طاقة الحركة

يمكن تعريف الطاقة بأنها مقياس قدرة الجسم على بذل شغل.

طاقة حركة جسم هى الطاقة التى يكتسبها الجسم بفضل سرعته وتقدر عند لحظة ما بنصف حاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى مربع سرعته عند هذه اللحظة و يرمز لها بالرمز ط.

فإذا كانت ك كتلة الجسيم، $\overrightarrow{ع}$ متجه سرعته، ع القياس الجبرى لهذا المتجه فإن:

$$ط = \frac{1}{2} ك ||\overrightarrow{ع}||^2 = \frac{1}{2} ك ع^2 \quad (1)$$

وبما أن $||\overrightarrow{ع}||^2 = \overrightarrow{ع} \odot \overrightarrow{ع}$ ، فإنه يمكن التعبير عن طاقة الحركة كالآتى:

$$ط = \frac{1}{2} ك (\overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ع}) \quad (2)$$

يتضح من التعريف أن طاقة حركة الجسيم هى كمية قياسية غير سالبة، وتنعدم فقط عندما ينعدم متجه السرعة. كما يبين التعريف أن طاقة حركة الجسيم قد تتغير من لحظة زمنية لأخرى أثناء حركته تبعًا لمقدار سرعته.

وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الشغل

وحدة قياس طاقة الحركة = كجم × $\frac{\text{متر}}{\text{ث}} \times \frac{\text{متر}}{\text{ث}}$ = كجم $\frac{\text{متر}}{\text{ث}^2}$ × متر = نيوتن. متر

وحدة قياس طاقة الحركة = جم × $\frac{\text{سم}}{\text{ث}} \times \frac{\text{سم}}{\text{ث}}$ = جم × $\frac{\text{سم}^2}{\text{ث}^2}$ × سم = داين × سم = إرج

مثال

(١) يتحرك جسم كتلته ١٠٠جم بسرعة $\overrightarrow{ع} = ٥\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث، احسب طاقة حركة هذا الجسم **أولا:** بالأرج **ثانيا:** بالجول

الحل

نوجد معيار السرعة $\overrightarrow{ع} = ٥\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$

$||\overrightarrow{ع}|| = \sqrt{٥^٢ + ١٢^٢} = ١٣$سم/ث ∴ $||\overrightarrow{ع}||^٢ = ١٦٩$

أولا: طاقة حركة الجسم $= \frac{١}{٢}$ ك $||\overrightarrow{ع}||^٢ = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ \times ١٦٩ = ٨٤٥٠$ إرج

ثانيا: طاقة الحركة $= \frac{٨٤٥٠}{١٠^٧} = ٨,٤٥ \times ١٠^{-٤}$ جول

مثال

(٢) قذف جسم كتلته ١ كجم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث، أوجد

(أ) طاقة حركة الجسم بعد ٦ ثانية من قذفه

(ب) طاقة حركة الجسم عندما يصبح على ارتفاع ١٠٢,٩ متر من نقطة القذف

الحل

(أ) ∵ $ع = ع_. + ء ن$ ∴ $ع = ٤٩ - ٩,٨ \times ٦ = -٩,٨$م/ث

∴ الجسم يكون هابطًا بسرعة مقدارها ٩,٨ م/ث^٢ ط $= \frac{١}{٢}$ ك $ع^٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times (٩,٨)^٢ = ٤٨,٠٢$ چول

(ب) ∵ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ء ف$ ∴ $ع^٢ = (٤٩)^٢ - ٢ \times ٩,٨ \times ١٠٢,٩$

∴ $ع^٢ = ٣٨٤,١٦$ ط $= \frac{١}{٢}$ك $ع^٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٣٨٤,١٦ = ١٩٢,٠٨$ چول

مثال

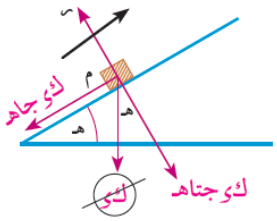
٢ قذف جسم كتلته ٢٠٠ جم بسرعة ٢٨٠سم/ث على خط أكبر ميل لمستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٤٠}$ ولأعلى المستوى ، أوجد طاقة حركة هذا الجسم بوحدة الإرج فى كل ممايأتى:

أ بعد نصف دقيقة من قذفه.

ب عندما يكون على بعد ٢٤,٥ متر من نقطة قذفه.

الحل

معادلة حركة الجسم المتحرك



ك جـ = - ك ى جا هـ

∴ جـ = - $\frac{١}{١٤٠}$ × ٩٨٠ = -٧ سم/ث^{٢}

أ ع = ع$_{.}$ + جـ ن

ع = ٢٨٠ - ٧ × ٣٠ = ٧٠ سم/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ × (٧٠)^{٢} = ٤٩ × ١٠^{٤} إرج

ب ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف

ع^{٢} = (٢٨٠)^{٢} - ٢ × ٧ × ٢٤٥٠ = ٤٤١٠٠

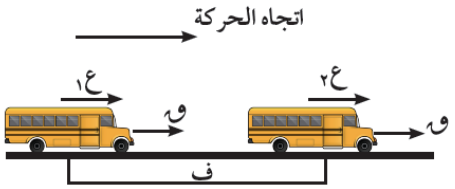
ع = ± ٢١٠ سم/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ × (٢١٠)^{٢} = ٤٤١ × ١٠^{٤} إرج

مبدأ الشغل والطاقة:

إذا كانت و ثابتة :

باعتبار أن جسمًا كتلته (ك) يتحرك مسافة (ف) تحت تأثير محصلة القوى (و) بحيث تتغير سرعته من ($ع_1$) إلى ($ع_2$) فيكون: الشغل المبذول بواسطة محصلة هذه:



شكل (١)

ش = و × ف

∵ $ع_2^2 = ع_1^2 + 2$ جـ ف وباعتبار أن $ع_1$ ، $ع_2$ هما السرعتان الأبتدائية والنهائية على الترتيب

∴ $ع_2^2 - ع_1^2 = 2$ جـ ف بضرب طرفى العلاقة فى $\frac{1}{2}$ ك

$\frac{1}{2}$ ك ($ع_2^2 - ع_1^2$) = ك جـ ف

∴ $\frac{1}{2}$ ك ($ع_2^2 - ع_1^2$) = ق . ف حيث و قوة ثابتة المقدار

∴ التغير فى طاقة الحركة يساوى الشغل المبذول

إذا كانت و قوة متغيرة ،

∵ ط = $\frac{1}{2}$ ك $ع^2$

∴ $\frac{د}{د ن}$ (ط) = ك ع $\frac{د ع}{د ن}$ $\frac{د}{د ن}$ (ط) = ك جـ ع

$\frac{د}{د ن}$ (ط) = و $\frac{د ف}{د ن}$

∴ $ط_0 \int_{ط}^{ط_0} د$ (ط ح) = $ف_0 \int_{ف}^{ف_0}$ و د ف أى أن ط - $ط_0$ = ش

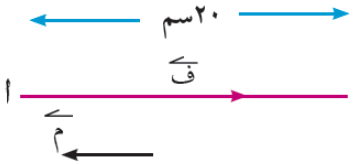
∴ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

«التغير فى طاقة حركة الجسيم عند انتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه خلال الإزاحة بين هذين الموضعين».

مثال

(٤) اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠جم بسرعة ٤٠٠متر/ث على حاجز سميك فاستقرت فيه على عمق ٢٠سم، أوجد مقدار قوة مقاومة مادة الحاجز لحركة الرصاصة باعتبار هذه القوة ثابتة.

الحل



شكل (٦)

ليكن ا موضع دخول الرصاصة إلى داخل الحاجز ، ب الموضع الذى أستقرت فيه، م قوة المقاومة مقدَّرة بوحدة الداين لدينا ا ب = ٢٠ سم، بما أن قوة المقاومة تعمل فى عكس اتجاه الازاحة.

فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة يكون سالبًا ويحسب كالآتى:

ش = -ا ب × م = - ٢٠م

طاقة حركة الرصاصة عند الدخول إلى الحاجز :

ط$_{ا}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ × (٤٠٠ × ١٠٠)^{٢} = ١,٦ × ١٠^{١١} إرج

(لاحظ تحويل السرعة إلى وحدة سم/ ث).

طاقة حركة الرصاصة عند الموضع ب : ط$_{ب}$ = صفر لأن الرصاصة ساكنة فى هذا الموضع.

التغير فى طاقة حركة الرصاصة : ط$_{ب}$ - ط$_{ا}$ = -١,٦ × ١٠^{١١} ارج

∵ ط$_{ب}$ - ط$_{ا}$ = ش

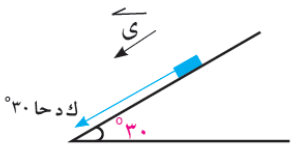
∴ -١,٦ × ١٠^{١١} = -٢٠م

∴ م = $\frac{-١,٦ \times ١٠^{١١}}{-٢٠}$ = ٨ × ١٠^{٩} داين

مثال

(٥) ترك جسم كتلته ٢٠كجم ليهبط على خط أكبر ميل لمستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° . أوجد سرعة الجسم بعد أن يكون قد قطع مسافة ٥ أمتار على المستوى باستخدام مبدأ الشغل والطاقة.

الحل



شكل (٧)

القوة الوحيدة التى تبذل شغلا هى مركبة قوة الوزن الموازية لخط أكبر ميل الذى تحدث عليه الحركة، وتكون هذه القوة موجهة لأسفل المستوى ومقدارها ك ى جا ٣٠ حيث ك كتلة الجسم، ى مقدار عجلة الجاذبية الأرضية شكل (٧).

الشغل الذى تبذله هذه القوة أثناء الازاحة المعطاة:

ش = (ك ى جا ٣٠°) × ف

= (٢٠ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$) × ٥ = ٤٩٠ جول

∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

∴ $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} - صفر = ش

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ع^{٢} = ٤٩٠

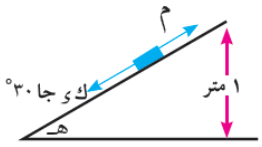
∴ ع^{٢} = ٤٩

∴ ع = ٧ متر / ث وهى سرعة الجسم بعد أن يكون قد قطع ٥ أمتار من موقعة الابتدائى.

مثال

(٦) وضع جسم كتلته ٣٠٠جم عند قمة مستوى مائل ارتفاعه ١متر. أحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن مقدار الشغل الذى بذلته قوة مقاومة المستوى للحركة يساوى ١,٥٩جول.

الحل



شكل (٨)

ليكن ف طول المستوى مقيسًا بالمتر ، هـ قياس زاوية ميله على الأفقي، تؤثر على الجسم قوتان توازيان اتجاه الحركة؛ مركبة الوزن، وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك ى جا هـ وقوة مقاومة المستوى لحركة الجسم عليه وتعمل فى خط أكبر ميل لأعلى وليكن مقدارها م.

الشغل المبذول أثناء حركة الجسم من قمة المستوى حتى قاعدته:

ش = (ك ى جا هـ - م) × ف

= (٠,٣ × ٩,٨ × $\frac{١}{ف}$ - م) × ف = ٠,٣ × ٩,٨ - م ف

ولكن م ف = ١,٥٩ جول هو الشغل الذى بذلته قوة المقاومة.

∴ ش = ٠,٣ × ٩,٨ - ١,٥٩ = ١,٣٥ جول

∴ ط - ط. = ش

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٠,٣ ع^{٢} - صفر = ١,٣٥

∴ ع^{٢} = ٩ ∴ ع = ٣ متر /ث

مثال

(٧) جسم كتلته ١ كجم يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ١٢م/ث، أثرت عليه قوة مقاومة فى اتجاه مضاد لاتجاه حركته مقدارها ٦س^{٢} (نيوتن) حيث س المسافة التى يقطعها الجسم تحت تأثير المقاومة (بالمتر).

أ أوجد الشغل الذى تبذله المقاومة عندما س = ٤ ب أوجد سرعة الجسم وطاقة حركته عندما س = ٢

الحل

أ ش = ل^{٤} . هـ ى س

= ل^{٤} . - ٦س^{٢} ى س = [- ٢س^{٣}] $_{.}^{٤}$

= - ١٢٨ جول

ب ∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

$\frac{١}{٢}$ ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) = ل^{٢} . هـ ى س

$\frac{١}{٢}$ × ١ (ع^{٢} - ١٤٤) = ل^{٢} . - ٦س^{٢} ى س

$\frac{١}{٢}$ (ع^{٢} - ١٤٤) = [- ٢س^{٣}] $_{.}^{٢}$

$\frac{١}{٢}$ (ع^{٢} - ١٤٤) = - ١٦

ع^{٢} = ١١٢

ع = ٤√٧ م/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١١٢ = ٥٦ جول

حاول أن تحل

(١) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $ع = ٦٠ س - ٨٠ ص$ حيث $س$ ، $ص$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث احسب طاقة حركة هذا الجسم

أولا: بالأرج ثانيا: بالجول.

حاول أن تحل

(٢) سقط جسم كتلته ٥٠٠جم رأسيًا إلى أسفل من أرتفاع ٧٨,٤ متر عن سطح الأرض، أوجد :

أ طاقة حركة الجسم بعد ٢ ثانية من سقوطه

ب طاقة حركة الجسم لحظة ملامسته لسطح الأرض.

حاول أن تحل

(٣) سيارة كتلتها ١ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠}$ أبطل محركها ووقفت بعد أن قطعت مسافة ٢٠ مترا من لحظة إبطال المحرك فإذا كان قوة مقاومة المنحدر $\frac{١}{٥}$ وزن السيارة إحسب طاقة حركة السيارة بوحدة الجول.

تفكير ناقد:

أثبت أنه إذا بدأ جسيم حركته من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع، فإن طاقة حركته النهائية تساوى طاقة حركته الابتدائية ، ثم استنتج من ذلك أنه فى حركة المقذوف الرأسى تحت تأثير الجاذبية الأرضية الثابتة تكون سرعة المقذوف أثناء مرحلة الصعود عند نقطة ما تساوى سرعته أثناء مرحلة الهبوط عند النقطة نفسها.

حاول أن تحل

(٤) أطلقت رصاصة على هدف سمكه ٩سم وخرجت من جانبه الأخر بنصف سرعتها التى دخلت بها. فما هو أقل سمك لازم لهدف من نفس المادة حتى لا تخرج منه نفس الرصاصة لو أطلقت عليه بسرعتها السابقة نفسها.

حاول أن تحل

(٥) قذف جسم كتلته ٢ كجم بسرعة ٣ متر/ث إلى أسفل على خط أكبر ميل لمستوى أملس طوله ١٠ أمتار وأرتفاعه ٢ متر أوجد طاقة حركة هذا الجسم عند وصوله إلى قاعدة المستوى.

حاول أن تحل

(٦) وضع جسم كتلته ٢٠٠ جرام عند قمة مستوى مائل إرتفاعه ٣ أمتار. إحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن مقدار الشغل الذى بذلته قوة مقاومة المستوى للحركة ٤,٤٨ جول.

مثال (١) : جسم كتلته ٣,٦ طن يتحرك بسرعة ٢٧ كم/س ،
أحسب طاقة حركته بالكيلووات.ساعة .

الحل

ك = ٣,٦ طن = ٣٦٠٠ كجم ، ع = ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ = $\frac{١٥}{٢}$ م/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠٠ × $(\frac{١٥}{٢})^{٢}$ نيوتن.متر أى جول

= $\frac{٤٥٠ \times ٢٢٥}{٣٦ \times ١٠^{٥}}$ كيلووات.ساعة = ٠,٠٢٨ ك.س

مثال (٢) : جسم كتلته ٤٠٠ جرام ومتجه الإزاحة له عند أى لحظة :

$\overleftarrow{ف}$ = حا ه $\overleftarrow{س}$ + حتا ه $\overleftarrow{ص}$ حيث ف بالمتر ،

أوجد طاقة الحركة له عند أى لحظة ، وأثبت أنها ثابتة .

الحل

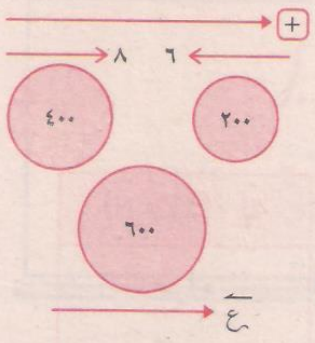
∵ $\overleftarrow{ف}$ = حا ه $\overleftarrow{س}$ + حتا ه $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ = $\frac{د \overleftarrow{ف}}{د ه}$ = حتا ه $\overleftarrow{س}$ + حا ه $\overleftarrow{ص}$

∴ ‖$\overleftarrow{ع}$‖ = $\sqrt{\text{حتا}^{٢}ه + \text{حا}^{٢}ه}$ = ١ م/ث ، ∴ مقدار السرعة يكون ثابتًا .

∴ ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٠,٤ × (١)^{٢} = ٠,٢ جول = مقدار ثابت

مثال (٣) : كرتان ملساوتان كتلتاهما ٢٠٠ ، ٤٠٠ جرام تتحركان فى خط مستقيم فى اتجاهين متضادين . تصادمت الكرتان عندما كان مقدار سرعتيهما ٦ ، ٨ م/ث على الترتيب ، فإذا تحركتا بعد التصادم كجسم واحد . أحسب سرعة هذا الجسم بعد التصادم ثم أحسب طاقة الحركة المفقودة نتيجة للتصادم .

الحل



٤٠٠ × ٨ + ٢٠٠ × −٦ = ٦٠٠ ع

∴ ٢٠٠٠ = ٦٠٠ ع ∴ ع = $\frac{١٠}{٣}$ م/ث

مجموعة طاقتى الحركة قبل التصادم

= $\frac{١}{٢}$ × ٠,٤ × ٦٤ + $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × ٣٦ = ١٦,٤ جول

طاقة الحركة بعد التصادم = $(\frac{١}{٣})^{٢}$ × ٠,٦ × ٤ = $\frac{١٠}{٣}$

طاقة الحركة المفقودة = ١٦,٤ − $\frac{١٠}{٣}$ ≃ ١٣,٠٧ جول

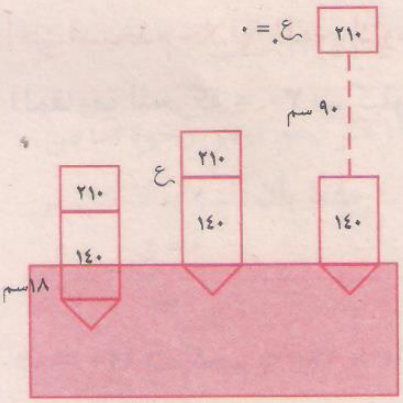
مثال (٤) : عند عمل أساس منزل استخدمت مطرقة كتلتها ٢١٠ كجم لتسقط من ارتفاع ٩٠ سم على أسطوانة كتلتها ١٤٠ كجم فتدفعها فى الأرض مسافة ١٨ سم . أوجد :

أولاً : السرعة المشتركة للأسطوانة والمطرقة بعد التصادم .

ثانيًا : طاقة الحركة المفقودة نتيجة التصادم .

ثالثًا : متوسط مقاومة الأرض لحركة الأسطوانة بثقل الكجم .

الحل



سرعة المطرقة قبل التصادم مباشرة :

$ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢جف = ٠ + ٢ \times ٩,٨ \times ٠,٩$

$\therefore ع = ٤,٢$ م/ث

عند التصادم : $ك_{١} ع_{١} + ك_{٢} ع_{٢} = (ك_{١} + ك_{٢}) ع$

$٢١٠ \times ٤,٢ + ١٤٠ \times ٠ = ٣٥٠ \times ع$

ومنها $ع = ٢,٥٢$ م/ث

- الطاقة المفقودة = مجموع طاقتى الحركة قبل التصادم – مجموع طاقتى الحركة بعد التصادم

$= \frac{١}{٢} \times ٢١٠ \times (٤,٢)^{٢} - \frac{١}{٢} \times ٣٥٠ \times (٢,٥٢)^{٢} = ٧٤٠,٨٨$ جول

- لحساب المقاومة : **ط – ط. = ش**

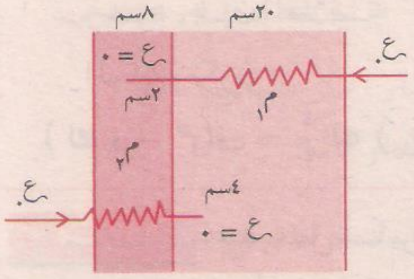
$\frac{١}{٢} ك(ع^{٢} - ع_{.}^{٢}) = (ك ج - م) \times ف$

$\frac{١}{٢} \times ٣٥٠ \times [٠ - (٢,٥٢)^{٢}] = [٣٥٠ \times ٩,٨ - م] \times ٠,١٨$

$\therefore م = ٩٦٠٤$ نيوتن $\Leftarrow$ $م = ٩٨٠$ ث.كجم

مثال (٥) : درع وقائى مصنوع من طبقتين إحداهما من الأسمنت سمكها ٢٠ سم والأخرى من الحديد سمكها ٨ سم أطلقت رصاصتان متماثلتان بسرعة واحدة على الدرع اخترقت الأولى الأسمنت وغاصت فى الحديد ٢ سم ، واخترقت الثانية الحديد وغاصت فى الأسمنت ٤ سم ، أحسب النسبة بين مقدار مقاومة الأسمنت ومقاومة الحديد .

الحل



∵ ك ، ع ، ع. للرصاصتين متساوية

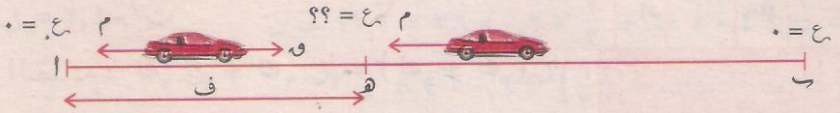
$\therefore ش_{١} = ش_{٢}$

$-م_{١} \times ٢٠ - م_{٢} \times ٢ = -م_{٢} \times ٨ - م_{١} \times ٤$

$٦م_{٢} = ١٦م_{١}$ $\therefore م_{١} : م_{٢} = ٦ : ١٦ = ٣ : ٨$

مثال (٦) : رجل كتلته ٨٠ كجم يريد أن ينتقل بعربة كتلتها ٤٠٠ كجم من موضع ا إلى موضع ب المسافة بينهما ٢٤٠ متر . فإذا بدأ من السكون من ا مستخدمًا محرك السيارة لتكتسب العربة سرعة ع ثم أوقف المحرك فسكنت العربة عند ب . أوجد المسافة التى استخدم خلالها المحرك ومقدار السرعة (ع) . علمًا بأن قوة المحرك ١٢٠ ث.كجم ، المقاومة للحركة = ٣٠ ث.كيلوجرام . (اعتبر ى = ١٠ م/ث^{٢})

الحل



ق = ١٢٠ ث.كجم = ١٢٠ × ١٠ نيوتن ، ع$_{ا}$ = ٠ ، ع$_{ب}$ = ٠

م = ٣٠ ث.كجم = ٣٠ × ١٠ نيوتن ع$_{هـ}$ = ع ؟؟

بدراسة الإزاحة $\overrightarrow{اب}$: ط – ط$_{.}$ = ش

$\frac{١}{٢}$ ك[ع$_{ب}^{٢}$ – ع$_{ا}^{٢}$] = ق × ف – م × ٢٤٠

صفر = ١٢٠٠ × ف – ٣٠٠ × ٢٤٠ ∴ ف = $\frac{٣٠٠ \times ٢٤٠}{١٢٠٠}$ = ٦٠ متر

بدراسة الإزاحة $\overrightarrow{اهـ}$: ط – ط$_{.}$ = ش ⇐ $\frac{١}{٢}$ ك[ع$_{هـ}^{٢}$ – ع$_{ا}^{٢}$] = (ق – م) × ف

$\frac{١}{٢}$ × ٤٨٠ [ع^{٢} – ٠] = ٩٠٠ × ٦٠ ومنها ع = ١٥ م/ث

مثال (٧) : يتحرك جسيم كتلته ٢ كجم فى خط مستقيم مبتدئًا بسرعة ١٠ م/ث من نقطة ثابتة و على هذا الخط تحت تأثير قوة : ق = ٣س^{٢} – ٢س + ١٢ حيث س بُعد الجسم عن و ، ||$\overrightarrow{وس}$|| مقاسة بالمتر ، ||$\overrightarrow{ق}$|| بالنيوتن ، أوجد :

أولاً : التغير فى طاقة الحركة من س = ١ إلى س = ٥ متر .

ثانيًا : أحسب سرعة الجسم عندما يكون على بُعد ٣ متر من نقطة البدء .

الحل

أولاً : التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول من س = ١ إلى س = ٥ :

= $\int_{١}^{٥}$ ق . ى س = $\int_{١}^{٥}$ (٣س^{٢} – ٢س + ١٢) ى س

= [س^{٣} – س^{٢} + ١٢س]$_{١}^{٥}$ = ١٤٨ جول

ثانيًا : الشغل المبذول من س = ٠ إلى س = ٣ يساوى التغير فى طاقة الحركة :

= $\int_{٠}^{٣}$ (٣س^{٢} – ٢س + ١٢) ى س = $\frac{١}{٢}$ ك(ع^{٢} – ع$_{٠}^{٢}$)

= [س^{٣} – س^{٢} + ١٢س]$_{٠}^{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢(ع^{٢} – ١٠٠)

∴ ٥٤ = ع^{٢} – ١٠٠ ∴ ع = $\sqrt{١٥٤}$ ≃ ١٢,٤١ م/ث

مثال (٨) : إذا سقط جسم كتلته ٣ كجم من ارتفاع ١٩,٦ متر نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة قدرها ٠,٣ متر ، أوجد مقاومة الأرض بفرض ثبوتها علمًا بأن السرعة لا تتغير نتيجة للصدمة مع الأرض .

الحل

لاحظ فى هذا المثال أنه لا يوجد فقط للطاقة نتيجة للصدمة

∴ يمكن التعامل مع المرحلتين كمرحلة واحدة .

من لحظة السقوط حتى لحظة السكون داخل الأرض :

التغير فى طاقة الحركة

= الشغل المبذول من الوزن – الشغل المبذول من المقاومة

∴ $\frac{1}{2}$ × ٥٠ (صفر – صفر) = ك ى × (١٩,٦ + ٠,٣) – م × ٠,٣

∴ م × ٠,٣ = ٣ × ٩,٨ × (١٩,٩)

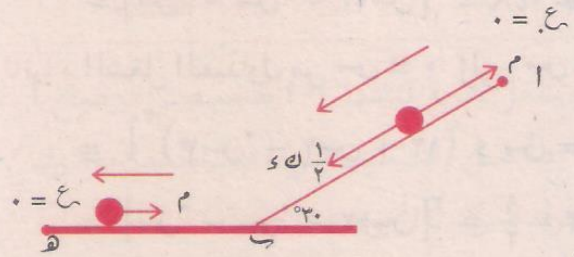
∴ م = $\frac{٣ \times ٩,٨ \times ١٩,٩}{٠,٣}$ = ١٩٩ ث.كجم

مثال (٩) : وضع جسم كتلته ك كجم عند قمة مستو مائل طوله ف متر ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وينتهى بمستوى أفقى فانزلق الجسم على المستوى المائل ، واستمر بعد ذلك فى الحركة على المستوى الأفقى فسكن بعد أن قطع مسافة مساوية للمسافة التى قطعها على المستوى المائل . أوجد بالنيوتن مقدار المقاومة لكل كجم من الكتلة بفرض أن مقدار مقاومة الطريقين متساوى ، وأن مقدار سرعة الجسم لا يتغير بانتقاله إلى المستوى الأفقى .

الحل

نفرض أن مقدار سرعة الجسم فى نهاية المستوى المائل = ع متر/ث وهى نفسها مقدار سرعته فى بداية المستوى الأفقى

∵ ط – ط = ش ،



على المستوى المائل :

∴ ½ ك (ع² – ٠) = (½ ك ء – م)ف

∴ ½ ك ع² = (٤,٩ ك – م)ف .... (١)

على المستوى الأفقى : ∴ ٠ – ½ ك ع² = –م ف .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٠ = (٤,٩ ك – م)ف – م ف

بالقسمة على ف : ∴ ٠ = ٤,٩ ك – ٢م ، ∴ م = ٢,٤٥ ك نيوتن

∴ مقدار المقاومة لكل كجم من الكتلة = ٢,٤٥ نيوتن

حل آخر : المقاومة لكل كجم من الكتلة = المقاومة عندما ك = ١ كجم

∵ سرعة الجسم لم تتغير عند انتقاله من المستوى المائل إلى المستوى الأفقى .

∴ ندرس الحركة من ا إلى هـ حيث ع عند ا = ٠ ، ع عند هـ = ٠

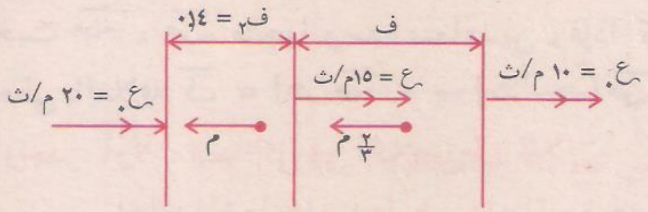
∴ ½ ك(ع² – ع²) = ك ء حا هـ × ف – م × ٢ف (بالقسمة على ف)

∴ صفر = ١ × ٩,٨ × ½ – ٢م ∴ م = ٢,٤٥ نيوتن

حل ثالث: حاول بنفسك الحل باستخدام قوانين نيوتن .

مثال (١٠) : أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠ متر/ث فى اتجاه عمودى على حائط رأسى سمكه ١٤ سم فخرجت منه بسرعة ١٥ متر/ث فى نفس الاتجاه لتسقط بهذه السرعة عموديًا على حائط رأسى آخر فخرجت منه بسرعة ١٠ متر/ث فإذا كانت مقاومة الحائط الثانى $\frac{٢}{٣}$ مقاومة الحائط الأول ، فأوجد : سمك الحائط الثانى .

الحل



نفرض الكتلة = ك كجم

فى الحالة الأولى :

$$\frac{١}{٢}ك\left((١٥)^{٢} - (٢٠)^{٢}\right) = -م \times ٠,١٤ \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

فى الحالة الثانية :

$$\frac{١}{٢}ك\left((١٠)^{٢} - (١٥)^{٢}\right) = -\frac{٢}{٣}م \times ف \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\frac{(١)}{(٢)} \Leftarrow \frac{-\frac{١}{٢}ك \times ١٧٥}{-\frac{١}{٢}ك \times ١٢٥} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٠,١٤}{ف٢}$$

$$\frac{٧}{٥} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٠,١٤}{ف} \quad \therefore ف = ٠,١٥ \text{ متر} = ١٥ \text{ سم}$$

مثال (١١) : يعطى متجه إزاحة جسم كتلته ١٠٠ جرام كدالة فى الزمن ن ثانية بالعلاقة : $\overleftarrow{ف} = (٤ن - ن^٢)\ \overleftarrow{ى}$ متجه وحدة ثابت ، ف مقاسة بالسنتيمتر ، أحسب :

أولاً : متجه القوة المؤثرة على الجسم .

ثانيًا : الشغل الذى بذلته هذه القوة خلال الثوانى الأربعة الأولى من حركته .

ثالثًا : التغير فى طاقة الحركة خلال الثوانى الأربعة الأولى .

الحل

$\overleftarrow{ف} = (٤ن - ن^٢)\ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع} = \frac{د\overleftarrow{ف}}{دن} = (٤ - ٢ن)\ \overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ح} = \frac{د\overleftarrow{ع}}{دن} = -٢\ \overleftarrow{ى}$ ∴ $\overleftarrow{ق} = ك\ \overleftarrow{ح}$

$\overleftarrow{ق} = -٢ \times ١٠٠\ \overleftarrow{ى}$ ∴ $\overleftarrow{ق} = -٢٠٠\ \overleftarrow{ى}$

عند ن = ٤ : ∴ $\overleftarrow{ف}$ = صفر

∴ الشغل المبذول بعد ٤ ثوان = صفراً ، أى أن الجسم عاد إلى نقطة البدء

، التغير فى طاقة الحركة خلال ٤ ثوان = صفر

مثال (١٢) : يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير القوى $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ،
$\overrightarrow{ق_٢} = ٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٣\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ مقدار كل منها بالنيوتن .
حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ، فإذا كان متجه الإزاحة كدالة فى الزمن يُعطى بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = ا ه^٢ \overrightarrow{س} - ب(ه^٢ - ه)\overrightarrow{ص}$ ومعيار الإزاحة بالمتر

أوجد : أولاً : قيمة كل من الثابتين ا ، ب

ثانيًا : الشغل المبذول من هذه القوة بعد ٢ ثانية من بدء الحركة .

ثالثًا : طاقة الحركة فى نهاية زمن قدره ٢ ثانية .

الحل

$\overrightarrow{ق} = (٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص})$ ..... (١) ، $\overrightarrow{ف} = ا ه^٢ \overrightarrow{س} - ب(ه^٢ - ه)\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ع} = ٢ا ه \overrightarrow{س} - ب(٢ه - ١)\overrightarrow{ص}$

أولاً : $\overrightarrow{ح} = ٢ا\overrightarrow{س} - ٢ب\overrightarrow{ص}$ ..... (٢)

∵ $\overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{ح}$ ∴ $(٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}) = ١٤\overrightarrow{س} - ٤ب\overrightarrow{ص}$

∴ ١٤ ا = ٦ ∴ $ا = \frac{٣}{٢}$ ∴ $-٤ب = ٨$ ∴ $ب = -٢$

∴ $\overrightarrow{ف} = \frac{٣}{٢} ه^٢ \overrightarrow{س} - ٢(ه^٢ - ه)\overrightarrow{ص}$

ثانيًا : $ش = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

∴ $ش = (٦ ، ٨) \cdot (\frac{٣}{٢} ه^٢ ، ٢(ه^٢ - ه)) = ٩ه^٢ + ١٦ه^٢ - ١٦ه$

∴ $ش = ٢٥ه^٢ - ١٦ه$ فى الفترة $[٠ ، ه]$

فى $[٠ ، ٢]$: ∴ $ش = ٢١٥ \times ٤ - ١٦ \times ٢ = ٦٨$ جول

ثالثًا : $\overrightarrow{ع} = ٣٠\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ∴ $\| \overrightarrow{ع} \| = ٢$ م/ث ∴ $ط - ط_. = ٦٨$

∴ $ط - \frac{١}{٢} \times ٢ \times (٢)^٢ = ٦٨$ ∴ $ط = ٦٨ + ٤ = ٧٢$ جول

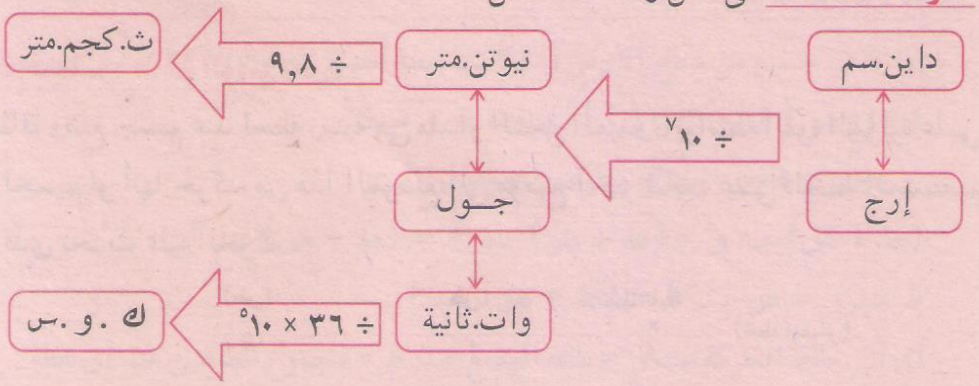
ثالثا : طاقة الحركة (ط)

هى حاصل ضرب نصف كتلة الجسم × مربع معيار سرعته ⇐ $ط = \frac{1}{2} ك ع^2$

لاحظ أن : (١) طاقة الحركة كمية قياسية غير سالبة .

(٢) تتغير طاقة الحركة للجسيم بتغير مقدار سرعته إذا كانت الكتلة ثابتة .

وحدة الطاقة : هى نفس وحدات الشغل



(الكتلة) ك	(السرعة) ع	(طاقة الحركة) $ط = \frac{1}{2} ك ع^2$
جرام	سم/ث	داين.سم أى إرج
كجم	متر/ث	نيوتن.متر أى جول

رابعا : مبدأ الشغل والطاقة

التغير فى طاقة حركة جسيم عند انتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى = الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة على الجسيم خلال الأزاحة بين هذين الموضعين .

$ش = ط - ط_{.}$

ويمكن صياغتها بالصورة : $\frac{1}{2} ك (ع^2 - ع_{.}^2) = ق \times ف$

حيث ق محصلة القوة المؤثرة على الجسم فى اتجاه الإزاحة $\overleftarrow{ف}$

لاحظ أن :

(١) ضرورة الالتزام بالوحدات المناسبة عند استخدام هذه العلاقة

ك بالكيلوجرام — ع بالمتر/ث — ق بالنيوتن — ف بالمتر

(٢) فى حالة جسم رأسيًا داخل أرض رخوة ، فإن العلاقة السابقة تكون :

$(ك ى - م)ف = \frac{1}{2} ك (ع^2 - ع_{.}^2)$

(٣)

فى حالة حركة جسيم تحت تأثير قوة أفقية ضد مقاومات م

$(ق - م)ف = \frac{1}{2} ك (ع^2 - ع_{.}^2)$