التفوق

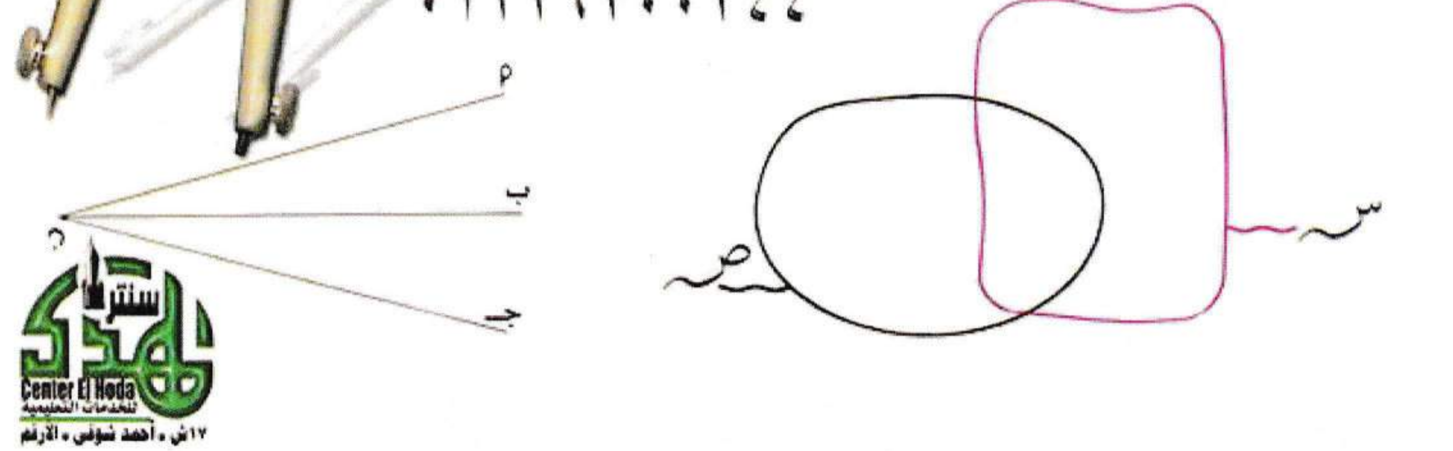
فى التفاضل والتكامل

الصف الثالث الثانوى

أ / صابر عبدالرحيم محمود

٠١٢٢٢٦٢٠٠٢٤٤

سنتر الهدى
Center El Hoda
للخدمات التعليمية
١٧ش . أحمد شوقى . الارقم



بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين .. والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أعزائي طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوي

يسعدني أن أقدم لكم هذا الجهد المتواضع .. متمنيا لكم التفوق والنجاح بإذن الله ...

دعاء بدء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين .. وإلهام الملائكة المقربين..اللهم اجعل لساني عامراً بذكرك وقلبي بخشيتك ..وجسدي بطاعتك .. إنك على كل شئ قدير

من طرق تقوية المذاكرة

- ✪ الفهم أولا يساعد على الحفظ والتخزين .
- ✪ استذكر موضوعات متكاملة .
- ✪ الترابط بين ما تستذكره وما لديك من معلومات يقوى الذاكرة.
- ✪ تصنيف المواد حسب الموضوعات وحسب البساطة والصعوبة يسهل المذاكرة
- ✪ الصحة بشكل عام عامل أساسي لتقوية الذاكرة .
- ✪ بعد صلاة الفجر من أفضل أوقات المذاكرة .
- ✪ الوضوء قبل المذاكرة والبدء بالقرآن .
- ✪ تخصيص مكان للمذاكرة بعيداً عن مكان النوم .
- ✪ الجلوس بحيث يكون الظهر مستقيم .
- ✪ أن يقع الضوء على الكتاب مباشرة .
- ✪ بعد مذاكرة المادة قم بمراجعة سريعة قبل تركها والانتقال إلى غيرها .

- ✪خطط يومك كل صباح بكتابة الأشياء التى يجب أن تعملها .
- ✪لا تقم بزيارة صديق إلا بعد أخذ موعد سابق للزيارة .
- ✪احتفظ دائماً بورقة وقلم لتسجيل الأفكار خلال أوقات الفراغ .
- ✪خطط أوقات الراحة وحاول أن تجعلها تتفق مع أوقات الصلاة .
- ✪استفد من وقت الفراغ بالقراءة أو بحفظ القرآن الكريم .
- ✪وفر كل المواد و التلخيصات اللازمة قبل أن تبدأ المذاكرة .

اشتقاق الدوال المثلثية

① اذا كانت ص = جا س فإن
ص' = جتا س

② ص = جتا س ∴ ص' = − جا س

③ ص = ظا س ∴ ص' = قا^2 س

④ ص = ظتا س ∴ ص' = − قتا^2 س

⑤ ص = قا س ∴ ص' = قا س ظا س

⑥ ص = قتا س ∴ ص' = − قتا س ظتا س

وبصفة عامة

① اذا كانت ص = ظتا ع فإن
ص' = − قتا^2 ع . $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

② ص = قا ع ∴ ص' = قا ع ظا ع . $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

③ ص = قتا ع ∴ ص' = − قتا ع ظتا ع . $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

- أمثلة محلولة -

① أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

① ص = ظتا ٥س

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − قتا^2 ٥س × ٥ = − ٥ قتا^2 ٥س

② ص = قتا ٢س

- الحل -

ص' = − قتا ٢س ظتا ٢س × ٢
= − ٢ قتا ٢س ظتا ٢س

③ ص = قا ٧س

- الحل -

ص' = قا ٧س ظا ٧س × ٧
= ٧ قا ٧س ظا ٧س

④ ص = قا(٥س + ٢)

- الحل -

د(س) = قا(٥س + ٢) ظا(٥س + ٢) × ٥
= ٥ قا(٥س + ٢) ظا(٥س + ٢)

⑤ ص = قتا(π − ٢س)

- الحل -

ص' = − قتا(π − ٢س) ظتا(π − ٢س) × −٢
= ٢ قتا(π − ٢س) ظتا(π − ٢س)

⑥ ص = ظتا(س^2 + ٣)

- الحل -

ص' = − قتا^2(س^2 + ٣) × ٢س
= − ٢س قتا^2(س^2 + ٣)

⑦ ص = س + ظتا ٢س

- الحل -

ص' = ١ + (− قتا^2 ٢س) × ٢
= ١ − ٢ قتا^2 ٢س

⑧ ص = $\sqrt[3]{\text{س}}$ + قا ٥س

- الحل -

ص = س$^{\frac{1}{3}}$ + قا ٥س

∴ ص' = $\frac{1}{3}$ س$^{\frac{-2}{3}}$ + قا ٥س ظا ٥س × ٥

∴ ص' = $\frac{1}{3\sqrt[3]{\text{س}^2}}$ + ٥ قا ٥س ظا ٥س

⑨ ص = ظتا(π − $\frac{1}{\text{س}}$)

- الحل -

ص' = − قتا^2(π − $\frac{1}{\text{س}}$) × $\frac{1}{\text{س}^2}$
= $\frac{-1}{\text{س}^2}$ قتا^2(π − $\frac{1}{\text{س}}$)

(١٠) ص = ٣ س^{٥} + ٤ ظتا س

- الحل -

ص' = ١٥ س^{٤} − ٤ قتا^{٢} س

(١١) ص = جتا ٢س − ٥ ظتا ٣س

- الحل -

ص' = −٢ جا ٢س + ١٥ قتا^{٢} ٣س

(١٢) ص = ٣ قا ٢س + ٢ قتا ٣س

- الحل -

ص' = ٦ قا ٢س ظا ٢س − ٦ قتا ٣س ظتا ٣س

(١٣) ص = قا $\sqrt{\text{س} - ٢}$

- الحل -

ص' = قا $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ظا $\sqrt{\text{س} - ٢}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س} - ٢}}$

= $\frac{\text{قا}\sqrt{\text{س}-٢} \times \text{ظا}\sqrt{\text{س}-٢}}{٢\sqrt{\text{س}-٢}}$

(١٤) ص = س قا ٣س

- الحل -

ص' = قا ٣س + س قا ٣س ظا ٣س × ٣

= قا ٣س + ٣س قا ٣س ظا ٣س

(١٥) ص = س^{٢} ظتا ٣س

- الحل -

ص' = ٢س ظتا ٣س + س^{٢} (−قتا^{٢} ٣س) × ٣

= ٢س ظتا ٣س − ٣س^{٢} قتا^{٢} ٣س

(١٦) ص = س^{٣} قتا س

- الحل -

ص' = ٣س^{٢} قتا س + س^{٣} (−قتا س ظتا س)

= ٣س^{٢} قتا س − س^{٣} قتا س ظتا س

(١٧) ص = قا س ظا ٢س

- الحل -

ص' = قا س ظا س ظا ٢س + قا س × قا^{٢} ٢س × ٢

= قا س ظا س ظا ٢س + ٢ قا س قا^{٢} ٢س

(١٨) ص = قتا س ظتا س

- الحل -

ص' = −قتا س ظتا س ظتا س + قتا س × −قتا^{٢} س

= −قتا س ظتا^{٢} س − قتا^{٣} س

(١٩) ص = (س^{٢} + ٥س + ٦) قا س

- الحل -

ص' = (٢س + ٥) قا س + (س^{٢} + ٥س + ٦) × قا س ظا س

(٢٠) ص = س^{٢} قا $\frac{١}{\text{س}}$

- الحل -

ص' = ٢س قا $\frac{١}{\text{س}}$ + س^{٢} × قا $\frac{١}{\text{س}}$ ظا $\frac{١}{\text{س}}$ × $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

= ٢س قا $\frac{١}{\text{س}}$ − قا $\frac{١}{\text{س}}$ ظا $\frac{١}{\text{س}}$

(٢١) ص = س^{٢} جتا س ظتا س

- الحل -

ص' = ٢س جتا س ظتا س + س^{٢} (−جا س) × ظتا س + س^{٢} جتا س (−قتا^{٢} س)

= ٢س جتا س ظتا س − س^{٢} جا س ظتا س − س^{٢} جتا س قتا^{٢} س

(٢٢) ص = $\frac{\text{ظتا س}}{\text{س}}$

- الحل -

ص' = $\frac{\text{س}(-\text{قتا}^{٢}\text{س}) - \text{ظتا س} \times ١}{\text{س}^{٢}}$

∴ ص' = $\frac{-\text{س قتا}^{٢}\text{س} - \text{ظتا س}}{\text{س}^{٢}}$

(٢٣) ص = ظتا ٣س / (٢س + ٣)

- الحل -

ص' = [(٢س + ٣)(- قتا^{٢} ٣س) × ٣ - ظتا ٣س × ٢] / (٢س + ٣)^{٢}

= [-٦س قتا^{٢} ٣س - ٩ قتا^{٢} ٣س - ٢ ظتا ٣س] / (٢س + ٣)^{٢}

(٢٤) ص = (١ - قاس) / (١ + قاس)

- الحل -

ص' = [(١ + قاس)(- قاس ظاس) - (١ - قاس)(قاس ظاس)] / (١ + قاس)^{٢}

= [- قاس ظاس - قا^{٢}س ظاس - قاس ظاس + قا^{٢}س ظاس] / (١ + قاس)^{٢}

= - ٢ قاس ظاس / (١ + قاس)^{٢}

(٢٥) ص = (١ - ظتاس) / (١ + قتاس)

- الحل -

ص' = [(١ + قتاس) × قتا^{٢}س - (١ - ظتاس) × - قتاس ظتاس] / (١ + قتاس)^{٢}

= [قتا^{٢}س + قتا^{٣}س + قتاس ظتاس - قتاس ظتا^{٢}س] / (١ + قتاس)^{٢}

(٢٦) ص = قتا^{٤} س

- الحل -

ص' = ٤ قتا^{٣} س × - قتاس ظتاس

= - ٤ قتا^{٤} س ظتاس

(٢٧) ص = ظتا^{٧} س

- الحل -

ص' = ٧ ظتا^{٦} س × - قتا^{٢} س

= - ٧ ظتا^{٦} س قتا^{٢} س

(٢٨) ص = ظتا^{٥} (٢س^{٢} + ٤س + ٧)

- الحل -

ص' = ٥ ظتا^{٤} (٢س^{٢} + ٤س + ٧) ×

- قتا^{٢} (٢س^{٢} + ٤س + ٧) × (٤س + ٤)

= - ٢٠ (س + ١) ظتا^{٤} (٢س^{٢} + ٤س + ٧) ×

قتا^{٢} (٢س^{٢} + ٤س + ٧)

(٢٩) ص = ٣ قا^{٢} (٢س + π)

- الحل -

ص' = ٣ × ٢ قا (٢س + π) قا (٢س + π) ×

ظا (٢س + π) × ٢

= ١٢ قا^{٢} (٢س + π) ظا (٢س + π)

(٣٠) ص = قتا^{٢} (١ + ٣س^{٢})

- الحل -

ص' = ٢ قتا (١ + ٣س^{٢}) × (- قتا (١ + ٣س^{٢}))

× ظتا (١ + ٣س^{٢}) × ٦س

= - ١٢س قتا^{٢} (١ + ٣س^{٢}) ظتا (١ + ٣س^{٢})

(٣١) ص = جا^{٢} ٣س + قا^{٢} س

- الحل -

ص' = ٢ جا ٣س × جتا ٣س × ٣ + ٢ قاس

× قاس ظاس

= ٦ جا ٣س جتا ٣س + ٢ قا^{٢} س ظاس

(٣٢) $ص = \frac{قا^2 س}{س}$

الحل

$ص' = \frac{س\,(٢\, قاس\, قاس\, ظاس) - قا^2 س}{س^2}$

$= \frac{٢س\, قا^2س\, ظاس - قا^2س}{س^2}$

---

(٣٣) $ص = \sqrt{١ + قتاس}$

الحل

$ص' = \frac{- قتاس\, ظتاس}{٢\sqrt{١ + قتاس}}$

---

(٣٤) $ص = \sqrt[٣]{س + ظتاس}$

الحل

$ص' = \frac{١}{٣}(س + ظتاس)^{\frac{-٢}{٣}}\,(١ - قتا^2س)$

$= \frac{١ - قتا^2س}{٣\sqrt[٣]{(س + ظتاس)^2}}$

---

(٣٥) $ص = (١ + ظتاس)^2$

الحل

$ص' = ٢\,(١ + ظتاس)(- قتا^2س)$

$= -٢\, قتا^2س\,(١ + ظتاس)$

---

(٣٦) $ص = (قتاس + ظتاس)^{-١}$

الحل

$ص' = -(قتاس + ظتاس)^{-٢} \times (- قتاس\, ظتاس - قتا^2س)$

$= \frac{قتاس\, ظتاس + قتا^2س}{(قتاس + ظتاس)^2}$

---

(٣٧) $ص = ظا\,(ظتاس)$

الحل

$ص' = قا^2\,(ظتاس) \times - قتا^2س$

$= - قتا^2س\, قا^2(ظتاس)$

---

(٣٨) $ص = جا\,(قتا٣س^2)$

الحل

$ص' = جتا\,(قتا٣س^2) \times (- قتا٣س^2\, ظتا٣س^2)$

$\times ٦س$

$\therefore ص' = -٦س\, جتا\,(قتا٣س^2) \times قتا٣س^2\, ظتا٣س^2$

---

② أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) لكل مما يأتي عند النقطة المبينة

① $ص = ٢ظتاس + \sqrt{٢}\, قاس$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل

$ص' = -٢\, قتا^2س + \sqrt{٢}\, قاس\, ظاس$

$\therefore$ ميل المماس عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$= -٢\, قتا^2\frac{\pi}{٤} + \sqrt{٢}\, قا\frac{\pi}{٤}\, ظا\frac{\pi}{٤} = -٢$

---

③ $ص = ٣ظاس - قتا^2س$ عند $س = \frac{٣\pi}{٤}$

الحل

$ص' = ٣\, قا^2س + ٢\, قتا^2س\, ظتاس$

$\therefore$ ميل المماس عند $س = \frac{٣\pi}{٤}$

$= ٣\, قا^2\frac{٣\pi}{٤} + ٢\, قتا^2\frac{٣\pi}{٤}\, ظتا\frac{٣\pi}{٤}$

$= ٢$

③ اذا كانت ص = ظتا $\frac{\pi}{٦}$ ع ، ع = ٣ $\sqrt{٢\text{س}}$

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ١

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = -\text{قتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦}\text{ع} \times \frac{\pi}{٦} = \frac{-\pi}{٦}\,\text{قتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦}\text{ع}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢\text{س}}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢\text{س}}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= \frac{-\pi}{٦}\,\text{قتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦}\text{ع} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٢\text{س}}}$

عند س = ١ ، فإن ع = ٣

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\pi}{٦}\,\text{قتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦} \times ٣ \times \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

$= \frac{-\pi}{٦} \times ١ \times \frac{٣}{٢} = \frac{-\pi}{٤}$

④ اذا كانت ص = $\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}$ ، ع = قا ٢س اثبت أن

$\sqrt{٣}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ١٢ = $ صفر عند س = $\frac{\pi}{٦}$

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}} = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢\,\text{قا}٢\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}$

وعند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ع = ٢

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢\text{ع}}} \times ٢\,\text{قا}٢\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س}$

$= \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢\times٢}} \times ٢\,\text{قا}\frac{\pi}{٣}\,\text{ظا}\frac{\pi}{٣} = -٤\sqrt{٣}$

∴ الطرف الأيمن = $\sqrt{٣} \times -٤\sqrt{٣} + ١٢ =$ صفر = الأيسر

⑤ اذا كانت ص = (قاس + ظاس)^{ن}

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = $ ن ص قاس

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-١} \times (\text{قاس ظاس} + \text{قا}^{٢}\text{س})$

$= \text{ن}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-١} \times \text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})$

$= \text{ن قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}}$

$= \text{ن ص قاس}$

⑥ اذا كانت ص = قا^{ن}(س)

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = $ ن ص ظاس

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{قاس})^{\text{ن}-١} \times \text{قاس ظاس}$

$= \text{ن}(\text{قاس})^{\text{ن}}\,\text{ظاس} = \text{ن ص ظاس}$

⑦ اذا كانت ص = قاس(جاس + جتاس)

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ظا}^{٢}\text{س} = ١$

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}(\text{جاس} + \text{جتاس})$

$+ \text{قاس}(\text{جتاس} - \text{جاس})$

$= \text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{ظاس} + ١ - \text{ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظا}^{٢}\text{س} + ١$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ظا}^{٢}\text{س} = ١$

⑧ اذا كانت ص = ع^{٤} - ٢ع^{٢} + ١ ،

ع = قتا ٤س اثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٣٢\,\text{ص قتا}\,٨\text{س} = $ صفر

- الحل -

$\text{ص} = (\text{ع}^{٢} - ١)^{٢} = (\text{قتا}^{٢}٤\text{س} - ١)^{٢}$

$= (\text{ظتا}^{٢}٤\text{س})^{٢} = \text{ظتا}^{٤}٤\text{س}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\ \text{ظتا}^{٣}\ ٤\text{س} \times -\text{قتا}^{٢}\ ٤\text{س} \times ٤$

$= -١٦\ \text{ظتا}^{٣}\ ٤\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\ ٤\text{س}$

$= \frac{-١٦\ \text{ص}\ \text{قتا}^{٢}\ ٤\text{س}}{\text{ظتا}\ ٤\text{س}}$

$= -١٦\ \text{ص}\ \text{قتا}\ ٤\text{س}\ \text{قا}\ ٤\text{س}$

$= \frac{-١٦\ \text{ص}}{\text{حتا}\ ٤\text{س}\ \text{جا}\ ٤\text{س}} = \frac{-١٦\ \text{ص}}{\frac{١}{٢}\ \text{جا}\ ٨\text{س}}$

$= -٣٢\ \text{ص}\ \text{قتا}\ ٨\text{س}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٣٢\ \text{ص}\ \text{قتا}\ ٨\text{س} = \text{صفر}$

- تمارين عامة -

① أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية

① $\text{ص} = \text{ظتا}\ \frac{١}{٣}\text{س}$

② $\text{ص} = \text{قا}\ (١ - \text{س}^{٤})$

③ $\text{ص} = \text{قا}\ (٣\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} - ١)$

④ $\text{ص} = \text{حتا}\ \text{س} + ٤\ \text{قا}\ \text{س}$

⑤ $\text{ص} = \text{قتا}\ (\pi + ٢\text{س}) + \text{ظتا}\ ٣\text{س}$

⑥ $\text{ص} = ٣\ \text{قتا}\ \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$

⑦ $\text{ص} = \text{جا}\ \text{س}\ \text{قا}\ ٣\text{س}$

⑧ $\text{ص} = \text{قتا}\ \text{س}\ \text{قا}\ ٣\text{س}$

⑨ $\text{ص} = \text{س}^{٢}\ \text{ظا}\ \text{س} + \text{س}^{٣}\ \text{ظتا}\ \text{س}$

⑩ $\text{ص} = \frac{\text{قتا}\ \text{س}}{\text{س}}$

⑪ $\text{ص} = \frac{٦ - \text{س}}{\text{قا}\ \text{س}}$

⑫ $\text{ص} = \frac{١ - \text{ظتا}\ \text{س}}{١ + \text{ظتا}\ \text{س}}$

⑬ $\text{ص} = \text{قا}^{٣}\ ٢\text{س}$

⑭ $\text{ص} = \text{ظتا}^{٣}\ \sqrt{\text{س}}$

⑮ $\text{ص} = \text{ظتا}\ ٧\text{س}^{٢} + \text{ظتا}^{٢}\ ٧\text{س}$

⑯ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ظتا}^{٢}\ ٤\text{س}}$

⑰ $\text{ص} = (٣ - ٢\ \text{ظتا}\ \text{س})^{٢}$

⑱ $\text{ص} = \text{ظتا}\ (\text{حتا}\ ٣\text{س})$

② أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة
$\text{ص} = ٣\ \text{ظتا}^{٥}\ \text{س}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

③ إذا كانت $\text{ص} = \text{جا}\ \text{س} + \text{قا}\ \text{س}$ ، $\text{س} = ٣\pi\text{ع}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ عند
$\text{ع} = ١$

④ إذا كانت $\text{ص} = (٥\text{ع} + ١)^{٥}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٥}\ \text{ظتا}\ ٢\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند
$\text{س} = \frac{\pi}{٨}$

⑤ إذا كانت $\text{ص} = \text{قتا}\ \text{س} + \text{ظتا}\ \text{س}$
اثبت أن
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}\ \text{قتا}\ \text{س} = \text{صفر}$

الاشتقاق الضمني والبارامتري

•• الاشتقاق الضمني :

اذا كان لدينا المعادلتان $\text{ص} = \text{س}^2 + ٣$ ، $٥\,\text{س}^2 + ٢\,\text{س ص} + \text{ص}^2 = \text{صفر}$

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة في س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة وتعرف بالصورة [ص = د(س)]

أما المعادلة الثانية لا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = صفر]

والاشتقاق في هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمني

•• الاشتقاق البارامتري:

اذا كانت ص = د(م) ، س = ر(م) هما معادلتا منحنى على الصورة البارامترية حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة لـ م فإن

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د م}} \times \frac{\text{د م}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د م}} \div \frac{\text{د س}}{\text{د م}}$$

ملاحظة : يمكن تحويل الصورة البارامترية إلى الصورة الصريحة أو الضمنية وذلك بحذف المتغير البارامتري (م) من معادلتي س ، ص وتسمى أي من الصورتين الصريحة أو الضمنية بالصورة الكارتيزية .

- أمثلة محلولة -

① أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل من العلاقات الآتية

① $\text{س}^2 - ٤\,\text{ص}^2 + ٧ = \text{صفر}$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٢\,\text{س} - ٨\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}}{٤\,\text{ص}}$

② $(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2 = ٢٥$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٢(\text{س} - ٣) + ٢(\text{ص} + ٢)\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-(\text{س} - ٣)}{\text{ص} + ٢} = \frac{-\text{س} + ٣}{\text{ص} + ٢}$

③ $\text{س}^3 + \text{ص}^2 - ٧\,\text{س} + ٥\,\text{ص} = ٨$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٣\,\text{س}^2 + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - ٧ + ٥\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\therefore (٢\,\text{ص} + ٥)\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + ٣\,\text{س}^2 - ٧ = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٧ - ٣\,\text{س}^2}{٢\,\text{ص} + ٥}$

④ $\text{س}^2 + ٩\,\text{ص}^2 = ٦\,\text{س ص} + ٤$

- الحل -

$\therefore \text{س}^2 + ٩\,\text{ص}^2 = ٦\,\text{س ص} + ٤$

$\therefore \text{س}^2 - ٦\,\text{س ص} + ٩\,\text{ص}^2 = ٤$

$\therefore (\text{س} - ٣\,\text{ص})^2 = ٤$

$\therefore \text{س} - ٣\,\text{ص} = \pm ٢$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ١ - ٣\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٣}$

⑤ $س^٣ - ٥س ص + ص^٣ = ٤س$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٣س^٢ - ٥\left(ص + س \frac{دص}{دس}\right) + ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٤$

$\therefore ٣س^٢ - ٥ص - ٥س \frac{دص}{دس} + ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٤$

$\therefore (-٥س + ٣ص^٢) \frac{دص}{دس} = ٤ - ٣س^٢ + ٥ص$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤ - ٣س^٢ + ٥ص}{-٥س + ٣ص^٢}$

⑥ $س ص = ١٠٠(س + ص)$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ص + س \frac{دص}{دس} = ١٠٠\left(١ + \frac{دص}{دس}\right)$

$\therefore ص + س \frac{دص}{دس} = ١٠٠ + ١٠٠ \frac{دص}{دس}$

$\therefore س \frac{دص}{دس} - ١٠٠ \frac{دص}{دس} = ١٠٠ - ص$

$\therefore (س - ١٠٠) \frac{دص}{دس} = ١٠٠ - ص$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١٠٠ - ص}{س - ١٠٠}$

⑦ $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$

- الحل -

$\therefore ٢س^{-١} + ٣ص^{-١} = ٥$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore -٢س^{-٢} - ٣ص^{-٢} \frac{دص}{دس} = صفر$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٢س^{-٢}}{٣ص^{-٢}} = \frac{-٢ص^٢}{٣س^٢}$

⑧ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٤$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{دص}{دس} = صفر$

$\therefore س^{-\frac{١}{٢}} + ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{دص}{دس} = صفر$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}} = \frac{-ص^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

⑨ $جا٢ص = ص جتا٢س$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٢جتا٢ص \frac{دص}{دس} = جتا٢س \frac{دص}{دس} - ٢جا٢س \times ص$

$\therefore ٢جتا٢ص \frac{دص}{دس} - جتا٢س \frac{دص}{دس} = -٢ص جا٢س$

$\therefore (٢جتا٢ص - جتا٢س) \frac{دص}{دس} = -٢ص جا٢س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٢ص جا٢س}{٢جتا٢ص - جتا٢س}$

⑩ $س ص + جاص = ٥$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ص + س \frac{دص}{دس} + جتاص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\therefore (س + جتاص) \frac{دص}{دس} = -ص$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-ص}{س + جتاص}$

⑪ جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ جتاس جتاص − جاس جاص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ جتاس جتاص = جاس جاص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{جتاس جتاص}}{\text{جاس جاص}}$

= ظتاس ظتاص

⑫ س قتاص = ص ظتاس

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ قتاص − س قتاص ظتاص $\frac{ءص}{ءس}$ = ظتاس $\frac{ءص}{ءس}$ − ص قتا²س

∴ قتاص + ص قتا²س = ظتاس $\frac{ءص}{ءس}$ + س قتاص ظتاص × $\frac{ءص}{ءس}$

∴ قتاص + ص قتا²س = (ظتاس + س قتاص ظتاص) × $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{قتاص + ص قتا²س}}{\text{ظتاس + س قتاص ظتاص}}$

⑬ ص قاس + ظاس + س² ص = صفر

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ قاس $\frac{ءص}{ءس}$ + ص قاس ظاس + قا²س + ٢س ص + س² $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (قاس + س²) = − ص قاس ظاس − قا²س − ٢س ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص قاس ظاس − قا²س − ٢س ص}}{\text{قاس + س²}}$

② أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها

① ٢س² + ٣ص² = ٥ عند (−١ ، −١)

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٤س + ٦ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{−٢س}}{\text{٣ص}}$ = $\frac{\text{−٢×−١}}{\text{٣×−١}}$ = $\frac{\text{−٢}}{\text{٣}}$

② س² − ٣س ص + ص² = ١١ عند (٢ ، −١)

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢س − ٣(ص + س $\frac{ءص}{ءس}$) + ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ ٢س − ٣ص − ٣س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ (−٣س + ٢ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ص − ٢س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{٣ص − ٢س}}{\text{−٣س + ٢ص}}$ = $\frac{\text{٣×−١ − ٢×٢}}{\text{−٣×٢ + ٢×−١}}$ = $\frac{\text{٧}}{\text{٨}}$

③ س² − س ص + ص² = ٢٧ عند (٦ ، ٣)

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢س − ص − س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ (−س + ٢ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ص − ٢س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ص − ٢س}}{\text{−س + ٢ص}}$ = $\frac{\text{٣ − ٢×٦}}{\text{−٦ + ٢×٣}}$ = $\frac{\text{−٩}}{\text{صفر}}$

= غير معرف

③ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها

① $\text{س}^2 - 3\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 = 5$ عند $(1 ، -1)$

-الحل-

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore 2\text{س} - 3\left(\text{ص} + \text{س}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right) + 2\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore 2\text{س} - 3\text{ص} - 3\text{س}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} + 2\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 0$

$\therefore (-3\text{س} + 2\text{ص})\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 3\text{ص} - 2\text{س}$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{3\text{ص} - 2\text{س}}{-3\text{س} + 2\text{ص}} = \frac{3\times -1 - 2\times 1}{-3\times 1 + 2\times -1}$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 1$ $\quad \therefore$ ظاهـ $= 1$

$\therefore$ ق$(\hat{\text{هـ}}) = 45°$

② $\text{جا}\,2\text{س} = \text{ظا}\,\text{ص}$ عند $\left(\frac{3\pi}{4} ، \frac{3\pi}{4}\right)$

-الحل-

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore 2\,\text{جتا}\,2\text{س} = \text{قا}^2\text{ص}\,\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{2\,\text{جتا}\,2\text{س}}{\text{قا}^2\text{ص}} = \text{صفر}$

$\therefore$ ظاهـ = صفر $\quad \therefore$ ق$(\hat{\text{هـ}})$ = صفر

④ أوجد $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

① $\text{س} = 5\text{ن} + 3$ ، $\text{ص} = 16\text{ن}^2 + 9$ عند $\text{ن} = 5$

-الحل-

$\because \text{س} = 5\text{ن} + 3 \quad \therefore \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 5$

$\because \text{ص} = 16\text{ن}^2 + 9 \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 32\text{ن}$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \div \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = \frac{32\text{ن}}{5}$

وعند $\text{ن} = 5 \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 32$

② $\text{س} = (\text{ن}+7)(\text{ن}-2)$ ، $\text{ص} = (\text{ن}^2+1)(\text{ن}-2)$ عند $\text{ن} = 1$

-الحل-

$\because \text{س} = (\text{ن}+7)(\text{ن}-2) = \text{ن}^2 + 5\text{ن} - 14$

$\therefore \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 2\text{ن} + 5$

$\because \text{ص} = (\text{ن}^2+1)(\text{ن}-2) = \text{ن}^3 - 2\text{ن}^2 + \text{ن} - 2$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 3\text{ن}^2 - 4\text{ن} + 1$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \div \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = \frac{3\text{ن}^2 - 4\text{ن} + 1}{2\text{ن} + 5}$

وعند $\text{ن} = 1$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{3 - 4 + 1}{2 + 5} = \text{صفر}$

③ $\text{س} = 13 - 2\text{ن}$ ، $\text{ص} = 4\text{ن}^2 - \sqrt{\text{ن}}$ عند $\text{ن} = 4$

-الحل-

$\because \text{س} = 13 - 2\text{ن} \quad \therefore \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = -2$

$\because \text{ص} = 4\text{ن}^2 - \sqrt{\text{ن}} \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 8\text{ن} - \frac{1}{2\sqrt{\text{ن}}}$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \div \frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = \frac{8\text{ن} - \frac{1}{2\sqrt{\text{ن}}}}{-2}$

وعند $\text{ن} = 4$

$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{8\times 4 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{-2} = \frac{-127}{8}$

④ $س = \sqrt{٣ن-٢}$ ، $ص = \sqrt{٤ن+١}$

عند $ن = ٢$

- الحل -

$\because س = \sqrt{٣ن-٢}$ $\therefore \frac{دس}{دن} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن-٢}}$

$\because ص = \sqrt{٤ن+١}$ $\therefore \frac{دص}{دن} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤ن+١}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن}$

$= \frac{٤}{٢\sqrt{٤ن+١}} \times \frac{٢\sqrt{٣ن-٢}}{٣}$

وعند $ن = ٢$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٢\times٣} \times \frac{٢\times٢}{٣} = \frac{٨}{٩}$

⑤ $س = ٣ حتا ٢\theta$ ، $ص = ٤ جا ٣\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

- الحل -

$\because س = ٣ حتا ٢\theta$ $\therefore \frac{دس}{د\theta} = -٦ جا ٢\theta$

$\because ص = ٤ جا ٣\theta$ $\therefore \frac{دص}{د\theta} = ١٢ حتا ٣\theta$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{د\theta} \div \frac{دس}{د\theta} = \frac{١٢ حتا ٣\theta}{-٦ جا ٢\theta}$

وعند $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١٢ حتا ٣\times٤٥}{-٦ جا ٢\times٤٥} = \sqrt{٢}$

⑥ $س = ٥ حتا^٢\theta$ ، $ص = ٤ جا^٢\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{٦}$

- الحل -

$\because س = ٥ حتا^٢\theta$ $\therefore \frac{دس}{د\theta} = -١٠ جا\theta حتا\theta$

$\because ص = ٤ جا^٢\theta$ $\therefore \frac{دص}{د\theta} = ٨ جا\theta حتا\theta$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{د\theta} \div \frac{دس}{د\theta} = \frac{٨ جا\theta حتا\theta}{-١٠ جا\theta حتا\theta} = \frac{-٤}{٥}$

⑦ $س = ٥ + قا^٢ ٣\theta$ ، $ص = ١ - ظا ٣\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

- الحل -

$\because س = ٥ + قا^٢ ٣\theta$

$\therefore \frac{دس}{د\theta} = ٢ قا ٣\theta . قا ٣\theta ظا ٣\theta \times ٣$

$= ٦ قا^٢ ٣\theta ظا ٣\theta$

$\because ص = ١ - ظا ٣\theta$ $\therefore \frac{دص}{د\theta} = -٣ قا^٢ ٣\theta$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{د\theta} \div \frac{دس}{د\theta} = \frac{-٣ قا^٢ ٣\theta}{٦ قا^٢ ٣\theta ظا ٣\theta}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{٢ ظا ٣\theta}$ وعند $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{٢ ظا ٣\times٤٥} = \frac{١}{٢}$

⑧ $س = حتا\theta + حتا ٢\theta$ ، $ص = جا\theta + جا ٢\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٣}$

- الحل -

$\because س = حتا\theta + حتا ٢\theta$

$\therefore \frac{دس}{د\theta} = -جا\theta - ٢ جا ٢\theta$

$\because ص = جا\theta + جا ٢\theta$

$\therefore \frac{دص}{د\theta} = حتا\theta + ٢ حتا ٢\theta$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{د\theta} \div \frac{دس}{د\theta} = \frac{حتا\theta + ٢ حتا ٢\theta}{-جا\theta - ٢ جا ٢\theta}$

وعند $\theta = \frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{حتا ٦٠ + ٢ حتا ٢\times٦٠}{-جا ٦٠ - ٢ جا ٢\times٦٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

⑤ باستخدام الاشتقاق البارامتري أوجد

① مشتقة $(٤س^٣ - ٩س^٢ + ٥)$ بالنسبة إلى $(٣س^٢ + ٧)$

- الحل -

بوضع $ص = ٤س^٣ - ٩س^٢ + ٥$

، $ع = ٣س^٢ + ٧$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ١٢س^٢ - ١٨س$

، $\frac{دع}{دس} = ٦س$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{١٢س^٢ - ١٨س}{٦س}$

$= ٢س - ٣$

② معدل تغير $(س+٣)(س-٢)$ بالنسبة إلى $\frac{س-٣}{س+٢}$

- الحل -

بوضع $ص = (س+٣)(س-٢)$

$= س^٢ + س - ٦$

، $ع = \frac{س-٣}{س+٢}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢س + ١$

، $\frac{دع}{دس} = \frac{(س+٢)\times ١ - (س-٣)\times ١}{(س+٢)^٢}$

$= \frac{٥}{(س+٢)^٢}$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس}$

$= (٢س+١) \times \frac{(س+٢)^٢}{٥}$

$= \frac{١}{٥}(٢س+١)(س+٢)^٢$

صابر عبد الرحيم محمود

③ مشتقة $(س - جاس)$ بالنسبة إلى $(١ - جتاس)$ عندما $س = \frac{\pi}{٣}$

- الحل -

بوضع $ص = س - جاس$

، $ع = ١ - جتاس$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ١ - جتاس$ ، $\frac{دع}{دس} = جاس$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{١ - جتاس}{جاس}$

وعندما $س = \frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{١ - جتا٦٠^\circ}{جا٦٠^\circ} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

⑥ إذا كانت $ص = (س^٣ + ٢)^٧$ اثبت أن $\frac{دس}{دص} = \frac{س^٣+٢}{٢١س^٢ص}$

- الحل -

$\therefore ص = (س^٣+٢)^٧$ بالاشتقاق بالنسبة لـ ص

$\therefore ١ = ٧(س^٣+٢)^٦ \times ٣س^٢ \times \frac{دس}{دص}$

$\therefore \frac{دس}{دص} = \frac{١}{٢١س^٢(س^٣+٢)^٦} \times \frac{س^٣+٢}{س^٣+٢}$

$\therefore \frac{دس}{دص} = \frac{س^٣+٢}{٢١س^٢ص}$

⑦ إذا كانت $س = (ص^٣ - ١)^٥$ اثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^٣-١}{١٥ص^٢س}$

- الحل -

$\therefore س = (ص^٣-١)^٥$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ١ = ٥(ص^٣-١)^٤ \times ٣ص^٢ \frac{دص}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{١٥ص^٢(ص^٣-١)^٤} \times \frac{ص^٣-١}{ص^٣-١}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^3 - 1}{15\,\text{ص}^2(\text{ص}^3-1)^5} = \frac{\text{ص}^3 - 1}{15\,\text{س}\,\text{ص}^2}$

⑧ اذا كانت $\text{ص}^2 + 2\text{أ}\text{س} - \text{أ}^2 = \text{صفر}$

حيث أ ثابتًا اثبت أن

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 + \frac{2\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$

- الحل -

$\because \text{ص}^2 + 2\text{أ}\text{س} - \text{أ}^2 = \text{صفر}$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 2\text{أ} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ص}}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \left(\frac{-\text{أ}}{\text{ص}}\right)^2 + \frac{2\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{-\text{أ}}{\text{ص}}$

$= \frac{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} = 1 =$ الطرف الأيسر

⑨ اذا كان $\text{ص} = \text{جا}^3\theta$ ، $\text{ع} = \text{حتا}^3\theta$

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} + \text{ظا}\,\theta = \text{صفر}$

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{جا}^3\theta$ ، $\text{ع} = \text{حتا}^3\theta$

بالاشتقاق بالنسبة لـ θ

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = 3\,\text{جا}^2\theta\,\text{حتا}\,\theta$ ،

، $\frac{\text{دع}}{\text{د}\theta} = -3\,\text{حتا}^2\theta\,\text{جا}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} \cdot \frac{\text{د}\theta}{\text{دع}} = \frac{3\,\text{جا}^2\theta\,\text{حتا}\,\theta}{-3\,\text{حتا}^2\theta\,\text{جا}\,\theta}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = -\text{ظا}\,\theta$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} + \text{ظا}\,\theta = \text{صفر}$

⑩ أوجد قيمة البارامتر ع التي تكون عندها للمنحنى $\text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 - 4\text{ع} + 12$

، $\text{ص} = 2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4$

① مماس رأسي　② مماس أفقي

- الحل -

$\because \text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 - 4\text{ع} + 12$

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4$

، $\because \text{ص} = 2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 4\text{ع} + 1$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = \frac{4\text{ع}+1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4}$

في حالة المماس أفقي $\therefore$ الميل = صفر

$\therefore \frac{4\text{ع}+1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4} = \text{صفر}$

$\therefore 4\text{ع} + 1 = \text{صفر}$

$\therefore \text{ع} = \frac{-1}{4}$

وفي حالة المماس رأسي فإن الميل غير معرف

$\therefore \frac{4\text{ع}+1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4} = \frac{1}{0}$

$\therefore 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4 = \text{صفر}$ وبالتحليل

$\therefore \text{ع} = \frac{-1}{3}$ ، $\text{ع} = 2$

⑪ اذا كانت

$\text{س} = (1 - \sqrt[3]{\text{ص}})(1 + \sqrt[3]{\text{ص}} + \sqrt[3]{\text{ص}^2})(1 + \text{ص} + \text{ص}^2)$

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{3\text{ص}^2}$

- الحل -

$\therefore \text{س} = (1 - \text{ص})(1 + \text{ص} + \text{ص}^2)$

$\therefore \text{س} = 1 - \text{ص}^3$　بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore 1 = -3\text{ص}^2\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$　$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{3\text{ص}^2}$

⑫ اذا كان

جا س جتا ص − جا ص جتا س = ١

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ حيث س ، ص ∈]٠ ، ٢π[

- الحل -

∵ جا س جتا ص − جا ص جتا س = ١

∴ جا (س − ص) = ١

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ جتا (س − ص) × (١ − $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$) = صفر

∴ ١ − $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١

⑬ اذا كان ص = $\frac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ − ظا س}}$

اثبت أن $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ = جتا² (س + ٤٥°)

- الحل -

∵ ص = $\frac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ − ظا س}}$ = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا س}}{\text{١ − ظا ٤٥ ظا س}}$

∴ ص = ظا (٤٥ + س)

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا² (٤٥ + س)

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{قا}^2\text{(٤٥ + س)}}$ = جتا² (س + ٤٥)

⑭ اذا كانت

ص = $\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}}$

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢ص − ١}}$

- الحل -

بتربيع الطرفين

∴ ص² = س + $\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}}$

∴ ص² = س + ص وبالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١ + $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (٢ص − ١) = ١

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢ص − ١}}$

- تمارين عامة -

① أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل من العلاقات الآتية

① س⁴ + ٣ص⁴ − ٢ = صفر

② س³ + ٦س ص = ٤ص + ٣

③ س² ص + ص² س = ٢٥

④ $\frac{\text{س}^3 + \text{ص}^3}{\text{س}^3 - \text{ص}^3}$ = ٧

⑤ جا ٣س = ظا ٢ص

⑥ ٥ص + جتا ص = س²

⑦ س جتا ص + ص جتا س = ١

⑧ ظا² س + ظتا ص = س ص

② أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها

① س ص³ = ٣ عند (٣ ، ١)

② ص² + ٣س ص = ١٠ عند (١ ، ٢)

③ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

① س = م² ، ص = ٢م $\sqrt{\text{م}}$ عند م = ١

② س = $\frac{\text{٣م}}{\text{١ + م}^3}$ ، ص = $\frac{\text{٣م}^2}{\text{١ + م}^3}$ عند م = −٢

③ س = جا ٢π θ ، ص = جتا ٢π θ عند θ = $\frac{1}{6}$

④ س = قا θ − ١ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{-3\pi}{4}$

④ باستخدام الاشتقاق البارامتري أوجد مشتقة $\frac{\text{س + ١}}{\text{س − ١}}$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ عند س = ٤

⑤ اذا كان $ص^2 = س + \sqrt{1 + س^2}$

اثبت أن

$$2\sqrt{1+س^2}\ \frac{دص}{دس} = ص$$

⑥ اذا كانت $ص = \left(\frac{س^2 - 2}{س^2 + 2}\right)^{ن}$

اثبت أن

$$\frac{دس}{دص} = \frac{س^4 - 4}{8\,ن\,س\,ص}$$

⑦ أوجد قيمة البارامتر ن التي يكون عندها للمنحنى $س = ن^3 - 7ن^2 + 16ن + 1$ ، $ص = 2ن^3 - 3ن^2 + 5$

① مماس رأسي ② مماس أفقي

⑧ اذا كانت

$$س = \sqrt{ظاص + \sqrt{ظاص + \sqrt{ظاص + \cdots}}}$$

اثبت أن

$$\frac{دص}{دس} = (2س - 1)\ حتا^2 ص$$

المشتقات العليا للدالة

إذا كانت ص = د(س) قابلة للاشتقاق عدة مرات فيمكننا الحصول على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا ---- كما يلي:

المشتقة الأولى للدالة هي $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أو $\text{ص}'$ أو $\text{د}'(\text{س})$

المشتقة الثانية للدالة هي مشتقة المشتقة الأولى ويرمز لها بأحد الرموز الآتية $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ ، $\text{ص}''$ ، $\text{د}''(\text{س})$

المشتقة الثالثة للدالة وهي مشتقة المشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}$ ، $\text{ص}'''$ ، $\text{د}'''(\text{س})$

- أمثلة محلولة -

① أوجد $\text{ص}''$ لكل من الدوال الآتية:

① $\text{ص} = \text{س}^3 - 5\text{س}^2 + 6\text{س} - 4$

- الحل -

$\text{ص}' = 3\text{س}^2 - 10\text{س} + 6$

$\text{ص}'' = 6\text{س} - 10$

② $\text{ص} = (3\text{س}^2 - 4)(\text{س} + 3)$

- الحل -

$\text{ص}' = 6\text{س}(\text{س}+3) + 3\text{س}^2 - 4$

$= 6\text{س}^2 + 18\text{س} + 3\text{س}^2 - 4$

$= 9\text{س}^2 + 18\text{س} - 4$

$\therefore \text{ص}'' = 18\text{س} + 18$

③ $\text{ص} = \frac{\text{س}+2}{\text{س}-2}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{(\text{س}-2) - (\text{س}+2)}{(\text{س}-2)^2} = \frac{-4}{(\text{س}-2)^2}$

$\therefore \text{ص}' = -4(\text{س}-2)^{-2}$

$\therefore \text{ص}'' = 8(\text{س}-2)^{-3}$

④ $\text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{س}+1}$

- الحل -

$\text{ص}' = (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} + \text{س} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}$

$= \frac{2(\text{س}+1)+\text{س}}{2\sqrt{\text{س}+1}} = \frac{3\text{س}+2}{2\sqrt{\text{س}+1}}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{6\sqrt{\text{س}+1} - (3\text{س}+2) \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1}}}{4(\text{س}+1)}$

بالضرب × $\frac{\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{\text{س}+1}}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{6(\text{س}+1) - (3\text{س}+2)}{4(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}+1})}$

⑤ $\text{ص} = \text{جا}(5\text{س}+1)$

- الحل -

$\text{ص}' = 5\,\text{جتا}(5\text{س}+1)$

$\text{ص}'' = -25\,\text{جا}(5\text{س}+1)$

⑥ $\text{ص} = 2\text{س}^2 + \text{جتا}\,3\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = 4\text{س} - 3\,\text{جا}\,3\text{س}$

$\text{ص}'' = 4 - 9\,\text{جتا}\,3\text{س}$

⑦ $\text{ص} = \text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = 1 \times \text{جتا}\,2\text{س} - \text{س} \times 2\,\text{جا}\,2\text{س}$

$= \text{جتا}\,2\text{س} - 2\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = -2\,\text{جا}\,2\text{س} - 2\,\text{جا}\,2\text{س} - 4\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$= -4\,\text{جا}\,2\text{س} - 4\text{س}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

② أوجد $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}$ لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها

① $\text{ص} = \text{٢ جا٢س}$ عند $\text{س} = \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤ جتا٢س}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{−٨ جا٢س}$ $\because \text{س} = \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{−٨ جا ٢} \times \frac{\text{ط}}{\text{٤}} = \text{−٨}$

② $\text{ص} = \text{٢ س جاس جتاس}$ عند $\text{س} = \text{ط}$

- الحل -

$\therefore \text{ص} = \text{س جا٢س}$ لأن $\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{٢جتا٢س} + \text{٢جتا٢س} \text{−٤س جا٢س}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{٤جتا٢س} \text{−٤س جا٢س}$

وعند $\text{س} = \text{ط}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{٤جتا٢ط} \text{−٤ط جا٢ط} = \text{٤}$

③ $\text{ص} = \frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س} + \text{٣}}$ عند $(\text{−٢}، \text{−٥})$

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢(س+٣)} - \text{١(٢س−١)}}{(\text{س}+\text{٣})^{\text{٢}}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٧}}{(\text{س}+\text{٣})^{\text{٢}}} = \text{٧}(\text{س}+\text{٣})^{\text{−٢}}$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{−١٤}(\text{س}+\text{٣})^{\text{−٣}}$

وعند النقطة $(\text{−٢}، \text{−٥})$

$\therefore \frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = \text{−١٤}(\text{−٢}+\text{٣})^{\text{−٣}} = \text{−١٤}$

③ أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية

① $\text{ص} = \text{س}^{\text{٥}} - \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٣}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{٥س}^{\text{٤}} - \text{١٢س}^{\text{٢}}$

$\text{ص}'' = \text{٢٠س}^{\text{٣}} - \text{٢٤س}$

$\text{ص}''' = \text{٦٠س}^{\text{٢}} - \text{٢٤}$

② $\text{ص} = \text{جتا(ط − ٣س)}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{−جا(ط − ٣س)} \times \text{−٣}$

$= \text{٣ جا(ط − ٣س)}$

$\text{ص}'' = \text{٣ جتا(ط − ٣س)} \times \text{−٣}$

$= \text{−٩ جتا(ط − ٣س)}$

$\text{ص}''' = \text{−٩} \times \text{−جا(ط − ٣س)} \times \text{−٣}$

$= \text{−٢٧ جا(ط − ٣س)}$

$= \text{−٢٧ جا٣س}$

③ $\text{د(س)} = \frac{\text{٢س}}{\text{س}+\text{١}}$

- الحل -

$\text{د}'\text{(س)} = \frac{\text{٢(س+١)} - \text{١} \times \text{٢س}}{(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}}}$

$\therefore \text{د}'\text{(س)} = \text{٢}(\text{س}+\text{١})^{\text{−٢}}$

$\therefore \text{د}''\text{(س)} = \text{−٤}(\text{س}+\text{١})^{\text{−٣}}$

$\therefore \text{د}'''\text{(س)} = \text{١٢}(\text{س}+\text{١})^{\text{−٤}}$

④ $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} - ٥}$

الحل

$\therefore \text{ص} = (٢\text{س} - ٥)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{1}{2}} \times ٢$

$\therefore \text{ص}' = (٢\text{س} - ٥)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{ص}'' = -\frac{1}{2}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{3}{2}} \times ٢$

$= -(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \text{ص}''' = \frac{3}{2}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{5}{2}} \times ٢$

$\therefore \text{ص}''' = ٣(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{5}{2}}$

⑤ $\text{ص} = \text{جاس جتاس}$

الحل

$\because \text{ص} = \text{جاس جتاس} = \frac{1}{2}\,\text{جا}٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2}\,\text{جتا}٢\text{س} \times ٢ = \text{جتا}٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = -\text{جا}٢\text{س} \times ٢ = -٢\,\text{جا}٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}''' = -٢\,\text{جتا}٢\text{س} \times ٢ = -٤\,\text{جتا}٢\text{س}$

④ اذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١٦$ اثبت أن

$\text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ١ = \text{صفر}$

الحل

$\because \text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١٦$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{صفر}$ بالاشتقاق

$\therefore ٢ + ٢\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \times \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} + ٢\text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \text{صفر}$

$\therefore ٢ + ٢\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ٢\text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \text{صفر}$

بالقسمة على ٢ والترتيب

$\therefore \text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ١ = \text{صفر}$

⑤ اذا كانت $\text{ص}^2 = \text{س}^2(١ - \text{س})$ اثبت أن

$\text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ٣\text{س} = ١$

الحل

$\therefore \text{ص}^2 = \text{س}^2 - \text{س}^3$ وبالاشتقاق

$\therefore ٢\text{ص}\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = ٢\text{س} - ٣\text{س}^2$

وبالاشتقاق مرة أخرى

$\therefore ٢\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ٢\text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = ٢ - ٦\text{س}$

بالقسمة على ٢

$\therefore \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + \text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = ١ - ٣\text{س}$

$\therefore \text{ص}\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2 + ٣\text{س} = ١$

⑥ اذا كانت $\text{س}^3 + \text{ص}^3 = ١$ اثبت أن

$\text{ص}^2\text{ص}'' + ٢\text{ص}\,\text{ص}'^2 + ٢\text{س} = \text{صفر}$

الحل

$\because \text{س}^3 + \text{ص}^3 = ١$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٣\text{س}^2 + ٣\text{ص}^2\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore ٣\text{س}^2 + ٣\text{ص}^2\text{ص}' = \text{صفر}$ بالاشتقاق

$\therefore ٦\text{س} + ٣(٢\text{ص}\,\text{ص}' \times \text{ص}' + \text{ص}^2\text{ص}'') = \text{صفر}$

وبالقسمة على ٣

$\therefore \text{ص}^2\text{ص}'' + ٢\text{ص}\,\text{ص}'^2 + ٢\text{س} = \text{صفر}$

⑦ إذا كان $س^3 ص^3 = 1$ اثبت أن

$$س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = 2ص$$

- الحل -

∴ $س^3 ص^3 = 1$ بأخذ $\sqrt[3]{}$ للطرفين

∴ $س ص = 1$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $ص + س \frac{دص}{دس} = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-ص}{س}$ (1)

∴ $ص + س \frac{دص}{دس} = صفر$ بالاشتقاق

∴ $\frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} + س \frac{د^2ص}{دس^2} = صفر$

∴ $2 \frac{دص}{دس} + س \frac{د^2ص}{دس^2} = صفر$

وبالتعويض من (1)

∴ $2 \times \frac{-ص}{س} + س \frac{د^2ص}{دس^2} = صفر$

وبالضرب × س

∴ $-2ص + س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = صفر$

∴ $س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = 2ص$

⑧ إذا كان $ص^2 = 1 - \frac{1}{س^2}$

اثبت أن $ص \frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \frac{3}{س^4} = صفر$

- الحل -

∴ $ص^2 = 1 - س^{-2}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $2ص \frac{دص}{دس} = 2س^{-3}$ ∴ $ص \frac{دص}{دس} = س^{-3}$

وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + ص \frac{د^2ص}{دس^2} = -3س^{-4}$

∴ $ص \frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \frac{3}{س^4} = صفر$

⑨ إذا كان $3 ص^4 = 4 س^3$ اثبت أن

$$ص \frac{د^2ص}{دس^2} + 3\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 = \frac{2س}{ص^2}$$

- الحل -

∴ $3ص^4 = 4س^3$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $12 ص^3 \frac{دص}{دس} = 12 س^2$ ÷ 12

∴ $ص^3 \frac{دص}{دس} = س^2$ بالاشتقاق

∴ $3ص^2 \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} = 2س$

بالقسمة على $ص^2$ والترتيب

∴ $ص \frac{د^2ص}{دس^2} + 3\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 = \frac{2س}{ص^2}$

⑩ إذا كانت $ص = \frac{1}{س}$ ، $س \neq صفر$

اثبت أن $س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} + 3س \frac{دص}{دس} + ص = صفر$

- الحل -

∴ $ص = س^{-1}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دص}{دس} = -س^{-2}$ ∴ $\frac{د^2ص}{دس^2} = 2س^{-3}$

∴ المقدار $س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} + 3س \frac{دص}{دس} + ص$

$= س^2 \times 2س^{-3} + 3س \times -س^{-2} + س^{-1}$

$= 2س^{-1} - 3س^{-1} + س^{-1} = صفر$

(11) إذا كان $4س^2 + ص^2 = 25$

أثبت أن

$$ص^3 \times \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 100 = صفر$$

- الحل -

∵ $4س^2 + ص^2 = 25$ بالاشتقاق

∴ $8س + 2ص\frac{ءص}{ءس} = صفر$ ÷ 2

∴ $4س + ص\frac{ءص}{ءس} = صفر$ (1)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-4س}{ص}$ (2)

وبالاشتقاق للعلاقة (1) مرة أخرى

∴ $4 + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 + ص\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$ (3)

ثم بالتعويض من (2) في (3)

∴ $4 + \frac{16س^2}{ص^2} + ص\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

وبالضرب × $ص^2$

∴ $4ص^2 + 16س^2 + ص^3\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

∴ $4(ص^2 + 4س^2) + ص^3\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

∴ $4 \times 25 + ص^3\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

∴ $ص^3\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 100 = صفر$

(12) إذا كانت $ص = \sqrt{2س+5}$

أثبت أن $(2س+5)\frac{ء^3ص}{ءس^3} + 3\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

- الحل -

∵ $ص = \sqrt{2س+5}$ بالاشتقاق

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{2\sqrt{2س+5}} = (2س+5)^{-\frac{1}{2}}$

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -\frac{1}{2}(2س+5)^{-\frac{3}{2}} \times 2$

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -(2س+5)^{-\frac{3}{2}}$

∴ $\frac{ء^3ص}{ءس^3} = \frac{3}{2}(2س+5)^{-\frac{5}{2}} \times 2$

∴ $\frac{ء^3ص}{ءس^3} = 3(2س+5)^{-\frac{5}{2}}$

الطرف الأيمن $= (2س+5)\frac{ء^3ص}{ءس^3} + 3\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

$= (2س+5) \times 3(2س+5)^{-\frac{5}{2}} + 3 \times -(2س+5)^{-\frac{3}{2}}$

$= 3(2س+5)^{-\frac{3}{2}} - 3(2س+5)^{-\frac{3}{2}} = صفر$

(13) إذا كانت $ص\sqrt{1+س^2} = 1$

أثبت أن

$$(1+س^2)\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 3س\frac{ءص}{ءس} + ص = صفر$$

- الحل -

∵ $ص\sqrt{1+س^2} = 1$ بتربيع الطرفين

∴ $ص^2(1+س^2) = 1$ بالاشتقاق

∴ $2س ص^2 + 2ص(1+س^2)\frac{ءص}{ءس} = صفر$

بالقسمة ÷ 2ص

∴ $س ص + (1+س^2)\frac{ءص}{ءس} = صفر$

بالاشتقاق مرة أخرى

∴ $ص + س\frac{ءص}{ءس} + 2س\frac{ءص}{ءس} + (1+س^2)\frac{ء^2ص}{ءس^2} = صفر$

∴ $(1+س^2)\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 3س\frac{ءص}{ءس} + ص = صفر$

(14) إذا كان $\text{ص} = \text{حتا س}$ اثبت أن $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 - \text{ص}\,\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 1$

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{حتا س} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{حا س}$

، $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -\text{حتا س}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= (-\text{حا س})^2 - \text{حتا س} \times -\text{حتا س}$

$= \text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س} = 1$

(15) إذا كان $\text{ص} = \text{ظا س}$ اثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\text{ص}(1+\text{ص}^2)$

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{ظا س} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{قا س} \times \text{قا س ظا س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س ظا س}$ (1)

$\because 2\text{ص}(1+\text{ص}^2) = 2\,\text{ظا س}(1+\text{ظا}^2\text{س})$

$= 2\,\text{ظا س} \times \text{قا}^2\text{س}$ (2)

من (1) ، (2) ينتج أن

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\text{ص}(1+\text{ص}^2)$

(16) إذا كان $\text{ص} = \text{قا س}$ اثبت أن

$\text{ص}\,\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \text{ص}^2(3\text{ص}^2 - 2)$

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{قا س} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا س ظا س}$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{قا س ظا س ظا س} + \text{قا س قا}^2\text{س}$

$= \text{قا س ظا}^2\text{س} + \text{قا}^3\text{س}$

$= \text{قا س}(\text{ظا}^2\text{س} + \text{قا}^2\text{س})$

$\therefore \text{ص}\,\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2$

$= \text{قا س} \times \text{قا س}(\text{ظا}^2\text{س} + \text{قا}^2\text{س}) + \text{قا}^2\text{س ظا}^2\text{س}$

$= \text{قا}^2\text{س}(\text{قا}^2\text{س} + 2\,\text{ظا}^2\text{س})$

$= \text{قا}^2\text{س}(\text{قا}^2\text{س} + 2(\text{قا}^2\text{س} - 1))$

$= \text{قا}^2\text{س}(\text{قا}^2\text{س} + 2\,\text{قا}^2\text{س} - 2)$

$= \text{قا}^2\text{س}(3\,\text{قا}^2\text{س} - 2)$

$= \text{ص}^2(3\text{ص}^2 - 2) =$ الأيسر

(17) إذا كان $\text{ص} = \text{س حا س}$ اثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ دالة زوجية

- الحل -

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{حا س} + \text{س حتا س}$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{حتا س} + \text{حتا س} - \text{س حا س}$

$= 2\,\text{حتا س} - \text{س حا س}$

$\therefore \text{د}''(-\text{س}) = 2\,\text{حتا}(-\text{س}) - (-\text{س})\,\text{حا}(-\text{س})$

$= 2\,\text{حتا س} - \text{س حا س}$

$= \text{د}''(\text{س})$

$\text{د}''(\text{س})$ دالة زوجية

(18) إذا كانت $\text{ص} = \text{ظا ع}$ ، $\text{ع} = 10\text{س} + 5$ أوجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{ظا ع}$ ، $\text{ع} = 10\text{س} + 5$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \text{قا}^2\text{ع}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 10$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 10\,\text{قا}^2\text{ع} = 10\,\text{قا}^2(10\text{س}+5)$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 20\,\text{قا}(10\text{س}+5) \times \text{قا}(10\text{س}+5)\,\text{ظا}(10\text{س}+5) \times 10$

$= 200\,\text{قا}^2(10\text{س}+5)\,\text{ظا}(10\text{س}+5)$

(١٩) إذا كان $\text{س} = ٣\text{ن}^{٢} - ١$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٣} + ٢$ أوجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ عند $\text{ن} = ٤$

- الحل -

$\because \text{س} = ٣\text{ن}^{٢} - ١ \quad \therefore \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٦\text{ن}$

$\because \text{ص} = \text{ن}^{٣} + ٢ \quad \therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٣\text{ن}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \div \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٣\text{ن}^{٢}}{٦\text{ن}} = \frac{١}{٢}\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{١}{٢} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦\text{ن}} = \frac{١}{١٢\text{ن}}$

وعند $\text{ن} = ٤ \quad \therefore \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{١}{٤٨}$

(٢٠) إذا كانت $\text{س} = \text{ع}^{٢} - ٢\text{ع}$ ، $\text{ص} = \text{ع}^{٢}$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ عند $\text{ع} = ٢$

- الحل -

$\because \text{س} = \text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} \quad \therefore \frac{\text{د س}}{\text{د ع}} = ٢\text{ع} - ٢$

$\because \text{ص} = \text{ع}^{٢} \quad \therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = ٢\text{ع}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \div \frac{\text{د س}}{\text{د ع}} = \frac{٢\text{ع}}{٢\text{ع} - ٢} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} - ١}$

$\therefore \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{(\text{ع} - ١) - ١ \times \text{ع}}{(\text{ع} - ١)^{٢}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

$= \frac{-١}{(\text{ع} - ١)^{٢}} \times \frac{١}{٢\text{ع} - ٢} = \frac{-١}{٢(\text{ع} - ١)^{٣}}$

$= \frac{-١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٣}$

وعند $\text{ع} = ٢$

$\therefore \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{-١}{٢(٢ - ١)^{٣}} = \frac{-١}{٢}$

$\therefore \frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} = \frac{٣}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٤} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

$= \frac{٣}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٤} \times \frac{١}{٢\text{ع} - ٢}$

$\therefore \frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} = \frac{٣}{٤}(\text{ع} - ١)^{-٥}$ وعند $\text{ع} = ٢$

$\therefore \frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} = \frac{٣}{٤}(٢ - ١)^{-٥} = \frac{٣}{٤}$

(٢١) إذا كانت $\text{ص} = \frac{٢\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ ، $\text{ع} = \frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}{\text{س}}$ اثبت أن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٢}{\text{ع}^{٢}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

- الحل -

$\because \text{ص} = \frac{٢\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ ، $\text{ع} = \frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}{\text{س}}$

بالضرب

$\text{ص} \times \text{ع} = ٢ \quad \therefore \text{ص} = ٢\text{ع}^{-١}$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٢\text{ع}^{-٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{-٢}{\text{ع}^{٢}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

(٢٢) إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = ٣ - ٢\text{ل}^{٢}$ ، $\text{ل} = ٤\text{س}$ اثبت أن

$\text{ص} \cdot \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢} + ٣٢ = \text{صفر}$

- الحل -

$\because \text{ص} = \sqrt{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = ٣ - ٢\text{ل}^{٢}$ ، $\text{ل} = ٤\text{س}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{د ع}}{\text{د ل}} = -٤\text{ل}$ ، $\frac{\text{د ل}}{\text{د س}} = ٤$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ل}} \times \frac{\text{د ل}}{\text{د س}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}} \times -٤\text{ل} \times ٤ = \frac{-٨\text{ل}}{\sqrt{\text{ع}}}$

$\therefore \sqrt{\text{ع}}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٨\text{ل}$

$\therefore \text{ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٨\text{ل}$ وبالاشتقاق

$\therefore \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢} + \text{ص}\ \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = -٨\ \frac{\text{د ل}}{\text{د س}}$

∴ $\text{ص} \times \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = -8 \times 4$

∴ $\text{ص} \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 + 32 = \text{صفر}$

(٢٣) إذا كان $\text{س} = \text{قا هـ}$ ، $\sqrt{\text{ص}} = \text{ظا هـ}$

أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2$

- الحل -

∵ $\text{س} = \text{قا هـ}$ ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = \text{قا هـ ظا هـ}$

، $\sqrt{\text{ص}} = \text{ظا هـ}$ ∴ $\text{ص} = \text{ظا}^2\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = 2\,\text{ظا هـ قا}^2\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = \frac{2\,\text{ظا هـ قا}^2\text{هـ}}{\text{قا هـ ظا هـ}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{قا هـ}$

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{قا هـ ظا هـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{قا هـ ظا هـ} \times \frac{1}{\text{قا هـ ظا هـ}} = 2$

= الطرف الأيسر

(٢٤) إذا كان $\text{جا س} = \text{س ص}$

أثبت أن

$\text{س}^2(\text{ص} + \text{ص}'') + 2\,\text{جتا س} = 2\text{ص}$

- الحل -

∵ $\text{جا س} = \text{س ص}$ بالاشتقاق

∴ $\text{جتا س} = \text{س ص}' + \text{ص}$ ①

∴ $\text{ص}' = \frac{\text{جتا س} - \text{ص}}{\text{س}}$

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى

∴ $-\text{جا س} = \text{س ص}'' + \text{ص}' + \text{ص}'$

∴ $-\text{جا س} = \text{س ص}'' + 2\text{ص}'$

∴ $-\text{س ص} = \text{س ص}'' + 2 \times \left(\frac{\text{جتا س} - \text{ص}}{\text{س}}\right)$

∴ $-\text{س}^2\text{ص} = \text{س}^2\text{ص}'' + 2\,\text{جتا س} - 2\text{ص}$

∴ $\text{س}^2(\text{ص} + \text{ص}'') + 2\,\text{جتا س} = 2\text{ص}$

(٢٥) إذا كانت $\text{ص} = \text{أ جتا س}^2 + \text{ب جا س}^2$

أثبت أن

$\text{س} \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 4\text{س}^3\text{ص} = \text{صفر}$

- الحل -

∵ $\text{ص} = \text{أ جتا س}^2 + \text{ب جا س}^2$ ①

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\text{أ س جا س}^2 + 2\text{ب س جتا س}^2$

$= 2\text{س}(-\text{أ جا س}^2 + \text{ب جتا س}^2)$ ②

بالاشتقاق مرة أخرى لـ س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(-\text{أ جا س}^2 + \text{ب جتا س}^2)$
$+ 2\text{س}(-2\text{أ س جتا س}^2 - 2\text{ب س جا س}^2)$

$= 2(-\text{أ جا س}^2 + \text{ب جتا س}^2)$
$- 4\text{س}^2(\text{أ جتا س}^2 + \text{ب جا س}^2)$

بالتعويض من ① ، ② ينتج أن

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{1}{\text{س}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 4\text{س}^2\text{ص}$

بالضرب × س

∴ $\text{س} \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 4\text{س}^3\text{ص}$

∴ $\text{س} \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 4\text{س}^3\text{ص} = \text{صفر}$

(٢٦) إذا كان س ص = أ حيث أ عدد حقيقي موجبًا ، $\frac{\text{دس}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} < \frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2} \times \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ فأوجد الفترة التي ينتمي إليها أ

- الحل -

$\because$ س ص = أ $\therefore$ ص = أ س^{-1}

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{أ}\,\text{س}^{-2}$ ، $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\text{أ}\,\text{س}^{-3}$

، س = أ ص^{-1}

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = -\text{أ}\,\text{ص}^{-2}$ ، $\frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2} = 2\text{أ}\,\text{ص}^{-3}$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} \times \frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2} = 2\text{أ}\,\text{س}^{-3} \times 2\text{أ}\,\text{ص}^{-3}$

$= 4\text{أ}^2\,\text{س}^{-3}\,\text{ص}^{-3}$

$= 4\text{أ}^2 \times \text{أ}^{-3} = \frac{4}{\text{أ}}$

، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = -\text{أ}\,\text{س}^{-2} \times -\text{أ}\,\text{ص}^{-2}$

$= \text{أ}^2\,\text{س}^{-2}\,\text{ص}^{-2} = \text{أ}^2 \times \text{أ}^{-2} = 1$

$\because \frac{\text{دس}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} < \frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2} \times \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ ،

$\therefore 1 < \frac{4}{\text{أ}}$ $\therefore \text{أ} < 4$

$\therefore \text{أ} \in]0 ، 4[$

(٢٧) إذا كان

د(س) + د'(س) + د''(س)

$= \text{س}^3 + 7\text{س}^2 + 9\text{س} - 2$

فأوجد د(س)

- الحل -

نفرض أن د(س) = $\text{س}^3 + \text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$

$\therefore$ د'(س) = $3\text{س}^2 + 2\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\therefore$ د''(س) = $6\text{س} + 2\text{أ}$

$\therefore \text{س}^3 + (\text{أ}+3)\text{س}^2 + (2\text{أ}+\text{ب}+6)\text{س}$

$+ 2\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} = \text{س}^3 + 7\text{س}^2 + 9\text{س} - 2$

$\therefore \text{أ} + 3 = 7$ $\therefore \text{أ} = 4$

، $2\text{أ} + \text{ب} + 6 = 9$ $\therefore \text{ب} = -5$

، $2\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = -2$ $\therefore \text{جـ} = -5$

$\therefore$ د(س) = $\text{س}^3 + 4\text{س}^2 - 5\text{س} - 5$

(٢٨) إذا كانت ص = جا أ س

استكشف نمط الاشتقاقة المتتالية ثم

أوجد ① $\text{ص}^{(25)}$ ② $\text{ص}^{(2016)}$

- الحل -

$\because$ ص = جا أ س

$\therefore$ ص' = أ جتا أ س = أ جا(أ س + $\frac{\pi}{2}$)

، ص'' = $-\text{أ}^2$ جا أ س = أ^2 جا(أ س + π)

، ص''' = $-\text{أ}^3$ جتا أ س = أ^3 جا(أ س + $\frac{3\pi}{2}$)

، $\text{ص}^{(4)} = \text{أ}^4$ جا أ س = أ^4 جا(أ س + 2π)

$\therefore \text{ص}^{(ن)} = \text{أ}^{ن}$ جا(أ س + $\frac{ن\pi}{2}$)

$\therefore \text{ص}^{(25)} = \text{أ}^{25}$ جا(أ س + $\frac{25\pi}{2}$)

$= \text{أ}^{25}$ جا(أ س + $\frac{\pi}{2}$) = أ^{25} جتا أ س

، $\text{ص}^{(2016)} = \text{أ}^{2016}$ جا(أ س + $\frac{2016\pi}{2}$)

$= \text{أ}^{2016}$ جا(أ س) = أ^{2016} ص

(٢٩) إذا كان جا ص + جتا ٢س = صفر

أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} - \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2$ ظا س = ٤ جتا ٢س قا ص

- الحل -

$\because$ جا ص + جتا ٢س = صفر باشتقاقه

$\therefore$ جتا ص × $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٢ جا ٢س = صفر

وباشتقاقه مرة أخرى بالنسبة لـ س

∴ حتا ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + $\frac{دص}{دس}$ × −جا ص × $\frac{دص}{دس}$ − ٤ حتا ٢س = صفر

بالقسمة ÷ حتا ص

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ − $(\frac{دص}{دس})^2$ ظا ص = ٤ حتا ٢س قا ص

(٣٠) اذا كان جا ٢س − حتا ٣ص = صفر
اثبت أن
٣ ظا ٣ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٩ $(\frac{دص}{دس})^2$ − ٤ = صفر

الحل

∵ جا ٢س − حتا ٣ص = صفر
بالاشتقاق بالنسبة لـ س
∴ ٢ حتا ٢س + ٣ جا ٣ص $\frac{دص}{دس}$ = صفر
بالاشتقاق مرة أخرى لـ س
∴ −٤ جا ٢س + ٩ حتا ٣ص $(\frac{دص}{دس})^2$ + (٣ جا ٣ص) $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = صفر
بالقسمة ÷ حتا ٣ص

∴ $\frac{-٤ جا ٢س}{حتا ٣ص}$ + ٩ $(\frac{دص}{دس})^2$ + (٣ ظا ٣ص) $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = صفر
ولكن جا ٢س = حتا ٣ص
∴ ٣ ظا ٣ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٩ $(\frac{دص}{دس})^2$ − ٤ = صفر

تمارين عامة

(١) أوجد ص'' لكل من الدوال الآتية:
① ص = س² (س + ٢)²
② ص = ٢ جا² س − ٥ حتا² س
③ ص = س جا² س

(٢) أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

① ص = جا س − حتا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$
② ص = س حتا س − جا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣) اذا كانت ص² + م س³ − ب س = جـ
حيث م ، ب ، جـ ثوابت اثبت أن
ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + $(\frac{دص}{دس})^2$ + ٣م س = صفر

(٤) اذا كان س² ص = س² − ٢س + ٥
فاثبت أن
س² $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٤س $\frac{دص}{دس}$ + ٢ص = صفر

(٥) اذا كانت ص² + س² ص² = ٨
اثبت أن
(س² + ١) $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٣س $\frac{دص}{دس}$ + ص = صفر

(٦) اذا كان ص³ = ٣س⁴ − ٣س² + ٥
اثبت أن
ص² $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٢ص $(\frac{دص}{دس})^2$ + ٢ = ١٢ س²

(٧) اذا كانت ص = ٢ حتا (٣س + ١)
اثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٩ص = صفر

(٨) اذا كان ص = $\sqrt{١ + جا س}$
اثبت أن ص + ٤ $\frac{د^4ص}{دس^4}$ = صفر

(٩) اذا كانت ص = س³ + ٢ ، ع = س² + ٣
فأوجد $\frac{د^2ع}{دص^2}$ عند س = $\frac{١}{٣}$

(١٠) اذا كانت س = ٢ن³ + ٣ ، ص = ن⁴
أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عند ن = ١

(١١) اذا كان س ص = جا س حتا س
فاثبت أن س $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٤ س ص = صفر

معادلتا المماس والعمودي لمنحنى

•• ميل الخط المستقيم :

① ميل الخط المستقيم الذي معادلته $أ س + ب ص + ج = صفر$ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

② ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ يساوي

$$\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

③ ميل المستقيم = ظا هـ

④ اذا كان $\vec{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$

⑤ ميل المستقيم يكون موجباً اذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑥ ميل المستقيم يكون سالباً اذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑦ ميل محور السينات = ميل أي مستقيم أفقي (موازي لمحور السينات) = صفر

⑧ ميل محور الصادات = ميل أي مستقيم رأسي (موازي لمحور الصادات) = $\frac{1}{صفر}$ (غير معرف)

⑨ شرط توازي مستقيمين هو $م_1 = م_2$

⑩ شرط تعامد مستقيمين هو $م_1 \times م_2 = -1$

معادلة الخط المستقيم

① المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بالنقطة $قه = (س_1 ، ص_1)$ والمتجه $\vec{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه له هي

$$\vec{ر} = \vec{قه} + ك\vec{ى}$$

② المعادلة الكارتيزية

(أ) بدلالة نقطة عليه $(س_1 ، ص_1)$ والميل م هي $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

(ب) بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هي $ص = م س + ج$

(ج) بدلالة الجزأين المقطوعين من محوري الاحداثيات هي $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

ملاحظات :

① معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هي ص = ك

② معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هي س = ل

③ معادلة محور السينات هي ص = صفر

④ معادلة محور الصادات هي س = صفر

⑤ معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل هي ص = م س

⑥ لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = صفر ومنها نوجد قيم س

⑦ لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = صفر ومنها نوجد قيم ص

⑧ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما معاً آنياً

∴ معادلة المماس للمنحنى عند $(س_1 ، ص_1)$

هي $ص - ص_1 = م_{المماس} (س - س_1)$

∴ معادلة العمودي للمنحنى عند $(س_1 ، ص_1)$

هي $ص - ص_1 = م_{العمودي} (س - س_1)$

- أمثلة محلولة -

(١) أوجد ميل المماس للمنحنى

$س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص - ٨ = صفر$

عند نقطة تقاطعه مع محور السينات

- الحل -

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات

نضع ص = صفر

∴ $س^2 - ٢س - ٨ = صفر$

∴ س = ٤ ومنها ص = صفر

∴ س = −٢ ومنها ص = صفر

∴ النقط هي (٤ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)

∵ $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٢ + ٤ \frac{دص}{دس} = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٢س + ٢}{٢ص + ٤} = \frac{-س + ١}{ص + ٢}$

∴ ميل المماس عند (٤ ، ٠) = $\frac{-٣}{٢}$

، ميل المماس عند (−٢ ، ٠) = $\frac{٣}{٢}$

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $ص^3 = س^2$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة

- الحل -

∵ $ص^3 = س^2$ بالاشتقاق

∴ $٣ص^2 \frac{دص}{دس} = ٢س$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٣ص^2}$

وعندما س = ٨ ∴ ص = ٤

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢ × ٨}{٣ × ١٦} = \frac{١}{٣}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{٣}$ ∴ θ = ١٨° ٢٦َ

(٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى

$٣ص^2 - ٦ص + س^2 = صفر$ والتي عندها

المماس لهذا المنحنى يكون

(١) موازياً لمحور السينات

(٢) موازياً لمحور الصادات

(٣) يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

- الحل -

∵ $٣ص^2 - ٦ص + س^2 = صفر$ بالاشتقاق

∴ $٦ص \frac{دص}{دس} - ٦ \frac{دص}{دس} + ٢س = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٦ص - ٦} = \frac{-س}{٣ص - ٣}$

(١) نضع $\frac{دص}{دس}$ = صفر ∴ $\frac{-س}{٣ص - ٣} = ٠$

∴ س = صفر وبالتعويض في معادلة المنحنى ∴ $٣ص^2 - ٦ص = صفر$

∴ ٣ص (ص − ٢) = صفر ومنها

ص = صفر ، ص = ٢

∴ النقط هي (صفر ، صفر) ، (صفر ، ٢)

(٢) نضع $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٠}$ ∴ $\frac{-س}{٣ص - ٣} = \frac{١}{٠}$

∴ ٣ص − ٣ = صفر ∴ ص = ١

وبالتعويض في معادلة المنحنى ∴ $٣ - ٦ + س^2 = ٠$

∴ $س^2 = ٣$ ∴ س = $\pm \sqrt{٣}$

∴ النقط هي $(\sqrt{3} ، ١)$ ، $(-\sqrt{3} ، ١)$

③ لنضع $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = $ ظا٤٥ $= ١$ ∴ $\frac{-س}{٣ص-٣} = ١$

∴ ٣ص − ٣ = −س وبالتعويض في معادلة المنحنى

∴ $٣ص^٢ - ٦ص + (-٣ص + ٣)^٢ = $ صفر

∴ $٣ص^٢ - ٦ص + (٩ص^٢ - ١٨ص + ٩) = $ صفر

∴ $١٢ص^٢ - ٢٤ص + ٩ = $ صفر

∴ ص $= \frac{١}{٢}$ ومنها س $= \frac{٣}{٢}$

∴ ص $= \frac{٣}{٢}$ ومنها س $= \frac{-٣}{٢}$

∴ النقط هي $(\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢})$ ، $(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢})$

---

④ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٨$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم ص = ٤ − س

- الحل -

∵ $س^٢ + ص^٢ = ٨$ بالاشتقاق

∴ $٢س + ٢ص \frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = $ صفر

ومنها $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{-س}{ص}$

∵ ميل المستقيم المعطى = −١

∴ ميل العمودي عليه = ١ ∴ $\frac{-س}{ص} = ١$

∴ ص = −س وبالتعويض

∵ $س^٢ + س^٢ = ٨$ ∴ $٢س^٢ = ٨$

∴ س = ±٢

∴ النقط هي (٢ ، −٢) ، (−٢ ، ٢)

---

⑤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = ظاس حيث س ∈ $[٠ ، ٢\pi] - \{\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\}$ والتي يكون عندها المماس

① موازياً للمستقيم ٢س − ص = ٣

② له متجه اتجاه $\overset{\rightarrow}{ى} = (١ ، ٤)$

- الحل -

∵ ص = ظاس ∴ $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = $ قا^{٢}س

① ميل المستقيم = ٢ ∴ قا^{٢}س = ٢

∴ قاس = $\pm\sqrt{٢}$ ∴ حتاس = $\pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ حتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ١

أو س = $\frac{٧\pi}{٤}$ ومنها ص = −١

أو حتاس = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنها س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ص = −١

أو س = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∴ ص = ١

∴ النقط هي $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ ، $(\frac{٣\pi}{٤} ، -١)$

، $(\frac{٥\pi}{٤} ، ١)$ ، $(\frac{٧\pi}{٤} ، -١)$

② ميل المستقيم = $\frac{٤}{١} = ٤$ ∴ قا^{٢}س = ٤

∴ قاس = ±٢ ∴ حتاس = $\pm\frac{١}{٢}$

∴ حتاس = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٣}$ ∴ ص = $\sqrt{٣}$

أو س = $\frac{٥\pi}{٣}$ ∴ ص = $-\sqrt{٣}$

أو حتاس = $\frac{-١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ ص = $-\sqrt{٣}$

أو س = $\frac{٤\pi}{٣}$ ∴ ص = $\sqrt{٣}$

∴ النقط هي $(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٢\pi}{٣} ، -\sqrt{٣})$

، $(\frac{٤\pi}{٣} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٥\pi}{٣} ، -\sqrt{٣})$

⑥ أوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $ص = \frac{٢س-١}{٣س-٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١، ١) ثم أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ويكون المماس عندها موازياً للمستقيم $س + ٤ص - ١ =$ صفر

- الحل -

∵ $ص = \frac{٢س-١}{٣س-٢}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢(٣س-٢) - ٣(٢س-١)}{(٣س-٢)^٢}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{(٣س-٢)^٢}$ وعند (١، ١)

∴ $\frac{دص}{دس} = -١$ ∴ ظا هـ $= -١$

∴ هـ $= ١٣٥°$

، ∵ ميل المستقيم المعطى $= \frac{-١}{٤}$

∴ $\frac{-١}{(٣س-٢)^٢} = \frac{-١}{٤}$ ∴ $(٣س-٢)^٢ = ٤$

∴ $٣س - ٢ = \pm ٢$

∴ $س = \frac{٤}{٣}$ ومنها $ص = \frac{٥}{٦}$

، $س =$ صفر ومنها $ص = \frac{١}{٢}$

∴ النقط هي $(\frac{٤}{٣}، \frac{٥}{٦})$ ، (صفر، $\frac{١}{٢}$)

⑦ أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها

① $س^٢ - ٣س ص - ص^٢ + ٣ =$ صفر

عند (-١، ٤)

- الحل -

∵ $س^٢ - ٣س ص - ص^٢ + ٣ =$ صفر

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $٢س - ٣ص - ٣س \frac{دص}{دس} - ٢ص \frac{دص}{دس} =$ صفر

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢س - ٣ص}{٣س + ٢ص}$ وعند (-١، ٤)

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-١٤}{٥}$

∴ معادلة المماس هي

$ص - ٤ = \frac{-١٤}{٥}(س + ١)$

∴ $٥ص - ٢٠ = -١٤س - ١٤$

∴ $١٤س + ٥ص - ٦ =$ صفر

② $د(س) = ٢ ظا^٣ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

- الحل -

∵ $د(س) = ٢ ظا^٣ س$ بالاشتقاق لـ س

∴ $د'(س) = ٦ ظا^٢ س \times قا^٢ س$

∴ $د'(\frac{\pi}{٤}) = ٦ \times ١ \times (\sqrt{٢})^٢ = ١٢ =$ الميل

، ∵ $د(\frac{\pi}{٤}) = ٢ ظا^٣(\frac{\pi}{٤}) = ٢$

∴ معادلة المماس هي

$ص - ٢ = ١٢(س - \frac{\pi}{٤})$

∴ $ص - ٢ = ١٢س - ٣\pi$

∴ $١٢س - ص - ٣\pi + ٢ =$ صفر

⑧ أوجد معادلة العمودي على كل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها

① $س^٣ + ص^٣ = ٦س ص$ عند (٣، ٣)

- الحل -

∵ $س^٣ + ص^٣ = ٦س ص$ بالاشتقاق

∴ $٣س^٢ + ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٦ص + ٦س \frac{دص}{دس}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢ص - س^٢}{ص^٢ - ٢س}$ وعند (٣، ٣)

∴ $\frac{دص}{دس} = -١$ ∴ ميل العمودي = ١

∴ معادلة العمودي ع المماس هي

$ص - ٣ = ١(س - ٣)$

∴ $س - ص = صفر$

(٨) $ص = ٤ + ظتا س - قا^٢ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

-الحل-

∵ $ص = ٤ + ظتا س - قا^٢ س$

∴ $ص' = - قتا^٢ س - ٢ قا س \cdot قا س ظا س$

∴ $ص' = - قتا^٢ س - ٢ قا^٢ س ظا س$

وعند $س = \frac{\pi}{٤}$

∴ $ص' = -٦$

∴ ميل العمودي $= \frac{١}{٦}$

∵ $س = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $ص = ٣$

∴ معادلة العمودي هي

$ص - ٣ = \frac{١}{٦}(س - \frac{\pi}{٤})$

∴ $٦ص - ١٨ = س - \frac{\pi}{٤}$

∴ $س - ٦ص - \frac{\pi}{٤} + ١٨ = صفر$

∴ $٤س - ٢٤ص - \pi + ٧٢ = صفر$

(٩) اذا كانت النقطة $(٤ ، -٢)$ تنتمي إلى المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٢ك س + ١٢ = صفر$ أوجد قيمة ك ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة

-الحل-

∵ $س^٢ + ص^٢ - ٢ك س + ١٢ = صفر$

، ∵ $(٤ ، -٢)$ تحقق المعادلة

∴ $١٦ + ٤ - ٨ك + ١٢ = صفر$

∴ $-٨ك + ٣٢ = صفر$ ∴ $ك = ٤$

∴ معادلة المنحنى هي

$س^٢ + ص^٢ - ٨س + ١٢ = صفر$

∴ $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٨ = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٤ - س}{ص}$

∴ ميل المماس عند $(٤ ، -٢) = صفر$

∴ معادلة المماس هي

$ص + ٢ = صفر(س - ٤)$

∴ معادلة المماس هي $ص + ٢ = صفر$

(١٠) أوجد معادلة العمودي ع المنحنى الذي معادلته $ص = \sqrt{٦ - س}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $ص = س$

-الحل-

لوجد نقط تقاطع المستقيم مع المنحنى بحل المعادلتين معاً

∵ $ص = \sqrt{٦ - س}$ ، $ص = س$

∴ $س = \sqrt{٦ - س}$ وبتربيع الطرفين

∴ $س^٢ = ٦ - س$ ∴ $س^٢ + س - ٦ = ٠$

∴ $س = -٣$ (مرفوض) ، $س = ٢$

وعند $س = ٢$ ∴ $ص = ٢$

∴ نقطة التقاطع هي $(٢ ، ٢)$

∵ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}(٦ - س)^{-\frac{١}{٢}} \times -١ = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - س}}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند $(٢ ، ٢) = \frac{-١}{٤}$

∴ ميل العمودي $= ٤$

∴ معادلة العمودي هي

$ص - ٢ = ٤(س - ٢)$

∴ $ص - ٤س + ٦ = صفر$

(١١) أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى $ص = جتا(س + ص)$ والذي ميله $= \frac{-١}{٢}$ حيث $صفر \le س \le ٢\pi$

-الحل-

$\frac{دص}{دس} = - جا(س + ص)(١ + \frac{دص}{دس})$

، ∵ $\frac{دص}{دس} = الميل = \frac{-١}{٢}$

∴ $-\frac{1}{2}$ = − جا(س + ص) × $\frac{1}{2}$

∴ جا(س + ص) = 1 ①

∴ س + ص = $\frac{\pi}{2}$ + 2نπ حيث ن ∈ ص

∴ ص = جتا($\frac{\pi}{2}$ + 2نπ) = جتا $\frac{\pi}{2}$

= صفر ②

من ① ، ② ∴ جا س = 1

∴ س = $\frac{\pi}{2}$ لأن س ∈ [0 ، 2π]

∴ نقطة التماس هي ($\frac{\pi}{2}$ ، 0)

∴ معادلة المماس هي

ص − صفر = $-\frac{1}{2}$ (س − $\frac{\pi}{2}$)

∴ 2س + 4ص − π = صفر

---

⑫ أوجد معادلة كل من المماس والعمودي عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها

① س² − $\sqrt{3}$ س ص + 2ص² = 12

عند النقطة ($\sqrt{3}$ ، 3)

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ 2س − $\sqrt{3}$ ص − $\sqrt{3}$ س $\frac{دص}{دس}$ + 4ص $\frac{دص}{دس}$

= صفر

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{\sqrt{3}\,ص - 2س}{-\sqrt{3}\,س + 4ص}$ وعند ($\sqrt{3}$ ، 3)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ∴ ميل العمودي = $\frac{-9}{\sqrt{3}}$

∴ ميل العمودي = −3$\sqrt{3}$

∴ معادلة المماس هي

ص − 3 = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ (س − $\sqrt{3}$)

∴ $\sqrt{3}$ س − 9ص + 24 = صفر

ومعادلة العمودي هي

ص − 3 = −3$\sqrt{3}$ (س − $\sqrt{3}$)

∴ 3$\sqrt{3}$ س + ص − 12 = صفر

---

② ص²(1 + س²) = 8 عند (−1 ، 2)

- الحل -

∴ ص²(1 + س²) = 8 ∴ ص² = $\frac{8}{1 + س^2}$

∴ ص² = 8(1 + س²)$^{-1}$ وبالاشتقاق

∴ 2ص $\frac{دص}{دس}$ = −8(1 + س²)$^{-2}$ × 2س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-8س}{ص(1 + س^2)^2}$ وعند (−1 ، 2)

∴ ميل المماس = 1 ∴ ميل العمودي = −1

∴ معادلة المماس هي

ص − 2 = 1(س + 1)

∴ س − ص + 3 = صفر

∴ معادلة العمودي هي

ص − 2 = −1(س + 1)

∴ س + ص − 1 = صفر

---

③ ص = 2جتا س − قا س

عند س = $\frac{\pi}{3}$

- الحل -

$\frac{دص}{دس}$ = −2جا س − قا س ظا س

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند س = $\frac{\pi}{3}$ = −3$\sqrt{3}$

∴ ميل العمودي = $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

وعند س = $\frac{\pi}{3}$ فإن ص = −1

∴ معادلة المماس هي

ص + 1 = −3$\sqrt{3}$ (س − $\frac{\pi}{3}$)

∴ 3$\sqrt{3}$ س + ص + 1 − $\sqrt{3}\pi$ = صفر

∴ معادلة العمودي هي

ص + 1 = $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (س − $\frac{\pi}{3}$)

∴ س − 3$\sqrt{3}$ ص − $\frac{\pi}{3}$ − 3$\sqrt{3}$ = صفر

④ $س = ن^{٢} + ٤ن$ ، $ص = ٢ن^{٢}$

عند $ن = ١$

- الحل -

$\because س = ن^{٢} + ٤ن \quad \therefore \frac{دس}{دن} = ٢ن + ٤$

$\because ص = ٢ن^{٢} \quad \therefore \frac{دص}{دن} = ٤ن$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٤ن}{٢ن + ٤}$

وعند $ن = ١$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{-٣}{٢}$

وعند $ن = ١$ $\therefore س = ٥$ ، $ص = ٢$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$ص - ٢ = \frac{٢}{٣}(س - ٥)$

$\therefore ٣ص - ٦ = ٢س - ١٠$

$\therefore ٢س - ٣ص - ٤ = صفر$

$\therefore$ معادلة العمودي هي

$ص - ٢ = \frac{-٣}{٢}(س - ٥)$

$\therefore ٢ص - ٤ = -٣س + ١٥$

$\therefore ٣س + ٢ص - ١٩ = صفر$

⑤ $س = ن^{٢} - ٦ن$ ، $ص = ٨\sqrt{ن - ٢}$

عند $ن = ٦$

- الحل -

$\because س = ن^{٢} - ٦ن \quad \therefore \frac{دس}{دن} = ٢ن - ٦$

$\because ص = ٨\sqrt{ن - ٢} \quad \therefore \frac{دص}{دن} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}} \times \frac{١}{٢ن - ٦} = \frac{٢}{(ن - ٣)\sqrt{ن - ٢}}$

وعند $ن = ٦$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}$

$\therefore$ ميل العمودي $= -٣$

وعند $ن = ٦$ $\therefore س = صفر$ ، $ص = ١٦$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$ص - ١٦ = \frac{١}{٣}(س - صفر)$

$\therefore س - ٣ص + ٤٨ = صفر$

ومعادلة العمودي هي

$ص - ١٦ = -٣(س - صفر)$

$\therefore ٣س + ص - ١٦ = صفر$

⑥ $س = قا\theta$ ، $ص = ظا\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{٦}$

- الحل -

$\because س = قا\theta \quad \therefore \frac{دس}{د\theta} = قا\theta \, ظا\theta$

$\because ص = ظا\theta \quad \therefore \frac{دص}{د\theta} = قا^{٢}\theta$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{د\theta} \div \frac{دس}{د\theta} = \frac{قا^{٢}\theta}{قا\theta \, ظا\theta}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = قتا\theta$ ، وعند $\theta = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢$ $\therefore$ ميل العمودي $= \frac{-١}{٢}$

وعند $\theta = \frac{\pi}{٦}$ $\therefore س = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $ص = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣} = ٢(س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣})$

$\therefore ٢س - ص - \sqrt{٣} = صفر$

ومعادلة العمودي هي

$ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{-١}{٢}(س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣})$

$\therefore ٣س + ٦ص - ٤\sqrt{٣} = صفر$

⑦ س = قا^٢θ - ١ ، ص = ظاθ

عند $θ = \frac{-π}{٤}$

- الحل -

∴ س = قا^٢θ - ١

∴ $\frac{دس}{دθ}$ = ٢ قاθ قاθ ظاθ = ٢ قا^٢θ ظاθ

، ∵ ص = ظاθ ∴ $\frac{دص}{دθ}$ = قا^٢θ

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دθ} \div \frac{دس}{دθ} = \frac{قا^٢θ}{٢ قا^٢θ ظاθ}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ ظاθ}$ وعند $θ = \frac{-π}{٤}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل العمودي = ٢

وعند $θ = \frac{-π}{٤}$ فإن س = ١ ، ص = -١

∴ معادلة المماس هي

ص + ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س - ١)

∴ ٢ص + ٢ = -س + ١

∴ س + ٢ص + ١ = صفر

ومعادلة العمودي هي

ص + ١ = ٢(س - ١)

∴ ص + ١ = ٢س - ٢

∴ ٢س - ص - ٣ = صفر

⑬ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س^٢ + س عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص - ٢س = ٠

- الحل -

∵ ص = س^٢ + س ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ١

ولإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين معاً

∴ س^٢ + س = ٢س ∴ س^٢ - س = صفر

∴ س(س - ١) = صفر ∴ س = صفر ، س = ١

ومنها ص = صفر ، ص = ٢

∴ نقط التقاطع هي (٠، ٠) ، (١، ٢)

وعند (٠، ٠) فإن $\frac{دص}{دس}$ = ١

∴ معادلة المماس هي

ص - صفر = ١(س - صفر)

∴ ص = س ∴ س - ص = صفر

∴ ر = ك(١، ١) ، س = ك ، ص = ك

∴ ميل المماس = ١ ∴ ميل العمودي = -١

∴ معادلة العمودي هي

ص - صفر = -١(س - صفر)

∴ ص = -س ∴ س + ص = صفر

∴ ر = ك(١، -١) ، س = ك ، ص = -ك

وعند (١، ٢) فإن $\frac{دص}{دس}$ = ٣

∴ معادلة المماس هي

ص - ٢ = ٣(س - ١)

∴ ص - ٢ = ٣س - ٣

∴ ٣س - ص - ١ = صفر

، ر = (١، ٢) + ك(١، ٣)

، س = ١ + ك ، ص = ٢ + ٣ك

وميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي

ص - ٢ = $\frac{-١}{٣}$ (س - ١)

∴ ٣ص - ٦ = -س + ١

∴ س + ٣ص - ٧ = صفر

، ر = (١، ٢) + ك(٣، -١)

، س = ١ + ٣ك ، ص = ٢ - ك

⑭ أثبت أن المماس للمنحنى ص = س^٣ + ٣س - ٢ عند أي نقطة عليه يميل بزاوية حادة مع محور السينات ثم أوجد معادلة العمودي للمنحنى عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه

- الحل -

∵ ص = س^٣ + ٣س - ٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣س^٢ + ٣ كمية موجبة لجميع قيم س

∴ ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى كمية موجبة

∴ المماس عند أى نقطة على المنحنى يميل بزاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات وعند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس} = ٦$ ∴ ميل العمودى $= \frac{-١}{٦}$

∴ معادلة العمودى هى

ص − ٢ = $\frac{-١}{٦}$ (س − ١)

∴ ٦ص − ١٢ = −س + ١

∴ س + ٦ص − ١٣ = صفر

(١٥) اذا كان العمودى للمنحنى ص = ٤ − $س^٢$ عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند جـ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة جـ

- الحل -

∵ ص = ٤ − $س^٢$ ∴ $\frac{دص}{دس} = -٢س$

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند (١ ، ٣) = −٢

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى

ص − ٣ = $\frac{١}{٢}$ (س − ١)

∴ ٢ص − ٦ = س − ١

∴ س − ٢ص + ٥ = صفر

وبحل المعادلتين ص = ٤ − $س^٢$ ، س − ٢ص + ٥ = صفر معاً

∴ س − ٢(٤ − $س^٢$) + ٥ = صفر

∴ ٢$س^٢$ + س − ٣ = صفر

∴ س = ١ ومنها ص = ٣ (١ ، ٣)

، س = $\frac{-٣}{٢}$ ومنها ص = $\frac{٧}{٤}$

∴ جـ = ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$)

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$) = ٣

∴ معادلة المماس هى

ص − $\frac{٧}{٤}$ = ٣(س + $\frac{٣}{٢}$)

∴ ١٢س − ٤ص + ٢٥ = صفر

(١٦) اذا كان المماس للمنحنى ص = $س^٤$ − ٢$س^٢$ − س عند النقطة أ(−١ ، صفر) يمس المنحنى عند نقطة أخرى ب فأوجد معادلة العمودى للمنحنى عند نقطة ب

- الحل -

∵ $\frac{دص}{دس}$ = ٤$س^٣$ − ٤س − ١

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند (−١ ، ٠) = −١

∴ معادلة المماس هى

ص − صفر = −١(س + ١)

∴ ص = −س − ١

وبحل معادلة المماس و المنحنى معاً

∴ $س^٤$ − ٢$س^٢$ − س = −س − ١

∴ $(س^٢ - ١)^٢$ = صفر ∴ س = ±١

∴ المماس يقطع المنحنى عند نقطة ب التى احداثيها السينى = ١ ، د(١) = −٢

∴ ب = (١ ، −٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند (١ ، −٢) = −١

∴ ميل العمودى = ١

∴ معادلة العمودى عند نقطة ب هى

ص + ٢ = ١(س − ١)

∴ س − ص − ٣ = صفر

(١٧) اذا كان المماس للمنحنى ص = $س^٢$ يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس

- الحل -

∵ ص = $س^٢$ ولنفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب) ∴ ب = $أ^٢$ (١)

، $\frac{دص}{دس}$ = ٢س وعند س = أ فإن

$\frac{دص}{دس}$ = ٢أ

∴ معادلة المماس هى

ص − ب = ٢أ(س − أ)

∴ ص − أ² = ٢أ(س − أ)

∵ النقطة (٣، ٥) تقع على المماس

∴ ٥ − أ² = ٢أ(٣ − أ)

∴ ٥ − أ² = ٦أ − ٢أ²

∴ أ² − ٦أ + ٥ = صفر

∴ أ = ١ ومنها ب = ١

، أ = ٥ ومنها ب = ٢٥

∴ معادلة المماس هي

ص − ١ = ٢(س − ١)

∴ ص − ٢س + ١ = صفر

أو ص − ٢٥ = ١٠(س − ٥)

∴ ص − ١٠س + ٢٥ = صفر

(١٨) عين قيمة أ ∈ ح التي تجعل محور السينات مماساً للمنحنى ص = س² − أس + أ − ١ ثم عين نقطة التماس

- الحل -

∵ ص = س² − أس + أ − ١

∴ دص/دس = ٢س − أ

ونفرض أن نقطة التماس هي (ب، صفر)

∴ دص/دس عند (ب، صفر) = ٢ب − أ

∴ ٢ب − أ = صفر   ∴ أ = ٢ب (١)

∵ النقطة (ب، ٠) تحقق المعادلة

∴ ب² − أب + أ − ١ = صفر (٢)

من (١)، (٢) ∴ ب² − ٢ب² + ٢ب − ١ = صفر

∴ ب² − ٢ب + ١ = صفر

∴ ب = ١ ومنها أ = ٢

ونقطة التماس هي (١، صفر)

(١٩) اذا كان المستقيم ١٣س − ص − ٧ = صفر يمس المنحنى ص = أس³ + بس² عند النقطة (١، ٦) فما قيمة أ، ب

- الحل -

∵ ص = أس³ + بس²

∵ (١، ٦) تحقق المعادلة

∴ أ + ب = ٦ (١)

، ∵ دص/دس = ٣أس² + ٢بس

، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١٣

∴ دص/دس عند (١، ٦) = ١٣

∴ ٣أ + ٢ب = ١٣ (٢)

وبحل المعادلتين (١)، (٢) معاً فإن

أ = ١ ، ب = ٥

(٢٠) اذا كان المنحنى ص = ٣س² − ٧س + ٤ يقطع محور السينات في النقطتين أ، ب اثبت أن المماسين عند أ، ب متعامدان

- الحل -

∵ ص = ٣س² − ٧س + ٤   ∴ دص/دس = ٦س − ٧

بوضع ص = صفر   ∴ ٣س² − ٧س + ٤ = صفر

∴ س = ٤/٣ ، س = ١

∴ النقط هي (٤/٣، صفر)، (١، صفر)

∴ دص/دس عند (٤/٣، صفر) = ١

∴ دص/دس عند (١، صفر) = −١

∵ حاصل ضرب الميلين = −١

∴ المماسان متعامدان

(٢١) أوجد قيم أ، ب، جـ حتى يكون للمنحنيين ص = أس³ + بس ، ص = جـس² − س مماساً مشتركاً عند النقطة (−١، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك

- الحل -

∵ (−١، ٢) تحقق معادلتي المنحنيين

∴ أ + ب = −٢ (١)

، جـ + ١ = ٢   ∴ جـ = ١

، ∵ م١ = دص/دس = ٣أس² + ب

، $م_2 = \frac{دص}{دس} = 2جـ س - 1$

، ∵ $م_1 = م_2$ عند $س = -1$

∴ $3أ + ب = -3$ ②

من ①، ② ينتج أن

$أ = \frac{-1}{2}$ ، $ب = \frac{-3}{2}$

∴ معادلة المماس هى

$ص - 2 = -3(س + 1)$

∴ $3س + ص + 1 = صفر$

(٢٢) اذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى $ص = س^2$ فى نقطتين أ، ب اثبت أن المماسين المرسومين للمنحنى عند أ، ب يتقاطعان دائماً عند محور الصادات

- الحل -

نفرض أن $ص = س^2$ يقطع المستقيم الأفقى $ص = أ$ فى النقط (ب، أ)، (-ب، أ) ، $\frac{دص}{دس} = 2س$

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند (ب، أ) $= 2ب$

∴ معادلة المماس الأول

$ص - أ = 2ب(س - ب)$

∴ $2ب س - ص - 2ب^2 + أ = صفر$ ①

∴ $\frac{دص}{دس}$ عند (-ب، أ) $= -2ب$

∴ معادلة المماس الثانى

$ص - أ = -2ب(س + ب)$

∴ $2ب س + ص - أ + 2ب^2 = صفر$ ②

وبجمع المعادلتين ①، ② فإن

$4ب س = صفر$ ∴ $س = صفر$

بالتعويض ∴ $ص = أ - 2ب^2$

أى أن المماسان يتقاطعان دائماً فى النقطة $(صفر، أ - 2ب^2)$ ∈ محور الصادات

(٢٣) أوجد معادلتى المماسين للدائرة $س^2 + ص^2 = 5$ والذى كل منهما يميل على المحور السينى الموجب بزاوية ظلها يساوى ٢؟

- الحل -

∵ $س^2 + ص^2 = 5$ ①

∴ $2س + 2ص \frac{دص}{دس} = صفر$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

∵ $\frac{-س}{ص} = 2$ ∴ $س = -2ص$ ②

بالتعويض فى ① ∴ $4ص^2 + ص^2 = 5$

∴ $5ص^2 = 5$ ∴ $ص = \pm 1$

عند $ص = 1$ ∴ $س = -2$ (-٢، ١)

∴ معادلة المماس هى

$ص - 1 = 2(س + 2)$

∴ $2س - ص + 5 = صفر$

، عند $ص = -1$ ∴ $س = 2$ (٢، -١)

∴ معادلة المماس هى

$ص + 1 = 2(س - 2)$

∴ $2س - ص - 5 = صفر$

صابر عبد الرحيم محمود

(٢٤) اذا كان للمنحنى $ص = 2س^3 + 3س^2 + 4س + 5$ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (-١، ٢) أوجد معادلة المماس الآخر

- الحل -

∵ $ص = 2س^3 + 3س^2 + 4س + 5$

∴ $\frac{دص}{دس} = 6س^2 + 6س + 4$

∴ ميل المماس عند (-١، ٢) = ٤

وبوضع $\frac{دص}{دس} = 4$

∴ $6س^2 + 6س + 4 = 4$

∴ $6س^2 + 6س = صفر$ ∴ $س^2 + س = صفر$

∴ $س = صفر$ ، $س = -1$

∴ $ص = 5$ ، $ص = 2$

∴ النقطة الأخرى التى يكون فيها المماس له نفس الميل هى (٠، ٥)

∴ معادلة المماس الآخر هو

$ص - ٥ = ٤ (س - صفر)$

∴ $٤س - ص + ٥ = صفر$

(٢٥) أوجد معادلتي المماسين للمنحنى $ص = س^٣ - ٣س + ٥$ والعموديين على المستقيم $س + ٩ص = ١$

- الحل -

ميل المماس $= \frac{دص}{دس} = ٣س^٢ - ٣$

∵ ميل المستقيم المعطى $= \frac{-١}{٩}$

∴ ميل المماس المطلوب = ٩

∴ $٣س^٢ - ٣ = ٩$ ∴ $س^٢ = ٤$

∴ $س = \pm ٢$ ∴ نقطتا التماس هما $(-٢ ، ٣)$ ، $(٢ ، ٧)$

∴ معادلتا المماسين هما

$ص - ٣ = ٩ (س + ٢)$

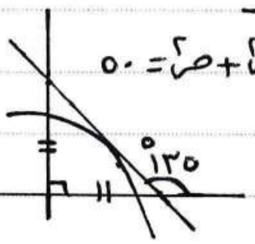
∴ $ص - ٩س - ٢١ = صفر$

، $ص - ٧ = ٩ (س - ٢)$

∴ $ص - ٩س + ١١ = صفر$

(٢٦) اذا كان المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٥٠$ يصنع مثلثاً متساوي الساقين مع محوري الإحداثيات في الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس

- الحل -



∵ معادلة المنحنى هي $س^٢ + ص^٢ = ٥٠$

∴ $ص^٢ = ٥٠ - س^٢$

∴ $٢ص \frac{دص}{دس} = -٢س$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص} = \frac{-س}{\sqrt{٥٠ - س^٢}}$

∵ المماس للمنحنى يصنع مثلثاً متساوي الساقين مع محوري الإحداثيات في الربع الأول أي أن ميله = ظا ١٣٥ = −١

∴ $\frac{دص}{دس} = -١$ ∴ $\frac{-س}{\sqrt{٥٠ - س^٢}} = -١$

∴ $س = \sqrt{٥٠ - س^٢}$ ∴ $س^٢ = ٥٠ - س^٢$

∴ $س^٢ = ٢٥$ ∴ $س = \pm ٥$

∴ $س = -٥$ مرفوض

وعند $س = ٥$ ∴ $ص = \sqrt{٥٠ - ٢٥} = ٥$

∴ المماس ميله = −١

ويمس المنحنى في النقطة (٥ ، ٥) فتكون المعادلة هي $ص - ٥ = -١ (س - ٥)$

∴ $ص + س - ١٠ = صفر$

(٢٧) اذا كان المنحنيان $(س - أ)^٢ + ص^٢ = ١٨$ ، $(س + أ)^٢ + ص^٢ = ١٨$ متقاطعين على التعامد فأوجد قيمة أ

- الحل -

بحل المعادلتين معاً فإن

∴ $(س - أ)^٢ = (س + أ)^٢$

∴ $س^٢ - ٢أس + أ^٢ = س^٢ + ٢أس + أ^٢$

∴ $٤أس = صفر$ ∴ $س = صفر$

∴ $ص^٢ = ١٨ - أ^٢$ ①

باشتقاق معادلة المنحنى الأول

∴ $٢(س - أ) + ٢ص \frac{دص}{دس} = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{أ - س}{ص}$

وباشتقاق معادلة المنحنى الثاني

∴ $٢(س + أ) + ٢ص \frac{دص}{دس} = صفر$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س - أ}{ص}$ ∵ المنحنيان يتقاطعان على التعامد

∴ $\frac{أ - س}{ص} \times \frac{-س - أ}{ص} = -١$

∴ $أ^٢ - س^٢ = ص^٢$ ، عند $س = صفر$

∴ $ص^٢ = أ^٢$ ② ومن ① ، ② فإن

$١٨ - أ^٢ = أ^٢$ ∴ $٢أ^٢ = ١٨$ ∴ $أ^٢ = ٩$

∴ $أ = \pm ٣$

(٢٨) أوجد معادلة العمودي للمنحنى

$ص = س^{٢} - ٣س + ٥$ عند كل من نقطتي تقاطعه مع الدائرة $س^{٢} - ٣س + ص^{٢} = ٢٥$

- الحل -

بحل المعادلتين معاً فإن

$ص = ٢٥ - ص^{٢} + ٥$ ∴ $ص^{٢} + ص - ٣٠ = ٠$

∴ ص = -٦ ، ص = ٥

عند ص = -٦ ∴ $س^{٢} - ٣س + ٥ = -٦$

∴ $س^{٢} - ٣س + ١١ =$ صفر ليس لها حل في ح

وعند ص = ٥ ∴ $س^{٢} - ٣س + ٥ = ٥$

∴ س(س - ٣) = صفر

∴ س = صفر ، س = ٣

∴ ص = ٥ ، ص = ٥

∴ النقط هي (صفر، ٥) ، (٣، ٥)

∴ ميل المماس = $\frac{دص}{دس} = ٢س - ٣$

وعند النقطة (٠، ٥)

∴ ميل المماس = -٣ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي

$ص - ٥ = \frac{١}{٣}$ (س - صفر)

∴ س - ٣ص + ١٥ = صفر

وعند النقطة (٣، ٥)

∴ ميل المماس = ٣ ∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي

$ص - ٥ = \frac{-١}{٣}(س - ٣)$

∴ س + ٣ص - ١٨ = صفر

(٢٩) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات والمماس والعمودي عليه للمنحنى $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ عند النقطة (١، -٤) الواقعة عليه

- الحل -

∵ $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ بالاشتقاق

∴ $٨س + ٢ص \frac{دص}{دس} =$ صفر

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٤س}{ص}$ وعند (١، -٤)

∴ $\frac{دص}{دس} = ١$ ∴ معادلة المماس هي

ص + ٤ = ١(س - ١)

∴ س - ص - ٥ = صفر

بوضع س = صفر ∴ ص = -٥

∴ يقطع محور الصادات في (٠، -٥)

، ميل العمودي = -١

∴ معادلة العمودي هي

ص + ٤ = -١(س - ١)

∴ س + ص + ٣ = صفر

وبوضع س = صفر ∴ ص = -٣

∴ يقطع محور الصادات في (صفر، -٣)

∴ طول القاعدة = -٣ - (-٥) = ٢ وحدة طول

، الارتفاع = ١ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة طول

(٣٠) اثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ حيث س > صفر عند أي نقطة عليه ومحوري الاحداثيات تساوي ٢ وحدة مربعة

- الحل -

∵ $ص = \frac{١}{س}$ ∴ $ص' = \frac{-١}{س^{٢}}$

وبفرض أن نقطة التماس هي $(أ، \frac{١}{أ})$

∴ $ص' = \frac{-١}{أ^{٢}}$ ∴ معادلة المماس هي

$ص - \frac{١}{أ} = \frac{-١}{أ^{٢}}(س - أ)$

∴ $س + أ^{٢}ص - ٢أ =$ صفر

∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢أ، ٠)

ويقطع محور الصادات عند $(٠، \frac{٢}{أ})$

∴ مساحة المثلث المطلوب

$= \frac{١}{٢} \times ٢أ \times \frac{٢}{أ} = ٢$ وحدة مربعة

(٣١) أوجد معادلتي المماس و العمودي للمنحنى $\text{س}^2 + 3\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 + 1 = \text{صفر}$ عند النقطة أ$(-1 ، 1)$ ، وإذا قطعا محور السينات في النقطتين ب ، جـ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ بالوحدات المربعة

- الحل -

$\because \text{س}^2 + 3\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 + 1 = \text{صفر}$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore 2\,\text{س} + 3\,\text{ص} + 3\,\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 2\,\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2\,\text{س} - 3\,\text{ص}}{3\,\text{س} + 2\,\text{ص}}$ وعند $(-1 ، 1)$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$ $\therefore$ ميل العمودي $= -1$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$\text{ص} - 1 = 1(\text{س} + 1)$

$\therefore \text{س} - \text{ص} + 2 = \text{صفر}$

ومعادلة العمودي هي

$\text{ص} - 1 = -1(\text{س} + 1)$

$\therefore \text{س} + \text{ص} = \text{صفر}$

$\therefore$ المماس يقطع محور السينات في نقطة ب$(-2 ، 0)$ ، العمودي يقطع محور السينات في نقطة جـ$(0 ، 0)$

$\therefore$ ب جـ $= |-2 - \text{صفر}| = 2$ وحدة طول

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{1}{2} \times 2 \times 1$

$= 1$ وحدة طول

(٣٢) اثبت أن المنحنيين $\text{ص} = \text{س}^2 + 6\,\text{س} + 5$ ، $\text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{س} + 1$ يتماسان عند النقطة $(-1 ، \text{صفر})$ وأوجد معادلة المماس المشترك لهما

- الحل -

$\because \text{ص} = \text{س}^2 + 6\,\text{س} + 5$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{س} + 6$ وعند $(-1 ، \text{صفر})$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4$

، $\because \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{س} + 1$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\,\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 1$ وعند $(-1 ، 0)$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4$

$\because (-1 ، 0)$ تحقق كل منهما ولهما نفس الميل

$\therefore$ المنحنيان متماسان عند النقطة $(-1 ، 0)$

$\therefore$ معادلة المماس المشترك هي

$\text{ص} - \text{صفر} = 4(\text{س} + 1)$

$\therefore 4\,\text{س} - \text{ص} + 4 = \text{صفر}$

(٣٣) اثبت أن المنحنيين $(\text{س} - 1)^2 + \text{ص}^2 = 2$ ، $(\text{س} + 1)^2 + \text{ص}^2 = 2$ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

- الحل -

$\because (\text{س} - 1)^2 + \text{ص}^2 = 2$ ①

، $(\text{س} + 1)^2 + \text{ص}^2 = 2$ ②

وبحل المعادلتين ① ، ② بالطرح

$\therefore (\text{س} - 1)^2 = (\text{س} + 1)^2$

$\therefore \text{س} - 1 = \pm(\text{س} + 1)$

$\therefore \text{س} = \text{صفر}$ بالتعويض في إحدى المعادلتين $\therefore \text{ص} = \pm 1$

$\therefore$ المنحنيان يتقاطعان في النقطتين أ$(0 ، 1)$ ، ب$(0 ، -1)$

نوجد ميل المماس للمنحنى الأول بالاشتقاق بالنسبة لـ س $\therefore 2(\text{س} - 1) + 2\,\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0$

$\therefore \text{م}_1 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س} + 1}{\text{ص}}$

نوجد ميل المماس للمنحنى الثاني بالاشتقاق بالنسبة لـ س $\therefore 2(\text{س} + 1) + 2\,\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

$\therefore \text{م}_2 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س} - 1}{\text{ص}}$

أولاً : عند النقطة أ$(0 ، 1)$

$\therefore \text{م}_1 = 1$ ، $\text{م}_2 = -1$ $\therefore \text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، ١)

∴ معادلتا المماسين

① ص − ١ = ١ (س − صفر)

∴ س − ص + ١ = صفر

② ص − ١ = −١ (س − صفر)

∴ س + ص − ١ = صفر

ثانياً: عند النقطة ب (صفر ، −١)

∴ $\text{م}_1 = -1$ ، $\text{م}_2 = 1$ ، $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1$

∴ المماسان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (صفر ، −١)

∴ معادلتا المماسين

① ص + ١ = −١ (س − صفر)

∴ س + ص + ١ = صفر

② ص + ١ = ١ (س − صفر)

∴ س − ص − ١ = صفر

(٣٤) اثبت أن المنحنى $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = 2$ يمس المستقيم

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 2$ عند النقطة (أ ، ب)

مهما كانت قيمة ن

- الحل -

∵ $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = 2$ بالاشتقاق

∴ $\frac{\text{ن}}{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-1}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

وعند النقطة (أ ، ب)

∴ $\frac{\text{ن}}{\text{أ}} \times 1 + \frac{\text{ن}}{\text{ب}} \times 1 \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{ن}}{\text{أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ن}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

، ∵ ميل المستقيم = $\frac{-1}{\text{أ}} \div \frac{1}{\text{ب}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند نقطة (أ ، ب)

التي تقع على كليهما لأي قيمة لـ ن

- تمارين عامة -

① أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $\text{س}^2 + 3\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2 = 5$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وذلك عند النقطة (١ ، ١)

② أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\text{س}^2 + \text{س}\text{ص} + \text{ص}^2 = 3$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازياً لمحور الصادات

③ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = جا س جتا س والتي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم ص = س حيث س ∈]٠ ، ٢π[

④ أوجد معادلة كل من المماس والعمودي عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها

① $\text{س}^2 - 2\text{س}\text{ص} - \text{ص}^2 = 1$ عند (١ ، ٠)

② ص = ٢ س − ظتا س عند س = $\frac{\pi}{4}$

③ س جا ٢ص = ص جتا ٢س عند $\left(\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2}\right)$

④ $\text{س} = \text{ن}^2 + 2\text{ن} + 3$ ، $\text{ص} = 2\text{ن}^3 - 6\text{ن} + 1$ عند ن = صفر

⑤ س = جتا θ ، ص = $\sqrt{2}$ + جا θ عند θ = $\frac{\pi}{4}$

⑤ أوجد معادلة كل من المماس والعمودي عليه للمنحنى $\text{ص}^2(2\text{أ} - \text{س}) = \text{س}^3$ عند النقطة (أ ، أ) بالصورة المتجهة

⑥ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س³ والتي يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، صفر)

⑦ أوجد معادلتي المماسين للمنحنى س ص = ٨ اللذان يوازيان المستقيم ص + ٢ س = ٩

⑧ أوجد معادلتي العموديين على المنحنى س² + ص² − س + ٢ ص − ٢ = صفر عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات

⑨ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى س² + ٤ ص² = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)

⑩ أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماسين للمنحنى س² + ص² − ٢ س + ٤ ص − ٢٤ = صفر عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات

⑪ اثبت أن المنحنيين ص = س² − س ، ص = − س³ − ٣ س يتماسان ثم أوجد معادلة العمودي على المنحنيين عند نقطة التماس

⑫ اثبت أن المنحنيين ص = ٣ س² − ٥ س − ٢ ، ص = س² − ٣ س − ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، −٤)

المعدلات الزمنية المرتبطة

عندما تتعرض صفيحة دائرية لمصدر حراري فإنها تتمدد أي يزداد طول نصف قطر دائرتها وكذلك تزداد مساحة سطحها تبعاً لذلك ، هذه الزيادة سواء في طول نصف القطر أو في مساحة السطح تتغير بتغير زمن تعرض الصفيحة لهذا المصدر الحراري ، فإذا رمزنا لطول نصف قطر الصفيحة بالرمز نق ولمساحة سطحها بالرمز م فإن $\frac{د نق}{د ن}$ ، $\frac{د م}{د ن}$ تسمى معدلات زمنية مرتبطة ومن العلاقة بين نق ، م نستطيع أن نوجد علاقة بين المعدلين الزمنيين $\frac{د نق}{د ن}$ ، $\frac{د م}{د ن}$ بحيث اذا علم أحد هذين المعدلين أمكن ايجاد المعدل الآخر .

ملاحظات :

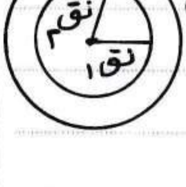
① اذا كان المتغير س (يتزايد - يتسع - يتمدد - يصب - يتراكم) بتزايد الزمن فإن $\frac{دس}{دن}$ تكون موجباً

② اذا كان المتغير س (يتناقص - يقترب - ينكمش - يتسرب - ينصهر) بتزايد الزمن فإن $\frac{دس}{دن}$ تكون سالباً

③ المسافة بين أي نقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ هي

$$\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

④ حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتي المركز طولا نصفي قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ يساوي



$$\frac{4}{3}\pi\left(نق_2^3 - نق_1^3\right)$$

⑤ اذا كانت $س_0$ القيمة الابتدائية للمتغير س عند (ن = صفر) ، $\frac{دس}{دن}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ، س قيمة المتغير بعد زمن ن فإن

$$س = س_0 + \frac{دس}{دن} \times ن$$

- أمثلة محلولة -

① تتحرك نقطة على المنحنى $س^2 + ص^2 - 4س + 8ص - 6 = صفر$ وكان معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن ن عند النقطة (3 ، 1) يساوي 4 وحدات / ث أوجد معدل تغير احداثيها الصادي بالنسبة للزمن عند نفس النقطة

- الحل -

∵ $س^2 + ص^2 - 4س + 8ص - 6 = صفر$

∴ $2س\frac{دس}{دن} + 2ص\frac{دص}{دن} - 4\frac{دس}{دن} + 8\frac{دص}{دن} = 0$

∴ $\frac{دس}{دن}(2س - 4) + \frac{دص}{دن}(2ص + 8) = صفر$

∵ $\frac{دس}{دن} = 4$ عند (3 ، 1)

∴ $4(2\times3 - 4) + \frac{دص}{دن}(2\times1 + 8) = صفر$

∴ $\frac{دص}{دن} = \frac{-4}{5}$ وحدة / ث

② تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى الذي معادلته $س^2 + ص^2 + 2س - 4ص = 27$ عين موضع هذه النقطة في اللحظة التي يكون عندها معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن مساوياً لمعدل تغير احداثيها الصادي بالنسبة للزمن

- الحل -

∵ $س^2 + ص^2 + 2س - 4ص = 27$ ①

∴ $2س\frac{دس}{دن} + 2ص\frac{دص}{دن} + 2\frac{دس}{دن} - 4\frac{دص}{دن} = صفر$

وعندما $\frac{دس}{دن} = \frac{دص}{دن}$

∴ ٢س دس/دن + ٢ص دس/دن + ٢ دس/دن − ٤ دس/دن = ٠

وبالقسمة على دس/دن

∴ ٢س + ٢ص + ٢ − ٤ = صفر

∴ س + ص = ١ ∴ ص = ١ − س (٢)

من (١) ، (٢)

∴ س² + (١ − س)² + ٢س − ٤(١ − س) = ٢٧

∴ س² + ٢س − ١٥ = صفر

∴ (س + ٥)(س − ٣) = صفر

∴ س = −٥ ومنها ص = ٦

∴ س = ٣ ومنها ص = −٢

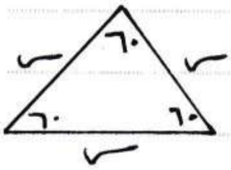
∴ النقط هي (−٥ ، ٦) ، (٣ ، −٢)

---

(٣) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوي الأضلاع تتمدد وتحتفظ بشكلها الهندسي فإذا كان معدل الزيادة في طول ضلعها ٠٫١ سم/ث فأوجد طول ضلع الصفيحة في اللحظة التي يكون معدل الزيادة في مساحتها مساوياً √٣ سم²/ث

- الحل -

∴ م = ½ س × س جا ٦٠



∴ م = √٣/٤ س²

∴ دم/دن = √٣/٢ س دس/دن

∴ √٣ = √٣/٢ × س × ٠٫١

∴ س = ٢٠ سم

---

(٤) مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله وبنفس النسبة بين أبعاده أوجد مساحة المستطيل في اللحظة التي يزداد فيها الطول بمعدل ٠٫١ سم/ث وتزداد المساحة بمعدل ٢ سم²/ث

- الحل -

نفرض أن طول المستطيل = س

∴ عرضه = ½ س

∴ المساحة م = ½ س²

∴ دم/دن = س دس/دن ∴ ٢ = س × ٠٫١

∴ س = ٢٠ ومنها

المساحة = ٢٠٠ سم²

---

(٥) إذا كانت ح هي مساحة المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدتي المركز طولا نصفي قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ وكان نق١ يتزايد بمعدل ٠٫٤ سم/ث ، نق٢ يتناقص بمعدل ٠٫٢ سم/ث فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التي يكون عندها نق٢ = ٢٨ ، نق١ = ١٤ سم

- الحل -

∴ ح = π نق٢² − π نق١²

∴ دح/دن = π × ٢ نق٢ دنق٢/دن − π × ٢ نق١ دنق١/دن

= π × ٢٨ × −٠٫٢ − π × ١٦ × ٠٫٤

= −١٢ π سم²/ث

---

(٦) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢٫١ سم/ث فإذا كان معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة في نهاية ن ثانية من البداية يساوي ٢٧٧٫٢ سم²/ث فأوجد قيمة ن (π = ٢٢/٧)

- الحل -

∴ مساحة الدائرة م = π نق²

∴ $\frac{dم}{dن} = ٢ ط نق \times \frac{dنق}{dن}$

∴ $٢٧٧٫٢ = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times نق \times ١٫٢$

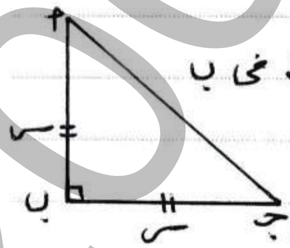
∴ نق = ٢١ سم

∵ نق = $\frac{dنق}{dن} \times ن$

∴ $٢١ = ١٫٢ \times ن$ ∴ ن = ١٠ ث

(٧) مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين مساحته (م) سم² فإذا كان $\frac{dم}{dن} = ٣٢$ سم²/ث في اللحظة التي كان طول أي من الساقين ٨ سم أوجد عند هذه اللحظة معدل التغير الزمني لمحيط المثلث (ح)

- الحل -



∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

نفرض أن

أ ب = ب جـ = س سم

∴ المساحة م = $\frac{١}{٢}$ س²

∴ $\frac{dم}{dن} = س \times \frac{dس}{dن}$ ∴ $٣٢ = ٨ \times \frac{dس}{dن}$

∴ $\frac{dس}{dن} = ٤$ سم/ث

∵ المثلث أ ب جـ متساوي الساقين وقائم الزاوية

∴ أ جـ = $\sqrt{س^2 + س^2} = س\sqrt{٢}$ سم

∴ المحيط ح = ٢س + س$\sqrt{٢}$ = $(٢ + \sqrt{٢})$ س

∴ $\frac{dح}{dن} = (٢ + \sqrt{٢}) \frac{dس}{dن}$

$= (٢ + \sqrt{٢}) \times ٤ = (٨ + ٤\sqrt{٢})$ سم/ث

(٨) مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠٫٢ سم/د وتزداد مساحة سطحه في لحظة ما بمعدل ٧٫٢ سم²/د أوجد طول حرف المكعب في هذه اللحظة ومعدل الزيادة في حجمه حينئذ.

- الحل -

نفرض أن طول حرف المكعب = ل

∴ المساحة م = ٦ ل²

∴ $\frac{dم}{dن} = ١٢ ل \frac{dل}{dن}$ ∴ $٧٫٢ = ١٢ \times ل \times ٠٫٢$

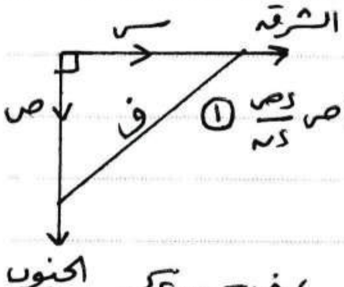
∴ ل = ٣ سم

∵ ح = ل³ ∴ $\frac{dح}{dن} = ٣ ل^2 \frac{dل}{dن}$

∴ $\frac{dح}{dن} = ٣ \times ٣^2 \times ٠٫٢ = ٥٫٤$ سم³/د

(٩) تحركت سفينتان من نقطة واحدة وفي لحظة واحدة الأولى في اتجاه الشرق بسرعة ٦٠ كم/س والثانية في اتجاه الجنوب بسرعة ٨٠ كم/س أوجد معدل التغير بين السفينتين بعد ساعتين من بدء الحركة

- الحل -



∵ ف² = س² + ص²

∴ $٢ف \frac{dف}{dن} = ٢س \frac{dس}{dن} + ٢ص \frac{dص}{dن}$ (١)

وبعد ساعتين

س = ٦٠ × ٢ = ١٢٠ كم

، ص = ٨٠ × ٢ = ١٦٠ كم ، ف = ٢٠٠ كم

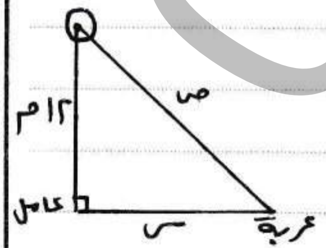
من المعادلة (١)

$٢ \times ٢٠٠ \frac{dف}{dن} = ٢ \times ١٢٠ \times ٦٠ + ٢ \times ١٦٠ \times ٨٠$

∴ $\frac{dف}{dن} = ١٠٠$ كم/س

(١٠) رجل فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة برج على ارتفاع ١٢ متر ويمسك بأحد طرفي الحبل عامل عند قاعدة البرج ، وثبت الطرف الآخر للحبل في عربة ثقيلة على الأرض فإذا استطاع العامل جذب الحبل بمعدل ٢ م/د فاحسب السرعة التي تتحرك بها العربة نحو البرج عندما تكون العربة على بعد ٩ أمتار من قاعدته

- الحل -



$\frac{dص}{dن} = -٢$ م/د

∵ س² + (١٢)² = ص²

بالاشتقاق

$\because$ ٢س $\frac{دس}{دن}$ = ٢ص $\frac{دص}{دن}$ (١)

عندما س = ٩ متر

$\therefore$ ص = $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = ١٥ متر

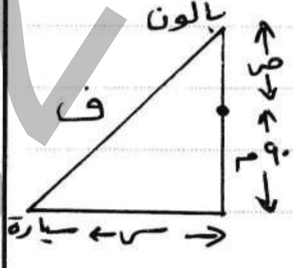
ومن (١) : ٢ × ٩ $\frac{دس}{دن}$ = ٢ × ١٥ × -٢

$\therefore$ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{-١٠}{٣}$ م/د

أي أن السيارة تتحرك بسرعة $\frac{١٠}{٣}$ م/د نحو البرج

(١١) يرتفع بالون رأسياً لأعلى بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م/ث وعندما كان البالون على ارتفاع ٩٠ متراً مرت تحته مباشرة سيارة وواصلت سيرها في خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ٢٥ م/ث أوجد المعدل الذي تزداد به المسافة بين السيارة والبالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون

-الحل-



$\frac{دص}{دن}$ = ١٥ م/ث ، $\frac{دس}{دن}$ = ٢٥ م/ث

ف^2 = (٩٠ + ص)^2 + س^2

$\therefore$ ٢ف $\frac{دف}{دن}$ = ٢(٩٠ + ص) $\frac{دص}{دن}$ + ٢س $\frac{دس}{دن}$ (١)

وبعد ثانيتين

ص = ١٥ × ٢ = ٣٠ متر ، س = ٢٥ × ٢ = ٥٠ م

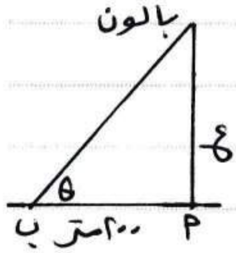
ومن (١) ، ف = ١٣٠ متر

$\therefore$ ٢ × ١٣٠ $\frac{دف}{دن}$ = ٢(٩٠ + ٣٠) × ١٥ + ٢ × ٥٠ × ٢٥

$\therefore$ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٣٠٥}{١٣}$ م/ث

(١٢) يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض، وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب في نفس المستوى الأفقي للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠.١٢ ء/د ، أوجد معدل ارتفاع البالون في هذه اللحظة

-الحل-



$\frac{د\theta}{دن}$ = ٠.١٢ ء/د

ظاθ = $\frac{ع}{٢٠٠}$

$\therefore$ ع = ٢٠٠ ظاθ

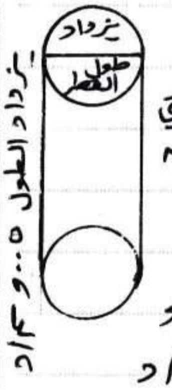
$\therefore$ $\frac{دع}{دن}$ = ٢٠٠ قا$^2\theta$ $\frac{د\theta}{دن}$

وعند θ = $\frac{\pi}{٤}$ $\therefore$ $\frac{دع}{دن}$ = ٢٠٠ قا^2($\frac{\pi}{٤}$) × ٠.١٢

$\therefore$ $\frac{دع}{دن}$ = ٤٨ متر/د

(١٣) حبل من الصلب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠.٠٠٥ سم/د ، ويزداد طول قطر مقطعه الدائري بمعدل ٠.٠٠٢ سم/د ، أوجد بدلالة π معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم

-الحل-



$\because$ ح = π نق^2 ع

$\therefore$ $\frac{دح}{دن}$ = π نق^2 $\frac{دع}{دن}$ + π ع × ٢نق $\frac{دنق}{دن}$

، $\because$ ق (القطر) = ٢ نق

$\therefore$ $\frac{دق}{دن}$ = ٢ $\frac{دنق}{دن}$

$\therefore$ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{دق}{دن}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٠.٠٠٢

= ٠.٠٠١ سم/د

وعند ع = ٤٠ سم ، نق = ١ سم

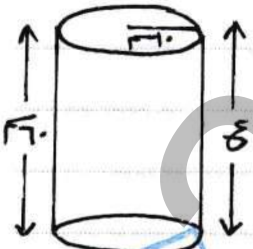
، $\because$ $\frac{دع}{دن}$ = ٠.٠٠٥ سم/د

$\therefore$ $\frac{دح}{دن}$ = π × ١^2 × ٠.٠٠٥ + π × ٤٠ × ٢ × ١ × ٠.٠٠١

= ٠.٠٨٥ π سم^3/د

(١٤) وعاء أسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٦٠سم ، فإذا كان الوعاء فارغاً وصب فيه الماء بمعدل ٣٠ π سم³/ث . أوجد معدل ارتفاع الماء في الوعاء . متى يمتلئ الوعاء بالماء

- الحل -



حجم الماء الموجود بالوعاء

ح = π نق² ع

∴ ح = π × ١٠٠ ع

∴ دح/دن = ١٠٠π دع/دن

∴ ٣٠ π = ١٠٠ π دع/دن

∴ دع/دن = ٠,٣ سم/ث

أي أن معدل ارتفاع الماء في الوعاء = ٠,٣ سم/ث

، يمتلئ الوعاء بالماء عندما تصبح ع = ٦٠سم

∴ يمتلئ الوعاء بعد مضي ٦٠/٠,٣ = ٢٠٠ث

حل آخر :

الحجم الكلي للوعاء = π × ١٠٠ × ٦٠

= ٦٠٠٠ π سم³

∴ ن = ٦٠٠٠π / ٣٠π = ٢٠٠ ثانية

(١٥) خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ متراً ، يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م³/د فما معدل تغير ارتفاع البترول في الخزان

- الحل -

دح/دن = −٢ م³/د ، ∵ ح = π نق² ع

∴ ح = π × (١٢)² ع

∴ دح/دن = π × ١٤٤ × دع/دن

∴ −٢ = π × ١٤٤ × دع/دن

∴ دع/دن = −١/(٧٢ π) م/د

(١٦) أسطوانة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها فإذا تمددت بحيث كان معدل ازدياد مساحتها السطحية الكلية بالنسبة للزمن يساوي ١٨ π سم²/ث عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها يساوي ٦سم فاحسب معدل ازدياد طول نصف القطر

- الحل -

المساحة (م) = ٢π نق² + ٢π نق ع

= ٢π نق² + ٢π نق × ٢نق

= ٢π نق² + ٤π نق² = ٦π نق²

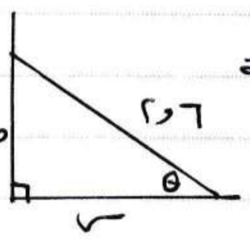
∴ دم/دن = ١٢ π نق × دنق/دن

∴ ١٨ π = ١٢ π × ٦ × دنق/دن

∴ دنق/دن = ١/٤ سم/ث

(١٧) سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية . إذا كان طرفه السفلي يتحرك مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ م/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط . أوجد معدل تحرك طرفه العلوي ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ .

- الحل -



نفرض أن المسافة بين قمة السلم والأرض = ص

، المسافة بين طرفه السفلي والحائط = س

∴ س² + ص² = (٢,٦)² بالاشتقاق

∴ ٢س دس/دن + ٢ص دص/دن = صفر

∴ دص/دن = −س/ص × دس/دن ، ∵ دس/دن = ٤ م/د

وعند س = ١

∴ ص = √((٢,٦)² − ١²) = ٢,٤ متر

∴ دص/دن = −١/٢,٤ × ٤ = −٥/٣ م/د

، ∵ جا θ = ص / ٢,٦ ∴ ص = ٢,٦ جا θ

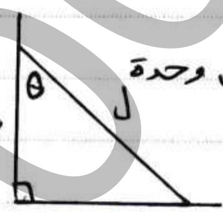
∴ دص/دن = ٢,٦ جتا θ دθ/دن

∴ -٥/٣ = ٢,٦ × ١/٢,٦ × دθ/دن

∴ دθ/دن = (-٥/٣)ء / د

⑱ سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوي على حائط رأسي بمعدل ك وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلي عن الحائط عندما يميل السلم عن الرأسي بزاوية θ حيث قتا θ = ٥/٤

- الحل -



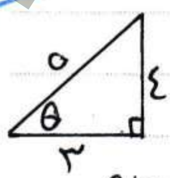
نفرض أن طول السلم = ل وحدة

∴ س² + ص² = ل²

∴ ٢س دس/دن + ٢ص دص/دن = صفر

∴ دس/دن = -ص/س × دص/دن

وعندما قتا θ = ٥/٤



∴ س = ل جا θ ، ص = ل جتا θ

∴ دس/دن = -٣/٤ × -ك = ٣ك/٤ وحدة/ث (حيث ك > صفر)

⑲ مستطيل طوله ١٢سم ، عرضه ٥ سم فإذا كان الطول يتناقص بمعدل ١سم/د بينما يتزايد العرض بمعدل ½ سم/د فأوجد متى يصبح الشكل مربعاً ، ثم أوجد الزمن الذي تتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة وقتئذ .

- الحل -

∵ الطول يتناقص بمعدل ١سم/د

∴ بعد ن ثانية يصبح الطول = ١٢ - ١ × ن = ١٢ - ن

، ∵ العرض يتزايد بمعدل ½ سم/د

∴ بعد ن ثانية يصبح العرض = ٥ + ½ ن

∴ المساحة م = (١٢ - ن)(٥ + ½ ن)

وعندما يكون الشكل مربعاً

∴ ١٢ - ن = ٥ + ½ ن ∴ ن = ١٤/٣ ث

∴ دم/دن = ½(١٢ - ن) - (٥ + ½ ن)

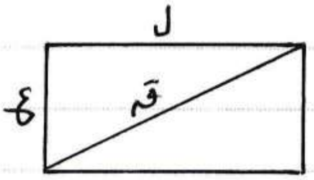
∴ ٦ - ½ ن - ٥ - ½ ن = صفر

∴ ن = ١ ث

وعندها م = (١٢ - ١) × (٥ + ½) = ٦٠,٥ سم²

⑳ مستطيل طوله ل وعرضه ع ومساحة سطحه ثابتة وتساوي ١٢٠٠ سم² في لحظة معينة يتزايد الطول بمعدل ٦ سم/د ويتناقص العرض بمعدل ٢ سم/د أوجد بعدي المستطيل عند هذه اللحظة هل تتزايد طول قطر المستطيل ؟ وبأي معدل .

- الحل -



دل/دن = ٦ سم/د ، دع/دن = -٢ سم/د

م = ل ع = ١٢٠٠ ①

صفر = ل دع/دن + ع دل/دن

∴ ل × -٢ + ع × ٦ = صفر ∴ ل = ٣ع

بالتعويض في ①

∴ ٣ع × ع = ١٢٠٠ ∴ ٣ع² = ١٢٠٠

∴ ع² = ٤٠٠ ∴ ع = ٢٠ سم

∴ ل = ٦٠ سم ، ∵ قه² = ل² + ع²

∴ ٢قه دقه/دن = ٢ل دل/دن + ٢ع دع/دن

∴ قه دقه/دن = ل دل/دن + ع دع/دن

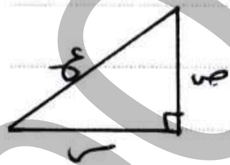
∴ √(٢٠² + ٦٠²) × دقه/دن = ٦٠ × ٦ + ٢٠ × -٢

∵ $\frac{دق}{دن} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ سم/د

∴ القطر يتزايد بمعدل $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ سم/د

(21) إذا تغيرت أطوال أضلاع مثلث قائم مع بقاء المحيط ثابتاً عند ٤٠ سم وكان معدل تغير طول الوتر هو ٧ سم/د عندما كانت أطوال الأضلاع ٨ سم، ١٥ سم، ١٧ سم فأوجد معدل تغير كل من الضلعين الآخرين عند هذه اللحظة.

الحل



∵ $س^2 + ص^2 = ع^2$

∴ $2س \frac{دس}{دن} + 2ص \frac{دص}{دن} = 2ع \frac{دع}{دن}$

وعندما $س = 8$، $ص = 15$، $ع = 17$

، $\frac{دع}{دن} = 7$ سم/د

∴ $8 \frac{دس}{دن} + 15 \frac{دص}{دن} = 119$ (1)

∵ $س + ص + ع = 40$

∴ $\frac{دس}{دن} + \frac{دص}{دن} + \frac{دع}{دن} =$ صفر

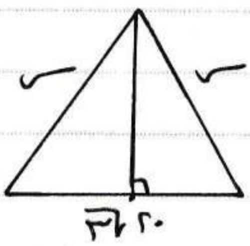
∴ $\frac{دس}{دن} + \frac{دص}{دن} = -7$ (2)

من (1)، (2) ∴ $\frac{دص}{دن} = 25$ سم/د

، $\frac{دس}{دن} = -32$ سم/د

(22) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $20\sqrt{3}$ إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ث فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة

الحل



$\frac{دس}{دن} = -3$ سم/د

$م = \frac{1}{2} \times 20\sqrt{3} \times \sqrt{س^2 - (10\sqrt{3})^2}$

∴ $م = 10\sqrt{3}\,\sqrt{س^2 - 300}$

∴ $\frac{دم}{دن} = 10\sqrt{3} \times \frac{2س}{2\sqrt{س^2 - 300}} \times \frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن} = \frac{10\sqrt{3}\,س}{\sqrt{س^2 - 300}} \times \frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ عند $س = 20\sqrt{3}$

$= \frac{10\sqrt{3} \times 20\sqrt{3}}{\sqrt{(20\sqrt{3})^2 - 300}} \times -3 = -60$

∴ معدل تناقص المساحة = ٦٠ سم²/ث

(23) ضلعان في مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ٠٫١ سم/ث ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{1}{5}$ د/ث. بأي معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التي تكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم

الحل

نفرض أن طولا ضلعين في مثلث هما ل، ع ، قياس الزاوية المحصورة بينهما هو θ

∴ $م = \frac{1}{2}\, ل\, ع\, جا\theta$

∴ $\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}\, ع\, جا\theta \frac{دل}{دن} + \frac{1}{2}\, ل\, جا\theta \frac{دع}{دن} + \frac{1}{2}\, ل\, ع\, جتا\theta \frac{د\theta}{دن}$

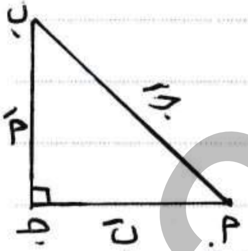
وعند $ل = ع = 10$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}$ في د

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$

$\simeq 5.866$ سم²/ث

(٢٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، مساحته ثابتة وتساوي ٢٤ سم² ، اذا كان معدل تغير $\overline{\text{ب}}$ يساوي ١ سم/ث فأوجد معدل تغير كل من $\overline{\text{أ}}$ ، ق(أ̂) عند اللحظة التي يكون فيها $\overline{\text{ب}}$ يساوي ٨ سم

- الحل -



م = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٢٤ سم²

بالاشتقاق

$\frac{1}{2}$ أ $\frac{\text{د ب}}{\text{دن}}$ + $\frac{1}{2}$ ب $\frac{\text{د أ}}{\text{دن}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{دن}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د ب}}{\text{دن}}$ ، عند ب = ٨ سم فإن أ = ٦ سم

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{دن}} = \frac{-6}{8} \times 1 = \frac{-3}{4}$ سم/ث

ظا أ̂ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ∴ ب ظا أ̂ = أ

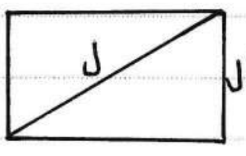
∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{دن}}$ ظا أ̂ + ب قا² أ̂ $\frac{\text{د أ̂}}{\text{دن}} = \frac{\text{د أ}}{\text{دن}}$

∴ $1 \times \frac{3}{4} + 8 \times (\frac{5}{4})^2 \times \frac{\text{د أ̂}}{\text{دن}} = \frac{-3}{4}$

∴ $\frac{\text{د أ̂}}{\text{دن}} = \frac{-3}{25}$ ء/ث = -٠,١٢ ء/ث

(٢٥) صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها $\frac{4}{5}$ طول قطرها ، تنكمش بالتبريد بانتظام محتفظة بشكلها الهندسي وبنفس النسبة بين بعديها وعند لحظة زمنية ما كان طول قطر الصفيحة ينكمش بمعدل ٢,٥ سم/د ، وفي نفس اللحظة تنكمش مساحتها السطحية بمعدل ٦٠ سم²/د فأوجد مساحة سطح الصفيحة عند هذه اللحظة

- الحل -



نفرض أن طول قطر الصفيحة = ل

∴ أبعاد الصفيحة هي $\frac{4}{5}$ ل ، $\frac{3}{5}$ ل

∴ المساحة (م) = $\frac{4}{5}$ ل × $\frac{3}{5}$ ل = $\frac{12}{25}$ ل²

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{24}{25}$ ل $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

∴ ٦٠ = $\frac{24}{25}$ × ل × ٢,٥ ∴ ل = ٢٥

∴ المساحة (م) = ٣٠٠ سم²

(٢٦) تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعه ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٦ سم³/دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,١ سم/دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن

- الحل -

نفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات هي س ، س + ٢ ، ٣ س

∴ الحجم (ح) = س (س + ٢) × ٣ س

= ٣ س³ + ٦ س²

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = (٩ س² + ١٢ س) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

٦ = (٩ س² + ١٢ س) × ٠,١

∴ ٩ س² + ١٢ س − ٦٠ = صفر

∴ س = ٢ ، س = $\frac{-10}{3}$ مرفوض

∴ أبعاد القطعة هي ٢ سم ، ٤ سم ، ٦ سم

(٢٧) تتمدد هرم رباعي منتظم من المعدن ارتفاعه يساوي طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم³/ث ، اذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوي ٠,١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته

- الحل -

نفرض أن طول ضلع القاعدة = ارتفاع الهرم = س

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ س^3 سم^3

∴ $\frac{دح}{دن}$ = س^2 $\frac{دس}{دن}$

∴ 1 = س^2 × 0.01 ∴ س^2 = 100

∴ س = 10 سم

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = 10 سم

(28) منشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 4 سم ويزداد بمعدل 2 سم/ث وارتفاعه 8 سم وينقص بمعدل 4 سم/ث فبأي معدل يزداد حجم المنشور وبعد كم ثانية تقف حجمه عن الزيادة

- الحل -

نفرض أبعاد المنشور هي س، س، ص

∴ الحجم ح = س^2 × ص

∴ $\frac{دح}{دن}$ = س^2 $\frac{دص}{دن}$ + 2 س ص $\frac{دس}{دن}$

= $(4)^2 \times -4 + 2 \times 4 \times 8 \times 2 = 64$ سم^3/ث

ونفرض أن أبعاد المنشور عند أي لحظة ن (4+2ن)، (4+2ن)، (8−4ن)

∴ ح = (4+2ن)^2 (8−4ن)

∴ $\frac{دح}{دن}$ = 4(4+2ن)(8−4ن) − 4(4+2ن)^2

= 4(4+2ن)(8−4ن−4−2ن)

= 4(4+2ن)(4−6ن)

وعندما $\frac{دح}{دن}$ = صفر ∴ ن = $\frac{2}{3}$ ث

(29) بالون كروي مملوء بالغاز تتسرب منه الغاز بمعدل س سم^3/ث، أثبت أن معدل نقص مساحته في اللحظة التي تكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوي $\frac{2س}{نق}$ سم^2/ث

- الحل -

حجم الكرة ح = $\frac{4}{3}$ π نق^3

∴ $\frac{دح}{دن}$ = 4π نق^2 $\frac{دنق}{دن}$

∴ س = 4π نق^2 $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{س}{4π نق^2}$

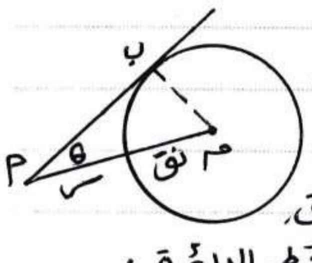
مساحة الكرة م = 4π نق^2

∴ $\frac{دم}{دن}$ = 8π نق $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = 8π نق × $\frac{س}{4π نق^2}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = $\frac{2س}{نق}$ سم^2/ث

(30) في الشكل المقابل:



أ نقطة تتحرك في المستوى، $\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب، أم = س + نق، حيث نق طول نصف قطر الدائرة:

(1) اثبت أن س = نق (قتا θ − 1)

(2) أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما θ = $\frac{π}{6}$

- الحل -

(1) $\overline{أب}$ مماس، $\overline{مب}$ نصف قطر

∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{مب}$ ∴ قتا θ = $\frac{نق + س}{نق}$

∴ قتا θ = 1 + $\frac{س}{نق}$

∴ س = نق (قتا θ − 1) (1)

(2) بالاشتقاق بالنسبة إلى θ

$\frac{دس}{دθ}$ = نق (− قتا θ ظتا θ)

وعندما θ = $\frac{π}{6}$

∴ $\frac{دس}{دθ}$ = $-2\sqrt{3}$ نق

(٣١) تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٤س − ٢س³ بحيث يتناقص إحداثيها الصادي بمعدل ٥ وحدات/ث أوجد معدل تغير ميل المنحنى عندما تكون س = ٢

- الحل -

∵ ميل المنحنى م = $\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٦س²

∴ $\frac{دم}{دن}$ = −١٢س $\frac{دس}{دن}$ ①

∵ ص = ٤س − ٢س³

∴ $\frac{دص}{دن}$ = (٤ − ٦س²) $\frac{دس}{دن}$

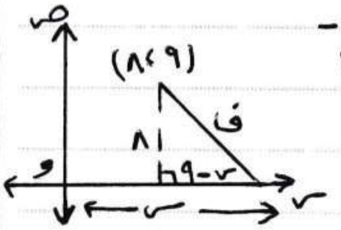
∴ −٥ = (٤ − ٦×٤) $\frac{دس}{دن}$ ∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{١}{٤}$

ومن ①

∴ $\frac{دم}{دن}$ = −١٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ = −٦ وحدات/ث

(٣٢) بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٥ سم/ث أوجد معدل التغير البعد بينها وبين النقطة (٩، ٨) بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة

- الحل -



ف² = ٦٤ + (س − ٩)²

بالاشتقاق

∴ ٢ف $\frac{دف}{دن}$ = ٢(س − ٩) $\frac{دس}{دن}$

وبعد ٣ ث

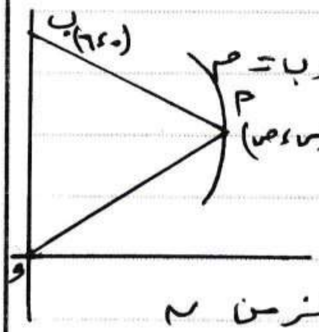
∵ س = ٣×٥ = ١٥ ، ف = √(٦٤ + ٣٦) = ١٠

∴ ٢×١٠ $\frac{دف}{دن}$ = ٢(١٥ − ٩) × ٥

∴ $\frac{دف}{دن}$ = ٣ سم/ث

(٣٣) تتحرك النقطة أ(س، ص) على منحنى الدالة ص = س³ + س بحيث $\frac{دص}{دن}$ = ٢ وحدة/ث ، أوجد معدل التغير في مساحة △ أوب حيث و نقطة الأصل ، النقطة ب(٠، ٦) في اللحظة التي يكون فيها الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٣

- الحل -



نفرض أن مساحة △ أوب = م

∴ م = $\frac{١}{٢}$ وب × س

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × س

= ٣س

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣ $\frac{دس}{دن}$ ①

∵ ص = س³ + س

∴ $\frac{دص}{دن}$ = (٣س² + ١) $\frac{دس}{دن}$

∴ ٢ = ٢٨ $\frac{دس}{دن}$ ∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{١}{١٤}$

بالتعويض في ①

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣ × $\frac{١}{١٤}$ = $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة/ث

(٣٤) صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِد أن معدل تغير طول ضلعها ٠٫١ سم/ث ، أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم

- الحل -

مساحة الشكل السداسي الذي طول ضلعه = س

م = $\frac{٦}{٤}$ س² ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ √٣ س²

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣√٣ س $\frac{دس}{دن}$ وعند س = ١٠

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣√٣ × ١٠ × −٠٫١

= −٣√٣ سم²/ث

(٣٥) رجل طوله ١٧٠ سم يسير بسرعة ٢ م/ث في خط مستقيم متجهاً نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٨٠ سم أوجد

① معدل تغير طول ظل الرجل

② سرعة تحرك نهاية ظل الرجل

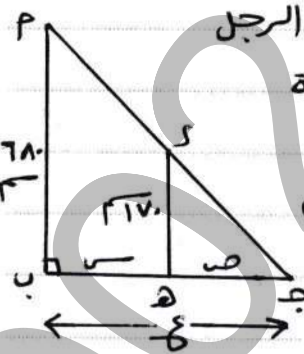
- الحل -

نفرض أن ده تمثل الرجل

، بُعد الرجل عن قاعدة المصباح = س

، طول ظل الرجل = ص

، المسافة التي تحركتها نهاية ظل الرجل = ع



① من تشابه المثلثين أ ب جـ ، د هـ جـ

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{170}{680} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ س + ص = ٤ ص $\quad \therefore$ س = ٣ ص

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} \qquad \therefore -2 = 3\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-2}{3} \text{ م/ث}$$

② $\because$ ع = س + ص

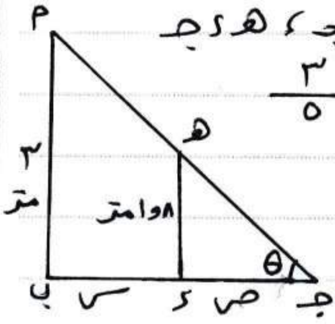
$$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$= -2 - \frac{2}{3} = \frac{-8}{3} \text{ م/ث}$$

(٣٦) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث أوجد معدل تغير طول ظل الرجل . وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن

س = $\frac{6}{5}$ ظتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح

- الحل -



من تشابه المثلثين أ ب جـ ، هـ د جـ

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{1{,}8}{3} = \frac{3}{5}$$

$\therefore$ ٣ س = ٢ ص

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

$$\therefore 3\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{3}{2} \times 1{,}2 = 1{,}8 \text{ م/ث}$$

(معدل تغير طول ظل الرجل)

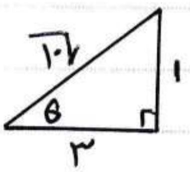
من Δ أ ب جـ :

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{3}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{3}{\text{س}+\frac{3}{2}\text{س}} = \frac{6}{5\text{س}}$$

$\therefore$ س = $\frac{6}{5}$ ظتا θ بالاشتقاق

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{6}{5}\left(-\text{قتا}^2\theta\right)\frac{d\theta}{\text{دن}}$$

وعند س = ٣,٦ فإن $\theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$



$$\therefore 1{,}2 = -\frac{6}{5} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^2 \times \frac{d\theta}{\text{دن}}$$

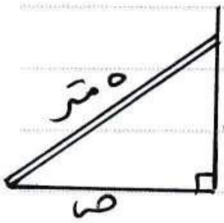
$$\therefore \frac{d\theta}{\text{دن}} = \left(\frac{-1}{10}\right) \text{ ءَ/ث}$$

(٣٧) قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل في الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً لأعلى بواسطة ونش بمعدل ١ م/د أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

- الحل -

$\frac{dس}{dن} = 1$ م/د

ص طول مسقط القضيب على الأرض



$س^2 + ص^2 = 25$

$2س \frac{dس}{dن} + 2ص \frac{dص}{dن} = $ صفر

$\therefore \frac{dص}{dن} = \frac{-س}{ص} \times \frac{dس}{dن}$

وعندما س = 3 متر $\therefore$ ص = 4 متر

$\therefore \frac{dص}{dن} = \frac{-3}{4} \times 1 = \frac{-3}{4}$ متر/د

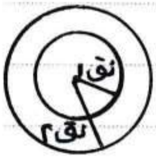
(28) كرة جوفاء طولا نصف قطريها الداخلي والخارجي في أي لحظة هما $نق_1$ ، $نق_2$ على الترتيب ، فإذا كان طول نصف قطرها الداخلي يزداد بمعدل 1 سم/ث بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتاً ، وذلك عند اللحظة التي يكون فيها $نق_1 = 3$ سم ، $نق_2 = 9$ سم أوجد عند هذه اللحظة

① معدل تغير طول نصف قطرها الخارجي

② معدل تغير مساحة سطحها الخارجي

③ معدل تغير سمكها

- الحل -



① حجم مادة الكرة (ع) = حجم الكرة الخارجية − حجم الكرة الداخلية

$\therefore ع = \frac{4}{3} \pi نق_2^3 - \frac{4}{3} \pi نق_1^3$

$\therefore ع = \frac{4}{3} \pi (نق_2^3 - نق_1^3)$

$\therefore \frac{dع}{dن} = \frac{4}{3} \pi \left[3 نق_2^2 \frac{dنق_2}{dن} - 3 نق_1^2 \frac{dنق_1}{dن}\right]$

$\therefore$ صفر $= \frac{4}{3} \pi \left[3 \times 81 \frac{dنق_2}{dن} - 3 \times 9 \times 1\right]$

$\therefore \frac{dنق_2}{dن} = \frac{1}{9}$ سم/ث

② مساحة الكرة $= 4 \pi نق_2^2$

$\therefore \frac{dم}{dن} = 8 \pi نق_2 \frac{dنق_2}{dن} = 8\pi \times 9 \times \frac{1}{9}$

$= 8\pi$ سم²/ث

③ نفرض أن السمك = ل

$\therefore ل = نق_2 - نق_1$

$\therefore \frac{dل}{dن} = \frac{dنق_2}{dن} - \frac{dنق_1}{dن}$

$= \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$ سم/ث

(29) بالون كروي حجمه 84π سم³ مملوءة بغاز ونتيجة لتسرب الغاز فإن حجم البالون ينقص بمقدار 8π سم³/دقيقة محتفظاً بشكله الكروي ، أوجد

① معدل تغير نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره = 4 سم

② معدل تغير نصف قطر البالون بعد ستة دقائق من بدء تسرب الغاز

- الحل -

نفرض أن حجم البالون = ح

① $ح = \frac{4}{3} \pi نق^3$

$\therefore \frac{dح}{dن} = 4\pi نق^2 \frac{dنق}{dن}$ ①

$\therefore -8\pi = 4\pi \times (4)^2 \times \frac{dنق}{dن}$

$\therefore \frac{dنق}{dن} = \frac{-1}{8}$ سم/د

② بعد ستة دقائق

$ع = 84\pi - 8\pi \times 6 = 36\pi$

$\therefore 36\pi = \frac{4}{3}\pi نق^3$ ومنها نق = 3 سم

ومن ①

$-8\pi = 4\pi \times (3)^2 \times \frac{dنق}{dن}$

$\therefore \frac{dنق}{dن} = \frac{-2}{9}$ سم/د

(٤٠) كتلة معلومة من غاز حرارتها ثابتة ، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢ سم³/ث فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم/سم² عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم³ . أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم³

- الحل -

نفرض أن الضغط = ض ، الحجم = ح

∵ ض ∝ $\frac{1}{\text{ح}}$ ∴ ض = $\frac{\text{م}}{\text{ح}}$ حيث م ثابت ، عند ض = ١٠٠٠ ث جم/سم² ، ح = ٢٥٠ سم³

∴ ض × ح = ١٠٠٠ × ٢٥٠ = ٢٥٠٠٠٠ (١)

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

∴ $\frac{\text{دض}}{\text{دن}} \times \text{ح} + \frac{\text{دح}}{\text{دن}} \times \text{ض} = $ صفر

∴ $\frac{\text{دض}}{\text{دن}} = \frac{-\text{ض}}{\text{ح}} \times \frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ ومن (١)

عندما يكون الحجم = ١٠٠ سم³ فإن الضغط = ٢٥٠٠ ث جم/سم²

∴ $\frac{\text{دض}}{\text{دن}} = -\frac{٢٥٠٠}{١٠٠} \times -٢ = ٥٠$ ث جم/سم²/ث

(٤١) في دائرة كهربية مغلقة ، إذا كان ج فرق الجهد (فولت) ، ت شدة التيار (أمبير) ، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ فولت/ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{1}{2}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة في اللحظة التي تكون فيها ج = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير

- الحل -

∵ ج = ت × م بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

∴ $\frac{\text{دج}}{\text{دن}} = \text{ت}\,\frac{\text{دم}}{\text{دن}} + \text{م}\,\frac{\text{دت}}{\text{دن}}$ (١)

∵ $\frac{\text{دج}}{\text{دن}} = ١$ فولت/ث ، $\frac{\text{دت}}{\text{دن}} = \frac{-1}{2}$ أمبير/ث

عند ج = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير

∴ م = $\frac{\text{ج}}{\text{ت}} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أوم

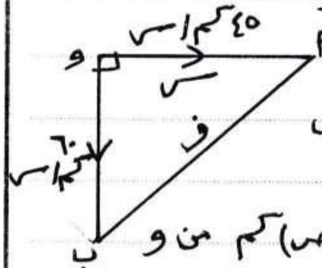
بالتعويض في (١)

$١ = ٢ \times \frac{\text{دم}}{\text{دن}} + ٦ \times \frac{-1}{2}$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢$ أوم/ث

(٤٢) يسير قطار بادئاً حركته في الحادية عشر صباحاً في اتجاه الشرق بسرعة ٤٥ كم/س بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهراً من نفس النقطة متجهاً إلى الجنوب بسرعة ٦٠ كم/س أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثالثة ظهراً

- الحل -



نفرض أن القطار الأول على بعد (س) كم من و

والقطار الثاني على بعد (ص) كم من و

والمسافة بين القطارين ف كم

∴ ف² = س² + ص²

∴ $٢\text{ف}\,\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ (١)

وعند الساعة الثالثة ظهراً

∴ س = ٤ × ٤٥ = ١٨٠ كم

، ص = ٣ × ٦٠ = ١٨٠ كم

∴ ف = $\sqrt{(١٨٠)^2 + (١٨٠)^2} = ١٨٠\sqrt{٢}$ كم

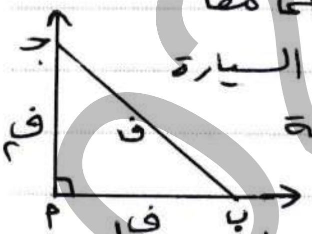
ومن المعادلة (١)

∴ $٢ \times ١٨٠\sqrt{٢}\,\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢ \times ١٨٠ \times ٤٥ + ٢ \times ١٨٠ \times ٦٠$

∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٥٢.٥\sqrt{٢}$ كم/س

(٤٣) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ طريقان متعامدان يحصران زاوية قياسها ٩٠° ، تحركت سيارة على الطريق $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ من أ بسرعة ٤٠ كم/س وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ من نقطة أ بسرعة ٦٠ كم/س . أوجد معدل تباعدهما بعد مضي ٢٠ دقيقة من بدء تحرك السيارة الثانية

- الحل -



عند أي لحظة من تحركهما معاً

نفرض أن زمن تحرك السيارة الثانية = ن ساعة

∴ زمن تحرك السيارة الأولى = $(\text{ن} + \frac{١}{٦})$ ساعة

∴ $\text{ف}_١ = ٤٠(\text{ن} + \frac{١}{٦})$ ، $\text{ف}_٢ = ٦٠\text{ن}$

∴ $\text{ف}^٢ = ١٦٠٠(\text{ن} + \frac{١}{٦})^٢ + ٣٦٠٠\text{ن}^٢$

∴ $٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٣٢٠٠(\text{ن} + \frac{١}{٦}) + ٧٢٠٠\text{ن}$

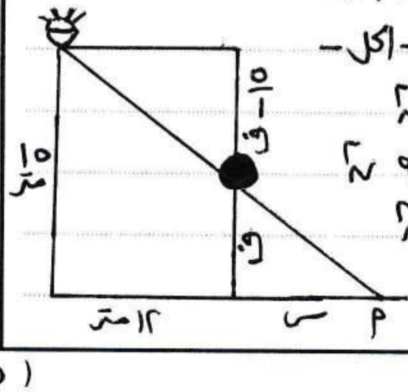
، عند ن = ٢٠ دقيقة = $\frac{١}{٣}$ ساعة

$\text{ف}_١ ، \text{ف}_٢$ ، ف = $٢٠\sqrt{٢}$ كم

∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٥٠\sqrt{٢}$ كم/س

(٤٤) عمود إنارة طوله ١٥ متر أعلاه مصباح قذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ٥ م/ث من مسافة قدرها ١٢ متر من قاعدة العمود . أوجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

- الحل -



$\text{ف} = \text{ع}_٠\text{ن} + \frac{١}{٢}\text{د}\text{ن}^٢$

$\text{ف} = ٥\text{ن} - \frac{١}{٢} \times ٩٫٨\,\text{ن}^٢$

$\text{ف} = ٥\text{ن} - ٤٫٩\,\text{ن}^٢$

ومن هندسة الشكل : $\frac{\text{ف}}{\text{س}} = \frac{١٥ - \text{ف}}{١٢}$

∴ $\text{س} = \frac{١٢\text{ف}}{١٥ - \text{ف}}$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{١٢(١٥ - \text{ف}) - ١٢\text{ف} \times -١}{(١٥ - \text{ف})^٢} \times \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

$= \frac{١٨٠}{(١٥ - \text{ف})^٢}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{١٨٠}{(١٥ - \text{ف})^٢} \times (٥ - ٩٫٨\text{ن})$

وعند ن = $\frac{١}{٢}$ ث فإن

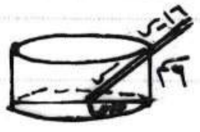
$\text{ف} = \frac{٥}{٢} - ٤٫٩ \times (\frac{١}{٢})^٢ = ١٫٢٧٥$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{١٨٠}{(١٥ - ١٫٢٧٥)^٢} \times (٥ - ٩٫٨ \times \frac{١}{٢})$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٠٫٠٩٥٥٥$ م/ث

(٤٥) إناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم وطول نصف القطر الداخلي لقاعدته ٦ سم . وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الطرف السفلي للساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها

- الحل -



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$ سم/ث

$\text{س}^٢ = \text{ص}^٢ + ٨١$

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

∴ $٢\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

وعندما يصل الساق إلى نهاية القاعدة

ص = ١٢ سم ∴ س = ١٥ سم

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١٥}{١٢} \times ٢ = \frac{٥}{٢}$ سم/ث

تمارين عامة

① تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى $س^2 + 4س - ص = 3$ عين موضع النقطة عند اللحظة التي تكون فيها سرعة احداثيها الصادي ضعف سرعة احداثيها السيني (-1 ، -6)

② قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار 20 سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار 20 سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل 0.25 سم/ث عندما يكون العرض 80 سم ، احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة (-45 $سم^2$/ث)

③ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل 0.1 سم/دقيقة فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة ما 75 $سم^3$/دقيقة فأوجد ① طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة ② معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند هذه اللحظة (50 سم ، 6 $سم^2$/د)

④ ترتفع طائرة عمودية رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره 24 م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد 150 متر عن موقع اقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع 150 متر من سطح الأرض ($\frac{2}{25}$ ء/ث)

⑤ سلم طوله 4 أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي وبطرفه الآخر على أرض أفقية ، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل 30 سم/ث احسب معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ ($\frac{30\sqrt{3}}{3}$ سم/ث)

⑥ مستطيل مساحته ثابتة وتساوي 24 $سم^2$ يزداد عرضه بمعدل 1 سم/ث بينما يتناقص طوله أوجد
① معدل تغير محيط المستطيل في اللحظة التي تكون فيها عرض المستطيل 4 سم
② بعدي المستطيل في اللحظة التي سيتوقف فيها المحيط عن التغير
(-1 سم/ث ، $2\sqrt{6}$ ، $2\sqrt{6}$ سم)

⑦ مثمن منتظم طول ضلعه 10 سم ويتزايد بمعدل 0.2 سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته (19.3 $سم^2$/ث)

⑧ رجل طوله 180 سم يسير بسرعة 150 سم/ث في اتجاه مصباح يرتفع 480 سم فوق سطح الأرض أوجد
① معدل تغير طول ظل الرجل
② معدل تغير لقدر رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد 300 سم من قاعدة المصباح (-90 سم/ث ، -3750 $سم^2$/ث)

⑨ في الساعة الثامنة صباحاً كانت سفينة تقع على بعد 60 كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة 20 كم/س وفي الساعة التاسعة صباحاً خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة 30 كم/س ، أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين في الساعة العاشرة صباحاً وهل تقترب السفينتان أم تتباعدان حينئذ ؟ (10 كم/س ، تتباعدان)

الدرس 5 المعدلات الزمنية المرتبطة

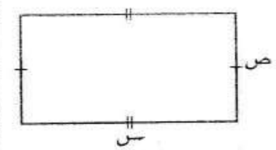
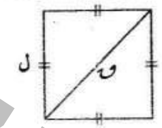
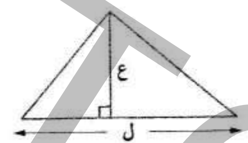
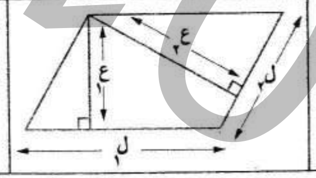
عندما تتعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى فإنها تتمدد أى يزداد طول نصف قطر دائرتها ، وكذلك تزداد مساحة سطحها تبعًا لذلك وهذه الزيادة سواء فى طول نصف القطر أو فى مساحة السطح تتغير بتغير زمن تعرض الصفيحة لهذا المصدر الحرارى.

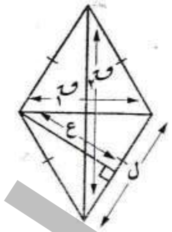
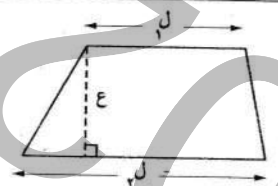
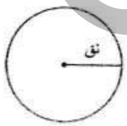
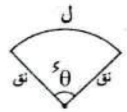
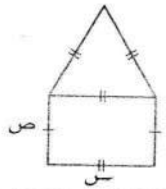
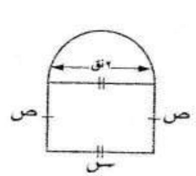
فإذا رمزنا لطول نصف قطر الصفيحة بالرمز (نق) ولمساحة سطحها بالرمز (م) فإن :

$\frac{ء نق}{ء ن}$ ، $\frac{ء م}{ء ن}$ (حيث ن الزمن) تسمى معدلات زمنية مرتبطة ومن العلاقة بين نق ، م نستطيع أن نوجد علاقة بين المعدلين الزمنيين $\frac{ء نق}{ء ن}$ ، $\frac{ء م}{ء ن}$ بحيث إذا علم أحد هذين المعدلين أمكن إيجاد المعدل الآخر.

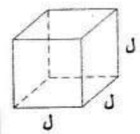
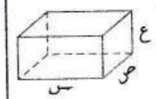
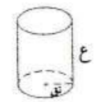
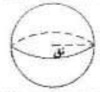
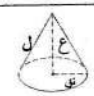
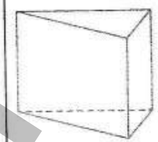
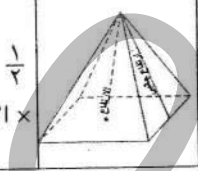
وعلى العموم إذا كانت لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن فإننا نحصل على علاقة بين المعدلات الزمنية : $\frac{ء س}{ء ن}$ ، $\frac{ء ص}{ء ن}$ ، $\frac{ء ع}{ء ن}$

* تذكر مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية :

المستطيل		المحيط = ٢ (س + ص) المساحة = س × ص
المربع		المحيط = ٤ ل المساحة = $ل^2 = \frac{1}{2} و^2$
المثلث		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة المساحة = $\frac{1}{2}$ × ل × ع = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
متوازى الأضلاع		المحيط = ٢ ($ل_1 + ل_2$) المساحة = $ل_1 × ع_1 = ل_2 × ع_2$

المعين		المحيط = ٤ ل المساحة = ل × ع = $\frac{1}{2} و_1 × و_2$
شبه المنحرف		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة المساحة = $\frac{1}{2}$ ($ل_1 + ل_2$) × ع
الدائرة		المحيط = ٢ π نق المساحة = π $نق^2$
القطاع الدائرى		المحيط = ٢ نق + ل المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ $نق^2$
شباك على شكل مستطيل عليه مثلث متساوى الأضلاع		المحيط = ٣ س + ٢ ص المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ $س^2$ جا ٦٠°
شباك على شكل مستطيل عليه نصف دائرة		نق = $\frac{1}{2}$ س سم ، المحيط = س + ٢ ص + π نق = س + ٢ ص + $\frac{1}{2}$ π س المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ π $نق^2$ = س ص + $\frac{1}{8}$ π $س^2$

* تذكر الحجوم والمساحات الكلية والجانبية لبعض المجسمات :

المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب		4 ل^2	6 ل^2	ل^3
متوازى المستطيلات		2 (س + ص) × ع	2 (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة		2π نق ع	2π نق ع + 2π نق^2 = 2π نق (ع + نق)	π نق^2 ع
الكرة		———	4π نق^2	$\frac{4}{3}\pi$ نق^3
المخروط القائم		π نق ل	π نق ل + π نق^2	$\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع
المنشور		محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع
الهرم المنتظم		$\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

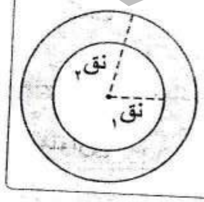
ملاحظات

① إذا كان المتغير س: يتزايد / يبتعد / يتمدد / يُصب / يتراكم ← بتزايد الزمن فإن $\frac{ds}{dn}$ يكون ← موجبًا

يتناقص / يقترب / ينكمش / يتسرب / ينصهر ← بتزايد الزمن فإن $\frac{ds}{dn}$ يكون ← سالبًا

② المسافة بين أى نقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) هى $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

③ حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتى المركز طولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ يساوى $\frac{4}{3}\pi$ (نق$_2^3$ − نق$_1^3$)



مثال ١

تتحرك نقطة على المنحنى : س^2 + ص^2 − ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠

فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٢ ، −١) يساوى ٣

فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

الحل

∵ س^2 + ص^2 − ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠ (بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن)

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ − ٥ $\frac{ءس}{ءن}$ + ٤ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

∴ (٢ س − ٥) $\frac{ءس}{ءن}$ + (٢ ص + ٤) $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

، ∵ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ عند النقطة (٢ ، −١)

∴ (٤ − ٥) × ٣ + (−٢ + ٤) $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

∴ −٣ + ٢ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ١٫٥

مثال ٢

نقطة تتحرك على المنحنى : س ص = س + ص − ٥ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

متطلبات قبلية جبرية

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي

تذكر أن:

① الدالة الأسية:

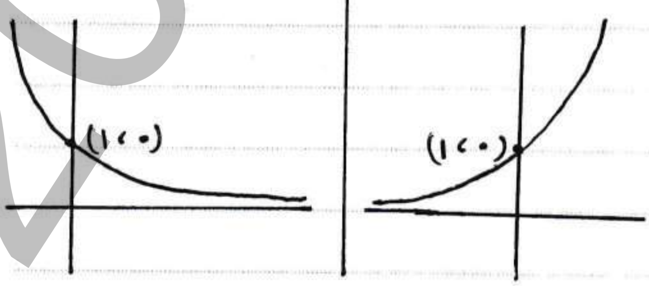
اذا كان $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$ فإن الدالة

$\text{د}: \text{ح} \longrightarrow \text{ح}^{+}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$

تسمى دالة أسية أساسها أ وهي دالة أحادية مجالها = ح ، مداها = ح^{+} ومنحناها يمر بالنقطة (٠، ١)

والشكل البياني للدالة الأسية $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ

أ > ١   ٠ < أ < ١



② الدالة اللوغاريتمية:

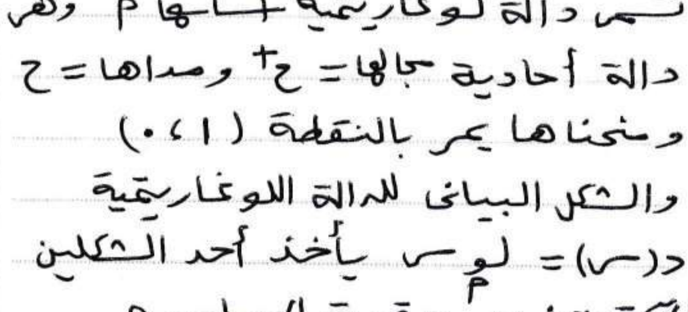
اذا كان $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$ فإن الدالة

$\text{د}: \text{ح}^{+} \longrightarrow \text{ح}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها أ وهي دالة أحادية مجالها = ح^{+} ومداها = ح ومنحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

والشكل البياني للدالة اللوغاريتمية $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ

أ > ١   ٠ < أ < ١



بعض خواص اللوغاريتمات:

اذا كان $\text{س}، \text{ص} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ن} \in \text{ح}$ مع مراعاة أن يكون الأساس $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$ فإن

① $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = 1$ ② $\text{لو}_{\text{أ}}\,1 = $ صفر

③ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

④ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

⑤ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

⑥ $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \dfrac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$

⑦ $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \dfrac{1}{\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص}}$

ملاحظة: العدد النيبيري (هـ) هو عدد غير نسبي ، ٢ < هـ < ٣

$$\text{هـ} = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots$$

$$= \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\text{ن}}} \quad \text{(متسلسلة تايلور)}$$

العدد هـ = ٢,٧١٨٢٨

الدالة ذات الأساس الطبيعي

$\text{د}: \text{ح} \longrightarrow \text{ح}^{+}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

دالة أسية أساسها هـ وهي دالة أحادية مجالها = ح ، مداها = ح^{+}

ومنحناها يمر بالنقطة (٠، ١) ، (١، هـ)

دالة اللوغاريتم الطبيعي

د : $ح^{+} \longrightarrow ح$ حيث د(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}\, س$

دالة لوغاريتمية أساسها هـ وهي

دالة أحادية مجالها = $ح^{+}$ ، مداها = ح

ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

بعض خواص دالة اللوغاريتم الطبيعي

اذا كان س ، ص $\in ح^{+}$ ، ن $\in$ ح مع مراعاة

أن يكون الأساس $\in ح^{+} - \{١\}$ فإن

① $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ} = ١$ ② $\text{لو}_{\text{هـ}}\, ١ =$ صفر

③ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, س^{ن} = ن\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, س$

④ $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} س} = س$

⑤ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, س ص = \text{لو}_{\text{هـ}}\, س + \text{لو}_{\text{هـ}}\, ص$

⑥ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \frac{س}{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, س - \text{لو}_{\text{هـ}}\, ص$

⑦ $\text{لو}_{ص}\, س = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\, س}{\text{لو}_{\text{هـ}}\, ص}$

⑧ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, س \times \text{لو}_{س}\, \text{هـ} = ١$

- أمثلة محلولة -

① أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

① لو (س − ٣) = ٢

- الحل -

∴ س − ٣ = $١٠^{٢}$ = ١٠٠ ∴ س = ١٠٣

∴ م.ح = {١٠٣}

② $\text{لو}_{\text{هـ}}\, س = ٤$

- الحل -

∴ س = $\text{هـ}^{٤}$ ∴ م.ح = $\{\text{هـ}^{٤}\}$

③ $٢\, \text{هـ}^{س} = ٢١$

- الحل -

∴ $\text{هـ}^{س} = \frac{٢١}{٢}$ ∴ $س = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \frac{٢١}{٢}$

∴ م.ح = $\{\text{لو}_{\text{هـ}}\, \frac{٢١}{٢}\}$

④ $\text{هـ}^{٥س+١} = ٢٠$

- الحل -

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ}^{٥س+١} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٠$

∴ $(٥س+١)\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٠$

∴ $٥س + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٠$ ∴ $س = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٠ - ١}{٥}$

∴ م.ح = $\{\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٠ - ١}{٥}\}$

⑤ $٧^{س} = ٢٥$

- الحل -

∴ $س = \text{لو}_{٧}\, ٢٥$ ∴ م.ح = $\{\text{لو}_{٧}\, ٢٥\}$

⑥ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٤^{٢س-١} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٥٠$

- الحل -

∴ $٤^{٢س-١} = ٥٠$ ∴ $٢س - ١ = \text{لو}_{٤}\, ٥٠$

∴ $س = \frac{\text{لو}_{٤}\, ٥٠ + ١}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{\text{لو}_{٤}\, ٥٠ + ١}{٢}\}$

⑦ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ}^{س} = ٣\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٣$

- الحل -

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ}^{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٣^{٣}$ ∴ $\text{هـ}^{س} = ٣^{٣} = ٢٧$

∴ $س = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٧$

∴ م.ح = $\{\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٧\}$

نهايات الدوال المرتبطة بالعدد ه

تعريف: يعرف العدد ه كنهاية من العلاقة

$$\text{ه} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$$

أو

$$\text{ه} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(1+\text{س}\right)^{\frac{1}{\text{س}}}$$

ملاحظات هامة: تحفظ جيداً

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{م س}} = \text{ه}^{\text{م}}$

② $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+\text{م}} = \text{ه}$

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{\text{م}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{ه}^{\text{م}}$

④ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ه}^{\text{س}} = 1$

⑤ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{لو}_{\text{م}}(1+\text{س})}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{م}}\,\text{ه}$

ومنها $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{لو}_{\text{ه}}(1+\text{س})}{\text{س}} = 1$

⑥ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{م}^{\text{س}}-1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{ه}}\,\text{م}$

ومنها $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ه}^{\text{س}}-1}{\text{س}} = 1$

أمثلة محلولة

① أوجد كل من النهايات الآتية

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{3\text{س}}$

- الحل -

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{3} = \text{ه}^{3}$

② $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{5}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$

- الحل -

بفرض أن $\text{ص} = \frac{5}{\text{س}}$ ومنها $\text{س} = \frac{5}{\text{ص}}$

وعندما $\text{س}\to\infty$ فإن $\text{ص}\to 0$

$\therefore \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \left(1+\text{ص}\right)^{\frac{5}{\text{ص}}}$

$= \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \left[\left(1+\text{ص}\right)^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{5} = \text{ه}^{5}$

③ $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{2}{\text{ن}}\right)^{3\text{ن}}$

- الحل -

بفرض أن $\text{م} = \frac{2}{\text{ن}}$ ومنها $\text{ن} = \frac{2}{\text{م}}$

وعندما $\text{ن}\to\infty$ فإن $\text{م}\to 0$

$\therefore \underset{\text{م}\to 0}{\text{نها}} \left(1+\text{م}\right)^{\frac{6}{\text{م}}}$

$= \underset{\text{م}\to 0}{\text{نها}} \left[\left(1+\text{م}\right)^{\frac{1}{\text{م}}}\right]^{6} = \text{ه}^{6}$

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+1}$

- الحل -

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)\right]$

$= \text{ه}^{1} \times 1 = \text{ه}$

⑤ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}+5}$

- الحل -

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{2} \times \left[1+\frac{1}{\text{س}}\right]^{5}$

$= \text{ه}^{2} \times 1^{5} = \text{ه}^{2}$

⑥ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(1+\frac{1}{\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

- الحل -

نفرض أن $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}+1}$ ومنها

$\text{س} = \frac{1}{\text{ص}} - 1$ وعندما $\text{س} \to \infty$

$\therefore \text{ص} \to$ صفر

$\therefore \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} (1+\text{ص})^{\frac{2}{\text{ص}}-2}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} \left[(1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{2} \div [1+\text{ص}]^{2}$

$= \text{هـ}^{2} \div 1^{2} = \text{هـ}^{2}$

⑦ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}}$

- الحل -

نفرض أن $\text{ص} = \frac{-1}{\text{س}}$ ومنها $\text{س} = \frac{-1}{\text{ص}}$

وعندما $\text{س} \to \infty$ فإن $\text{ص} \to 0$

$\therefore \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} (1+\text{ص})^{\frac{-2}{\text{ص}}}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} \left[(1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{-2} = \text{هـ}^{-2} = \frac{1}{\text{هـ}^{2}}$

⑧ $\displaystyle \text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}$

- الحل -

$\displaystyle \text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}} = \text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \left(\frac{\text{ن}+1-1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \left(1-\frac{1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}$

نفرض أن $\text{م} = \frac{-1}{\text{ن}+1}$ ومنها

$\text{ن} = \left(-\frac{1}{\text{م}} - 1\right)$

وعندما $\text{ن} \to \infty$ فإن $\text{م} \to$ صفر

$\therefore \displaystyle \text{نها}_{\text{م}\to 0} (1+\text{م})^{-\frac{1}{\text{م}}-1}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{م}\to 0} \left[(1+\text{م})^{\frac{1}{\text{م}}}\right]^{-1} \times (1+\text{م})^{-1}$

$= \text{هـ}^{-1} \times 1^{-1} = \frac{1}{\text{هـ}}$

⑨ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

- الحل -

$\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4} = \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{\text{س}+3+4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(1+\frac{4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

نفرض أن $\text{ص} = \frac{4}{\text{س}+3}$ ومنها

$\text{س} = \frac{4}{\text{ص}} - 3$ وعندما $\text{س} \to \infty$

$\therefore \text{ص} \to$ صفر

$\therefore \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} (1+\text{ص})^{\frac{4}{\text{ص}}+1}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{ص}\to 0} \left[(1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{4} \times (1+\text{ص})^{1}$

$= \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

⑩ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{2\text{س}-1}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

- الحل -

$\displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{2\text{س}-1}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{2\text{س}+1-2}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

$= \displaystyle \text{نها}_{\text{س}\to\infty} \left(1-\frac{2}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

بفرض أن $\text{ص} = \frac{-٢}{\text{س}+١}$

ومنها $\text{س} = \frac{-٢}{\text{ص}} - ١$

وعندما $\text{س} \leftarrow \infty$ فإن $\text{ص} \leftarrow ٠$

$\therefore \lim\limits_{\text{ص} \leftarrow ٠} (١+\text{ص})^{\frac{-٢}{\text{ص}}-١}$

$= \lim\limits_{\text{ص} \leftarrow ٠} \left[\left((١+\text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}\right)^{-٢} \times (١+\text{ص})^{-١} \right]$

$= \text{هـ}^{-٢} \times ١^{-١} = \frac{١}{\text{هـ}^{٢}}$

⑪ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ١}{\text{س}}$

- الحل -

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ١}{\text{س}} = ٣ \lim\limits_{٣\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ١}{٣\text{س}}$

$= ٣ \times ١ = ٣$

⑫ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{٥\text{س}}$

- الحل -

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{٥\text{س}} = \frac{٤}{٥} \lim\limits_{٤\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{٤\text{س}}$

$= \frac{٤}{٥} \times ١ = \frac{٤}{٥}$

⑬ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} - ١}{\text{س}}$

- الحل -

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} - ١}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}}$

$= ١ + ١ = ٢$

⑭ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} - ١}{\text{جاس}}$

- الحل -

بفرض أن $\text{ص} = \text{جاس}$

وعندما $\text{س} \leftarrow ٠ \quad \therefore \text{ص} \leftarrow ٠$

$\therefore \lim\limits_{\text{ص} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} - ١}{\text{ص}} = ١$

⑮ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{٣^{\text{س}} - ١}{\text{س}}$

- الحل -

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{٣^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

⑯ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}$

- الحل -

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}}$

$= \frac{٢}{١} = ٢$

⑰ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}} - ١}{\text{س}}$

- الحل -

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}} - ١}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}} - ١}{\text{ظاس}} \times \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$

بجعل ص = ظاس في النهاية الأولى

$\therefore \lim\limits_{\text{ص} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} - ١}{\text{ص}} \times \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١ \times ١ = ١$

(١٨) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٥^{س}-١}{٣^{س}-١}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{٥^{س}-١}{٣^{س}-١} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\frac{٥^{س}-١}{س}}{\frac{٣^{س}-١}{س}}$$

$$= \frac{\text{لو}_{ه}٥}{\text{لو}_{ه}٣} = \text{لو}_{٣}\,٥$$

(١٩) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{٥^{س}-١}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{٥^{س}-١} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\frac{\text{جا}٥س}{س}}{\frac{٥^{س}-١}{س}}$$

$$= \frac{٥}{\text{لو}_{ه}٥} = ٥\,\text{لو}_{٥}\,ه$$

(٢٠) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{س}-١}{ب^{س}-١}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{س}-١}{ب^{س}-١} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\frac{أ^{س}-١}{س}}{\frac{ب^{س}-١}{س}}$$

$$= \frac{\text{لو}_{ه}أ}{\text{لو}_{ه}ب} = \text{لو}_{ب}\,أ$$

(٢١) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{\text{جا}س}-١}{ب^{\text{جا}س}-١}$

- الحل -

بوضع $ص = \text{جا}س$

$$\therefore \text{نها}_{ص\to ٠} \frac{أ^{ص}-١}{ب^{ص}-١} = \text{نها}_{ص\to ٠} \frac{\frac{أ^{ص}-١}{ص}}{\frac{ب^{ص}-١}{ص}}$$

$$= \frac{\text{لو}_{ه}أ}{\text{لو}_{ه}ب} = \text{لو}_{ب}\,أ$$

(٢٢) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{ه^{-س}-١}{س}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{ه^{-س}-١}{س} = -\,\text{نها}_{س\to ٠} \frac{ه^{-س}-١}{-س} = -١$$

(٢٣) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٢س)}{س}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٢س)}{س} = ٢\,\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٢س)}{٢س}$$

$$= ٢ \times ١ = ٢$$

(٢٤) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٣س^{٢})}{٢س^{٢}} = \frac{٣}{٢}\,\text{نها}_{س^{٢}\to ٠} \frac{\text{لو}_{ه}(١+٣س^{٢})}{٣س^{٢}}$$

$$= \frac{٣}{٢} \times ١ = \frac{٣}{٢}$$

(٢٥) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{٢س}-١}{س}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{٢س}-١}{س} = ٢\,\text{نها}_{س\to ٠} \frac{أ^{٢س}-١}{٢س}$$

$$= ٢ \times \text{لو}_{ه}أ = ٢\,\text{لو}_{ه}أ$$

(٢٦) $\displaystyle \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}(١+٢س)}{٥^{س}-١}$

- الحل -

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{لو}(١+٢س)}{٥^{س}-١} \times \frac{س}{س}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{لو}(1+2\text{س})}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{5^{\text{س}}-1}$$

$$= 2\ \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{لو}(1+2\text{س})}{2\text{س}} \times \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{5^{\text{س}}-1}$$

$$= 2 \times \text{لو هـ} \times \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} 5} = 2\ \text{لو هـ}\ \text{لو}_{5}$$

(27) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{2+\text{س}} - \text{هـ}^{2}}{\text{س}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{2+\text{س}} - \text{هـ}^{2}}{\text{س}} = \text{هـ}^{2}\ \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$$

$$= \text{هـ}^{2} \times 1 = \text{هـ}^{2}$$

(28) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - \text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{س}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - \text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}} - 1)}{\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \text{هـ}^{3\text{س}} \times \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$$

$$= \text{هـ}^{3\times 0} \times 1 = 1$$

(29) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{م}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}}}{\text{س}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{م}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}}}{\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ب}^{\text{س}}\left((\frac{\text{م}}{\text{ب}})^{\text{س}} - 1\right)}{\text{س}}$$

$$= \text{ب}^{\text{صفر}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{م}}{\text{ب}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{م}}{\text{ب}}$$

(30) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{م}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}}}{\text{جاس}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{م}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}}}{\text{جاس}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{م}^{\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ب}^{\text{س}}\left((\frac{\text{م}}{\text{ب}})^{\text{س}} - 1\right)}{\text{س}} \times \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$$

$$= \text{ب}^{\text{صفر}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{م}}{\text{ب}} \times 1 = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{م}}{\text{ب}}$$

(31) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(10)^{\text{جاس}} - 1}{\text{ظاس}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{10^{\text{جاس}} - 1}{\text{ظاس}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{10^{\text{جاس}} - 1}{\frac{\text{جاس}}{\text{حتاس}}}$$

$$= \text{نها}_{\text{جاس}\to 0} \frac{10^{\text{جاس}} - 1}{\text{جاس}} \times \text{نها}_{\text{س}\to 0} \text{حتاس}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} 10 \times 1 = \text{لو}_{\text{هـ}} 10$$

(32) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{3^{2+\text{س}} - 9}{\text{س}}$

- الحل -

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{3^{2+\text{س}} - 9}{\text{س}} = 9\ \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(3^{\text{س}} - 1)}{\text{س}}$$

$$= 9 \times \text{لو}_{\text{هـ}} 3 = 9\ \text{لو}_{\text{هـ}} 3$$

(33) $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{2^{\text{س}} - 1}{\sqrt{1+\text{س}} - 1}$

- الحل -

بالضرب × مرافق المقام

$$\therefore \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{2^{\text{س}} - 1}{\sqrt{1+\text{س}} - 1} \times \frac{\sqrt{1+\text{س}} + 1}{\sqrt{1+\text{س}} + 1}$$

$$\therefore \lim_{س \to 0} \left(\frac{2^{س}-1}{س} \times \sqrt{1+س}+1 \right)$$

$$= لو_{هـ} 2 \times 2 = 2 \, لو_{هـ} 2$$

(34) $\lim_{س \to 0} \dfrac{م^{س} + ب^{س} + جـ^{س} - 3}{س}$

-الحل-

$$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{م^{س}-1}{س} + \frac{ب^{س}-1}{س} + \frac{جـ^{س}-1}{س} \right)$$

$$= لو_{هـ} م + لو_{هـ} ب + لو_{هـ} جـ = لو_{هـ} م ب جـ$$

(2) اثبت أن:

$$\lim_{ن \to \infty} ن \left[لو_{هـ}(ن+1) - لو_{هـ} ن \right] = 1$$

-الحل-

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} ن \left[لو_{هـ}(ن+1) - لو_{هـ} ن \right]$$

$$= \lim_{ن \to \infty} ن \, لو_{هـ} \frac{ن+1}{ن}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} ن \, لو_{هـ} \left(1 + \frac{1}{ن}\right)$$

ونفرض أن $م = \frac{1}{ن}$ ومنها $ن = \frac{1}{م}$

وعندما $ن \to \infty$ فإن $م \to 0$

$$\therefore \lim_{م \to 0} \frac{1}{م} لو_{هـ}(1+م)$$

$$= \lim_{م \to 0} \frac{لو_{هـ}(1+م)}{م} = 1$$

(3) أوجد كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{س \to 1} \dfrac{لو س}{س-1}$

-الحل-

نفرض أن $ص = س - 1$ ومنها

$س = ص + 1$ وعندما $س \to 1$ $\therefore ص \to 0$

$$\therefore \lim_{ص \to 0} \frac{لو(ص+1)}{ص} = لو \, هـ$$

(2) $\lim_{س \to 0} \left(1 + 3 ظا^2 س\right)^{ظتا^2 س}$

-الحل-

نفرض أن $ص = ظتا^2 س$ $\therefore ظا^2 س = \frac{1}{ص}$

وعندما $س \to 0$ فإن $ص \to \infty$

$$\therefore \lim_{س \to 0} \left(1 + 3 ظا^2 س\right)^{ظتا^2 س} = \lim_{ص \to \infty} \left(1 + \frac{3}{ص}\right)^{ص}$$

$$= هـ^3$$

صابر عبد الرحيم محمود

(3) $\lim_{س \to 6} \dfrac{هـ^{س} - هـ^{6}}{س - 6}$

-الحل-

نفرض أن $ص = س - 6$ ومنها

$س = ص + 6$ وعندما $س \to 6$

$\therefore ص \to$ صفر

$$\therefore \lim_{ص \to 0} \frac{هـ^{ص+6} - هـ^{6}}{ص} = \lim_{ص \to 0} هـ^{6} \times \frac{هـ^{ص} - 1}{ص}$$

$$= هـ^6 \times 1 = هـ^6$$

(4) $\lim_{س \to 0} \dfrac{هـ^{جتا س} - 1}{جتا س}$

-الحل-

$$\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جتا س} - 1}{جتا س} = \frac{هـ - 1}{1} = هـ - 1$$

(5) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{هـ^{جتا س} - 1}{\frac{\pi}{2} - س}$

-الحل-

نفرض أن $ص = \frac{\pi}{2} - س$ ومنها

$س = \frac{\pi}{2} - ص$ $\therefore جتا س = جا ص$

وعندما $س \to \frac{\pi}{2}$ $\therefore ص \to$ صفر

$$\therefore \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاص}}-1}{\text{ص}} = \underset{\text{جاص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاص}}-1}{\text{جاص}} \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

⑥ $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-\text{هـ}^{\text{جاس}}}{\text{س}-\text{جاس}}$$

- الحل -

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}}\left(\text{هـ}^{\text{س}-\text{جاس}}-1\right)}{\text{س}-\text{جاس}}$$

ولنفرض أن ص = س − جاس

وعندما س ← ٠ فإن ص ← ٠

$$\therefore \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}-1}{\text{ص}}$$

$$= \text{هـ}^{0} \times 1 = 1$$

⑦ $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}\left(\text{هـ}^{\text{س}}-1\right)}{1-\text{جتا}2\text{س}}$$

- الحل -

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}\left(\text{هـ}^{\text{س}}-1\right)}{2\,\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}\left(\text{هـ}^{\text{س}}-1\right)}{\text{س}^2} \times \frac{\text{س}^2}{2\,\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-1}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^2}{2\,\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

⑧ $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}}$$

- الحل -

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-1}{\sqrt{2\,\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-1}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\sqrt{2}\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}} = 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

⑨ $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{أب})^{\text{س}}-\text{أ}^{\text{س}}-\text{ب}^{\text{س}}+1}{\text{س}^2}$$

- الحل -

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{أ}^{\text{س}}\left(\text{ب}^{\text{س}}-1\right)-\left(\text{ب}^{\text{س}}-1\right)}{\text{س}^2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\left(\text{ب}^{\text{س}}-1\right)\left(\text{أ}^{\text{س}}-1\right)}{\text{س}^2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ب}^{\text{س}}-1}{\text{س}} \times \frac{\text{أ}^{\text{س}}-1}{\text{س}}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$$

⑩ $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(10)^{\text{س}}-2^{\text{س}}-5^{\text{س}}+1}{\text{س}\,\text{جاس}}$$

- الحل -

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{2^{\text{س}}\left(5^{\text{س}}-1\right)-\left(5^{\text{س}}-1\right)}{\text{س}\,\text{جاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\left(5^{\text{س}}-1\right)\left(2^{\text{س}}-1\right)}{\text{س}\,\text{جاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{5^{\text{س}}-1}{\text{س}} \times \frac{2^{\text{س}}-1}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}5 \times \text{لو}_{\text{هـ}}2 \times 1 = \text{لو}_{\text{هـ}}5\ \text{لو}_{\text{هـ}}2$$

⑪ $$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{3^{\text{س}}-9}{2^{\text{س}}-4}$$

- الحل -

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{3^2\left(3^{\text{س}-2}-1\right)}{2^2\left(2^{\text{س}-2}-1\right)}$$

لنفرض أن ص = س − ٢ ومنها س = ص + ٢

وعندما س ← ٢ ← ص ← صفر

$$\therefore \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{9}{4} \times \frac{3^{\text{ص}}-1}{2^{\text{ص}}-1} = \frac{9}{4} \times \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\frac{3^{\text{ص}}-1}{\text{ص}}}{\frac{2^{\text{ص}}-1}{\text{ص}}}$$

$$= \frac{9}{4} \times \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}3}{\text{لو}_{\text{هـ}}2} = \frac{9}{4}\ \text{لو}_{2}3$$

- تمارين عامة -

① أوجد كل من النهايات الآتية :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{5}س}$

② $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{م س}$

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{4}{س}\right)^{س+3}$

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{2س+5}{2س+1}\right)^{س+2}$

⑤ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{س} - \text{جا}س - 1}{س}$

⑥ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{ظا}س} - 1}{\text{ظا}س}$

⑦ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{2^{\text{جا}س} - 1}{\text{جا}س}$

⑧ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+2س)}{2س}$

⑨ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{م^{س} - م^{-س}}{س}$

⑩ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{2^{س} - 2^{3س}}{س}$

⑪ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(1 + 4\,\text{جا}^2 س\right)^{\text{قتا}^2 س}$

⑫ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{ب س} - \text{هـ}^{م س}}{س}$

⑬ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{2^{س} - 1}{3س}$

② اثبت أن

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(1 + \frac{س}{م}\right)^{\frac{م}{س}} = \text{هـ}$$

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

•• مشتقة الدالة الأسية:

① إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

② إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}$

وبصفة عامة: إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن

① $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{ع}}) = \text{هـ}^{\text{ع}} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

② $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{أ}^{\text{ع}}) = \text{أ}^{\text{ع}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

•• مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

① إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$

② إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{س}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{هـ}$

وبصفة عامة: إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن

① $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{ع}) = \frac{1}{\text{ع}} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

② $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{أ}}\, \text{ع}) = \frac{1}{\text{ع}}\, \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{هـ} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

ملاحظات:

① ميل المماس للمنحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ عند أي نقطة عليه هو نفسه قيمة الإحداثي الصادي لهذه النقطة

② ميل المماس للمنحنى $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}$ عند أي نقطة عليه هو مقلوب قيمة الإحداثي السيني لهذه النقطة

③ $\because \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| = \begin{cases} \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} & \text{س} > 0 \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\, -\text{س} & \text{س} < 0 \end{cases}$

فإن

عندما س > ٠ فإن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} = \frac{1}{\text{س}}$

عندما س < ٠ فإن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\, \text{لو}_{\text{هـ}} -\text{س} = \frac{1}{-\text{س}} \times -1$

$= \frac{1}{\text{س}}$

أي أن

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|] = \frac{1}{\text{س}}$ لكل $\text{س} \neq 0$

وبصفة عامة: إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}|] = \frac{\text{ء}}{\text{ءع}}[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}|] \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= \frac{1}{\text{ع}} \times \text{ع}' = \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$

- أمثلة محلولة -

① أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(1) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{هـ}^{٣\text{س}} \times ٣ = ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}$

(2) $\text{ص} = ٧\,\text{هـ}^{\text{س}+٤}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٧\,\text{هـ}^{\text{س}+٤} \times ١ = ٧\,\text{هـ}^{\text{س}+٤}$

(3) $\text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٣-٦\text{س}-\text{س}^٢}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٣-٦\text{س}-\text{س}^٢} \times (-٦-٢\text{س})$

$= (-٣-\text{س}) \times \text{هـ}^{٣-٦\text{س}-\text{س}^٢}$

(4) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}^٥}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{هـ}^{٣\text{س}^٥} \times ١٥\,\text{س}^٤ = ١٥\,\text{س}^٤\,\text{هـ}^{٣\text{س}^٥}$

(5) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢-\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}^٢-\text{س}} \times (٢\text{س}-١)$

$= (٢\text{س}-١)\,\text{هـ}^{\text{س}^٢-\text{س}}$

(6) $\text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٥\text{هـ}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

(7) $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{س}+١)^٢}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{هـ}^{(\text{س}+١)^٢} \times ٢(\text{س}+١)$

$\text{ص}' = ٢(\text{س}+١)\,\text{هـ}^{(\text{س}+١)^٢}$

(8) $\text{ص} = \text{س}^٢\,\text{هـ}^{-٣}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٢\,\text{هـ}^{-٣}\,\text{س}$

(9) $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٢\text{س} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}}$

(10) $\text{ص} = ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}\,٢\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{جا}\,٢\text{س}$

(11) $\text{ص} = ٢\text{س} + \text{هـ}^{٦\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٢ + ٦\,\text{هـ}^{٦\text{س}}$

(12) $\text{ص} = \text{هـ}^{٥} + \text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{هـ}^{٥\text{س}^٢}$

- الحل -

$\text{ص}' = \text{صفر} + ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}} + ١٠\text{س}\,\text{هـ}^{٥\text{س}^٢}$

$= ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}} + ١٠\text{س}\,\text{هـ}^{٥\text{س}^٢}$

(13) $\text{ص} = ٣^{\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٣^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$

(14) $\text{ص} = ٥ \times ٦^{\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٥ \times ٦^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٦$

(15) $\text{ص} = ٥^{\text{س}^٣+٢\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٥^{\text{س}^٣+٢\text{س}} \times (٣\text{س}^٢+٢)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٥$

(١٦) $ص = ٧^{س} + س^{٧}$

- الحل -

$ص' = ٧^{س} لو_{هـ} ٧ + ٧ س^{٦}$

(١٧) $ص = ٣^{(٣س^{٢} - ٥س + ٢)}$

- الحل -

$ص' = ٣^{٣س^{٢} - ٥س + ٢} \times (٦س - ٥) لو_{هـ} ٣$

(١٨) $ص = ٣ هـ^{قاس}$

- الحل -

$ص' = ٣ هـ^{قاس} \times قاس ظاس$

(١٩) $ص = هـ^{\sqrt{س}}$

- الحل -

$ص' = هـ^{\sqrt{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{٢\sqrt{س}}$

(٢٠) $ص = (٣^{س-١})^{-٢}$

- الحل -

$\therefore ص = ٣^{-٢س+٢}$

$\therefore ص' = ٣^{-٢س+٢} \times (-٢) لو_{هـ} ٣$

$= -٢ \times ٣^{-٢س+٢} لو_{هـ} ٣$

(٢١) $ص = هـ^{جا\sqrt{س}}$

- الحل -

$ص' = هـ^{جا\sqrt{س}} \times جتا\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$= \frac{جتا\sqrt{س}}{٢\sqrt{س}} \times هـ^{جا\sqrt{س}}$

(٢٢) $ص = س هـ^{س^{٢}}$

- الحل -

$ص' = هـ^{س^{٢}} + ٢س^{٢} هـ^{س^{٢}}$

$= هـ^{س^{٢}} (١ + ٢س^{٢})$

(٢٣) $ص = س^{٢} هـ^{س}$

- الحل -

$ص' = ٢س هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س}$

$= س هـ^{س} (٢ + س)$

(٢٤) $ص = ٢س^{٤} هـ^{١+س}$

- الحل -

$ص' = ٨س^{٣} هـ^{١+س} + ٢س^{٤} هـ^{١+س}$

$= ٢س^{٣} هـ^{١+س} (٤ + س)$

(٢٥) $ص = هـ^{س} جاس$

- الحل -

$ص' = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس$

$= هـ^{س} (جاس + جتاس)$

(٢٦) $ص = هـ^{س^{٢}} قا٣س$

- الحل -

$ص' = ٢س هـ^{س^{٢}} قا٣س + هـ^{س^{٢}} قا٣س \times ظا٣س \times ٣$

$= هـ^{س^{٢}} قا٣س (٢س + ٣ ظا٣س)$

(٢٧) $ص = س \times ٥^{س}$

- الحل -

$ص' = ٥^{س} + س \times ٥^{س} لو_{هـ} ٥$

$= ٥^{س} (١ + س لو_{هـ} ٥)$

(٢٨) $ص = (س^٢ + \sqrt{س}) \times ٣^س$

- الحل -

$ص' = (٢س + \frac{١}{٢\sqrt{س}}) \times ٣^س +$

$(س^٢ + \sqrt{س}) \times ٣^س لو_هـ ٣$

(٢٩) $ص = ٢^س (س+١)$

- الحل -

$ص' = ٢^س (س+١) لو_هـ ٢ + ٢^س \times ١$

$ص' = ٢^س (س لو_هـ ٢ + لو_هـ ٢ + ١)$

(٣٠) $ص = هـ^{جاس} \times ٢^{-٥س}$

- الحل -

$ص' = هـ^{جاس} \times حتاس \times ٢^{-٥س}$

$+ هـ^{جاس} \times ٢^{-٥س} \times -٥ لو_هـ ٢$

$= هـ^{جاس} \times ٢^{-٥س} (حتاس - ٥ لو_هـ ٢)$

(٣١) $ص = هـ^{ظاس} \times ٥^{٧س^٢}$

- الحل -

$ص' = هـ^{ظاس} \times قا^٢س \times ٥^{٧س^٢} + هـ^{ظاس}$

$\times ٥^{٧س^٢} \times ١٤س \times لو_هـ ٥$

$= هـ^{ظاس} \times ٥^{٧س^٢} (قا^٢س + ١٤س لو_هـ ٥)$

(٣١) $ص = هـ^{٢س} م^{س^٢-٥}$

- الحل -

$ص' = هـ^{٢س} \times ٢ \times م^{س^٢-٥} + هـ^{٢س} \times$

$م^{س^٢-٥} \times ٢س \times لو_هـ م$

$= ٢هـ^{٢س} \times م^{س^٢-٥} (١ + س لو_هـ م)$

(٣٢) $ص = \frac{٢هـ^س}{س+١}$

- الحل -

$ص' = \frac{٢هـ^س (س+١) - ١ \times ٢هـ^س}{(س+١)^٢}$

$\therefore ص' = \frac{٢س هـ^س}{(س+١)^٢}$

(٣٣) $ص = \frac{هـ^س}{ظاس}$

- الحل -

$ص' = \frac{هـ^س \times ظاس - قا^٢س \times هـ^س}{ظا^٢س}$

$\therefore ص' = \frac{هـ^س (ظاس - قا^٢س)}{ظا^٢س}$

(٣٤) $ص = \frac{هـ^{-٢س}}{\sqrt{س+١}}$

- الحل -

$ص' = \frac{-٢هـ^{-٢س} \times \sqrt{س+١} - هـ^{-٢س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}}{(\sqrt{س+١})^٢}$

$\therefore ص' = \frac{-٤(س+١) هـ^{-٢س} - هـ^{-٢س}}{٢(س+١)\sqrt{س+١}}$

(٣٥) $ص = \frac{هـ^س}{هـ^س+١}$

- الحل -

$ص' = \frac{هـ^س(هـ^س+١) - هـ^س \times هـ^س}{(هـ^س+١)^٢}$

$\therefore ص' = \frac{هـ^س}{(هـ^س+١)^٢}$

(٣٦) $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{هـ}^{\text{-٢س}}\right)^{٥}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٥\left(\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{هـ}^{\text{-٢س}}\right)^{٤} \times \left(٣\text{هـ}^{\text{٣س}} + ٢\text{هـ}^{\text{-٢س}}\right)$

(٣٧) $\text{ص} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٥ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٥}{\text{س}}$

(٣٨) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{٧س}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{\text{٧س}} \times ٧ = \frac{١}{\text{س}}$

(٣٩) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٢س} - ٧)$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{\text{٢س} - ٧} \times ٢ = \frac{٢}{\text{٢س} - ٧}$

(٤٠) $\text{ص} = \text{٣س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٣ + \frac{١}{\text{س}}$

(٤١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\right)$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{\text{س} + ١}{\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}}$

(٤٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٩}$

- الحل -

$\therefore \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٩)^{-١} = -\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} + ٩$

$\therefore \text{ص}' = \frac{-\text{٢س}}{\text{س}^{٢} + ٩}$

(٤٣) $\text{ص} = \text{لو}_{٣}\,\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{٣}\,\text{هـ}$

(٤٤) $\text{ص} = \text{لو}_{٥}(\text{٣س} - ٢)$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{١}{\text{٣س} - ٢} \times ٣ \times \text{لو}_{٥}\,\text{هـ}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{٣}{\text{٣س} - ٢} \times \text{لو}_{٥}\,\text{هـ}$

(٤٥) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{٣س}} - ٥\,\text{لو}_{٢}\frac{\text{س}}{٥}$

- الحل -

$\text{ص}' = ٦\text{هـ}^{\text{٣س}} - \frac{٥ \times \frac{١}{٥}}{\frac{\text{س}}{٥}} \times \text{لو}_{٢}\,\text{هـ}$

$\therefore \text{ص}' = ٦\text{هـ}^{\text{٣س}} - \frac{٥\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}}{\text{س}}$

(٤٦) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} - \text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

(٤٧) $\text{ص} = \text{لو}(\text{٢س} - ٣)^{٢}$

- الحل -

$\text{ص}' = \frac{٢ \times (\text{٢س} - ٣) \times ٢}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠$

$\therefore \text{ص}' = \frac{٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠}{\text{٢س} - ٣}$

(٤٨) $\text{ص} = ٣\,\text{جتا}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{-س}} - \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

- الحل -

$\text{ص}' = -٣\,\text{جا}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{-س}} - \frac{١}{\text{٢س}}$

(٤٩) $ص = ٣^{س} + ٣ \text{لو}_{هـ} س - ٢٫١٦$

- الحل -

$ص' = ٣^{س} \text{لو}_{هـ} ٣ + \frac{٣}{س}$

(٥٠) $ص = \text{لو}_{هـ} \frac{س^{٢}}{س+٧}$

- الحل -

$\therefore ص = \text{لو}_{هـ} س^{٢} - \text{لو}_{هـ} (س+٧)$

$\therefore ص' = \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{١}{س+٧}$

$\therefore ص' = \frac{٢}{س} - \frac{١}{س+٧}$

(٥١) $ص = \text{لو} \left(\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}\right)$

- الحل -

$\therefore ص = \text{لو}\ هـ^{س^{٢}} - \text{لو}\ س^{٢}$

$\therefore ص' = \frac{هـ^{س^{٢}} \times ٢س}{هـ^{س^{٢}}} \text{لوهـ} - \frac{٢س}{س^{٢}} \text{لوهـ}$

$= \left(٢س - \frac{٢}{س}\right) \text{لوهـ}$

(٥٢) $ص = س \text{لو}_{هـ} س$

- الحل -

$ص' = ١ \times \text{لو}_{هـ} س + س \times \frac{١}{س}$

$\therefore ص' = \text{لو}_{هـ} س + ١$

(٥٣) $ص = س^{٢} \text{لو}_{هـ} س$

- الحل -

$ص' = ٢س \text{لو}_{هـ} س + س^{٢} \times \frac{١}{س}$

$\therefore ص' = ٢س \text{لو}_{هـ} س + س$

(٥٤) $ص = (٢س^{٥} - ٣) \text{لو}_{هـ} س$

- الحل -

$ص' = ١٠س^{٤} \text{لو}_{هـ} س + (٢س^{٥} - ٣) \times \frac{١}{س}$

$\therefore ص' = ١٠س^{٤} \text{لو}_{هـ} س + ٢س^{٤} - \frac{٣}{س}$

(٥٥) $ص = ٢س^{٢} \text{لو}_{هـ} س^{٣}$

- الحل -

$ص' = ٤س \text{لو}_{هـ} س^{٣} + ٢س^{٢} \times \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}}$

$\therefore ص' = ٤س \text{لو}_{هـ} س^{٣} + ٦س$

(٥٦) $ص = هـ^{س} \text{لو}_{هـ} (س^{٢}+١)$

- الحل -

$ص' = هـ^{س} \text{لو}_{هـ} (س^{٢}+١) + هـ^{س} \times \frac{٢س}{س^{٢}+١}$

$\therefore ص' = هـ^{س} \left(\text{لو}_{هـ} (س^{٢}+١) + \frac{٢س}{س^{٢}+١}\right)$

(٥٧) $ص = \frac{س}{\text{لو}_{هـ} س}$

- الحل -

$ص' = \frac{١ \times \text{لو}_{هـ} س - س \times \frac{١}{س}}{(\text{لو}_{هـ} س)^{٢}}$

$\therefore ص' = \frac{\text{لو}_{هـ} س - ١}{(\text{لو}_{هـ} س)^{٢}}$

(٥٨) $ص = \frac{هـ^{٣س}}{\text{لو}\ س}$

- الحل -

$ص' = \frac{٣هـ^{٣س} \text{لو}\ س - \frac{١}{س} \times هـ^{٣س} \text{لوهـ}}{(\text{لو}\ س)^{٢}}$

$\therefore ص' = \frac{هـ^{٣س} (٣ \text{لو}\ س - \frac{١}{س} \text{لوهـ})}{(\text{لو}\ س)^{٢}}$

(59) $ص = \frac{(لو_{هـ} س) - 1}{(لو_{هـ} س) + 1}$

الحل

$ص' = \frac{\frac{1}{س} \times (لو_{هـ} س + 1) - \frac{1}{س}(لو_{هـ} س - 1)}{(لو_{هـ} س + 1)^2}$

$\therefore ص' = \frac{2}{س(لو_{هـ} س + 1)^2}$

(60) $ص = \frac{1 - 2\, لو_{هـ} س}{لو_{هـ} س}$

الحل

$ص' = \frac{\frac{-2}{س} \times لو_{هـ} س - \frac{1}{س}(1 - 2\, لو_{هـ} س)}{(لو_{هـ} س)^2}$

$\therefore ص' = \frac{\frac{1}{س}\left[-2\, لو_{هـ} س - 1 + 2\, لو_{هـ} س\right]}{(لو_{هـ} س)^2}$

$\therefore ص' = \frac{-1}{س(لو_{هـ} س)^2}$

(2) أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ لكل مما يأتي:

(1) $س = هـ^{2ن}$ ، $ص = ن^3$

الحل

$\because س = هـ^{2ن} \quad \therefore \frac{دس}{دن} = 2هـ^{2ن}$

$\because ص = ن^3 \quad \therefore \frac{دص}{دن} = 3ن^2$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{3ن^2}{2هـ^{2ن}}$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{6ن \times 2هـ^{2ن} - 4هـ^{2ن} \times 3ن^2}{4هـ^{4ن}} \times \frac{دن}{دس}$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{12ن\, هـ^{2ن}(1-ن)}{4هـ^{4ن}} \times \frac{1}{2هـ^{2ن}}$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{3}{2}\, ن\, هـ^{-4ن}(1-ن)$

(2) $س = 6\, لو_{هـ} ن$ ، $ص = ن^2$

الحل

$\because س = 6\, لو_{هـ} ن \quad \therefore \frac{دس}{دن} = \frac{6}{ن}$

$\because ص = ن^2 \quad \therefore \frac{دص}{دن} = 2ن$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = 2ن \div \frac{6}{ن}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = 2ن \times \frac{ن}{6} = \frac{1}{3} ن^2$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{2}{3} ن \times \frac{دن}{دس} = \frac{2}{3} ن \times \frac{ن}{6}$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{1}{9} ن^2$

(3) أوجد $\frac{د^3ص}{دس^3}$ لكل مما يأتي:

(1) $ص = لو_{هـ} س$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} = س^{-1} \quad \therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = -س^{-2}$

$\therefore \frac{د^3ص}{دس^3} = 2س^{-3} = \frac{2}{س^3}$

(2) $ص = س^3 + هـ^{2س}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = 3س^2 + 2هـ^{2س}$ ، $\frac{د^2ص}{دس^2} = 6س + 4هـ^{2س}$

، $\frac{د^3ص}{دس^3} = 6 + 8هـ^{2س}$

④ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة:

① $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}$ عند $\text{س} = \frac{١}{٤}$

-الحل-

$\text{ص}' = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = \frac{١}{٤}$

$= ١ - ٢\text{هـ}^{\frac{١}{٤}}$

② $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ عند $\text{س} = ٢$

-الحل-

$\text{ص}' = ٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = ٢$

$= ٤ - \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢}$

③ $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$ عند $(١ ، \frac{١}{\text{هـ}})$

-الحل-

$\text{ص}' = ١ \times \text{هـ}^{-\text{س}} - \text{س} \times \text{هـ}^{-\text{س}}$

∴ $\text{ص}' = \text{هـ}^{-\text{س}} - \text{س} \times \text{هـ}^{-\text{س}}$

$= \text{هـ}^{-\text{س}}(١ - \text{س})$

∴ ميل المماس عند $(١ ، \frac{١}{\text{هـ}})$

$= \text{هـ}^{-١}(١ - ١) = \text{صفر}$

④ $\text{ص} = \text{لو}_٢\,٥\text{س}$ عند $\text{س} = ٢$

-الحل-

$\text{ص}' = \frac{١}{٥\text{س}} \times ٥\,\text{لو}_٢\,\text{هـ} = \frac{\text{لو}_٢\,\text{هـ}}{\text{س}}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = ٢$

$= \frac{\text{لو}_٢\,\text{هـ}}{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}_٢\,\text{هـ}$

⑤ $\text{ص} = ٤\,\text{لو}(٣\text{س} + ١)$ عند $\text{س} = ١$

-الحل-

$\text{ص}' = ٤ \times \frac{١}{٣\text{س}+١} \times ٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ $\text{ص}' = \frac{١٢}{٣\text{س}+١}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = ١$

$= \frac{١٢}{٤}\,\text{لو}\,\text{هـ} = ٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

⑥ $\text{ص} = \text{لو}_٢(٢\text{س}^٢ - ٣)^٤$ عند $\text{س} = ١$

-الحل-

∴ $\text{ص} = ٤\,\text{لو}_٢(٢\text{س}^٢ - ٣)$

∴ $\text{ص}' = ٤ \times \frac{١}{٢\text{س}^٢ - ٣} \times ٤\text{س}\,\text{لو}_٢\,\text{هـ}$

∴ $\text{ص}' = \frac{١٦\text{س}}{٢\text{س}^٢ - ٣}\,\text{لو}_٢\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = ١$

$= -١٦\,\text{لو}_٢\,\text{هـ}$

⑦ $\text{ص} = ٣(\text{لو}\,\text{س})^٢$ عند $\text{س} = ٣$

-الحل-

$\text{ص}' = ٦(\text{لو}\,\text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ $\text{ص}' = \frac{٦}{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{س}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = ٣$

$= ٢\,\text{لو}\,٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

⑤ أوجد قيم س التي تكون عندها المماس للمنحنى يوازي محور السينات حيث $س > صفر$

① $ص = س^{3} لو_{هـ} س$

- الحل -

$\therefore ص' = 3 س^{2} لو_{هـ} س + س^{3} \times \frac{1}{س}$

$\therefore ص' = 3 س^{2} لو_{هـ} س + س^{2}$

$= س^{2} (3 لو_{هـ} س + 1)$

$\because$ المماس // محور السينات

$\therefore ص' = صفر$

$\therefore س^{2} (3 لو_{هـ} س + 1) = صفر$

$\therefore س^{2} = صفر \quad \therefore س = صفر$ مرفوض

، $3 لو_{هـ} س + 1 = صفر$

ومنها $لو_{هـ} س = \frac{-1}{3}$

$\therefore س = هـ^{\frac{-1}{3}}$

② $ص = 3 - \frac{س^{2}}{4} + لو_{هـ} \frac{س}{2}$

- الحل -

$ص' = -\frac{1}{2} س + \frac{2}{س} \times \frac{1}{2}$

$\therefore ص' = -\frac{1}{2} س + \frac{1}{س} = \frac{-س^{2}+2}{2س}$

$\because$ المماس // محور السينات

$\therefore ص' = صفر$

$\therefore \frac{-س^{2}+2}{2س} = صفر$

$\therefore -س^{2}+2 = صفر$

$\therefore س^{2} = 2$

$\therefore س = \sqrt{2}$

⑥ أوجد معادلة المماس للمنحنى

$ص = س هـ^{2س}$ عند النقطة $(\frac{1}{2}، \frac{1}{2} هـ)$

- الحل -

$\because ص = س هـ^{2س} \quad \therefore ص' = هـ^{2س} + 2س هـ^{2س}$

$\therefore ص' = هـ^{2س} (1 + 2س)$

$\therefore ص'$ عند $(\frac{1}{2}، \frac{1}{2} هـ) = هـ(1+1)$

$= 2هـ$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$ص - \frac{1}{2} هـ = 2هـ (س - \frac{1}{2})$

$\therefore 4هـ س - 2ص - هـ = صفر$

⑦ أوجد معادلة العمودي للمنحنى

$ص = 3 هـ^{س}$ عند نقطة واقعة عليه

وإحداثيها السيني يساوي -1

- الحل -

عند $س = -1 \quad \therefore ص = 3 هـ^{-1} = \frac{3}{هـ}$

$\because ص = 3 هـ^{س} \quad \therefore ص' = 3 هـ^{س}$

$\therefore ص'$ عند $(-1، \frac{3}{هـ}) = \frac{3}{هـ}$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{-هـ}{3}$

$\therefore$ معادلة العمودي هي

$ص - \frac{3}{هـ} = \frac{-هـ}{3} (س+1)$

$\therefore هـ^{2} س + 3هـ ص + هـ^{2} - 9 = صفر$

⑧ أوجد معادلة المماس للمنحنى

$ص = لو_{هـ} (2 - \sqrt{2} حتا س)$ عند النقطة

التي تقع عليه وإحداثيها السيني $= \frac{\pi}{4}$

- الحل -

عند $س = \frac{\pi}{4} \quad \therefore ص = لو_{هـ} (2 - \sqrt{2} حتا \frac{\pi}{4})$

$\therefore ص = صفر$

$\because ص = لو_{هـ} (2 - \sqrt{2} حتا س)$

$\therefore ص' = \frac{\sqrt{2} جا س}{2 - \sqrt{2} حتا س}$

∴ ميل المماس عند $\text{س} = \frac{\text{ط}}{٤}$

$= \dfrac{\sqrt{٢}\,\text{جا}\frac{\text{ط}}{٤}}{٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤}} = ١$

∴ معادلة المماس هي

$\text{ص} - \text{صفر} = ١\left(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٤}\right)$

∴ $\text{ص} = \text{س} - \frac{\text{ط}}{٤}$

∴ $\text{س} - \text{ص} - \frac{\text{ط}}{٤} = \text{صفر}$

(٩) اذا كانت $\text{هـ}^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$

اثبت أن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

- الحل -

نفرض أن $\text{ص} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$

∴ $\text{ص} = ١ + \frac{\text{س}}{١} + \frac{\text{س}^٢}{٢!} + \frac{\text{س}^٣}{٣!} + \cdots$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \cdots + ١ + \frac{\text{س}}{١!} + \frac{\text{س}^٢}{٢!} + \frac{\text{س}^٣}{٣!} + \cdots$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}$

∴ $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

(١٠) اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^٢ \,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}}$

فأوجد $\frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{دس}^٣}$ عند $\text{س} = ٤$

- الحل -

∴ $\text{ص} = \text{س}^٢ \,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}} + \text{س}^٢ \times \frac{\text{م}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{م}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}} + \text{س}$

∴ $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}} + ٢\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + ١$

∴ $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{م}} + ٣$

∴ $\frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{دس}^٣} = ٢ \times \frac{١}{\text{س}} + \text{صفر} = \frac{٢}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{دس}^٣}$ عند $\text{س} = ٤ = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(١١) اذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قتا س} - \text{ظتا س})$

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قتا س}$

- الحل -

∴ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قتا س} - \text{ظتا س})$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-\text{قتا س ظتا س} + \text{قتا}^٢\text{س}}{\text{قتا س} - \text{ظتا س}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{قتا س}(-\text{ظتا س} + \text{قتا س})}{\text{قتا س} - \text{ظتا س}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قتا س}$

(١٢) اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{س}^٢$

اثبت أن $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} - ٢ = ٩(\text{ص} - \text{س}^٢)$

- الحل -

∴ $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{س}^٢$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٢\text{س}$

، $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = ٩\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٢$

، ∴ $\text{هـ}^{٣\text{س}} = \text{ص} - \text{س}^٢$

∴ $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = ٩(\text{ص} - \text{س}^٢) + ٢$

∴ $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} - ٢ = ٩(\text{ص} - \text{س}^٢)$

(١٣) إذا كانت $ص = أ هـ^{س^٢+١}$

اثبت أن $\frac{د^٣ص}{دس^٣} = ٤ س ص (٣ + ٢ س^٢)$

-الحل-

$\because ص = أ هـ^{س^٢+١}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢ أ س هـ^{س^٢+١}$

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢أ هـ^{س^٢+١} + ٤ أ س^٢ هـ^{س^٢+١}$

$= ٢أ هـ^{س^٢+١} (١ + ٢ س^٢)$

$\therefore \frac{د^٣ص}{دس^٣} = ٤ أ س هـ^{س^٢+١} (١ + ٢ س^٢) + ٨ أ س هـ^{س^٢+١}$

$\therefore \frac{د^٣ص}{دس^٣} = ٤ أ س هـ^{س^٢+١} (١ + ٢ س^٢ + ٢)$

$= ٤ س ص (٣ + ٢ س^٢)$

(١٤) إذا كانت $ص = أ هـ^{\frac{ب}{س}}$

اثبت أن $س ص ص'' + ٢ ص ص' - س ص'^٢ = ٠$

-الحل-

$\because ص = أ هـ^{\frac{ب}{س}}$

$\therefore ص' = أ هـ^{\frac{ب}{س}} \times \frac{-ب}{س^٢} = \frac{-أب}{س^٢} هـ^{\frac{ب}{س}}$

$\therefore ص'' = \frac{٢أب}{س^٣} هـ^{\frac{ب}{س}} + \frac{-أب}{س^٢} \times هـ^{\frac{ب}{س}} \times \frac{-ب}{س^٢}$

$\therefore ص'' = \frac{٢أب}{س^٣} هـ^{\frac{ب}{س}} + \frac{أب^٢}{س^٤} هـ^{\frac{ب}{س}}$

$\therefore$ الطرف الأيمن =

$س (أ هـ^{\frac{ب}{س}}) \times (\frac{٢أب}{س^٣} هـ^{\frac{ب}{س}} + \frac{أب^٢}{س^٤} هـ^{\frac{ب}{س}})$

$+ ٢ \times أ هـ^{\frac{ب}{س}} \times \frac{-أب}{س^٢} هـ^{\frac{ب}{س}} -$

$س (\frac{-أب}{س^٢} هـ^{\frac{ب}{س}})^٢$

$= \frac{٢أ^٢ب}{س^٢} هـ^{\frac{٢ب}{س}} + \frac{أ^٢ب^٢}{س^٣} هـ^{\frac{٢ب}{س}} - \frac{٢أ^٢ب}{س^٢} هـ^{\frac{٢ب}{س}} -$

$\frac{أ^٢ب^٢ هـ^{\frac{٢ب}{س}}}{س^٣} =$ صفر = الطرف الأيسر

(١٥) إذا كانت $ص = \sqrt{\frac{س^٢+١}{س^٢-١}}$

اثبت أن $(س^٤ - ١) ص' + ٢ س ص =$ صفر

-الحل-

$\because ص = \sqrt{\frac{س^٢+١}{س^٢-١}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore لو_{هـ} ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} (س^٢+١) - \frac{١}{٢} لو_{هـ} (س^٢-١)$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{س^٢+١} - \frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{س^٢-١}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{س}{س^٢+١} - \frac{س}{س^٢-١}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{س(س^٢-١-س^٢-١)}{س^٤-١}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{-٢س}{س^٤-١}$

$\therefore (س^٤-١) ص' = -٢ س ص$

$\therefore (س^٤-١) ص' + ٢ س ص =$ صفر

(١٦) أوجد معدل تغير $لو_{هـ} (٩ + س^٣)$ بالنسبة إلى $س^٢ + ٣$ عند $س = ١$

-الحل-

نفرض أن $ص = لو_{هـ} (٩ + س^٣)$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٩+س^٣} \times ٣س^٢ = \frac{٣س^٢}{٩+س^٣}$

ونفرض أن $ع = س^٢ + ٣ \quad \therefore \frac{دع}{دس} = ٢س$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{٣س^٢}{٩+س^٣} \times \frac{١}{٢س}$

وعند $س = ١ \quad \therefore \frac{دص}{دع} = \frac{٣}{٢٠}$

(١٧) اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م س}}$

① اثبت أن $\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د س}^4} - \text{م}^4\,\text{ص} = \text{صفر}$

② أوجد قيم م التي تحقق أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} - 2\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص} = \text{صفر}$

-الحل-

① $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{م س}} \quad \therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{م هـ}^{\text{م س}}$

$\therefore \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \text{م}^2\,\text{هـ}^{\text{م س}} \quad \therefore \frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د س}^3} = \text{م}^3\,\text{هـ}^{\text{م س}}$

$\therefore \frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د س}^4} = \text{م}^4\,\text{هـ}^{\text{م س}} = \text{م}^4\,\text{ص}$

$\therefore \frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د س}^4} - \text{م}^4\,\text{ص} = \text{صفر}$

② $\because \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} - 2\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص} = \text{صفر}$

$\therefore \text{م}^2\,\text{هـ}^{\text{م س}} - 2\text{م}\,\text{هـ}^{\text{م س}} + \text{هـ}^{\text{م س}} = \text{صفر}$

$\therefore \text{هـ}^{\text{م س}}\,(\text{م}^2 - 2\text{م} + 1) = \text{صفر}$

$\therefore \text{هـ}^{\text{م س}}\,(\text{م} - 1)^2 = \text{صفر}$

$\therefore (\text{م} - 1)^2 = \text{صفر} \quad \therefore \text{م} = 1$

(١٨) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي:

① $\text{ص} = \text{قا هـ}^{\text{س}}$

-الحل-

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا هـ}^{\text{س}} \times \text{ظا هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قا هـ}^{\text{س}}\,\text{ظا هـ}^{\text{س}}$

② $\text{ص هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{3}$

-الحل-

$\because \text{ص هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{3} \quad \therefore \text{ص} = \text{هـ}^{3 - \text{س}}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\,\text{هـ}^{3 - \text{س}}$

③ $\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = 58$

-الحل-

$\because \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = 58 \quad \therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \frac{58}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{\frac{58}{\text{س}}} \quad \therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\frac{58}{\text{س}}} \times \frac{-58}{\text{س}^2}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-58}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{58}{\text{س}}}$

④ $\text{ص} = 2^{\text{قا}^2\text{س}}$

-الحل-

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2^{\text{قا}^2\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,2 \times 2\,\text{قا س} \times \text{قا س ظا س}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\,\text{قا}^2\text{س ظا س} \times 2^{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,2$

⑤ $\text{ص} = \text{لو}\,|\text{ظا س}|$

-الحل-

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا س}}\,\text{لو هـ}$

$= \text{قا س قتا س لو هـ}$

⑥ $\text{ص} = \text{جا}(\text{لو س})$

-الحل-

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{حتا}(\text{لو س}) \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{حتا}(\text{لو س}) \times \text{لو هـ}}{\text{س}}$

⑦ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{جا هـ}^{\text{س}}$

-الحل-

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{حتا س} \times \text{جا هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{جا س}} \times \text{حتا هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

⑧ $ص = لو_{هـ} لو_{هـ} لو_{هـ} س$

- الحل -

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{لو_{هـ} لو_{هـ} س} \times \frac{1}{لو_{هـ} س} \times \frac{1}{س}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س \, لو_{هـ} س \times لو_{هـ} لو_{هـ} س}$

⑨ $ص^2 = هـ^{٥س^2 - ٣}$

- الحل -

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ٢ص \frac{دص}{دس} = ١٠س \, هـ^{٥س^2 - ٣}$

$\therefore ٢ص \frac{دص}{دس} = ١٠س \, ص^2$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٥ \, س \, ص$

⑩ $ص^2 = ٣^{س} \times ٢^{ص}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore ٢ \, لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} ٣ + ص \, لو_{هـ} ٢$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{٢ص'}{ص} = لو_{هـ} ٣ + ص' \, لو_{هـ} ٢$

$\therefore ص' \left(\frac{٢}{ص} - لو_{هـ} ٢\right) = لو_{هـ} ٣$

$\therefore ص' = \frac{لو_{هـ} ٣}{\frac{٢}{ص} - لو_{هـ} ٢}$

⑪ $ص = س^{٢س}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore لو_{هـ} ص = ٢س \, لو_{هـ} س$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = ٢ \, لو_{هـ} س + ٢س \times \frac{1}{س}$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = ٢ \, لو_{هـ} س + ٢$

$\therefore ص' = ٢ص \, (لو_{هـ} س + ١)$

⑫ $ص = س^{جا س}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore لو_{هـ} ص = جا س \, لو_{هـ} س$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = جتا س \, لو_{هـ} س + جا س \times \frac{1}{س}$

$\therefore ص' = \left(جتا س \, لو_{هـ} س + \frac{جا س}{س}\right) ص$

⑬ $ص = س^{هـ^{س}}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore لو_{هـ} ص = هـ^{س} \, لو_{هـ} س$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = هـ^{س} \, لو_{هـ} س + هـ^{س} \times \frac{1}{س}$

$\therefore ص' = \left(هـ^{س} \, لو_{هـ} س + \frac{هـ^{س}}{س}\right) \times س^{هـ^{س}}$

(١٤) $ص = هـ^{س^{هـ}}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_{هـ} ص = س^{هـ} لو_{هـ} هـ = س^{هـ}$

بالاشتقاق

∴ $\frac{ص'}{ص} = هـ س^{هـ-١}$

∴ $ص' = هـ س^{هـ-١} \times هـ^{س^{هـ}}$

(١٥) $ص = (لو س)^{لو س}$

- الحل -

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_{هـ} ص = لو س \, لو_{هـ} لو س$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س} لو_{هـ} لو س + لو س \times \frac{١}{لو س} \times \frac{١}{س} لو هـ$

∴ $ص' = \frac{ص لو هـ}{س} (لو_{هـ} لو س + ١)$

(١٩) اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للمنحنى $ص = لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ في النقطة جـ (١، ص) ويقطع محور السينات في النقطة أ، ومحور الصادات في النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$

- الحل -

∴ $ص = لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

∴ ميل المماس عند س = ١ = ١

وعند س = ١ ∴ $ص = لو_{هـ} \frac{١}{٢} = -لو_{هـ} ٢$

∴ نقطة التماس = $(١ ، -لو_{هـ} ٢)$

∴ معادلة المماس هي

$ص + لو_{هـ} ٢ = ١ (س - ١)$

∴ $س - ص = ١ + لو_{هـ} ٢ = لو_{هـ} ٢هـ$

وبالقسمة على $لو_{هـ} ٢هـ$

∴ $\frac{س}{لو_{هـ} ٢هـ} + \frac{ص}{-لو_{هـ} ٢هـ} = ١$

∴ نقط تقاطع المماس مع المحاور هي

أ $(لو_{هـ} ٢هـ ، ٠)$ ، ب $(٠ ، -لو_{هـ} ٢هـ)$

∴ طول $\overline{أب} = \sqrt{(لو_{هـ} ٢هـ)^٢ + (لو_{هـ} ٢هـ)^٢}$

$= \sqrt{٢} \, لو_{هـ} ٢هـ$ وحدة طول

(٢٠) اذا كان العمودي للمنحنى $ص = لو_{هـ} ٢س$ عند النقطة أ $(١ ، لو_{هـ} ٢)$ يقطع محور السينات في النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

- الحل -

∵ $ص = لو_{هـ} ٢س$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

∴ ميل المماس عند س = ١ = ١

∴ ميل العمودي = -١

∴ معادلة العمودي هي

$ص - لو_{هـ} ٢ = -١ (س - ١)$

∴ $س - ص = ١ - لو_{هـ} ٢ = لو_{هـ} \frac{هـ}{٢}$

بالقسمة على $لو_{هـ} \frac{هـ}{٢}$

∴ $\frac{س}{لو_{هـ} \frac{هـ}{٢}} + \frac{ص}{لو_{هـ} \frac{هـ}{٢}} = ١$

∴ المستقيم يقطع محور السينات في النقطة

$ب = (لو_{هـ} \frac{هـ}{٢} ، صفر)$

∴ طول $\overline{أب} = \sqrt{(1-\text{لو}_{هـ}\frac{هـ}{2})^2 + (\text{لو}_{هـ}2 - 0)^2}$

∴ طول $\overline{أب} = \sqrt{(\text{لو}_{هـ}2)^2 + (\text{لو}_{هـ}2)^2}$

∴ طول $\overline{أب} = \sqrt{2}\ \text{لو}_{هـ}2 \simeq 0.980$ وحدة طول

(21) إذا كان الإنتاج اليومي لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يوماً) يتعين بالعلاقة $ص = 400(1 - هـ^{-0.3ن})$ وحدة. أوجد معدل التغير في عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن في اليوم العاشر

- الحل -

∵ $ص = 400(1 - هـ^{-0.3ن})$

∴ $\frac{دص}{دن} = 400(-هـ^{-0.3ن} \times -0.3)$

$= 120\ هـ^{-0.3ن}$

∴ معدل التغير في اليوم العاشر $= 120\ هـ^{-0.3\times10} = 120\ هـ^{-3}$

(22) إذا كان $هـ^{س ص} - س^2 + ص^3 =$ صفر

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = صفر

- الحل -

∵ $هـ^{س ص} - س^2 + ص^3 =$ صفر

وعند س = صفر

∴ $1 -$ صفر $+ ص^3 =$ صفر ∴ ص = −1

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $هـ^{س ص}(ص + س ص') - 2س + 3ص^2 ص' =$ صفر

وعند (صفر ، −1)

∴ $1(-1 + 0) - 0 + 3 \times (-1)^2 ص' = 0$

∴ $-1 + 3ص' =$ صفر

∴ $ص' = \frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}$

(23) إذا كان $هـ^{س ص} = س^2 + ص$

أثبت أن $(س\ هـ^{س ص} - 1)\ ص' = 2س - ص\ هـ^{س ص}$

- الحل -

∵ $هـ^{س ص} = س^2 + ص$ بالاشتقاق

∴ $هـ^{س ص}(ص + س ص') = 2س + ص'$

∴ $ص\ هـ^{س ص} + س ص'\ هـ^{س ص} = 2س + ص'$

∴ $ص'(س\ هـ^{س ص} - 1) = 2س - ص\ هـ^{س ص}$

(24) إذا كانت $س^2 ص = أ ب\ \text{لو}_{هـ} س$

أثبت أن

$س^2 ص'' + 5س ص' + 4ص =$ صفر

- الحل -

∵ $س^2 ص = أ ب\ \text{لو}_{هـ} س$ بالاشتقاق

∴ $س^2 ص' + 2س ص = \frac{أ ب}{س}$ (1)

بالاشتقاق مرة أخرى

∴ $س^2 ص'' + 2س ص' + 2س ص' + 2ص = \frac{-أ ب}{س^2}$

∴ $س^2 ص'' + 4س ص' + 2ص + \frac{أ ب}{س^2} =$ صفر (2)

بالتعويض عن قيمة أب من (1) في (2)

∴ $س^2 ص'' + 4س ص' + 2ص + \frac{س^3 ص' + 2س^2 ص}{س^2} =$ صفر

∴ $س^2 ص'' + 4س ص' + 2ص + س ص' + 2ص =$ صفر

∴ $س^2 ص'' + 5س ص' + 4ص =$ صفر

- تمارين عامة -

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

① $ص = هـ^{س^{٢}+٣}$

② $ص = س^{٣} + ظا س + هـ^{٥س+١}$

③ $ص = (\frac{١}{٢})^{س}$

④ $ص = هـ^{جتا س}$

⑤ $ص = هـ^{ظتا س}$

⑥ $ص = (س^{٢}+٣)\, هـ^{-٣س}$

⑦ $ص = هـ^{س}\, ظتا س$

⑧ $ص = هـ^{س} \times جا س$

⑨ $ص = \frac{س}{هـ^{٢س}}$

⑩ $ص = \frac{هـ^{جا س}}{جتا س}$

⑪ $ص = (هـ^{٢س} + هـ^{-٢س})^{٣}$

⑫ $ص = ٣\, لو_{هـ} (س+٤)$

⑬ $ص = ٢س + هـ^{س}\, لو_{هـ} س$

② أوجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ إذا كان

$س = هـ^{٢ن}$ ، $ص = هـ^{٣ن}$

③ أوجد $\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}}$ إذا كان

$ص = س\, لو س$

④ أوجد معادلة المماس للمنحنى

$ص = هـ^{٢س} جتا س$ عند $س = صفر$

⑤ أوجد معادلة العمودي للمنحنى

$س = هـ^{ن}$ ، $ص = هـ^{ن} + هـ^{٢ن}$

عند $س = ١$

⑥ إذا كان مماس المنحنى $ص = هـ^{س}$ عند النقطة $(٢ ، هـ^{٢})$ يقطع محور السينات في النقطة أ ، ومحور الصادات في النقطة ب ، أوجد طول $\overline{أب}$

(٤٦و٧ وحدة طول)

⑦ إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطى بالعلاقة $ص = (ن+١٠٠)\, لو_{هـ}(ن+٥)$ جرام بدلالة عدد الأيام ن أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠ هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص

(١٢٫٨ ، ٨و٧ ، ٨و٠٢ ، يتناقص)

⑧ أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

① $ص = لو_{هـ} |س^{٣} - ٧س^{٢} - ٣|$

② $ص = لو (جتا ٥س)$

③ $ص = لو_{هـ} لو_{هـ} س$

④ $ص = ٤^{جا^{٣} س - هـ^{س}}$

⑤ $ص = هـ^{هـ^{س}}$

⑥ $ص = (س^{٣}+٥)^{س}$

تكامل تتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية

•• تكامل الدالة الأسية

① $\int هـ^{س}\, ءس = هـ^{س} + ث$

② $\int هـ^{لس+م}\, ءس = \frac{هـ^{لس+م}}{ل} + ث$

③ اذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق فإن

$\int دَ(س)\, هـ^{د(س)}\, ءس = هـ^{د(س)} + ث$

④ $\int م^{س}\, ءس = \frac{م^{س}}{لو_{هـ} م} + ث$

•• تكامل الدالة اللوغاريتمية

① $\int \frac{١}{س}\, ءس = لو_{هـ} |س| + ث$

② $\int \frac{دَ(س)}{د(س)}\, ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

•• تذكر أن:

① $لو_{ب} م \times لو_{م} جـ = لو_{ب} جـ$

② $\frac{لو_{هـ} م}{لو_{هـ} ب} = لو_{ب} م$

- أمثلة محلولة -

① أوجد كلاً مما يأتي:

① $\int هـ^{٤س}\, ءس = \frac{هـ^{٤س}}{٤} + ث$

$= \frac{١}{٤} هـ^{٤س} + ث$

② $\int هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}\, ءص = \frac{هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}}{-\frac{٣}{٤}} + ث$

$= \frac{-٤}{٣} هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} + ث$

③ $\int ٣\sqrt{٢}\, هـ^{-\sqrt{٢}ع}\, ءع = \frac{٣\sqrt{٢}\, هـ^{-\sqrt{٢}ع}}{-\sqrt{٢}} + ث$

$= -٣ هـ^{-\sqrt{٢}ع} + ث$

④ $\int \pi\, هـ^{س}\, ءس = \pi\, هـ^{س} + ث$

⑤ $\int هـ^{١-٣س}\, ءس = \frac{هـ^{١-٣س}}{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{٣} هـ^{١-٣س} + ث$

⑥ $\int ٢^{-٥س}\, ءس = \frac{٢^{-٥س}}{-٥ لو_{هـ} ٢} + ث$

$= \frac{-١}{٥ لو_{هـ} ٢} \times ٢^{-٥س} + ث$

⑦ $\int ٥^{س}\, ءس = \frac{٥^{س}}{لو_{هـ} ٥} + ث$

⑧ $\int (٣س^{٢} - ٤ هـ^{٢س})\, ءس$

$= \frac{٣س^{٣}}{٣} - ٤ \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ث$

$= س^{٣} - ٢ هـ^{٢س} + ث$

⑨ $\int (١ + ٤ هـ^{-٣هـ})\, ءس$

$= (١ + ٤ هـ^{-٣هـ})\, س + ث$

⑩ $\int (هـ^{٢ل} + ٤ل)\, دل$

$= \frac{هـ^{٢ل}}{٢} + \frac{٤ل^{٢}}{٢} + ث$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢ل} + ٢ل^{٢} + ث$

---

⑪ $\int (٢س^{٢} + جا٢س - ٤هـ^{٣س})\, دس$

$= \frac{٢س^{٣}}{٣} - \frac{جتا٢س}{٢} - ٤\frac{هـ^{٣س}}{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}جتا٢س - \frac{٤}{٣}هـ^{٣س} + ث$

---

⑫ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}\right) دس$

$= \int (\frac{١}{٢}هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{-س})\, دس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{س} - \frac{١}{٢}هـ^{-س} + ث$

---

⑬ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٣}{هـ^{س}}\right) دس$

$= \int (١ + ٣هـ^{-س})\, دس$

$= س - ٣هـ^{-س} + ث$

---

⑭ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right) دس$

$= \int (١ + هـ^{-٢س})\, دس$

$= س + \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + ث$

$= س - \frac{١}{٢}هـ^{-٢س} + ث$

---

⑮ $\int \left(\frac{هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}}\right) دس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ٤هـ^{-س})\, دس$

$= \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ٢هـ^{س} + ٤\frac{هـ^{-س}}{-١} + ث$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - ٤هـ^{-س} + ث$

---

⑯ $\int ٢هـ^{س}(هـ^{س} + ١)^{٢}\, دس$

$= \int ٢هـ^{س}(هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١)\, دس$

$= \int (٢هـ^{٣س} + ٤هـ^{٢س} + ٢هـ^{س})\, دس$

$= \frac{٢}{٣}هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ث$

---

⑰ $\int (س^{٢هـ} + هـ^{٣س})\, دس$

$= \frac{س^{٢هـ+١}}{٢هـ+١} + \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + ث$

---

⑱ $\int (\pi^{٤} + \pi^{س})\, دس$

$= \pi^{٤}س + \frac{\pi^{س}}{لو_{هـ}\pi} + ث$

---

⑲ $\int ٢س\, هـ^{س^{٢}+١٥}\, دس$

الحل

نفرض أن $د(س) = س^{٢} + ١٥$

$\therefore د'(س) = ٢س$

$\therefore \int ٢س\, هـ^{س^{٢}+١٥}\, دس = هـ^{س^{٢}+١٥} + ث$

⑳ $\int ٤س\, هـ^{س^٢+١}\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^٢+١$

$\therefore د'(س) = ٢س$

$\therefore \int ٤س\, هـ^{س^٢+١}\, دس$

$= ٢\int ٢س\, هـ^{س^٢+١}\, دس$

$= ٢\, هـ^{س^٢+١} + ث$

㉑ $\int س^٢\, هـ^{س^٣+١}\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^٣+١$

$\therefore د'(س) = ٣س^٢$

$\therefore \int س^٢\, هـ^{س^٣+١}\, دس = \frac{١}{٣}\int ٣س^٢\, هـ^{س^٣+١}\, دس$

$= \frac{١}{٣}\, هـ^{س^٣+١} + ث$

㉒ $\int (س-٣)\, هـ^{س^٢-٦س-٥}\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^٢-٦س-٥$

$\therefore د'(س) = ٢س-٦ = ٢(س-٣)$

$\therefore \int (س-٣)\, هـ^{س^٢-٦س-٥}\, دس$

$= \frac{١}{٢}\int ٢(س-٣)\, هـ^{س^٢-٦س-٥}\, دس$

$= \frac{١}{٢}\, هـ^{س^٢-٦س-٥} + ث$

㉓ $\int س^٢(٤س-٣)\, هـ^{س^٤-س^٣}\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^٤-س^٣$

$\therefore د'(س) = ٤س^٣-٣س^٢$

$\therefore \int س^٢(٤س-٣)\, هـ^{س^٤-س^٣}\, دس$

$= \int (٤س^٣-٣س^٢)\, هـ^{س^٤-س^٣}\, دس$

$= هـ^{س^٤-س^٣} + ث$

㉔ $\int جاس \times هـ^{جتاس}\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = جتاس$

$\therefore د'(س) = -جاس$

$\therefore \int جاس \times هـ^{جتاس}\, دس$

$= -\int -جاس \times هـ^{جتاس}\, دس$

$= -هـ^{جتاس} + ث$

㉕ $\int (جتاس\, هـ^{جاس} + ٣س^٢)\, دس$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = جاس$

$\therefore د'(س) = جتاس$

$\therefore \int (جتاس\, هـ^{جاس} + ٣س^٢)\, دس$

$= هـ^{جاس} + س^٣ + ث$

㉖ $\int \frac{دس}{\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}}$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = -\sqrt{س}$

$\therefore د'(س) = \frac{-١}{٢\sqrt{س}}$

$\therefore \int \frac{دس}{\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}} = -٢\int \frac{-١}{٢\sqrt{س}}\, هـ^{-\sqrt{س}}\, دس$

$= -٢\, هـ^{-\sqrt{س}} + ث$

(٢٧) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{1+2\text{هـ}^{\text{س}}}}\ \text{د س}$

- الحل -

نفرض أن $\text{د(س)} = 1 + 2\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \text{دَ(س)} = 2\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt{1+2\text{هـ}^{\text{س}}}}\ \text{د س} = \frac{1}{2}\int 2\text{هـ}^{\text{س}}(1+2\text{هـ}^{\text{س}})^{-\frac{1}{2}}\ \text{د س}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{(1+2\text{هـ}^{\text{س}})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= (1+2\text{هـ}^{\text{س}})^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

(٢٨) $\int 2^{\text{جاس}}\ \text{حتاس د س}$

- الحل -

نفرض أن $\text{د(س)} = \text{جاس}$

$\therefore \text{دَ(س)} = \text{حتاس}$

$\therefore \int 2^{\text{جاس}}\ \text{حتاس د س} = \int \text{حتاس} \times 2^{\text{جاس}}\ \text{د س}$

$= \frac{2^{\text{جاس}}}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} + \text{ث}$

(٢٩) $\int \frac{2}{\text{س}}\ \text{د س} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٠) $\int \frac{1}{\text{س}+1}\ \text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{ث}$

(٣١) $\int (\text{س} + \frac{1}{\text{س}})\ \text{د س} = \frac{\text{س}^2}{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٢) $\int (\frac{4}{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{د س}$

$= 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ث}$

(٣٣) $\int \frac{4}{3\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} 5}\ \text{د س}$

$= \frac{4}{3\,\text{لو}_{\text{هـ}} 5}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٤) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3}\ \text{د س}$

$= \int \frac{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{3\,\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{2}{3\text{س}}\ \text{د س} = \frac{2}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٥) $\int (\frac{2\text{هـ}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{هـ}})\ \text{د س}$

$= 2\text{هـ}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{1}{2\text{هـ}}\text{س}^2 + \text{ث}$

(٣٦) $\int (3\text{هـ}^{-\text{س}} + \frac{\pi}{\text{س}})\ \text{د س}$

$= -3\text{هـ}^{-\text{س}} + \pi\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٧) $\int (\text{س}^6 + 5\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}})\ \text{د س}$

$= \frac{1}{7}\text{س}^7 + 5\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٣٨) $\int (\text{جاس} - \frac{2}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\ \text{د س}$

$= -\text{جتاس} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٣٩) $\int \left(هـ^{س} + ٣^{س} + \frac{١}{س} \right) ء س$

$= هـ^{س} + \frac{٣^{س}}{لو_{هـ} ٣} + لو_{هـ} |س| + ث$

(٤٠) $\int \frac{٦ س^{٢} - ٥}{٣ س} ء س$

$= \int \left(٢ س - \frac{٥}{٣ س} \right) ء س$

$= س^{٢} - \frac{٥}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

(٤١) $\int \frac{(٢ س - ١)^{٢}}{٣ س} ء س$

$= \int \frac{٤ س^{٢} - ٤ س + ١}{٣ س} ء س$

$= \int \left(\frac{٤}{٣} س - \frac{٤}{٣} + \frac{١}{٣ س} \right) ء س$

$= \frac{٢}{٣} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س + \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

(٤٢) $\int \frac{٤}{١ + ٢ س} ء س$

$= ٢ \int \frac{٢}{١ + ٢ س} ء س$

$= ٢ لو_{هـ} |١ + ٢ س| + ث$

(٤٣) $\int \frac{ء س}{٤ س - ١}$

$= \frac{١}{٤} \int \frac{٤}{٤ س - ١} ء س$

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ} |٤ س - ١| + ث$

(٤٤) $\int \frac{س}{س^{٢} + ١} ء س$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^{٢} + ١$

$\therefore د'(س) = ٢ س$

$\therefore \int \frac{س}{س^{٢} + ١} ء س = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س}{س^{٢} + ١} ء س$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} + ١| + ث$

(٤٥) $\int \frac{٩ + ٦ س}{س^{٢} + ٣ س} ء س$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = س^{٢} + ٣ س$

$\therefore د'(س) = ٢ س + ٣$

$\therefore \int \frac{٩ + ٦ س}{س^{٢} + ٣ س} ء س = ٣ \int \frac{٣ + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س} ء س$

$= ٣ لو_{هـ} |س^{٢} + ٣ س| + ث$

(٤٦) $\int \left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٣} \right) ء س$

- الحل -

نفرض أن $د(س) = هـ^{س} + ٣$

$\therefore د'(س) = هـ^{س}$

$\therefore \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٣} ء س = لو_{هـ} |هـ^{س} + ٣| + ث$

(٤٧) $\int ظا س \, ء س = \int \frac{جا س}{جتا س} ء س$

$= - \int \frac{- جا س}{جتا س} ء س = - لو_{هـ} |جتا س| + ث$

(٤٨) $\int \text{قا س ء س}$

- الحل -

بالضرب × (قا س + ظا س) بسطاً ومقاماً

$\therefore \int \text{قا س ء س} = \int \frac{\text{قا س (قا س + ظا س)}}{\text{قا س + ظا س}} \text{ ء س}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س + قا س ظا س}}{\text{قا س + ظا س}} \text{ ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا س + ظا س}| + \text{ث}$

(٤٩) $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{\text{ظتا س}} \text{ ء س}$

- الحل -

نفرض أن د(س) = ظتا س

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\therefore \int \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{\text{ظتا س}} \text{ ء س} = -\int \frac{-\text{قتا}^2\text{س}}{\text{ظتا س}} \text{ ء س}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظتا س}| + \text{ث}$

(٥٠) $\int \frac{\text{جا ٢س + ٢جتا س}}{\text{جا}^2\text{س + ٢جا س − ١}} \text{ ء س}$

- الحل -

نفرض أن $\text{د(س)} = \text{جا}^2\text{س + ٢جا س − ١}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{٢جا س جتا س + ٢جتا س}$

$= \text{جا ٢س + ٢ جتا س}$

$\therefore \int \frac{\text{جا ٢س + ٢جتا س}}{\text{جا}^2\text{س + ٢جا س − ١}} \text{ ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جا}^2\text{س + ٢جا س − ١}| + \text{ث}$

(٥١) $\int \text{ظتا}^3\text{س ء س} = \int \text{ظتا س ظتا}^2\text{س ء س}$

$= \int \text{ظتا س (قتا}^2\text{س − ١) ء س}$

$= \int \left(\text{ظتا س قتا}^2\text{س} - \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\right) \text{ ء س}$

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{ظتا س}) = -\text{قتا}^2\text{س}$ ،

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جا س}) = \text{جتا س}$

$\therefore$ التكامل $= \frac{-١}{٢} \text{ظتا}^2\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جا س}| + \text{ث}$

(٥٢) $\int \frac{\text{١ + ظا س}}{\text{س + لو}_{\text{هـ}}\text{ قا س}} \text{ ء س}$

- الحل -

نفرض أن $\text{د(س)} = \text{س + لو}_{\text{هـ}}\text{ قا س}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ١ + \frac{١}{\text{قا س}} \times \text{قا س ظا س}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{١ + ظا س}$

$\therefore \int \frac{\text{١ + ظا س}}{\text{س + لو}_{\text{هـ}}\text{ قا س}} \text{ ء س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س + لو}_{\text{هـ}}\text{ قا س}| + \text{ث}$

(٥٣) $\int \frac{\text{١ − ظا س}}{\text{١ + ظا س}} \text{ ء س}$

- الحل -

بالضرب بسطاً و مقاماً × جتا س

$\therefore \int \frac{\text{١ − ظا س}}{\text{١ + ظا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}} \text{ ء س}$

$= \int \frac{\text{جتا س − جا س}}{\text{جتا س + جا س}} \text{ ء س}$

نفرض أن د(س) = جتا س + جا س

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{−جا س + جتا س}$

$\therefore$ التكامل $= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س + جا س}| + \text{ث}$

(٥٤) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}٤\text{س}}\,\text{دس}$

ـ الحل ـ

$\frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}٤\text{س}} = \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢\,\text{جا}٢\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{قا}٢\text{س}$

وبالضرب × $(\text{قا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س})$ بسطاً ومقاماً

$\therefore \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}٢\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}٢\text{س} \times \frac{\text{قا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س}}{\text{قا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س}}\,\text{دس}$

نفرض أن $\text{د(س)} = \text{قا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س}$

$\therefore \text{د}'\text{(س)} = ٢\,\text{قا}٢\text{س}\,\text{ظا}٢\text{س} + ٢\,\text{قا}^{٢}٢\text{س}$

$= ٢\,\text{قا}٢\text{س}\,(\text{ظا}٢\text{س} + \text{قا}٢\text{س})$

$\therefore \int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}٤\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س}| + \text{ث}$

(٥٥) $\int \frac{\text{س}^{\text{هـ}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١}}{\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

ـ الحل ـ

نفرض أن $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \text{د}'\text{(س)} = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-١} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}\,(\text{س}^{\text{هـ}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١})$

$\therefore \int \frac{\text{س}^{\text{هـ}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١}}{\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{\text{هـ}} \int \frac{\text{هـ}(\text{س}^{\text{هـ}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١})}{\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{\text{هـ}}\,\text{لو} |\text{س}^{\text{هـ}} + \text{هـ}^{\text{س}}| + \text{ث}$

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $٧ - ٢\text{هـ}^{\text{س}}$ وكان $\text{د}(\text{لو}_{\text{هـ}}٢) = ٣$ أوجد د(س)

ـ الحل ـ

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٧ - ٢\text{هـ}^{\text{س}}$ بالتكامل

$\therefore \text{ص} = \int (٧ - ٢\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$\therefore \text{ص} = ٧\text{س} - ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

$\because \text{د}(\text{لو}_{\text{هـ}}٢) = ٣$

$\therefore ٣ = ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} + \text{ث}$

$\therefore ٣ = ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢ \times ٢ + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = ٧ - ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ = ٧(١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢)$

$\therefore \text{ث} = ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{٢}$

$\therefore \text{د(س)} = ٧\text{س} - ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{٢}$

(٣) ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $\frac{١}{٢\text{س} - \text{هـ}}$ وكان $\text{د(هـ)} = \frac{١}{٢}$ أوجد د(٢هـ)

ـ الحل ـ

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\text{س} - \text{هـ}}$ وبالتكامل

$\therefore \text{ص} = \int \frac{١}{٢\text{س} - \text{هـ}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢} \int \frac{٢}{٢\text{س} - \text{هـ}}\,\text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

، $\because \text{د(هـ)} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{هـ} - \text{هـ}| + \text{ث}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}|هـ| +$ ث

$\therefore$ ث = صفر

$\therefore$ د(س) $= \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}|2$س $-$ هـ$|$

$\therefore$ د(2هـ) $= \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}|4$هـ $-$ هـ$|$

$\therefore$ د(2هـ) $= \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}|3$هـ$|$

$= \frac{1}{2}$ [لو$_{هـ}$ هـ + لو$_{هـ}$ 3]

$= \frac{1}{2}$ (1 + لو$_{هـ}$ 3)

④ اذا كان معدل التغير في مساحة سطح صفيحة م (بالسم المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين من العلاقة $\frac{دم}{دن} =$ هـ$^{-0.1ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوي 80 سم^2 ، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد 10 ثوان

- الحل -

$\therefore \frac{دم}{دن} =$ هـ$^{-0.1ن}$ بالتكامل

$\therefore$ م $= \frac{هـ^{-0.1ن}}{-0.1} +$ ث $= -10$ هـ$^{-0.1ن} +$ ث

وفي البداية ن = صفر ، م = 80 سم^2

$\therefore 80 = -10 \times 1 +$ ث $\therefore$ ث = 90

$\therefore$ م $= -10$ هـ$^{-0.1ن} + 90$

ولبعد ن = 10 ث

$\therefore$ م $= -10$ هـ$^{-1} + 90$ سم^2

⑤ اذا كان ميل المماس عند أي نقطة (س، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسياً مع س وكان ميل المماس يساوي 2 عند س = 4 ، ص = 2

أوجد ص بدلالة س

- الحل -

$\because \frac{دص}{دس} \propto \frac{1}{س}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{ك}{س}$

وعند س = 4 فإن $\frac{دص}{دس} = 2$

$\therefore 2 = \frac{ك}{4}$ $\therefore$ ك = 8

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{8}{س}$ وبالتكامل

$\therefore$ ص $= \int \frac{8}{س}$ دس $= 8$ لو$_{هـ}|س| +$ ث

وعند س = 4 ، ص = 2

$\therefore 2 = 8$ لو$_{هـ}|4| +$ ث

$\therefore$ ث $= 2 - 8$ لو$_{هـ}$ 4

$\therefore$ ص $= 8$ لو$_{هـ}|س| + 2 - 8$ لو$_{هـ}$ 4

⑥ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\int \frac{1}{س\,لو_{هـ}\,س}$ دس $= \int \frac{1}{س} \times \frac{1}{لو_{هـ}\,س}$ دس

= لو$_{هـ}|$لو$_{هـ}$ س$| +$ ث

② $\int \frac{4}{س\,لو_{هـ}\,3س}$ دس $= 4\int \frac{1}{س} \times \frac{1}{لو_{هـ}\,3س}$ دس

$= 4$ لو$_{هـ}|$لو$_{هـ}$ 3س$| +$ ث

③ $\int \frac{(\text{لو}\,\text{س})^{٢}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \frac{١}{(\text{لو}_{\text{هـ}}١٠)^{٢}} \int \frac{١}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{(\text{لو}_{\text{هـ}}١٠)^{٢}} \times \frac{١}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{\text{لو}_{١٠}\text{هـ}}{٣} \times \left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}\right)^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{\text{لو}_{١٠}\text{هـ}}{٣}(\text{لو}\,\text{س})^{٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣\,\text{لو}\,\text{هـ}}(\text{لو}\,\text{س})^{٣} + \text{ث}$

④ $\int \frac{(١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

- الحل -

$= \int \left(\frac{١}{\text{س}}\right)(١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{(١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣}}{٣} + \text{ث}$

⑤ $\int \frac{٢\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$

- الحل -

$= \int ٢\text{س}(\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$= ٢\int (\text{س}+١-١)(\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$= ٢\int [(\text{س}+١)^{-١} - (\text{س}+١)^{-٢}]\,\text{ءس}$

$= ٢\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| - \frac{(\text{س}+١)^{-١}}{-١}\right) + \text{ث}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \frac{٢}{\text{س}+١} + \text{ث}$

⑥ $\int (\text{س}^{٣} + \text{أ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\cdot\text{أ}^{\text{س}} + \text{جا}\,\alpha)\,\text{ءس}$

- الحل -

$= \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} + \frac{(\text{هـ}\,\text{أ})^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\,\text{هـ}} + \text{جا}\,\alpha\,\text{س} + \text{ث}$

- تمارين عامة -

أوجد كلاً مما يأتي:

① $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$　② $\int -٦\,\text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{ءص}$

③ $\int -\text{هـ}^{-٥\text{ع}}\,\text{ءع}$

④ $\int \text{هـ}^{٧-٤\text{س}}\,\text{ءس}$

⑤ $\int (\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٣\,\text{جتا}\,\text{س} - ٤\text{س}^{٣} + ٢)\,\text{ءس}$

⑥ $\int (٤\text{س} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$

⑦ $\int \left(\frac{٣\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٣\,\text{هـ}^{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

⑧ $\int (١+\text{جا}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{\text{س}-\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

⑨ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

⑩ $\int ٧^{\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{ءس}$

⑪ $\int \frac{١}{٣\text{س}}\,\text{ءس}$

⑫ $\int \left(\frac{٣}{\text{س}} + ٤\,\text{هـ}^{-٢\text{س}}\right)\text{ءس}$

⑬ $\int \frac{\text{لو}^{٣}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

⑭ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

⑮ $\int \left(\frac{هـ^{٣}}{س} + س + لو_{هـ}٣\right) ء س$

⑯ $\int \left(٣س^{٢} + \frac{٥}{س}\right) ء س$

⑰ $\int \left(\frac{٥س + ٧}{س} + هـ^{س}\right) ء س$

⑱ $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س} ء س$

⑲ $\int \frac{٤ هـ^{س} + س هـ^{٢س}}{س هـ^{س}} ء س$

⑳ $\int \frac{٣س}{س^{٢} - ١} ء س$

㉑ $\int \frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ٧} ء س$

㉒ $\int \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س - ٢} ء س$

㉓ $\int \frac{س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٦س + ١} ء س$

㉔ $\int \left(\frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س} - ٢}\right) ء س$

㉕ $\int ظتا س \, ء س$

㉖ $\int \frac{جتا س}{٢ + جا س} ء س$

㉗ $\int \frac{جا س + جتا س}{جا س - جتا س} ء س$

㉘ $\int \frac{قا س ظا س}{قا س - ١} ء س$

㉙ $\int ظا ٦س \, ء س$

㉚ $\int \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{س} ء س$

㉛ $\int \frac{\sqrt{١ + لو_{هـ} س}}{س} ء س$

㉜ $\int \frac{س + ١}{س \sqrt{س + لو_{هـ} س}} ء س$

㉝ $\int أ^{٣ لو_{أ} س} ء س$

② إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص) يساوي $٢ هـ^{-\frac{١}{٢} س}$ ، $د(٠) = ١$ أوجد $د(٣)$

$(٥ - ٤ هـ^{-\frac{٣}{٢}})$

③ منحنى ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $\frac{٣س + ٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥)

$(ص = ٣س + ٢ لو_{هـ}(س) + ٣)$

④ إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسياً مع الزمن بالأسابيع وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و ٤ أسابيع هي على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع

(٤٠٠ وحدة)