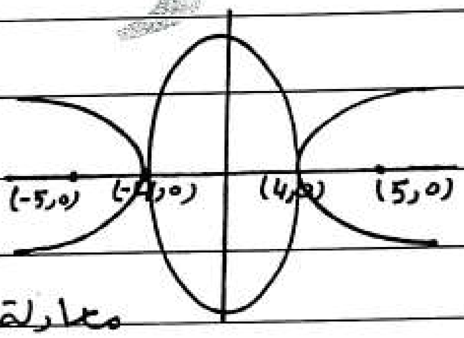
وبما ان القطع الناقص يقطع من محور الصادات جزءاً طوله 12

فاذا كان المحور الاصغر ← $b=6$

واذا كان المحور الاكبر ← $a=6$

وبما ان a اكبر من b في القطع الناقص

ستكون $(\mp4,0)$ هي قطبي الناقص



معادلة الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$, $b=4$, $a=6$ ∴

س17/ قطع مخروطي الفرق بين طولي محوريه يساوي صفر والمسافة بين بؤرتيه 8 وحدات. جد معادلته.

الحل $2a-2b=0 \Rightarrow \cancel{2}a=\cancel{2}b \Rightarrow a^2=b^2$

$2c=8 \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=a^2+a^2 \Rightarrow 16=2a^2$

$\Rightarrow a^2=8 , b^2=8$

لاحظ: $a=b$ وهذا لا يحدث الا في القطع الزائد، اما الناقص فدائماً $a>b$.

ولعدم ذكر موقع البؤرتين فهنالك احتمالين

$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ أو $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=1$

س18 / قطع ناقص احدى بؤرتيه هي بؤرة المكافئ الذي معادلته $\frac{1}{2}y^2-4x=0$ فاذا كان طول قطعة الوتر العمود على المحور الكبير عند البؤرة تساوي (6) جد معادلة القطع الناقص، علماً أن القطع الناقص مركزه نقطة الاصل.

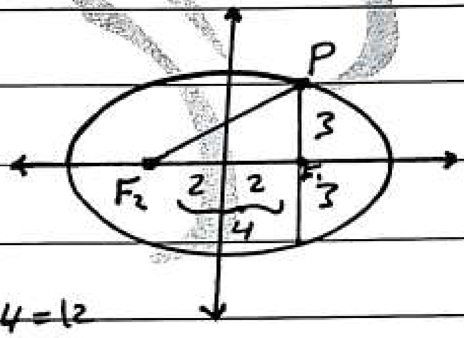
الحل

$\frac{1}{2}y^2=4x \Rightarrow y^2=8x \Leftrightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=8 \Rightarrow p=2$

$F(2,0)$ بؤرة المكافئ $\Rightarrow F(\mp 2,0)$ للناقص

$(PF_2)^2=(4)^2+(3)^2=25$

$PF_2=5$



$PF_1+PF_2=2a$

$3+5=2a \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

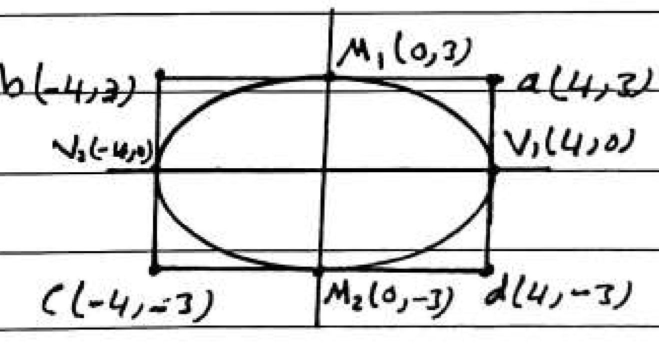
$\because c^2=4 \quad , \quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=16-4=12$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ معادلة القطع الناقص

س19 / جد معادلة القطع الناقص الذي اضلاع المستطيل abcd مماسات له حيث: $a(4,3), b(-4,3), c(-4,-3), d(4,-3)$

الحل

من الرسم:



$a=4 \Rightarrow a^2=16$

$b=3 \Rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

٢٥
س / المعادلة $Ax^2 - 4y^2 = B$ هي معادلة لقطع مخروطي مركزه نقطة الاصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين، ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة طول والبعد البؤري يساوي 8 وحدة طول، جد قيمة B ، A .

الحل

بما ان قيمة كل من A, B سالبتين، اذن القطع المخروطي هو قطع ناقص

$$\frac{x^2}{\frac{B}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-B}{4}} = 1$$

$$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b \quad \text{①}$$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = (8-b)^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 16 = 64 - 16b + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} \Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow b = \frac{48}{16} = 3$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$ الاحتمال الاول

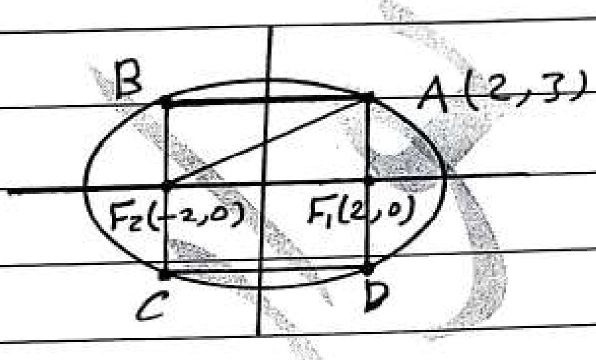
$$\frac{-B}{4} = 9 \Rightarrow B = -36 \ , \ \frac{-36}{A} = 25 \Rightarrow A = \frac{-36}{25}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$ الاحتمال الثاني

$$\frac{-B}{4} = 25 \Rightarrow B = -100 \ , \ \frac{-100}{A} = 9 \Rightarrow A = \frac{-100}{9}$$

س21 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ وان F_1 منتصف $\overline{AD}$ وان F_2 منتصف $\overline{CB}$ وان محيط المستطيل $ABCD$ يساوي 20 وحدة طول.

الحل



$c=2$

$2c=4$

$\therefore AB=4$

المحيط $=(\text{طول}+\text{عرض})\times 2$

$(AB+AD)2=20$

$4+AD=10$

$AD=6$

$\therefore AF_1=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(6)=3$

$\therefore AF_2=\sqrt{(2+2)^2+(3-0)^2}=5$

ومن تعريف القطع الناقص:

$AF_1+AF_2=2a$

$3+5=2a \Rightarrow 8=2a \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=16-b^2 \Rightarrow b^2=12$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

- توجد طرائق أخرى للحل.

الفصل الثالث

التفاضل

الفصل الثالث
(تطبيقات التفاضل)

معلومات حول التفاضل:

1- قيمة المشتقة الاولى للدالة عند نقطة التماس = ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.

2- ميل المستقيم اذا علمت نقطتان يمر بها هو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3- ميل المستقيم اذا علمت معادلته $m = \frac{-(\text{معامل } x)}{\text{معامل } y}$

4- ميل المستقيم اذا علمت زاوية الميل θ فأن الميل $= \tan\theta$

5- اذا توازى مستقيمان فأن ميليهما متساويان واذا تعامد مستقيمان فأن ميل احدهما = المقلوب السالب لميل الآخر.

6- كل مستقيم يوازي محور x فأن ميله = صفر وكل مستقيم يوازي محور y فأن ميله يساوي كمية غير معرفة.

7- لايجاد معادلة المستقيم اذا علم ميله m ونقطة (x_1, y_1) يمر بها فنستخدم القانون التالي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

8- نرمز للمشتقة الاولى بالرمز $\frac{dy}{dx}$ او y' او $f'(x)$ ونرمز للمشتقة الثانية بالرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ او y'' او $f''(x)$ وهكذا بقية المشتقات.

9- عندما نشتق دالة الازاحة s بالنسبة للزمن t فنحصل على دالة السرعة v، وعندما نشتق دالة السرعة v بالنسبة للزمن t فنحصل على دالة التعجيل a.

قواعد ايجاد المشتقة :

1- مشتقة دالة الثابت = صفر

$$f(x) = 13 \Rightarrow f'(x) = 0$$

2- اذا كانت $f(x) = m.x^n$ حيث ان $m, n \in R$ فأن $f'(x) = m.n\,x^{n-1}$

$$f(x) = 6x^4 \Rightarrow f'(x) = 6(4)x^3 = 24x^3$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

3- مشتقة مجموع عدد من الدوال = مجموع مشتقاتها .

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^3 - x - 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 1 - 0$$

4- مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الاولى x الثانيه + الاولى x مشتقة الثانيه .

$$f(x) = (3x^2 + 5x - 4) \cdot (4x^2 - 2x + 7)$$

$$f'(x) = (6x + 5)(4x^2 - 2x + 7) + (3x^2 + 5x - 4)(8x - 2)$$

5- مشتقة قسمة دالتين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط x المقام - مشتقة المقام x البسط}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 6}{2x^2 - 3x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+7)(2x^2-3x+2) - (4x-3)(x^2+7x+6)}{(2x^2-3x+2)^2}$$

6- مشتقة ^{n}(مقدار داخل قوس) $f(x)=[g(x)]^n$

$f'(x)=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$

مثال 1) $f(x)=(x^3+2x+3)^5 \Rightarrow f'(x)=5(x^3+2x+3)^4(3x^2+2)$

2) $f(x)=\sqrt{x^3+4x+1}=(x^3+4x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+4x+1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+4)$

مشتقات ذات الرتب العليا: اذا كانت $y=f(x)$ هي دالة قابلة للاشتقاق فأن مشتقتها الاولى هي $y'=f'(x)$، ومشتقتها الثانية $y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ ، ومشتقتها الثالثة $y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$ وهكذا بقية المشتقات الاخرى. فتسمى المشتقة الثانية وما بعدها بالمشتقات ذات الرتب العليا.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ----

وتكتب المشتقة من الرتبة n بالشكل $\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$

العلاقة الضمنية ومشتقتها: تكون المشتقة ضمنية اذا تحقق واحد او اكثر مما يأتي:

1- عندما يكون x,y في جهة واحدة.

2- عندما يكون أس y غير الواحد.

3- عندما تكون y زاوية لاحدى الدوال الدائرية مثل $\cos y$, $\sin(x^2y^2)$

4- اذا كان لديك شك في انها ضمنية أم غير ضمنية فحل السؤال وكأنه ضمنية.

مثال / اذا علمت ان $2xy-4y+5=0$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ حيث $x\neq 0$, $y\neq 0$

الحل

$$2x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y(2)-4\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left[2x\frac{dy}{dx}+2y-4\frac{dy}{dx}=0\right]\div 2$$

$$x\frac{dy}{dx}+y-2\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x-2)=-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x-2}$$

والان نشتق مرة ثانيه "مشتقه دالة كسرية"

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2)\left[-\frac{dy}{dx}\right]-(-y)(1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(x-2)}\left[-\frac{-y}{\cancel{(x-2)}}\right]+y}{(x-2)^2}=\frac{y+y}{(x-2)^2}=\frac{2y}{(x-2)^2}$$

ملاحظة / الفرق بين $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

اولاً:

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ تعني ← $(\text{المشتقه الاولى})^2$

وتأتي من حاصل ضرب $\frac{dy}{dx}$ في نفسها

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

وعند استخدام الرمز y'

$$\Rightarrow (y')\cdot(y')=(y')^2$$

ثانياً:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ تعني المشتقه الثانيه

وتأتي من اشتقاق $\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

وعند استخدام الرمز

$$\Rightarrow (y')\xrightarrow{\text{مشتقتها}} y''$$

مثال / اذا علمت ان $y^2+x^2=1$ برهن ان $y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

الحل $y^2+x^2=1$ نشتق العلاقة اشتقاقاً ضمنياً

$$\left[2y\frac{dy}{dx}+2x=0\right]\div 2 \Rightarrow y\frac{dy}{dx}+x=0$$

والآن نشتق مرة ثانية

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0$$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

والآن نشتق مرة ثالثة

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^1\frac{d^2y}{dx^2}+0=0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

مشتقات الدوال المثلثية :

1. $f(x)=\sin x \Longrightarrow f'(x)=\sin x$
2. $f(x)=\cos x \Longrightarrow f'(x)=-\sin x$
3. $f(x)=\tan x \Longrightarrow f'(x)=\sec^2 x$
4. $f(x)=\cot x \Longrightarrow f'(x)=-\csc^2 x$
5. $f(x)=\sec x \Longrightarrow f'(x)=\sec x\tan x$
6. $f(x)=\csc x \Longrightarrow f'(x)=-\csc x\cdot\cot x$

مثال / اذا علمت ان $y=\tan x$ برهن ان $\frac{d^2y}{dx^2}=2y(1+y^2)$.

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x=(\sec x)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2(\sec x)^1 \sec x \tan x$$

$$=2\sec^2 x \tan x \qquad [\sec^2 x = 1+\tan^2 x] *$$

$$=2(1+\tan^2 x)\tan x$$

$$=2(1+y^2)\,y = 2y(1+y^2)$$

وبهذا تم المطلوب

مثال / اذا كانت $y=x\sin x$ برهن ان $y^{(4)}-y+4\cos x=0$

الحل

$y^{(4)}$ ← تعني المشتقة الرابعة *

$$y=x\sin x \Rightarrow y'=x\cos x+\sin x$$

$$y''=x(-\sin x)+\cos x(1)+\cos x \Rightarrow y''=-x\sin x+2\cos x$$

$$y'''=-x(\cos x)+\sin x(-1)-2\sin x=-x\cos x-3\sin x$$

$$y''''=-x(-\sin x)+\cos x(-1)-3\cos x=x\sin x-4\cos x$$

$$\therefore L.H.S=y^{(4)}-y+4\cos x$$

$$=\cancel{x\sin x}\cancel{-4\cos x}\cancel{-x\sin x}\cancel{+4\cos x}=0=R.H.S$$

مثال / اذا كانت $y=\cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل $\frac{dy}{dx}=-2\sin 2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(2)^2\cos 2x \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=2^3\sin 2x \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4}=2^4\cos 2x$$

$$=16\cos 2x$$

حل تمارين (1-3)

1- جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي:

a) $y=\sqrt{2-x}\ , \forall x<2$

الحل $y=(2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)=\frac{-1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}(2-x)^{-3/2}(-1) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{4(2-x)^{3/2}}$

b) $y=\frac{2-x}{2+x}\ , x\neq 2$

الحل $\frac{dy}{dx}=\frac{-1(2+x)-1(2-x)}{(2-x)^2}=\frac{-2\cancel{-x}-2\cancel{+x}}{(2+x)^2}=\frac{-4}{(2+x)^2}$

$\frac{dy}{dx}=-4(2+x)^{-2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=8(2+x)^{-3}=\frac{8}{(2+x)^3}$

c) $2xy-4y+5=0\ , y\neq 0\ , x\neq 2$ [محلول كمثال]

2) جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي:-

a) $f(x)=4\sqrt{6-2x}\ , \forall x<3$

الحل $f(x)=4(6-2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=2(6-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)$

$\Rightarrow f'(x)=-4(6-2x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=2(6-2x)^{-3/2}(-2)$

$\Rightarrow f''(x)=-4(6-2x)^{-3/2} \Rightarrow f'''(x)=6(6-2x)^{-5/2}(-2)$

$\Rightarrow f'''(1)=-12(6-2(1))^{-5/2} \Rightarrow f'''(1)=-12(4)^{-5/2}$

$f'''(1)=-12(2^{\cancel{2}})^{-5/\cancel{2}}=-12(2)^{-5}=\frac{-12}{2^5}=\frac{-12}{32}=\frac{-3}{8}$

b) $f(x) = \sin \pi x$

الحل $f'(x) = \pi \cos \pi x \Rightarrow f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x \Rightarrow f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi(1) = -\pi^3(-1) = \pi^3$

c) $f(x) = \frac{3}{2-x} \quad , x \neq 2$

الحل $f(x) = 3(2-x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -3(2-x)^{-2}(-1)$

$f'(x) = 3(2-x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -6(2-x)^{-3}(-1)$

$f''(x) = 6(2-x)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -18(2-x)^{-4}(-1)$

$f'''(\ ) = -18(1)^{-4}(-1) = 18$

3) اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

[محلول كمثال]

4) اذا كانت $y = \sin x$ فبرهن أن $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

[محلول كمثال]

المعدلات المرتبطة بالزمن: إذا وجد أكثر من متغير بحيث تتوقف قيمة كل من هذه المتغيرات على متغير واحد يسمى (بارامتر) ومثاله الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعاً لتغيره وحيث ان العلاقة هي ارتباط فإننا نسمي المعدلات الزمنية هذه بالمعدلات الزمنية المرتبطة واحياناً بالمعدلات المرتبطة او المعدلات الزمنية فقط فمثلاً اذا كان $x = f(t)$, $y = g(t)$ فالمتغيران y , x متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل t فمن الممكن ربط المتغيرين ببعضهما، ويمكن ان نجد معدل تغير كل منهما وكما يأتي: $\frac{dy}{dt} = g'(t)$, $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ والناتجان يمثلان المعدلين الزمنيين لتغير كل من x, y . وقد يتوافر الربط بين المتغيرين في مسألة ما بمعادلة وفي هذه الحالة نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t فعلى سبيل المثال من المعادلة $x^2 + y^2 - 4y + 6x = 0$ يمكن ايجاد المعدل الزمني لتغير كل من y , x وكما يلي:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 4y + 6x) = \frac{d}{dt}(0)$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 6\frac{dx}{dt} = 0$$

فيكون المعدل الزمني لتغير y يساوي $\frac{dy}{dt}$ والمعدل الزمني لتغير x يساوي $\frac{dx}{dt}$.

اذن :

اذا كان المتغير x ← فأن المعدل الزمني لتغير x هو $\frac{dx}{dt}$

اذا كان المتغير y ← فأن المعدل الزمني لتغير y هو $\frac{dy}{dt}$

اذا كان الارتفاع h ← فأن المعدل الزمني لتغير الارتفاع هو $\frac{dh}{dt}$

اذا كان نصف القطر r ← فأن المعدل الزمني لتغير نصف القطر هو $\frac{dr}{dt}$

اذا كان الحجم V ← فأن المعدل الزمني لتغير الحجم هو $\frac{dV}{dt}$

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن :

١- ارسم مخططاً للمسألة (ان احتجت الى ذلك).

2- حدد رموز الثوابت والمتغيرات والقانون المستعمل في حل السؤال (العلاقة الرئيسية).

3- حاول ايجاد علاقة بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات (العلاقة الثانوية).

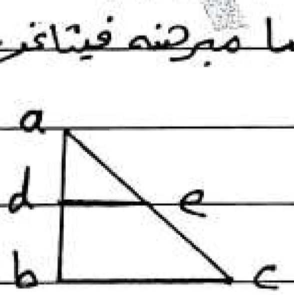
4- نشتق العلاقة بالنسبة للزمن.

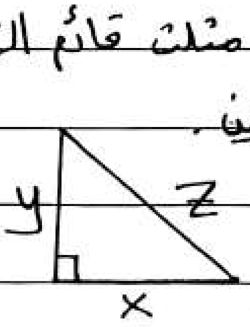
5- نعوض المعلومات في المشتقة.

ملاحظة ١ : يمكن تكوين الدالة الزمنية من خلال احدى الحالات التالية :

أ- اذا ذكر في السؤال (معدل اقتراب او معدل ابتعاد) فتكون الدالة الرئيسية (الزمنية) هي قانون المسافة : $s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ب- اذا حصلنا مثلث قائم الزاوية فتكون اما مبرهنة فيثاغورس او تشابه المثلثين.





$$\frac{ad}{ab}=\frac{ae}{bc}$$

$$z^2=x^2+y^2$$

ج - اي سائل يصب أو يتسرب (او جليد يذوب وكذلك الغازات) المقصود هو حجم V وهو الدالة الزمنية.

د - اذا طلب سرعة تغير الزاوية فتكون الدالة الزمنية هي $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ او $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

هـ - يمكن الحصول عليها من مطلوب السؤال.

ملاحظة 2 (هامة): في اي سؤال الثوابت تعوض قبل الاشتقاق في العلاقة والمتغيرات تعوض في المشتقة.

ملاحظة 3: اذا كان معدل التغير في حالة تزايد فتكون الاشارة موجبة، واذا كان معدل التغير في حالة تناقص فتكون الاشارة سالبة.

ملاحظة 4: اي سؤال فيه مخروط تكون الدالة الزمنيه هي حجمه $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ونعمل التناسب: $\frac{r}{\text{نصف قطر قاعدة المخروط}} = \frac{h}{\text{ارتفاع المخروط الاصلي}}$

ثم نعوض في الحجم لاختزال عدد المتغيرات.

ملاحظة 5: قوانين نحتاجها في هذا الموضوع:

1 - حجم متوازي المستطيلات = الطول x العرض x الارتفاع.

2 - حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$

3 - مساحة المستطيل = الطول x العرض.

4 - مساحة الدائرة = πr^2 . 5 - محيط الدائرة = $2\pi r$

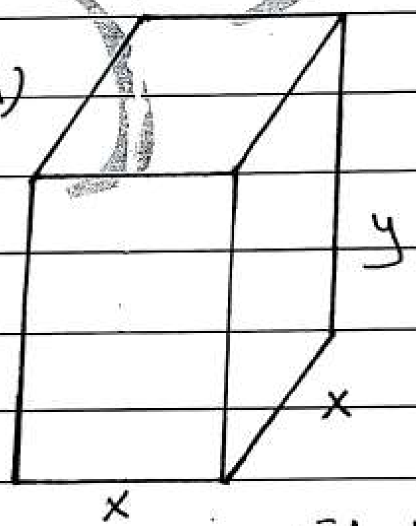
6 - حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$. 7 - حجم المخروط = $\frac{\pi}{3} r^2 h$

مثال / متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3 m/s ، وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5 cm/s ، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4 cm والارتفاع 3 cm .

الحل

نفرض طول ضلع القاعدة في أي لحظة = x ⟸ اذن طول القاعدة في تلك اللحظة = x ايضاً (لانها مربعة)

نفرض الارتفاع = h والحجم = V



(الارتفاع) (العرض) (الطول) = حجم متوازي المستطيلات

$V = (x)(x)(h)$

$V = x^2 h$

مشتقة حاصل ضرب دالتين :

$$\frac{dV}{dt} = x^2\left(\frac{dh}{dt}\right) + h\left(2x\frac{dx}{dt}\right)$$

المعلومات :

$\frac{dx}{dt} = 0.3 \text{ cm/s}$

$\frac{dy}{dt} = -0.5 \text{ cm/s}$

$\frac{dV}{dt} = ?$

$x = 4 , y = 3$

نعوض المعلومات في المشتقة :

$$\frac{dV}{dt} = (4)^2(-0.5) + 3(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dV}{dt} = -8 + 7.2$$

$$\frac{dV}{dt} = -0.8 \text{ cm}^3/s$$

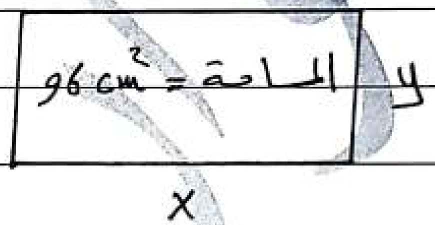
مثال/ صفيحة مستوية من المعدن مستطيلة مساحتها $96\ cm^2$ ، يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة. جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$.

الحل

نفرض طول المستطيل في لحظة معينة $= x$

نفرض عرض المستطيل $= y$

مساحة المستطيل = (الطول) . (العرض)



$A = xy$

$96 = x(8)$

$x = \frac{96}{8} \Rightarrow x = 12\ cm$

$A = 96\ cm^2 \ , \ \frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$

$\frac{dy}{dt} = ? \ , \ y = 8\ cm$

$96 = xy$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} \rightarrow$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$0 = (12)\frac{dy}{dt} + (8)(2)$

$-16 = 12\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3}\ cm/s$

* في بعض الاسئلة هنالك مجاهيل ثانوية يمكن ايجادها بتعويض المعلومات في العلاقة ففي السؤال هذا وجدنا $x = 12$ بتعويض $y = 8$ في العلاقة.

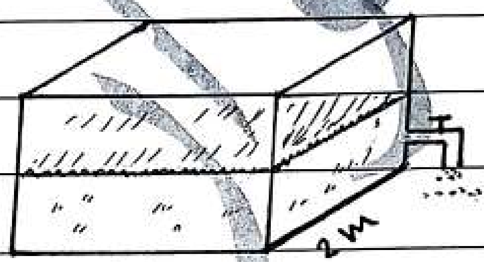
مثال / خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعه طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\,m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند اي زمن t .

الحل

نفرض حجم الماء = V

نفرض ارتفاع الماء = h

V = (الطول) (العرض) (الارتفاع)



$V = (2)(2)(h)$

$V = 4h$

$x = y = 2\,m$

$\frac{dV}{dt} = -0.4\,m^3/h$ الاشارة سالبة لان ذكر (يتسرب) اي نقصان

$\frac{dV}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$

$-0.4 = 4\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} = \frac{-1}{10} = -0.1\,m/h$

$\frac{dh}{dt} = -0.1\,m/h$

ملاحظه للفائدة /

١- السائل داخل متوازي السطوح المستطيله يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير وطول القاعده ثابت وعرضها ثابت . ٢- السائل داخل المخروط يكون ارتفاعه متغير ونصف قطر قاعدته متغير وحجمه متغير . ٣- السائل داخل المكعب يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير وطول القاعده ثابت وعرضها ثابت (طول القاعده = عرضها) . ٤- السائل داخل الاسطوانه يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير ونصف قطر قاعدته ثابت

مثال / لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2 unit/s ، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$.

الحل /

لتكن $M(x,y)$ ولتكن المسافة $= s$

$x=4$ ، $\frac{ds}{dt}=0.2$

$\frac{dx}{dt}=?$

$$s=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-14x+49+y^2}$$

$\because y^2=4x$

$\therefore s=\sqrt{x^2-14x+49+4x}=\sqrt{x^2-10x+49}$

مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{نفس الجذر}}}$

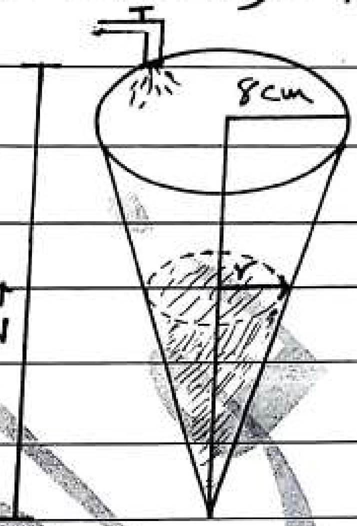
$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2=\frac{8-10}{2\sqrt{16+40+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}}\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=-1\ \text{unit/s}$$

مثال / مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للأسفل ، ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل 1 cm^3/s ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12 cm .

الحل / نفرض نصف القطر = r والارتفاع = h والحجم = V



$V=\frac{\pi}{3}r^2h \quad \ldots (1)$

$\frac{r}{8}=\frac{h}{24} \Rightarrow r=\frac{1}{3}h$

$\Rightarrow r^2=\frac{1}{9}h^2 \quad \ldots (2)$

نعوض ② في ①

$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{9}h^2\cdot h$

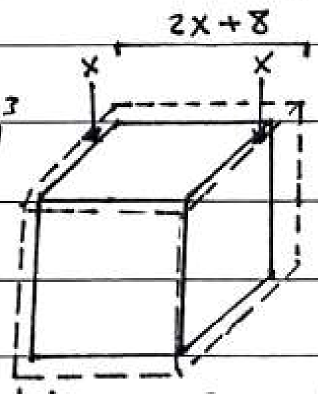
$V=\frac{\pi}{27}h^3$

$\frac{dV}{dt}=\underset{\text{يصب}}{5}-\underset{\text{يتسرب}}{1}=4\ cm^3/s \ , \ \frac{dh}{dt}=? \ , \ h=12cm$

$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 4=\frac{\pi}{9}(144)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}\ cm/s$

مثال / مكعب صلد طول حرفه 8 cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكله مكعباً ، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1cm .

الحل / نفرض سمك الجليد = x والحجم = V



حجم الجليد = حجم المكعب الكلي ((الاصلي مع الجليد)) - حجم المكعب الاصلي ((بدون الجليد))

(طول الحرف)^3 = حجم المكعب

$V=(8+2x)^3-(8)^3$

$\frac{dV}{dt}=3(2x+8)^2\cdot 2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dV}{dt}=-6\ cm^3/s \ , \ \frac{dx}{dt}=? \ , \ x=1\ cm$

$-6=3(2+8)^2\cdot 2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{-6}{600}=-0.01\ cm/s$

مثال/ سلم طوله 10m يستند طرفه الاسفل على أرض افقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m/s عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m عن الحائط جد:

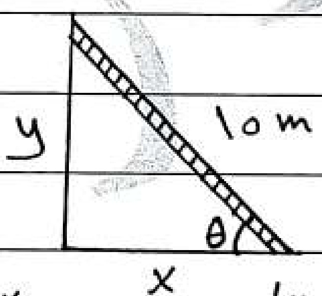
1 - معدل انزلاق الطرف العلوي.

2 - سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

الحل نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = x

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الأرض = y

نفرض قياس الزاوية بين السلم والأرض = θ



(1) $x^2+y^2=100$

$(8)^2+y^2=100 \Rightarrow 64+y^2=100$

$\Rightarrow y^2=36 \Rightarrow y=6$

$\therefore x^2+y^2=100$

$\left[2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\right]\div 2$

$\frac{dx}{dt}=2\,m/s \;,\; \frac{dy}{dt}=?$

$x=8\,m \;,\; \frac{d\theta}{dt}=?$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$

$8(2)+6\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-8}{3}\,m/s$

(2) $\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \sin\theta=\frac{y}{10} \Rightarrow \cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\cdot\frac{dy}{dt}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \rightarrow \therefore \frac{x}{10}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{-8}{3}$

$\Rightarrow \frac{8}{10}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{-8}{3} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{-1}{3}\,rad/s$

ملاحظة / اذا اعطيت لنا في السؤال السرعة خلال زمن معين معطى في السؤال فيجب ان نستخرج المسافة المقطوعه خلال ذلك الزمن وحسب القانون التالي : المسافة = السرعة × الزمن

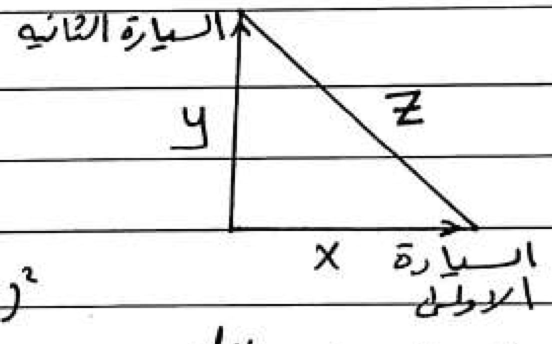
مثال / طريقان متعامدان يلتقيان بنقطه M تحركت سيارتان من نقطه M كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى 80 Km/h ومعدل سرعة السيارة الثانيه 60 Km/h . جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من نقطه M .

الحل

نفرض بعد السيارة الاولى عن نقطه M في لحظة معينه = x

ونفرض بعد الثانيه في نفس اللحظه = y

ونفرض البعد بين السيارتين في نفس اللحظه = Z



المسافه = السرعة × الزمن

$= (80)\left(\frac{1}{4}\right) = 20\ Km$

المسافه $= (60)\left(\frac{1}{4}\right) = 15\ Km$

$Z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow Z^2 = (20)^2 + (15)^2$

$Z^2 = 400 + 225 = 625$

$\therefore Z^2 = x^2 + y^2$

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$2(25)\frac{dZ}{dt} = 2(20)(80) + 2(15)(60)$

$\frac{dZ}{dt} = 100\ Km/h$

$\frac{dx}{dt} = 80\ Km/h$

$\frac{dy}{dt} = 60\ Km/h$

$\frac{dZ}{dt} = ?$

حل تمارين (2 - 3)

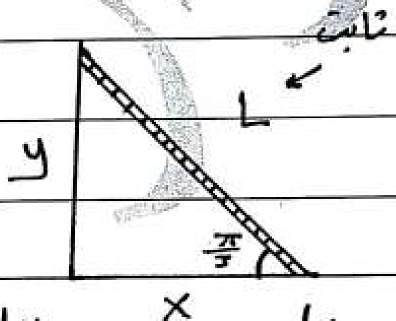
١- سلم يستند طرفه الاسفل على أرض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ ، جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

الحل نفرض بعد طرفه الاسفل عن الحائط في لحظة ما $= x$

نفرض بعد الطرف العلوي عن الارض في تلك اللحظة $= y$

طول السلم ((ثابت)) $= L$

$$x^2 + y^2 = L^2$$



$$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\right] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ m/s \ , \ \frac{dy}{dt} = ?$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{3}\,x \quad \ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) :

$$\left[x\frac{dx}{dt} + \sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = 0\right] \div x \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(2) + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s$$

- توضيح: في اللحظة التي تكون فيها الزاوية بين السلم والارض $\frac{\pi}{3}$ يصبح كل شيء ثابت لذلك يمكن القسمة على (x) .

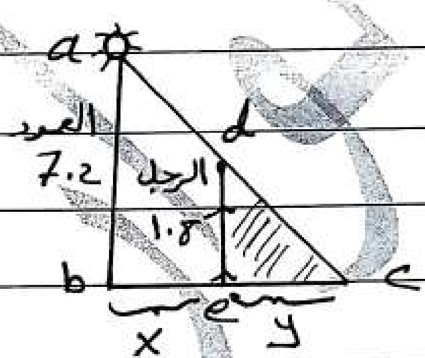
2 - عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30 m/min ، جد معدل تغير طول ظل الرجل.

الحل نفرض بعد الرجل عن العمود $= x$

نفرض طول ظل الرجل $= y$

من تشابه $\Delta\Delta$ abc , dec

$$\frac{ab}{de}=\frac{bc}{ec} \Rightarrow \frac{7.2}{1.8}=\frac{x+y}{y}$$



$$\frac{\cancel{72}^{4}}{\cancel{18}_{1}}=\frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1}=\frac{x+y}{y}$$

$$4y=x+y \Rightarrow 3y=x$$

$$3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \cancel{3}\frac{dy}{dt}=\cancel{30}^{10} \qquad \frac{dx}{dt}=30,\ \frac{dy}{dt}=?$$

$$\frac{dy}{dt}=10 \text{ m/min}$$

3 - لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ ، جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

الحل $M(x,y)$

$y=x^2$

$N(0,\frac{3}{2})$

$\frac{ds}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

$$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$

$$=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3}\cancel{\frac{dy}{dt}}=\frac{\cancel{2}(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\cdot\cancel{\frac{dy}{dt}} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} \frac{4}{9}=\frac{y^2-2y+1}{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow 9y^2-18y+9=4y^2-8y+9$$

$\Rightarrow y^2-2y=0 \Rightarrow y(y-2)=0 \Rightarrow$ اما $y=0$ تهمل او $y=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$

$\Rightarrow M(\mp\sqrt{2},2)$

- في السؤال السابق اهملنا $y=0$ لانها تجعل المتغير سالب $\frac{ds}{dt}=\frac{-2}{3}\frac{dy}{dt}$ وهذا خلاف المعطى.

4- جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t.

الحل $x=?$, $y=?$ $\quad x^2+y^2+4x-8y=108$ ... ①

$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$ $\quad \left[2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0\right]\div 2$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$

$\frac{dx}{dt}(2x+2y+4-8)=0$, $\frac{dx}{dt}\neq 0$

$2x+2y+4-8=0$

$[2x+2y-4=0]\div 2 \Rightarrow x+y-2=0 \Rightarrow y=2-x$ ... ②

نعوض ② في ① : $x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$[2x^2+8x-120=0]\div 2 \Rightarrow x^2+4x-60=0 \Rightarrow (x+10)(x-6)=0$

اما $x=-10 \Rightarrow$ نعوض في ① $\Rightarrow y=2+10=12 \Rightarrow (-10,12)$ النقطة

او $x=6 \Rightarrow$ نعوض في ① $\Rightarrow y=2-6=-4 \Rightarrow (6,-4)$ النقطة

5- متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3 m/s ، وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5 cm/s ، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4cm والارتفاع.

[محلول كمثال]

معلومات عامة : لايجاد مجال الدالة يجب التعرف على انواع الدوال ومجال كل منها:

1- دوال كثيرة الحدود / وهي دوال لاكسرية ولاجذرية ولا متفرعة حيث مجال الدالة R .

مثال / جد مجال كل من الدوال :

1) $y = x^3 - 3x^2 + x - 5 \longrightarrow R =$ مجال الدالة

2) $y = \sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{4}x + 7 \longrightarrow R =$ مجال الدالة

2- دوال كسرية / اي في المقام x ولايجاد مجال الدالة نجعل المقام مساوي الصفر لايجاد قيم x حيث مجال الدالة = R/{قيم x}

مثال / جد مجال الدالة :

$y = \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow R/\{1\} =$ مجال الدالة

3- دوال جذرية / اي يوجد داخل الجذر x

أ- دليلها زوجي : لإيجاد مجالها نجعل القيمة تحت الجذر ≥ صفر ونجد x ، اما اذا كان الجذر في المقام نجعل القيمة تحت الجذر > صفر ونجد x .

مثال / جد مجال الدالة :

1) $y = \sqrt{x-1} \longrightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow$ مجال الدالة $= \{x \geq 1\}$

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \longrightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ مجال الدالة $= \{x > 1\}$

ب- دليلها فردي : مجالها = R ، اما اذا كان الجذر في المقام ، فنجعل المقدار تحت الجذر مساوي الصفر ونجد x حيث مجال الدالة = R/{x}

مثال / جد مجال الدالة :

1) $y = \sqrt[3]{x-4} \longrightarrow$ مجال الدالة $= R$

2) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} \longrightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow R/\{4\} =$ مجال الدالة

مبرهنة رول: تتحقق مبرهنة رول اذا تحققت الشروط الثلاثه الاتيه:

١- الدالة مستمرة في الفتره المغلقه $[a,b]$.

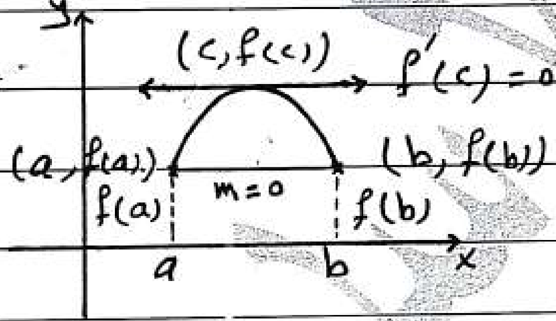
٢- الدالة قابلة للاشتقاق في الفتره المفتوحه (a,b).

٣- $f(a)=f(b)$

فإذا تحققت تلك الشروط: فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي للفتره المفتوحه (a,b) وتحقق $f'(c)=0$.

وهذا يعني: توجد على الاقل نقطه تنتمي الى المنحني وعندها المشتقه الاولى = صفر، اي يكون المماس موازياً للوتر الواصل بين طرفي المنحني وموازي لمحور السينات، اي ان ميله = صفر.

ولايجاد قيم c:



١- نشتق الدالة ونعوض c بدل كل x.

٢- نجعل $f'(c)=0$ ونجد قيم c حيث $c\in(a,b)$

ملاحظة / اذا كانت الدالة كثيرة حدود فانها مستمرة وقابلة للاشتقاق بدون عملية بحث.

ملاحظة / $\cos x$ ، $\sin x$ دوال كثيرة حدود وباقي الدوال الدائرية هي دوال نسبية.

مثال / بين هل ان مبرهنة رول تحقق لكل من الدوال التالية ثم جد قيم c الممكنة :

1) $f(x) = (2-x)^2 \quad , \quad x \in [0,4]$

1- الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0,4]$ لانها كثيرة حدود .

2- الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(0,4)$ لانها كثيرة حدود .

3- نختبر $f(a) = f(b)$

$f(a) = f(0) = (2-0)^2 = 4$

$f(b) = f(4) = (2-4)^2 = 4$

$\therefore \; f(a) = f(b)$

$\therefore$ f تحقق مبرهنة رول

$f'(x) = -2(2-x) \Rightarrow f'(c) = -2(2-c)$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2(2-c) = 0 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \quad , \quad x \in [-1,1]$

1- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود .

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود .

3- $f(a) = f(-1) = -9+3+1 = -5$

$f(b) = f(1) = 9+3-1 = 11$

$\therefore \; f(a) \neq f(b)$

$\therefore$ f لا تحقق مبرهنة رول لان الشرط الثالث لم يتحقق ولا توجد قيمة لـ (c) .

3) $f(x)=k \quad , \quad x \in [a,b]$

١- الدالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ لأنها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) لأنها كثيرة حدود.

٣-
$f(a)=k$
$f(b)=k$
$\therefore f(a)=f(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f'(x)=0 \Rightarrow f'(c)=0$

∴ قيم c هي كل القيم في الفترة (a,b)

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x \in [-1,2] \\ -1 & , x \in [-4,-1) \end{cases}$

مجال الدالة $[-4,2]$ = المجال الكلي

* في مثل هذه الدوال يجب بحث الاستمرارية وقابلية الاشتقاق عند x الفاصلة (اي العدد الذي يتوسط المجالين هو الذي نأخذ له غاية من اليمين واليسار).

الغاية من اليمين $= \lim_{x\to(-1)^+}(x^2+1)=(-1)^2+1=1+1=2=L_1$

الغاية من اليسار $= \lim_{x\to(-1)^-}(-1)=-1=L_2$

الدالة ليست مستمرة لأن $L_1 \neq L_2$ في الفترة $[-4,2]$

∴ لا تحقق مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الاول.

مثال/ اذا كانت مبرهنة رول تتحقق في الدالة $f(x) = x^2 - hx + 3$ حيث $x \in [-1, 5]$ ، جد قيمة h ثم جد قيمة c .

الحل لان الدالة تحقق مبرهنة رول: $f(a) = f(b)$

$f(-1) = f(5)$

$1 + h + 3 = 25 - 5h + 3 \Rightarrow 6h = 24 \Rightarrow h = 4$

$f'(x) = 2x - h \Rightarrow f'(c) = 2c - 4$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2 \in (-1, 5)$

مثال/ اذا كانت $f(x) = hx^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فاذا كانت $c = 2$ تنتمي للفترة $(-1, b)$ جد قيمة b, h .

الحل لان الدالة تحقق شروط رول: $f(a) = f(b)$

$f(-1) = f(b)$

$h + 4 + \cancel{5} = hb^2 - 4b + \cancel{5}$

$h + 4 = hb^2 - 4b$ 1

$f'(x) = 2hx - 4 \Rightarrow f'(c) = 2hc - 4$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2hc - 4 = 0$

$\because c = 2 \Rightarrow \therefore 2h(2) - 4 = 0$

$\Rightarrow 4h - 4 = 0 \Rightarrow h = 1$ 2

نعوض 2 في 1 :

$1 + 4 = b^2 - 4b \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b-5)(b+1) = 0$

اما $b = 5$

او $b = -1$ تهمل (لان يمين الفترة يجب ان تكون اكبر من يسارها)

مبرهنة القيمة المتوسطة: الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة اذا حققت الشروط الاتية:

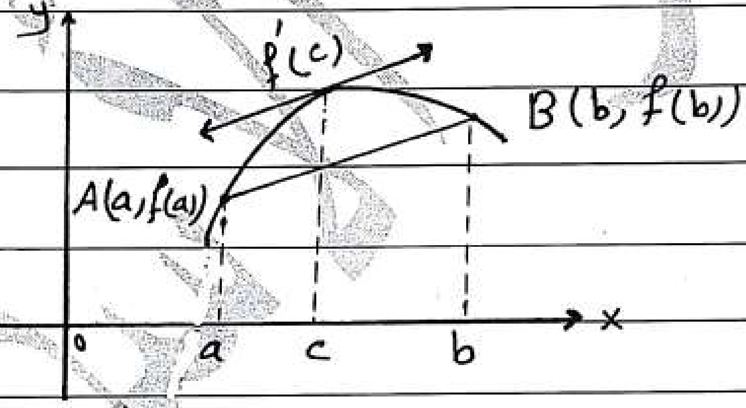
1- الدالة مستمرة على الفترة $[a, b]$.

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b).

فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a,b) وتحقق:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لنظرية القيمة المتوسطة



المماس يوازي الوتر ، ميل المماس $= f'(c)$

ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ميل المماس عند c = المشتقة الاولى للدالة f عند c ، $f'(c)$

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما

ميل الوتر = ميل المماس

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ملاحظة / ان نظرية رول حالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة ففي نظرية رول يجب توفر شرط ثالث وهو : $f(a)=f(b)$ اي الوتر والمماس يوازيان محور السينات ، اي ان فرق الصادات = صفر لذا يصبح الميل = صفر فنحصل على : $f'(c)=0$

مثال / برهن ان الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c :

a) $f(x)=x^2-6x+4 \quad , \quad x\in[-1,7]$

١- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,7]$ لانها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,7)$ لانها كثيرة حدود.

$f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'(c)=2c-6$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 2c-6=\frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}$

$\Rightarrow 2c-6=\frac{(49-42+4)-(1+6+4)}{7+1} \Rightarrow 2c-6=\frac{11-11}{8}$

$\Rightarrow 2c-6=\frac{0}{8} \Rightarrow 2c-6=0 \Rightarrow c=3 \in(-1,7)$

b) $f(x)=x^3-x-1 \quad , \quad [-1,2]$

١- الدالة مستمرة في الفترة $[-1,2]$ لانها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ لانها كثيرة حدود.

$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(c)=3c^2-1$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2-1=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 3c^2-1=\frac{5-(-1)}{3}=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow 3c^2=3 \Rightarrow c^2=1$

$c=\mp1 \Rightarrow c=-1 \notin(-1,2) \quad , \quad c=1\in(-1,2)$

c) $f(x)=\sqrt{25-x^2}\ ,\ x\in[-4,0]$

الشرط الاول (الاستمرارية):

١- نثبت الاستمرارية في الفترة المفتوحة $(-4,0)$

لتكن $a\in(-4,0)$

$f(a)=\sqrt{25-a^2}\in R$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-a^2}$

$\therefore f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

∴ الدالة مستمرة في الفترة المفتوحة $(-4,0)$

٢- نثبت الاستمرارية عند طرفي الفترة المغلقة $[-4,0]$

$\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=3=f(-4)$

$\lim\limits_{x\to(0)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-0}=5=f(0)$

∴ الدالة مستمرة عند طرفي الفترة $[-4,0]$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$

الشرط الثاني (قابلية الاشتقاق):

$f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

$\Rightarrow 25-x^2=0 \Rightarrow 25>x^2 \Rightarrow 5>x>-5 \Rightarrow (-5,5)=$ مجال المشتقة

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-4,0)$

لان الفترة $(-4,0)$ محتواه كلياً في مجال المشتقة $(-5,5)$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{f(0)-f(-4)}{0+4}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{5-3}{4}=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{1}{2}$$

$\sqrt{25-c^2}=-2c$ → تربيع الطرفين → $25-c^2=4c^2$

$\Rightarrow [25=5c^2]\div 5 \Rightarrow c=\mp\sqrt{5} \Rightarrow c=\sqrt{5}\notin(-4,0)$

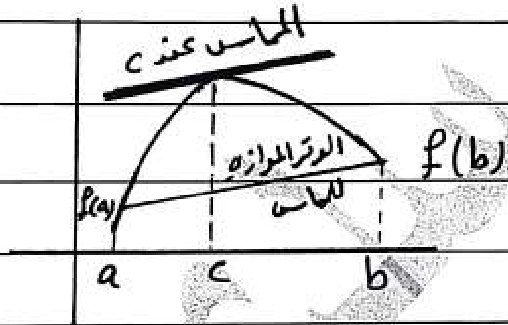
$c=-\sqrt{5}\in(-4,0)$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة:

المستقيم المماس والوتر متوازيان

لذا يكون لهما نفس الميل أي:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



نفرض $h=b-a \Rightarrow b=a+h$

وعندما يكون اقتراب b من a قرباً كافياً تكون في هذه الحالة h صغيرة ويقترب الوتر قرباً كافياً منه ، اي ان المماس عند c سيكون قريباً جداً من a فيكون:

$$f'(c)\simeq\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow h f'(c)\simeq f(a+h)-f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a+h)\simeq f(a)+h f'(a)}$$

نطلق على هذا القانون اسم (التغير التقريبي للدالة)

اذا تغيرت x من a الى $a+h$

التقريب باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها :

لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع الاتي :

١- نجد القيمة المعطاة في السؤال ونرمز لها b .

٢- نفرض قيمة أخرى تسمى a وفق الشرطين الاتيين :

أ- ان تكون قريبة جداً من قيمة b المعطاة في السؤال .

ب- يمكن ايجاد قيمة الدالة بواسطتها بشكل دقيق .

3- نجد h حيث $h = b - a$.

4- نجد دالة $f(x)$ تكون مطابقة لما معطى في السؤال ، ثم نجد $f(a)$.

5- نجد مشتقة الدالة $f'(x)$ ، ثم نجد $f'(a)$.

6- نجد القيمة التقريبية للمقدار حسب القانون :

$$f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)$$

مثال / جد بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة للعدد $\sqrt{26}$.

الحل $b = 26$ القيمة المعطاة في السؤال

$a = 25$ القيمة التقريبية المفروضة

$h = b - a = 26 - 25 = 1$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$$

$f(26) \simeq 5 + (1)(0.1) \simeq 5 + 0.1 \simeq 5.1$

$\therefore \sqrt{26} \simeq 5.1$

مثال/ باستخدام نتيجه مبرهنة القيمة المتوسطه جد وبصورة تقريبية

a) $\sqrt[3]{7.8}$

$b=7.8$

$a=8$

$h=b-a=7.8-8=-0.2$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(8)=\sqrt[3]{8}=2$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(8)=\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(8)=\frac{1}{3}(2^{\cancel{3}})^{-\frac{2}{\cancel{3}}}=\frac{1}{3}(2)^{-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}=0.083$

$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$

$f(7.8)\cong 2+(-0.2)(0.083)\cong 2-0.0166\cong 1.9834$

$\therefore \sqrt[3]{7.8}\cong 1.9834$

b) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

$b=17$

$a=16$

$h=b-a=17-16=1$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x} \Rightarrow f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-3/4}$

$f'(16)=\frac{1}{2}(16)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(16)^{-3/4}$

$=\frac{1}{2}(4^{\cancel{2}})^{-\frac{1}{\cancel{2}}}+\frac{1}{4}(2^{\cancel{4}})^{-\frac{3}{\cancel{4}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^3}\right)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$

$f(a+h)\cong f(a)+h f'(a)$

$\cong 6+(1)(0.156)\cong 6+0.156\cong 6.156$

c) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

$b = 0.98$

$a = 1$

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 \Rightarrow f(1) = \sqrt[5]{(1)^3} + (1)^4 + 3 = 5$

$f(x) = x^{3/5} + x^4 + 3$

$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-2/5} + 4x^3 \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{23}{5} = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$

$\cong 5 + (-0.02)(4.6) \cong 5 - 0.092 \cong 4.908$

ملاحظة / في حالة وجود قيمة تحت جذر بشكل ــــ.0 فنساوي المراتب لدليل الجذر بوضع اصفار على اليمين.

فمثلاً : $\sqrt[2]{0.5} \longrightarrow \sqrt[2]{0.50}$, $\sqrt[5]{0.7} \longrightarrow \sqrt[5]{0.70000}$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

$= \sqrt[3]{0.120}$

$b = 0.120 \quad , \quad a = 0.125$

$h = b - a = 0.120 - 0.125 = -0.005$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(0.125) = \frac{1}{3}(0.125)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(0.125) = \frac{1}{3}\left[(0.5)^{\cancel{3}}\right]^{\frac{-2}{\cancel{3}}} = \frac{1}{3}(0.5)^{-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(0.5)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{0.25}$

$= \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = 1.333$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a) \cong 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$\cong 0.5 - 0.006665 \cong 0.49335$

$\therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.49335$

مثال / اذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل $b=1.001$, $a=1$

$h=b-a=1.001-1=0.001$

$f(x)=x^3+3x^2+4x+5 \Rightarrow f(1)=1+3+4+5=13$

$f'(x)=3x^2+6x+4 \Rightarrow f'(1)=3+6+4=13$

$f(a+h) \cong f(a)+h.f'(a)$

$f(1.001) \cong f(1)+(0.001)\,f'(1)$

$\cong 13+(0.001)(13) \cong 13.013$

مثال / مكعب طول حرفه $9.98\,cm$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل حجم المكعب = $(\text{طول حرفه})^3$

$f(x)=x^3$

$b=9.98$, $a=10$

$h=b-a=9.98-10=-0.02$

$f(x)=x^3 \Rightarrow f(10)=(10)^3=1000$

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(10)=3(10)^2=300$

$f(a+h) \cong f(a)+h.f'(a)$

$\cong 1000+(-0.02)(300) \cong 1000-6 \cong 994\,cm^3$

ملاحظة / اذا وجدنا عددين لشيء واحد نتبع الاتي :

١ـ $h=$ العدد الصغير ـ العدد الكبير

٢ـ نشتق الدالة ونعوض العدد الصغير فيها .

٣ـ نطبق القانون : مقدار التغير التقريبي $\cong h\,f'(a)$

مثال / لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

الحل

$h = 8.06 - 8 = 0.06$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{2}{3}(8)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}(2^3)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3} = 0.333$

$h f'(a) \cong (0.06)(0.333) \cong 0.01998$ مقدار التغير التقريبي

مثال / يراد طلاء مكعب طول ضلعه ١٠cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

طول الضلع بعد الطلاء $= ١٠ + 0.15 + 0.15 = 10.3$

حجم المكعب $=$ (طول الضلع)^3

$f(x) = x^3$

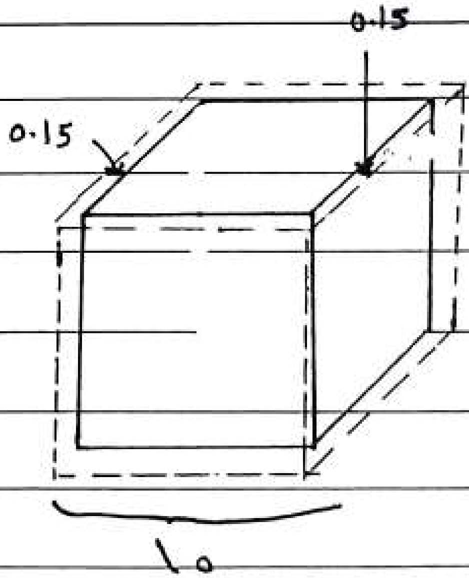
$h = 10.3 - 10 = 0.3$

$f'(x) = 3x^2$

$h \cdot f'(10) = (0.3)(3(10)^2)$

$= (0.3)(300)$

$= 90\ cm^3$



حل تمارين (3 - 3)

١- اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي:

a) $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad x \in [-3,3]$

١) الدالة مستمرة على الفترة $[-3,3]$ لانها كثيرة حدود.

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3,3)$ لانها كثيرة حدود

٣) $f(a) = f(-3) = -27 + 27 = 0$

$f(b) = f(3) = 27 - 27 = 0$

$\therefore f(a) = f(b)$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-3,3]$

$f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3$

$\Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \in (-3,3)$

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad , \quad x \in [\frac{1}{2}, 2]$

١) الدالة مستمرة على الفترة $[\frac{1}{2},2]$ لان $x = 0$ يجعل مقام الدالة صفر فتكون الدالة غير معرفة ولكن $x = 0 \notin [\frac{1}{2},2]$

٢) $f(x) = 2x + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$

الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(\frac{1}{2},2)$ لان $x=0$ الذي يجعل مقام المشتقة صفراً وتكون غير معرفة الا انه $x = 0 \notin (\frac{1}{2},2)$.

٣) $f(a) = f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$

$f(b) = f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$

$\therefore f(a) = f(b)$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة $[\frac{1}{2},2]$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(c) = 2 - \frac{2}{c^2}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 0 = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow \frac{\cancel{2}}{c^2} = \cancel{2}$$

$$\Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \mp 1$$

$$c = -1 \notin (\tfrac{1}{2}, 2) \quad , \quad c = 1 \in (\tfrac{1}{2}, 2)$$

c) $f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad , \quad x \in [-1, 1]$

1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود.

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود.

3)

$$f(a) = f(-1) = (1-3)^2 = 4$$

$$f(b) = f(1) = (1-3)^2 = 4$$

$$\therefore f(a) = f(b)$$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,1]$

$$f'(x) = 2(x^2-3)(2x) \Rightarrow f'(c) = 4c(c^2-3)$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 4c(c^2-3) = 0 \Rightarrow c(c^2-3) = 0$$

اما $c = 0 \in (-1,1)$

او $c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \notin (-1,1)$ تهمل

2- جد تقريباً لكل مما يلي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة:

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

لتكن $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$b = 63$

$a = 64$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=12$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$f'(64)=\frac{1}{2}(64)^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{2}(8^{2})^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}(4^{3})^{\frac{-2}{3}}$

$=\frac{1}{2(8)}+\frac{1}{3(4)^2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{3+1}{48}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}=0.082$

$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$

$\cong 12+(-1)(0.083)\cong 12-0.083\cong 11.917$

b) $(1.04)^3+3(1.04)^4$

$b=1.04$

$a=1$

$h=b-a=1.04-1=0.04$

$f(x)=x^3+3x^4 \Rightarrow f(1)=1+3=4$

$f'(x)=3x^2+12x^3 \Rightarrow f'(1)=3+12=15$

$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$

$\cong 4+(0.04)(15)\cong 4+0.60\cong 4.60$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$b=9 \quad , a=8$

$h=b-a=9-8=1$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f(8)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0.5$

$f(x) = x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3} x^{\frac{-4}{3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{-1}{3}(8)^{-\frac{4}{3}}$

$f'(8) = \frac{-1}{3}(2^3)^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2^4}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{-1}{48} = -0.0208$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$

$\cong 0.5 + (1)(-0.0208)$

$\cong 0.5 - 0.0208 \cong 0.4792$

d) $\frac{1}{101}$

$b = 101 \quad , \quad a = 100$

$h = b - a = 101 - 100 = 1$

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$

$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f'(100) = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$

$\cong 0.01 + 1(-0.0001) \cong 0.0099$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$b = 0.50 \quad , \quad a = 0.49$

$h = b - a = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a)=f'(0.49)=\frac{1}{2\sqrt{0.49}}=\frac{1}{2(0.7)}=\frac{1}{1.4}=\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{14}_{7}}=0.714$

$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$

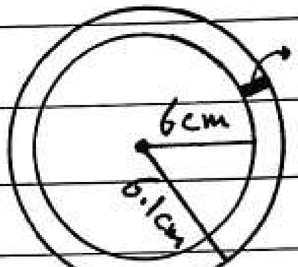
$\cong 0.7+0.01(0.714)$

$\cong 0.7+0.00714\cong 0.70714$

3) كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل   نصف القطر مع الطلاء $= 6+0.1=6.1$

$h=6.1-6=0.1$



حجم الكرة $V=\frac{4\pi}{3}r^3$

$f(x)=\frac{4\pi}{3}x^3$

$f'(x)=4\pi x^2$

$h.f'(a)\cong(0.1)(144\pi)=14.4\pi\ cm^3$ حجم الطلاء

4) كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة.

الحل   حجم الكرة $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\cancel{84}^{21}\cancel{\pi}=\frac{\cancel{4}^{1}}{3}\cancel{\pi}r^3$

$r^3=63 \Rightarrow r=\sqrt[3]{63}$

$b=63,\ a=64,\ h=b-a=63-64=-1$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(a)=f(64)=\sqrt[3]{64}=4$

$$f(x)=(x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow f'(64)=\frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}}$$

$$f'(64)=\frac{1}{3}(4^3)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}(4)^{-2}=\frac{1}{3(4)^2}=\frac{1}{48}=0.0208$$

$$f(x+h)\cong f(a)+h.f'(a)$$

$$\cong 4-0.0208\cong 3.9792\ cm$$

5) مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها.

الحل $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\because h=2r \Rightarrow r=\frac{1}{2}h$

$\therefore V=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h=\frac{1}{12}\pi h^3 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{12}\pi x^3$

$b=2.98\ ,\ a=3$

$h=b-a=2.98-3=-0.02$

$$f(x)=\frac{1}{12}\pi x^3 \Rightarrow f(3)=\frac{9}{4}\pi=2.25\pi$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\pi x^2 \Rightarrow f'(3)=\frac{9}{4}\pi=2.25\pi$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$$

$$\cong 2.25\pi+(-0.02)(2.25\pi)$$

$$\cong 2.25\pi-0.045\pi$$

$$\cong 2.205\pi\ cm^3$$

6) بين ان كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c ؟

a) $f(x) = (x-1)^4 \quad , \quad [-1,3]$

1- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,3]$ لانها كثيرة حدود.

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,3)$ لانها كثيرة حدود.

3- $f(a) = f(-1) = (-1-1)^4 = 16$

$f(b) = f(3) = (3-1)^4 = 16$

$\therefore f(a) = f(b)$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,3]$

$f'(x) = 4(x-1)^3 \Rightarrow f'(c) = 4(c-1)^3$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 4(c-1)^3 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1,3)$

b) $h(x) = x^3 - x \quad , \quad [-1,1]$

1- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود.

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود.

3- $h(a) = h(-1) = -1+1 = 0$

$h(b) = h(1) = 1-1 = 0$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,1]$

$h'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 1$

$h'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

c) $g(x) = x^2 - 3x \quad , \quad [-1,4]$

١ـ الدالة مستمرة على الفترة $[-1,4]$ لانها كثيرة حدود.

2 ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,4)$ لانها كثيرة حدود.

3 ـ $g(a) = g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1+3 = 4$

$g(b) = g(4) = (4)^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$

$\therefore g(a) = g(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,4]$

d) $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \quad , \quad [0,2\pi]$

١ـ الدالة مستمرة على الفترة $[0,2\pi]$.

2 ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,2\pi)$.

3 ـ $f(a) = f(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1+2 = 3$

$f(b) = f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1+2 = 3$

$\therefore f(a) = f(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[1,2\pi]$

$f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x \Rightarrow f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c$

$f'(c) = 0 \Rightarrow [-2\sin 2c - 2\sin c = 0] \div (-2)$

$\Rightarrow \sin 2c + \sin c = 0 \Rightarrow 2\sin c\cos c + \sin c = 0$

$\sin c(2\cos c + 1) = 0$

اما $\sin c = 0 \Rightarrow c = 0 \notin (0,2\pi) , c = \pi \in (0,2\pi) ,$

$c = 2\pi \notin (0,2\pi)$

او $2\cos c + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos c = -1 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ ويكون $\cos c$ سالب في الربع الثاني والثالث

الربع الثاني $\rightarrow c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0,2\pi)$, الربع الثالث $\rightarrow c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0,2\pi)$

7) اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاءها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة، جد قيم c الممكنة.

a) $f(x)=x^3-x-1 \ , \ [-1,2]$ (محلول كمثال)

b) $h(x)=x^2-4x+5 \ , \ [-1,5]$

1- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,5]$ لانها كثيرة حدود.

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,5)$ لانها كثيرة حدود.

$$h(a)=h(-1)=1+4+5=10$$

$$h(b)=h(5)=25-20+5=10$$

$$h'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 2c-4=\frac{10-10}{6}=\frac{0}{6}=0$$

$$2c=4 \Rightarrow c=2 \in (-1,5)$$

c) $g(x)=\frac{4}{x+2} \ , \ x \in [-1,2]$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin [-1,2]$$

1- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,2]$ لان $-2 \notin [-1,2]$

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$

$$g(-1)=\frac{4}{-1+2}=4 \ , \ g(2)=\frac{4}{2+2}=1$$

$$g'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$$

$$g'(c)=\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow \frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{1-4}{3} \Rightarrow \frac{-4}{(c+2)^2}=-1$$

$$(c+2)^2=4 \Rightarrow c+2=\mp 2$$

اما $c+2=2 \Rightarrow c=0 \in (-1,2)$, او $c+2=-2 \Rightarrow c=-4 \notin (-1,2)$

d) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2,7]$

① نفرض $a \in [-2,7]$, $\forall a \in R$

$B(a)=\sqrt[3]{(a+1)^2}$ ∴ الدالة معرفة عند $x=a$

$\lim_{x\to a} \sqrt[3]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{(a+1)^2} \Rightarrow$ ∴ $B(a)=\lim_{x\to a} B(x)$

∴ الدالة مستمرة عند $x=a$ ∴ الدالة مستمرة في $[-2,7]$

② $B(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow B'(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$

$B'(x)=\dfrac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$

نلاحظ ان $B'(x)$ غير معرفة عند $x=-1$

وان $-1 \in [-2,7]$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق $(-2,7)$

∴ لا يمكن تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة .

مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها:

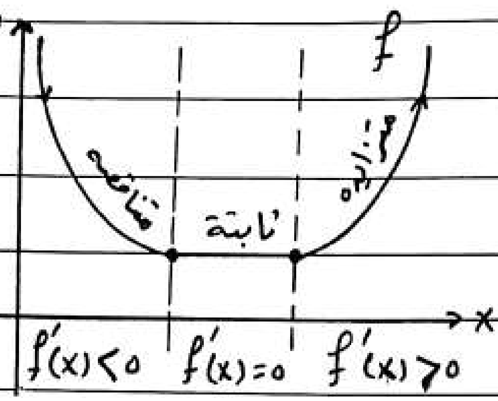
يقال للدالة $f(x)$ بأنها متزايدة على الفترة (a,b) اذا كان $f'(x)>0, \forall x \in (a,b)$.

ويقال للدالة $f(x)$ بأنها متناقصة على الفترة (a,b) اذا كان $f'(x)<0, \forall x \in (a,b)$.

النقاط الحرجة: لتكن f دالة ، ولتكن النقطة $p(c,f(c))$ من نقط الدالة اذا حققت احد الشرطين:

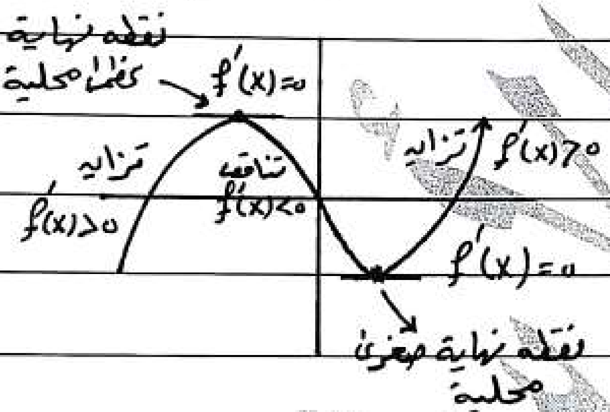
1) $f'(c)=0$ 2) $f'(c)$ غير موجودة

وسنقتصر في دراستنا على النوع الاول



اذا كان المماس للمنحني ميله موجب فالدالة في وضع تزايد.
واذا كان المماس للمنحني ميله سالب فالدالة في وضع تناقص

لايجاد النقاط الحرجة وبيان نوعها للدالة f نتبع التالي:



نجد $f'(x)$ ونحل المعادلة $f'(x)=0$
[إن امكن] ، ونجد قيم x الحرجة
وليكن $x=c$ احد هذه القيم
اولاً: اذا كانت $f'(x)$ موجبة لكل x تنتمي الى جوار c الايسر
وسالبة لكل x تنتمي الى جوار c الايمن فان الدالة لها نقطة نهاية عظمى محلية عند $x=c$

اشارة $f'(x)$ $+ + + + \overset{c}{|} - - - -$
تزايد تناقص

ثانياً: اذا كانت $f'(x)$ سالبة لكل x تنتمي الى جوار c الايسر وموجبة لكل x تنتمي الى جوار c الايمن فأن الدالة لها نقطة نهاية صغرى محلية.

$- - - - \overset{c}{|} + + + +$
تناقص تزايد

ثالثاً: اذا كانت $f'(x)$ لها نفس الاشارة على يسار ويمين c فعند $x=c$ مجرد نقطة حرجة لا عظمى ولا صغرى.

اشارة $f'(x)$ $+ + + + + \overset{c}{|} + + + + +$
تزايد تزايد

$- - - - - \overset{c}{|} - - - - -$
تناقص تناقص

مثال / جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة وبين نوعها لكل من الدوال الاتية:

1) $f(x) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$- - - - \;|\; + + +$ إشارة $f'(x)$

تناقص ↘ ↗ تزايد

f متناقصة في $\{x : x < 1\}$

f متزايدة في $\{x : x > 1\}$

$x = 1 \Rightarrow$ نعوض في الاصلية $\Rightarrow y = f(1) = 1 - 2 = -1$

∴ النقطة $(1, -1)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية.

2) $f(x) = 2 + 8x - x^2$

$f'(x) = 8 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$

$- - - - \;\overset{4}{|}\; - - - - -$ إشارة $f'(x)$

↗ تزايد ↘ تناقص

f متزايدة في $\{x : x < 4\}$

f متناقصة في $\{x : x > 4\}$

$x = 4 \Rightarrow y = f(4) = 2 + 32 - 16 = 18$

∴ النقطة $(4, 18)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية.

3) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$+ + + \;\overset{0}{|}\; + + +$ إشارة $f'(x)$

↗ تزايد ↗ تزايد

f متزايدة في $\{x : x < 0\}$ و $\{x : x > 0\}$

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0)^3 = 0 \Rightarrow$ ∴ $(0, 0)$ مجرد نقطة حرجة لا عظمى ولا صغرى

4) $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

اما $x = 0$ او $x = -2$

تزايد تناقص تزايد

اشارة $f'(x)$: $+ + + \overset{-2}{|} - - - \overset{0}{|} + + +$

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$, $\{x : x < -2\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(-2, 0)$

$x = -2 \Rightarrow y = f(-2) = 4 \Rightarrow$ نقطة نهاية عظمى محلية $(-2, 4)$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ نقطة نهاية صغرى محلية $(0, 0)$

ملاحظة / اذا كانت الدالة كسرية بعد الاشتقاق ومساواتها للصفر نصفر البسط ونجد قيم x واذا كان غير ممكن فنصفر المقام لايجاد قيمة x وتكون فجوة ولا توجد نقاط حرجة ولا نهايات.

5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$$

تناقص تزايد تناقص

اشارة $f'(x)$: $- - - \underset{-2}{|} + + + + + \underset{2}{|} - - -$

f متناقصة في $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < -2\}$

f متزايدة في الفترة $(-2, 2)$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \dfrac{-4}{4+4} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ نقطة نهاية صغرى محلية $(-2, \frac{-1}{2})$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{4}{4+4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ نقطة نهاية عظمى محلية $(2, \frac{1}{2})$

6) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0$

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$

$- - - - \; 0 \; + + +$

تناقص ↘ ↗ تزايد

f متزايدة في $\{x : x>0\}$

f متناقصة في $\{x : x<0\}$

ولا تمتلك نقطة حرجة ولا نهايات .

7) $f(x)=5x$

$f'(x)=5$

$f'(x)\neq 0$ (لان لو كانت $f'(x)=0$ سيكون $5=0$ وهذا غير ممكن)

$f'(x)>0$

∴ الدالة f متزايدة في مجالها ولا توجد نهايات

8) $f(x)=-3x$

$f'(x)=-3$

$f'(x)\neq 0$

$f'(x)<0$

∴ الدالة f متناقصة في مجالها ولا توجد نهايات

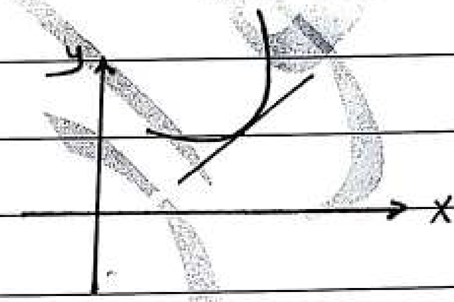
9) $f(x)=x^3+12x \Rightarrow f'(x)=3x^2+12$

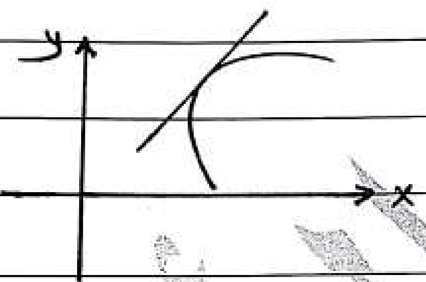
$\Rightarrow f'(x)\neq 0 \Rightarrow 3x^2+12\neq 0 \Rightarrow x^2+4\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -4$

$\therefore f'(x)>0, \forall x\in R \Rightarrow$ ∴ الدالة متزايدة في R ولا تمتلك نهايات

مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فيقال عن الدالة f بأنها محدبة اذا كانت f' متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت f' متزايدة خلال تلك الفترة.





منحني مقعر والمشتقة متزايدة منحني محدب والمشتقة متناقصة

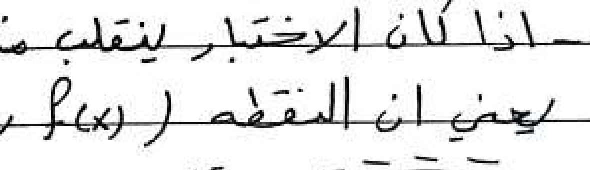
ملاحظة / المنحني مقعر في (a,b) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع فوق جميع مماساته في (a,b)

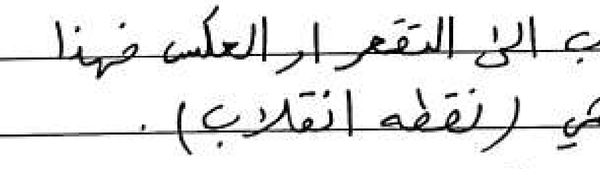
والمنحني محدب في (a,b) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع تحت جميع مماساته في (a,b)

مبرهنة / اذا كانت f معرفة في $[a,b]$ ولها مشتقة اولى وثانية على (a,b) فإنها تكون مقعرة على (a,b) اذا حققت الشرط الاتي: $f''(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$

وتكون محدبة على (a,b) اذا حققت الشرط الاتي: $f''(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$

- اذا كان الاختبار ينقلب من التحدب الى التقعر او العكس فهنا يعني ان النقطة $(x, f(x))$ هي (نقطة انقلاب).





كيفية ايجاد نقطة الانقلاب :

نجد $f'(x)$ ثم نجد $f''(x)$ ثم نجعل $f''(x)=0$ {ان امكن} ونجد قيم x ولتكن $x=c$ احد هذه القيم ثم نختبر اشارة $f''(x)$

اولاً: اذا كانت $f''(x)$ موجبة لكل x تنتمي الى جوار c الايسر وسالبة لكل x تنتمي الى جوار c الايمن [أو بالعكس] ؛ فان f لها نقطة انقلاب عند $x=c$

اشارة $f''(x)$: $- - -$ تحدب | c | $+ + +$ تقعر

اشارة $f''(x)$: $+ + +$ تقعر | c | $- - -$ تحدب

ثانياً: اذا كانت $f''(x)$ لها نفس الاشارة في جوار c الايمن والايسر فان f ليست لها نقطة انقلاب

اشارة $f''(x)$: $+ + +$ تقعر | c | $+ + +$ تقعر

اشارة $f''(x)$: $- - -$ تحدب | c | $- - -$ تحدب

مثال/ جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب ان وجدت لكل من الدوال الاتية :

1) $f(x)=x^3-3x^2$

$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$

اشارة $f''(x)$: $- - -$ تحدب | 1 | $+ + +$ تقعر

f محدبة في $\{x : x<1\}$

f مقعرة في $\{x : x>1\}$

$x=1 \Rightarrow y=f(1)=1-3=-2$

$\therefore$ نقطة الانقلاب $(1,-2)$

2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0$

$12x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

اشارة $f''(x)$: $+++$ -1 $---$ $+1$ $+++$

تقعر تحدب تقعر

f مقعرة في $\{x : x < -1\}$, $\{x : x > 1\}$

f محدبة في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = -4$, $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = -4$

∴ نقطتي الانقلاب $(-1, -4)$, $(1, -4)$

3) $f(x) = 4 - (x+2)^4$

$f'(x) = -4(x+2)^3$

$f''(x) = -12(x+2)^2 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow -12(x+2)^2 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

اشارة $f''(x)$: $---$ -2 $---$

تحدب تحدب

f محدبة في $\{x : x < -2\}$, $\{x : x > -2\}$

∴ f لا تمتلك نقطة انقلاب عند $x = -2$ لأن الدالة محدبة على جهتيها .

4) $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(x) \neq 0$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in R$

∴ f مقعرة في R , ولا تمتلك نقطة انقلاب

5) $f(x) = -x^2$

$f'(x) = -2x \Rightarrow f''(x) = -2$

$f''(x) \neq 0 \quad , \quad f''(x) < 0 \quad \forall x \in R$

f محدبة في R ولا تمتلك نقطة انقلاب

6) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(x) = x + x^{-1}$

$f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

اشارة $f''(x)$: $\overset{---}{\longleftarrow} \overset{0}{\circ} \overset{+++}{\longrightarrow}$ (تحدب | تقعر)

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

ولا توجد نقطة انقلاب

7) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6$

$f''(x) \neq 0 \Rightarrow 12x^2 + 6 \neq 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 \neq 0$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in R$

$\therefore$ الدالة f مقعرة في R ولا تمتلك نقطة انقلاب

إيجاد قيم الثوابت :

ملاحظات : ١- اذا اعطى في السؤال نقطة (حرجة او عظمى او صغرى) ؛ فنعوض هذه النقطة في المنحني ، وان $f'(x)=0$ ثم نعوض قيمة x ونكون المعادلة .

2- اذا اعطى او ذكر نقطة انقلاب ؛ فنعوض النقطة في المنحني ، وان $f''(x)=0$ ثم نعوض قيم x ونكون المعادلة .

3- اذا ذكر التماس : ١- مستقيم يمس منحني ؛ فإن ميل المنحني يساوي ميل المستقيم :

ميل المستقيم ($m = -\left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right)$

ميل المنحني $f'(x) = y'$

2- منحني يمس منحني : متماسان

$f'(x) = g'(x)$

وان النقطة تحقق معادلة المنحني .

4- اذا اعطى عبارة (دالة لها نقطة حرجة او نهاية عظمى او نهاية صغرى او نقطة انقلاب) قيمتها تساوي عدد ثابت فان هذا العدد الثابت يمثل الاحداثي y للنقطة فتصبح النقطة بالشكل (العدد الثابت , x) .

5- معادلة المماس تحتاج الى ميل ونقطة (x_1, y_1)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

6- نقطة تنتمي لمحور السينات معناها $y=0$

نقطة تنتمي لمحور الصادات معناها $x=0$

مثال/ منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2$ له نقطة انقلاب هي $(1,2)$ جد $a,b\in R$.

<u>الحل</u> $(1,2)$ تحقق منحني الدالة

$2=a(1)^3+b(1)^2$

$2=a+b$ ... ①

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(x)=0 \Rightarrow 0=6ax+2b$

$\because x=1 \Rightarrow [0=6a+2b]\div 2$

$3a+\cancel{b}=0$ ... ②

$\mp a \mp \cancel{b}=\mp 2$ ... ①

بالطرح

$2a=-2 \Rightarrow a=-1 \rightarrow$ ① نعوض في $\rightarrow 2=-1+b$

$\Rightarrow b=3$

مثال/ اذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ جد قيمة $a,b\in R$ وبين نوع النقطة.

<u>الحل</u> $(2,6)$ تحقق منحني الدالة

$6=a-(2-b)^4$ ... ①

$f'(x)=-4(x-b)^3 \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow 0=-4(x-b)^3 \quad , \quad x=2 \Rightarrow [0=-4(2-b)^3]\div(-4)$

$0=(2-b)^3 \Rightarrow 0=2-b \Rightarrow b=2$ نعوضها في ①

$\Rightarrow 6=a-(2-2)^4 \Rightarrow a=6$

لبيان نوع النقطة الحرجة: $f'(x)=-4(x-b)^3=-4(x-2)^3$

$\overset{++++}{\nearrow}\ 2\ \overset{----}{\searrow}$ اشارة $f'(x)$ $\Rightarrow$ $\therefore (2,6)$ عظمى محلية

مثال/ اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$

الحل $(-1,5)$ تحقق معادلة المنحني

$$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$$

$$5=-a+b-c \quad ---1$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad , \quad f'(x)=0 \ , \ x=-1$$

$$0=3a(-1)^2+2b(-1)+c$$

$$0=3a-2b+c \quad ---2$$

$$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow 0=6a(1)+2b$$

$$6a+2b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow b=-3a \quad ---3$$

نحل 1 و 2 آنياً

$$5=-a+b-\cancel{c} \quad ---1$$

$$0=3a-2b+\cancel{c} \quad ---2$$

بالجمع

$$5=2a-b \quad ---4$$

نعوض 3 في 4 :

$$5=2a-(-3a) \Rightarrow 5=5a \Rightarrow a=1$$ نعوضها في 3

$$b=(-3)(1)=-3$$

نعوض a , b في 1 :

$$5=-1-3-c \Rightarrow c=-9$$

مثال/ عين قيمتي الثابتين a , b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى عند $x = -1$ ونهاية صغرى عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب

الحل $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$x = -1 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0$ --- ①

$x = 2 \Rightarrow \mp 12 \mp 4a \mp b = 0$ --- ②

بالطرح

$-9 - 6a = 0 \Rightarrow 9 = -6a \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$

نعوض a في ① $\rightarrow 3 - 2\left(\frac{-3}{2}\right) + b \Rightarrow 3 + 3 + b = 0 \Rightarrow b = -6$

لايجاد نقطة الانقلاب :

$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3x - 6$

$y'' = 6x - 3 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0 \Rightarrow \cancel{6}^{2}x = \cancel{3}^{1}$

$x = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-13}{4}$

$\overset{- - - -}{\longleftarrow} \frac{1}{2} \overset{+ + + +}{\longrightarrow}$ اشارة $f''(x)$

تحدب تقعر

$\therefore$ نقطة الانقلاب $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$

ملاحظة / في بعض الاسئلة تكتب النقاط الحرجة ونقاط الانقلاب كالاتي :

$f(2) = 6$ نقطة حرجة ⟸ هذا يعني ان النقطة $(2, 6)$ حرجة

$f(1) = 2$ نقطة انقلاب ⟸ هذا يعني ان النقطة $(1, 2)$ انقلاب .

مثال/ اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعراً في $\{x: x<1\}$ ومحدباً في $\{x: x>1\}$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ جد قيمة $a,b,c \in R$.

الحل $f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$, $f''(x)=0 \Rightarrow 0=6ax+2b$

$x=1 \Rightarrow 6a+2b=0$ ...... ①

النقطة $(3,1)$ تحقق المنحني

$1=a(3)^3+b(3)^2+c$

$27a+9b+c=1$ ...... ②

∵ يمس المستقيم $y+9x=28$

$m=-\left(\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}\right)=\frac{-9}{1} \Rightarrow m_{\text{المستقيم}}=-9$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$m=f'(x)$

$-9=3ax^2+2bx$

$x=3 \Rightarrow -9=3a(3)^2+2b(3)$

$[27a+6b=-9] \div 3 \Rightarrow 9a+2b=-3$ ...... ③

$\mp 6a \mp 2b=0$ ...... ① بالطرح

$3a=-3 \Rightarrow a=-1$

نعوض a في ① $\rightarrow 6(-1)+2b=0 \Rightarrow b=3$

نعوض a,b في ② $\rightarrow 27(-1)+9(3)+c=1 \Rightarrow c=1$

مثال/ اذا كان للدالة $f(x)=ax^3+3x^2+c$ نقطه انقلاب عند $x=1$ ونهاية عظمى محليه تساوي 8 جد قيمة a, c.

الحل $f'(x)=3ax^2+6x \Rightarrow f''(x)=6ax+6$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6ax+6=0$

$x=1 \Rightarrow 6a+6=0 \Rightarrow 6a=-6 \Rightarrow a=-1$

∴ للدالة نهاية عظمى تساوي 8 ⇐ ∴ هي الاحداثي الصادي

اي $(x, 8)$ هي نقطه النهاية العظمى

$f'(x)=-3x^2+6x \quad , \quad f'(x)=0$

$-3x^2+6x=0 \Rightarrow -x^2+2x=0 \Rightarrow x(-x+2)=0$

اما $x=0$ او $x=2$

$\overleftrightarrow{\;---\overset{0}{|}+++\overset{2}{|}---\;}$ اشارة $f'(x)$

∴ f لها نهاية عظمى عند $x=2$

∴ $(2, 8)$ هي نقطه النهاية العظمى وهي تحقق معادلة المنحني:

$8=-8+12+c \Rightarrow c=4$

مثال/ اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محليه تنتمي للدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ جد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني في نقطه انقلابه.

الحل $f'(x)=6x-3x^2 \quad , \quad f'(x)=0$

$6x-3x^2=0 \Rightarrow 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0$

اما $x=0$, او $x=2$

$\overleftrightarrow{\;---\overset{0}{|}+++\overset{2}{|}---\;}$ اشارة $f'(x)$

∴ f لها نهاية صغرى عند $x=0$ ⇐ ∴ (0,6) هي نقطة نهاية عظمى
(0,6) تحقق معادلة المنحني :

$6 = 0 - 0 + c \Rightarrow c = 6$

$f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6 - 6x \quad , \quad f''(x) = 0$

$6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 3 - 1 + 6 = 8$

$\xleftarrow{+++ \; 1 \; ---}$ اشارة f'' ∴ (1,8) نقطة الانقلاب
تقعر تحدب

الميل عند أية نقطة $f'(x) = 6x - 3x^2$

الميل عند (1,8) $f'(1) = 6 - 3 = 3 = m$

معادلة المماس $\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 8 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 3x - 3$

$\Rightarrow 3x - y + 5 = 0$

مثال / المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند (2,-1) وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$ وما نوع النهاية .

الحل النقطة (2,-1) تحقق المنحني

$-1 = a(2)^2 + b(2) + c$

$4a + 2b + c = -1 \quad --- ①$

$m = -\left(\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}\right) = -\left(\frac{3}{-1}\right) = 3$

$m = f'(x)$

$3 = 2ax + b$

$x = 2 \Rightarrow 4a + b = 3 \quad --- ②$

$y' = 2ax + b \quad , \quad y' = 0$

$2ax + b = 0$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a(\frac{1}{2}) + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad ---- (3)$

$\mp 4a \mp b = \mp 3 \quad ---- (2)$ بالطرح

$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$

(3) نعوض a في $\rightarrow a + b = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

(1) نعوض a, b في $\rightarrow 4(1) + 2(-1) + c = -1 \Rightarrow c = -3$

نوع النهاية :

$y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2 - x - 3$

$y' = 2x - 1 \quad , \quad y' = 0$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$- - - - - \underset{}{\overset{\frac{1}{2}}{|}} + + +$

$\searrow$ صغرى $\nearrow$

$y = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1 - 2 - 12}{4} = \frac{-13}{4}$

$\therefore$ $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$ نقطة نهاية صغرى محلية

مثال / اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ، $g(x)=1-12x$ وكان كل من f و g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1,-11)$ فجد قيمة الثوابت $a,b,c \in R$.

الحل

$(1,-11)$ تحقق f

$-11=a(1)^3+b(1)^2+c(1) \Rightarrow a+b+c=-11$ --- ①

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$, $f''(x)=0$

$[6ax+2b=0]\div 2 \Rightarrow 3ax+b=0$

$\because x=1 \Rightarrow 3a+b=0$ --- ②

ميل المنحني f = ميل المنحني g

$g'(x)=f'(x)$

$f'(x)=3ax^2+2b+c$

$g'(x)=-12$

$\therefore 3ax^2+2b+c=-12$, $x=1$

$3a+2b+\cancel{c}=-12$ --- ③

$\mp a \mp b \cancel{\mp c}=\pm 11$ --- ①

بالطرح

$-2a-\cancel{b}=1$ --- ④

$3a+\cancel{b}=0$ --- ②

بالجمع

$a=1$

② نعوض $a=1$ في $\rightarrow 3(1)+b=0 \Rightarrow b=-3$

① نعوض a,b في $\rightarrow 1-3+c \Rightarrow -2+c=-11$

$c=-9$

طريقة ثانية لفحص النهايات ومعرفة نوع النقطة الحرجة باستخدام المشتقة الثانية:

اولاً: نجد $f'(x)$ ثم نجعل $f'(x)=0$ ؟ ان امكن ؟ ونحل المعادلة ولتكن $x=c$ احد حلول المعادلة

ثانياً: نجد $f''(x)$ ونعوض c فيها ونلاحظ مايلي:

1 اذا كانت $f''(c)<0$ فإن f لها نهاية عظمى عند $x=c$

2 اذا كانت $f''(c)>0$ فإن f لها نهاية صغرى عند $x=c$

3 اذا كانت $f''(c)=0$ فإن هذه الطريقة فاشلة فنرجع للطريقة الاولى

امثلة:

1) $f(x)=2x^3-6x$

$f'(x)=6x^2-6$, $f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6=0$

$6x^2=6 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

$f''(x)=12x$

$f''(1)=12>0$ ∴ عند $x=1$ صغرى محلية

$f''(-1)=-12<0$ ∴ عند $x=-1$ عظمى محليه

$x=1 \Rightarrow f(1)=-4 \Rightarrow (1,-4)$ نقطة نهاية صغرى محليه

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=4 \Rightarrow (-1,4)$ نقطة نهاية عظمى محليه

2) $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$, $f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3=0 \Rightarrow x=0$

$f''(x)=12x^2 \Rightarrow f''(0)=0$ فشلت هذه الطريقة فترجع الى الطريقة الاولى

اشارة $f'(x)$: $- - - \overset{0}{|} + + +$

∴ عند $x=0$ صغرى محلية

$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة نهاية صغرى محليه

3) $f(x) = 3 - x^2$

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0$

∴ عند $x=0$ نهاية عظمى محلية

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow$ $(0,3)$ نقطة نهاية عظمى محلية ∴

مثال / لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$, $a \in R/\{0\}$, $x \neq 0$

الحل

$f(x) = x^2 - ax^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2x + ax^{-2} = 2x + \frac{a}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{a}{x^2} = 0 \,]\cdot x^2 \Rightarrow 2x^3 + a = 0$

$\Rightarrow 2x^3 = -a \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

نستخدم الطريقة الثانية لفحص النهايات:

$f''(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$

∴ للدالة نهاية صغرى عند $x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

∴ ليس للدالة نهاية عظمى مهما كانت قيمة a

مثال / لتكن $x \neq 0$, $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$

أ- جد قيمة a علماً ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$.

ب- بين ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

الحل $f(x) = x^2 + a x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2x - a x^{-2}$

$f''(x) = 2 + 2a x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$

$f''(x) = 0 \;,\; x = 1 \Rightarrow 0 = 2 + \frac{2a}{(1)^3}$

$2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^2 - x^{-1}$

$f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow [0 = 2x + \frac{1}{x^2}] \cdot x^2$

$0 = 2x^3 + 1 \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$ نستخدم الطريقة الثانية لفحص النهايات

$f''(x) = 2 - 2x^{-3}$

$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\frac{-1}{2}} = 2 + 4$

$f''(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}) = 6 > 0$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

∴ f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

ملاحظة / اي سؤال يرد فيه [قوس مجموعة] $a \in \{$
والمطلوب ايجاد قيمة a ، هذا يعني نختار a من داخل قوس
المجموعة فقط وفق شرط معين ويذكر هذا الشرط في السؤال.

مثال / لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $b \in R$ ، $a \in \{-4, 8\}$
جد قيمة a اذا كانت : أ- الدالة f محدبة. ب- الدالة f مقعرة.

الحل $f'(x) = 2ax - 6 \Rightarrow f''(x) = 2a$

أ ∵ الدالة f محدبة

∴ يجب ان يكون $f''(x) < 0$

$[2a < 0] \div 2 \Rightarrow a < 0$

∴ نختار $a = -4$

ب ∵ الدالة f مقعرة

∴ يجب ان تكون $f''(x) > 0$

$[2a > 0] \div 2 \Rightarrow a > 0$

∴ نختار $a = 8$

تمارين $(3-4)$ [جميعها موجود في الامثلة]

رسم المخطط البياني للدالة :

أولاً : اوسع مجال الدالة :

١- اذا كانت الدالة كثيرة حدود [غير كسرية وغير جذرية] فإن اوسع مجال لها هو R .

٢- اذا كانت الدالة نسبية (كسرية) فنجعل المقام = صفر ان امكن ونجد قيم x التي تجعل المقام = صفر

أمثلة /

$1-\ f(x)=x^2+4x+3 \Rightarrow$ اوسع مجال $=R$

$2-\ f(x)=\frac{1}{x+4} \Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow$ اوسع مجال $=R\setminus\{-4\}$

$3-\ f(x)=\frac{1}{x^2+4} \Rightarrow x^2+4\neq 0 \Rightarrow$ اوسع مجال $=R$

ثانياً : نقاط التقاطع مع المحورين :

١- لايجاد نقطة التقاطع مع محور السينات فنجعل $y=0$ ونجد قيم x .

٢- لايجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات فنجعل $x=0$ ونجد قيم y .

م/ يمكنك الاستغناء عن $y=0$ اذا وجدت صعوبة في الحل وتكتفي بجعل $x=0$.

أمثلة /

$1)\ f(x)=x^2+4x+3$

مع السينات $\Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow (x+3)(x+1)=0$

اما $x=-3$ أو $x=-1 \Rightarrow$ نقاط التقاطع مع محور السينات $(-1,0)$, $(-3,0)$.

مع الصادات $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ نقطة تقاطع مع الصادات $(0,3)$

ملاحظة / في اي سؤال عندما تظهر $(0,0)$ كنقطة تقاطع مع السينات فهي ستظهر حتماً مع الصادات .

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

مع السينات $\Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \Rightarrow x^2-1=0$

$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

∴ $(1,0)$, $(-1,0)$ نقاط تقاطع مع السينات

مع الصادات $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{1}=-1$

∴ $(0,-1)$ نقطة تقاطع مع الصادات

3) $f(x)=\frac{1}{x}$

مع السينات $\Rightarrow y \neq 0$ (هذا غير ممكن لانه سيكون $1=0$)

∴ لا تقاطع مع السينات

مع الصادات $\Rightarrow x \neq 0$ (لانه سيجعل المقام = صفر)

∴ لا تقاطع مع الصادات

4) $f(x)=x^4+2$

عند $x=0 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$ مع الصادات

عند $y=0 \Rightarrow x^4+2 \neq 0$ لا يوجد تقاطع مع السينات

ثالثاً: التناظر:

١- التناظر حول محور الصادات $\boxed{f(-x)=f(x)}$ $\forall x \in R \ \exists (-x) \in R$

2- التناظر حول نقطة الاصل $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ $\forall x \in R \ \exists (-x) \in R$

أمثلة/

1) $f(x)=x^4+3x^2$

$f(-x)=(-x)^4+3(-x)^2=x^4+3x^2$

∴ $f(-x)=f(x)$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات

فردي فرديا

2) $f(x) = x^3 - 2x^5$

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^5$

$= -x^3 + 2x^5$

$f(-x) = -f(x)$ ∴

∴ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

ملاحظة/ يمكن بحث التناظر في الدوال غير النسبية كما يلي:

١- اذا كانت اسس x زوجية فالتناظر حول محور الصادات.

2- اذا كانت اسس x فردية فالتناظر حول نقطة الاصل.

3- اذا كانت اسس x مختلفة فلا يوجد تناظر.

فردي فردي زوجيا

3) $f(x) = x^3 + 2x + 3$

الحد الخالي من x ما فيحتوي على x^0 والصفر زوجيا

$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) + 3$

$= -x^3 - 2x + 3$

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

∴ لا تناظر لمنحني الدالة

4) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

مجال الدالة $R / \{-1\}$

∴ ١- لا ينتمي لمجال الدالة

ولكن ١+ ينتمي لمجال الدالة

∴ لا تناظر لمنحني الدالة.

ملاحظة/ اذا كان مجال الدالة $R/\{a\}$ حيث a عدد غير الصفر فان منحني الدالة غير متناظر لان a لا ينتمي لمجال الدالة ولكن a- ينتمي لمجال الدالة.

5) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

لاحظ: مجال الدالة في هذا السؤال R فلا تنطبق الملاحظة الاخيرة عليه.

$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = f(x)$

∴ منحني الدالة متناظر مع محور الصادات

6) $f(x)=\frac{1}{x}$ مجال الدالة في هذا السؤال $R/\{0\}$ ايضاً لا نطبق الملاحظة الاخيرة لانها تستثني الصفر.

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$

∴ منحني الدالة متناظر مع نقطة الاصل

ملاحظة / وهنالك طريقة تستخدم في اثبات عدم التناظر كما في المثال الاتي:

$f(x)=(1+x)^3$

لتكن $x=1 \Rightarrow f(-1)=(1-1)^3=0$

$\Rightarrow f(1)=(1+1)^3=8$

$\Rightarrow f(-1)\neq f(1)$ ∴ $f(-x)\neq f(x)$

∴ لا تناظر مع محور الصادات

$f(-1)=(1-1)^3=0$

$-f(1)=-(1+1)^3=-8$

$\Rightarrow f(-1)\neq -f(1)$ ∴ $f(-x)\neq -f(x)$

∴ لا تناظر مع نقطة الاصل

رابعاً : المحاذيات:

١- توجد في بعض الدوال النسبية والدوال غير النسبية لا تحتوي على محاذيات.

٢- منحني الدالة لا يقطع ولا يمس ولا يوازي المستقيم المحاذي بل يقترب منه.

٣- المستقيمات المحاذية نوعان ((في حدود دراستنا)):

$x=$ عدد حقيقي هو مستقيم محاذي عمودي (شاقولي) موازي لمحور الصادات ويمكن ايجاده بجعل المقام = صفر ان امكن.

عدد حقيقي = y هو مستقيم محاذي افقي موازي لمحور السينات ويمكن ايجاده بجعل المقام = صفر وذلك بعد وضع x بدلالة y .

أمثلة/

1) $f(x) = (x-1)^3 + 1$

لا محاذيات

(لان المحاذيات فقط في الدالة النسبية)

2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

نجعل المقام $= 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ محاذي عمودي

$f(x) = y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1$

$yx - x = -y - 1$ بوضع الحدود التي تحتوي على x في جهة واحدة

$x(y-1) = -y - 1$ x مشترك

$x = \frac{-y-1}{y-1} \Rightarrow$ نضع المقام = صفر $\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ محاذي افقي

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$x^2 + 1 \neq 0$

∴ لا محاذي عمودي

$f(x) = y = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 + y = x^2$

$yx^2 - x^2 = -y$

$x^2(y-1) = -y \Rightarrow x^2 = \frac{-y}{y-1}$

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ محاذي افقي

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

$x = 0$ محاذي عمودي

محاذي افقي $f(x) = y = \frac{1}{x} \Rightarrow yx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 0$

طريقة ثانية لايجاد المحاذي الافقي:

نعوض $y =$ حيث هذا العدد هو حاصل قسمة معامل الحد الاكبر درجة من البسط على معامل الحد الاكبر درجة من المقام بشرط تساوي الدرجتين.

1) $f(x) = \frac{3x-4}{x+2} \Rightarrow y = \frac{3}{1} = 3$ المحاذي الافقي

2) $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x-5} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+3x+3}{0x^2+x-5}$ (تساوي الدرجتين)

$y = \frac{1}{0} \Rightarrow y =$ غير معرف

3) $f(x) = \frac{5}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{0x+5}{x} \Rightarrow y = \frac{0}{1} = 0$ المحاذي الافقي

طريقة ثالثة لايجاد المحاذي الافقي: (خارج المنهج)

اذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإن $y = 0$ هو المحاذي الافقي، اما اذا كانت درجة البسط اكبر او تساوي درجة المقام حول الدالة للصيغة: $f(x) = h(x) + \frac{F(x)}{g(x)}$

شرط درجة البسط اقل من درجة المقام فيكون $y = h(x)$ هو المحاذي ويكون هذا المحاذي افقياً اذا كانت $h(x)$ من الدرجة صفر او يمثل محاذي مائل اذا كانت من الدرجة الاولى و يمثل محاذي على شكل منحني اذا كان $g(x)$ من الدرجة الثانية فما فوق.

1) $f(x) = 3 - \frac{2}{x+1} \Rightarrow y = 3$ محاذي افقي

2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{2x+2-3}{x+1}$

$f(x) = \frac{2(x+1)-3}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$

$y = 2$ محاذي افقي

3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f(x) = 0 + \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow y = 0$ محاذي افقي

طريقة رابعة لايجاد المحاذي الافقي (خارج المنهج)

عن طريق اخذ الغاية حيث x تقترب من اللانهاية

$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-3}$

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{2}{x}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{3}{x}}$

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$

$y = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{3}{\infty}} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow y = 1$ المحاذي الافقي

لان $\frac{a}{\infty} = 0$ حيث $a \neq 0$, $a \neq \mp\infty$

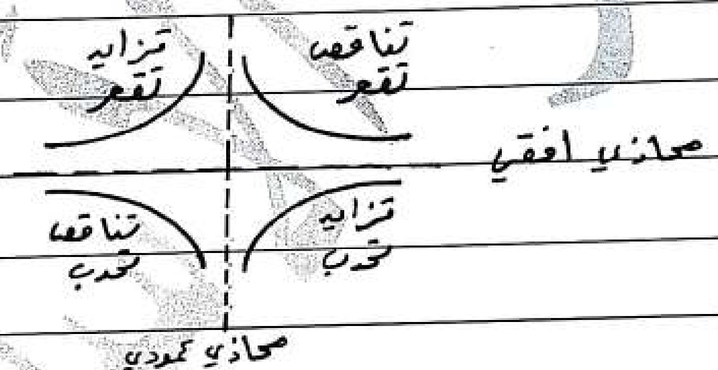
ملاحظات مفيده : (الدالة التي تحوي محاذيين افقي وشاقولي) :

١ـ اذا كانت الدالة متزايده في مجالها فالرسم اقواسه في الربعين الثاني والرابع في ارباع المحاذيات .

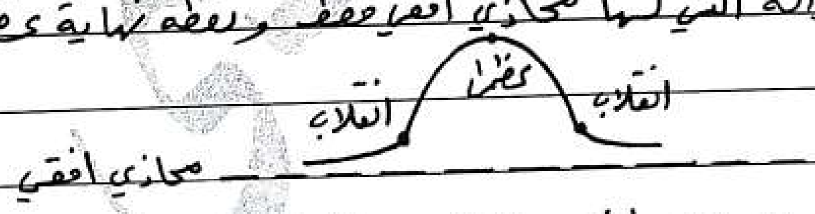
2ـ اذا كانت الدالة متناقصة في مجالها فالرسم اقواسه في الربعين الاول والثالث في ارباع المحاذيات .

3ـ اذا كانت الدالة مقعره في مجالها فنرسم اقواسه في الربعين الاول والثاني في ارباع المحاذيات .

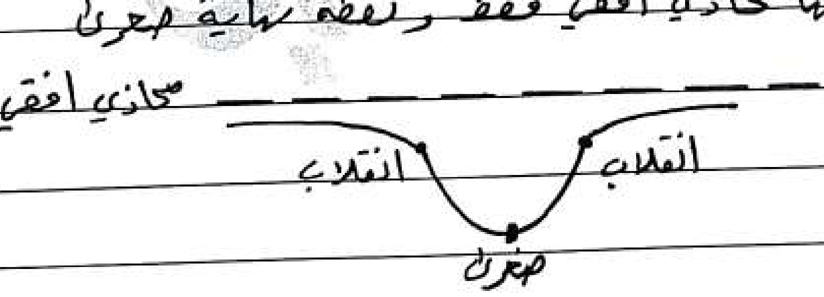
4ـ اذا كانت الدالة محدبة في مجالها فنرسم اقواسه في الربعين الثالث والرابع من ارباع المحاذيات .



ملاحظه / ١ـ الدالة التي لها محاذي افقي فقط ونقطة نهاية عظمى



2ـ الدالة التي لها محاذي افقي فقط ونقطة نهاية صغرى



لرسم الدالة نجد ما يلي :

1- مجال الدالة.

2- نقاط التقاطع مع المحورين.

3- التناظر.

4- المحاذيات.

5- مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها.

6- مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب.

7- نقاط مساعدة اضافية عند الحاجة.

مثال / باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم الدالة $f(x)=x^5$

1) مجال الدالة هو R.

2) نقاط التقاطع مع المحورين:

مع السينات $y=0 \Rightarrow 0=x^5 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0)=(0)^5 \Rightarrow (0,0)$

3) التناظر:

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$$

∴ منحني الدالة متناظر مع نقطة الاصل

4) المحاذيات: لا توجد لأن الدالة ليست نسبية.

5) النهايات العظمى والصغرى:

$f(x)=x^5$

$f'(x)=5x^4$, $f'(x)=0 \Rightarrow 0=5x^4 \Rightarrow x=0$

اشارة $f'(x)$: $+\ +\ +\ 0\ +\ +\ +$

f متزايدة في كل من $\{x: x<0\}$ و $\{x: x>0\}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow$ $(0,0)$ نقطة حرجة لا عظمى ولا صغرى

6) التقعر والتحدب والانقلاب: $f''(x) = 20x^3$

$[20x^3 = 0] \div 20 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

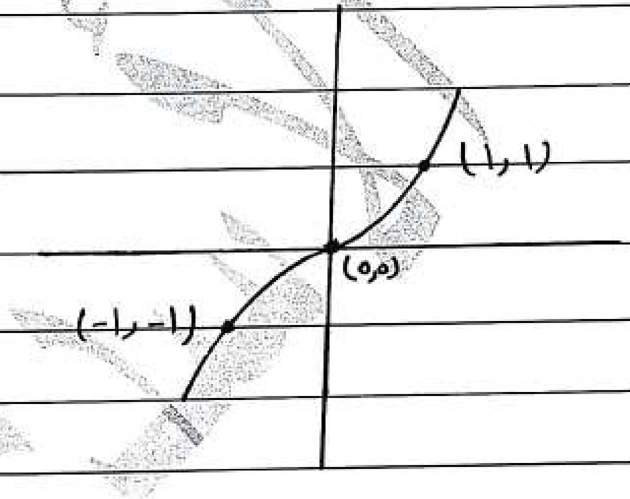
اشارة $f''(x)$ $\overset{\text{تحدب}}{- - -} \overset{0}{|} \overset{\text{تقعر}}{+ + +}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$ ومقعرة في $\{x : x > 0\}$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة انقلاب $\Leftarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0$

7)

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
-1	-1	(-1, -1)



مثال / ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

<u>الحل</u> 1) اوسع مجال $= R$

2) نقاط التقاطع:

مع السينات $y = 0 \Rightarrow$

$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ [غير مطلوب تحليلها في المنهج]

مع الصادات $x = 0 \Rightarrow y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (0, 4)$

3) التناظر:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 4 = -(x^3 + 3x^2 - 4)$

$\therefore f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

لا يوجد تناظر

4) المحاذيات: لا يوجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات العظمى والصغرى:

$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow [3x^2 - 6x = 0] \div 3$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

اما $x = 0$

او $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$+ + + \; 0 \; - - - \; 2 \; + + +$

مناطق التزايد: $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(0, 2)$

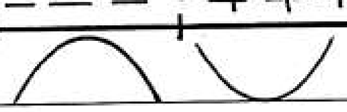
6) التقعر والتحدب والانقلاب:

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

تحدب تقعر

$- - - \; 1 \; + + +$



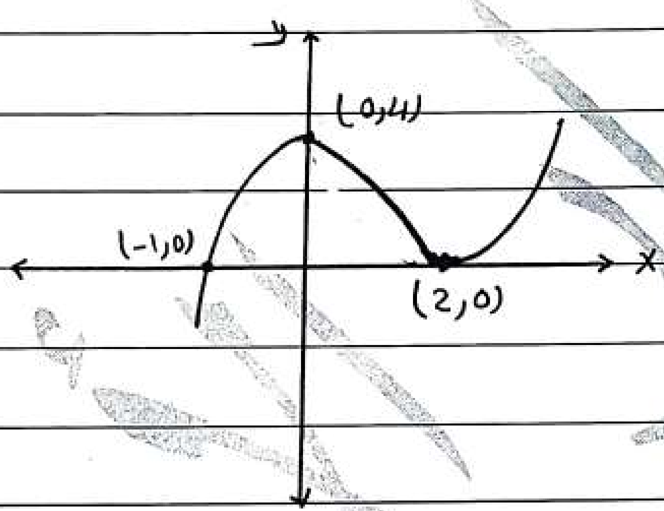
$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2 \Rightarrow$ نقطة انقلاب $(1, 2)$

مناطق التقعر: $\{x : x > 1\}$

مناطق التحدب: $\{x : x < 1\}$

7)

x	y	(x,y)
0	4	(0,4)
2	0	(2,0)
1	2	(1,2)
-1	0	(-1,0)



مثال / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

الحل 1) اوسع مجال الدالة : $x+1=0$

$x=-1 \Rightarrow R/\{-1\}$

2) نقاط التقاطع : مع السينات $y=0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1}=0$

$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3},0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow (0,-1)$

3) التناظر :

$f(-x)=\frac{-3x-1}{-x+1}=-\frac{3x+1}{-x+1}$

$f(x)\neq f(-x)$

$f(-x)\neq -f(x)$

لا يوجد تناظر

4) المحاذيات:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ محاذي شاقولي

$y=\frac{3}{1} \Rightarrow y=3$ محاذي افقي

5) النهايات:

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}+1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2} \quad , \quad f'(x)=0$$

$$\frac{4}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin$$ المجال

$+ + + \circ^{-1} + + +$

مناطق التزايد: $\{x: x>-1\}$, $\{x: x<-1\}$

6) التقعر والتحدب والانقلاب:

$$f''(x)=\frac{-8}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^3}=0$$

$$(x+1)^3=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin$$ المجال

$+ + + \circ - - -$

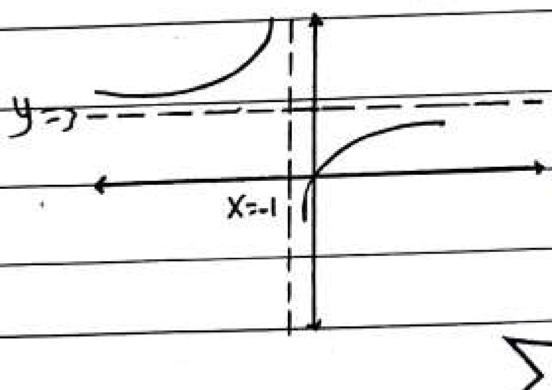
تقعر تحدب

مناطق التحدب: $\{x: x>-1\}$

مناطق التقعر: $\{x: x<-1\}$

7)

x	y	(x,y)
$\frac{1}{3}$	0	$(\frac{1}{3},0)$
0	-1	(0,-1)
-2	7	(-2,7)
-3	5	(-3,5)



مثال / باستخدام معلوماتك التفاضلية ارسم : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل 1) اوسع مجال للدالة R

2) نقاط التقاطع : مع السينات $\Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow y = \frac{0}{0+1} = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) التناظر :

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$

الدالة متناظرة حول الصادات $\therefore f(x) = f(-x)$

4) المحاذيات : شاقولي $x^2+1 \neq 0$

افقي $y = \frac{1}{1} = 1$

5) النهايات العظمى والصغرى :

$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$- - - \; 0 \; + + +$

الدالة متزايدة : $\{x : x > 0\}$

الدالة متناقصة : $\{x : x < 0\}$

نقطة نهاية صغرى

6) الانقلاب :

$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - (2x)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$

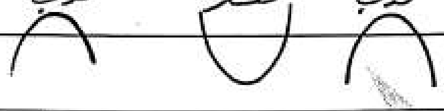
$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{\cancel{(x^2+1)}[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^{4}}$

$$f''(x) = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} \quad , \quad f'(x)=0$$

$$2-6x^2=0 \Rightarrow 6x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$- - - \ \frac{-1}{\sqrt{3}} \ + + + \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ - - -$$

محدب مقعر محدب



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$ نقطة انقلاب

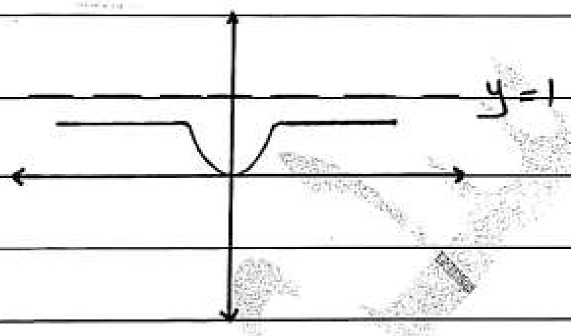
$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$ نقطة انقلاب

الدالة محدبة : $\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}$, $\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

الدالة مقعرة : $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7)

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	$\frac{1}{2}$	$(1,\frac{1}{2})$
-1	$\frac{1}{2}$	$(-1,\frac{1}{2})$



حل تمارين (3-5)

أرسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية:

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

1) المجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع:

مع السينات $y=0 \Rightarrow 10-3x-x^2=0$

$x^2+3x-10=0 \Rightarrow (x+5)(x-2)=0$

اما $x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow (-5,0)$

او $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0)=10-3(0)-(0)^2=10 \Rightarrow (0,10)$

3) التناظر:

$f(x)=10-3x-x^2$

$f(-x)=10-3(-x)-(-x)^2=10+3x-x^2=-(-10-3x+x^2)$

$f(x) \neq f(-x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

لا يوجد تناظر

4) النهايات: $f'(x)=-3-2x$, $f'(x)=0$

$-3-2x \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$ اشارة $f'(x)$: $+++ \; \frac{-3}{2} \; ---$

$f(\frac{-3}{2}) = 10-3(\frac{-3}{2})-(\frac{-3}{2})^2$

$= \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4} \Rightarrow (-1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2})$ نقطة نهاية عظمى

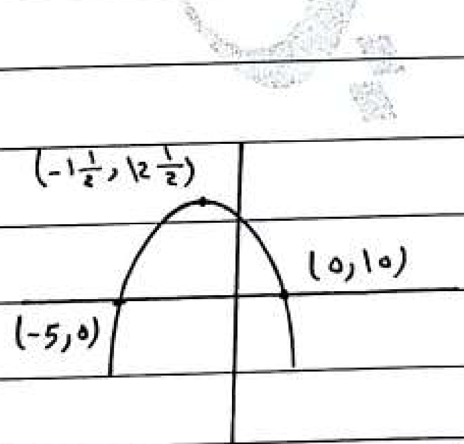
مناطق التزايد: $\{x : x < \frac{-3}{2}\}$

مناطق التناقص: $\{x : x > -\frac{3}{2}\}$

5) المحاذيات: لا توجد

6)

x	y	(x,y)
-5	0	(-5,0)
2	0	(2,0)
0	10	(0,10)



2) $f(x)=x^2+4x+3$

1) اوسع مجال $= R$

2) نقاط التقاطع: مع السينات: $y=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0 \Rightarrow x=-3 \, , \, x=-1 \Rightarrow (-3,0),(-1,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0,3)$

3) التناظر: لا يوجد

4) المحاذيات: لا توجد

5) النهايات: $f'(x)=2x+4 \Rightarrow 2x+4=0$

$[2x=-4]\div 2 \Rightarrow x=-2$

$$\begin{array}{ccc} - - - - - & -2 & + + + + + \end{array}$$

$f(-2)=(-2)^2+4(-2)+3=-1 \Rightarrow$ نهاية صغرى $(-2,-1)$

مناطق التزايد: $\{x : x>-2\}$

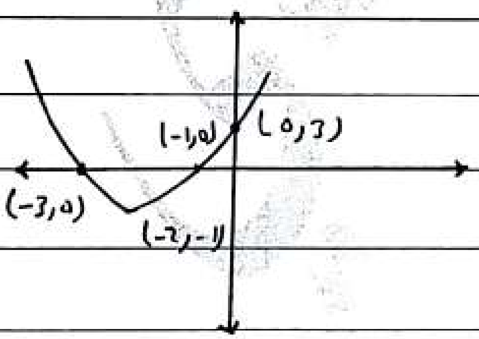
مناطق التناقص: $\{x : x<-2\}$

6) الانقلاب: $f''(x)=2$

لا توجد نقاط انقلاب والدالة مقعرة في مجالها

7)

x	y	(x, y)
-3	0	(-3,0)
-1	0	(-1,0)
0	3	(0,3)
-2	-1	(-2,-1)



3) $f(x)=(1-x)^3+1$

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع:

مع السينات $y=0 \Rightarrow (1-x)^3+1=0$

$(1-x)^3=-1 \Rightarrow 1-x=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0)=(1-0)^3+1=2 \Rightarrow (0,2)$

3) التناظر: $f(-x)=(1+x)^3+1=-[-(1+x)-1]$

لا يوجد تناظر $f(x)\neq f(-x)\ ,\ f(-x)\neq -f(x)$

4) المحاذيات: لا توجد

5) النهايات: $f'(x)=3(1-x)^2(-1)\ ,\ f'(x)=0$

$-3(1-x)^2=0 \Rightarrow (1-x)^2=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

اشارة $f'(x)$: $- - - \ 1 \ - - -$

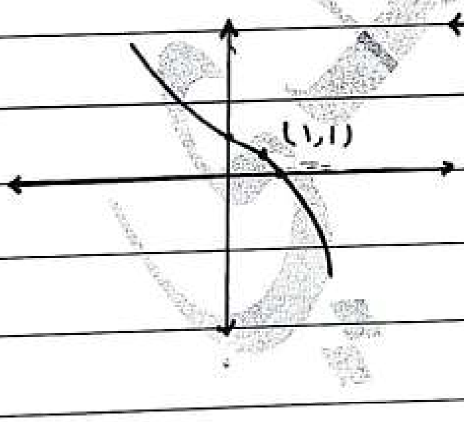
الدالة متناقصة في مجالها ولا توجد نهايات

6) الانقلاب

$f''(x)=-6(1-x)(-1)$

$f''(x)=6(1-x)\ ,\ f''(x)=0 \Rightarrow 6(1-x)=0 \Rightarrow x=1$

تقعر $+ + + + +$ 1 تحدب $- - - -$



$f(1)=(1-1)^3+1=1$

نقطة انقلاب $(1,1)$

7)

x	y	(x,y)
0	2	(0,2)
2	0	(2,0)
1	1	(1,1)
-1	9	(-1,9)

4) $f(x)=6x-x^3$

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع: مع السينات $y=0 \Rightarrow 6x-x^3=0$

$x(6-x^2)=0 \Rightarrow$ اما $x=0$ او $x^2=6 \Rightarrow x=\mp\sqrt{6}$

$\Rightarrow (\sqrt{6},0)\,,\,(-\sqrt{6},0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0)=6(0)-0=0 \Rightarrow (0,0)$

3) التناظر: $f(-x)=6(-x)-(-x)^3=-6x+x^3=-(6x-x^3)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$ الدالة متناظرة حول نقطة الاصل

4) المحاذيات: لا توجد

5) النهايات: $f'(x)=6-3x^2$

$6-3x^2=0 \Rightarrow [3x^2-6]\div 3 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$

اشارة $f'(x)$: $---\ -\sqrt{2}\ +++\ \sqrt{2}\ ---$

$f(\sqrt{2})=6(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3=4\sqrt{2} \Rightarrow$ نهاية عظمى $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2})=6(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^3=-4\sqrt{2} \Rightarrow$ نهاية صغرى $(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$

6) التقعر والتحدب والانقلاب:

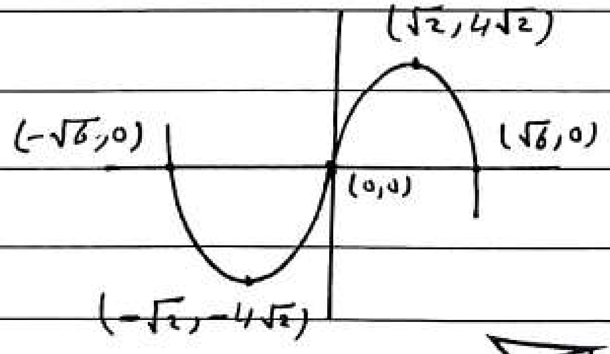
$f''(x)=-6x \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow -6x=0 \Rightarrow x=0$

اشارة $f''(x)$: تقعر $++++\ 0\ ----$ تحدب

$f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة انقلاب

7)

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},4\sqrt{2})$
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$



5) $f(x) = \frac{1}{x}$

١) اوسع مجال للدالة = $R \setminus \{0\}$

٢) نقاط التقاطع : لا توجد لان المجال $0 \notin$

٣) التناظر : $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$ التناظر حول نقطة الاصل

٤) المحاذيات : $x = 0$ عمودي

$y = 0$ افقي

٥) النهايات : $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ ، $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ المجال

اشارة $f'(x)$: $- - - \; 0 \; - - -$

٦) الانقلاب : $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

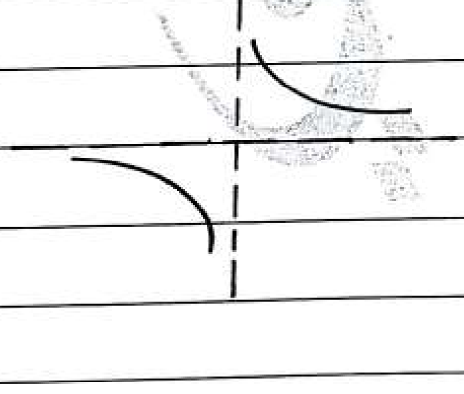
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ المجال

تحدب $- - - \; 0 \; + + +$ تقعر

لا توجد نقط انقلاب

٧)

x	y	(x, y)
-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2, -\frac{1}{2})$
-1	-1	$(-1, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$



6) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

1 - اوسع مجال للدالة $= R/\{-1\}$

2 - نقاط التقاطع:

مع السينات $y=0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1 \Rightarrow (0,-1)$

3 - التناظر:

$f(-x) = \dfrac{-x-1}{-x+1} = \dfrac{-(x+1)}{-x+1} \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq f(x)$ لا يوجد تناظر

4 - المحاذيات:

شاقولي $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

افقي $y = \dfrac{1}{1} \Rightarrow y=1$

5 - النهايات:

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin$ المجال

اشارة $f'(x)$: $+++ \circ +++$ (متزايدة ، متزايدة)

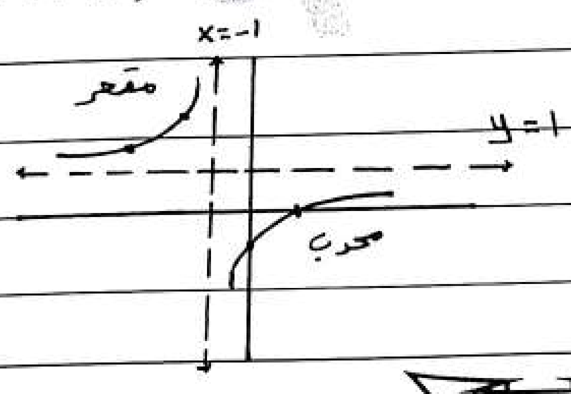
∴ الدالة متزايدة في مجالها ولا توجد نهايات

6 - الانقلاب: $f''(x) = 0$ ، $f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$

$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x=-1 \notin$ المجال

اشارة $f''(x)$: $+++ \underset{-1}{\circ} ---$ (مقعر ، محدب)

لا توجد نقط انقلاب



x	y	(x,y)
-2	3	(-2,3)
-3	2	(-3,2)

7) $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

1- مجال الدالة $= R$

2- نقاط التقاطع: مع السينات $y=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)^2=0$

اما $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0)$

او $(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow y=(0+2)(0-1)^2=2 \Rightarrow (0,2)$

3- التناظر: $f(-x)=(-x)^3-3(-x)+2=-x^3+3x+2$

لايوجد تناظر $f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

4- المحاذيات: لاتوجد

5- النهايات: $f'(x)=3x^2-3 \quad , \quad f'(x)=0$

$3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

اشارة $f'(x)$: $+++ \overset{-1}{|} --- \overset{1}{|} +++$

الدالة متزايدة في $\{x: x<-1\} \quad , \quad \{x: x>1\}$

ومتناقصة في الفترة $(-1,1)$

عظمى محلية $x=-1 \Rightarrow f(-1)=4 \Rightarrow (-1,4)$

صغرى محلية $x=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow (1,0)$

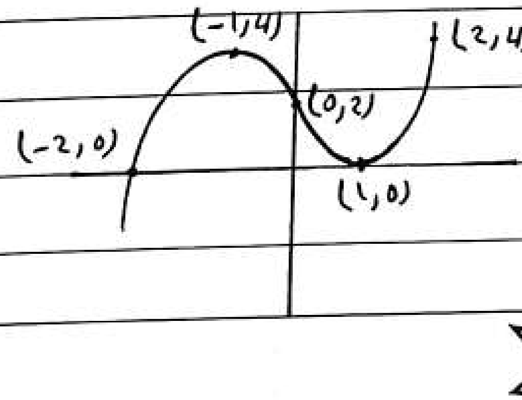
6- التقعر والتحدب والانقلاب: $f''(x)=6x \quad , \quad f''(x)=0$

$6x=0 \Rightarrow x=0$ تحدب $--- \overset{0}{|} +++$ تقعر

نقطة انقلاب $f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$

7-

x	y	(x,y)
2	4	(2,4)



8) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

1- اوسع مجال $= R$

2- نقاط التقاطع: مع السينات $(0, \mp 1) \Leftarrow x = \mp 1 \Leftarrow x^2 - 1 = 0$

مع الصادات $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

3- التناظر: مع محور الصادات $f(-x) = f(x)$

4- المحاذيات: لا يوجد شاقولي $x^2 + 1 \neq 0$

افقي $y = \frac{1}{1} = 1$

5- النهايات:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3} + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

اشارة $f'(x)$: $- - - \; 0 \; + + +$

$f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$ صغرى محلية

6- الانقلاب:

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot 4 - 2(x^2+1)(2x)(4x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)\,[4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3} \quad , \quad f''(x) = 0$$

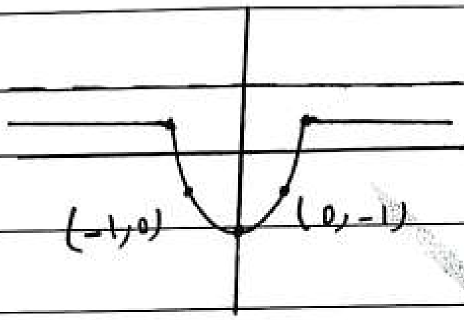
$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$- - - \; \frac{-1}{\sqrt{3}} \; + + \; + + \; \frac{1}{\sqrt{3}} \; - - -$

محدب مقعر محدب

$f(\mp \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{-1}{2}$

نقط انقلاب $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2})$



9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

١- اوسع مجال الدالة = R

٢- التقاطع : مع السينات $y=0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0$

$x^2(2 - x^2) = 0 \Rightarrow$ اما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

او $x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

مع الصادات $x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

3- التناظر : مع الصادات لان $f(-x) = f(x)$

4- المحاذيات : لا توجد

5- النهايات : $f'(x) = 4x - 4x^3$, $f'(x) = 0$

$4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

اما $x = 0$, او $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

اشارة $f'(x)$: $+++ \; (-1) \; --- \; (0) \; +++ \; (1) \; ---$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ صغرى محلية

$f(\mp 1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow (-1,1), (1,1)$ عظمى محلية

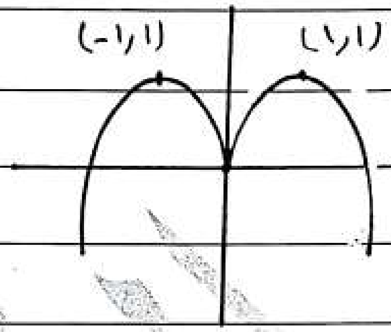
6- الانقلاب $f''(x) = 4 - 12x^2 \quad , \quad f''(x) = 0$

$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

اشارة $f''(x)$: $- - -$ تحدب $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ $+ + +$ تقعر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $- - -$ تحدب

$f(\mp \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{5}{9}$

نقط انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}) , (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



15) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

1- اوسع مجال $= R$

2- نقاط التقاطع: مع السينات $y = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^2+3} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \neq 0$ لا يوجد

مع الصادات $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow (0,2)$

3- التناظر: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f(x) = f(-x)$

متناظرة حول الصادات

4- المحاذيات : لايوجد محاذي شاقولي لان $x^2+3 \neq 0$

المحاذي الافقي $y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$

5- النهايات :

$f(x) = 6(x^2+3)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -6(x^2+3)^{-2}(2x)$

$f'(x) = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$

$+++\overset{0}{|}---$ اشارة $f'(x)$

$f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$ نقطة عظمى محلية

6- الانقلاب :

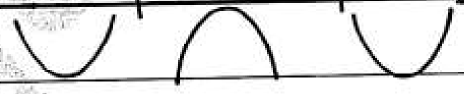
$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4}$

$f''(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4} = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$

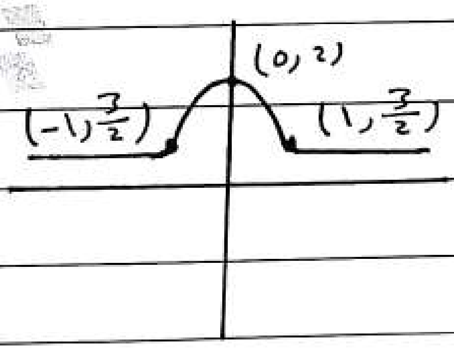
$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0 \Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$+++\overset{-1}{|}---\overset{+1}{|}+++$



$f(\mp 1) = \frac{6}{1+3} = \frac{3}{2} \Rightarrow (1, \frac{3}{2}), (-1, \frac{3}{2})$ نقط انقلاب



تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى :

لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع الاتي :

1- نرسم شكل توضيحي للمسألة اذا كان تحتوي على شكل ، ونثبت على الشكل كل المتغيرات والثوابت ومن ثم نبدأ بتكوين الفرضية التي تعتمد على كلمة (جد ، ما هي ، عين ، احسب ، ...) اي تكون الفرضية على اساس المطلوب .

2- تكوين الدالة المطلوب ايجاد النهاية العظمى او الصغرى لها . بمعنى آخر نبحث في المسألة عن الكلمات التي تدل على النهايات العظمى او الصغرى المحلية مثل (اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقل كمية ، اطول مسافة ، ...) ثم نبدأ بتكوين الدالة على اساس هذه الكلمات وفي اكثر الاحيان تكون هذه الدالة (قانون حجم ، مساحة ، محيط ، فيثاغورس ، دوال دائرية ، ...)

3- اذا كانت الدالة المكونه اعلاه تعتمد على اكثر من متغير لذا يجب ايجاد علاقة بين المتغيرات لتكوين دالة ذات متغير واحد واكثر الاحيان هذه العلاقة هي (قانون حجم ، مساحة ، ...) مشابهة للقوانين السابقة .

4- نبدأ بدراسة الدالة المتكونه والتي تحتوي على متغير واحد لإيجاد النهاية العظمى او الصغرى المحلية كما تعلمنا سابقاً عن طريق ايجاد الاعداد الحرجة في اطراف الفترة أي (ايجاد قيم الدالة) .

ملاحظة / في الاسئلة التي فيها اشكال هندسية مرسومة داخل دائرة أو كرة نستنتج المعادلة الثانية (العلاقة) من فيثاغورس .

وفي الاسئلة التي فيها اشكال هندسية مرسومة داخل مثلث او مخروط نستنتج المعادلة الثانية (العلاقة) من تشابه مثلثين

مثال / جد العدد الذي اذا أضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن.

الحل نفرض العدد $= x$

مربع العدد $= x^2$

الدالة : العدد + مربعه

$f(x) = x + x^2$

الدراسة : $f'(x) = 1 + 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 > 0$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عندما $x = \frac{-1}{2}$

∴ العدد هو $\left(\frac{-1}{2}\right)$

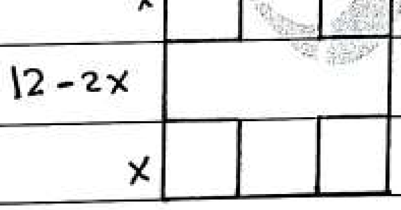
الاختبار : اشارة $f'(x)$ $\quad - - - \; -\frac{1}{2} \; + + +$

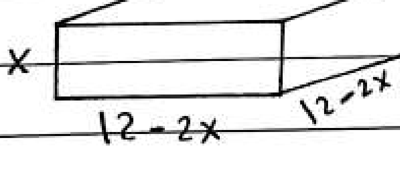
مثال / صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها (12 cm) وذلك بقص أربع مربعات متساوية الابعاد من أركانها ثم ثني الاجزاء البارزة لها . ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟

الحل الفرضية : نفرض طول ضلع المربع المقطوع $= x$

ابعاد الصندوق $= (x , 12 - 2x , 12 - 2x)$

الدالة : هي قانون حجم الصندوق = حاصل ضرب ابعاده الثلاثة





$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$

$V = (144 - 48x + 4x^2)(x)$

$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$

العلاقة: لا نحتاج الى علاقة لان المعادلة تحتوي على متغير واحد.

الدراسة:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow [144 - 96x + 12x^2 = 0] \div 12$$

$$12 - 8x + x^2 = 0 \Rightarrow (6-x)(2-x) = 0$$

اما $x = 6$ يهمل (لانه يجعل طول ضلع القاعدة صفراً)

او $x = 2$

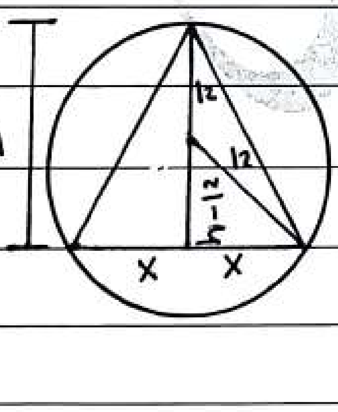
∴ عندما $x = 2$ توجد نهاية عظمى للحجم تساوي:

$$V = (8)(8)(2) = 128 \ cm^3$$

الاختبار: (للاطلاع)

اشارة $f'(x)$: +++ (2) - - - - - (6) ++++

مثال/ جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها (12 cm) ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.



<u>الحل</u> الفرضية: نفرض ارتفاع المثلث = h

نفرض طول قاعدة المثلث = 2x

الدالة: هي قانون مساحة المثلث

الارتفاع × القاعدة × $\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) = xh$$

العلاقة: فيثاغورس

$$x^2+(h-12)^2=(12)^2$$

$$x^2+h^2-24h+144=144 \Rightarrow x^2=24h-h^2$$

$$x=\sqrt{24h-h^2}$$

$$\therefore A = x\,h = h\sqrt{24h-h^2}$$

نربع h عند دخولها الى داخل الجذر

$$A=\sqrt{24h^3-h^4}$$

الدالة:

$$\frac{dA}{dh}=\frac{72h^2-4h^3}{(2)\sqrt{24h^3-h^4}} \quad , \quad \frac{dA}{dh}=0$$

$$\frac{72h^2-4h^3}{2\sqrt{24h^3-h^4}}=0 \Rightarrow [72h^2-4h^3=0] \div 4$$

$$\Rightarrow 18h^2-h^3=0 \Rightarrow h^2(18-h)=0$$

اما $h=0$ يهمل او $h=18$

$$x=\sqrt{24(18)-(18)^2}=\sqrt{18(6)}=6\sqrt{3}\ cm$$

$\therefore$ طول قاعدة المثلث تساوي:

$$2x=2(6\sqrt{3})=12\sqrt{3}\ cm$$

نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة:

$A_1=\pi r^2=\pi(12)^2=144\pi\ cm^2$ مساحة الدائرة

$A_2=\frac{1}{2}(2x)\,h=x\,h=6\sqrt{3}(18)$

$A_2=108\sqrt{3}\ cm^2$ مساحة المثلث

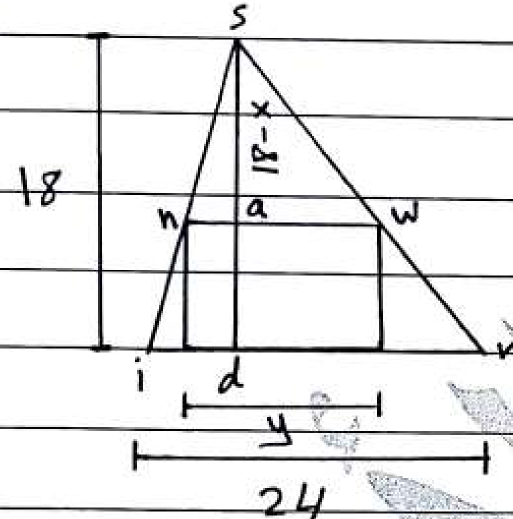
$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{108\sqrt{3}}{144\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

الاختبار: (للاطلاع)

اشارة $f'(x)$: $---\ \overset{0}{|}\ ++++\ \overset{18}{|}\ ---$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

مثال/ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيان تقعان على ساقيه.



الحل الفرضية: نفرض بعدي المستطيل: x, y

الدالة: مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = xy \quad \dots\dots (1)$$

العلاقة: تشابه المثلثات snw , sir (لتساوي زواياها المتناظرة لذا تتناسب اضلاعها المتناظرة وكذلك ارتفاعها)

$$\frac{nw}{ir} = \frac{sa}{sd} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$$

$$y = 24\left(\frac{18-x}{18}\right) = \frac{4}{3}(18-x) \quad \dots\dots (2)$$

$$A = xy = x\left(\frac{4}{3}(18-x)\right) = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

الدراسة: $\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18-2x)$, $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\frac{4}{3}(18-2x) = 0 \Rightarrow 18-2x = 0 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

نعوض قيمة x في (2) $\longrightarrow y = 12$

∴ بعدي المستطيل هما 12 , 9

الاختبار: (للاطلاع)

اشارة $f'(x)$: $+ + + + \quad 9 \quad - - - - -$

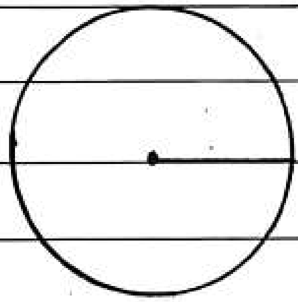
هذا يعني ان للدالة مساحة نهاية عظمى محلية عندما $x = 9\,cm$

مثال/ مجموع محيطي دائرة ومربع 60cm ، اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

الحل الفرضية: نفرض طول ضلع المربع = x ونصف قطر الدائرة = r

الدالة: مساحة المربع + مساحة الدائرة

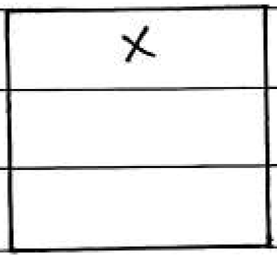
العلاقة: محيط المربع + محيط الدائرة = 60



$$[4x + 2\pi r = 60] \div 2$$

$$\pi r = 30 - 2x \Rightarrow r = \frac{30-2x}{\pi}$$

$$\therefore A = x^2 + \pi r^2 = x^2 + \pi\left(\frac{30-2x}{\pi}\right)^2$$



$$A = x^2 + \frac{1}{\pi}(30-2x)^2$$

$$A = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \left[2x + \frac{1}{\pi}(-120+8x) = 0\right] \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\pi x - 60 + 4x = 0 \Rightarrow x(\pi + 4) = 60$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{\pi+4}$$ طول ضلع المربع

قطر الدائرة $= 2r = 2\left(\frac{1}{\pi}(30-2x)\right) = \frac{2}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi+4}\right)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi + 120 - 120}{\pi+4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi}{\pi+4}\right) = \frac{60}{\pi+4} = x$$

الاختبار:

$$\frac{d^2A}{d^2x} = 2 + \frac{1}{\pi}(8) > 0$$

هذا يعني ان الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية.

مثال / جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2-x^2=3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$.

الحل الفرضية : نفرض ان النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2-x^2=3$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

الدالة : هي قانون المسافة :

$$s=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$$

العلاقة : $y^2-x^2=3$

$x^2=y^2-3$

$$s=\sqrt{x^2+y^2-8y+16}$$

$$s=\sqrt{(y^2-3)+y^2-8y+16}=\sqrt{2y^2-8y+13}$$

الدراسة :

$$\frac{ds}{dy}=\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \quad , \quad \frac{ds}{dy}=0$$

$$\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}=0 \Rightarrow 4y-8=0 \Rightarrow 4y=8$$

$$\Rightarrow y=2$$

$$\Rightarrow x^2=y^2-3=4-3=1 \Rightarrow x=\mp 1$$

$\therefore$ النقاط هي $(1,2)$, $(-1,2)$

ملاحظات / - يمكن القول عن دالة المساحة في بعض الاحيان اكبر او اصغر سطح للشكل .

- يمكن القول عن دالة الحجم او السعة في بعض الاحيان اكبر او اصغر مجسم للشكل .

- في كلا الحالتين اعلاه يكون الحل هو نفس الحل السابق عن طريق ايجاد الفرضية ، الدالة ، العلاقة (فقط في حالة وجود اكثر من متغير) ، الدراسة ، الاختبار .

حل تمارين (3-6)

١- جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن.

الحل الفرضية: نفرض العدد الأول = x والعدد الثاني = y

وحاصل ضرب العدد الأول × مربع العدد الثاني = L

الدالة: هي علاقة عددية $L = x y^2 \quad ...(1)$

$x + y = 75 \Rightarrow x = 75 - y \quad ...(2)$

نعوض معادلة (2) في (1):

$L = (75 - y) y^2 \Rightarrow L = 75y^2 - y^3$

الدراسة: $\frac{dL}{dy} = L' = 150y - 3y^2 \quad , \quad L' = 0$

$[150y - 3y^2 = 0] \div 3 \Rightarrow 50y - y^2 = 0 \Rightarrow y(50 - y) = 0$

اما $y = 0$ يهمل (لان العددين موجبين)

او $y = 50 \Rightarrow x = 75 - y = 75 - 50 = 25$

العدد الاول 25 والعدد الثاني 50

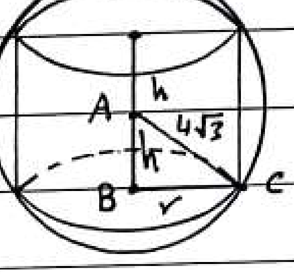
الاختبار: (للاطلاع): اشارة $f'(x)$

$$+ + + + \overset{50}{|} - - - - -$$

٢- جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$ cm

الحل الفرضية: نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة = r

ونفرض ارتفاع الاسطوانة = $2h$ ونفرض الحجم = V



الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة

$V = \pi r^2 (2h) \quad ...(1)$

العلاقة: فيثاغورس

$r^2+h^2=(4\sqrt{3})^2$

$r^2=48-h^2 \quad ... (2)$

نعوض (2) في (1):

$V=2\pi r^2 h=2\pi(48-h^2)h$

$V=2\pi(48h-h^3) \quad ... (3)$

الدراسة: $\frac{dV}{dh}=2\pi(48-3h^2) \quad , \quad \frac{dV}{dh}=0$

$[2\pi(48-3h^2)=0]\div 2\pi$

$[48-3h^2=0]\div 3 \Rightarrow 16-h^2=0 \Rightarrow h^2=16 \Rightarrow h=\mp 4$

اما $h=-4$ يهمل او $h=4$

$r^2=48-h^2=48-16=32 \Rightarrow r=4\sqrt{2}$

$2h=2(4)=8\ cm$ اكبر ارتفاع للاسطوانة

الاختبار: (للاوطاع): اشارة $f'(x)$

$+ + + + \ 4 \ - - - -$

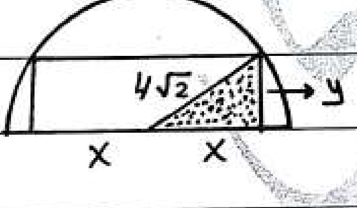
---

3 - جد ابعاد أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\ cm$.

الحل الفرضية: نفرض طول المستطيل $=2x$ ونفرض عرض المستطيل $=y$

ونفرض مساحة المستطيل $=A$

الدالة: هي قانون مساحة المستطيل



$A=2xy \quad ... (1)$

العلاقة: فيثاغورس

$x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2=32$

$x=\sqrt{32-y^2} \quad ... (2)$

نعوض (2) في (1):

$A=2x\cdot y=2\sqrt{32-y^2}\ y$ نربع y عند دخولها الى داخل الجذر

$A = 2\sqrt{32y^2 - y^4} = \sqrt{4(32y^2 - y^4)} = \sqrt{128y^2 - 4y^4}$

الدراسة :

$\frac{dA}{dy} = \frac{256y - 16y^3}{2\sqrt{128y^2 - 4y^4}} \quad , \quad \frac{dA}{dy} = 0$

$\frac{256y - 16y^3}{2\sqrt{128y^2 - 4y^4}} = 0 \Rightarrow [256y - 16y^3 = 0] \div 16$

$16y - y^3 = 0 \Rightarrow y(16 - y^2) = 0$

عرض المستطيل $y = 4cm$ ، أو $y = -4$ يهمل ، $y = 0$ يهمل أما

$\therefore x = \sqrt{32 - y^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4\ cm$

$\therefore 2x = 2(4) = 8\ cm$ طول المستطيل

الاختبار : (للاطلاع) إشارة $f'(x)$

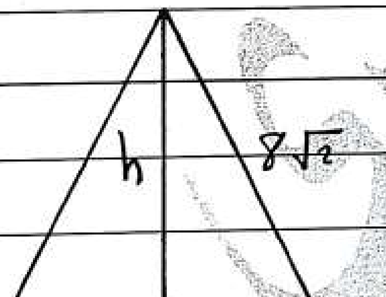
$+ + + \overset{4}{|} - - -$

---

4) جد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\ cm$

الحل الفرضية : نفرض ارتفاع المثلث $= h$ ، ونفرض طول قاعدة المثلث $= 2x$

ونفرض مساحة المثلث $= A$



الدالة : هي قانون مساحة المثلث

$A = \frac{1}{2}(2x) \cdot h = xh \quad --- ①$

العلاقة : فيثاغورس

$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 128$

$x^2 = 128 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{128 - h^2} \quad --- ②$

نعوض ② في ① :

$A = h\sqrt{128 - h^2} = \sqrt{128h^2 - h^4}$

الدراسة: $\frac{dA}{dh} = \frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{128h^2 - h^4}}$, $\frac{dA}{dh} = 0$

$\frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{128h^2 - h^4}} = 0 \Rightarrow [256h - 4h^3 = 0] \div 4$

$64h - h^3 = 0 \Rightarrow h(64 - h^2) = 0$

اما $h = 0$ يهمل او $64 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 64$

اما $h = -8$ يهمل او $h = 8\,cm$

$2x = 2(8) = 16\,cm$ طول قاعدة المثلث

اكبر مساحة للمثلث: $A = xh = 8(8) = 64\,cm^2$

الاختبار: (للاطلاع): اشارة $f'(x)$ $\quad + + + + \overset{8}{|} - - - -$

5- جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\,cm^2$.

الحل الفرضية: نفرض بعدي المستطيل x, y وليكن المحيط p

الدالة: قانون محيط المستطيل $P = 2x + 2y$ --- ①

العلاقة: مساحة المستطيل $A = xy \Rightarrow 16 = xy \Rightarrow y = \frac{16}{x}$ --- ②

نعوض ② في ①:

$P = 2x + 2y = 2x + 2\left(\frac{16}{x}\right) \Rightarrow P = 2x + 32x^{-1}$

الدراسة: $\frac{dP}{dx} = 2 - 32x^{-2}$, $P' = 0$

$2 - 32x^{-2} = 0 \Rightarrow \overset{16}{\cancel{32}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cancel{2} \Rightarrow x^2 = 16$

$x = 4\,cm$, نعوضها ② $\rightarrow y = 4\,cm$

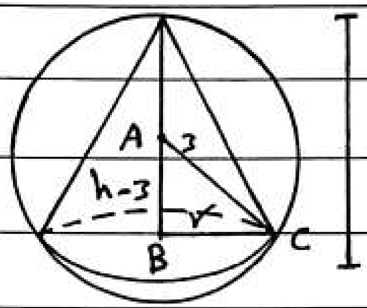
اقل محيط ممكن $p = 2x + 2y = 2(4) + 2(4) = 16\,cm$

الاختبار: (للاطلاع): اشارة $f'(x)$ $\quad - - - - \overset{4}{|} + + + + +$

6- جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm.

الحل: الفرضية: نفرض نصف قطر قاعدة المخروط = r وارتفاعه = h والحجم V

الدالة: هي قانون حجم المخروط.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{---} \; (1)$$

العلاقة: فيثاغورس (المثلث قائم الزاوية ABC)

$$r^2 + (h-3)^2 = (3)^2$$

$$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2 \quad \text{---} \; (2)$$

نعوض (2) في (1):

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) \quad , \quad \frac{dV}{dh} = 0$$

$$\frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0 \quad \Rightarrow [4\pi h - \pi h^2 = 0] \div \pi$$

$$4h - h^2 = 0 \Rightarrow h(4-h) = 0$$

أما $h = 0$ يهمل أو $h = 4\,cm$ الارتفاع

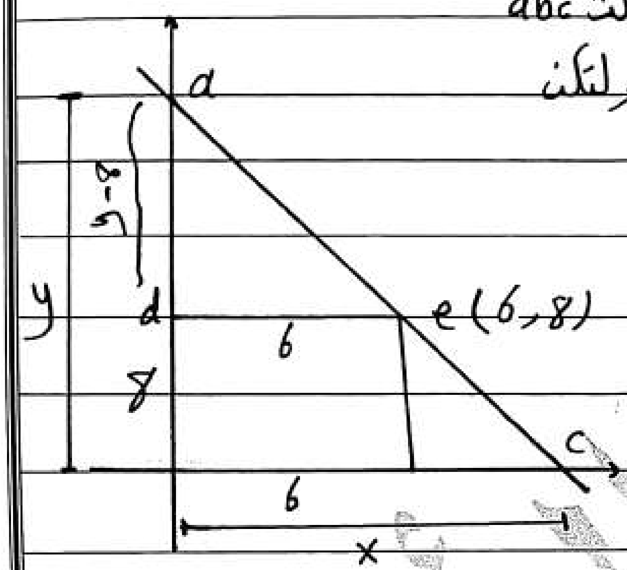
$$r^2 = 6h - h^2 = 6(4) - 16 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(8)(4) = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$$

الاختبار: (للاطلاع).

اشارة $f'(x)$: $+ + + \overset{4}{|} - - -$

7 - جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(6,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث.



الحل الفرضية: ليكن المستقيم يصنع المثلث abc مع المحورين، ولتكن ابعاد المثلث x, y ولتكن مساحته A

الدالة: $A = \frac{1}{2}xy$ --- ①

العلاقة: من تشابه المثلثين ade, abc

$$\frac{de}{bc} = \frac{ad}{ab} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{y-8}{ab}$$

$$6y = xy - 8x \Rightarrow 8x = xy - 6y$$

$$8x = y(x-6) \Rightarrow y = \frac{8x}{x-6}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}x\left(\frac{8x}{x-6}\right) = \frac{8x^2}{2x-12}$$

الدراسة:

$$A' = \frac{(2x-12)(16x) - 8x^2(2)}{(2x-12)^2} = \frac{32x^2 - 192x - 16x^2}{(2x-12)^2} = \frac{16x^2 - 192x}{(2x-12)^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow [16x^2 - 192x = 0] \div 16 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0$$

اما $x = 0$ تهمل، أو $x = 12 \Rightarrow$ ∴ النقطة $a(12,0)$

ولايجاد ميل المستقيم المار بالنقطتين $e(6,8)$ ، $c(12,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{8-0}{6-12} = \frac{4}{-3}$$

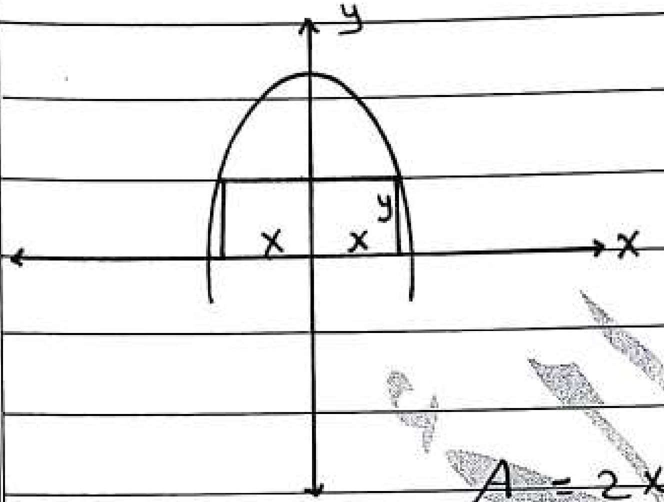
ولايجاد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(6,8)$ وميله $-\frac{4}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = -\frac{4}{3}(x-6) \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$$

8- جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ، ثم جد محيطه.

الحل الفرضية: نفرض طول المستطيل $= 2x$ وعرضه y ومساحته A



الدالة: هي قانون مساحة المستطيل

$A = 2xy$ --- ①

العلاقة:

$y = 12 - x^2$ --- ②

نعوض ② في ① :

$A = 2x(12-x^2) \Rightarrow A = 24x - 2x^3$

الدراسة:

$\frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2 \quad , \quad \frac{dA}{dx} = 0$

$24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2x = 4\text{ cm}$ الطول

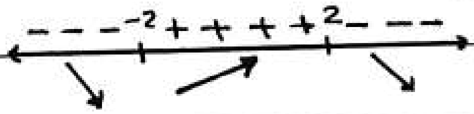
$\Rightarrow y = 12 - x^2 = 12 - 4 \Rightarrow y = 8\text{ cm}$ العرض

$p = 2(2x+y) = 4x + 2y$

$p = 4(2) + 2(8) = 8 + 16$

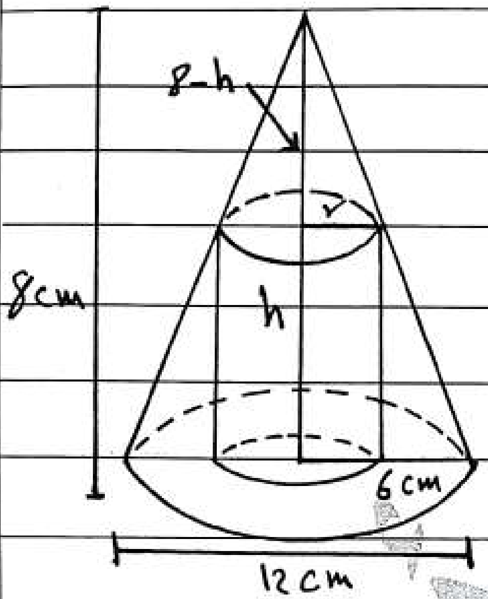
$p = 24\text{ cm}$

الاختبار: (للاطلاع):



اشارة $f'(x)$

و- جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .



الحل الفرضية: نفرض ارتفاع الاسطوانة = h

ونصف قطر قاعدة الاسطوانه = r ونفرض

حجم المخروط = V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانه

$$V=\pi r^2 h$$

العلاقة: تشابه مثلثات:

$$\frac{r}{\frac{6}{3}}=\frac{8-h}{\frac{8}{4}}$$

$$\frac{4}{3}r=8-h \Rightarrow h=8-\frac{4}{3}r$$

$$V=\pi r^2\left(8-\frac{4}{3}r\right)=8\pi r^2-\frac{4}{3}\pi r^3$$

الدراسة: $V'=16\pi r-4\pi r^2 \ , \ V'=0$

$$[16\pi r-4\pi r^2=0]\div 4\pi \Rightarrow 4r-r^2=0 \Rightarrow r(4-r)=0$$

$r=0$ يهمل , او $r=4\ cm$ نصف القطر

$h=8-\frac{4}{3}(4)=\frac{8}{3}\ cm$ الارتفاع

أكبر مساحة للاسطوانه: (للاطلاع)

$A=$ محيط القاعدة×الارتفاع + مساحة القاعدتين

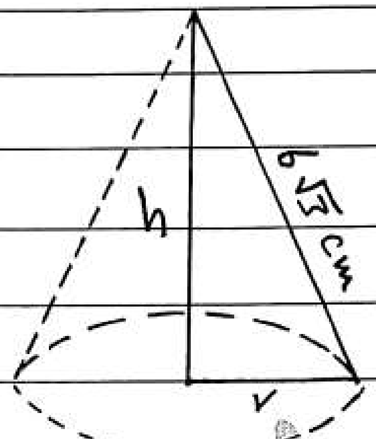
$$A=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi(4)\left(\frac{8}{3}\right)+2\pi(4)^2$$

$$A=\frac{64\pi}{3}+32\pi=\frac{160\pi}{3}\ cm^2$$

١٥) جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين.

الحل الفرضية: نفرض ابعاد المخروط h, r

الدالة: قانون حجم المخروط



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad --- ①$$

العلاقة: فيثاغورس

$$r^2+h^2=(6\sqrt{3})^2$$

$$r^2=108-h \quad --- ②$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h(108-h^2)$$

$$V=3\pi h-\frac{1}{3}\pi h^3$$

الدراسة: $f'(h)=V'=0$ ، $V'=36\pi-\pi h^2$

عوض في ②

$$[36\pi-\pi h^2=0]\div\pi \Rightarrow h^2=36 \Rightarrow h=6$$

$$r^2=108-36=72$$

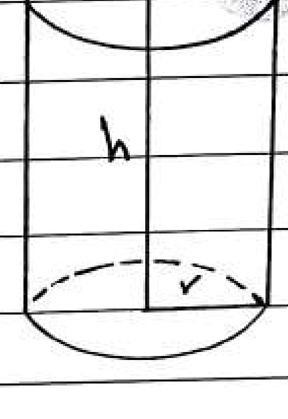
$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(72)(6)=144\pi\ cm^3$$

---

١١) علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى حجمها $125\pi\ cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.

الحل الفرضية: نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$ ونصف قطرها $= r$

الدالة: $A=$ المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة



$$A=\pi r^2+2\pi r h \quad --- ①$$

العلاقة: قانون حجم الاسطوانة

$$V=\pi r^2 h \Rightarrow 12\pi=\pi r^2 h$$

$$h=\frac{125}{r^2} \quad --- ②$$

$A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right)$

$A = \pi r^2 + 250\pi r^{-1}$

الدراسة: $A' = 2\pi r - 250\pi r^{-2} = 2\pi r - \frac{250\pi}{r^2}$, $A' = 0$

$\left[2\pi r - \frac{250\pi}{r^2} = 0\right] \cdot \frac{r^2}{2\pi} \Rightarrow -125 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = 125$

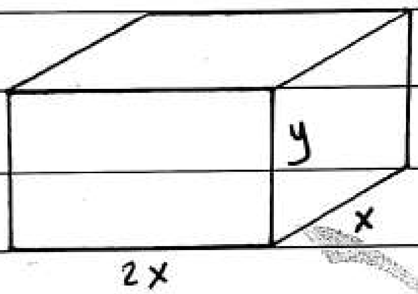
$r = 5\ cm$, $h = \frac{125}{125} = 5\ cm$

12- خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستعمل في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل.

الحل الفرضية: نفرض عرض القاعدة = x ونفرض طول القاعدة = $2x$

ونفرض الارتفاع = y ونفرض الحجم = V

الدالة: هي قانون حجم الخزان



$V = (2x)(x)(y) = 2x^2y$ --- (1)

العلاقة: مساحة المعدن = مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

$A = 2(2x+x)y + 4x^2 \Rightarrow 108 = 2(2x+x)y + 4x^2$

$[108 = 2(3x)y + 4x^2] \div 2 \Rightarrow 54 = 3xy + 2x^2$

$3xy = 54 - 2x^2 \Rightarrow y = \frac{54-2x^2}{3x}$ --- (2)

$V = 2x^2\left(\frac{54-2x^2}{3x}\right) = \frac{2}{3}(54x - 2x^3)$

الدراسة: $V' = \frac{2}{3}(54 - 6x^2)$, $V' = 0$

$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0 \Rightarrow [54 - 6x^2 = 0] \div 6 \Rightarrow 9 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow h = \frac{54-18}{9} = 4$

الابعاد: $3m$, $6m$, $4m$

اسئلة عامة حول الفصل الثالث:

س١/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

$$x^3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(3x^2) - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$2x^3y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(2x^3y - 2) = 5 - 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

b) $y = \sin 4x \tan 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 4x \cdot \sec^2 2x \,(2) + \tan 2x \cdot \cos 4x \cdot (4)$$

$$= 2\sin 4x \sec^2 2x + 4\tan 2x \cdot \cos 4x$$

س٢/ استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لايجاد قيم c للدالة

$f(x) = x^4 - 2x^2 \ , \ x \in [-2,2]$

الحل ١- الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2,2]$ لانها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2,2)$ لانها كثيرة حدود.

٣-
$f(a) = f(2) = 16 - 8 = 8$

$f(b) = f(-2) = 16 - 8 = 8 \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(b)$

أولاً: الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow f'(c) = 4c^3 - 4c \ , \ f'(c) = 0$

$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0$

أما $c = 0 \in (-2,2)$ ، $c = 1 \in (-2,2)$ ، $c = -1 \in (-2,2)$

ثانياً: الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(c) = 4c^3 - 4c$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{8-8}{4} = 0$$

$$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow c^3 - c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0$$

$$c = 0 \in (-2,2) \ , \ c = \mp 1 \in (-2,2)$$

س٣/ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$ فاذا كانت $c=2$ تنتمي للفترة $(-1,b)$ فجد قيمة $a, b \in R$.

الحل الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول

$$\therefore f'(c) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 2ax - 4 \Rightarrow f'(2) = 4a - 4 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(-1) = f(b)$$

$$(-1)^2 - 4(-1) + 5 = b^2 - 4b + 5$$

$$b^2 - 4b + 5 = 10 \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b-5)(b+1) = 0$$

أما $b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$ ، أو $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$ يهمل

س٤/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97cm$.

الحل نفرض طول ضلع القاعدة $= x$

$\therefore$ الارتفاع $= 3x$

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

$V = x \cdot x \cdot 3x = 3x^3 \Rightarrow f(x) = 3x^3$

$b = 2.97 \ , \ a = 3 \ , \ h = b - a = 2.97 - 3 = -0.03$

$f(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81 \ , \ f'(x) = 9x^2 \Rightarrow f'(3) = 9(3)^2 = 81$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$

$\cong 81 + (-0.03)(81) \cong 78.57 \ cm^3$

س5/ مخروط دائري قائم حجمه $210\pi \ cm^3$ ، جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10 \ cm$.

الحل $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 210\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 (10)$

$r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$

$b = 63 , a = 64 , h = 63 - 64 = -1$

$f(x) = r(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = f(64) = \sqrt{64} = 8$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.063$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$

$\cong 8 + (-1)(0.063) \cong 7.937 \ cm$

س6/ اذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$.

الحل $b = 1.01 , a = 1 , h = b - a = 1.01 - 1 = 0.01$

$f(x) = (31x+1)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f(1) = (31+1)^{\frac{1}{5}} = (32)^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31) \Rightarrow f'(1) = \frac{31}{5(32)^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5(2)^4} = \frac{31}{80} = 0.3875$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$

$\cong 2 + (0.01)(0.3875) \cong 2.003875$

س7 / باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2=1$

الحل $yx^2=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$

١- اوسع مجال للدالة $= R\setminus\{0\}$

٢- نقاط التقاطع : لا تقاطع مع محور السينات $y \neq 0$

لا تقاطع مع محور الصادات $x \neq 0$

3- التناظر : $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(-x)=f(x)$

منحني الدالة متناظر حول محور الصادات

4- المحاذيات : محاذي شاقولي $x^2=0 \Rightarrow x=0$

محاذي افقي $y=\frac{1}{x^2} \Rightarrow yx^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{y} \Rightarrow y=0$

5- النهايات :

$f'(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3} \Rightarrow f'(x)\neq 0$

اشارة $f'(x)$: $+ + + + \overset{0}{\circ} - - - - -$

f متزايدة في $\{x: x<0\}$ ومتناقصة في $\{x: x>0\}$ ولا تمتلك نقطة حرجة

6- الانقلاب : $f''(x)=6x^{-4}=\frac{6}{x^4}$, $f''(x)\neq 0$

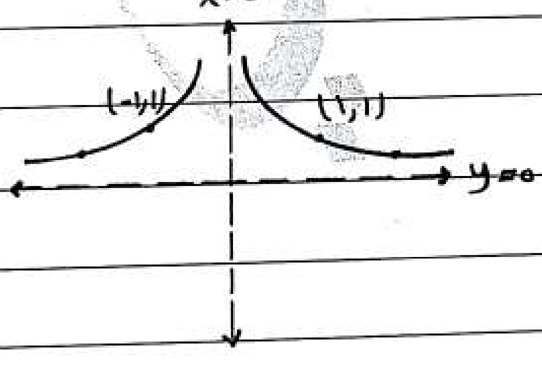
$+ + + + \overset{0}{\circ} + + + +$

مقعرة مقعرة

f مقعرة في $\{x: x<0\}, \{x: x>0\}$ ولا تمتلك نقطة انقلاب

7-

x	y	(x,y)
1	1	$(1,1)$
2	$\frac{1}{4}$	$(2,\frac{1}{4})$
-1	1	$(-1,1)$
-2	$\frac{1}{4}$	$(-2,\frac{1}{4})$

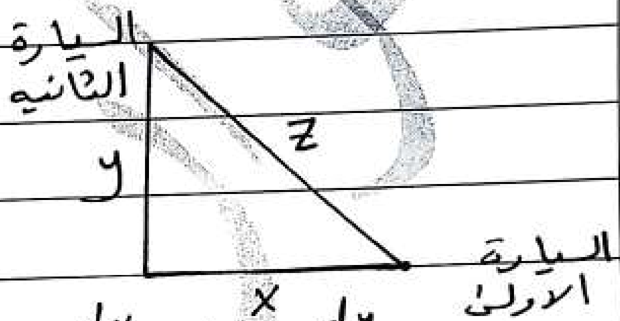


س8/ تحركت سيارتان الأولى باتجاه الشرق بسرعة $40 km/h$ والثانية باتجاه الشمال بسرعة $30 km/h$ ، جد معدل تغير المسافة بين السيارتين بعدان تكون الأولى قطعت $4 km$ والثانية $3 km$.

الحل المسافة التي قطعتها السيارة الاولى $= x$

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية $= y$

المسافة بين السيارتين $= z$



$z^2 = x^2 + y^2$

$z^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow z = 5$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$2(5)\frac{dz}{dt} = 2(4)(40) + 2(3)(30)$

$10\frac{dz}{dt} = 320 + 180 = 500$

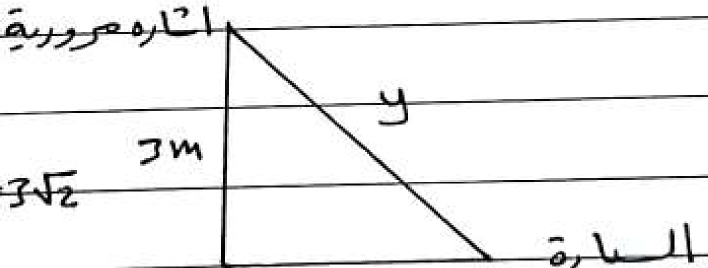
$\frac{dz}{dt} = 50 \; km/h$

$\frac{dx}{dt} = 40 \; , \; \frac{dy}{dt} = 30$

$\frac{dz}{dt} = ? \; , \; x = 4 \; , \; y = 3$

س/ سيارة تسير بسرعة $30 m/s$ اجتازت اشارة ضوئية حمراء ارتفاعها $3m$ عن سطح الأرض وبعدان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}m$ اصطدمت بسيارة أخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور، جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية.

الحل $y^2 = x^2 + 9$



$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + 9$

$27 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

$2y\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$

$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3(10)\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6} \; m/s$

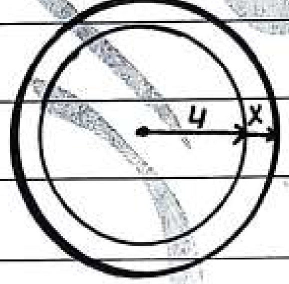
س١٥ / كرة حديدية نصف قطرها 4 cm مغطاة بطبقة من الجليد فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ cm^3/s$ جد سرعة نقصان سمك الجليد في اللحظة التي فيها سمك الجليد 2 cm .

الحل نفرض سمك الجليد في لحظة معينة = x

نصف قطر الكرة بدون الجليد = 4

نصف قطر الكرة مع الجليد = 4 + x

حجم الجليد = حجم الكرة الكلي مع الجليد − حجم الكرة الحديدية بدون الجليد



$$V = \frac{4}{3}\pi(4+x)^3 - \frac{4}{3}\pi(4)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(4+x)^2\frac{dx}{dt} - 0$$

$$-10 = 4\pi(4+2)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow -10 = 144\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{72\pi}\ cm/s$$

س١١ / سقط حجر في بركة ماء فتكونت دوائر متحدة المركز يتغير نصف قطرها بمعدل 0.5 cm/s جد معدل تغير مساحة ومحيط الدائرة بعد (5) s

الحل $r =$ الزمن × السرعة

$$r = 0.5(5) = 2.5$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(2.5)(0.5) = 2.5\pi\ cm^2$$

المحيط $p = 2\pi r$

$$\frac{dp}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 2\pi(0.5) = \pi\ cm/s$$

س12 / ليتسرب رمل ناعم من خزان على أرض مستوية مكوناً مخروطاً دائرياً قائماً بحيث ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان معدل التسرب $25\,cm^3/s$ جد معدل تزايد نصف قطر قاعدته عندما يكون نصف قطره $5\,cm$

الحل $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ∵ $h = 2r$

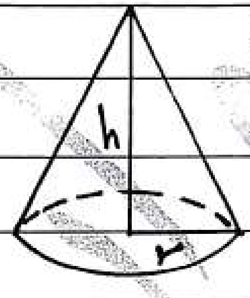
$\frac{dV}{dt} = 25\,cm^3/s$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\cancel{25} = 2(\cancel{25})\pi \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ cm/s$



س13 / قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي 60π وحدة مربعة فاذا ازداد طول محوره الاصغر بمعدل 0.2 (وحدة طول / دقيقة) فجد معدل النقصان في طول محوره الاكبر عندما يكون طول محوره الاصغر 12 وحدة طول.

الحل نفرض طول المحور الاكبر = y

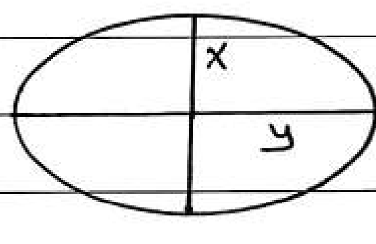
نفرض طول المحور الاصغر = x

$A = 60\pi = ab\pi$

$60\pi = \frac{y}{2} \cdot \frac{x}{2}\pi$

$x \cdot y = 240 \Rightarrow y = \frac{240}{x} = 240x^{-1}$

$\frac{dy}{dt} = -240x^{-2}\frac{dx}{dt} = \frac{-240}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt}$



$\frac{dy}{dt} = \frac{-240}{(12)^2}(0.2) = \frac{-48}{144} = \frac{-1}{3}$

∴ معدل النقصان في طول محوره الاكبر = $\frac{1}{3}$ وحدة طول / دقيقة

س14/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا كان معدل نقصان نصف قطره $\frac{7}{22}$ cm/s بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف القطر 10cm جد: 1- معدل نقصان حجمه.

2- معدل نقصان مساحته السطحية.

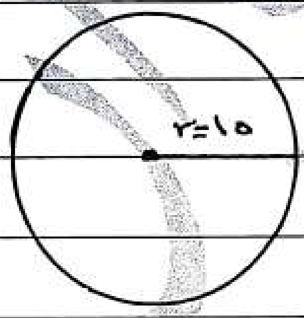
الحل نفرض نصف قطر البالون في أي لحظة = r

ونفرض حجمه V ، مساحته السطحية A

1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3}\left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \dots (1)$$



$$\frac{dr}{dt} = \frac{-7}{22}, \quad \frac{dV}{dt} = ?, \quad \frac{dA}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi (10)^2 \left(\frac{-7}{22}\right)$$

$\because \pi = \frac{22}{7}$

$$\frac{dV}{dt} = 4\left(\frac{22}{7}\right)(100)\left(\frac{-7}{22}\right) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -400 \text{ cm}^3/s$$

2) $A = 4\pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi (2r) \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi (2)(10) \frac{dr}{dt} = 80\pi \frac{dr}{dt} \quad \dots (2)$$

$$\frac{dA}{dt} = 80\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = -80 \text{ cm}^2/s$$

س15/ اذا كانت مبرهنة رول تتحقق في الدالة $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ حيث $x \in [-4,b]$ جد قيمة b ثم جد قيمة c.

الحل الدالة تحقق مبرهنة رول $f(a)=f(b)$

$\sqrt{16+9}=\sqrt{b^2+9} \Rightarrow 16+\cancel{9}=b^2+\cancel{9} \Rightarrow b^2=16$

$b=\mp 4 \Rightarrow$ اما $b=-4$ تهمل او $b=4$

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow f'(c)=\frac{c}{\sqrt{c^2+9}}$, $f'(c)=0$

$\frac{c}{\sqrt{c^2+9}}=0 \Rightarrow c=0 \in (-4,4)$

س16/ اذا علمت ان $f(x)=x^3+hx^2$ حيث $x \in [-3,1]$ وان الدالة f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=-2$ جد قيمة h.

الحل $f'(x)=3x^2+2hx \Rightarrow f'(c)=3c^2+2hc$

$f'(-2)=12-4h$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 12-4h=\frac{f(1)-f(-3)}{1+3}$

$12-4h=\frac{28-8h}{4} \Rightarrow 28-8h=48-16h \Rightarrow h=\frac{5}{2}$

س17/ النقطة (1,2) تمثل نقطة حرجة للمنحني $ax^2+bxy+by^2=5$ جد قيمة a, b.

الحل $a+2b+4b=5 \Rightarrow a+6b=5$ ... ①

مشتقة ضمني $2ax+bx\frac{dy}{dx}+y(b)+2by\frac{dy}{dx}=0$

$bx\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}=-2ax-by$

$$\frac{dy}{dx}(bx+2by) = -2ax - by$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2ax-by}{bx+2by} \Rightarrow (1,2) \text{ حرجه } \Rightarrow \frac{-2a-2b}{b+4b} = 0$$

$-2a-2b=0 \Rightarrow b=-a$ ... ②

نعوض الثانية في الاولى $\rightarrow a=-1 , b=1$

س18/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية طول ضلع مربع مساحته $50m^2$.

الحل $b=50 , a=49 , h=b-a=50-49=1$

$A=x^2 \Rightarrow 50=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{50}$

$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} , f(49)=\sqrt{49}=7$

$f'(49)=\frac{1}{2\sqrt{49}}=0.071$

$$f(a+h) \cong f(a)+h.f'(a)$$
$$\cong 7+(1)(0.071) \cong 7.071$$

س19/ يرشح محلول من مصفاة مخروطية عمقها $60cm$ وقطر قاعدتها $40cm$ الى وعاء اسطواني قطره $30cm$ ، بأي معدل يرتفع مستوى المحلول في الاسطوانة عندما يكون المحلول على ارتفاع $30cm$ في المصفاة ومعدل هبوط مستواه $2.5cm/min$.

[واجب والجواب النهائي: $\frac{dh}{dt}=\frac{10}{9}\frac{cm}{min}$]

س20/ اذا علمت ان لمنحني الدالة $f(x) = Ax - \frac{B}{x-1}$ نقطة نهاية صغرى محلية هي $(3,10)$ فجد قيمة $A, B \in R$.

[الحل واجب والجواب: $A = 2$, $B = 8$]

س21/ جد ابعاد مخروط دائري قائم حجمه اقل ما يمكن ويحيط بكرة نصف قطرها $3cm$.

[الحل واجب والجواب: $h = 12cm$, $r = 3\sqrt{2}\ cm$]

س22/ منطاد يرتفع للاعلى بسرعة $15m/min$ وفي نفس اللحظة ومن نفس الموقع على الأرض تنطلق سيارة بسرعة $20m/min$ ، فجد معدل ابتعاد السيارة عن المنطاد بعد مرور $5min$.

[الحل واجب والجواب: معدل الابتعاد = $25m/min$]

س23/ قطعة سلك طولها $12cm$ قطعت الى قطعتين ، طويت القطعة الاولى فتكون منها مثلثاً متساوي الاضلاع ومن القطعة الثانية كونا مربعاً فإذا ازداد طول ضلع المربع بمعدل $0.3cm/min$ فجد مقدار نقصان طول ضلع المثلث في نفس اللحظة.

[الحل واجب والجواب النهائي: $-0.4cm/min$]

س24/ اثبت في كل مما يأتي تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة (a,b) المعطاة ثم اوجد قيمة c

1) $f(x) = \sqrt{4-x}$, $x \in [0,4]$

2) $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$

مساعد الطالب في الرياضيات

السادس علمي

الجزء الثاني

اعداد

نوار الأسدي

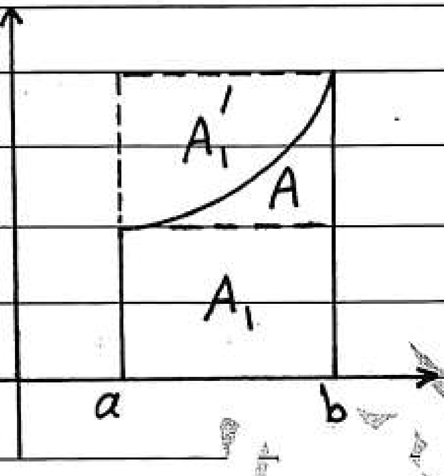
07815655515

الفصل الرابع

التكامل

الفصل الرابع
(التكامل)

لتكن f دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$



تسمى A المنطقة تحت المنحني

وتسمى A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل المنطقة A

وتسمى A_1' اكبر منطقة مستطيلة خارج المنطقة A

لإيجاد المساحة التقريبية للمنطقة A

① نجد A_1 حيث $A_1 = (b-a)m$ حيث m اصغر قيمة للدالة.

② نجد A_1' حيث $A_1' = (b-a)M$ حيث M اكبر قيمة للدالة.

③ نجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A حيث:

$$A = \frac{A_1 + A_1'}{2}$$

ملاحظة: m, M نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة $[a, b]$ أو عند النقطة الحرجة ان وجدت.

ملاحظة: لإيجاد m, M نعوض طرفي الفترة في المعادلة المعطاة في السؤال، فالقيمة الاصغر ستكون m والقيمة الاكبر ستكون M.

مثال/ اوجد قيمه تقريبيه لمساحة المنطقه A حيث

$$A = \{ (x,y) : \underbrace{1 \leqslant x \leqslant 2}_{\text{تعني الفترة } [1,2]} , f(x) = x^2+1 \}$$

<u>الحل</u>

$$f(1) = (1)^2+1 = 2$$

$$f(2) = (2)^2+1 = 5$$

$$\therefore \quad m = 2 \quad , \quad M = 5$$

$$A_1 = (b-a)\, m = (2-1)(2) = (1)(2) = 2 \text{ units}^2$$

$$A_1' = (b-a)\, M = (2-1)(5) = (1)(5) = 5 \text{ units}^2$$

$$A = \frac{A_1 + A_1'}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ units}^2$$

المجاميع السفلى $L(\sigma, f)$ والمجاميع العليا $U(\sigma, f)$:

اولاً: نفرض ان $f(x) \geqslant 0 , \forall x \in [a,b]$ حيث $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ فأن:

مجموع مساحات المناطق المستطيله داخل A نرمزلها $L(\sigma, f)$

$$L(\sigma, f) = m_1 (x - x_0) + m_2 (x_2 - x_1) + m_3 (x_3 - x_1) + m_4 (x_4 - x_3)$$

حيث m أصغر قيمه للداله

مجموع مساحات المناطق المستطيله خارج A نرمزلها $U(\sigma, f)$

$$U(\sigma, f) = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + M_3 (x_3 - x_2) + M_4 (x_4 - x_3)$$

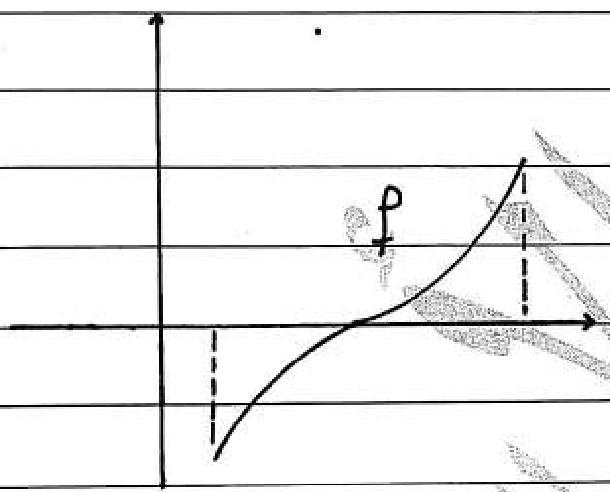
حيث M اكبر قيمه للداله

ملاحظه:

$$U(\sigma, f) \geqslant L(\sigma, f)$$

$$L(\sigma, f) \leqslant A \text{ مساحه} \leqslant U(\sigma, f)$$

ثانياً: عندما لا يشترط ان يكون $f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$ كما في الشكل ادناه فأن من الممكن ان يكون m (أصغر قيمة ممكن للدالة) عدداً سالباً أو موجباً أو صفر وبذلك ستكون $L(\sigma,f)$ عدداً سالباً أو موجباً أو صفر، وينطبق ذلك ايضاً على $U(\sigma,f)$.
وبما ان المساحة لا تكون سالبة لهذا نسمي
$L(\sigma,f)$ المجموع الاسفل ، $U(\sigma,f)$ المجموع الاعلى



مثال / لتكن $f:[1,4] \to R \ , \ f(x) = 5+2x$. جد المجموع الاسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma,f)$ بتجزئة الفترة $[1,4]$ الى ثلاث فترات منتظمة.

الحل $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1 \Rightarrow \sigma = (1,2,3,4)$

h طول الفترة ، n عدد الفترات

∴ الفترات الجزئية $[3,4] \ , \ [2,3] \ , \ [1,2]$

$f(x) = 5+2x \Rightarrow f'(x) = 2 \ , \ f'(x) \neq 0 \ , \ f'(x) > 0$

∴ لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها

① $[1,2]$
$f(1) = 7 \ , \ f(2) = 9$
$m = 7 \ , \ M = 9$

② $[2,3]$
$f(2) = 9 \ , \ f(3) = 11$
$m = 9 \ , \ M = 11$

③ $[3,4]$
$f(3) = 11 \ , \ f(4) = 13$
$m = 11 \ , \ M = 13$

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $h=b-a$	القيمة الصغرى m	القيمة العظمى M	$h.m$	$h.M$
$[1,2]$	1	7	9	7	9
$[2,3]$	1	9	11	9	11
$[3,4]$	1	11	13	11	13
				$\sum h.m=27$	$\sum h.M=33$

$\therefore L(\sigma,f)=27$ ، $U(\sigma,f)=33$

ملاحظة: 1- في كل فترة $[a,b]$ لا تحتوي نقطة حرجة نبحث عن القيم العظمى والصغرى عند طرفيها.
2- اما اذا كانت الفترة $[a,b]$ تحتوي نقطة حرجة نبحث عن القيم العظمى والصغرى عند طرفي الفترة وعند النقط الحرجة كما في الفترة الثانية من السؤال القادم.

مثال/ لتكن $f(x)=3x-x^2$ ، $f:[0,4]\to R$. جد $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ مستخدماً أربع تجزيئات متساوية.

الحل $h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1 \Rightarrow \sigma=(0,1,2,3,4)$

$\therefore$ الفترات الجزئية $[0,1]$ ، $[1,2]$ ، $[2,3]$ ، $[3,4]$

$f(x)=3x-x^2 \Rightarrow f'(x)=3-2x$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow 3-2x=0$ ،
$x=\frac{3}{2}\in[1,2]$

اشارة $f'(x)$: $[\,0 \;+++\; 1 \;+\; \frac{3}{2} \;-\; 2 \;---\; 3 \;---\; 4\,]$

① $[0,1]$

$f(0)=0,\ f(1)=2 \Rightarrow \therefore m=0,\ M=2$

② $[1,2]$ هذه الفترة تحتوي على عدد حرج

$f(1)=2,\ f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4},\ f(2)=2$

$\therefore$ القيمة الاكبر $\frac{9}{4}$ والاصغر 2

$\therefore m=2,\ M=\frac{9}{4}$

③ $[2,3]$

$f(2)=2,\ f(3)=0 \Rightarrow \therefore m=0,\ M=2$

④ $[3,4]$

$f(3)=0,\ f(4)=-4 \Rightarrow \therefore m=-4,\ M=0$

الفترات	$h=b-a$	m	M	$h.m$	$h.M$
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				$\sum h.m=-2$	$\sum h.M=6\frac{1}{4}$

$\therefore L(\sigma,f)=-2,\ U(\sigma,f)=6\frac{1}{4}$

حل تمارين (4 ــ 1)

أوجد كلا من $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ لكل مما يأتي :

1. $f : [-2, 1] \longrightarrow R$, $f(x) = 3 - x$

a) $\sigma = (-2, 0, 1)$

b) تقسيم الفترة $[-2, 1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

الحل $f(x) = 3 - x \Rightarrow f'(x) = -1$

∴ الدالة متناقصة في مجالها

a) الفترات الجزئية هي $[0, 1]$, $[-2, 0]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[-2, 0]	2	3	5	6	10
[0, 1]	1	3	3	2	3
				$\sum m.h = 8$	$\sum h.M = 13$

∴ $L(\sigma, f) = 8$, $U(\sigma, f) = 13$

b) الفترات الجزئية هي $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[-2, -1]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[-2, -1]	1	4	5	4	5
[-1, 0]	1	3	4	3	4
[0, 1]	1	2	3	2	3
				$\sum h.m = 9$	$\sum h.M = 12$

∴ $L(\sigma, f) = 9$, $U(\sigma, f) = 12$

2. $f:[0,4]\to R\ ,\ f(x)=4x-x^2$

اذا كان $\sigma=(1,2,3,4)$

<u>الحل</u> الفترات الجزئيه $[0,1]\ ,\ [1,2]\ ,\ [2,3]\ ,\ [3,4]$

$f(x)=4x-x^2 \Rightarrow f'(x)=4-2x \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow x=2$

$x=2$ تقع بين الفترتين $[2,3]$, $[1,2]$ اي هو يمين الفتره $[2,3]$

فلذلك يحل السؤال لأنه لا توجد نقطه حرجه.

اشارة $f'(x)$: $[+++ \mid +++ \overset{2}{\uparrow} --- \mid ---]$ عند $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

الفترات	h	m	M	$h.m$	$h.M$
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				$\sum h.m=6$	$\sum h.M=14$

$\therefore L(\sigma,f)=6\ ,\ U(\sigma,f)=14$

3. $f:[1,4]\to R\ ,\ f(x)=3x^2+2x$

a) $\sigma=(1,2,4)$

b) استخدام ثلاث تجزيئات متساويه

الحل $f(x)=3x^2+2x \Rightarrow f'(x)=6x+2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \notin [1,4]$

a) الفترات الجزئية هي $[1,2]$, $[2,4]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,4]	2	16	56	32	112
				$\sum h.m=37$	$\sum h.M=128$

$\therefore L(\sigma,f)=37 , U(\sigma,f)=128$

b) الفترات الجزئية $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	33	16	33
[3,4]	1	33	56	33	56
				$\sum h.m=54$	$\sum h.M=105$

$\therefore L(\sigma,f)=54 , U(\sigma,f)=105$

تعريف: اذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$
فأنه يوجد عدد وحيد K بحيث لأي تجزئة σ للفترة $[a,b]$
فأنه $L(\sigma,f) \leq K \leq U(\sigma,f)$
حيث يسمى العدد K التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$
ونرمز له $\int_a^b f$ ويقرأ التكامل من a الى b

ملاحظات:

1- اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فأن:

$$L(\sigma,f) \leq \int_a^b f \leq U(\sigma,f)$$

القيمة التقريبية للتكامل:

$$\int_a^b f = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2}$$

2- اذا كانت $f(x) \geq 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فأن $\int_a^b f$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب.

3- اذا كانت $f(x) \leq 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فأن $\int_a^b f \leq 0$ وهذا لا يدل على المساحة لذلك نضع مطلق لكي تكون موجبة $\left|\int_a^b f\right|$

مثال / لتكن $f:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 dx$ اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين.

الحل $h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1 \Rightarrow [1,2],[2,3]$ الفترات الجزئية

f دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,3]$

الفترات	h	m	M	$h.m$	$h.M$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
				$\sum h.m=5$	$\sum h.M=13$

$\therefore \int_1^3 x^2 dx = \frac{5+13}{2} = 9 \ unit^2$ تقريباً

مثال / لتكن $f(x)=3$, $f:[1,5]\to R$ جد $\int_1^5 f$

الحل $f(x)=3 \Rightarrow f'(x)=0$

f لا تمتلك نقطة حرجة في على الفترة $[1,5]$

الفترات	h	m	M	$h.m$	$h.M$
$[1,3]$	2	3	3	6	6
$[3,5]$	2	3	3	6	6
				$\sum h.m=12$	$\sum h.M=12$

$\therefore \int_1^5 3\,dx = \frac{12+12}{2} = 12 \ unit^2$

م / في الدوال الثابتة والدوال من الدرجة الاولى اذا لم يعطي التجزئة ولم يذكر نختار اية تجزئة كانت.

للتحقيق هنالك طريقه ثانيه لايجاد $\int_1^5 f$ من حساب A هندسياً:

الحل $[1,5]$

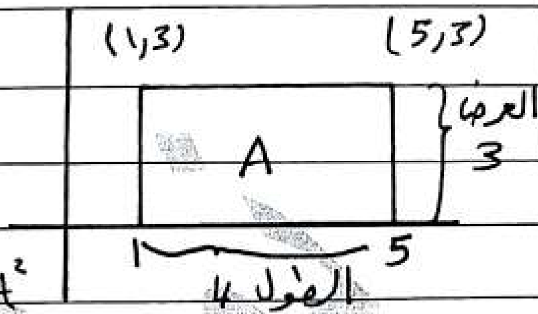
$f(1)=3 \Rightarrow (1,3)$ النقطه

$f(5)=3 \Rightarrow (5,3)$ النقطه

نرسم الشكل ونلاحظ المنطقه A مستطيله

$A = $ (الطول) (العرض) $=(4)(3)=12\ unit^2$

$\therefore \int_1^5 f = 12$



مثال / لتكن $f(x)=2x-3$ ، $f:[2,5]\to R$ أوجد $\int_2^5 f$

الحل $f(x)=2x-3 \Rightarrow f'(x)=2 \Rightarrow f'(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)>0$

f دالة متزايده ولا تمتلك نقطه حرجه مستقره على الفتره $[2,5]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				$\Sigma hm=7$	$\Sigma hM=17$

$\therefore \int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{7+17}{2} = 12\ unit^2$

طريقه ثانيه / للتحقق وذلك من حساب A هندسياً وكالاتي:

الحل $[2,5]$

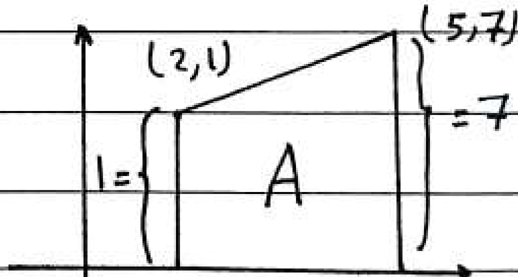
$f(2)=1 \Rightarrow (2,1)$

$f(5)=7 \Rightarrow (5,7)$

نرسم ونلاحظ المنطقه A هي شبه منحرف

$A = \frac{1}{2}$ (مجموع طولي ضلعين متوازيين) (الارتفاع)

$= \frac{1}{2}(1+7)(3) = 12\ unit^2 \Rightarrow \therefore \int_2^5 f = 12$



ملاحظة: لايجاد المساحة باستخدام قانون القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_a^b f = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

فيجب أخذ القيمة المطلقة لكل عنصر في الحقل hm , hM لكي يتحول الى موجب ان كان سالباً.

حل تمارين (2-4)

1- أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3)$

الحل $f(x)=\frac{3}{x}$

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}\neq 0$

$\therefore$ لاتوجد نقاط حرجة في $[1,3]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
$[1,2]$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
$[2,3]$	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\sum hm=\frac{5}{2}$	$\sum hM=\frac{9}{2}$

$\therefore L(\sigma,f)=\frac{5}{2}$

$U(\sigma,f)=\frac{9}{2}$

$$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x}dx=\frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2}=\frac{7}{2}\,unit^2$$ تقريباً

2- لتكن $f:[1,4]\to R$, $f(x)=3x-3$ اوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3,4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب المنطقة تحت منحني f .

الحل $f(x)=3x-3 \Rightarrow f'(x)=3>0$

الدالة متزايدة في مجالها ولا توجد نقاط حرجة

الفترات	h	m	M	$h.m$	$h.M$
$[1,2]$	1	0	3	0	3
$[2,3]$	1	3	6	3	6
$[3,4]$	1	6	9	6	9
				$\sum hm=9$	$\sum hM=18$

$\therefore L(\sigma,f)=9$

$U(\sigma,f)=18$

$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx=\frac{9+18}{2}$

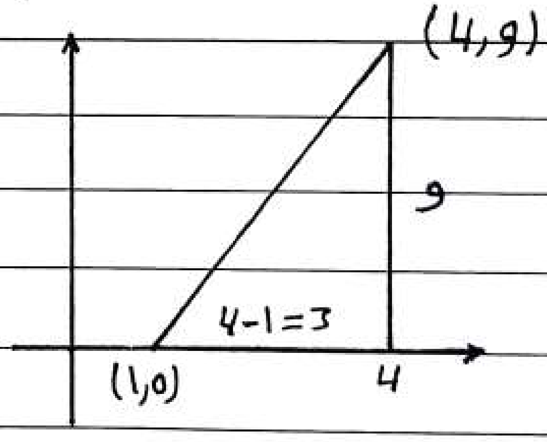
$=\frac{27}{2}\,unit^2$ تقريباً

التحقيق الهندسي / من الرسم نلاحظ ان الشكل هو عبارة عن مثلث قائم الزاوية.

$A=\frac{1}{2}$ (الارتفاع)(القاعدة)

$=\frac{1}{2}(3)(9)$

$=\frac{27}{2}\,unit^2$ تقريباً



3- أوجد قيمة التكامل $\int_{2}^{4}(3x^2-3)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,4)$

الحل $f(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=6x \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0 \notin [2,4]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[2,3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
				$\Sigma hm=33$	$\Sigma hM=69$

$\therefore \int_{2}^{4}(3x^2-3)dx=\frac{33+69}{2}$

$=51\,unit^2$ تقريباً

4- اوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2}f(x)dx$ حيث $f(x)=-4$

الحل $f(x)=-4 \Rightarrow f'(x)=0$

f لاتمتلك نقطة حرجة ومحتواة على الفترة $[-3,2]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[-3,0]	3	-4	-4	-12	-12
[0,2]	2	-4	-4	-8	8
				$\Sigma hm=-20$	$\Sigma hM=-20$

$\therefore \int_{-3}^{2}(-4)\,dx=\frac{-20-20}{2}=\frac{-40}{2}=-20$

$A=|-20|=20\ unit^2$

5- اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 x^3 dx$ باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة.

الحل $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 0 \notin [1,5]$

الفترات الجزئية $[4,5]$ ، $[2,4]$ ، $[2,3]$ ، $[1,2]$

الفترات	h	m	M	h.m	h.M
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				$\sum hm = 100$	$\sum hM = 224$

$\therefore \int_1^5 x^3 dx = \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2} = 162 \text{ unit}^2$ تقريباً

النظرية الاساسية للتكامل - الدالة المقابلة:

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث: $F'(x)=f(x), \forall x\in(a,b)$ ويكون $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ حيث تسمى F الدالة المقابلة للدالة f على الفترة $[a,b]$.

مثال/ اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x)=3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$.

الحل

$$\int_1^5 f(x)\,dx = F(5)-F(1)=3(25)-3(1)=75-3=72$$

ويمكن أن نكتب ذلك بالصورة الآتية:

$$\int_1^5 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_1^5=\left[3x^2\right]_1^5=3(5)^2-3(1)^2=72$$

مثال/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وان الدالة المقابله للدالة f هي: $F:[0,\frac{\pi}{2}]\to R$, $F(x)=\sin x$

فأوجد قيمة: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

الحل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=F(\frac{\pi}{2})-F(0)=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$

مثال/ اثبت ان الدالة $F:[1,3]\to R$, $F(x)=x^3+2$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^2$

الحل $\because$ $F(x)=x^3+2$ هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R (لأنها كثيرة حدود)

$\therefore$ F هي دالة مستمرة على $[1,3]$ وقابله للاشتقاق على $(1,3)$

$\because$ $F'(x)=3x^2=f(x)$, $\forall x\in(1,3)$

$\therefore$ F هي دالة مقابله للدالة f على $[1,3]$

مثال / اثبت ان الدالة $F:R\to R$ ، $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة $f:R\to R$ ، $f(x)=\cos 2x$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$

الحل :- $f(x)=\cos 2x$ هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق

$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق أيضاً

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\cdot(2)=\cos 2x=f(x)\quad \forall x\in R$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\sin 2(0)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\sin 0\right]=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)=\frac{1}{2}$$

مثال / اذا كانت $f:[-1,4]\to R$ ، $f(x)=2x+1$

$F:[-1,4]\to R$ ، $F(x)=x^2+x$

اوجد قيمة $\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$

الحل

$$\therefore F(x)=x^2+x\Rightarrow F'(x)=2x+1=f(x)\quad ,\forall x\in[-1,4]$$

$$\therefore \int_{-1}^{4}f(x)\,dx=\left[f(x)\right]_{-1}^{4}=\left[x^2+x\right]_{-1}^{4}=\left[(16+4)-(1-1)\right]=20$$

التكامل الغير محدد :

اذا كانت للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ دالة مقابلة F فأنه يوجد عدد لانهائي من الدوال المقابلة للدالة f وكل منها يساوي $F+c$ حيث c يمثل عدد ثابت والفرق بين أكثر من اثنين منها يساوي عدد ثابت.

- تسمى مجموعة الدوال المقابلة على الصورة $F+c$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$ اذا كان رمز متغير الدالة هو x.
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد بالصورة :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad , \quad c \in R$$

- عملية التكامل غير المحدد هي العملية المعاكسة لعملية التفاضل اي احداهما تنهي دور الأخرى.

قاعدة :

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad \text{بشرط } n \neq -1$$

نضيف الى الاس واحد ونضرب في مقلوب الاس الجديد ولا يمكن اجراء التكامل اذا كان الاس (-1)

مثال / جد كلاً من التكاملات الاتية :

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$

2) $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c = \frac{1}{8}x^8 + c$

3) $\int x^{-4}\,dx = \dfrac{x^{-3}}{-3} + c$

4) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\,\dfrac{x^{2}}{2} + c = x^{2} + c$

5) $\int dx = x + c$ الحد الخالي من x يحتوي على x^{0}

6) $\int x^{\frac{5}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \dfrac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}} + c$

م/ لسهولة عملية اضافة الواحد للاس الكسري فيمكن ان نعتمد على : $\dfrac{\text{البسط} + \text{المقام}}{\text{المقام}}$

7) $\int x^{-\frac{7}{4}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} + c = -\dfrac{4}{3}\,x^{-\frac{3}{4}} + c$

م/ اذا وجدت جذر يحوي متغير فقبل اجراء التكامل ارفعه ! $\dfrac{\text{الاس}}{\text{دليل الجذر}}$

8) $\int \sqrt[3]{x^{2}}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \dfrac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + c$

م/ لايجوز بقاء مقام يحوي متغير قبل التكامل عدا اذا كان اسه في المقام يساوي واحد.

9) $\int \dfrac{5}{x^{4}}\,dx = \int 5x^{-4}\,dx = 5\,\dfrac{x^{-3}}{-3} + c = \dfrac{-5}{3}\,x^{-3} + c$

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

م/ التكامل يتوزع على الجمع والطرح.

11) $\int (x^{3} - 6x^{2} + 3)\,dx = \int x^{3}\,dx - \int 6x^{2}\,dx + \int 3\,dx$

$= \dfrac{x^{4}}{4} - \overset{2}{\cancel{6}}\,\dfrac{x^{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} + 3x + c = \dfrac{x^{4}}{4} - 2x^{3} + 3x + c$

م/ التكامل لا يتوزع على الضرب لذلك يجب التخلص من الضرب .

12) $\int (x+2)(3x+1)\,dx$

$= \int (3x^2+x+6x+2)\,dx = \int (3x^2+7x+2)\,dx = x^3 + 7\frac{x^2}{2} + 2x + c$

13) $\int (y^2+3)^2\,dy = \int (y^4+6y^2+9)\,dy = \frac{y^5}{5} + 2y^3 + 9y + c$

م/ التكامل لا يتوزع على القسمة لذلك نتخلص من القسمة بالتحليل والاختصار أو طرق اخرى سيتم شرحها

14) $\int \frac{x^2+3x+2}{x+2}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{(x+2)}}\,dx = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

15) $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}\,dx = \int (x^2+2x+4)\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$

م/ اذا كان المقام مكون من حد واحد فقط فيفضل توزيع حدود البسط على المقام.

16) $\int \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

$= \int \left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int (2x-4+5x^{-2})\,dx$

$= x^2 - 4x - 5x^{-1} + c$

ملاحظه / في حال وجدنا : (مشتقه داخل القوس)$\int$(مقدار داخل القوس)^n
نطبق مايلي : ١- نهمل المشتقه.
٢- يضاف الى اس القوس واحد.
٣- نضرب في مقلوب الاس الجديد.

$$17)\ \int (x^3+5)^5 \underline{\underline{(3x^2)}}\,dx = \frac{1}{6}(x^3+5)^6+c$$

تحذف لانها مشتقه لداخل القوس

توضيح : $\frac{d}{dx}(x^3+5)=3x^2$

$$18)\ \int (x^3-4x+5)^7 \underline{\underline{(3x^2-4)}}\,dx = \frac{1}{8}(x^3+4x+5)^8+c$$

تحذف

توضيح : $\frac{d}{dx}(x^3-4x+5)=3x^2-4$

م/ اذا كان هنالك نقص في المشتقه فنضع هذا النقص ونضع مقلوبه خارج التكامل ثم بعد ذلك نطبق الملاحظه اعلاه، علماً ان هذا الاسلوب نعمل به فقط اذا كان النقص هو ثابت وليس متغير.

$$19)\ \int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6\, 2\cdot(3x+4)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \underline{\underline{(6x+8)}}\,dx$$

تحذف

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)(3x^2+8x+5)^7+c$$

$$= \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7+c$$

لاحظ : المقدار داخل القوس $= 3x^2+8x+5$ ومشتقه داخل القوس $= 6x+8$ ولكن المشتقه المعطاة في السؤال $3x+4$ لذلك سنضرب في 2 ونضع $\frac{1}{2}$ خارج التكامل لنطابق المشتقه وبعدها نكامل.

20) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4ax^2+16ax+b^2}}\,dx$

$8a$ $\quad$ $8a$

$= \int (4ax^2+16ax+b^2)^{-\frac{1}{2}}(x+2)\,dx$

مشتقه داخل القوس = $8ax+16a$

$= \frac{1}{8a}\int (4ax^2+16ax+b^2)^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{(8ax+16a)}}$

تحذف

$= \frac{1}{8a}(2)(4ax^2+16ax+b^2)^{\frac{1}{2}}+c$

$= \frac{1}{4a}(4ax^2+16ax+b^2)^{\frac{1}{2}}+c$

21) $\int \frac{dx}{(5-2x)^2}$

$= \int (5-2x)^{-2}\,dx$

توضيح: $f(x)=5-2x$
$f'(x)=-2$

$= \frac{1}{-2}\int (5-2x)^{-2}\underline{\underline{(-2)}}\,dx$

تحذف

$= \frac{1}{-2}(-1)(5-2x)^{-1}+c = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(5-2x)}+c = \frac{1}{10-4x}+c$

آخر خطوتين اختياري وليس من الضروري كتابتهما.

22) $\int \frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

$\frac{1}{-2}$ $\quad$ -2

$= 3\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx$

$= \frac{-3}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{(-2x)}}\,dx = -3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+c$

تحذف

23) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\, dx$

نحول المقدار داخل القوس الى مربع كامل .

$= \int [(x+5)^2]^{\frac{1}{3}} dx$

$= 1\int (x+5)^{\frac{2}{3}} 1\, dx$

$f(x) = x+5$
$f'(x) = 1$

$= \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c$

24) $\int \frac{dx}{x^2+14x+49}$

$= \int \frac{dx}{(x+7)^2} = \int (x+7)^{-2} dx = -1(x+7)^{-1} + c$

25) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx$

نخرج مشترك من داخل الجذر

$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\, dx$

$= \int x \sqrt[3]{3-5x^2}\, dx$

$\frac{1}{-10}$ (-10)

$= \int x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$

$f(x) = 3-5x^2$
$f'(x) = -10x$

$= \frac{1}{-10}\int \underbrace{(-10x)}_{\text{تحذف}} (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$

$= \frac{-1}{10}\left(\frac{3}{4}\right)(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$

26) $\int \frac{3x+6}{\sqrt{x+2}}\, dx$

$= \int (x+2)^{\frac{-1}{2}} (3x+6)\, dx \rightarrow$ اخراج 3 مشترك من القوس الثاني

$= 3\int (x+2)^{\frac{-1}{2}} (x+2)\, dx \rightarrow$ ستكون الاقواس متشابهه

$= 3\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx \rightarrow \frac{-1}{2}+1 = \frac{1}{2}$ عند ضرب القوسين نجمع الاس

$= 3\left(\frac{2}{3}\right)(x+2)^{\frac{3}{2}} + c = 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+\sqrt{x}}\ \sqrt{2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(5+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}} \left(x^{\frac{-1}{2}}\right) dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\int \left(5+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2\left(5+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + c$

28) $\int \frac{5x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\, dx = \int \frac{5x\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\cdot\cancel{\sqrt{x^2+1}}}\, dx$

$= 5\int x(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}\, dx = \frac{5}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}\, dx = 5(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$

29) $\int \frac{x^2-4x+3}{x^4-x^3}\, dx = \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{x^3\cancel{(x-1)}}\, dx = \int \left(\frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3}\right) dx$

$= \int \left(x^{-2} - 3x^{-3}\right) dx = -x^{-1} + \frac{3}{2}x^{-2} + c$

تكاملات الدوال المثلثية:

① $\int \sin ax \, dx = \frac{-1}{a} \cos ax + c$

② $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

③ $\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$

④ $\int \csc^2 ax \, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + c$

⑤ $\int \sec ax \tan ax \, dx = \frac{1}{a} \sec ax + c$

⑥ $\int \csc ax \cot ax \, dx \, dx = \frac{-1}{a} \csc ax + c$

- قبل اجراء التكامل يجب ان تكون مشتقه الزاوية موجوده وفي حالة وجود نقص فيها نضع هذا النقص ونضع مقلوبه خارج التكامل. وعند اجراء التكامل تحذف مشتقه الزاوية ولكن الزاوية الاصلية تبقى نفسها.

أمثلة:

1) $\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \underbrace{(3)}_{\text{تحذف}} dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$

أو يمكن اجراء التكامل مباشرة على وفق ما مر اعلاه:

$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$

2) $\int \sec^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\tan 5x + c$

3) $\int \sin(5x+2)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+2)\underbrace{(5)}_{\text{تحذف}}dx$

$= \frac{-1}{5}\cos(5x+2) + c$

4) $\int x^2 \sin x^3\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3\,dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

5) $\int \sec 2x \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\sec 2x + c$

6) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$= 2\int \sin x^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}_{\text{تحذف}}\,dx = -2\cos x^{\frac{1}{2}} + c$

بعض العلاقات في الدوال المثلثية:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad , \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

4) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

5) $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

6) $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

8) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

9) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

تكاملات مربعات الدوال المثلثية :

1) $\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

2) $\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

3) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

4) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

5) $\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$

6) $\int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + c$

أمثلة حول الموضوع :

1) $\int (1 + \cos 3x)^2 dx$

$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) \, dx$

$= \int \left(1 + 2\cos 3x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right)\right) dx$

$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

2) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

$= \int (\sin x)^4 \cos x \, dx$

$= \int$ (مقدار داخل قوس)^n (مشتقه داخل القوس)

$= \frac{1}{5}(\sin x)^5 + c$

$= \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

لاحظ:

المقدار داخل القوس $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$\therefore$ المشتقه موجوده ولا يوجد فيها نقص فنطبق: 1) نهمل المشتقه 2) نضيف الى الاس القوس واحد ونضرب في مقلوب الاس الجديد

3) $\int \cos^5 3x \sin 3x \, dx$

$= \frac{-1}{3}\int (\cos 3x)^5 (-3\sin 3x) dx$

$= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)(\cos 3x)^6 + c$

$= \frac{-1}{18}\cos^6 3x + c$

$f(x) = \cos 3x$

$f'(x) = -3\sin 3x$

$\therefore$ نضرب في (-3) ونضع $\frac{1}{-3}$ خارج التكامل.

4) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx$

$= \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)^8 + c$

5) $\int \underbrace{\sin 2x}_{\text{قانون}} \cos^2 x \, dx$

$= \int 2\sin x \cos x \; \cos^2 x \, dx$

$= 2\int \sin x \cos^3 x \, dx$

$= 2\int \sin x (\cos x)^3 dx$

$= -2\int (-\sin x)(\cos x)^3 dx$

$= -2\frac{(\cos x)^4}{4} + c$

$= -\frac{1}{2}\cos^4 x + c$

م/ يجب توحيد الزوايا اذا كانت الدوال مضروبه في بعضها وذلك باستخدام قوانين ضعف ونصف الزاوية ولا نحتاج الى توحيد الزوايا اذا كان بين الدوال جمع او طرح.

6) $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx$

$= \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x\, dx = 2\int (\cos 3x)^3 \sin 3x\, dx$

$= \frac{2}{-3}\int (\cos 3x)^3 (-3\sin 3x)\, dx$

$= \frac{2}{-3}\left(\frac{1}{4}\right)(\cos 3x)^4 + c = \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$

7) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$

$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx = \int \frac{\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}(\cos 2x + \sin 2x)}{\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}}\, dx$

$= \int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

8) $\int \tan^6 x \sec^2 x\, dx = \int (\tan x)^6 \sec^2 x\, dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + c$

9) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx$

$= \int (\tan x)^1 \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

10) $\int \sec^3 4x \tan 4x\, dx$

$= \int \sec^2 4x \sec 4x \tan 4x\, dx$

$= \int (\sec 4x)^2 \sec 4x \tan 4x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (\sec 4x)^2\, 4\sec 4x \tan 4x\, dx$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\sec^3 4x + c$

$= \frac{1}{12}\sec^3 4x + c$

11) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

نعوض عن (1) بـ $(\sin^2x+\cos^2x)$ [قانون]
ونعوض عن $(\sin 2x)$ بـ $(2\sin x\cos x)$ [قانون]

$=\int\sqrt{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}\,dx$

$=\int\sqrt{\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x}\,dx$ نحول المقدار داخل الجذر الى مربع كامل

$=\int\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,dx$

$=\int\mp(\sin x-\cos x)\,dx$

$=\mp(-\cos x-\sin x)+c$

ملاحظة / في التكامل الغير محدد : $\sqrt{(\text{مقدار})^2}=\mp(\text{المقدار})$
أما في التكامل المحدد : $\sqrt{(\text{مقدار})^2}=|\text{المقدار}|$

12) $\int \sin^3x\,dx$

$=\int \sin x\sin^2x\,dx$

$=\int \sin x(1-\cos^2x)\,dx$

$=\int (\sin x-\sin x(\cos x)^2)\,dx$

$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x+c$

13) $\int \frac{1+\sin x}{\sec x}\,dx$

$=\int\frac{1+\sin x}{\frac{1}{\cos x}}\,dx=\int(1+\sin x)\underbrace{\cos x\,dx}_{\text{تحذف}}=\frac{1}{2}(1+\sin x)^2+c$

14) $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2\,dx$
$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)\,dx$
$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x))\,dx$
$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)\,dx$
$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$
$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

15) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$
م/ في حالة الاسس المتساوية فمن الافضل ان نجعل الدالتين المضروبتين داخل قوس واحد.
$= \int (\sin x \cos x)^2\,dx$
$= \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2\,dx$
$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx$
$= \int \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)\,dx = \int (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x)\,dx$
$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

16) $\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\,dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx$
$= \int (\tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x)\,dx = \int [(\tan x)^2 \sec^2 x - (\sec^2 x - 1)]\,dx$
$= \int [(\tan x)^2 \sec^2 x - \sec^2 x + 1]\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

17) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$
م/ في حالة الاسس المختلفة في ضرب دالتين دائريتين فنفضل التعامل مع الاس الفردي.
$= \int \sin^4 x \cos x \cos^2 x\,dx$
$= \int \sin^4 x \cos x(1 - \sin^2 x)\,dx$
$= \int (\sin^4 x \cos x - \sin^6 x \cos x)\,dx$
$= \int ((\sin x)^4 \cos x - (\sin x)^6 \cos x)\,dx$
$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c$

خلاصة:

لا يمكن ان نكامل الدوال المثلثيه المربعه غير $\sec^2$ و $\csc^2$ إلا باستخدام القوانين:

$\sin^2 x \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x}$

$\cos^2 x \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}$

$\tan^2 x \rightarrow \boxed{\sec^2 x - 1}$

$\cot^2 x \rightarrow \boxed{\csc^2 x - 1}$

$\boxed{1-\cos^2 x}$ $\boxed{1-\sin^2 x}$

نستخدم القانونين في حين اذا وجدنا حاصل ضرب دالتين مثلثتين و الزوايا متساويه.

- بوجود حاصل ضرب دالتين فنختبر اولاً قاعدة توفر المشتقه لداخل القوس المرفوع لقوة وبشرط تساوي الزوايا، ثم نرى اذا لم يكن ذلك فعلينا بالقوانين اعلاه.

حل تمارين (4-4)

جد تكاملات كلاً مما يلي ضمن مجال الدالة:

1) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx = \int \frac{4x^4-12x^2+\cancel{9-9}}{x^2}\,dx$

$= \int \left(\frac{4x^4}{x^2} - \frac{12x^2}{x^2}\right) dx = \int (4x^2-12)\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$

2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx = \int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\,\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int (3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^7 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} \int (3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^7 \cdot \underbrace{\frac{-\sqrt{5}}{2}}_{\text{تحذف}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{1}{8}(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^8 + c = \frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8 + c$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}\,dx$

$= \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)}\,dx = \int (1+\sin x)\underbrace{\cos x}_{\text{تحذف}}\,dx$

$= \frac{1}{2}(1+\sin x)^2 + c$

- توجد طرائق اخرى للحل (جرب ذلك).

4) $\int \csc^2 x \cos x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx = \int (\sin x)^{-2}\cos x\,dx$

$= -(\sin x)^{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c = -\csc x + c$

5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int (3x^2+5)^{-4}x\,dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\underbrace{6x}_{\text{تحذف}}\,dx$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{18(3x^2+5)^2} + c$

6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx$ (محلول كمثال)

7) $\int \sin^3 x\,dx$ (محلول كمثال)

8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= -2\int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)dx = -2\sin\sqrt{1-x}+c$

9) $\int (3x^2+1)^2\,dx = \int (9x^4+6x^2+1)\,dx = \frac{9}{5}x^5+2x^3+x+c$

10) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}}\,\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}\,dx$

$= -2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{-1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{تحذف}} dx = \frac{-4}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+c$

11) $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$ (محلول كمثال)

12) $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$

13) $\int \csc^2 2x\,dx = \frac{-1}{2}\cot 2x + c$

14) $\int \tan^2 8x\,dx = \int (\sec^2 8x - 1)\,dx = \frac{1}{8}\tan 8x - x + c$

15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 2x}\,dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2\csc^2 2x)\,dx = \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$

16) $\int \cos^2 2x\,dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

17) $\int \sin^2 8x\,dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 16x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + c$

18) $\int \cos^4 3x\,dx = \int (\cos^2 3x)^2\,dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x)^2\,dx$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos^2 6x)\,dx$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x))\,dx$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 12x)\,dx$

$= \int (\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 12x)\,dx$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$

ملاحظة / الكثير من الاسئلة لها اكثر من حل واحد.

التكامل المحدد : لتكن الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فأن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث b و a حدود التكامل ويسمى a الحد الادنى و b الحد الاعلى ويسمى $F(x)$ الدالة المقابلة.

مثال/ جد التكاملات التالية:

$$1)\ \int_1^2 2x\,dx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = [x^2]_1^2 = (2)^2 - (1)^2 = 3$$

تعويض الحد الاعلى تعويض الحد الادنى

$$2)\ \int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x(9+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)(9+x^2)^{3/2}\right]_0^4 = \left[\tfrac{1}{3}(9+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}(9+16)^{3/2} - \frac{1}{3}(9+0)^{3/2} = \frac{1}{3}(5^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(3^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال/ اذا كانت $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة a

الحل

$$\frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,2x\,dx = 2 \Rightarrow \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2 \Rightarrow \sqrt{16+9} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{25} - 2 = \sqrt{a^2+9} \Rightarrow 5 - 2 = \sqrt{a^2+9} \Rightarrow 3 = \sqrt{a^2+9}$$

$$\Rightarrow \cancel{9} = a^2 + \cancel{9} \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

ملاحظة/ $a>b$ ، $\int_a^b f = -\int_b^a f$ فمثلاً:

$$\int_3^{-1} 4\,dx = -\int_{-1}^{3} 4\,dx = -4[x]_{-1}^{3} = -4[3-(-1)]$$

$$= -4[3+1] = -4(4) = -16$$

ملاحظة/ $\int_a^a f = 0$ فمثلاً:

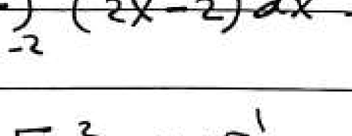
$$\int_2^2 3x^2\,dx = [x^3]_2^2 = 8-8=0$$

ملاحظة مهمة/ اذا أعطي لنا في السؤال دالة f تحت القيمة المطلقة فنساويها بالصفر ونستخرج قيم x التي تساوي عندها الدالة f بالصفر فاذا كانت:

- هذه القيم $\notin$ للفترة المعطاة في السؤال فلا نجزئ التكامل.
- هذه القيم $\in$ للفترة المعطاة في السؤال فنجزئ التكامل ولذلك يجب ان نختبرها فاذا كانت نهاية صغرى فنسبق الجزء الاول من التكامل بإشارة (-)، اما اذا كانت نهاية عظمى فنسبق الجزء الثاني من التكامل بإشارة (+).

مثال/ اوجد قيمة $\int_{-2}^{3} |2x-2|\,dx$

الحل $2x-2=0 \Rightarrow x=1 \in [-2,2]$



$\therefore$ $x=1$ تمثل نهاية صغرى

$\therefore$ نجزئ التكامل ونسبق الجزء الاول بإشارة (-)

$$\therefore \int_{-2}^{3} |2x-2|\,dx = -\int_{-2}^{1}(2x-2)\,dx + \int_{1}^{3}(2x-2)\,dx$$

$$= -[x^2-2x]_{-2}^{1} + [x^2-2x]_{1}^{3}$$

$$= -[(1-2)-(4+4)] + [(9-6)-(1-2)]$$
$$= 9 + 4 = 13$$

ملاحظة : اذا كانت الدالة معرفة بصيغتين وان $x \in [a,b]$ فنثبت ان الدالة مستمرة عند x ثم نكاملها.

مثال/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2, & \forall x \geq 2 \\ 4x+6, & \forall x < 2 \end{cases}$ اوجد قيمة $\int_1^4 f(x)\,dx$

الحل الدالة معرفة عند $x=2$ $f(2) = 3(2)^2 + 2 = 14$

اليمين $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x^2+2) = 3(4)+2 = 14 = L_1$

اليسار $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (4x+6) = 4(2)+6 = 14 = L_2$

$\therefore L_1 = L_2 \Rightarrow \therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 14$ موجودة

$\therefore f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 14$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=2$

$\therefore f$ مستمرة على $[1,4]$ لانها مستمرة عند $x=2$

$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 (4x+6)\,dx + \int_2^4 (3x^2+2)\,dx$$

$$= \left[2x^2+6x\right]_1^2 + \left[x^3+2x\right]_2^4$$

$$= [(2(4)+6(2)) - (2(1)+6(1))] + [(64+8)-(8+4)]$$
$$= 72$$

مثال / احسب: $\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx$

الحل

$$= \int_0^2 \sqrt{(x-1)^2}\,dx$$ مربع كامل

$$= \int_0^2 |x-1|\,dx$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\underset{0}{|}\;- - - -\;\underset{1}{*}\;+ + + + +\;\underset{2}{|}$$

نهاية صغرى عند $x=1$

$$\int_0^2 |x-1| = -\int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-(0)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}(4)-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

تذكرة: عند التكامل المحدد $\sqrt{x^2} = |x|$

عند التكامل الغير محدد $\sqrt{x^2} = \mp x$

حل تمارين (4-3)

١- احسب كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{3}{2}(4)-2(+2)\right]-\left[\frac{3}{2}(4)-2(-2)\right] = -8$

b) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)\,dx = \left[-x^{-1}+x^2+x\right]_{1}^{2}$

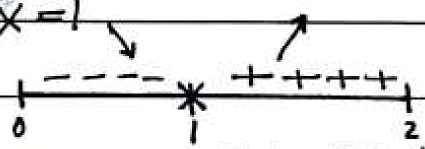
$= \left[\left(\frac{-1}{2}+4+2\right)-(-1+1+1)\right] = \frac{9}{2}$

c) $\int_{1}^{3}(x^4+4x)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5+2x^2\right]_{1}^{3}$

$= \left[\left(\frac{243}{5}+18\right)-\left(\frac{1}{5}+2\right)\right] = \frac{322}{5}$

d) $\int_{0}^{2}|x-1|\,dx$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$



نقطة التجزئة عند $x=1$:

$\therefore \int_{0}^{2}|x-1|\,dx = -\int_{0}^{1}(x-1)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx$

$= -\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{2}$

$= -\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-(0)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}(4)-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=1$

e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (x+\cos x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$= [(0+\sin 0)] - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+\sin\frac{-\pi}{2}\right] = \frac{-\pi^2}{8}+1$

f) $\int_{3}^{2} \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_{2}^{3} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{2}^{3}$

$= -\left[\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)\right] = \frac{-59}{6}$

g) $\int_{1}^{3} \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx = \int_{1}^{3}\left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

$= \int_{1}^{3}(2x-4+5x^{-2})\,dx = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_{1}^{3}$

$= \left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5) = \frac{10}{3}$

2- أثبت ان $F(x)$ هي دالة مقابله للدالة $f(x)$ حيث

$F(x) = \sin x + x \;,\; F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\rightarrow R$

$f(x) = 1+\cos x \;,\; f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\rightarrow R$

ثم احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

<u>الحل</u> :. $F(x)$ هي دالة مقابله للدالة $f(x)$

$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = [F(x)]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos x)\,dx = [\sin x + x]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left[\left(\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)-(\sin 0+0)\right] = \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-(0)\right] = \frac{3+\pi}{6}$

٣- اوجد كلاً من التكاملات الاتية:

a) $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\,dx = \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^3+\cancel{2x^2}+x-\cancel{2x^2}-4x-2)\,dx = \int_1^4 (x^3-3x-2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^4 = \left[\left(\frac{1}{4}(256)-\frac{3}{2}(16)-8\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right)\right]$

$= \left[(64-24-8)-\left(\frac{1-6-8}{4}\right)\right] = 32+\frac{13}{4} = \frac{141}{4}$

b) $\int_{-1}^1 |x+1|\,dx$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ تمثل الحد الادنى

اي ان النقطة الحرجة عند الحد الادنى للفترة فلا تجزئ وتكون اعلى محور x (موجب)

$\therefore \int_{-1}^1 (x+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1$

$= \left[\left(\frac{1}{2}(1)^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}(-1)^2+(-1)\right)\right] = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

c) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx = \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)}\,dx = \int_2^3 \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{(x-1)}}\,dx$

$= \int_2^3 (x^3+x^2+x+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3$

$= \left[\left(\frac{81}{4}+9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(4+\frac{8}{3}+2+2\right)\right]$

$= \frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12-\frac{8}{3}-8 = \frac{243+54+144-32-96}{12} = \frac{313}{2}$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x+4x^{\frac{1}{2}}+4)dx$

$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+4(\frac{2}{3})x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= (\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3})-(0) = \frac{76}{15}$

4- اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x, \forall x \geq 3\\ 6, \forall x < 3\end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)dx$

الحل : الدالة معرفة بصيغتين

نبحث الاستمرارية :

$f(3)=2(3)=6$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2(3)) = 6 = L_1$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(6) = 6 = L_2$

$\because L_1 = L_2$

∴ يوجد للدالة $\lim_{x\to 3}$

$\because f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$

∴ الدالة مستمرة

$\therefore \int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 6dx + \int_3^4 2x\,dx$

$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4 = [(18-6)] + [(16-9)] = 19$

5- اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2, & \forall x \geq 0\\ 2x, & \forall x<0\end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

الحل

$f(0)=3(0)^2=0$ (الدالة معرفة عند $x=0$)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3x^2)=3(0)^2=0=L_1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x)=2(0)=0=L_2$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=6$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=0$

$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} 2x\,dx+\int_{0}^{3} 3x^2\,dx$

$=\left[x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^3\right]_{0}^{3}$

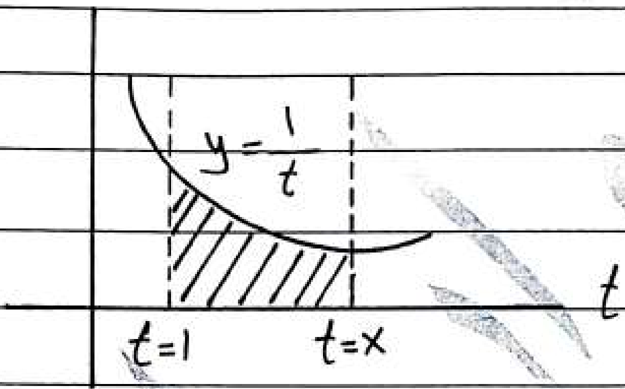
$=[0-1]+[27-0]$

$=-1+27=26$

اللوغاريتم الطبيعي : يعرف $\log x$ الطبيعي ويرمز له بالرمز $\ln x$

$$F(x) = \ln x$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad ; \forall \ x > 0$$



وان هذا التكامل $\forall x > 1$ والمساحة من الاعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الاسفل بالمحور t ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$ واذا كانت حالة $x = 1$ تطابق الحدان الايمن والايسر للمساحة فتصبح = صفر .
اي ان

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

اما اذا كانت $0 < x < 1$ في هذه الحالة يكون الحد الايسر المستقيم $t = x$ والحد الايمن $t = 1$ ويكون التكامل هو

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$$

وفي جميع الحالات يجب ان تكون $x > 0$

$$\boxed{y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad , \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}}$$

امثلة:

1) $y=\ln(3x^2+4) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{6x}{3x^2+4}$

2) $y=\ln(2-\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x}{2-\sin x}$

3) $y=\sqrt{\ln(2x)} \Rightarrow y=(\ln(2x))^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(\ln(2x))^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{2x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(2x)}}$

4) $y=\ln x^5 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{5x^4}{x^5}=\frac{5}{x}$

أو: $y=\ln x^5 \Rightarrow y=5\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=5\cdot\frac{1}{x}$

5) $y=\ln(\tan^2 x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2\tan x\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sec^2 x}{\tan x}$

خواص:

1) $\log_e(x)=\ln(x) \quad , x>0$
2) $\ln(1)=0$
3) $\ln(ax)=\ln a+\ln x \quad , a>0, a\neq1, x>0$
4) $\ln(x^n)=n.\ln x \quad , x>0$
5) $\ln(\frac{a}{x})=\ln a-\ln x \quad , a>0, a\neq1, x>0$
6) $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a} \quad , a>0, a\neq1, x>0$

مشتقة الدالة الاسية e^u :

$$\boxed{y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx} \quad , \quad d(e^u) = e^u\, du}$$

الامثلة:

1) $y = e^{x^2-3x+2}$

$$\frac{dy}{dx} = (2x-3)\, e^{x^2-3x+2}$$

2) $y = e^{\sin 5x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5\cos 5x\, e^{\sin 5x}$

3) $y = e^{x+\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+\sec^2 x)\, e^{x+\tan x}$

4) $y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x e^x + e^x(1)(x^2) = (2x+x^2)\, e^x$

خواص:

1) $\ln e = 1$

2) $e^{\ln x} = x$

3) $e^0 = 1$

4) $\ln e^x = x$

5) $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$

6) $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

بما ان التكامل هو العملية العكسية للتفاضل
اذن :

$$\boxed{① \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c}$$

$$\boxed{② \int e^{u} du = e^{u} + c}$$

توضيح: ١- في حالة الدالة الكسرية نبحث عن مشتقة المقام فان توفرت في البسط فنحذفها ونكامل كما مبين بالقاعدة الاولى اعلاه.
٢- عند تكامل الدوال الاسية يجب ان تكون مشتقة الاس متوفرة ومن ثم نحذفها ونكامل كما مبين بالقاعدة الثانية اعلاه.

مثال / جد التكاملات الاتية:

1) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx$ | مشتقة المقام = $2x+5$

$= \ln|x^2+5x+1| + c$

2) $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx$ | مشتقة المقام = $3x^2$ فلذلك نضرب البسط في 3 ونضع $\frac{1}{3}$ خارج التكامل

$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5} dx$

3) $\int \frac{e^x}{3+e^x} dx = \ln|3+e^x| + c$

4) $\int \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta = \ln|1+\sin\theta| + c$

5) $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$

6) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$

7) $\int \frac{\sec^2 3x}{1+\tan 3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|1+\tan 3x| + c$

8) $\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x)}_{\text{تحذف}} e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

9) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + c$

10) $\int e^{\tan y}\sec^2 y\,dy = e^{\tan y} + c$

11) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = (2)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{تحذف}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

12) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-x}\,dx$

$= -\left[e^{-x}\right]_{\ln 3}^{\ln 4} = -\left[\frac{1}{\ln e^4} - \frac{1}{\ln e^3}\right]$

$= -\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right] = -\frac{3-4}{12} = \frac{1}{12}$

ملاحظة / اذا كان الاساس في الدالة الاسية ثابت موجب فتكون المشتقة :

$$\frac{d}{dx}(a^u) = (\text{الدالة})(\ln(\text{الاساس}))(\text{مشتقة الاس}) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

امثلة :

1) $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}(\ln 3)(2)$

2) $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}(\ln 2)(-2x)$

3) $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x}(\ln 5)(\cos x)$

وعليه فأن التكامل :

$$\int a^u \, du = \frac{1}{\ln a} a^u + c$$

امثلة :

1) $\int 4^x \, dx = 4^x \left(\frac{1}{\ln 4}\right) + c$

2) $\int 8^{x^3-3x+2}(x^2-1)\,dx$

$= \frac{1}{3}\int 8^{x^3-3x+2} \underbrace{3(x^2-1)\,dx}_{\text{تحذف}}$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{\ln 8} \cdot 8^{x^3-3x+2} + c$

حل تمارين (4-5)

1- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $y = \ln 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}x} \cdot \frac{\cancel{1}}{2} = \frac{1}{x}$

c) $y = \ln(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

d) $y = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow y = 3\ln x^{-1} = -3\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x}$

f) $y = \ln(2-\cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (-10x+3)\,e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln 9 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{-\frac{x}{4}}\left(\frac{-1}{4}\right)\ln 7$

j) $y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 e^x + e^x(2x) = x^2 e^x + 2xe^x$

2- جد التكاملات الآتية:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = [\ln|x+1|]_0^3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 - 0 = \ln 4$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = [\ln|x^2+9|]_0^4 = \ln 25 - \ln 9 = \ln\frac{25}{9}$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$

$= \frac{1}{2}[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}] = \frac{1}{2}[25-9] = 8$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\int_0^{\ln 2} e^{-x}(-1)dx = -[e^{-x}]_0^{\ln 2}$

$= -[e^{-\ln 2} - e^{-0}] = -[e^{\ln 2^{-1}} - 1] = -(\frac{1}{2}-1) = \frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 (1+e^x)^2 \underset{\text{تحذف}}{\underline{\underline{e^x}}} dx = \frac{1}{3}[(1+e^x)^3]_0^1$

$= \frac{1}{3}[(1+e^3)^3 - (1+e^0)^3] = \frac{1}{3}[(1+e^3)^3 - (1+1)^3]$

$= \frac{1}{3}[(1+e^3)^3 - 8]$

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = [\ln|x^2+4x+1|]_0^1 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \underset{\text{تحذف}}{\frac{1}{\underline{\underline{2\sqrt{x}}}}} dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^4$

$= e^2 - e$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx = \left[\ln|2+\tan x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2+\tan\frac{-\pi}{4})$

$= \ln(2+1) - \ln(2-1) = \ln 3 - 0 = \ln 3$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \underbrace{\cos x\,dx}_{\text{تكن}}$

$= 2\left[(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2(1-\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2-\sqrt{2}$

j) $\int \cot^3 5x\,dx = \int \cot^2 5x \cdot \cot 5x\,dx$

$= \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\,dx = \int (\cot 5x \csc^2 5x - \cot 5x)\,dx$

$= \int \left(\frac{-1}{5}\cot 5x\,(-5\csc^2 5x) - \frac{1}{5}\frac{5\cos 5x}{\sin 5x}\right)dx$

$= \frac{-1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\,dx$

$= \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{\cos\frac{\pi}{4}} + e^{\cos 0} = -e^0 + e^1 = -1+e$

l) $\int_1^2 x e^{-\ln x}\,dx = \int_1^2 x e^{\ln x^{-1}}\,dx = \int_1^2 x\, x^{-1}\,dx$

$= \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2-1 = 1$

3- اثبت ان :

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

$$L.H.S = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left[(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$= 2\left[(2-1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{3/2}\right] = 2(1) = 2 = R.H.S$$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$

$$3x-6=0 \Rightarrow x=2$$

$$- - - - \; 2 \; + + +$$

$$\therefore L.H.S = \int_{-2}^{4}|3x-6|\,dx = -\int_{-2}^{2}(3x-6)\,dx + \int_{2}^{4}(3x-6)\,dx$$

$$= \left[\frac{-3}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= -\left[\left(\frac{3}{2}(4)-12\right) - \left(\frac{3}{2}(4)+12\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2}(16)-24\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 4-12\right)\right]$$

$$= -\left[\cancel{6} - 12 - \cancel{6} - 12\right] + \left[\cancel{24} - \cancel{24} - 6 + 12\right]$$

$$= -(-24) + 6 = 24 + 6 = 30 = R.H.S$$

4- $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)\,dx=6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx=32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

الحل

$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx+\int_{-2}^{6} 3\,dx=32$

$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x) + [3x]_{-2}^{6}=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx+(18+6)=32$

$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx+24=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx=8$

$\because \int_{-2}^{6} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{6} f(x)\,dx$

$\therefore 8=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx=2$

5- جد قيمة $a\in R$ اذا علمت ان $\int_1^a (x+\frac{1}{2})\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

الحل $\int_1^a (x+\frac{1}{2})\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a=2\,[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right]$

$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1=2 \Rightarrow \left[\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}=3\right]\cdot 2$

$a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0$

اما $a=-3$ تهمل (لانها اصغر من الحد الادنى)

او $a=2$

6- لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k\in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الحل $f(x)=x^2+2x+k \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

∴ نقطة النهاية الصغرى هي $(-1,-5)$ وهي تحقق المعادلة

$-5=(-1)^2+2(-1)+k \Rightarrow k=-4$

$\therefore f(x)=x^2+2x-4 \Rightarrow \int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right]_1^3$

$=(9+9-12)-(\frac{1}{3}+1-4)=\frac{26}{3}$

7- اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار:

$\int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx$

الحل

$f(x)=(x-3)^3+1 \Rightarrow f'(x)=3(x-3)^2 \Rightarrow f''(x)=6(x-3)$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=(3-3)^2+1=1$

∴ نقطة الانقلاب هي $(3,1)$

$\therefore a=3\ ,\ b=1$

$\therefore \int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx$

$=\int_0^1 3(x-3)^2\,dx-\int_0^3 6(x-3)\,dx$

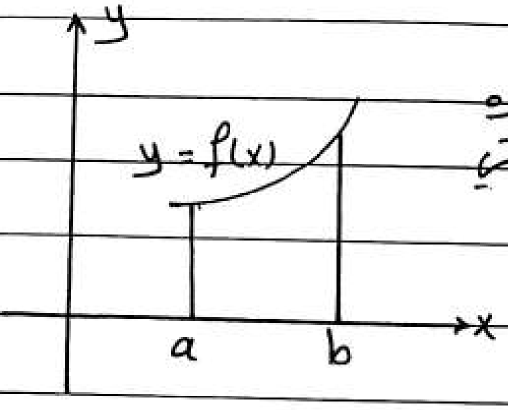
$=3\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^1-6\left[\frac{1}{2}(x-3)^2\right]_0^3$

$=3\left[\frac{1}{3}(1-3)^3-\frac{1}{3}(0-3)^3\right]-6\left[\frac{1}{2}(3-3)^2-\frac{1}{2}(0-3)^2\right]$

$=19+27=46$

المساحات المستوية:

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات:



لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$ فلإيجاد هذه المساحة نتبع التالي:

أولاً: نجعل $f(x) = 0$ ونجد قيم x

١- عند اعطاء فترة في السؤال فقيم x التي تنتمي للفترة تجزئ التكامل وقيم x التي لا تنتمي للفترة او تقع على أحد اطرافها لا تجزئ.

٢- عند عدم اعطاء فترة في السؤال نأخذ جميع قيم x بالترتيب فتكون هي حدود التكامل.

ثانياً: نجري عملية التكامل للدالة لكل فترة بشكل مستقل ونجد الناتج.

ثالثاً: نجد المساحة الكلية بجمع القيم المطلقة لكل تكامل.

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$

الحل $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0$, $x = \mp 2$ $\quad -2 \quad 0 \quad 2$

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= |(0) - (4-8)| + |(4-8) - (0)| = 4 + 4 = 8 \text{ unit}^2$$

مثال/ جد المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$, $x=3$

الحل $x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,3]$

$A=\left|\int_1^3 x^2 dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3\right| = \left|\frac{26}{3}\right| = \frac{26}{3}\ unit^2$

مثال/ جد المساحة المحددة بين منحنى الدالة $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات.

الحل $x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow x(x-2)(x-1)=0$

$x=0\ ,\ x=2\ ,\ x=1$

0 1 2

$A=\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx\right|$

$A=\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2\right|$

$A=\left|\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(0)\right| + \left|(4-8+4)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right|$

$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ unit^2$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بين $y=\cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi,\pi]$

الحل $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{-\pi}{2}\ ,\ \frac{-3\pi}{2}$

$\in \quad \notin \quad \in \quad \notin$

$-\pi \quad \frac{-\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi$

∴ فترات التكامل $\left[-\pi,\frac{-\pi}{2}\right]\ ,\ \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$A=\left|\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right|$

$=\left|\left[\sin x\right]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}\right| + \left|\left[\sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$

$=\left|\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)-\sin(-\pi)\right| + \left|\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right| + \left|\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right|$

$=|-1+0|+|1+1|+|0-1| = |-1|+|2|+|-1|$

$=4\ unit^2$

ملاحظة: اذا كانت الفترة المعطاة في السؤال موجبة فيمكن ترك القيم السالبة لانها ستعطي نتائج خارج الفترة.

مثال/ جد المساحة المحددة بين المنحني $f(x)=\sin 4x$ والمحور السيني وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

الحل $\sin 4x=0 \Rightarrow 4x=0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi$

نضرب في $\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $x=0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

$\in \quad \in \quad \in$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 4x\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0\right|+\left|\frac{-1}{4}\cos 2\pi+\frac{1}{4}\cos\pi\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}\right|$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\ \text{unit}^2$$

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين :

لايجاد المساحة A المحددة بالدالتين $f(x)$, $g(x)$ المعرفتين على الفترة $[a,b]$ نجد الدالة المولدة $h(x)$

حيث :

$h(x) = f(x) - g(x)$

ويكون التعامل مع الدالة الجديدة $h(x)$ ـ1 نجعل $h(x)=0$ ونجد قيم x

ـ2 $A = \left|\int h(x)dx\right|$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $y=\sqrt{x}$, المستقيم $x=y$

الحل $h(x) = \sqrt{x} - x \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}-x=0 \Rightarrow \sqrt{x}=x$

$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x=0 , x=1$

$A = \left|\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1\right|$

$= \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - 0\right| = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}\ unit^2$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بين $f(x)=x^3$, $g(x)=x$

الحل $h(x) = x^3 - x \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow x^3 - x = 0$

$x(x^2-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=0 , x=1 , x=-1$

$A = \left|\int_{-1}^0 (x^3-x)dx\right| + \left|\int_0^1 (x^3-x)dx\right|$

$A = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$

$A = \left|0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ unit^2$

مثال/ جد المساحة المحددة بالمنحنيين $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل $h(x)=\cos x-\sin x \Rightarrow \cos x-\sin x=0$

$\Rightarrow [\cos x=\sin x] \div \cos x \Rightarrow 1=\tan x$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$

يكون tan موجب في الربع الاول والربع الثالث

في الربع الاول $\Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

في الربع الثالث $\Rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$-\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{2}$

$$A=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\,dx\right|$$

$$A=\left|[\sin x+\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A=\left|\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0-\cos 0)\right|+\left|\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0-1)\right|+\left|(1-0)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$A=\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|+\left|1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$

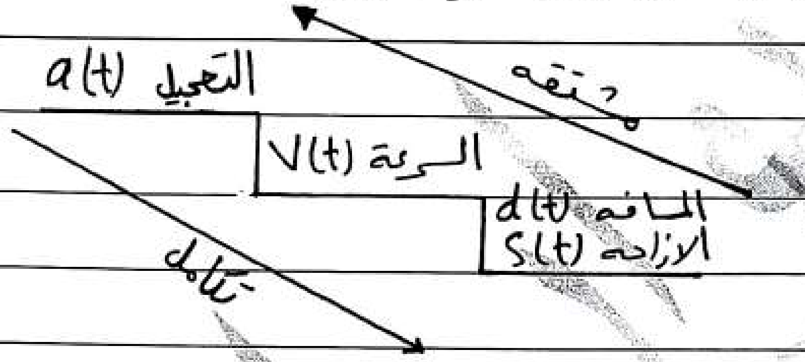
$$A=\left|\sqrt{2}+1\right|+\underline{\left|1-\sqrt{2}\right|}$$

$$A=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}\ \text{unit}^2$$

ملاحظة: مطلق طرح كميتين = الكبير - الصغير

تطبيقات فيزيائيه على التكامل :

نرمز للمسافة بالرمز (d) ، ونرمز للازاحه او البعد او الموقع او الموضع بالرمز (S) ، ونرمز للسرعة بالرمز (V) ، ونرمز للتعجيل بالرمز (a) ، ونرمز للزمن (t)



ملاحظات :

1- عندما نكامل دالة التعجيل a(t) بالنسبه للزمن t فنحصل على دالة السرعة V(t) وعندما نكامل دالة السرعة بالنسبه للزمن t فنحصل على دالة الازاحه d(t).

2- اذا بدأ الجسم حركته من السكون فإن السرعة = صفر ، الازاحه = صفر الزمن = صفر لحظة بدأ الحركة.

3- عندما تكون للجسم سرعة ابتدائيه معينه يتحرك بها وفي لحظه معينه تحرك الجسم بسرعة اخرى ففي هذه اللحظه تكون السرعة تساوي السرعه الابتدائيه . بينما الازاحه والزمن يساويان صفر في تلك اللحظه.

4- عندما يصل الجسم الى اقصى ارتفاع ففي تلك اللحظه تكون السرعة تساوي صفر بينما الازاحه والزمن لا يساويان صفر.

5- عندما يعود الجسم الى موضعه الاول فأن الازاحه = صفر

6- لايجاد الازاحه (البعد) خلال فترة زمنيه معينه معطاة في السؤال فنكامل دالة السرعة ضمن تلك الفترة.

7- لإيجاد المسافة المقطوعة خلال فترة زمنية معينة معطاة في السؤال فنكامل دالة السرعة تحت القيمة المطلقة ولذلك وقبل أن نكامل دالة السرعة يجب أن نساويها بالصفر فإذا كانت:

أ- هذه القيم تنتمي الى الفترة المعطاة في السؤال فنجزئ التكامل.

ب- هذه القيم لا تنتمي الى الفترة المعطاة في السؤال أو تمثل الحد الادنى او الحد الاعلى للفترة فلا نجزئ التكامل.

ثم نكامل دالة السرعة ضمن الشروط التي حصلنا عليها.

8- لإيجاد المسافة المقطوعة خلال ثانية معينة t فنكامل دالة السرعة بدون القيمة المطلقة (او تحت القيمة المطلقة والقيم لا تنتمي للفترة) ضمن الفترة $[t-1, t]$

9- لإيجاد بعد الجسم عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (a) ثانية فهنا يعني نستخرج الازاحة في الفترة $[0, a]$.

10- دائماً نكامل التعجيل تكاملاً غير محدد.

مثال/ جسم يتحرك بخط مستقيم وبسرعة قدرها $(2t-4)\,m/s$.
احسب:
1- المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[1,4]$.
2- الازاحة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[1,4]$.
3- المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية العاشرة .
4- بُعد الجسم عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (4) ثوانٍ .

الحل

1) $2t-4=0 \Rightarrow t=2$ $\quad 1 \quad 2 \quad 4$

$$d=\left|\int_1^2 (2t-4)\,dt\right|+\left|\int_2^4 (2t-4)\,dt\right|$$

$$=\left|\left[t^2-4t\right]_1^2\right|+\left|\left[t^2-4t\right]_2^4\right|$$

$$=\left|(4-8)-(1-4)\right|+\left|(16-16)-(4-8)\right|$$

$$=\left|-4+3\right|+\left|4\right|=1+4=5\,m$$

2) $$S=\int_1^4 (2t-4)\,dt=\left[t^2-4t\right]_1^4=(16-16)-(1-4)$$
$$=3\,m$$

3) $$d=\left|\int_9^{10} (2t-4)\,dt\right|=\left|\left[t^2-4t\right]_9^{10}\right|$$

$$=\left|(100-40)-(81-36)\right|=15\,m$$

4) $$S=\int_0^4 (2t-4)\,dt=\left[t^2-4t\right]_0^4$$

$$=(16-16)-0=0$$ اي عاد الجسم الى موضعه الاول

مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت قدره $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته $(82\ m/s)$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة. جد المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية الرابعة. ثم جد بعد الجسم عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ١٠ ثواني.

الحل

$$V(t) = \int a(t)\,dt$$

$$V(t) = \int 18\,dt$$

$$V(t) = 18t + c$$

$$82 = 18(4) + c$$

$$82 = 72 + c \Rightarrow c = 10$$

$$\therefore V(t) = 18t + 10$$

$$d = \left|\int_3^4 (18t + 10)\,dt\right| = \left|\left[9t^2 - 10t\right]_3^4\right|$$

$$d = |(144 + 40) - (81 + 30)|$$

$$= |184 - 111| = 73\,m$$

$$S = \int_0^{10} (18t + 10)\,dt$$

$$= \left[9t^2 + 10t\right]_0^{10} = (900 + 100) - 0 = 1000\,m$$

حل تمارين (4 - 6)

1- جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^4-x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$ ، $x=-1$.

الحل $x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0 , x=1$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^4-x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^4-x)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$A=\left|0-\left(\frac{-1}{5}-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)-0\right|$$

$$A=\left|\frac{2+5}{10}\right|+\left|\frac{2-5}{10}\right|=\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=1 \text{ unit}^2$$

2- جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحور السينات.

الحل $x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

اما $x^2=-1 \notin R$ يهمل

او $x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

$-2 \quad 2 \quad 3$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{-2}^{2}\right|+\left|\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{2}^{3}\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{32}{8}-8-8\right)-\left(\frac{-32}{5}+8+8\right)\right|+\left|\left(\frac{243}{5}-27-12\right)-\left(\frac{32}{5}-8-8\right)\right|$$

$$A=\left|\frac{32}{5}-16+\frac{32}{5}-16\right|+\left|\frac{243}{5}-39-\frac{32}{5}+16\right|$$

$$A=\left|\frac{64}{5}-32\right|+\left|\frac{211}{5}-23\right|$$

$$A=\left|\frac{64-160}{5}\right|+\left|\frac{211-115}{5}\right|=\frac{96}{5}+\frac{96}{5}=\frac{192}{5} \text{ unit}^2$$

٣- جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات.

الحل $x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=\mp1$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^4-x^2)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}\right|$$

$$A=\left|0-\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-0\right|$$

$$A=\left|\frac{3-5}{15}\right|+\left|\frac{3-5}{15}\right|=\frac{4}{15}\ unit^2$$

4- جد المساحة المحددة بالمنحني $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

الحل $\sin 3x=0 \Rightarrow 3x=0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ -\pi\ ,\ -2\pi$

(ضربنا في $\frac{1}{3}$) $\Rightarrow x=0\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{-\pi}{3}\ ,\ \frac{-2\pi}{3}$

$\in \quad \in \quad \notin \quad \notin \quad \notin$

$0 \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$

$$A=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}\right|+\left|\left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A=\left|\frac{-1}{3}\cos\pi+\frac{1}{3}\cos 0\right|+\left|\frac{-1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\pi\right|$$

$$A=\left|\frac{-1}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)\right|+\left|\frac{-1}{3}(0)+\frac{1}{3}(-1)\right|$$

$$A=\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\ unit^2$$

5- جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

الحل $y = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow y = \cos 2\pi$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx \right|$

$A = \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$

$A = \left| \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 \right| + \left| \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right|$

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ unit}^2$

6- جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$ ، $y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2, 5]$

الحل $\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ بالتربيع

$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0\right] \cdot 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$A = \left| \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right) dx \right|$

$A = \left| \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 \right|$

$A = \left| \left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right) \right|$

$A = \left| \frac{25}{4} - \frac{16}{3} - 1 + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{25}{4} - \frac{14}{3} - 1 \right|$

$A = \left| \frac{75 - 56 - 12}{12} \right| = \frac{7}{12} \text{ unit}^2$

7- جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^4-12$ و $y=x^2$

الحل $x^4-x^2-12=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+3)=0 \Rightarrow$ اما $x^2=-3 \notin R$ تهمل

او $x=\mp 2$

$-2 \qquad 2$

$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-x^2-12)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-12x\right]_{-2}^{2}\right|$

$A=\left|\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24\right)-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)\right|$

$A=\left|\frac{64}{5}-\frac{16}{3}-48\right| = \left|\frac{192-80-720}{15}\right| = \frac{608}{15}\ unit^2$

8- جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sin x\cos x$ حيث $x\in[0,2\pi]$.

الحل $\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x(\cos x-1)=0 \Rightarrow$ اما $\sin x=0 \Rightarrow x=0, x=\pi, x=2\pi$

او $\cos x=1 \Rightarrow x=0, x=2\pi$

$0 \qquad \pi \qquad 2\pi$

$A=\left|\int_0^{\pi}[(\sin x)\cos x-\sin x]\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}[(\sin x)\cos x-\sin x]\,dx\right|$

$A=\left|\left[\frac{(\sin x)^2}{2}+\cos x\right]_0^{\pi}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}(\sin x)^2+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$

$A=|(0+\cos\pi)-(0+\cos 0)|+|(0+\cos 2\pi)-(0+\cos\pi)|$

$A=|-1-1|+|1+1| = 2+2 = 4\ unit^2$

وجد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$ و $g(x)=\sin x$ حيث $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$.

الحل $\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$

$A=\left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)\,dx\right|=\left|[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$

$A=\left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)-(-\cos 0+0)\right|$

$A=\left|\frac{3\pi}{2}+1\right|=\frac{3\pi+2}{2}\ unit^2$

١٥- جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات.

الحل $x^3+4x^2+3x=0 \Rightarrow x(x^2+4x+3)=0$

$x(x+3)(x+1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-3\ ,\ x=-1$

$A=\left|\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)\,dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}(x^3+4x^2+3x)\,dx\right|$

$A=\left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}\right|+\left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|$

$A=\left|\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}\right)\right|+\left|0-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\right|$

$A=\left|\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{81}{4}+36-\frac{27}{2}\right|+\left|\frac{5}{12}\right|$

$A=\left|\frac{-\cancel{80}^{\,20}}{\cancel{4}_{\,1}}-\frac{\cancel{24}^{\,12}}{\cancel{2}_{\,1}}+36-\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{5}{12}\right|$

$A=\left|4-\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{5}{12}\right|=\left|\frac{32+5}{12}\right|=\left|\frac{37}{12}\right|=\frac{37}{12}\ unit^2$

11- جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)=(3t^2-6t+3)m/s$ احسب:

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$.

b) الازاحة في الفترة $[0,5]$.

الحل a) $[3t^2-6t+3=0]\div 3$

$t^2-2t+1=0 \Rightarrow (t-1)^2=0 \Rightarrow t=1$ تهمل $\notin [2,4]$

$d=\left|\int_2^4 (3t^2-6t+3)\,dt\right| = \left|\left[t^3-3t^2+3t\right]_2^4\right|$

$=|(64-48+12)-(8-12+6)| = |28-2| = 26\,m$

b) $s=\int_0^5 (3t^2-6t+3)\,dt = \left[t^3-3t^2+3t\right]_0^5$

$=(125-75+15)-(0)=65\,m$

12- جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\,m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\,m/s$ احسب:

a) السرعة عند $t=2$. b) المسافة خلال الفترة $[1,2]$.

c) الازاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

الحل a) $V(t)=\int (4t+12)\,dt \Rightarrow V(t)=2t^2+12t+c$

$90=32+48+c \Rightarrow c=10$

$V(t)=2t^2+12t+10 \Rightarrow V(2)=8+24+10=42\,m/s$

b) $d=\left|\int_1^2 (2t^2+12t+10)\,dt\right| = \left|\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_1^2\right|$

$=\left|\left(\frac{16}{3}+24+20\right)-\left(\frac{2}{3}+6+10\right)\right| = \left|\frac{14}{3}+28\right| = \frac{98}{3}\,m$

c) $s=\int_0^{10} (2t^2+12t+10)\,dt$

$s=\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_0^{10} = \left(\frac{2000}{3}+600+100\right)-0$

$s=\frac{4100}{3}\,m$

13- تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t-6t^2)\ m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، ثم أحسب التعجيل عندها.

الحل

$s=\int v(t)\,dt$

$s=\int(100t-6t^2)\,dt$

$s=50t^2-2t^3+c$

∵ الجسم بدأ حركته من السكون

∴ $t=0$, $s=0$

$0=0-0+c \Rightarrow c=0$

$s=50t^2-2t^3$

الازاحة = صفر عندما يعود الجسم الى موضعه الاول

$[50t^2-2t^3=0]\div 2$

$25t^2-t^3=0$

$t^2(25-t)=0$

اما $t^2=0 \Rightarrow t=0$ يهمل

او $t=25\ sec$ الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول

$a(t)=v'(t)$

$a(t)=100-12t$

$a(25)=100-12(25)=100-300=-200\ m/s^2$

الحجوم الدورانية:

اذا دارت منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فإن الجسم الناشئ من الدوران يسمى جسماً دورانياً.

1- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ حول محور السينات نطبق العلاقة:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b y^2\,dx}$$

2- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x=f(y)$ المستمرة من $y=a$ الى $y=b$ حول محور الصادات نطبق العلاقة:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b x^2\,dx}$$

مثال/ جد حجم المنطقة المحددة بين المنحني $y=\sqrt{x}$ ومحور السينات حيث $0\le x\le 4$.

الحل $V=\pi\int_a^b y^2\,dx$

$$V=\pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4=\pi(8-0)=8\pi\ \text{unit}^3$$

مثال / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y^2=8x$ والمستقيمين $x=0$, $x=2$ حول المحور السيني .

الحل $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^2(8x)dx=\pi[4x^2]_0^2=\pi(16-0)=16\pi \text{ unit}^3$

مثال / جد حجم المنطقة المحددة بين المنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ ومحور الصادات حيث $1\le y\le 4$

الحل $V=\pi\int_a^b x^2dy=\int_1^4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2dy=\pi\int_1^4\frac{1}{y}dy$

$=\pi[\ln|y|]_1^4=\pi(\ln 4-\ln 1)=\pi(\ln 4-0)=\pi\ln 4 \text{ unit}^3$

مثال / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y=2x^2$ والمستقيم $x=5$, $x=0$ حول المحور السيني

الحل $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^5(2x^2)^2dx=\pi\int 4x^4dx$

$=\pi\frac{4}{5}[x^5]_0^5=\frac{4\pi}{5}(3125)=2500\pi \text{ unit}^3$

مثال / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=4x^2$ والمستقيمين $y=16$, $y=0$ حول المحور الصادي .

الحل $y=4x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}y$

$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_0^{16}\frac{1}{4}y\,dy=\pi\left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^{16}=\frac{\pi}{8}(16\times16)=32\pi \text{ unit}^3$

مثال / اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y=\frac{3}{x}$, $1\le y\le 3$ ، دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل $V=\pi\int_a^b x^2dy$, $y=\frac{3}{x}\Rightarrow x=\frac{3}{y}$

$V=\pi\int_1^3\left(\frac{3}{y}\right)^2dy=\pi\int_1^3\frac{9}{y^2}dy=\pi\int_1^3 9y^{-2}dy=\pi 9\left[\frac{-1}{y}\right]_1^3$

$=9\pi\left[\frac{-1}{3}+1\right]=6\pi \text{ unit}^3$

حل تمارين (4 - 7)

1- اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=x^2$ والمستقيمين $x=1, x=2$ حول المحور السيني.

الحل $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_1^2(x^2)^2dx=\pi\int_1^2 x^4dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2$

$=\pi\frac{1}{5}(32-1)=\frac{31}{5}\pi$

2- اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

الحل $x=0 \Rightarrow y=0+1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow [1,4]$ فترة التكامل

$y=x^2+1 \Rightarrow x^2=y-1$

$V=\pi\int_1^4 x^2dy=\pi\int_1^4(y-1)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^4=\pi\left[(8-4)-(\frac{1}{2}-1)\right]$

$=\frac{9}{2}\pi\ unit^3$

3- احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2+x=1$ والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي.

الحل $y^2+x=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y^2+0=1 \Rightarrow y=\mp1 \Rightarrow [-1,1]$ فترة التكامل

$y^2+x=1 \Rightarrow x=1-y^2$

$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_{-1}^1(1-y^2)^2dy=\pi\int_{-1}^1(1-2y^2+y^4)dy$

$=\pi\left[y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^1=\frac{16}{15}\pi\ unit^3$

4- احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2=x^3$ والمستقيمان $x=2$, $x=0$ حول المحور السيني.

الحل $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^2 x^3dx$

$=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\pi[4-0]=4\pi\ unit^3$

أسئلة عامة حول الفصل الرابع:

س1/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $y = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})-(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x})}{(e^{x}-e^{-x})^{2}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}-2e^{0}+e^{-2x}-(e^{2x}+2e^{0}+e^{-2x})}{e^{2x}-2e^{0}+e^{-2x}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cancel{e^{2x}}-2+\cancel{e^{-2x}}-\cancel{e^{2x}}-2-\cancel{e^{-2x}}}{e^{2x}-2e^{0}+e^{-2x}} = \dfrac{-4}{e^{2x}-2+e^{-2x}}$

b) $y=\cos(e^{\pi x})$

$\dfrac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x})\cdot e^{\pi x}\cdot \pi = -\pi e^{\pi x}\sin(e^{\pi x})$

c) $y = e^{x^{2}}\ln|2x|$

$\dfrac{dy}{dx} = e^{x^{2}}\cdot\dfrac{2}{2x} + \ln|2x|\,(2x)\,e^{x^{2}} = \dfrac{e^{x^{2}}}{x} + 2xe^{x^{2}}\ln|2x|$

س2/ جد تكاملات كلاً مما يأتي:

1) $\int (\cos^{4}x-\sin^{4}x)\,dx$

$= \int (\cos^{2}x-\sin^{2}x)(\cos^{2}x+\sin^{2}x)\,dx$

$= \int (\cos 2x)\,(1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

$$2)\ \int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\,dx$$
$$= \int (\sin 2x \cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)\,dx$$
$$= \int \left(\frac{-1}{2}(\cos 2x)^2(-2\sin 2x) + 2\sin 2x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) - 2\right)dx$$
$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{3}(\cos 2x)^3 + \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c$$
$$= \frac{-1}{6}\cos^3 2x + \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$3)\ \int \frac{\ln|x|}{x}\,dx = \int (\ln|x|)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

$$4)\ \int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int 2x^{\frac{-2}{3}}\sin x^{\frac{1}{3}}\,dx$$
$$= 2(3)\int \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\sin x^{\frac{1}{3}}\,dx = -6\cos x^{\frac{1}{3}} + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$$

$$4)\ \int \cot x \csc^3 x\,dx$$
$$= \int \cot x \csc x \csc^2 x\,dx = -\int (-\cot x \csc x)\csc^2 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

$$5)\ \int \frac{dx}{x\ln|x|} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|}\,dx = \ln|\ln|x|| + c$$

$$6)\ \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1| + c$$

7) $\int \sqrt{x-1}\,(x+3)\,dx$ نضيف ونطرح (1) لجعل الاقترانين متشابهه

$= \int (x-1)^{\frac{1}{2}}(x-1+1+3)\,dx$

$= \int (x-1)^{\frac{1}{2}}[(x-1)+4]\,dx$

$= \int [(x-1)^{\frac{3}{2}} + 4(x-1)^{\frac{1}{2}}]\,dx = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + 4(\frac{2}{3})(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

ملاحظة / في خطوة الاضافة والطرح لو كان القوس الاول يحتوي $x+2$ مثلاً فنجعل القوس الثاني $x+2$ ايضاً وذلك بأضافة وطرح العدد (2) وهكذا.

8) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$ نضرب بالعامل المنسب للمقام

$= \int \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx$

$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x})\,dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x)\,dx = \tan x + \sec x + c$

9) $\int \sec x\,dx$ خارج المنهج

$= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

$10)\ \int \csc x\, dx$ خارج المنهج

$= \int \csc x \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}\, dx$

$= -\int \frac{-(\csc^2 x + \cot \csc x)}{\csc x + \cot x}\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

$11)\ \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\, dx$

$= -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx = -\ln|e^{-x}+1| + c$

$12)\ \int \frac{3-v}{(v-1)^2}\, dv = -\int \frac{v-3}{(v-1)^2}\, dv$

$= -\int \frac{v-1-2}{(v-1)^2}\, dv = -\int \left(\frac{v-1}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)^2}\right) dv$

$= -\int \left(\frac{1}{v-1} - 2(v-1)^{-2}\right) dv$

$= -\ln|v-1| - 2\cdot(v-1)^{-1} + c = -\ln|v-1| - \frac{2}{v-1} + c$

$13)\ \int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\, dx = \mp\int e^{x-2}\, dx = \mp e^{x-2} + c$

$14)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\tan^2 \frac{\pi}{4} - \tan^2 0\right] = \frac{1}{2}$

س3/ أثبت ان الدالة $F(x)=\ln(\sec x+\tan x)$ ، $F:[0,\frac{\pi}{4}]\to R$
دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sec x$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

س4/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x)=2\sin^2 x-1$ و $g(x)=\sin^2 x$
وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$
الجواب النهائي : $A=\frac{\pi}{4}\ unit^2$

س5/ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $f(x)=|x-1|+2$ ،
$g(x)=\frac{-x}{5}+7$.
الجواب النهائي : $A=24\ unit^2$

س6/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $10m/s^2$ وبعد 2 ثانية
من بدء الحركة اصبحت السرعة $24m/s$ ، احسب :
1- المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة.
2- بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني.
الجواب النهائي : 1) $d=49m$
2) $s=96m$

س7/ دارت المساحة بين منحني قطع ناقص $f(x)=\sqrt{16-4x^2}$ وفوق
محور السينات دورة كاملة ، جد حجم الجسم الناشئ من الدوران.
الجواب النهائي : $V=\frac{128}{3}\pi\ unit^3$

س8/ جد الحجم للكرة الناتجة من دوران مساحة نصف دائرة.
الجواب النهائي : $\frac{4}{3}r^3\pi\ unit^3$

س٩/ يتحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل يساوي $12-6t\ cm/sec^2$ وفي نهاية الثانية الاولى تصبح سرعته $9cm/sec$ ويكون على بعد $5cm$:

1- جد بعد الجسم عند أي زمن t. الجواب النهائي: $s(t)=6t^2-t^3$

2- جد تعجيل الجسم عند عودته لنقطة البدء. الجواب: $a=24cm/sec^2$

3- جد المسافة التي يقطعها خلال 5 ثواني على بدء الحركة. الجواب: $d=39cm$

4- جد بعده بعد مرور 5 ثواني. الجواب: $s=25cm$

5- جد بعده بعد مرور 5 ثواني على بدء الحركة. الجواب: $s=25cm$

6- متى وأين تصبح سرعة الجسم $-63cm/sec$. الجواب: $s=-49cm$

س١٠/ اذا كان $\int_a^b (2x+3)\,dx=12$ وكان $a+2b=7$ فما قيمة كل من $a,b\in R$.

س١١/ اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx=\frac{-9}{4}$ ما قيمة $a\in R^+$ ؟

س١٢/ اذا كان $\int_0^b\sqrt{4x^2-4x+1}\,dx=\frac{1}{2}$ ما قيمة $b\in Z^+$ ؟

س١٣/ جد المساحة للمنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

س١٤/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=e^x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,2]$.

س15 / جد كلاً من التكاملات التالية :

1) $\int_{1}^{6} \frac{x^2+x-12}{x+4}\,dx$

2) $\int_{4}^{9} \frac{x-2\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}3}\,dx$

3) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x^4+x^2}\,dx$

4) $\int \sqrt{3x^2+x^4}\,dx$

5) $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$

6) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$

7) $\int \sqrt{\sin x \sin 2x}\,dx$

8) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

9) $\int \sqrt{(y^2-y^{-2})^2+4}\,dy$

10) $\int \frac{\sin^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$

12) $\int \cos^5 x\,dx$

13) $\int \tan^4 x\,dx$

14) $\int \frac{x^3+8}{x^7+2x^6}\,dx$

15) $\int \frac{4e^{3x}-3e^{x}}{e^{x+1}}\,dx$

16) $\int \sqrt{\sin x \sin 2x}\,dx$

17) $\int \frac{\sin 6x}{3+\sin^2 3x}\,dx$

18) $\int \frac{(x+3)^3}{(x-4)^5}\,dx$

19) $\int x^{-9}(1-x)^7\,dx$

20) $\int \frac{\sin^5 4x}{\cos^7 4x}\,dx$

21) $\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$

22) $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

الفصل الخامس

المعادلة التفاضلية

الفصل الخامس

(المعادلات التفاضلية)

المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات او التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عادية اذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية.

ملاحظة: ان رتبة المعادلة ← هي رتبة اعلى مشتقه

وان درجة المعادلة ← هي اعلى أس لاعلى مشتقه

أي انه نبحث عن اعلى مشتقه فتكون:

① هي رتبة المعادلة.

② واعلى أس لهذه المشتقه هو درجة المعادلة

أمثلة:

① $(y''')^2 + (y')^5 + y^8 = 0$ رتبه ثالثه، درجة ثانية

② $(y''')^3 + (y'')^4 + 5(y')^5 = 3x$ رتبه ثانيه، درجة رابعه

③ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \frac{d^3y}{dx^3} + 2yx = 4$ رتبه ثالثه، درجة اولى

④ $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ نربع الطرفين

$(y'')^4 = 1 + (y')^2$ رتبه ثانيه، درجة رابعه

⑤ $(y^{(4)})^3 + (y^{(3)})^4 + (y^{(2)})^5 = \cos y$ رتبه رابعه، درجة ثالثه

ملاحظة: $y^{(1)}$ تعني مشتقه اولى و $y^{(2)}$ تعني مشتقه ثانيه

$y^{(3)}$ تعني مشتقه ثالثه وهكذا ...

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية: حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة بحيث هذه العلاقة (أ) خالية من المشتقة (ب) معرفة على فترة معينة. (جـ) تحقق المعادلة التفاضلية.

الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية: ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو اي علاقة بين x و y تحقق المعادلة، أما الحل العام لأي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاعتيادية مساوٍ لرتبة المعادلة.

مثال/ بين ان العلاقة $y=x^2+3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$xy'=x^2+y$$

الحل

نأخذ المعادلة التي لا تحتوي على مشتقات، ونشتقها بعدد رتبة المعادلة التفاضلية.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+3x \\ y'=2x+3 \end{array}\right] \rightarrow$$ نعوض في الطرف الايمن والايسر للمعادلة التفاضلية

$$L.H.S = xy'$$
$$= x(2x+3)$$
$$= 2x^2+3x$$
$$R.H.S = x^2+y$$
$$= x^2+(x^2+3x)$$
$$= 2x^2+3x$$
$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

∴ العلاقة $y=x^2+3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

مثال/ اثبت ان $y=x\ln|x|-x$ احد حلول المعادلة:

$$x\frac{dy}{dx}=x+y \quad , \quad x>0$$

الحل $y=\underbrace{x\ln x}_{\text{مشتقة حاصل ضرب دالتين}}-x$

$$\frac{dy}{dx}=\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)+\ln x\,(1)-1=\cancel{1}+\ln x-\cancel{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\ln x$$

$$L.H.S=x\frac{dy}{dx}=x\ln x$$

$$R.H.S=x+y=\cancel{x}+x\ln x-\cancel{x}=x\ln x$$

$\therefore L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $y=x\ln|x|-x$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

مثال/ برهن ان $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة $y''+4y=0$

الحل $y=3\cos 2x+2\sin 2x$

$$y'=-3\sin 2x\,(2)+2\cos 2x\,(2)=-6\sin 2x+4\cos 2x$$

$$y''=-6\cos 2x\,(2)-4\sin 2x\,(2)=-12\cos 2x-8\sin 2x$$

$$L.H.S=y''+4y$$

$$=-12\cos 2x-8\sin 2x+4(3\cos 2x+2\sin 2x)$$

$$=\cancel{-12\cos 2x}-\cancel{8\sin 2x}+\cancel{12\cos 2x}+\cancel{8\sin 2x}$$

$$=0=R.H.S$$

$\therefore$ $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية.

مثال/ هل ان $y=x^3+x-2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$

الحل $y=x^3+x-2$

$\frac{dy}{dx}=3x^2+1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x$

$\therefore$ $y=x^3+x-2$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية.

مثال/ بين ان $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$

الحل $y=e^{2x}+e^{-3x}$

$y'=e^{2x}(2)+e^{-3x}(-3)=2e^{2x}-3e^{-3x}$

$y''=2e^{2x}(2)-3e^{-3x}(-3)=4e^{2x}+9e^{-3x}$

$L.H.S=y''+y'-6y$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6[e^{2x}+e^{-3x}]$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6e^{2x}-6e^{-3x}$

$=\cancel{6e^{2x}}+\cancel{6e^{-3x}}-\cancel{6e^{2x}}-\cancel{6e^{-3x}}=0=R.H.S$

$\therefore$ $y=e^{2x}+e^{-3x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية

مثال/ بين $\ln y^2=x+a$ ، $a\in R$ حلاً للمعادلة $2y'-y=0$

الحل

$\ln y^2=x+a$

$\frac{2y}{y^2}y'=1 \Rightarrow 2y'=y \Rightarrow 2y'-y=0$

$\therefore$ $\ln y^2=x+a$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

مثال/ هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$

الحل $y^2 = 3x^2 + x^3$

$2yy' = 6x + 3x^2$

$2y(y'') + y'(2y') = 6 + 6x$

$[2yy'' + 2(y')^2 = 6 + 6x] \div 2$

$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$

$\therefore$ $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية.

مثال/ اثبت ان كلاً من $y = 2e^x$ ، $y = 3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية:

$y''(1-x) + y'x - y = 0$

الحل ① $y = 2e^x \Rightarrow y' = 2e^x \Rightarrow y'' = 2e^x$

$L.H.S = y''(1-x) + y'x - y$

$= 2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x$

$= \cancel{2e^x} - \cancel{2xe^x} + \cancel{2xe^x} - \cancel{2e^x} = 0 = R.H.S$

$\therefore$ العلاقة $y = 2e^x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

② $y = 3x \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow y'' = 0$

$L.H.S = y''(1-x) + y'x - y$

$= 0(1-x) + \cancel{3x} - \cancel{3x}$

$= 0 = R.H.S$

$\therefore$ العلاقة $y = 3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية

حل تمارين (1-5)

1- بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية :

a) $(x^2-y^2)+3xy\frac{dy}{dx}=0$ الرتبة الاولى ، الدرجة الاولى

b) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-5y=7$ الرتبة الثانية ، الدرجة الاولى

c) $(y''')^3-2y'+8y=x^3+\cos x$ الرتبة الثالثة ، الدرجة الثالثة

d) $(\frac{d^3y}{dx^3})^2-2(\frac{dy}{dx})^5+3y=0$ الرتبة الثالثة ، الدرجة الثانية

2- برهن ان $y=\sin x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

الحل $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \Rightarrow y''=-\sin x$

$\Rightarrow y''+\sin x=0 \Rightarrow y''+y=0$

∴ العلاقة $y=\sin x$ هي حل للمعادلة التفاضلية

3- برهن ان العلاقة $s=8\cos 3t+6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2y}{dt^2}+9s=0$

الحل $s=8\cos 3t+6\sin 3t \Rightarrow \frac{ds}{dt}=-24\sin 3t+18\cos 3t$

$\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2}=-72\cos 3t-54\sin 3t=-9(8\cos 3t+6\sin 3t)$

$\frac{d^2s}{dt^2}=-9s \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2}+9s=0$ ∴ هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه

4- هل ان $y=x+2$ حلاً للمعادلة $y''+3y'+y=x$ ؟

الحل $y=x+2 \Rightarrow y'=1 \Rightarrow y''=0$

$L.H.S=y''+3y'+y=0+3(1)+x+2=5+x\neq R.H.S$

∴ العلاقة $y=x+2$ لا تمثل حل للمعادلة التفاضلية .

5- هل $y=\tan x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y''=2y(1+y^2)$ ؟

الحل $y=\tan x \Rightarrow y'=\sec^2 x \Rightarrow y''=2\sec x\sec x\tan x$

$\Rightarrow y''=2\tan x\sec^2 x=2\tan x(1+\tan^2 x)=2y(1+y^2)$

$\therefore$ العلاقة $y=\tan x$ حل للمعادلة التفاضلية.

6- هل ان $2x^2+y^2=1$ حل للمعادلة $y^3y''=-2$ ؟

الحل $2x^2+y^2=1 \Rightarrow [4x+2y\cdot y'=0]\div 2 \Rightarrow 2x+y\cdot y'=0$

$\Rightarrow y'=\frac{-2x}{y} \Rightarrow y''=\frac{y(-2)+2xy'}{y^2} \Rightarrow \left[y^2y''=-2y+2x\cdot\frac{-2x}{y}\right]y$

$\Rightarrow y^3y''=-2y^2-4x^2 \Rightarrow y^3y''=-2(y^2+2x^2)=-2(1)$

$\Rightarrow y^3y''=-2$ $\therefore$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

7- هل $yx=\sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy''+2y'+25yx=0$ ؟

الحل $yx=\sin 5x \Rightarrow y(1)+xy'=5\cos 5x \Rightarrow y'+xy''+y'=-25\sin 5x$

$\Rightarrow xy''+2y'+25\sin 5x=0 \Rightarrow xy''+2y'+25yx=0$

$\therefore$ العلاقة هي حل للمعادلة التفاضلية.

8- بين ان $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y'+y=0$ $a\in R$ ؟

الحل $y=ae^{-x} \Rightarrow y'=-ae^{-x} \Rightarrow y'+ae^{-x}=0 \Rightarrow y'+y=0$

$\therefore$ العلاقة هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه.

9- بين ان $\ln|y|=x^3+c$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y+2y$ ؟

الحل $\ln|y|=x^3+c \Rightarrow \frac{y'}{y}=2x \Rightarrow y'=2xy$

$y''=2xy'+y(2) \Rightarrow y''=2x(2xy)+2y \Rightarrow y''=4x^2y+2y$

$\therefore$ العلاقة هي حل للمعادلة التفاضلية.

بعض طرائق حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى:

أولاً: طريقة فصل المتغيرات:

نضع كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y مع dy في الجانب الاخر فنحصل على $f(x)\,dx = g(y)\,dy$

ثم نكامل

$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + c$ حيث c ثابت اختياري

مثال/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x+5$

الحل $dy = (2x+5)\,dx$

$\int dy = \int (2x+5)\,dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$

مثال/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل $y\,dy = (x-1)\,dx$

$\int y\,dy = \int (x-1)\,dx \Rightarrow \left[\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c\right]\cdot(2)$

$\Rightarrow y^2 = x^2 - 2x + 2c$

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $y = 9$, $x = 2$

الحل $\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = x\,dx$

$\Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}dy = x\,dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x\,dx \Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c$

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$ وبتعويض $y = 9$, $x = 2$

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Rightarrow 2(3) = 2 + c \Rightarrow c = 4$

$\therefore 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$

مثال/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$

الحل

$\frac{1}{y}dy=\frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=2\int\frac{1}{x+1}dx$

$\ln|y|=2\ln|x+1|+c$

مثال/ حل المعادلة $dy=\sin x\cos^2 y\,dx$ حيث $y\neq 0$ ، $y\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$

الحل $\frac{1}{\cos^2 y}dy=\sin x\,dx \Rightarrow \sec^2 y=\sin x\,dx$

$\int\sec^2 y\,dy=\int\sin x\,dx \Rightarrow \tan y=-\cos x+c$

مثال/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$ حيث $y=0$ ، $x=0$

الحل $\frac{dy}{dx}=e^{2x}\cdot e^{y}$

$\frac{1}{e^y}\frac{dy}{dx}=e^{2x} \Rightarrow e^{-y}dy=e^{2x}dx \Rightarrow \int e^{-y}dy=\int e^{2x}dx$

$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c$ وبتعويض $y=0$ ، $x=0$

$-e^{0}=\frac{1}{2}e^{0}+c \Rightarrow -1=\frac{1}{2}+c \Rightarrow c=\frac{-3}{2}$

$\therefore -e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}$

حل تمارين (2-5)

1- حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

a) $y' \cos^3 x = \sin x$

الحل $\frac{dy}{dx}\cos^3 x = \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow dy = (\cos x)^{-3} \sin x\, dx$

$\int dy = -\int (\cos x)^{-3}(-\sin x)\, dx \Rightarrow y = \frac{-(\cos x)^{-2}}{-2} + c$

b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \quad x=1, y=2$

الحل $\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y)$

$-\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\, dx \Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$

نعوض $x=1 \,,\, y=2$

$-\ln|3-2| = \frac{1}{2}(1)^2 + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$

$\therefore -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

c) $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

الحل $\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)\, dx \Rightarrow \ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

d) $(y^2+4y-1)y' = x^2 - 2x + 3$

الحل $(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = (x^2-2x+3) \Rightarrow \int (y^2+4y-1)\,dy = \int (x^2-2x+3)\,dx$

$\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$

e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

الحل $\int \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \int 4\,dx \Rightarrow \int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}} y\,dy = \int 4dx$

$\frac{1}{2}(-2)(1+y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x + c \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$

f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

الحل $\int e^x dx = \int y^3 dy \Rightarrow e^x = \frac{1}{4} y^4 + c$

g) $y' = 2e^x y^3$; $x = 0, y = \frac{1}{2}$

الحل $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow \int y^{-3} dy = 2\int e^x dx \Rightarrow \frac{-1}{2} y^{-2} = 2e^x + c$

$\because x = 0, y = \frac{1}{2}$

$\frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2e^0 + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4$

$\Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4$

2- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية:

a) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

الحل $xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow \int \frac{y}{1-2y^2} dy = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{-1}{4} \ln|1-2y^2| = \ln|x| + c$

b) $\sin x \cdot \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

الحل $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y$

$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + c$

c) $x \cos^2 y \, dx + \tan y \, dy = 0$

الحل

$\tan y \, dy = -x \cos^2 y \, dx$

$\int \frac{\tan y}{\cos^2 y} dy = -\int x \, dx$

$\sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$

$\int \tan y \sec^2 y \, dy = -\int x \, dx$

$\frac{(\tan y)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{1}{2}\tan^2 y = \frac{-1}{2} x^2 + c$

d) $\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$

الحل

$\int \tan^2 y \, dy = \int \sin^3 x \, dx$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin^2 x \sin x \, dx$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$

e) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

الحل $\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \cos^2 x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) dx$

$\tan y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

الحل $\int (3y^2 + e^y) dy = \int \cos x \, dx$

$y^3 + e^y = \sin x + c$

g) $e^{x+2y} + y' = 0$

الحل $e^x \cdot e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^{2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x dx$

$\int e^{-2y} dy = -\int e^x dx$

$\frac{-1}{2} e^{-2y} = -e^x + c$

ثانياً: المعادلات التفاضلية المتجانسة:

بعض المعادلات التفاضليه لا يمكن فصل متغيراتها اي لا يمكن وضع الحدود التي تحتوي على x مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y مع dy في جانب أخر ولكن يمكن تحويلها الى معادله قابله للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصورة المعادلة التفاضليه المتجانسه ((وهي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$)).

ملاحظة الفائدة / اذا كان مجموع أس y مع أس x في كل حد هو نفس الاس فأنها متجانسة . فمثلاً:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3x^2y}$$

$x^3y^0 \Rightarrow$ المجموع $=3+0=3$

$y^3x^0 \Rightarrow$ المجموع $=3+0=3$

$x^2y \Rightarrow$ المجموع $=2+1=3$

ملاحظه / كل الدوال الدائرية والاسية غير متجانسة الا اذا كتبت الزاوية بالصيغه $\left(\frac{y}{x}\right)$ او يكتب الاس في الدالة الاسية $\left(\frac{y}{x}\right)$.

لحل المعادلة التفاضليه المتجانسه نتبع الآتي:

1- نضع $\frac{dy}{dx}$ في طرف لوحدها وليكن الطرف الايسر.

2- اذا كانت جميع حدود المعادلة التفاضليه من نفس الدرجة فنقسم جميع الحدود على x^n ، حيث n اعلى اس موجود.

3- ستظهر لنا الصورة $\left(\frac{y}{x}\right)$ ، ونفرض $V=\frac{y}{x}$ ...① ونجد $y=Vx$ ونشتق الطرفين بالنسبة لـ (x) : $\frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx}$ ...② ونعوض ① و ② بالمعادلة التفاضليه.

4- نستخدم طريقه فصل المتغيرات ، وأخيراً نعوض عن V بـ $\left(\frac{y}{x}\right)$.

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $2xyy' + x^2 - 3y^2 = 0$

الحل $2xy\frac{dy}{dx} = 3y^2 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

نقسم البسط والمقام في الطرف الايمن على x^2 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \cancel{\frac{x^2}{x^2}}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نفرض $V = \frac{y}{x}$ ...① $\Rightarrow y = Vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$ ...②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية :

$$V + x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 - 1}{2V}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 - 1}{2V} - V \Rightarrow x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 - 1 - 2V^2}{2V}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{V^2 - 1}{2V} \Rightarrow x\,dV = \frac{V^2 - 1}{2V}dx$$

$$\int \frac{2V}{V^2 - 1}dV = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|V^2 - 1| = \ln|x| + c$$

$$\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| = \ln|x| + c$$

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $(y-x)dy=(y+x)dx$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$$

بقسمة البسط والمقام على x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}$$

نفرض $V=\frac{y}{x}$ ...① $\Rightarrow y=Vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx}$ ---②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$$V+x\frac{dV}{dx}=\frac{V+1}{V-1} \Rightarrow x\frac{dV}{dx}=\frac{V+1}{V-1}-V$$

$$x\frac{dV}{dx}=\frac{2V-V^2+1}{V-1} \Rightarrow \frac{V-1}{2V-V^2+1}dV=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2}\int\frac{2-2V}{2V-V^2+1}dV=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2}\ln|2V-V^2+1|=\ln|x|+c$$

$$\frac{-1}{2}\ln\left|2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right|=\ln|x|+c$$

مثال/ حل المعادلة $(3x-y)y' = x+y$

الحل $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{y}{x}}{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

نفرض $V = \frac{y}{x} \ldots ① \Rightarrow y = Vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx} \ldots ②$

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$$V + x\frac{dV}{dx} = \frac{1+V}{3-V}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{1+V}{3-V} - V$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{V^2-2V+1}{3-V} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{3-V}{(V-1)^2}\,dV$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{-(V-3)}{(V-1)^2}\,dV \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{V-1-2}{(V-1)^2}\,dV$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\left(\frac{V-1}{(V-1)^2} - \frac{2}{(V-1)^2}\right)dV$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\left(\frac{1}{V-1} - 2(V-1)^{-2}\right)dV$$

$$\ln|x| = -\ln|V-1| - 2(V-1)^{-1} + c$$

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| - 2\left(\frac{y}{x}-1\right)^{-1} + c$$

مثال/ حل المعادلة $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

الحل

$$2\frac{dv}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$$

$$2\frac{dv}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

نفرض $V=\frac{y}{x}$ ---①

$$y=Vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx} \text{ ---②}$$

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$$2\left(V+x\frac{dV}{dx}\right)=1+V^2$$

$$2V+2x\frac{dV}{dx}=1+V^2 \Rightarrow 2x\frac{dV}{dx}=1+V^2-2V$$

$$2x\frac{dV}{dx}=V^2-2V+1 \Rightarrow 2x\frac{dV}{dx}=(V-1)^2$$

$$\frac{2\,dV}{(V-1)^2}=\frac{dx}{x}$$

$$2\int(V-1)^{-2}dV=\int\frac{dx}{x}$$

$$2\frac{(V-1)^{-1}}{-1}=\ln|x|+c$$

$$-2\left(\frac{y}{x}-1\right)^{-1}=\ln|x|+c$$

حل تمارين (3-5)

حل كلاً من المعادلات التفاضليه الآتيه:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

نفرض $v = \frac{y}{x}$ ---- ① $\Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ---- ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضليه:

$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + e^{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = e^{v} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int e^{-v}dv$

$\ln|x| = -e^{-v} + c \Rightarrow \ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + c$

2) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

الحل $x^2dy = (xy - y^2)dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

نفرض $v = \frac{y}{x}$ ---- ① $\Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ---- ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضليه:

$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} - v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -v^2$

$\int\frac{dv}{v^2} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int v^{-2}dv = -\int\frac{dx}{x}$

$\frac{v^{-1}}{-1} = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{-1}{v} = -\ln|x| + c$

$\frac{\cancel{-}1}{\frac{y}{x}} = \cancel{-}\ln|x| + c \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln|x| + c$

$3)\ (x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$

الحل $(x+2y)dx=-(2x+3y)dy$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2(\frac{y}{x})}{2+3(\frac{y}{x})}$$

نفرض $V=\frac{y}{x}\ldots ①\Rightarrow y=Vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx}\ldots ②$

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية :

$$V+x\frac{dV}{dx}=\frac{-1-2V}{2+3V}$$

$$x\frac{dV}{dx}=\frac{-1-2V}{2+3V}-V\Rightarrow x\frac{dV}{dx}=\frac{-1-2V-2V-3V^2}{2+3V}$$

$$x\frac{dV}{dx}=\frac{-(3V^2+4V+1)}{2+3V}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2(3V+2)}{(3V^2+4V+1)}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|3V^2+4V+1|=-\ln|x|+c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|3\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+1\right|=-\ln|x|+c$$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$

الحل $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$

نفرض $v=\frac{y}{x}$ ...① $\Rightarrow y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ...②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2+1}{2v}$

$\int\frac{2v}{-v^2+1}dv=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|-v^2+1|=\ln|x|+c$

$\Rightarrow -\ln|-\frac{y^2}{x^2}+1|=\ln|x|+c$

5) $(y^2-x^2)dx+xy\,dy=0$

الحل $xy\,dy=(x^2-y^2)dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$

نفرض $v=\frac{y}{x}$ ① $\Rightarrow y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ --- ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2-v^2}{v}$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v^2}{v} \Rightarrow \int\frac{v}{1-2v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$

$\frac{-1}{4}\ln|1-2v^2|=\ln|x|+c \Rightarrow \frac{-1}{4}\ln|1-2\frac{y^2}{x^2}|=\ln|x|+c$

6) $x^2y\,dx = (x^3+y^3)\,dy$

الحل $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3-y^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$

نفرض $v = \frac{y}{x}$ ... ① $\Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{\cancel{v}-\cancel{v}-v^4}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3} \Rightarrow \frac{1+v^3}{v^4}dv = \frac{-dx}{x}$

$\int(\frac{1}{v^4} - \frac{\cancel{v^3}}{v^4})dv = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int(v^{-4} - \frac{1}{v})\,dv$

$\frac{v^{-3}}{-3} + \ln|v| = -\ln|x| + c \Rightarrow -\frac{x^3}{3y^3} + \ln|\frac{y}{x}| = -\ln|x| + c$

7) $x(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}) = y$

الحل $\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$

نفرض $v = \frac{y}{x}$ ... ① $\Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v + \frac{dv}{dx}$ ... ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v \Rightarrow \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{\sin v}{\cos v}} = \frac{dx}{x}$

$\int\frac{\cos v}{\sin v}dv = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin v| = \ln|x| + c$

$\ln|\sin\frac{y}{x}| = \ln|x| + c$

اسئلة عامة حول الفصل الخامس :

س1/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{x}$; $y=\frac{\pi}{4}, x=1$

الحل $\frac{dy}{\cos^2 y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \sec^2 y\, dy=\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \tan y=\ln|x|+c$

$\tan\frac{\pi}{4}=\ln|1|+c \Rightarrow 1=0+c \Rightarrow c=1$

$\therefore \tan y=\ln|x|+c$

س2/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=-2x\tan y$ حيث $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$

الحل $\frac{dy}{\tan y}=-2x\,dx \Rightarrow \frac{dy}{\frac{\sin y}{\cos y}}=-2x\,dx$

$\int \frac{\cos y}{\sin y}dy=-2\int x\,dx \Rightarrow \ln|\sin y|=-x^2+c$

$\because x=0, y=\frac{\pi}{2}$

$\ln|\sin\frac{\pi}{2}|=0+c \Rightarrow \ln|1|=c \Rightarrow c=0$

$\therefore \ln|\sin y|=-x^2$

س3/ حل المعادلة التفاضلية $xy'=y-x$ حيث $y=1$, $x=1$

الحل $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$

نفرض $v=\frac{y}{x}$ --- ① $\Rightarrow y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ --- ②

نعوض ① و ② في المعادلة التفاضلية:

$\cancel{v}+x\frac{dv}{dx}=\cancel{v}-1 \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-1 \Rightarrow \int dv=-\int\frac{dx}{x}$

$v=-\ln|x|+c \Rightarrow \frac{y}{x}=-\ln|x|+c$

$\frac{1}{1}=-\ln|1|+c \Rightarrow c=1$

$\therefore \frac{y}{x}=-\ln|x|+1$

س4/ حل المعادلة التفاضلية $(x^2+3y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

الحل $2xy\,dy = (x^2+3y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy} \div \frac{x^2}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$

نفرض $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} - v$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+1}{2v}$

$\int\frac{2v}{v^2+1}dv = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v^2+1| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln|\frac{y^2}{x^2}+1| = \ln|x| + c$

س5/ اذا كان $\frac{dy}{dx} = y + b$ و b ثابت ، اثبت ان $y = b(e^x - 1)$
علماً ان المنحني يمر بنقطة الاصل

الحل $\frac{dy}{dx} = y + b \Rightarrow \int\frac{dy}{y+b} = \int dx$

$\ln|y+b| = x + c \quad , \quad (\overset{x}{0}, \overset{y}{0})$

$\ln|b| = 0 + c \Rightarrow c = \ln|b|$

$\therefore \ln|y+b| = x + \ln|b|$

$\ln|y+b| = \ln e^x + \ln|b|$

$\ln|y+b| = \ln(e^x \cdot b)$

$y + b = be^x$

$y = be^x - b$

$\therefore y = b(e^x - 1)$

س6/ اذا كان $y = e^{mx}$ و m ثابت حقيقي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 4y = 0$ جد قيمة m .

الحل $y = e^{mx} \Rightarrow y' = m e^{mx} \Rightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow [m^2 e^{mx} - 4m e^{mx} + 4 e^{mx} = 0] \div e^{mx}$

$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$

س7/ لتكن $y = f(x)$ ولتكن للدالة f نقطة حرجة هي $(-1, 4)$ وكان $f''(x) = 6 - 6x$ جد معادلة منحني الدالة.

الحل $f''(x) = 6 - 6x \xrightarrow{\text{بالتكامل}} f'(x) = 6x - 3x^2 + c_1$

$f'(-1) = -6 - 3 + c_1 \Rightarrow 0 = -9 + c_1 \Rightarrow c_1 = 9$

$f'(x) = 6x - 3x^2 + 9$

$\int f'(x)\,dx = \int (6x - 3x^2 + 9)\,dx$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 9x + c_2$

$f(-1) = 3 + 1 - 9 + c_2 \Rightarrow 4 = -5 + c_2 \Rightarrow c_2 = 9$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 9x + 9$ ∴ المعادلة هي

س8/ برهن ان $y = c(x+1)^2$, $c > 0$ هو حلاً من حلول المعادلة $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

الحل $y = c(x+1)^2$, $x \neq -1$

$\ln y = \ln c + 2\ln(x+1)$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{2}{x+1}$

$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

∴ هو حلاً من حلول المعادلة التفاضلية

س9/ اثبت ان $y=\cos 3x+\sin 3x$ حلاً للمعادلة $y''+9y=0$ ؟

س10/ هل ان $y=x\sin x$ حلاً للمعادلة $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$ ؟

س11/ هل ان $y=2x^3+3x^2$ حلاً للمعادلة $xy''-y'=6x^2$ ؟

س12/ هل ان $y=xe^x-e^x$ حلاً للمعادلة $y''-2y'+y=0$ ؟

س13/ اذا كان ميل المماس لمنحني الدالة f عند أية نقطة (x,y) من نقط الدالة يساوي $6x-6x^2$ وكانت -5 تمثل النهاية العظمى المحلية لمنحني الدالة ، فجد معادلة المنحني.
(الجواب النهائي : $f(x)=3x^2-2x^3-5$)

س14/ اذا كانت الدالة: $y=e^{cx}+\frac{1}{3}e^x$ ، $c\in R$ هي حلاً للمعادلة $y'+2y=2e^x$ فجد قيمة c.
(واجب والجواب النهائي : $c=-2$)

س15/ برهن المعادلة $y=\frac{c}{x}+2$ ، حيث $x\in(0,\infty)$ هي حلاً للمعادلة $y'=\frac{1}{x}(2-y)$

س16/ جد معادلة المنحني الذي له $\frac{d^2y}{dx^2}=12x-4$ وكان المستقيم $2x-y=6$ مماساً له عند $x=2$

س17/ اثبت ان $y=\sin 3x$ حلاً للمعادلة $y'''-81y=0$ ؟

س ^{18} / حل كلاً من المعادلات التفاضلية التالية:

1) $\cot y\, dy = -x \sin^2 y\, dx$

2) $3e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$

3) $y' \tan x = a + y$; $y(\frac{\pi}{3}) = a$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

4) $y' = \sqrt{y} \cos^2 \sqrt{y}$

5) $y' = xy\, e^{x^2}$

6) $2x^2 dx - 3\sqrt{y} \csc x\, dy = 0$

7) $2\sqrt{xy}\, y' = 1$

8) $y' = \dfrac{xy + 3y + 2x + 6}{xy - 2y - x + 2}$

9) $y' x^2 = 5y^2 + x^2$

10) $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\, dy = 0$

11) $dr = e(r \sin\theta\, d\theta - \cos\theta\, dr)$

12) $e^x(y-1)dx + 2(e^x + 4)dy = 0$

13) $x^2 y\, dy + e^{y^2} dx = 0$

14) $2x(y+1)dx - y\, dy = 0$, $y(0) = -2$

15) $(xy + x)dx - (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy = 0$

16) $x^2 y y' = e^y$

17) $x^2 dx + yx\, dy - y\, dy = 0$

18) $x\, dx - \sqrt{11 + x^2}\, dy = 0$

19) $6x^2 y' - y^2 - 9x^2 = 0$

20) $xy' - x \cot \frac{y}{x} = y$

21) $\sqrt{y}\, dy - \sin^2 x\, dx + \cos^2 x\, dx = 0$

22) $4x^2 + y^2 = 4x^2 y'$

23) $2y\, dx + 3y\, dy + x\, dx + 2x\, dy = 0$

الفصل السادس

الهندسة

المجسمة

الفصل السادس
(الهندسة المجسمة)

اساسيات الهندسة المجسمة:

1- يمكن تشكيل مستوٍ من خلال اربعة حالات مختلفة وهي :
أ- لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يوجد مستوٍ وحيد يحتويها.
ب- لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما.
جـ- لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما.
د- لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما.

2- يمكن رسم مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه عبارة التوازي.

3- في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي او لا تنتمي اليه.

4- يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة تنتمي او لا تنتمي اليه.

5- المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي.

6- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودي على مستويهما.

7- المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودي على الآخر.

8- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودي على الآخر.

9- المستقيمان العمودان على مستوي واحد متوازيان. كما ان المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان.

10- يتقاطع المستويان بمستقيم.

١١- مستقيم تقاطع مستويان يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر.

١٢- اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من اي نقطة من نقاط المستوي الموازي للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه.

13- خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيين.

١٤- المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر. كما ان المستقيم العمودي على مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً.

١٥- اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوى قياسهما وتوازى مستويهما.

16- العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس. كما انه يكون المثلث متساوي الساقين اذا كان العمود النازل على القاعدة منصف لها.

17- يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. كما انه في المتوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ومتطابقين.

18- اذا كان كلا من مستقيمين متقاطعين موازيا لمستويا معلوما فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم.

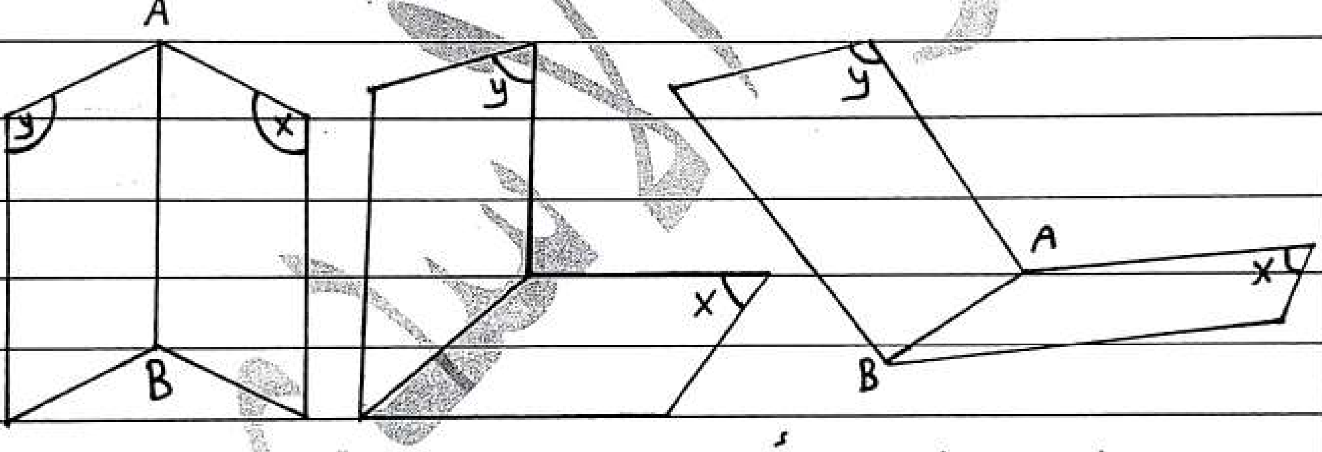
١٩- مبرهنة الاعمدة الثلاثة: (اذا رسم من نقطة لاتنتمي الى مستوي مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم في المستوي فالمستقيم المرسوم من اي نقطة من نقاط المستقيم العمودي على المستوي يكون عمودياً على ذلك المستقيم في المستوي من نقطة تلاقي المستقيمين)

20- نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة: (اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوي مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اثري العمودين يكون عمودياً على ذلك المستقيم في المستوي)

الزاوية الزوجية: هي اتحاد نصفي مستويين لهما حافة مشتركة تسمى (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين (وجه الزاوية الزوجية).

ففي الاشكال ادناه: $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية

(X) و (Y) هما وجهي الزاوية الزوجية

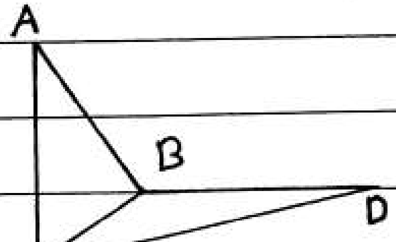


يعبر عن الزاوية الزوجية أما:

① $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$

② أو بحرفها فقط $\overleftrightarrow{AB}$

ملاحظة: عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد تكتب الزاوية الزوجية أما:



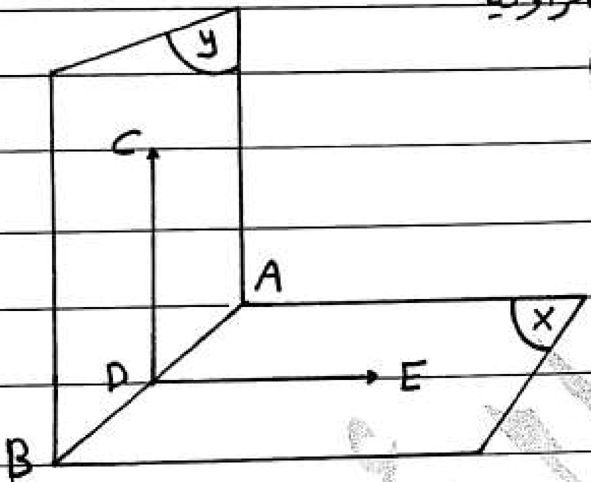
① الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$

② الزاوية الزوجية بين المستويين (DBC) و (ABC)

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية ((الزاوية العائدة)):

هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكلا منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية.

ففي الشكل المجاور تكون $\angle CDE$ هي الزاوية العائده للزاوية الزوجيه $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$



اذا تحقق الشرطان:

① $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

② $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{DE} \subset (X)$

خواص الزاوية العائدة والزوجية:

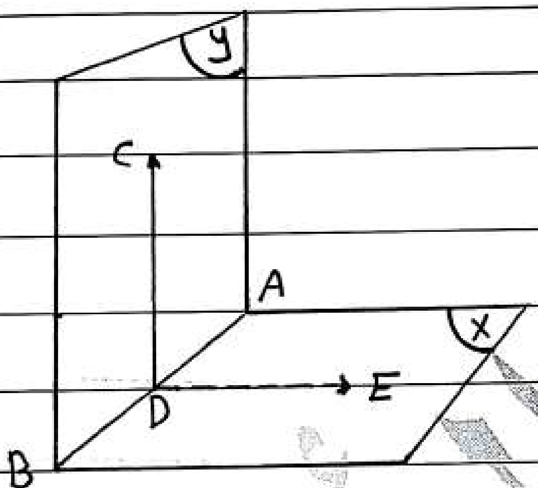
1- حرف الزاوية الزوجية عمودي على مستوي الزاوية العائدة.

2- اذا تعامد مستويان فان الزاوية الزوجيه قائمه ((90°)) واذا كانت الزاوية الزوجيه قائمه فان المستويين متعامدان.

3- تقاس الزاوية الزوجية بقياس العائدة لها وبالعكس.

4- قياس الزاوية العائدة لنفس الزاوية الزوجية يكون ثابتاً

مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر.



المعطيات: $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

نرسم $\overleftrightarrow{DE} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \angle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ (تعريف الزاوية العائدة "دون ذكر التعريف")

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB} = 90^\circ$ (اذا تعامد مستويان فالزاوية الزوجية قائمة)

$\therefore m\angle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة وبالعكس).

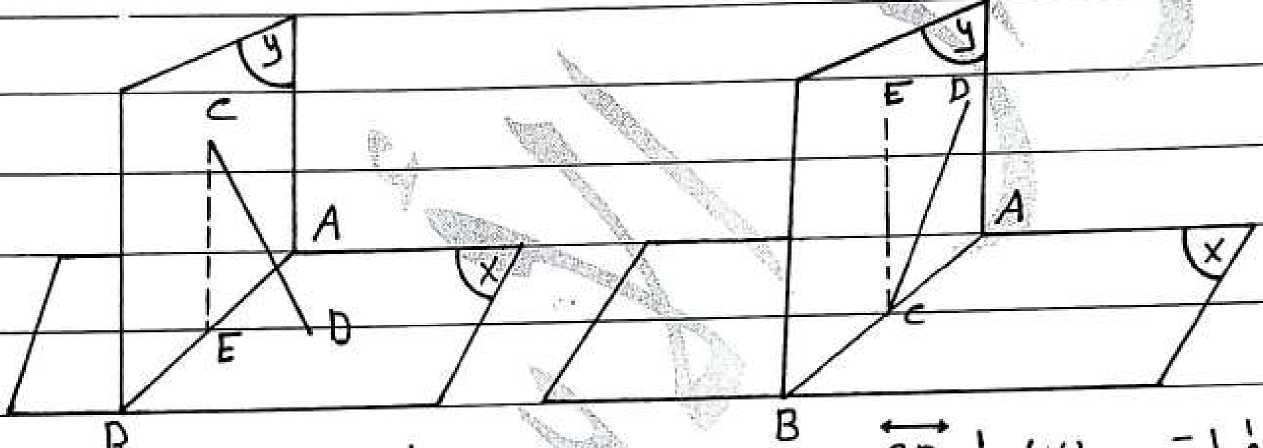
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين قائمة فان المستقيمين متعامدان وبالعكس).

∵ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

و.هـ.م

نتيجة مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوىً فيه.



المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ ، $C \in (Y)$ ، $(Y) \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان: ليكن $(Y) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

اذا لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

من نقطة C نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$

بحيث $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

∵ $(Y) \perp (X)$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الاخر)

ولكن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CE}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

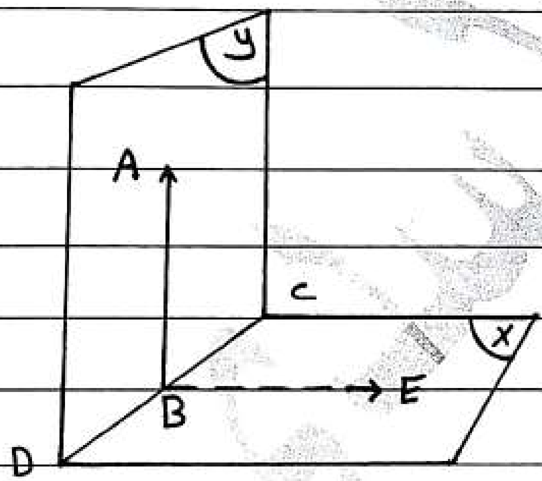
$\because \overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ (بالعمل)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

و.هـ.م

مبرهنة 8: كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ أخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر.



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

وليكن $B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

نرسم $\overleftrightarrow{BE} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

∵ $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{CD}$ عائدة للزوجية $\measuredangle ABE$ (تعريف الزاوية العائدة ((يذكر التعريف)))

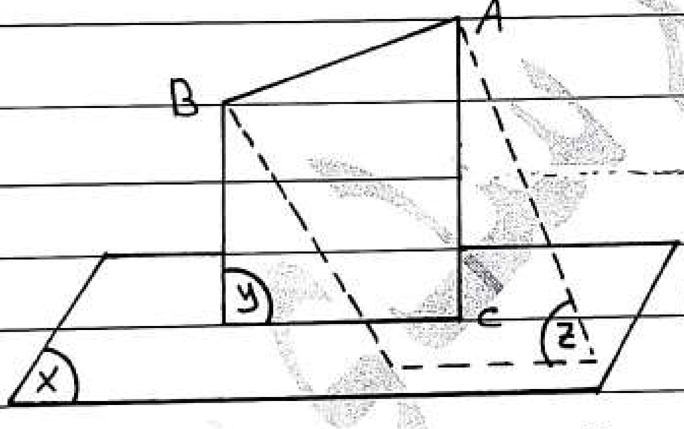
$m\measuredangle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

∴ ق و = $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X)$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس العائدة وبالعكس)

∴ $(X) \perp (Y)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية ٩٠° فأن المستويين متعامدين)

و.هـ.م

مبرهنة ٩ : من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته: ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ ويكون عمودي على (X)

البرهان:

من نقطة A نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

∵ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

∴ يوجد مستوٍ مثل (Y) يحويهما (كل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

∴ $(Y) \perp (X)$ (حسب مبرهنة ٨: كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي)

ولبرهنة الوحدانية:

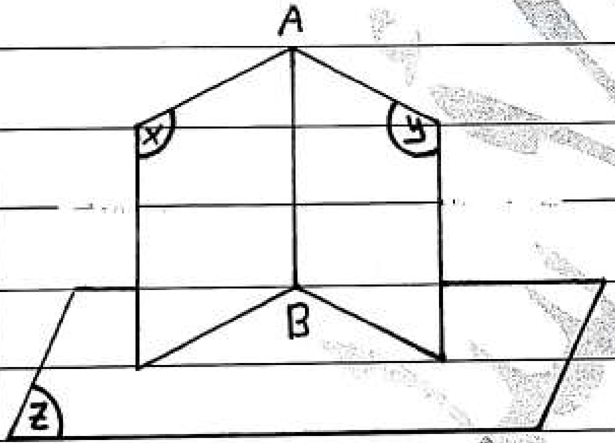
نفرض (Z) مستوٍ آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ ويكون عمودي على (X)

∵ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالعمل)

∴ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7، اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الاخر يكون محتوى فيه)

$(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

نتيجة مبرهنة و: اذا كان كلا من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \perp (Z)$ ، $(Y) \perp (Z)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

اذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

∴ أصبح كلا من (Y) ، (X) يحتويان $\overleftrightarrow{AB}$ وعموديان على (Z)

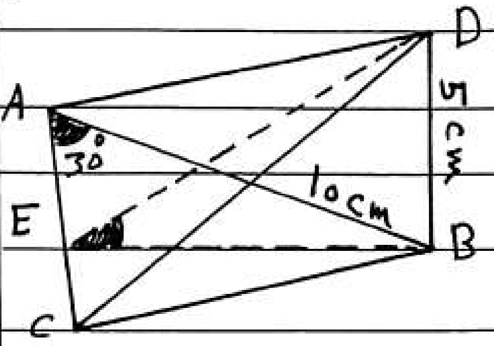
وهذا غير ممكن (حسب مبرهنة و: من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم)

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

و.هـ.م

مثال ١ : في ΔABC و $m\angle A = 30^\circ$, $\overline{BD} \perp (ABC)$
$BD = 5cm$ و $AB = 10cm$ جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات : $AB = 10cm$, $BD = 5cm$
$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\angle A = 30^\circ$



المطلوب اثباته :
ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان :
في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة " تذكر ")

$\therefore \overline{AC}$ عائدة للزوجية $\angle DEB$ (حسب تعريف الزاوية العائدة " تذكر ")

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{BD} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\therefore \Delta DBE$ قائم الزاوية في B

في ΔBEA القائم في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

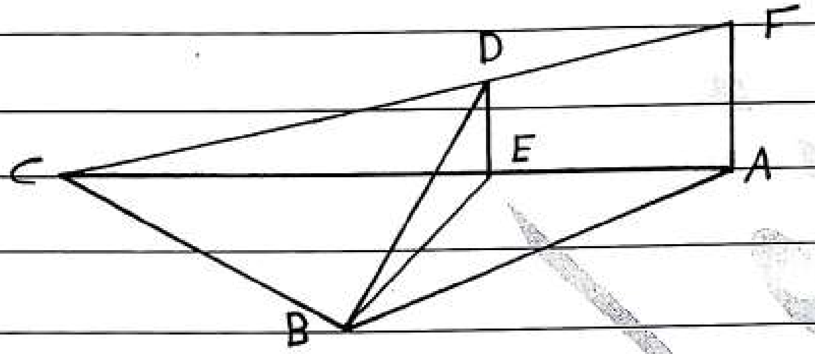
في ΔDBE القائم الزاوية في B

$$\tan\angle BED = \frac{BD}{BE} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} = 1$$

$\therefore m\angle BED = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

مثال 2 : ليكن ABC مثلثاً وليكن $\overline{AF} \perp (ABC)$, $\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ برهن ان $\overline{BE} \perp (CAF)$, $\overline{ED} \perp \overline{CF}$.



المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC)$, $\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$

المطلوب اثباته : ① $\overline{BE} \perp (CAF)$ ② $\overline{ED} \perp \overleftrightarrow{CF}$

البرهان :

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الاخر)

و.هـ.م (الاول)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

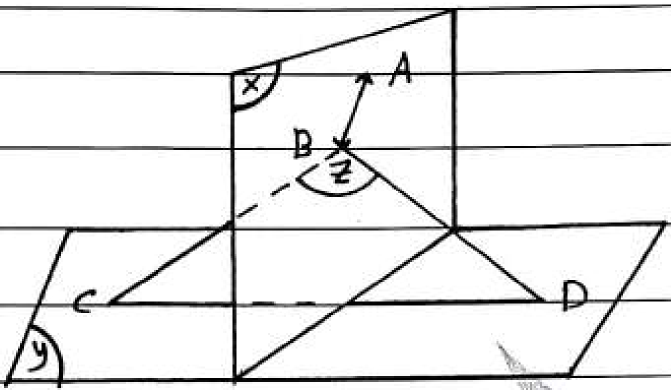
$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة "تذكر")

و.هـ.م (الثاني)

مثال 3 : (X) ، (Y) مستويان متعامدان ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في D ، C على الترتيب

برهن ان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$.



المعطيات: $(X) \perp (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في D ، C

على الترتيب.

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيد يحويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

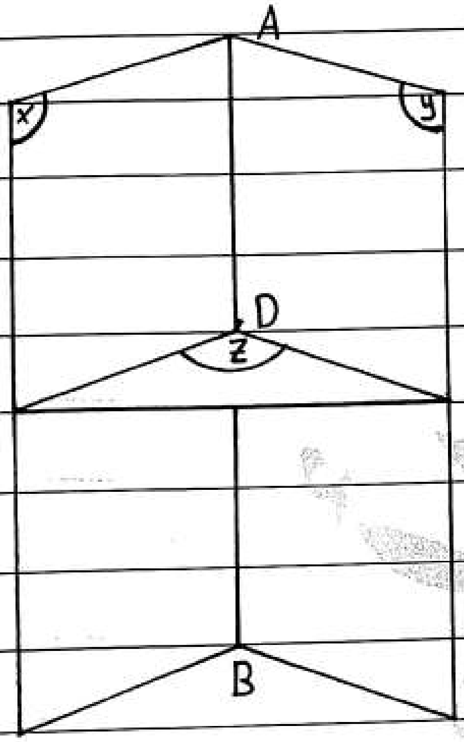
$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (نتيجة مبرهنة 9 : اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

حل تمارين (1 - 6)

1- برهن ان مستوي الزاوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.



المعطيات:

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$ زاوية زوجية

$\angle CDE$ عائدة لها

(Z) مستوي الزاوية العائدة

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

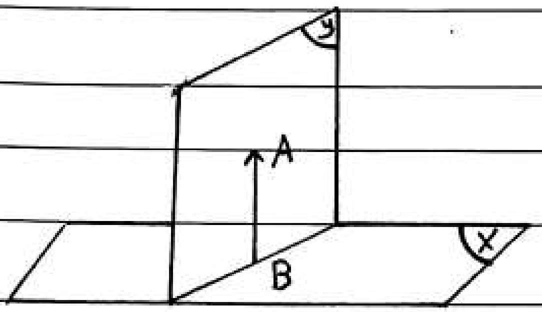
$\because \angle CDE$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (تعريف الزاوية العائدة "يُذكر")

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

2- برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فأن المستويين متعامدين.



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \parallel (y)$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

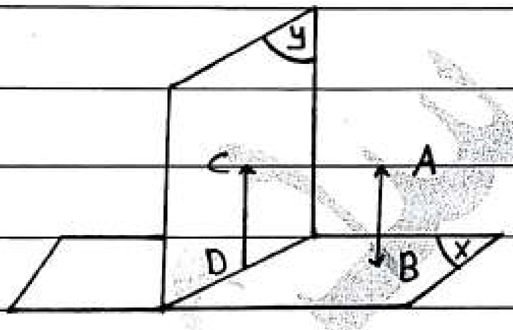
المطلوب اثباته: $(y) \perp (X)$

البرهان:

اولاً: اذا كان $\overleftrightarrow{AB} \subset (y)$

$\therefore (y) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

ثانياً: اذا كان $\overleftrightarrow{AB} \cap (y) = \emptyset$



ليكن $C \in (y)$

وليكن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ (يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لاتنتمي اليه)

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel (y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ (اذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوىً في المستوي)

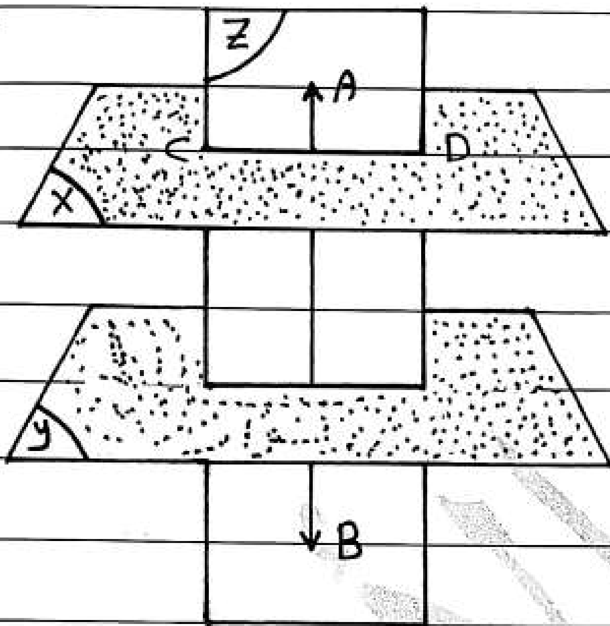
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore (y) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

و.هـ.م

3 - برهن ان المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر ايضاً



المعطيات:

$(Z) \perp (X)$, $(X) \parallel (Y)$

المطلوب اثباته:

$(Z) \perp (Y)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

وليكن $\overleftrightarrow{AB} \subset (Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Z) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الاخر)

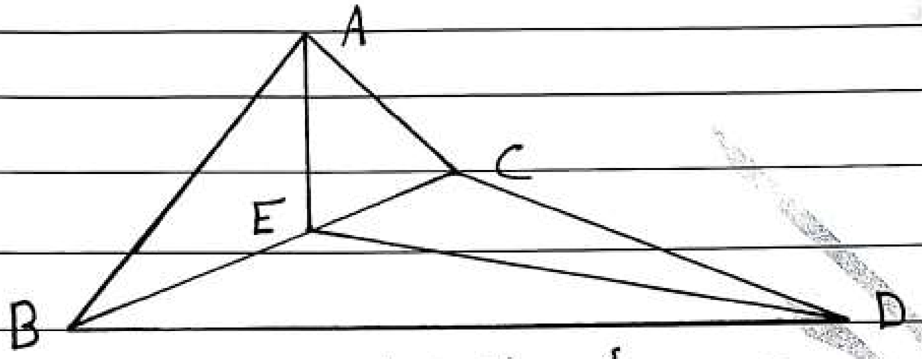
$\because (Y) \parallel (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore (Z) \perp (Y)$ (مبرهنة 8: يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

و.هـ.م

4 - D ، C ، B ، A أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB=AC$
$E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$
برهن ان $CD = BD$.

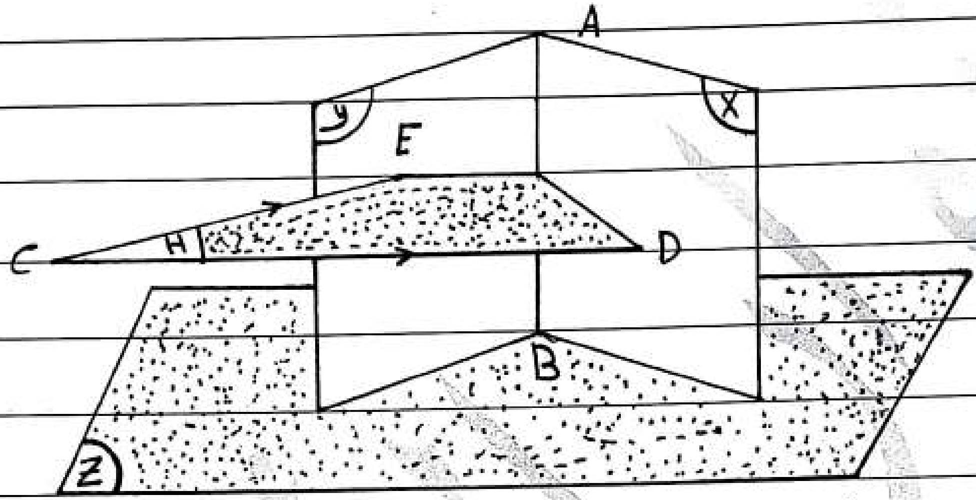


المعطيات : D ، C ، B ، A أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد
$AB = AC$ ، $\measuredangle AED$ عائدة للزوجية $A-\overline{BC}-D$
المطلوب اثباته: $CD = BD$

البرهان :
$\because$ $\measuredangle AED$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$ (معطى)
$\therefore$ في المثلث ABC :
$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة ((تذكر)))
$AB = AC$ (بالمعطيات)
$\therefore$ $EB = EC$ (العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلث BDC :
$\because$ $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة ((تذكر)))
$\because$ $EB = EC$ (بالبرهان)
$\therefore$ $CD = BD$ (يكون المثلث متساوي الساقين اذا كان العمود النازل على القاعدة منصفاً لها)
وهــ م

5- برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.



المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \parallel (Z)$ ، $\overleftrightarrow{CE} \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{CE} \parallel (Z)$ ،
$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

لنكن (H) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CE}$ (كل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحويهما)

∵ $\overleftrightarrow{CE} \perp (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

∴ $(H) \perp (Y)$, $(H) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (H)$ (اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديين على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

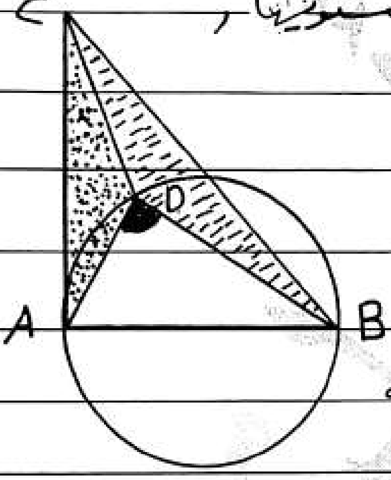
∵ $\overleftrightarrow{CE} \parallel (Z)$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel (Z)$ (معطى)

$\therefore (Z) \parallel (H)$ (اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً فإن مستويهما يوازي المستوي المعلوم)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على المستوي الاخر)

و.هـ.م

6- دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة
برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .



المعطيات: دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة .

المطلوب اثباته: $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان:

$\because \overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$\therefore m\angle ADB = 90^\circ$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DB}$ (يتعامد المستقيمان اذا كانت الزاوية بينهما قائمة)

$\because \overline{AC}$ عمودي على مستوي الدائرة (معطى)

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة "تذكر")

$\therefore$ أصبح $\overline{DB}$ عمودي على كل من $\overline{CD}$ ، $\overline{AD}$ (بالبرهان)

$\because \overline{DB} \subset (CDB)$

$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

و.هـ.م

الاسقاط العمودي على مستوٍ:

تعاريف:

1- مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود النازل من النقطة على المستوي.

2- مسقط مجموعة من النقط على مستوي: هو مجموعة آثار الاعمدة المرسومة من تلك النقط على المستوي.

3- مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي معلوم: وهو قطعة المستقيم الواصلة بين اثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة المستقيمة على المستوي المعلوم.

4- المستقيم المائل على مستوي: وهو المستقيم الغير عمودي على المستوي وقاطع له في نقطة.

5- زاوية الميل: وهي الزاوية المحددة بين المائل ومسقطه على المستوي.

طول المسقط = طول المائل $\times \cos\theta$

6- مسقط مستوي مائل على مستوٍ:

زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو مقياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما.

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة $\times \cos\theta$

اي انه:

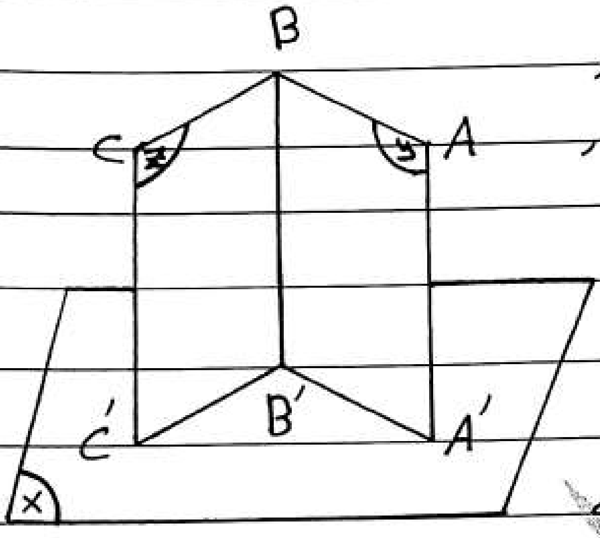
$$A' = A \cdot \cos\theta$$

حيث A مساحة المنطقة المائلة

A' مساحة المسقط

θ زاوية الميل

مثال 4: اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.



المعطيات: $\measuredangle ABC$ زاوية قائمة في B ، $\overline{AB} \parallel (X)$ ، $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X) ، $\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب اثباته: $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان: $\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$ (معطى)

$\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$ (معطى)

$\therefore \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة)

$\therefore \overline{AA'} \parallel \overline{BB'}, \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ (المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان)

في $\overline{BB'}, \overline{AA'}$ نعين (Y) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

في $\overline{CC'}, \overline{BB'}$ نعين (Z) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

ولكن $\overline{AB} \parallel (X)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = \overline{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ (اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فأنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

$\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لان $m\measuredangle ABC = 90°$ معطى)

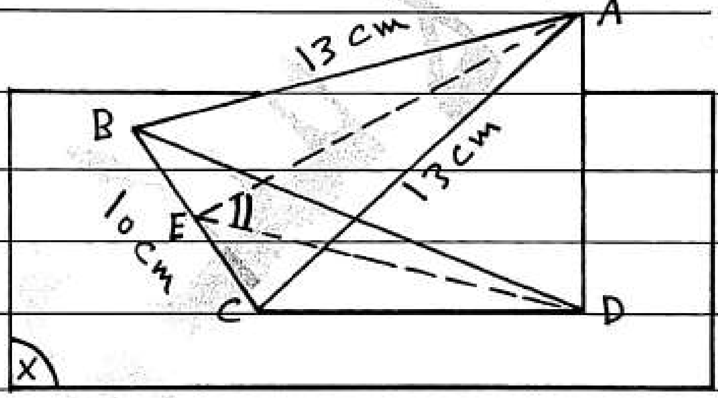
$\therefore \overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و.هـ.م

مثال 5: ABC مثلث و $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها 60° فإذا كان $BC = 10cm$, $AB = AC = 13cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (X) ثم جد مساحة مسقط ΔABC على (X)



المعطيات:

ABC مثلث و $\overline{BC} \subset (X)$

$(ABC) - \overleftrightarrow{BC} - (X) = 60^\circ$

$AC = 10\ cm$

$AB = AC = 13\ cm$

المطلوب اثباته: ايجاد مسقط ΔABC على (X)

ايجاد مساحة مسقط ΔABC على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore \overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$

$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم آخر من نقطة معلومة)

$\because AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5$ (العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة ((تذكر)))

$\therefore \angle DEA$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة ((تذكر)))

$\because$ قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60^\circ$ (معطى)

$\therefore m\angle DEA = 60^\circ$ (قياس الزاوية العائدة يساوي قياس الزاوية الزوجية وبالعكس)

في $\triangle AEB$ القائم في E ، فيثاغورس

$(AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2$

$(13)^2 = (5)^2 + (AE)^2 \Rightarrow AE = 12$

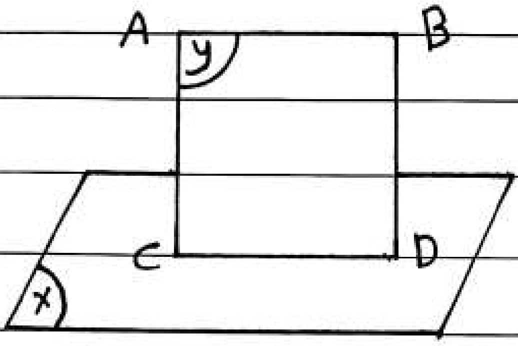
في $\triangle AED$ القائم في D :

$$\cos 60^\circ = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6$$

$\therefore$ مساحة المثلث $BCD = \frac{1}{2}(10)(6) = 30\ cm^2$

حل تمارين (2-6)

1- برهن ان طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه.



المعطيات:

$\overline{AB} \parallel (X)$ ، $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

المطلوب اثباته:

① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

② $\overline{AB} = \overline{CD}$

البرهان:

∵ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (معطى)

∴ $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ عمودي على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

∴ $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ (المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان)

في $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ نعينا (L) (كل مستقيمين متوازيين يعينان مستوٍ واحد)

∵ $\overline{AB} \parallel (X)$ (معطى)

∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الاخر)

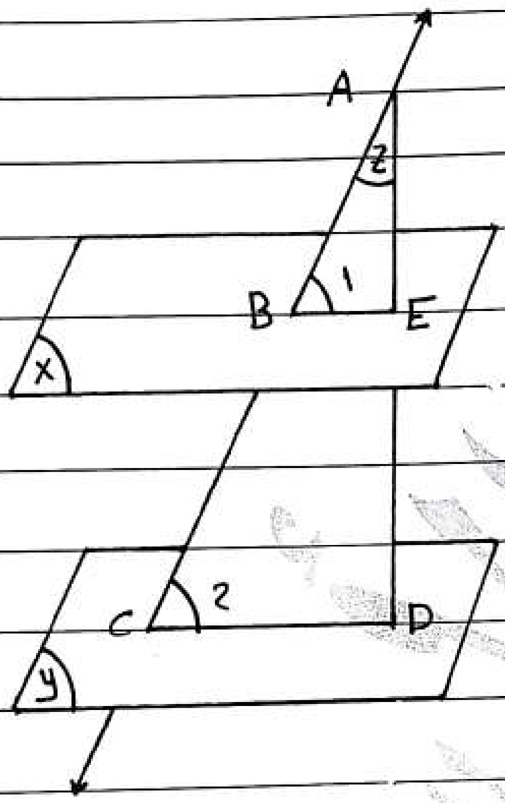
و.هـ.م (اولاً)

الشكل الرباعي ABDC متوازي اضلاع (لان فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين)

∴ $\overline{AB} = \overline{CD}$ (في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين)

و.هـ.م (ثانياً)

2- برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فأن ميله على احدهما يساوي ميله على الآخر



المعطيات:

(X) // (Y) ، $\overleftrightarrow{AC}$ مائل على (X) ، (Y) في B ، C على الترتيب

المطلوب اثباته:

ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

أو

قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان:

ليكن $\overline{AD} \perp$ (X) في E (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

∵ (X) // (Y) (معطى)

∴ $\overline{AD} \perp$ (Y) في D (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

∴ $\overline{BE}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (Y)

∴ $\angle 1$ زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\angle 2$ زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

$\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ في (Z) نعينها (كل مستقيمين متقاطعين يعينان مستوٍ واحد)

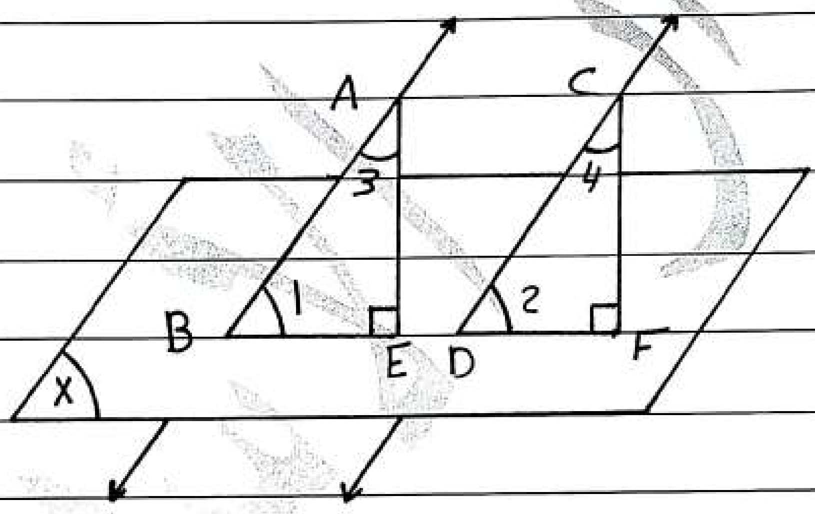
$\therefore \overline{CD} \parallel \overline{BE}$ (اذا قطع مستويان متوازيان بمستوٍ ثالث فأن مستقيمي التقاطع متوازيان)

$\therefore m\angle 2 = m\angle 1$ (بالتناظر)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

و.هـ.م

3- برهن على ان المستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ وكل منهما مائل على (X) في D , B

المطلوب اثباته:

قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

البرهان:

ليكن $\overline{AE} \perp (X)$ في E (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

ليكن $\overline{CF} \perp (X)$ في F

$\therefore \overline{BE}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{DF}$ مسقط $\overline{CD}$ على (X)

∴ $\angle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ هي الزاوية
$\angle 2$ زاوية ميل $\overline{CD}$ على (X) المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

∵ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (معطى)

$\overline{AE} \parallel \overline{CF}$ (المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان)

∴ $m\angle 3 = m\angle 4$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستويهما)

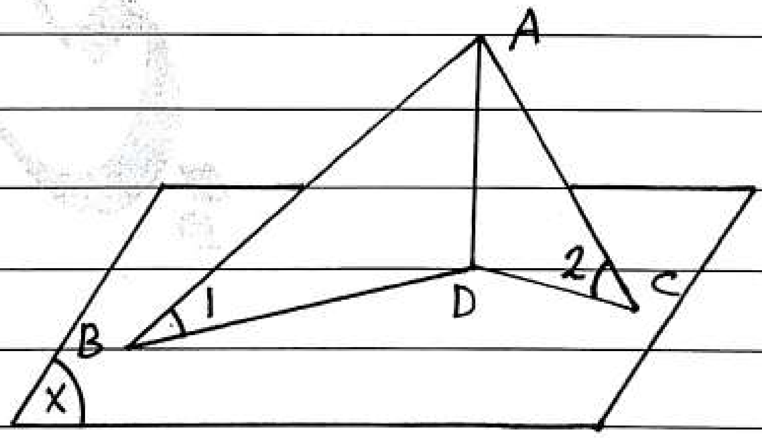
$90^\circ = m\angle 5 = m\angle 6$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$m\angle 1 = m\angle 2$ (مجموع زوايا المثلث $= 180^\circ$)

∴ قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

و.هـ.م

4- برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لاتنتمي الى مستوٍ معلوم فان اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.



المعطيات:

$\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ مائلان على (X) في B ، C على الترتيب

$A \notin (X)$ وان $AB > AC$

المطلوب اثباته:

قياس زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) أصغر من قياس زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان:

ليكن $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

∴ $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة
$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X) بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة)

∴ 1∡ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ هي الزاوية
2∡ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X) المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\overline{AD} \perp \overline{DC}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع
$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

∴ المثلثان ADB ، ADC قائما الزاوية وفيهما:

$AB > AC$ (معطى)

$\frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD}$ (بقسمة المعادلة على AD)

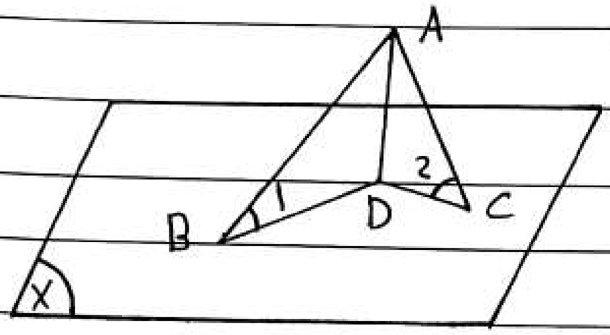
$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ (حسب خواص المتباينات)

$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$ (لان $\sin\measuredangle 1 = \frac{AD}{AB}$ وكذلك $\sin\measuredangle 2 = \frac{AD}{AC}$)

∴ $m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

و.هـ.م

5- برهن انه اذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستوٍ فأصغرهما ميلاً هو الأطول



المعطيات: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (X) , زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) اصغر من قياس زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

المطلوب اثباته:

$AB > AC$

البرهان:

ليكن $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore \overline{BD}$ مسقط $\overline{AD}$ على (X) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة
$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X) بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة)

$\therefore \measuredangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ هي الزاوية المحددة
$\measuredangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X) بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\overline{AD} \perp \overline{DC}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات
$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore$ المثلثان ADC , ADB قائما الزاوية وفيهما:

$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)

$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$

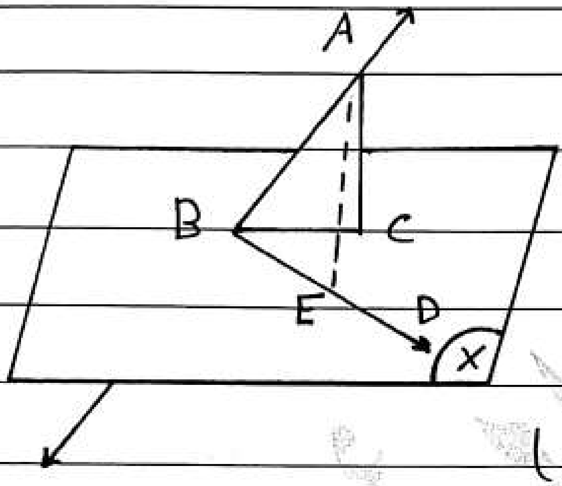
$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ (لان $\sin\measuredangle 1 = \frac{AD}{AB}$ وكذلك $\sin\measuredangle 2 = \frac{AD}{AC}$)

$\frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD}$ (حسب خواص المتباينات)

$AB > AC$ (بضرب المتباينة في AD والاختصار)

و.هـ.م

6- برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (X) في B ،
$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) ،
$\overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

المطلوب اثباته:
$m\angle ABC$ أصغر من $m\angle ABD$

البرهان:

$\because$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (معطى)

$\therefore$ $\overline{AC} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة)

لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث يكون $BC = BE$

في $\triangle\triangle\ ABC ، ABE$:

$BC = BE$ (بالعمل)

$AB = AB$ (مشترك)

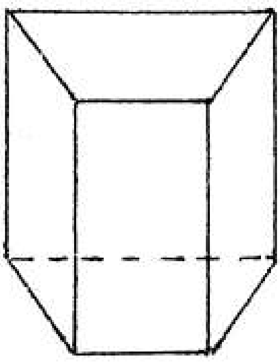
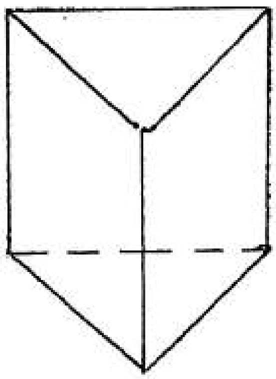
$AC < AE$ (العمود هو أقصر المستقيمات الواصلة بين نقطة ومستوي)

$\therefore$ $m\angle ABC$ أصغر من $m\angle ABE$ (اذا ساوى ضلعين من مثلث ضلعين من مثلث آخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول اصغر من نظيره في المثلث الاخر فالزاوية التي تقابله اصغر من الزاوية التي تقابل نظيره في المثلث الاخر)

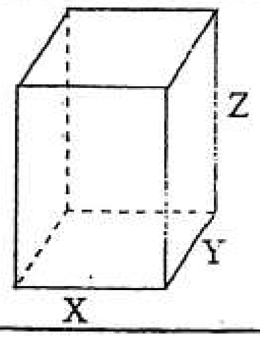
المجسمات (Solid)

سبق للطالب دراسة المجسمات في المرحلة المتوسطة ونلخص فيما يلي قوانين الحجوم والمساحات الجانبية والكلية لبعض المجسمات علماً ان الحديث عن حجم مجسم نقصد به حجم المنطقة في الفراغ (الفضاء) الواقعة داخل المجسم.

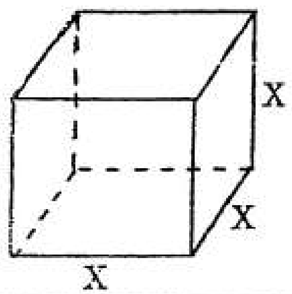
1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

الرسم **Diagram**	 
الحجم **Volume**	مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة الجانبية **Lateral Area**	مجموع مساحات الاوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
المساحة الكلية **Total Area**	المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

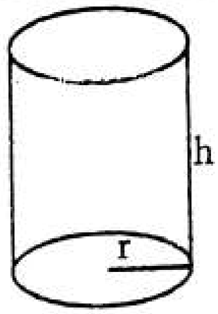
2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)

	الرسم **Diagram**
$V = x\,y\,z$	الحجم **Volume**
$L.A = 2(x+y)z$	المساحة الجانبية **Lateral Area**
$T.A = 2(x+y)z+2xy$	المساحة الكلية **Total Area**

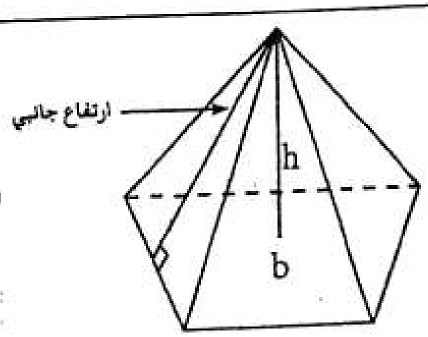
3) المكعب Cube

	الرسم **Diagram**
$V = x^3$	الحجم **Volume**
$L.A = 4x^2$	المساحة الجانبية **Lateral Area**
$T.A = 6x^2$	المساحة الكلية **Total Area**

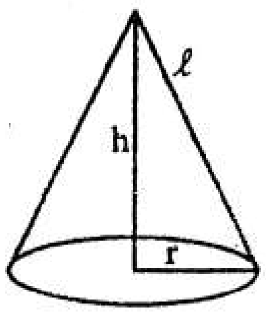
4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V=\pi r^2h$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A=2\pi rh$
المساحة الكلية Total Area	$T.A=2\pi rh+2\pi r^2$

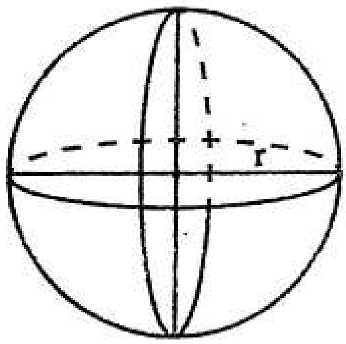
5) الهرم (Pyramid)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V=\frac{1}{3}bh$ b : مساحة القاعدة h : الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A=\frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) X طول الارتفاع الجانبي
المساحة الكلية Total Area	T.A = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)

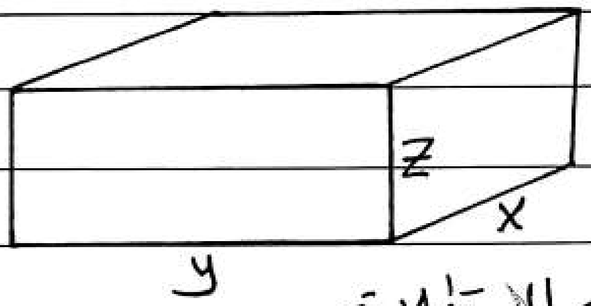
الرسم **Diagram**	
الحجم **Volume**	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$
المساحة الجانبية **Lateral Area**	$L.A=\pi r \ell$
المساحة الكلية **Total Area**	$T.A=\pi r \ell+\pi r^2$

7) الكرة (Sphere)

الرسم **Diagram**	
الحجم **Volume**	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
مساحة سطح الكرة	مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$ $S=4\pi r^2$

حل تمارين (3 - 6)

1- اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $= 724\,cm^2$ ومساحة قاعدته $= 132\,cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية $= 110\,cm^2$ جد حجمه.



المعطيات: متوازي مستطيلات

مساحته الكلية $= 724\,cm^2$

مساحة قاعدته $= 132\,cm^2$

مساحة احد اوجهه الجانبية $= 110\,cm^2$

المطلوب اثباته: ايجاد حجم متوازي المستطيلات

البرهان: نفرض طول القاعدة $= y$ وعرضها $= x$ والارتفاع $= Z$

مساحة القاعدة $= xy = 132$ --- ①

مساحة احد الاوجه الجانبية $= xZ = 110$ --- ②

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + 2 (مساحة قاعدة واحدة)

$724 =$ (محيط القاعدة) (الارتفاع) + 2 (مساحة قاعدة واحدة)

$724 = 2$ (طول القاعدة + عرضها) (الارتفاع) + 2 (طول القاعدة) (عرضها)

$724 = 2(y + x)(Z) + 2(xy)$

$[724 = 2yZ + 2xZ + 2xy] \div 2$

$362 = yZ + xZ + xy$

$362 = yZ + 110 + 132$

$yZ = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{Z}$

من الثانية نحصل $\Rightarrow x = \frac{110}{Z}$

نعوض في الاولى $\Rightarrow \left(\frac{110}{Z}\right)\left(\frac{120}{Z}\right) = 132 \Rightarrow Z = 10$

حجم متوازي المستطيلات = (مساحة القاعدة) (الارتفاع) $= 132(10) = 1320\,cm^3$

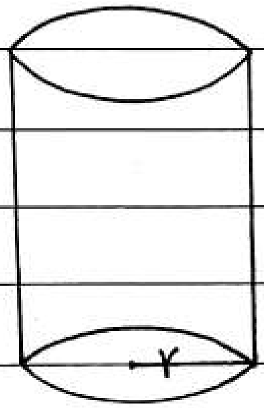
٢- اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\ cm^2$ وحجمها $2000\pi\ cm^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها.

المعطيات:

اسطوانة دائرية قائمة

مساحتها الجانبية $= 400\pi\ cm^2$

حجمها $= 2000\pi\ cm^3$



المطلوب اثباته: ايجاد ارتفاع الاسطوانة h ونصف قطر قاعدتها

البرهان:

ليكن نصف قطر الاسطوانة $= r$

وليكن ارتفاع الاسطوانة $= h$

المساحة الجانبية = (محيط القاعدة) (الارتفاع)

$\cancel{400\pi} = \cancel{2}\cancel{\pi} r h \Rightarrow h = \frac{200}{r}$ --- ①

حجم الاسطوانة = (مساحة القاعدة) (الارتفاع)

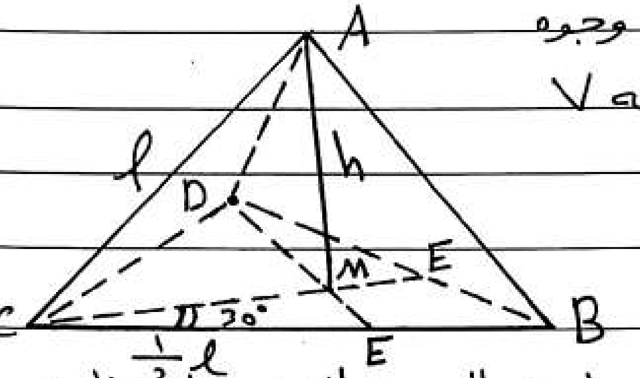
$2000\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 h \Rightarrow 2000 = r^2\left(\frac{200}{\cancel{r}}\right)$

$\Rightarrow r = 10\ cm$ نصف القطر

وبتعويض قيمة r في ①

$h = \frac{200}{10} \Rightarrow h = 20\ cm$ الارتفاع

3- برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه $= l$ هو $\frac{\sqrt{2}\, l^3}{12}$ وحدة مكعبة.



المعطيات: $A-BCD$ شكل ذي وجوه أربعة منتظم طول حرفه l وحجمه V

المطلوب اثباته: $V = \frac{\sqrt{2}\, l^3}{12}$

البرهان:

القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع (ذي الوجوه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة)

لتكن $\overline{DE}$ و $\overline{CF}$ مستقيمات متوسطة للمثلث BCD ستلتقي في نقطة واحدة ولتكن $M \Leftarrow M$ هي مركز القاعدة

من A نرسم الارتفاع h سيكون عمودياً على القاعدة في M

(الارتفاع القائم هو قطعة المستقيم المرسومة من الرأس عمودية على القاعدة وفي الهرم المنتظم يمر بمركز القاعدة)

كل من $\overline{DE}$, $\overline{CF}$ منصف للزاوية وعمود على الضلع المقابل ومنصف له

$\because$ قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الاضلاع $= 60^\circ \Leftarrow m\angle MCE = 30^\circ$

في $\triangle MCE$ القائم في E :

$$\cos 30^\circ = \frac{CE}{CM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2} l}{CM} \Rightarrow \sqrt{3}\, CM = l \Rightarrow CM = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

في $\triangle ACM$ القائم في M : $(AC)^2 = (AM)^2 + (CM)^2$

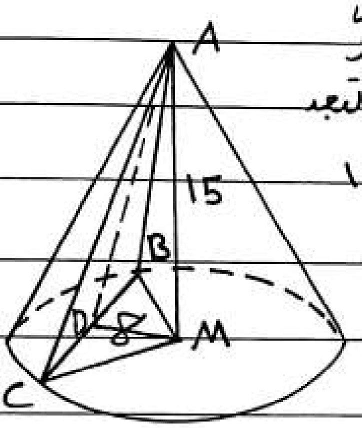
$$\left[l^2 = h^2 + \frac{l^2}{3}\right] \cdot 3 \Rightarrow 3l^2 = 3h^2 + l^2 \Rightarrow 2l^2 = 3h^2$$

$$h^2 = \frac{2}{3} l^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l$$ ارتفاع الهرم

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ (مساحة القاعدة) (الارتفاع)

وبهذا $= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l\right) = \frac{\sqrt{2}\, l^3}{12}$ units^3

٤/ مخروط دائري قائم مرّ برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8 cm فاذا كانت مساحة المقطع $= 102\,cm^2$ وارتفاع المخروط $= 15\,cm$ احسب: حجمه، مساحته الجانبية، مساحته الكلية.



المعطيات: مخروط دائري قائم ارتفاعه 15cm مرّ برأسه A مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة المستقيم $\overline{BC}$ التي تبعد عن مركز القاعدة M بمقدار 8 cm، مساحة المقطع $102\,cm^2$

المطلوب اثباته: ١ حجمه ٢ مساحته الجانبية ٣ مساحته الكلية

البرهان: في $\triangle AMD$ القائم الزاوية في M

$$(AD)^2=(AM)^2+(MD)^2 \Rightarrow (AD)^2=(15)^2+(8)^2 \Rightarrow AD=17\,cm$$

$\because \overline{AM}\perp\overline{MD}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على كل مستقيم مار من اثره في ذلك المستوي)

$\overline{MD}\perp\overline{BC}$ (بعد نقطة عن مستقيم يكون عمودياً)

$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة "تذكر")

$\therefore \overline{AD}$ ارتفاع المثلث ABC : مساحة $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AD)(BC)$

$$102=\frac{1}{2}(17)(BC) \Rightarrow BC=12$$

$BD=DC=6$ (العمود النازل من مركز القاعدة على وتر منها ينصفها)

في $\triangle MDC$ القائم في D: $(MC)^2=(MD)^2+(DC)^2$

نصف قطر قاعدة المخروط "r" $(MC)^2=(8)^2+(6)^2 \Rightarrow MC=10$

في $\triangle ADC$ القائم في D: $(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2$

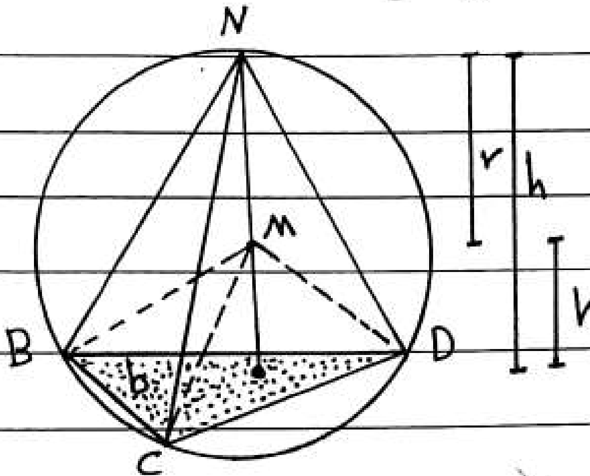
الارتفاع الجانبي للمخروط $(AC)^2=(17)^2+(6)^2 \Rightarrow AC=5\sqrt{13}$

① حجم المخروط $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}(10)^2(15)=500\pi\,cm^3$

② مساحته الجانبية $=\pi(MC)(AC)=\pi(10)(5\sqrt{13})=50\sqrt{13}\pi\,cm^2$

③ مساحته الكلية = المساحة الجانبية $+\pi(MC)^2=50\pi\sqrt{13}+\pi(10)^2=50\pi(\sqrt{13}+2)\,cm^2$

5- اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم.
برهن ان نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع



المعطيات: $N-BCD$ هرم ذي وجوه أربعة منتظم ارتفاعه $= h$
وقد رسمت كرة خارجه نصف قطرها $= r$ ومركزها M

المطلوب اثباته: $r = \frac{3}{4} h$

البرهان:

الاوجه الجانبية للهرم $N-BCD$ هي مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة ولتكن مساحة كل وجه تساوي b (ذي الوجوه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة)

نصل المركز M بالرؤوس الاربعة N, B, C, D
سينقسم الهرم الاصلي الى أربعة اهرامات:
ارتفاع كل منها $= h - r$
مساحة قاعدة كل منها = مساحة قاعدة الهرم الاصلي $= b$
هذه الاهرامات الاربعة متساوية بالحجم (الاهرامات المتساوية بمساحة القاعدة والارتفاع متساوية بالحجم)

حجم الهرم الاصلي $N-BCD = 4$ (حجم الهرم الصغير)

$$\frac{1}{3} bh = 4\left[\frac{1}{3} b(h-r)\right]$$

$$\left[\frac{1}{3} bh = \frac{4}{3} bh - \frac{4}{3} br\right] \cdot (3) \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$$

$$h = 4h - 4r \Rightarrow 4r = 3h \Rightarrow r = \frac{3}{4} h$$

و.هـ.م