الأدهم

فى

مراجعة ليلة الإمتحان فى التفاضل والتكامل

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٨

عام وأزهر

هدية مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم

ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الوحدة الأولى

الدرس الأول
إشتقاق الدوال المثلثية

ملاحظات

١) $\text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} = 1$

٢) $1 + \text{ظا}^2\text{هـ} = \text{قا}^2\text{هـ}$

٣) $1 + \text{ظتا}^2\text{هـ} = \text{قتا}^2\text{هـ}$

٤) قاعدة الجيب

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = 2\,\text{نق}$$

٥) قاعدة جيب التمام

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - 2\,\text{ب جـ جتا أ}$$

وهكذا

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب جـ}}$$

٦) $\text{جا}(\text{أ} \pm \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} \pm \text{جتا أ جا ب}$

٧) $\text{جتا}(\text{أ} \pm \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} \mp \text{جا أ جا ب}$

٨) $\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \dfrac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}}$

٩) $\text{جا}\,2\text{أ} = 2\,\text{جا أ جتا أ}$

١٠) $\text{جتا}\,2\text{أ} = \text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ}$

$= 2\,\text{جتا}^2\text{أ} - 1$

$= 1 - 2\,\text{جا}^2\text{أ}$

١١) $\text{ظا}\,2\text{أ} = \dfrac{2\,\text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\text{أ}}$

١٢) قواعد الاشتقاق

مشتقة حاصل ضرب دالتين

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

١٣) مشتقة خارج قسمة دالتين

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

١٤) مشتقة الجذر التربيعي

$$= \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2\sqrt{}}$$

١٥) $\text{مشتقة}\,(\text{القوس})^{\text{ن}}$

$$= \text{ن}\,(\text{القوس})^{\text{ن}-1} \times \text{مشتقة ما داخل القوس}$$

١٦) قاعدة السلسلة

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

الدالة	مشتقتها
جاس	جتاس
جتاس	-جاس
ظاس	قا²س
ظتاس	-قتا²س
قاس	قاس ظاس
قتاس	-قتاس ظتاس

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما

① ص = قا(٣س + ٥)

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ قا(٣س + ٥) ظا(٣س + ٥)

② ص = ظتا³ ٦س

الحل

هنعتبر دى قوس ودالة و زاوية

= (٣ ظتا² ٦س) × (-قتا² ٦س) × ٦

= -١٨ ظتا² ٦س قتا² ٦س

③ إذا كانت ص = $\sqrt{\text{٥} - \text{٢ع}}$ ، ع = قا٢س

اثبت أن $\sqrt{\text{٣}}$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ١٢ = ٠

عند س = $\frac{\pi}{\text{٦}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{-\text{٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٥}-\text{٢ع}}} = \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٥}-\text{٢ع}}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٢ قا٢س ظا٢س

عند س = $\frac{\pi}{\text{٦}}$ = ٣٠°

∴ ع = $\frac{\text{١}}{\text{جتا٦٠°}}$ = ع

∵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= $\frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٥}-\text{٢ع}}}$ × ٢قا٢س ظا٢س

$\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{\text{س}=\text{٣٠°}، \text{ع}=\text{٢}} = \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٥}-\text{٤}}} \times \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{جتا٦٠°}} \times \text{ظا٦٠°}$

= -٤$\sqrt{\text{٣}}$

∴ الطرف الأيمن = $\sqrt{\text{٣}}$ × -٤$\sqrt{\text{٣}}$ + ١٢ = صفر

= الأيسر #

الدرس الثالث
الاشتقاق الضمني والبارامتري

ملاحظة

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} \text{س}^{٥} = ٥\text{س}^{٤}$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} \text{ص}^{٥} = ٥\text{ص}^{٤} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما

---

(١) $\text{س}^{٢}\text{ص} + \text{ص}^{٢}\text{س} = ٢٥$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

$٢\text{س ص} + \text{س}^{٢}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{٢} + ٢\text{س ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$(\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص})\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س ص} - \text{ص}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص}}$

---

(٢) $\text{جا } ٢\text{ص} = \text{ص جتا } ٢\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة س

$٢\text{ جتا } ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢(\text{جا } ٢\text{س})\text{ص} + \text{جتا } ٢\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$(٢\text{ جتا } ٢\text{ص} - \text{جتا } ٢\text{س})\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{ص جا } ٢\text{س}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{ص جا } ٢\text{س}}{٢\text{ جتا } ٢\text{ص} - \text{جتا } ٢\text{س}}$

---

(٣) $\text{س} = ٥\text{ن} + ٣$ ، $\text{ص} = ١٦\text{ن}^{٢} + ٩$

عند $\text{ن} = ٥$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٥$ $\qquad$ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣٢\text{ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٣٢\text{ن}}{٥} = \frac{٣٢ \times ٥}{٥}$

$= ٣٢$

---

(٤) $\text{س} = ٥ + \text{قا}^{٢}\, ٣\theta$

$\text{ص} = ١ - \text{ظا } ٣\theta$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^{\circ}$

$\frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = -٣\text{ قا}^{٢}\, ٣\theta = \Leftarrow$

$\frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = ٢\text{ قا } ٣\theta \,.\, \text{قا } ٣\theta \text{ ظا } ٣\theta \times ٣$

$= ٦\text{ قا}^{٢}\, ٣\theta \text{ ظا } ٣\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^{\circ}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = \frac{-٣}{(\text{جتا } ١٣٥)^{٢}} = -٦$

$\frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = ٦ \times \frac{١}{(\text{جتا } ١٣٥)^{٢}} \times \text{ظا } ١٣٥ = -١٢$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} \div \frac{\text{دس}}{\text{د}\theta}$

$= \frac{-٦}{-١٢} = \frac{١}{٢}$

---

(٥) أوجد مشتقة $(\text{س} - \text{جا س})$ بالنسبة إلى $(١ - \text{جتا س})$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

الأولى هي ص والثانية ع

$\therefore \text{ص} = \text{س} - \text{جا س}$

$\text{ع} = ١ - \text{جتا س}$

$\frac{دص}{دس} = ١ - جتا س$

$\frac{دع}{دس} = جا س$

عند $س = \frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}$ $\frac{دع}{دس} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

---

⑥ أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى

$س = ٢ع^٣ - ٥ع^٢ - ٤ع + ١٢$

، $ص = ٢ع^٢ + ع - ٤$

ⓐ مماس أفقى ⓑ مماس رأسى

* الفكرة مماس أفقى يعنى الميل = صفر
حتى ناخذ البسط بالصفر

* ومماس رأسى يعنى غير معرف المقام = صفر

$\frac{دص}{دع} = ٤ع + ١$

$\frac{دس}{دع} = ٦ع^٢ - ١٠ع - ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} = \frac{٤ع + ١}{٦ع^٢ - ١٠ع - ٤}$

ⓐ فى المماس الأفقى
بوضع $٤ع + ١ = ٠$

$\therefore ع = \frac{-١}{٤}$

ⓑ فى المماس الرأسى بوضع $٦ع^٢ - ١٠ع - ٤ = ٠$

$\therefore ع = \frac{-١}{٣}$ ، $ع = ٢$

---

⑦ إذا كان $س^٣ ص^٢ = ١$ فإن

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{ص=١} = \dots\dots$

عند $ص = ١$ $\therefore س = ١$

بالاشتقاق بالنسبة (س)

$٣س^٢ ص^٢ + ٢س^٣ ص \frac{دص}{دس} = ٠$

بالتعويض

$٣ + ٢\frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore ٢\frac{دص}{دس} = -٣$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{ص=١} = \frac{-٣}{٢}$

الدرس الثالث
المشتقات العليا للدالة

لاحظ

$$\frac{د^2ص}{دس^2} \neq \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$$

المشتقة الثانية ≠ مربع المشتقة الأولى

$$\frac{د}{دس}\left(\frac{دص}{دس}\right) = \frac{د^2ص}{دس^2}$$

$$\frac{د}{دس}\left(\frac{د^3ص}{دس^3}\right) = \frac{د^4ص}{دس^4} = ص''''$$

مسائل

(١) إذا كان $د(س) = جا٢س$ فإن $د''(\frac{\pi}{٤}) = ----$

الحل

$د' = \frac{دص}{دس} = ٢ جتا٢س$

$د'' = -٤ جا٢س$

$د''(\frac{\pi}{٤}) = -٤ \times جا٩٠ = -٤$

(٢) إذا كان $ص = -جاس$ فإن $\frac{د^2ص}{دس^2} + ص = ---$

الحل

$\frac{دص}{دس} = -جتاس$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -(-جاس) = جاس$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} + ص = جاس - جاس = صفر$

(٣) إذا كانت $د'(س) = س د(س)$ ، $د(٣) = -٥$ فإن $د''(٣) = ...$

−٥٠   −٤٠   ١٥   ٢٧

التوضيح

$\because د'(س) = س د(س)$

$د''(س) = س د'(س) + د(س)$

$د(٣) = -٥$ $د'(٣) = ٣ \times -٥ = -١٥$

بالتعويض

$د''(٣) = ٣ \times -١٥ - ٥ = -٥٠$

(٤) إذا كان $د(س) = ظتاس$ فإن $د''(\frac{\pi}{٤}) = ----$

$\frac{-٤}{٩}$ $\frac{٤}{٩}$ ٤ $\frac{٩}{٢}$

(٥) إذا كان $د(س) = جا٢س جتا٢س$ فإن $د''(\frac{\pi}{٣}) = ---$

−٤   صفر $٤\sqrt{٣}$ ٨

لاحظ $جا٢س جتا٢س = \frac{١}{٢} جا٤س$

$ص' = ٢ جتا٤س$ $ص'' = -٨ جا٤س$

$-٨ \times جا٢٤٠ = ٤\sqrt{٣}$

(٦) إذا كان ص = ظاس

اثبت أنه $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢ص(١+ص^٢)$

الحل

$\frac{دص}{دس} = قا^٢س$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢قاس \cdot قاس ظاس$

$= ٢قا^٢س ظاس \leftarrow (١)$

المقدار $= ٢ص(١+ص^٢) =$

$٢ظاس(١+ظا^٢س)$

$= ٢ظاس \times قا^٢س \leftarrow (٢)$

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢ص(١+ص^٢)$ #

---

(٧) إذا كانت $ص = \sqrt{٢س+٥}$

اثبت أنه

$(٢س+٥)\frac{د^٣ص}{دس^٣} + ٣\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٠$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س+٥}} = (٢س+٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = -\frac{١}{٢} \times (٢س+٥)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢$

$= -(٢س+٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{د^٣ص}{دس^٣} = \frac{٣}{٢}(٢س+٥)^{-\frac{٥}{٢}} \times ٢$

$= ٣(٢س+٥)^{-\frac{٥}{٢}}$

الطرف الأيمن $= (٢س+٥)\frac{د^٣ص}{دس^٣} + ٣\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

$= (٢س+٥) \times ٣(٢س+٥)^{-\frac{٥}{٢}} - ٣(٢س+٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٣(٢س+٥)^{-\frac{٣}{٢}} - ٣(٢س+٥)^{-\frac{٣}{٢}} = صفر$ #

---

(٨) إذا كانت: $س = ٢ن^٣ + ٣$ ، $ص = ن^٤$

أوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عند $ن = ١$

ركز شوية

الحل

$س = ٢ن^٣ + ٣$ ، $\frac{دس}{دن} = ٦ن^٢$

$ص = ن^٤$ ، $\frac{دص}{دن} = ٤ن^٣$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٤ن^٣}{٦ن^٢} = \frac{٢}{٣}ن$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢}{٣} \times \frac{دن}{دس} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦ن^٢} = \frac{١}{٩ن^٢}$

$\left[\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right]_{ن=١} = \frac{١}{٩}$

الدرس الرابع
معادلتا المماس والعمودي للمنحنى

تذكر قوانين إيجاد الميل

* $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ← $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

* ص = م س + جـ

إذا كانت ص لوحدها في طرف لوحدها فإن الميل هو معامل س

* م س + ب ص + جـ = ٠

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

* م = ظا هـ ← الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

* م = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند نقطة التماس

* إذا كان $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ فإن $\text{م}_1 = \text{م}_2$

* $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ فإن $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1$

* المعادلة $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = الميل

* تذكر أن نقطة التماس تحقق معادلة

* المنحنى والمماس وعندها الميل = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

* لإيجاد المعادلة نحتاج إلى نقطة وميل

* لإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين

مسائل

(١) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه

س² + ص² = ٥٢ عند (٤، -٦)

الحل

$2\text{س} + 2\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 0$

$2\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -2\text{س}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-2\text{س}}{2\text{ص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

$\therefore$ ميل المماس = $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)_{(4,-6)} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

معادلة المماس $\frac{\text{ص}+6}{\text{س}-4} = \frac{2}{3}$

$2\text{س} - 8 = 3\text{ص} + 18$

$2\text{س} - 3\text{ص} - 26 = 0$

معادلة العمودي $\frac{ص+٦}{س-٤} = \frac{-٣}{٢}$

$٢ص+١٢ = -٣س + ١٢$

$٢ص + ٣س = ٠$

لاحظ علشان نجيب ميل العمودي نقلب الميل ونغير الاشارة

٢ إذا كانت معادلة العمودي للمنحنى $ص = د(س)$ عند $(١،١)$ هي

$س + ٤ص = ٥$ فإن $د'(١) = \dots$

-٣ $\frac{١}{٤}$ ٤ -٤

الحل

ميل العمودي $= \frac{-١}{٤}$ لأن دي معادلة العمودي

$\therefore$ ميل المماس $= ٤$

$\therefore$ $د'(١) = ٤$

٣ المماس للمنحنى $ص = ٣س^٢ - ٥$ عند النقطة $(١، -٢)$ يمر بالنقطة

أ) $(٥، -٢)$ ب) $(٣، ١)$

جـ) $(٢، -٤)$ د) $\boxed{(٠، -٨)}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س$ الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=١} = ٦$

المعادلة $\frac{ص+٢}{س-١} = ٦$

$٦س - ٦ = ص + ٢$

$٦س - ص - ٨ = ٠$

هنعوض بكل نقطة في معادلة المماس الوحيدة اللي تحقق هي $(٠، -٨)$

$٦ \times ٠ - (-٨) - ٨ = ٠ + ٨ - ٨ = ٠$ تحقق

٤ العمودي للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ١٢$ عند أي نقطة عليها يمر بالنقطة ...

أ) $(٢، ٢)$ ب) $(١، ١)$

جـ) $\boxed{(٠، ٠)}$ د) $(-٢، -٢)$

الحل

شكل بالك دي دائرة مركزها $(٠، ٠)$ صح؟

العمودي بيكون عمودي على المماس كده تمام؟

فيب ماهو نصف القطر عمودي على المماس.

وكل نصف قطر هيمر بالمركز $(٠، ٠)$

٥ إذا كان المماس للمنحنى $ص^٢ = ٤ أ س$ عمودي على محور السينات فإن

أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ب) $\frac{ءص}{ءس} = ١$

جـ) $\frac{ءص}{ءس} = -١$ د) $\boxed{\frac{ءس}{ءص} = ٠}$

الحل

عمودي على محور السينات = موازي لمحور الصادات

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرف $= \frac{عدد}{صفر}$

$\therefore$ $\frac{ءس}{ءص} =$ صفر

٦ اثبت أن المنحنيين

$(\text{س}-١)^{٢}+\text{ص}^{٢}=٢ \leftarrow ①$

، $(\text{س}+١)^{٢}+\text{ص}^{٢}=٢ \leftarrow ②$

يتقاطعان على التعامد، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

الحل

* لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين معاً

من ① ، ② ∴ $(\text{س}-١)^{٢}=(\text{س}+١)^{٢}$

∴ $\text{س}-١=\pm(\text{س}+١)$

$\text{س}-١=\text{س}+١$ مرفوض

$\text{س}-١=-\text{س}-١$

$٢\text{س}=-١+١$

∴ $٢\text{س}=٠$

∴ $\boxed{\text{س}=٠}$

* بالتعويض في ①

$١+\text{ص}^{٢}=٢$

$\text{ص}^{٢}=١$ ∴ $\text{ص}=\pm ١$

* ∴ نقط التقاطع هي $(٠،١)$ ، $(٠،-١)$

* باشتقاق المنحنى الأول

$٢(\text{س}-١)+٢\text{ص}\,\text{ص}'=٠$

∴ $\text{ص}'=\dfrac{-٢(\text{س}-١)}{٢\text{ص}}=\dfrac{-\text{س}+١}{\text{ص}}=\text{م}_{١}$

* باشتقاق المنحنى الثاني

$٢(\text{س}+١)+٢\text{ص}\,\text{ص}'=٠$

$\text{ص}'=\dfrac{-٢(\text{س}+١)}{٢\text{ص}}=\dfrac{-\text{س}-١}{\text{ص}}=\text{م}_{٢}$

* عند $(٠،١)$

$\text{م}_{١}=١$ ، $\text{م}_{٢}=-١$

∴ المماسان متعامدان

معادلة المماس الأول

$\text{ص}-١=١(\text{س}-٠)$

∴ $\text{ص}-\text{س}-١=٠ \leftarrow (١)$

معادلة المماس الثاني

$\text{ص}-١=-(\text{س}-٠)$

$\text{ص}+\text{س}-١=٠ \leftarrow (٢)$

* عند $(٠،-١)$

∴ $\text{م}_{١}=-١$ ، $\text{م}_{٢}=١$ متعامدان

معادلة المماس الأول

$(\text{ص}+١)=-١(\text{س}-٠)$

$\text{ص}+\text{س}+١=٠ \leftarrow (٣)$

معادلة المماس الثاني

$(\text{ص}+١)=١(\text{س})$

$\text{ص}-\text{س}+١=٠ \leftarrow (٤)$

كبيرة شوية بس لما تعرف ترتيب الخطوات هتبقى سهلة

⑦ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات والمماس والعمودي عليه للمنحنى:
٣س٢ + ص٢ = ١٢ عند (-١، ٣)

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

٦س + ٢ص ص' = ٠

∴ ص' = $\frac{-٦س}{٢ص}$

∴ الميل = $\frac{ءص}{ءس}]_{(-١،٣)}$ = $\frac{-٦×-١}{٢×٣}$ = ١

* معادلة المماس (ص - ٣) = ١(س + ١)

ص = س + ١ + ٣

ص = س + ٤

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات

بوضع ص = ٠ ∴ س = -٤

(-٤، ٠)

* معادلة العمودي

(ص - ٣) = -١(س + ١)

ص = -س - ١ + ٣

ص = -س + ٢

نقطة التقاطع مع محور السينات

ص = ٠ ∴ -س = -٢

∴ س = ٢

(٢، ٠)

طول القاعدة = |٢ - (-٤)| = ٦ وحدة

الارتفاع = الإحداثي الصادي للنقطة = ٣

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة

* ركز في الخطوات دي وهتطلبها إذا كان المطلوب مع محور الصادات

⑧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س٣ والتي يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤، ٠)

الحل

لاحظ في هذا النوع من المسائل النقطة لا تحقق المعادلة

∴ هي ليست نقطة تماس

* نقطة التماس هي (أ، د(أ)) = (أ، أ٣)

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س٢

الميل = $\frac{ءص}{ءس}]_{س=أ}$ = ٣أ٢

∵ المماس يمر بالنقطتين (٤، ٠)، (أ، أ٣)

∴ $\frac{أ^٣ - ٠}{أ - ٤}$ = ٣أ٢ الميل

٣أ٣ - ١٢أ٢ = أ٣

٢أ٣ - ١٢أ٢ = ٠

أ٢(٢أ - ١٢) = ٠

إما أ = ٠ أو ٢أ = ١٢ ← أ = ٦

∴ النقطة (٠، ٠) أو (٦، ٢١٦)

٩ اثبت أنه المنحنى

$\left(\frac{س}{أ}\right)^ن + \left(\frac{ص}{ب}\right)^ن = ٢$ يمس المستقيم

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ٢$ عند النقطة

(أ، ب) مهما تكن قيمة ن

الحل

$\left(\frac{س}{أ}\right)^ن + \left(\frac{ص}{ب}\right)^ن = ٢$ بالاشتقاق "س"

$\frac{ن}{أ}\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن-١} + \frac{ن}{ب}\left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن-١} \frac{دص}{دس} = ٠$

عند (أ، ب)

$\frac{ن}{أ} \times ١ + \frac{ن}{ب} \times ١ \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $\left(\frac{ن}{ب}\right) \frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{أ}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{أ} \times \frac{ب}{ن} = \boxed{\frac{-ب}{أ}}$ ميل المماس

ميل المستقيم $= \frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$ $\quad \frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ٢$

$= \frac{-١}{أ} \div \frac{١}{ب} = \frac{-١}{أ} \times \frac{ب}{١} = \frac{-ب}{أ}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند (أ، ب) لأى قيمة ن

الدرس الخامس
المعدلات الزمنية المرتبطة

* $\frac{د}{دن}$ نق = $\frac{د نق}{دن}$

* $\frac{د}{دن}$ نق² = ٢ نق $\frac{د نق}{دن}$ وهكذا

* في حالة الزيادة أو التمدد $\frac{دس}{دن}$ (+)

* في حالة الانكماش أو النقصان $\frac{دس}{دن}$ (−)

* مقدار الزيادة = $\frac{دس}{دن}$ × ن
= المعدل × الزمن

* معدل الزيادة = $\frac{المقدار}{ن}$

* س = س. + $\frac{دس}{دن}$ × ن

↓ القيمة الابتدائية

ملخص لبعض الأشكال الهندسية

١) الدائرة
المحيط = ٢ ط نق
المساحة = ط نق²

٢) الكرة
المساحة = ٤ ط نق²
الحجم = $\frac{٤}{٣}$ ط نق³

٣) المستطيل
المحيط = ٢ × (س + ص)
المساحة = س × ص

٤) المثلث
المساحة = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ج وهكذا
= $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

٥) المثلث المتساوي الأضلاع
المحيط = ٣ل
المساحة = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل²

٦) المكعب
المساحة الجانبية = ٤ ل²
المساحة الكلية = ٦ ل²
الحجم = ل³

٧) متوازي المستطيلات
الحجم = س ص ع

٨) الاسطوانة الدائرية القائمة

المساحة الكلية = ٢π نق^٢ + ٢π نق ع

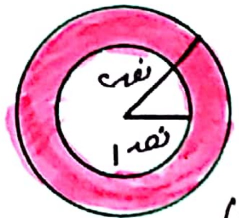
الحجم = π نق^٢ ع

٩) المخروط القائم

الحجم = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^٢ ع

١٠) الهرم المنتظم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



* اذا كان الشكل يعبر عن دائرتين

المساحة المظللة = π(نق$_٢^٢$ − نق$_١^٢$)

* وإذا كان يعبر عن كرتين متداخلتين

حجم الجزء المظلل = $\frac{٤}{٣}\pi$ (نق$_٢^٣$ − نق$_١^٣$)

مسائل

١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل ---- سم/ث

($\frac{٤}{\pi}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ٨)

الحل

محيط الدائرة = ٢π نق ∵ $\frac{د نق}{د ن} = \frac{٤}{\pi}$

$\frac{دع}{دن} = ٢\pi \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{دع}{دن} = ٢\pi \times \frac{٤}{\pi} = ٨$ سم/ث

٢) تتحرك نقطة على المنحنى ص^٢ = ٢٥ − س^٢ بحيث $\frac{دس}{دن} = \frac{-١}{٣}$

عند النقطة (−٣، ٤) فإن $\frac{دص}{دن}$ = ----

($\frac{-١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، ٩)

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

٢ص $\frac{دص}{دن}$ = −٢س $\frac{دس}{دن}$

٢ × ٤ $\frac{دص}{دن}$ = −٢ × (−٣) × $\frac{-١}{٣}$

٨ $\frac{دص}{دن}$ = −٢

$\frac{دص}{دن} = \frac{-٢}{٨} = \frac{-١}{٤}$

٣) جسم يتحرك على المنحنى ص^٢ = س^٣ ، إذا كان $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}$ وحدة/ث

عند ص = −١ فإن $\frac{دص}{دن}$ = ... وحدة/ث

الحل

عند $\boxed{ص = -١}$ ∴ س^٣ = ١ ∴ $\boxed{س = ١}$

بالاشتقاق بالنسبة لـ (ن)

٢ص $\frac{دص}{دن}$ = ٣س^٢ $\frac{دس}{دن}$

−٢ $\frac{دص}{دن}$ = ٣ × $\frac{١}{٢}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٣}{٢} \div -٢ = \frac{-٣}{٤}$

٤ إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما هو $\frac{1}{2}$ وكان الاحداثى السينى يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى = ---- وحدة/ث

($\frac{-1}{6}$ ، $\frac{-3}{2}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{3}{2}$)

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -3$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ?$

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{1}{2} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div (-3)$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{1}{2} \times -3 = \frac{-3}{2}$

---

٥ يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢ سم/ث ومساحتها بمعدل ٢٠π سم²/ث . فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة = ... سم ($\frac{5}{2}$ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠)

الحل

$\because$ م = π نق²

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\cancel{\pi}20 = 2\cancel{\pi}\,\text{نق} \times 2$

٤ نق = ٢٠

$\therefore$ نق = ٥ سم

---

٦ ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم³/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم³ هو ... سم/ث

($\frac{-1}{12}$ ، $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{-6}$ ، $\frac{1}{6}$)

الحل

الحجم ح = ل³

عندما يكون ل³ = ٨ $\therefore$ ل = ٢ سم

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 3\text{ل}^2\,\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ ← (١)

$\because \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -1$ سم³/ث لأنه ينصهر فيقل

$\therefore 3\text{ل}^2\,\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -1$

$3 \times 4\,\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -1$

$\therefore \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{-1}{12}$

---

٧ تتحرك نقطة على المنحنى س² + ص² - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠ وكان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند (٣ ، ١) يساوى ٤ وحدات/ث ، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن

الحل

بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$2\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - 4\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 8\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

بالتعويض $\because \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 4$

$2 \times 3 \times 4 + 2 \times 1\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - 4 \times 4 + 8\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

$24 - 16 + 10\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

$٨ + ١٠ \frac{دص}{دس} = ٠$

$١٠ \frac{دص}{دس} = -٨$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٨}{١٠} = \frac{-٤}{٥}$

---

(٨) خزان بترول على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ م . يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م³/د . فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟

الحل

$\frac{دح}{دن} = -٢$ م³/د

$ح = \pi$ نق² ع

لاحظ أن نصف القطر = ١٢ م وهو ثابت

المتغير هنا هو ارتفاع الخزان نتيجة تفريغه

$\therefore ح = \pi \times (١٢)^٢ ع$

$ح = ١٤٤ \pi ع$

$\frac{دح}{دن} = ١٤٤ \pi \frac{دع}{دن}$

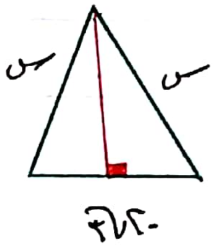
$\frac{دع}{دن} = \frac{دح}{دن} \div ١٤٤ \pi$

$= \frac{-٢}{١٤٤ \pi} = \frac{-١}{٧٢ \pi}$ م/د

---

(٩) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٢٠√٣ . اذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ثانية . فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من ساقيه مساوياً لطول القاعدة

الحل



$\frac{دس}{دن} = -٣$ سم/ث

الارتفاع هنا $= \sqrt{س^٢ - (١٠\sqrt{٣})^٢}$

$ع = \sqrt{س^٢ - ٣٠٠}$

المساحة = ½ طول القاعدة × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣} \times \sqrt{س^٢ - ٣٠٠}$

$\frac{دم}{دن} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢ - ٣٠٠}} \times \frac{دس}{دن}$

عند لحظة القياس تكون س = ٢٠√٣

$\therefore \frac{دم}{دن} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{٢ \times ٢٠\sqrt{٣}}{٢\sqrt{(٢٠\sqrt{٣})^٢ - ٣٠٠}} \times -٣$

$= -٦٠$ سم²/ث

---

(١٠) بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم³/ث . أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق يساوى $\frac{٢س}{نق}$ سم²/ث .

الحل

$\frac{دح}{دن} = س$

حجم الكرة $ح = \frac{٤}{٣} \pi$ نق³

$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣$ نق² $\frac{دنق}{دن} = ٤ \pi$ نق² $\frac{دنق}{دن}$

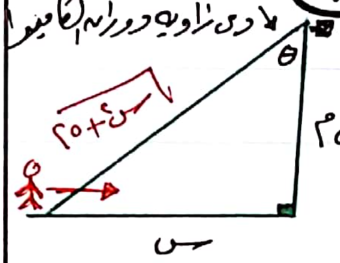
$\therefore \frac{دنق}{دن} = \frac{س}{٤ \pi نق^٢}$

مساحة الكرة $م = ٤ \pi$ نق²

$\frac{دم}{دن} = ٨ \pi$ نق $\frac{دنق}{دن} = \cancel{٨ \pi}$ نق $\times \frac{س}{\cancel{٤ \pi} نق^٢} = \frac{٢س}{نق}$ سم²/ث

في سباق ١٠٠ م، يجري اللاعب في مسار مستقيم باتجاه خط النهاية، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على ارتفاع ٥ م وعمودية على مسار السباق وفي نفس المستوى الأفقي للمتسابقين. أوجد معدل تغير الزاوية التي تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ م من نهاية السباق ومعدل الجري ١٠ م/ث.

الحل



$\frac{دس}{دن} = -10$ م/ث

ظا θ $= \frac{س}{5}$

ظا θ $= \frac{1}{5}$ س

بالاشتقاق بالنسبة للزمن

قا² θ $\frac{دθ}{دن} = \frac{1}{5} \frac{دس}{دن}$

عند لحظة القياس س = ٥ ، θ = ٤٥°

قا² θ $= \frac{1}{جتا^2 45} = 2$

$2 \frac{دθ}{دن} = \frac{1}{5} \times -10$

$2 \frac{دθ}{دن} = -2$ ∴ $\frac{دθ}{دن} = (-1)$ ء/ث

---

(١١) صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة. وجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث. أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما طول ضلعها ١٠ سم.

الحل

تذكر: مساحة المضلع المنتظم $= \frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

ن ← عدد الأضلاع ، س ← طول الضلع

∴ مساحة السداسي

$= \frac{1}{4} \times 6 \times$ س² ظتا $\frac{180}{6}$

م $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ س²

∵ $\frac{دس}{دن} = -0{,}1$ سم/ث

$\frac{دم}{دن} = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times$ س $\times \frac{دس}{دن}$

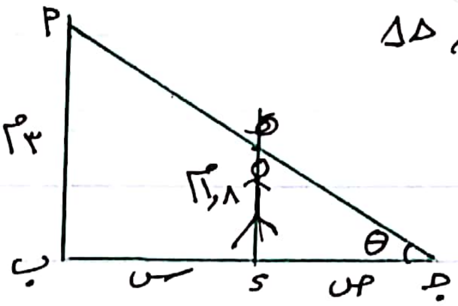
$= 3\sqrt{3} \times 10 \times (-0{,}1)$

$= -3\sqrt{3}$ سم²/ث.

---

(١٢) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قائمة مصباح ارتفاعه ٣ م بمعدل ١,٢ م/ث. أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ عندما يبعد الرجل عن قائمة المصباح مسافة س متراً أثبت أن س $= \frac{6}{5}$ ظتا θ ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٢,٦ متراً عن قائمة المصباح.

الحل



من التشابه بين ΔΔ

أ ب جـ ، هـ د جـ

$$\frac{أب}{هـد} = \frac{ب جـ}{د جـ}$$

$$\frac{3}{1{,}8} = \frac{س+ص}{ص}$$

$$3ص = 1{,}8ص + 1{,}8س$$

$$1{,}2ص = 1{,}8س \quad \div 0{,}6$$

$$\boxed{2ص = 3س}$$

بالاشتقاق الى ن

$$2\frac{دص}{دن} = 3\frac{دس}{دن} \qquad \because \frac{دس}{دن} = 1{,}2$$

$$\therefore \frac{دص}{دن} = \frac{3}{2} \times 1{,}2 = 1{,}8 \text{ م/ث}$$

وهو معدل تغير طول ظل الرجل

فى Δ أ ب جـ:

$$ظا\,\theta = \frac{3}{س+ص} = \frac{3}{س + \frac{3}{2}س} = \frac{6}{5س}$$

من العلاقة التي فوق

$$\therefore ظا\,\theta = \frac{6}{5س}$$

$$س = \frac{6}{5\,ظا\,\theta} \qquad \therefore س = \frac{6}{5}ظتا\,\theta \ \#$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن.

$$\boxed{\frac{دس}{دن} = \frac{6}{5}\left(-قتا^2\theta\right)\frac{د\theta}{دن}}$$

عند $س = 3{,}6 \quad \therefore \theta = ظا^{-1}\left(\frac{6}{3{,}6\times 5}\right)$

$$\theta = ظا^{-1}\frac{1}{3}$$

$$\therefore 1{,}2 = \frac{6}{5}\left(-\left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^2\right) \times \frac{د\theta}{دن}$$

$$1{,}2 = -\frac{6}{5} \times 10\ \frac{د\theta}{دن}$$

$$1{,}2 = -12\ \frac{د\theta}{دن}$$

$$\therefore \frac{د\theta}{دن} = \frac{1{,}2}{-12} = -\left(\frac{1}{10}\right) \text{ ء/ث}$$

الوحدة الثانية

الدرس: الأول
نهايات الدوال المرتبطة بالعدد هـ

ملاحظات

* $\text{لو}_{أ} أ = 1$
* $\text{لو}_{أ} 1 = \text{صفر}$
* $\text{لو}_{أ} س^{ن} = ن \, \text{لو}_{أ} س$
* $\text{لو}_{أ} س ص = \text{لو}_{أ} س + \text{لو}_{أ} ص$
* $\text{لو}_{أ} \frac{س}{ص} = \text{لو}_{أ} س - \text{لو}_{أ} ص$
* $\text{لو}_{ص} س = \frac{1}{\text{لو}_{س} ص}$
* $\text{لو}_{ص} س = \frac{\text{لو} س}{\text{لو} ص}$

الفرق بينه $\text{لو} أ$ ، $\text{لو}_{هـ} أ$

لوغاريتم معتاد Log ، لوغاريتم طبيعى Ln على الآلة

مهم جداً

(١) $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{1}{ن!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = هـ$

(٢) $\lim_{س \to 0} (1+س)^{\frac{1}{س}} = هـ$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \left(1+\frac{1}{س}\right)^{س} = هـ$

لاحظ اننا متعلمين اللى جوه = ١ دى هتسهل عليك الحفظ

لو اللى جوه مقدوله يبقى بره مقلوبه والعكس

قواعد تستخدم فى الحل

(١) $\lim_{س \to \infty} \left(1+\frac{1}{س}\right)^{أس} = هـ^{أ}$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \left(1+\frac{1}{س}\right)^{أس \pm ب} = هـ^{أ}$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \left(1+\frac{أ}{س}\right)^{س} = هـ^{أ}$

(٤) $\lim_{س \to 0} هـ^{س} = 1$

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{أ}(1+س)}{س} = \text{لو}_{أ} هـ$

ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(1+س)}{س} = 1$

(٦) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - 1}{س} = \text{لو}_{هـ} أ$

ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = 1$

$\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{أس} - 1}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

المسائل

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3س}$

$= هـ^{3}$

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{5}س}$

$= هـ^{\frac{1}{5}}$

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{5}{س}\right)^{س}$

$= هـ^{5}$

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+1}$

$= هـ$

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{س+1}\right)^{س}$

بوضع $س + 1 = ص$ $\therefore س = ص - 1$

$\underset{ص \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{ص}\right)^{ص-1}$

$= هـ$

⑥ $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{ن}{ن+1}\right)^{ن}$

عندما $ن \to \infty$ ، $\frac{1}{ن} \to$ صفر

$\underset{\frac{1}{ن} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{ن+1}{ن}\right)^{\frac{1}{ن}}$

$\underset{\frac{1}{ن} \to 0}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{ن}\right)^{\frac{1}{ن}}$ بوضع $\frac{1}{ن} = ص$

$\underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \left(1 + ص\right)^{ص} = \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \left(1 + ص\right)^{\left(\frac{1}{ص}\right)^{-1}}$

$= هـ^{-1}$

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{2س + 5}{2س + 1}\right)^{س+2}$

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{(2س + 1) + 4}{(2س + 1)}\right)^{\frac{1}{2}(2س+1) + \frac{3}{2}}$

بوضع $2س + 1 \to ص$

$\because س \to \infty$ $\therefore 2س + 1 \to \infty$

$\underset{ص \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{4}{2س+1}\right)^{\frac{1}{2}ص + \frac{3}{2}}$

$= هـ^{4 \times \frac{1}{2}} = هـ^{2}$

⑧ $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{3س} - 1}{س}$

نأخذ $\frac{\text{الأس اللي فوق هـ}}{\text{المعامل اللي تحت}}$ خارج النهاية

$= \frac{3}{1} \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{3س} - 1}{3س}$

$\because س \to 0$ $\therefore 3س \to 0$

$\frac{3}{1} \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{ص} - 1}{ص} = 3 \times 1 = 3$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{-س} - 1}{س}$

الحل

$-1 \times \lim_{-س \to 0} \frac{هـ^{-س} - 1}{-س}$

$-1 \times 1 = -1$

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - 1}{٥س}$

الحل

$= \frac{4}{5} \lim_{٤س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - 1}{٤س}$

$\frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5}$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - جاس - 1}{س}$

الحل

هنقسمها لنهايتين

$\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$

$1 - 1 =$ صفر

١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + ٢س)}{س}$

الحل

$2 \lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + ٢س)}{٢س} = 2 \times 1 = 2$

١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + ٤س)}{٤س}$

الحل

$\lim_{٤س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + ٤س)}{٤س} = 1$

١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{٢س} - 1}{س}$

الحل

$2 \lim_{٢س \to 0} \frac{أ^{٢س} - 1}{٢س}$

$= 2 \, لو_{هـ} أ$

١٥) $\lim_{س \to 0} (1 + 3 ظا^2 س)^{ظتا^2 س}$

الحل

عند $س \to 0$ ∴ $ظا^2 س \to 0 = \frac{1}{ص}$

$ص = ظتا^2 س \to \infty$

$\lim_{ص \to \infty} \left(1 + \frac{3}{ص}\right)^{ص} = هـ^3$

١٦) اثبت أن $\lim_{ن \to \infty} ن \left[لو_{هـ}(ن+1) - لو_{هـ} ن \right] = 1$

الحل

المقدار $= \lim_{ن \to \infty} ن \, لو_{هـ}\left(\frac{ن+1}{ن}\right) = \lim_{ن \to \infty} لو_{هـ}\left(\frac{ن+1}{ن}\right)^{ن}$

$لو_{هـ} \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ن+1}{ن}\right)^{ن}$

$لو_{هـ} \left(\lim_{ن \to \infty} \left(1 + \frac{1}{ن}\right)^{ن} \right)$

$لو_{هـ} هـ = 1$

لاحظ أن نهاية اللوغاريتم = لو للنهاية

وتم تطبيق خواص اللوغاريتمات

الدرس الثالث

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

$\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

١) مشتقة الدوال الأسية

= مشتقة دالة الأس × الدالة نفسها × لوهـ الأساس

$\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ $\quad \text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$

٢) مشتقة الدوال اللوغاريتمية

$= \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{الأساس}}$

المسائل

* أوجد المشتقة الأولى لكل مما

١) $\text{ص} = \text{س}^2 + 3\text{هـ}^{\text{س}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 3\text{هـ}^{3\text{س}}$

٢) $\text{ص} = 2\text{س} + \text{هـ}^{6\text{س}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 + 6\text{هـ}^{6\text{س}}$

٣) $\text{ص} = 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}2\text{س}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}} - 2\text{جا}2\text{س}$

٤) $\text{ص} = 5 \times 6^{\text{س}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5 \times 6^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} 6$

٥) $\text{ص} = 3^{(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2)}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (6\text{س} - 5) \times 3^{(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2)} \text{لو}_{\text{هـ}} 3$

٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس}$

الحل

$\text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{جتاس}$

$\text{هـ}^{\text{س}} \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} (\text{جتاس} + \text{جاس})$

⑦ ص = لو$_{هـ}$ س

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

⑧ ص = لو$_{هـ}$ ٥س

$\frac{دص}{دس} = \frac{٥}{٥س} = \frac{1}{س}$

⑨ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{1}{٣}$ س

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{1}{٣}}{\frac{1}{٣} س} = \frac{1}{س}$

ملحوظة $\frac{د}{دس}$ [لو$_{هـ}$ أس] = $\frac{1}{س}$

① ص = لو$_{هـ}$ (٢س^{٣} + ٩)

$= \frac{٦س^{٢}}{٢س^{٣} + ٩}$

② ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٢}}{س + ٧}$

ص = لو$_{هـ}$ س^{٢} − لو$_{هـ}$ (س + ٧)

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{1}{س+٧}$

$\frac{٢}{س} - \frac{1}{س+٧}$

③ ص = لو ($\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}$)

∴ ص = لو هـ$^{س^{٢}}$ − لو س^{٢}

ص' = $\frac{٢س\, هـ^{س^{٢}}}{هـ^{س^{٢}} لو_{هـ}١٠} - \frac{٢س}{س^{٢} لو_{هـ}١٠}$

$\frac{٢س}{لو_{هـ}١٠} - \frac{٢}{س\, لو_{هـ}١٠}$

٢س لو هـ − $\frac{٢}{س}$ لو هـ

(٢س − $\frac{٢}{س}$) لو هـ

④ إذا كانت د(س) = هـ^{٣س} فإن

د'(س) تساوي ----

[هـ^{٢س} ، ٣هـ^{٣س} ، ٩هـ^{٣س} ، ٣هـ^{٢س}]

⑤ إذا كانت د(س) = أ هـ^{س} فإن

د'(−٢) = ----

− د(٢)   − د'(٢)   د(−٢)

لاحظ أن د(س) = أ هـ^{س}

د'(س) = أ هـ^{س}

∴ د'(−٢) = د(−٢)

(٦) إذا كانت د(س) = س^٢ - ٣ لوهـ س

فإن دَ(٢) = ...

[-١ ، ١ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٦]

دَ(س) = ٢س - ٣ × $\frac{١}{س}$

دَ(٢) = ٤ - $\frac{٣}{٢}$ = ٤ - ١٫٥ = $\frac{٥}{٢}$

(٧) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = هـ^{٢س+١} عند ($\frac{-١}{٢}$ ، ١) هي ....

أ) ٢ص = س+١ ب) $\boxed{ص = ٢س + ٢}$

جـ) ص = ٢س - ٣ د) ٢ص = ٣س + ١

الميل = $\frac{دص}{دس}$ = ٢ هـ^{٢س+١}

م = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=\frac{-١}{٢}}$ = ٢ × هـ^٠ = ٢

ص - ١ = ٢ (س + $\frac{١}{٢}$)

ص - ١ = ٢س + ١

ص = ٢س + ٢

(٨) النسبة بين ميل مماس المنحنى ص = لوهـ ٣ $\sqrt{س+١}$

وميل مماس المنحنى ص = لوهـ ٥ $\sqrt{س+١}$

عند س = أ هي كنسبة ... : ...

[٣ : ٥ ، ٥ : ٣ ، ١ : ١ ، لوهـ ٣ : لوهـ ٥]

فاكرها تفاضلياً لوهـ س = $\frac{١}{س}$

$\frac{د}{دس}$ لوهـ ٥س = $\frac{١}{س}$

وهكذا

(٩) أوجد $\frac{دص}{دس}$ فى كل مما يلي

ص = س^{٢س}

بأخذ لوهـ للطرفين

لوهـ ص = لوهـ س^{٢س}

لوهـ ص = ٢س لوهـ س

$\frac{١}{ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س × $\frac{١}{س}$ + ٢ × لوهـ س

$\frac{دص}{دس}$ = ص (٢ + ٢ لوهـ س)

$\frac{دص}{دس}$ = س^{٢س} (٢ + ٢ لوهـ س)

(١٠) ص = هـ^{س هـ}

بأخذ لوهـ للطرفين

لوهـ ص = لوهـ هـ^{س هـ}

لوهـ ص = س^هـ لوهـ هـ

$$\text{لو}_{هـ}\, ص = س^{هـ}$$

$$\frac{ص'}{ص} = هـ\, س^{هـ-1}$$

$$ص' = ص\; هـ\, س^{هـ-1}$$

$$\frac{دص}{دس} = هـ^{س^{هـ}} \times هـ\, س^{هـ-1}$$

---

(١١) $ص^2 = 3^{س} \times 2^{ص}$

الحل

بأخذ لوهـ للطرفين

$$\text{لو}_{هـ}\, ص^2 = \text{لو}_{هـ}\, 3^{س} \times 2^{ص}$$

$$2\,\text{لو}_{هـ}\, ص = \text{لو}_{هـ}\, 3^{س} + \text{لو}_{هـ}\, 2^{ص}$$

$$2\,\text{لو}_{هـ}\, ص = س\,\text{لو}_{هـ} 3 + ص\,\text{لو}_{هـ} 2$$

$$2\,\frac{ص'}{ص} = \text{لو}_{هـ} 3 + ص'\,\text{لو}_{هـ} 2$$

$$\frac{2ص'}{ص} - ص'\,\text{لو}_{هـ} 2 = \text{لو}_{هـ} 3$$

$$ص'\left(\frac{2}{ص} - \text{لو}_{هـ} 2\right) = \text{لو}_{هـ} 3$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\text{لو}_{هـ} 3}{\frac{2}{ص} - \text{لو}_{هـ} 2}$$

---

(١٢) إذا كانت $ص = هـ^{3س} + س^2$

أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} - 2 = 9(ص - س^2)$

الحل

$$ص = هـ^{3س} + س^2$$

$$\frac{دص}{دس} = 3هـ^{3س} + 2س$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = 9\,هـ^{3س} + 2$$

$$\because\; هـ^{3س} = ص - س^2$$

$$\therefore\; \frac{د^2ص}{دس^2} = 9(ص - س^2) + 2$$

$$\therefore\; \frac{د^2ص}{دس^2} - 2 = 9(ص - س^2)\quad \#$$

الدرس الثالث
تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

(١) $\int هـ^{س}\, ءس = هـ^{س} + ث$

(٢) $\int هـ^{لس+م}\, ءس = \frac{1}{ل} هـ^{لس+م} + ث$

(٣) $\int د'(س)\, هـ^{د(س)}\, ءس = هـ^{د(س)} + ث$

(٤) $\int م^{س}\, ءس = \frac{م^{س}}{لو_{هـ} م} + ث$

(٥) $\int \frac{1}{س}\, ءس = لو_{هـ} |س| + ث$

(٦) $\int \frac{د'(س)}{د(س)}\, ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

(٧) $\int$ البسط مشتقة المقام $= لو_{هـ} |$المقام$| + ث$

المسائل

أوجد قيمة كلا مما

(١) $\int هـ^{4س}\, ءس$

الحل

$= \frac{1}{4} هـ^{4س} + ث$

(٢) $\int هـ^{1-3س}\, ءس$

الحل

$= \frac{-1}{3} هـ^{1-3س} + ث$

(٣) $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right) ءس$

الحل

$= \int \left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right) ءس$

$\int \left(1 + هـ^{-س-س}\right) ءس$

$\int \left(1 + هـ^{-2س}\right) ءس$

$س - \frac{1}{2} هـ^{-2س} + ث$

(٤) $\int \left(س^{هـ} + هـ^{3س}\right) ءس$

الحل

دالة عادية ← $س^{هـ}$ ، دالة أسية ← $هـ^{3س}$

نزود الأس واحد
ونقسم على الأس الجديد

$= \frac{س^{هـ+1}}{هـ+1} + \frac{1}{3} هـ^{3س} + ث$

(٥) $\int 4س\, هـ^{س^2+1}\, ءس$

الحل

$2\int 2س\, هـ^{س^2+1}\, ءس$

$2\, هـ^{س^2+1} + ث$

(٦) $\int \frac{٢}{\text{س}} \, \text{ء س}$

الحل

$= ٢ \int \frac{١}{\text{س}} \, \text{ء س}$

$= ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

(٧) $\int \frac{٤}{٣\text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٥} \, \text{ء س}$

الحل

$= \frac{٤}{٣ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٥} \int \frac{١}{\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \frac{٤}{٣ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٥} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

(٨) $\int (\text{جتاس} \, \text{هـ}^{\text{جاس}} + ٣\text{س}^٢) \, \text{ء س}$

الحل

بوضع $\text{ص} = \text{جاس}$

$\text{ص}' = \text{جتاس}$

$\int \text{د}'(\text{س}) \, \text{هـ}^{\text{د(س)}} + ٣\text{س}^٢ \, \text{ء س}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \frac{٣}{٣} \text{س}^٣ + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{س}^٣ + \text{ث}$

(٩) $\int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢} \, \text{ء س}$

الحل

بوضع $\text{د(س)} = \text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢$

$\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$

$\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د(س)}} \, \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{د(س)}| + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢| + \text{ث}$

(١٠) $\int \text{ظاس} \, \text{ء س}$

الحل

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{ء س}$

$- \int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{ء س}$

$- \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |(\text{جتاس})^{-١}| + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قاس}| + \text{ث}$

(١١) $\int \text{قاس} \, \text{ء س}$

الحل

بالضرب × $\frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$

$\int \frac{\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \, \text{ء س}$

$\int \frac{\text{قا}^٢\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{ظاس} + \text{قاس}} \, \text{ء س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظاس} + \text{قاس}| + \text{ث}$

(١٢) $\int$ ٤س هـ$^{س^2}$ ءس = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ هـ$^{س^2}$ + ث (ب) هـ$^{س^2}$ + ث
(جـ) ٢هـ$^{س^2}$ + ث (د) ٤هـ$^{س^2}$ + ث

---

(١٣) $\int$ ظاس ءس = ...

(أ) −لوهـ |جتاس| + ث (ب) −لوهـ جتاس + ث
(جـ) لوهـ جاس + ث (د) لوهـ |جتاس| + ث

---

(١٤) $\int \frac{\text{لوهـ س}^2}{\text{لوهـ س}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{س^2}{2}$ (ب) $\frac{1}{س}$ (جـ) ٢س (د) لوهـ س

الحل

$\int \frac{\text{لوهـ س}^2}{\text{لوهـ س}} = \int \frac{\text{٢لوهـ س}}{\text{لوهـ س}}$ ءس

= $\int$ ٢ ءس = ٢س + ث

---

(١٥) $\int \frac{1}{\text{س لوهـ س}^3}$ ءس = ... + ث

(أ) ٣ لوهـ |س| (ب) ٣ لوهـ |لوهـ س|
(جـ) $\frac{1}{3}$ لوهـ |س| (د) $\frac{1}{3}$ لوهـ |لوهـ س|

الحل

= $\int \frac{1}{\text{٣س لوهـ س}}$ ءس

= $\frac{1}{3} \int \frac{1}{س} \times \frac{1}{\text{لوهـ س}}$ ءس

$\frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{س}}{\text{لوهـ س}}$ ءس

مشتقتها ← $\frac{1}{س}$
الدالة ← لوهـ س

$\frac{1}{3}$ لوهـ |لوهـ س| + ث

---

(١٦) إذا كانت د''(س) = $\frac{1}{2}$[هـ^{س} + هـ$^{-س}$]
وكانت د(٠) = ١ ، د'(٠) = ٠
فإن د(س) = ...

(أ) −د'(س) (ب) د'(س)
(جـ) −د''(س) (د) د''(س)

الحل

∵ د''(س) = $\frac{1}{2}$[هـ^{س} + هـ$^{-س}$]

∴ د'(س) = $\int \frac{1}{2}$[هـ^{س} + هـ$^{-س}$] ءس

= $\frac{1}{2}$ هـ^{س} − $\frac{1}{2}$ هـ$^{-س}$ + ث

∵ د'(٠) = ٠

$\frac{1}{2}$ × هـ^{0} − $\frac{1}{2}$ هـ^{0} + ث = ٠

$\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ + ث = ٠ ∴ ث = ٠

د'(س) = $\frac{1}{2}$ هـ^{س} − $\frac{1}{2}$ هـ$^{-س}$

د(س) = $\frac{1}{2}$ هـ^{س} + $\frac{1}{2}$ هـ$^{-س}$ + ث

عند د(٠) = ١

$\frac{1}{2}$ هـ^{0} + $\frac{1}{2}$ هـ^{0} + ث = ١

$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ + ث = ١ ∴ ث = ٠

∴ د(س) = $\frac{1}{2}$ هـ^{س} + $\frac{1}{2}$ هـ$^{-س}$ = د''(س)

(١٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س، ص) يساوى $٤ هـ^{٢س}$

، د(٠) = ٢ فإن د(-٢) = ...

(أ) ٤ (ب) $٤ هـ^{-٤}$

(ج) $٢ هـ^{-٤}$ (د) ٢ هـ

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ هـ^{٢س}$

$ص = \int ٤ هـ^{٢س} ءس$

$= \frac{٤}{٢} هـ^{٢س} + ث$

$٢ هـ^{٢س} + ث$

∵ د(٠) = ٢

٢ + ث = ٢ ∴ ث = ٠

∴ $د(س) = ٢ هـ^{٢س}$

$د(-٢) = ٢ هـ^{-٤}$. #

---

(١٨) $\int (س^٣ + أ^س + هـ^س \cdot أ^س + ط٩) ءس$

الحل

$= \int (س^٣ + أ^س + (هـ أ)^س + ط٩) ءس$

$= \frac{١}{٤} س^٤ + \frac{أ^س}{لو_{هـ} أ} + \frac{(هـ أ)^س}{لو_{هـ} (هـ أ)} + (ط٩) س + ث$

ده معامل ثابت

فى الاشتقاق كنا نضرب

فى التكامل نقسم على لوهـ أ

الوحدة الثالثة

الدرس الأول والثاني والثالث

النقطة الحرجة

* تكون عندها المشتقة الأولى = صفر أو غير موجودة.

* إذا كانت د متصلة على [أ، ب] ، جـ ∈]أ، ب[بحيث

(١) د'(جـ) = صفر أو د'(جـ) غير موجودة

∴ (جـ ، د(جـ)) نقطة حرجة

أي أن جـ ∈ للمجال.

في النقطة الحرجة يكون المماس أفقي أو رأسي

القيم العظمى والصغرى المحلية

* إذا كانت (جـ ، د(جـ)) نقطة حرجة

(١) د'(س) > ٠ عندما س < جـ قبلها تزايد

، د'(س) < ٠ عندما س > جـ بعدها تناقص

فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية

(٢) د'(س) < ٠ عندما س < جـ قبلها تناقص

د'(س) > ٠ عندما س > جـ بعدها تزايد

فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية

(٣) إذا لم يحدث تغير في إشارة د'(س) على جانبي جـ ، فإنه لا يوجد للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية عند جـ

اختبار المشتقة الثانية

(١) د''(جـ) < ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية

(٢) د''(جـ) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية

(٣) د''(جـ) = ٠ فإن اختبار المشتقة الثانية غير مناسب

القيم القصوى

إذا كانت د دالة معرفة [أ، ب]

، جـ ∈ [أ، ب]

(١) د(جـ) قيمة صغرى مطلقة عندما

د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]

(٢) د(جـ) قيمة عظمى مطلقة عندما

د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]

ملحوظة

إذا كانت د معرفة على [أ ، ب] وكانت

(١) $د'(س) > ٠$ تزايدية على نفس الفترة

د(أ) قيمة صغرى مطلقة

د(ب) قيمة عظمى مطلقة

(٢) $د'(س) < ٠$ تناقصية على نفس الفترة

د(أ) قيمة عظمى مطلقة

د(ب) قيمة صغرى مطلقة

المسائل

(١) عين فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى المحلية للدوال:

$د(س) = ١٢س - س^٣$

الحل

الخطوات

(١) هنجيب المجال

(٢) $د'(س)$

(٣) $د'(س) = ٠$ للتقسيم للنقط الحرجة

ونكمل

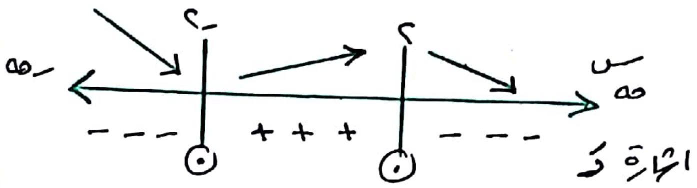
المجال = ح

$د'(س) = ١٢ - ٣س^٢$

بوضع $د'(س) = ٠$ ∴ $١٢ - ٣س^٢ = ٠$

$١٢ = ٣س^٢$ ∴ $س^٢ = ٤$

∴ $س = \pm ٢$



الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٢[

وتناقصية فى]−∞ ، −٢[،]٢ ، ∞[

عند س = −٢ صغرى محلية (−٢ ، −١٦)

بالتعويض بالدالة الأصلية

عند س = ٢ عظمى محلية (٢ ، ١٦)

(٢) $د(س) = \sqrt[٣]{س^٤}$

الحل

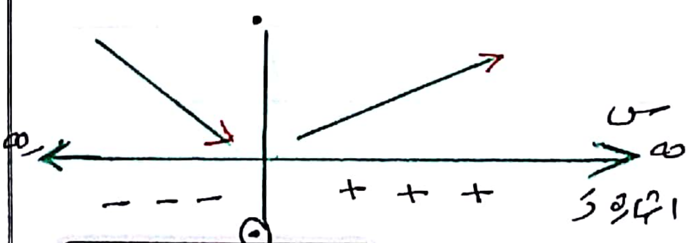
المجال = ح

$د(س) = س^{\frac{٤}{٣}}$

$د'(س) = \frac{٤}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣\sqrt[٣]{س}}$

عند س = ٠ $د'(س)$ غير معرفة

∴ عندها نقطة حرجة



عند س = ٠ صغرى محلية (٠، ٠)

الدالة تناقصية]$-\infty$، ٠[

وتزايدية]٠، ∞[

٣ د(س) = $\frac{س^2}{١ - س}$

المجال ح - {١}

د'(س) = $\frac{٢س(١-س) - س^2(-١)}{(١-س)^2}$

بوضع د'(س) = ٠

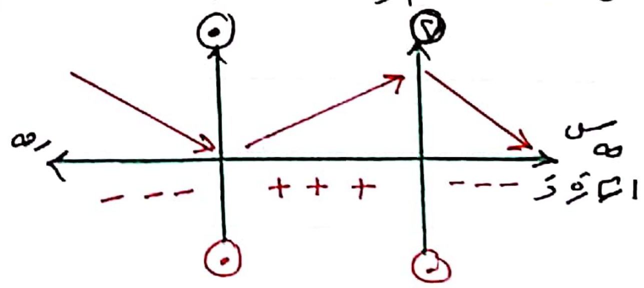
٢س(١-س) + س² = ٠

٢س - ٢س² + س² = ٠

٢س - س² = ٠

س(٢ - س) = ٠

س = ٠ أو س = ٢



أكمل الباقي

٤ د(س) = س - ٢ جتا س

في ٠ < س < ٢π

المجال =]٠، ٢π[

د'(س) = ١ + ٢ جاس

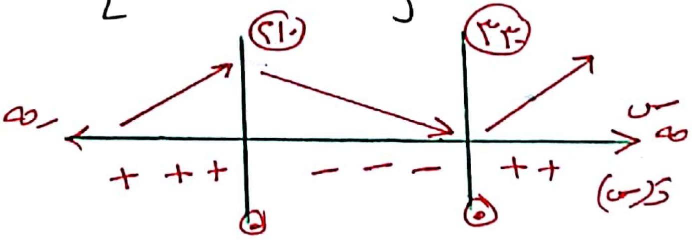
بوضع د'(س) = ٠

١ + ٢ جاس = ٠   ٢ جاس = -١

جاس = $-\frac{١}{٢}$ الثالث أو الرابع

١٨٠ + ٣٠°   ٣٦٠ - ٣٠°

س ∈ {٢١٠°، ٣٣٠°}



أكمل الباقي

٥ د(س) = ٢ لوهـ س - س²

المجال ح⁺

د'(س) = $\frac{٢}{س}$ - ٢س

د'(س) = ٠

$\frac{٢}{س}$ - ٢س = ٠

٢ - ٢س² = ٠

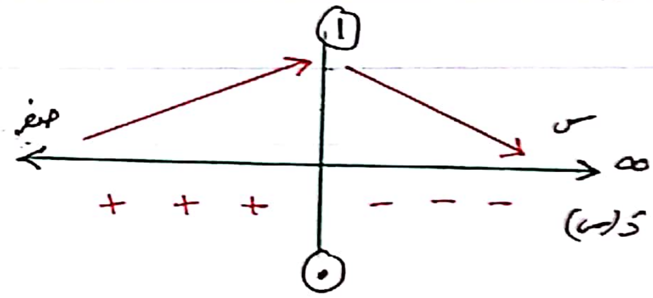
٢س² = ٢

س² = ١

$س^2 = ١$ ∴ $س = \pm ١$

$س = -١ \notin$ للمجال مرفوض

∴ $س = ١$ نقطة حرجة



عند $س = ١$ قيمة عظمى محلية $(١ ، -١)$

الدالة تزايدية في $]٠ ، ١[$

وتناقصية في $]١ ، \infty[$

---

٦ أثبت أن $د(س) = ظاس - س$ متزايدة في $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

الحل

فاكرها

$د'(س) = قا^2 س - ١ = ظا^2 س$

∴ لكل $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$ فإن $ظا^2 س > ٠$

∴ لكل $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$ فإن $د'(س) > ٠$

∴ $د(س)$ متزايدة في $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

٧ $د(س) = س^3 - ١٢ س + ١٢$ $[-٣ ، ٣]$

الحل

$د'(س) = ٣ س^2 - ١٢$

$د'(س) = ٠$ $٣ س^2 = ١٢$

$س^2 = ٤$

∴ $س = \pm ٢ \in [-٣ ، ٣]$

$د(-٣) = ٢١$

$د(-٢) = ٢٨$ عظمى مطلقة

$د(٢) = -٤$ صغرى مطلقة

$د(٣) = ٣$

∴ $(-٢ ، ٢٨)$ عندها عظمى مطلقة

$(٢ ، -٤)$ عندها صغرى مطلقة

---

٨ $د(س) = جاس + جتاس$ $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$د'(س) = جتاس - جاس$

$د'(س) = ٠$ $جتاس = جاس$

$\frac{جاس}{جتاس} = ١$ ∴ $ظاس = ١$

الأول الثالث

عند ٤٥ ، ٢٢٥

$١٨٠ + ٤٥$

عند الدالة الأصلية

$د(٠) = ١$

$د(٤٥) = \sqrt{٢}$ عظمى مطلقة

$د(٢٢٥) = -\sqrt{٢}$ صغرى مطلقة

$د(٣٦٠) = ١$

$(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢})$ فيه عظمى مطلقة

$(\frac{٥\pi}{٤} ، -\sqrt{٢})$ فيه صغرى مطلقة

٩) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) = ...

أ) ٢س - ١ ب) س^{٢} + ١

ج) س^{٣} د) - س^{٣}

الحل

عندها د'(س) = ٢س س = ٠

د''(س) = ٢ (+) صغرى محلية

---

١٠) يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) = ...

أ) س^{٤} - ٣ ب) س^{٣} + ١

ج) س^{٣} + ٢س د) س^{٤} - ٣س^{٣}

---

١١) إذا كان د'(س) = أس + ب حيث أ < ٠ ابحث وجود قيمة قصوى للدالة مبيناً نوعها إن وجدت

د'(س) = أس + ب

د'(س) = ٠ عند س = $\frac{-ب}{أ}$

د(س) = ∫ د'(س) ء س

= $\frac{أ}{٢}$ س^{٢} + ب س + ث

دالة تربيعية فيها أ < ٠

حيث مفتوح لأسفل ولها قيمة عظمى مطلقة

عند س = $\frac{-ب}{أ}$

---

١٢) أوجد القيم القصوى

د(س) = { س^{٣} - ٣س^{٢} ، س ≤ ٠ ؛ س^{٢} - ٢س ، س > ٠ }

[-٣ ، ٣]

د'(س) = { ٣س^{٢} - ٦س = ٠ ؛ ٢س - ٢ = -٢ }

∵ د'(٠$^{+}$) ≠ د'(٠$^{-}$)

∴ د'(٠) غير موجودة

∴ عند س = ٠ قيمة حرجة

د'(س) = { ٣س^{٢} - ٦س ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ٢س - ٢ ، س > ٠ }

بوضع د'(س) = ٠ عندما س < ٠

٣س^{٢} - ٦س = ٠

٣س(س - ٢) = ٠

س = ٠ لا يصلح أو س = ٢ لا تتحقق

بوضع د'(س) = ٠ عندما س > ٠

٢س - ٢ = ٠ ٢س = ٢

∴ س = ١ يصلح ، ∈]-٣ ، ٣[

∴ نقطة حرجة

د(-٣) = صفر

د(٠) = صفر

د(١) = -١ صغرى مطلقة

د(٣) = ٣ عظمى مطلقة

الدرس الرابع

التحدب ونقط الإنقلاب

يقال لجزء متصل من منحنى انه محدب إلى أعلى (مقعر لأسفل) إذا كان يقع اسفل جميع مماساته

محدب إلى أسفل (مقعر لأعلى) إذا كان يقع أعلى جميع مماساته

إذا كانت دَ متزايدة محدب لأسفل

دَ متناقصة محدب لأعلى

اختبار المشتقة الثانية

دً(س) > ٠ محدب لأسفل

دً(س) < ٠ محدب لأعلى

* نقطة الإنقلاب نحصل عليها بوضع دً(س) = ٠ وتتغير الاشارة قبلها عن بعدها تفصل بين التحدب لأعلى ولأسفل

امثلة

عين فترات التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت

(١) د(س) = -س^{٤} + ٦س^{٣}

المجال = ح

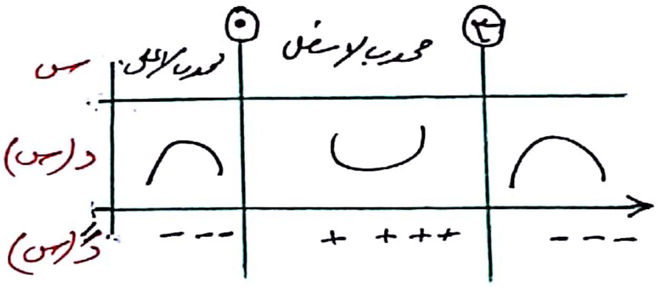
دَ(س) = -٤س^{٣} + ١٨س^{٢}

دً(س) = -١٢س^{٢} + ٣٦س

بوضع دً(س) = ٠

-١٢س(س - ٣) = ٠

إما س = ٠ أو س = ٣



محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[،]٣ ، ∞[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ٣[

وله نقط انقلاب (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١)

(٢) عين التحدب ونقط الانقلاب

$د(س) = \sqrt[3]{(س-٤)^{٢}}$

المجال = ح

$د(س) = (س-٤)^{\frac{٢}{٣}}$

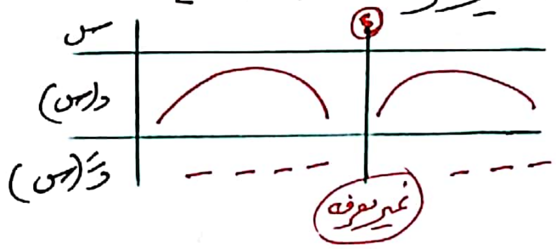
$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س-٤)^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[3]{س-٤}}$

$د'(٤)$ غير معرفة [عندها مماس رأسى]

$د''(س) = \frac{-٢}{٩}(س-٤)^{\frac{-٤}{٣}}$

$= \frac{-٢}{٩\sqrt[3]{(س-٤)^{٤}}}$

$د''(٤)$ غير معرفة عند $س = ٤$



المنحنى محدب لأعلى فى $]-\infty ، ٤[،]٤ ، \infty[$

وليس له نقط انقلاب

(٣) $د(س) = |س^{٣} - ١|$

طبقاً المجال ح هنفصل اشارة تعريف

$$د(س) = \begin{cases} س^{٣} - ١ &، س \geq ١ \\ -س^{٣} + ١ &، س < ١ \end{cases}$$

$$د'(١) \quad د'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} = ٣ & س > ١ \\ -٣س^{٢} = -٣ & س < ١ \end{cases}$$

$\because د'(١)^{+} \neq د'(١)^{-}$

$\therefore د'(١)$ غير موجودة [نقطة حرجة]

$$د'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ -٣س^{٢} & س < ١ \end{cases}$$

$$د''(س) = \begin{cases} ٦س & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ -٦س & س < ١ \end{cases}$$

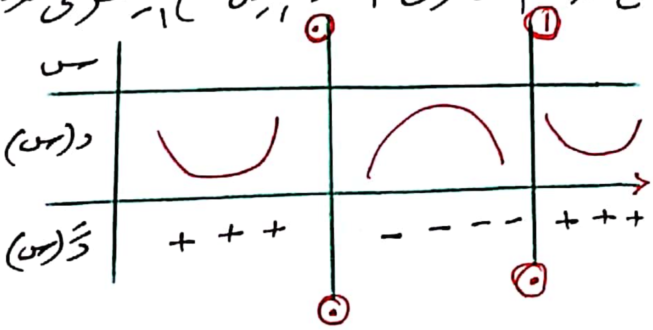
بوضع $د''(س) = ٠$

عندما $س > ١$ ، $٦س = ٠$ $\therefore س = ٠$ مرفوضة

عندما $س < ١$

$-٦س = ٠$ $\therefore س = ٠$ تحقق

لاحظ أنه عند $س = ١$ نقطة حرجة ولكن لا تعتبر نقطة انقلاب لأن عندها المشتقة الأولى كانت غير موجودة لأن عندها أكثر من مماس ناتج من عدم تساوى المشتقة اليمنى مع اليسرى عندها



أكتب فترات التحدب

يوجد نقطة انقلاب عند $(٠ ، ١)$

افهم دي

(١) إذا كانت د" غير موجودة وذلك لأنها جت من قام وعند النقطة دي نقطة انقلاب عادي

(٢) ولكن إذا كانت د" غير موجودة وذلك لأنها جت من دالة مقياس أو دالة متعددة التعريف وكانت النهاية اليمين ≠ اليسار فعند هذه النقطة ليست نقطة انقلاب

(٤) منحنى الدالة د محدباً لأسفل في ح إذا كانت د(س) = ----

(أ) $٣ - س^٢$ (ب) $٣ - س^٣$

(ج) $٣ - س^٤$ (د) $٣ + س^٤$

لأن د'(س) = $٤س^٣$

د"(س) = $١٢س^٢$ موجبة دائماً

يبقى محدب لأسفل دائماً

(٥) منحنى الدالة د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ٢$ محدب لأعلى عندما س ∈ ----

(أ)]−∞، ٠[(ب)]−∞، ١[

(ج)]١، ٣[(د)]١، ∞[

حل انت

(٦) منحنى الدالة يكون محدباً لأسفل في فترة إذا كان ----.

(أ) د'(س) > ٠ (ب) د'(س) < ٠

(ج) د"(س) > ٠ (د) د"(س) < ٠

(٧) منحنى الدالة د(س) = (س − ٢) $هـ^{س}$ يكون محدباً لأسفل في الفترة.

(أ)]−∞، ∞[(ب)]−١، ٢[

(ج)]٠، ٢[(د)]٠، ∞[

(٨) إذا كان د(س) = (أ − ٢) $س^٢$ + ٣س − ٥، س ∈ ح فإن منحنى الدالة مقعراً لأسفل عندما ----

(أ) أ > ٢ (ب) أ < ٢

(ج) أ = ٢ (د) أ = ٠

مقعر لأسفل يعني محدب لأعلى

ودي دالة تربيعية بتكون طاقية لو إذا كان

معامل $س^٢$ سالب أ − ٢ < ٠

∴ أ < ٢

(٩) إذا كانت (١، ٢) نقطة انقلاب لمنحنى د(س) = أ $س^٣$ + ب $س^٢$ فأوجد قيم أ، ب الحقيقية

الحل

توضيح

(١، ١٢) نقطة انقلاب ودالة فإن لديها فائدتين هما

① (١، ١٢) نقطة ∈ لمنحنى الدالة

② د''(س) عند س = ١ تساوى صفر
عندها المشتقة الثانية = صفر

د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}

د'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س

د''(س) = ٦أ س + ٢ب

عند س = ١ د''(س) = ٠

٦أ + ٢ب = ٠

$\boxed{٣أ + ب = ٠}$ ← (١)

بالتعويض فى معادلة المنحنى بالنقطة (١، ١٢)

أ(١)^{٣} + ب(١)^{٢} = ١٢

أ + ب = ١٢ ← (٢) بالطرح

٣أ + ب = ٠

−٢أ = ١٢

∴ $\boxed{أ = −٦}$

بالتعويض فى ①

∴ −١٨ + ب = ٠

∴ $\boxed{ب = ١٨}$

---

⑩ إذا كانت ص = د(س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة وكانت د''(س) = ٠ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ ، د''(س) > ٠ عندما س > $\frac{٢}{٣}$

ويمر منحنى الدالة بـ (١، ٦) وتوجد نقطة حرجة عند (−١، ٢) أوجد معادلة المنحنى وبين نوع النقط الحرجة

الحل

نفرض أن د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

يمر بالنقط (١، ٦) ، (−١، ٢)

له نقطة انقلاب عند س = $\frac{٢}{٣}$

د'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

د''(س) = ٦أ س + ٢ب

∵ د''($\frac{٢}{٣}$) = ٠ ∴ ٦أ × $\frac{٢}{٣}$ + ٢ب = ٠

−٤أ + ٢ب = ٠ $\boxed{ب = ٢أ}$ ← ①

له نقطة حرجة عند س = −١ د'(س) = ٠

٣أ(−١)^{٢} + ٢ب(−١) + جـ = ٠

٣أ − ٢ب + جـ = ٠

٣أ − ٤أ + جـ = ٠ −أ + جـ = ٠

∴ $\boxed{جـ = أ}$ ← ②

بالتعويض بـ (١، ٦) ، (−١، ٢) فى معادلة المنحنى

* أ + ب + جـ + ء = ٦

أ + ٢أ + أ + ء = ٦ ∴ $\boxed{ء = ٦ − ٤أ}$ ③

* −أ + ب − جـ + ء = ٢

−أ + ٢أ − أ + ٦ − ٤أ = ٢ ∴ $\boxed{أ = ١}$

∵ $ا = ١$ ، $ب = ٢$ ، $ح = ١$ ، $ء = ٢$

∴ $د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + س + ٢$

$د'(س) = ٣س^٢ + ٤س + ١$

$د'(س) = ٠$

∴ $س = -\frac{١}{٣}$ أو -١

$د''(-\frac{١}{٣}) > ٠$ صغرى محلية

$د''(-١) < ٠$ عظمى محلية

---

(١١) اثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب $د(س) = \frac{س}{١-س^٢}$ هو $\frac{\pi}{٤}$

الحل

$د(س) = \frac{س}{١-س^٢}$ المجال ح $- \{\pm ١\}$

$د'(س) = \frac{(١-س^٢) - س(-٢س)}{(١-س^٢)^٢} = \frac{١+س^٢}{(١-س^٢)^٢}$

$د''(س) = \frac{(١-س^٢)^٢(٢س) - (١+س^٢)٢(١-س^٢)\times -٢س}{(١-س^٢)^٤}$

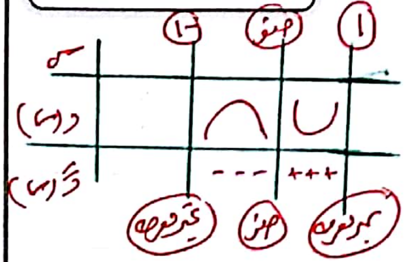
$= \frac{\cancel{(١-س^٢)}[(١-س^٢)(٢س) + ٤س(١+س^٢)]}{(١-س^٢)^{\cancel{٤}}}$

$= \frac{٢س - ٢س^٣ + ٤س + ٤س^٣}{(١-س^٢)^٣}$

$د''(س) = \frac{٢س^٣ + ٦س}{(١-س^٢)^٣}$

$د''(س) = ٠$

∴ $س = $ صفر

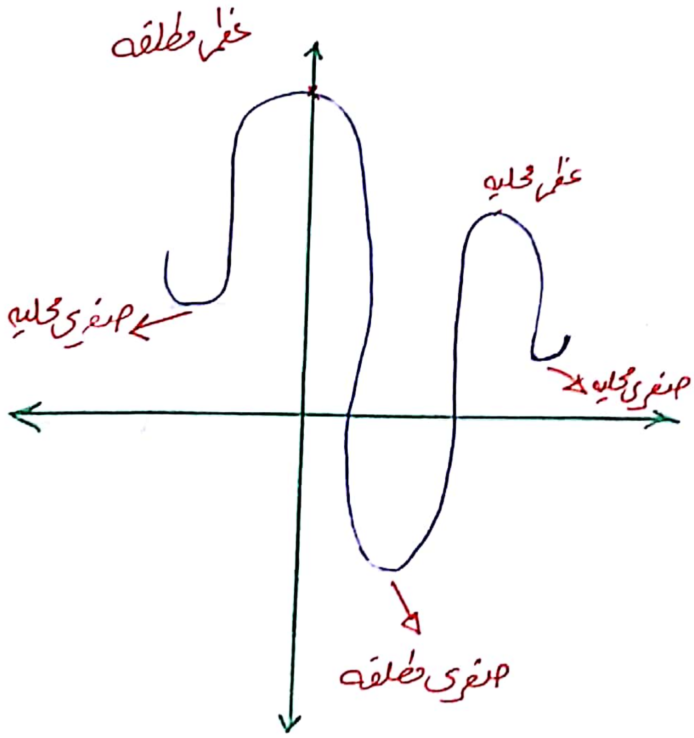


∴ نقطة الانقلاب هي $(٠، ٠)$

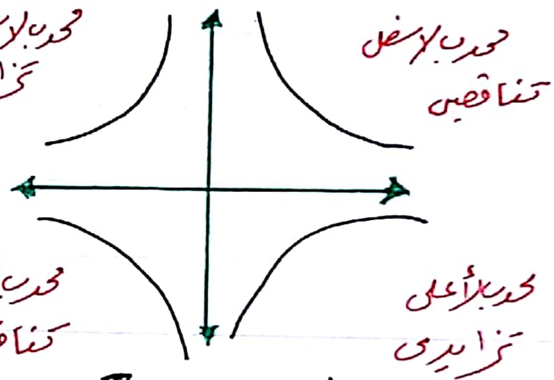
الميل عندها $= د'(٠) = ١$

∴ قياس الزاوية التي يصنعها المماس

$= ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$



الدرس الخامس
رسم المنحنيات



الشكل ده هيساعدك فى رسم الشكل العام للمنحنيات

المسائل

١) ارسم الشكل العام للمنحنى د حيث

$د(س) = ٢س^٣ - ٩س^٢ + ١٢س - ٢$

الحل

$د'(س) = ٦س^٢ - ١٨س + ١٢$

$د''(س) = ١٢س - ١٨$

بوضع $د'(س) = ٠$: $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

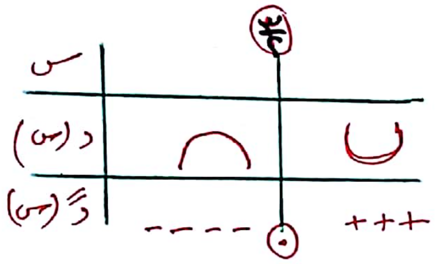
$\therefore س = ١ \quad ، \quad س = ٢$

$د''(١) = -٦$ عظمى محلية $(١ ، ٣)$

$د''(٢) = ٦$ صغرى محلية $(٢ ، ٢)$

بوضع $د''(س) = ٠$

$١٢س = ١٨ \quad \therefore \boxed{س = \frac{٣}{٢}}$



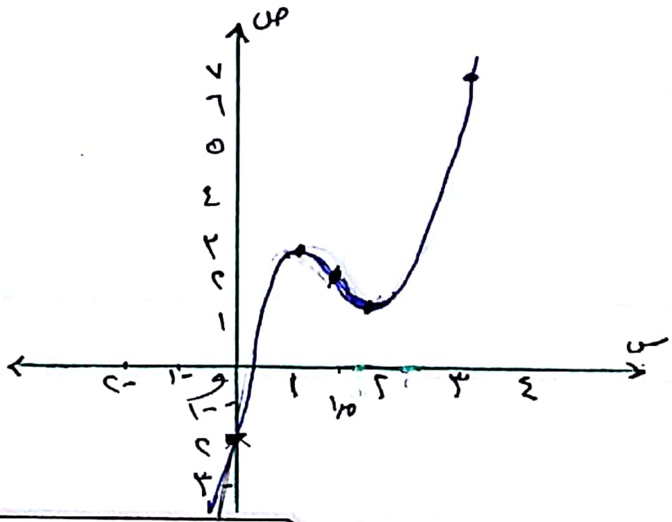
$\therefore$ عند $(\frac{٣}{٢} ، \frac{٥}{٢})$ نقطة انقلاب

نوجد نقط مساعدة مثل التقاطع مع محور الصادات

مثلاً بوضع $س = ٠$

$\therefore ص = -٢$ ، نوجد $د(٣) = ٧$

س	ص	نوع النقطة
٠	−٢	تقاطع مع محور الصادات
١	٣	عظمى محلية
$\frac{٣}{٢}$	$\frac{٥}{٢}$	نقطة انقلاب
٢	٢	صغرى محلية
٣	٧	نقطة



(٢) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة التى لها الخواص فى كل ما يأتى:

أولاً: متصلة ومجالها [١، ٧]

د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

ثانياً: دَ(٥) = ٠ ← نقطة حرجة

دَ(س) > ٠ س < ٥ ← تزايدية

دَ(س) < ٠ س > ٥ تناقصية

∴ ٥ عظمى محلية

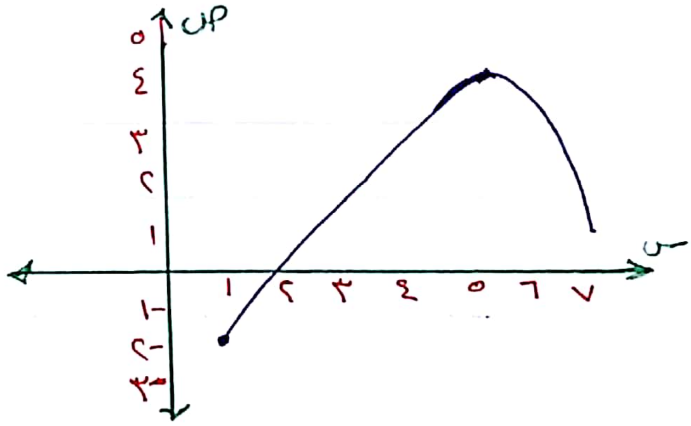
ثالثاً: دً(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧ ← محدب لأعلى دائماً

الحل

عند ٥ قيمة عظمى محلية (نقطة حرجة)

قبلها تزايد وبعدها تناقص

والمنحنى محدب لأعلى فى الفترة]١، ٧[



(٣) ارسم الشكل العام لمنحنى د الذى:

د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = -٣

دَ(س) < ٠ عندما س < ٢

دَ(س) > ٠ عندما س > ٢

دً(س) > ٠ لكل س ≠ ٢

الحل

المنحنى يمر بالنقط

(١، ٠) ، (٥، ٠) ، (٢، -٣)

المنحنى محدب لأعلى دائماً لأنه دً(س) > ٠

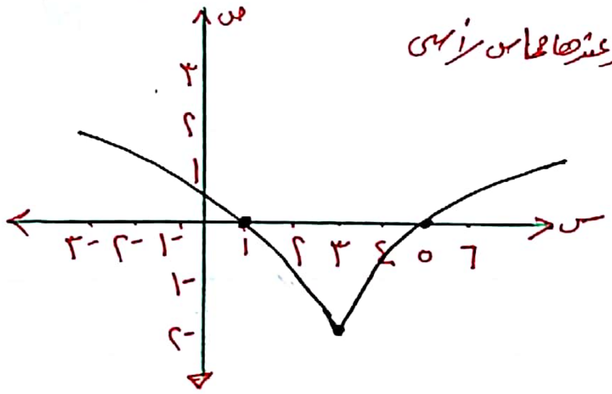
عند س = ٢ صغرى محلية لأنه قبلها تناقص وبعدها تزايد

∴ الشكل العام:

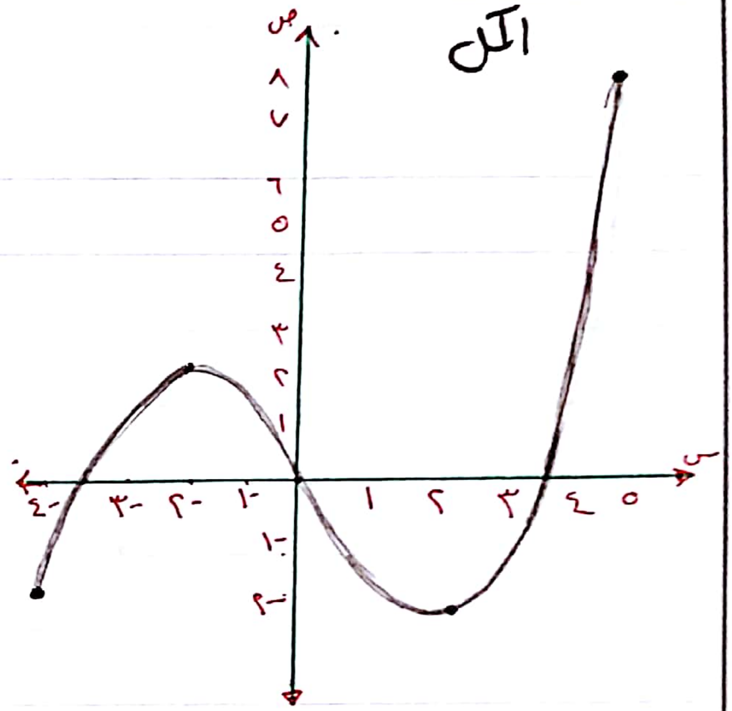
يعنى قبل ٢ محدب لأعلى تناقص

وبعد ٢ محدب لأعلى تزايدى

وعندها مماس رأسى



الحل



(١) مجال د = [-٤ ، ٥]

(٢) دَ(س) = ٠ عندما س ∈ ---- {-٢ ، ٢}

(٣) دً(س) > ٠ عندما س ∈ ----]٠ ، ٥[

محدب لأسفل

(٤) المنحنى محدب لأعلى عندما س ∈ ----]-٤ ، ٠[

(٥) نقطة الانقلاب هى (٠ ، ٠)

(٦) القيمة الصغرى المحلية عند س = ٢

(٧) القيمة العظمى المطلقة = ٨

الدرس السادس

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

الخطوات

١ تحديد المطلوب ورسم المسألة إن أمكن

٢ تحديد العلاقة الأساسية من المطلوب.

٣ نجعلها في متغير واحد

٤ نوجد د'(س) ونختبر القيم العظمى

٥ والصغرى بأي طريقة

المسائل

١ عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن أوجد العددين

الحل

العددان هما س ، ص

س + ص = ٣٠

ص = ٣٠ - س

∴ العددان هما س ، ٣٠ - س

حاصل ضربهما

د(س) = س (٣٠ - س)

د(س) = ٣٠ س - س^{2}

د'(س) = ٣٠ - ٢ س

بوضع د'(س) = ٠

∴ ٣٠ = ٢ س ∴ س = ١٥

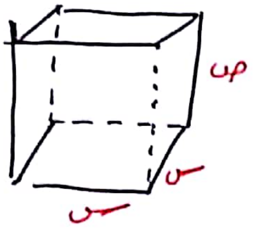
د''(س) = -٢ د''(١٥) < ٠ قيمة عظمى

∴ عند س = ١٥ أكبر ما يمكن

∴ العددان هما ١٥ ، ١٥

٢ علبة على شكل متوازي مستطيلات، قاعدتها مربعة، إذا كان مجموع جميع أحرفها = ٢٤٠ سم أوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن

الحل



الأحرف س ، س ، ص

٤س + ٤س + ٤ص = ٢٤٠

٨س + ٤ص = ٢٤٠

٢س + ص = ٦٠

∴ $\boxed{\text{ص = ٦٠ - ٢س}}$

الحجم = س × س × ص = س^{2} ص

د(س) = س^{2} (٦٠ - ٢س)

د(س) = ٦٠س^{2} - ٢س^{3}

د'(س) = ١٢٠ س - ٦ س^{2}

عند د'(س) = ٠ ∴ س = ٠ مرفوض أو س = ٢٠

٦س (٢٠ - س) = ٠

د''(٢٠) < ٠ عندها اكبر ما يمكن

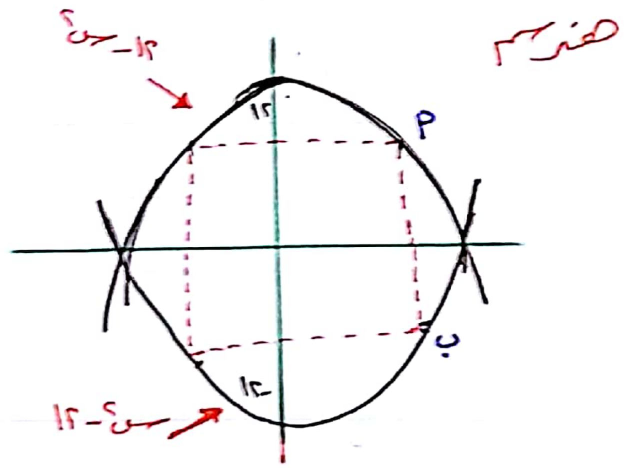
∴ س = ٢٠ ، ص = ٦٠ - ٢ × ٢٠ = ٢٠

∴ الابعاد (٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠) سم

---

٣ رسم مستطيل بحيث يقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = س^٢ - ١٢ والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ - س^٢ احسب أكبر مساحة لهذا المستطيل

الحل



ا تقع على المنحنى الأعلى

ا(س ، ١٢ - س^٢)

ب تقع على المنحنى الأسفل

ب(س ، س^٢ - ١٢)

الطول = ٢س

العرض = ٢٤ - ٢س^٢

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٢س (٢٤ - ٢س^٢)

د(س) = ٤٨س - ٤س^٣

د'(س) = ٤٨ - ١٢س^٢

بوضع د'(س) = ٠

١٢س^٢ = ٤٨ ∴ س^٢ = ٤

∴ س = ± ٢

د''(س) = -٢٤س

د''(-٢) = + قيمة صغرى محلية أصغر ما يمكن

د''(٢) = - قيمة عظمى محلية أكبر ما يمكن

∴ عند س = ٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

∴ المساحة م

٤٨ × ٢ - ٤ × (٢)^٣ = ٦٤ وحدة مربعة

---

٤ أكبر قيمة للمقدار : ٨س - س^٢

حيث س ∈ ح هي ....

(٨ ، ٤ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤)

دص/دس = ٨ - ٢س

بوضع د'(س) = ٠ ، ٢س = ٨

∴ س = ٤

د''(س) = -٢ ، د''(٤) = -٢ أكبر ما يمكن

∴ ٨س - س^٢ = ٨ × ٤ - (٤)^٢ = ١٦

تذكر

القطاع الدائري

المساحة $= \frac{1}{2}$ ل نق

$= \frac{1}{2}$ نق^2 هـ^{ء}

$= \frac{س^{\circ}}{360^{\circ}} \times \pi$ نق^2

المحيط $= 2$ نق $+$ ل

(ت) قطاع دائري مساحته ١٦ سم^2 أوجد طول نصف قطر دائرته الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن. وما قياس زاويته عندئذ؟

الحل

نصف القطر = نق وطول القوس = ل

م $= \frac{1}{2}$ ل نق

$\frac{1}{2}$ ل $\times$ نق $= 16$ ∴ ل $= \frac{32}{نق}$

المحيط = ل + ٢نق

$= \frac{32}{نق} + 2$ نق

$= 32$ نق$^{-1} + 2$ نق

ح$' = -32$ نق$^{-2} + 2$

$= 2 - \frac{32}{نق^2}$

بوضع ح$' = 0$ ∴ $\frac{32}{نق^2} = 2$ ∴ نق $= \pm 4$

ح$'' = 64$ نق$^{-3}$

ح$''(4) > 0$ صغرى محلية [أصغر ما يمكن]

∴ عند نق = ٤ سم يكون المحيط أصغر ما يمكن

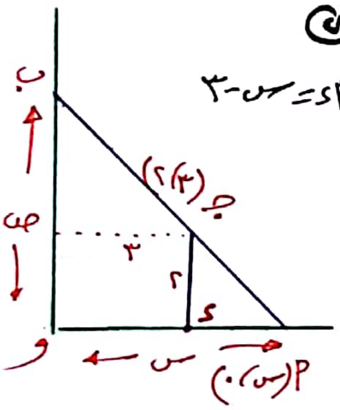
ويكون ل $= \frac{32}{نق} = \frac{32}{4} = 8$ سم

هـ$^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{8}{4} = 2^{ء}$

---

(٦) في مستوى إحداثي متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة ج(٣، ٢) ويقطع محوري الإحداثيات في أ، ب على الترتيب أثبت أنه أصغر مساحة للمثلث أ و ب = ١٢ وحدة مربعة

الحل



و أ = س و د = ٣ أ د = س − ٣

بالتشابه

$\frac{جد}{بو} = \frac{اد}{وا}$

$\frac{2}{ص} = \frac{س-3}{س}$

∴ ص $= \frac{2س}{س-3}$

م $= \frac{1}{2} \times$ س $\times$ ص

المساحة = م = د(س) $= \frac{1}{2} \times$ س $\left(\frac{2س}{س-3}\right)$

$\boxed{د(س) = \frac{س^2}{س-3}}$

د$' = \frac{(س-3)2س - س^2 \times 1}{(س-3)^2} = \frac{س^2 - 6س}{(س-3)^2}$

د$' = 0$ ∴ س(س − ٦) = ٠

س = ٠ مرفوض أو س = ٦ أصغر ما يمكن

∴ أصغر مساحة $= \frac{36}{6-3} = 12$ وحدة مربعة

الوحدة الرابعة

الدرس الأول ! لمحة التكامل

التفاضل

* إذا كانت $ص = س^{٣}$

$ءص = ٣س^{٢} ءس$

* إذا كانت $ع = ل^{٤}$

$ءع = ٤ل^{٣} ءل$

* إذا كانت $ص = ع . ل$

$ءص = ع ءل + ل ءع$

* إذا كانت $ص = \frac{ع}{ل}$

$ءص = \frac{ل ءع - ع ءل}{ل^{٢}}$

التكامل بالتعويض

فاكر القاعدتين

① $\int [د(س)]^{ن} د'(س) ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

② $\int \frac{د'(س)}{د(س)} ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

إذا وجدت الدالة ومشتقتها ضرب ببعض

هنستخدم القاعدتين اللي فوق

طيب إذا لم نجدهم بصورة

هنستخدم التعويض

المشكلة مع اللي داخل الأقواس أو تحت الجذر

$\sqrt{\ }$ ← ماتحت الجذر $= ع^{٢}$

$\sqrt[٣]{\ }$ ← ماتحت الجذر $ع^{٣}$ وهكذا

المسائل

① $\int س^{٣} (٢س^{٤}+٣)^{٥} ءس$

الحل

$ع = ٢س^{٤} + ٣$

$ءع = ٨س^{٣} ءس$

$\therefore س^{٣} ءس = \frac{ءع}{٨}$

$\frac{١}{٨} \int ع^{٥} ءع = \frac{١}{٨} \times \frac{ع^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٤٨} (٢س^{٤}+٣)^{٦} + ث$

على فكرة كان ممكن نحله بالطريقة الأسهل
تظبط اللي بره يبقى مشتقة اللي جوه

$$\frac{1}{8}\int 8س^3(2س^4+3)^5 \, دس$$

$$\frac{1}{8}\times\frac{(2س^4+3)^6}{6}+ث$$

$$=\frac{1}{48}(2س^4+3)^6+ث$$

---

٢ $\int \frac{5س}{3س^2-1}\, دس$

$$ع = 3س^2-1$$

$$دع = 6س \, دس$$

$$\frac{5}{6}\int \frac{دع}{ع}$$

$$=\frac{5}{6}\, لو|ع|+ث$$

$$=\frac{5}{6}\, لو_{هـ}|3س^2-1|+ث$$

---

٣ $\int س\sqrt{س^2+1}\, دس$

الحل

$$ع=\sqrt{س^2+1}$$

$$ع^2=س^2+1$$

$$\cancel{2}ع\, دع = \cancel{2}س\, دس$$

$$\int ع\,(ع\cdot دع)$$

$$\int ع^2\, دع$$

$$=\frac{1}{3}ع^3+ث=\frac{1}{3}(س^2+1)^{\frac{3}{2}}+ث$$

---

٤ $\int (س^2-1)\sqrt{س+1}\, دس$

الحل

$$\sqrt{س+1}=ع$$

$$\boxed{دس = 2ع\, دع}$$

$$س+1 = ع^2$$

$$س = ع^2-1$$

$$س^2 = (ع^2-1)^2$$

$$(س^2-1) = (ع^2-1)^2-1$$

$$\int\left[(ع^2-1)^2-1\right]\times ع\; 2ع\, دع$$

$$\int\left[ع^4-2ع^2+\cancel{1}-\cancel{1}\right]2ع^2\, دع$$

$$\int (2ع^6-4ع^4)\, دع$$

$$\frac{2}{7}ع^7-\frac{4}{5}ع^5+ث$$

$$=\frac{2}{7}(س+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(س+1)^{\frac{5}{2}}+ث$$

---

٥ $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{س}}{س}}\, دس$

الحل

بوضع $ع = 1+\sqrt{س}$

$$\sqrt{س} = ع-1$$

$$س = (ع-1)^2$$

$$دس = 2(ع-1)\, دع$$

$$\int \sqrt{\frac{ع}{\cancel{(ع-1)^2}}}\times 2\cancel{(ع-1)}\, دع$$

$$= \int ٢ \sqrt{ع}\ دع$$

$$\int ٢\ ع^{\frac{١}{٢}}\ دع$$

$$٢ \times \frac{٢}{٣}\ ع^{\frac{٣}{٢}}\ دع$$

$$\frac{٤}{٣}\left(١ + \sqrt{س}\right)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

---

٦ $\int \frac{س}{س+١}\ دس$

$$ع = س + ١$$

$$س = ع - ١$$

$$دس = دع$$

$$\int \frac{ع - ١}{ع}\ دع$$

$$\int \left(\frac{ع}{ع} - \frac{١}{ع}\right) دع$$

$$\int \left(١ - \frac{١}{ع}\right) دع$$

$$ع - لو_{هـ}|ع| + ث$$

$$= (س+١) - لو_{هـ}|س+١| + ث$$

التكامل بالتجزئ

وده نستخدمه عندما نجد الدالة مضروبه في بعض

واحدة هنكاملها والثانية هنفاضلها

---

* أسية مع كثيرة حدود

↓ تكاملها ↓ تفاضلها

---

* لوغاريتمية مع كثيرة حدود

↓ هنفاضلها ↓ هنكاملها

---

* جبرية مع دالة مثلثية

↓ هنفاضلها ↓ هنكاملها

$$\int ع\ دص = ع\ ص - \int ص\ دع$$

ع   دص

تفاضل   تكامل

دع $\int = ص$

$$= ع\ ص - \int ص\ دع$$

أوجد كلاً مما يلي:

⑦ $\int س\ هـ^{س}\ ء س$

$س$	$هـ^{س}$
1	$هـ^{س}$

$= س\ هـ^{س} - \int هـ^{س}\ ء س$

$= س\ هـ^{س} - هـ^{س} + ث$

$= هـ^{س}(س - 1) + ث$

⑧ $\int \frac{س}{هـ^{2س}}\ ء س$

$= \int س\ هـ^{-2س}\ ء س$

$س$	$هـ^{-2س}$
1	$-\frac{1}{2}\ هـ^{-2س}$

$= -\frac{1}{2}\ س\ هـ^{-2س} - \int -\frac{1}{2}\ هـ^{-2س}\ ء س$

$= -\frac{1}{2}\ س\ هـ^{-2س} - \frac{1}{4}\ هـ^{-2س} + ث$

⑨ $\int لو_{هـ} س^{2}\ ء س$

$= \int 2\ لو_{هـ} س\ ء س$

$2\ لو_{هـ} س$	$ء س$
$\frac{2}{س}$	$س$

$= 2س\ لو_{هـ} س - \int \cancel{س} \times \frac{2}{\cancel{س}}\ ء س$

$= 2س\ لو_{هـ} س - \int 2\ ء س$

$= 2س\ لو_{هـ} س - 2س + ث$

⑩ $\int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 3}\ ء س$

لاحظ مشتقة $هـ^{2س} + 3$ هى $2هـ^{2س}$

$\frac{1}{2} \int \frac{2هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 3}\ ء س$

$\frac{1}{2}\ لو_{هـ} |هـ^{2س} + 3| + ث$

⑪ $\int س^{2}\ هـ^{س}\ ء س$

الحل

$س^{2}$		$هـ^{س}$
$2س$	$+$	$هـ^{س}$
2	$-$	$هـ^{س}$
0	$+$	$هـ^{س}$

$= س^{2}\ هـ^{س} - 2س\ هـ^{س} + 2هـ^{س} + ث$

* يستخدم عمود التكامل عندما يكون:
الأس أكبر من ١ والإشارات
تتناوب + ثم − ثم + وهكذا

(١٢) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة م(٢ ، ٣) ، وميل العمودي عليه عند أي نقطة هو ٣ - س

الحل

∵ ميل العمودي = ٣ - س

∴ ميل المماس = $\frac{-1}{\text{٣ - س}} = \frac{1}{\text{س - ٣}}$

ص = $\int \frac{1}{\text{س - ٣}}$ ءس

= $\text{لو}_{\text{هـ}}$ |س - ٣| + ث

بالتعويض بـ (٢ ، ٣)

$\text{لو}_{\text{هـ}}$ |٢ - ٣| + ث = ٣

٠ + ث = ٣ ∴ ث = ٣

∴ معادلة المنحنى هي

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ |س - ٣| + ٣

لاحظ الفرق بينهم

(١) $\int \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ءس

$\int \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ءس البسط تفاضل المقام

= $\text{لو}_{\text{هـ}}$ |$\text{لو}_{\text{هـ}}$ س| + ث

(٢) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}$ ءس

$\int \frac{1}{\text{س}}$ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ءس دالة × مشتقتها

$\frac{1}{2}$ ($\text{لو}_{\text{هـ}}$ س)^2 + ث

(٣) $\int$ س $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ءس

تجزئ

$\text{لو}_{\text{هـ}}$ س   س

$\frac{1}{\text{س}}$ $\frac{1}{2}$ س^2

= $\frac{1}{2}$ س^2 $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س - $\int \frac{1}{2}$ × س^2 × $\frac{1}{\text{س}}$ ءس

= $\frac{1}{2}$ س^2 $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س - $\frac{1}{2}\int$ س ءس

= $\frac{1}{2}$ س^2 $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س - $\frac{1}{4}$ س^2 + ث

الدرس الثاني
تكامل الدوال المثلثيه

١) $\int$ جا س ء س = − جتا س + ث

٢) $\int$ جتا س ء س = جا س + ث

٣) $\int$ قا^2 س ء س = ظا س + ث

٤) $\int$ قتا^2 س ء س = − ظتا س + ث

٥) $\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث

٦) $\int$ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

ملاحظات

جا^{2}س + جتا^{2}س = ١

١ − جا^{2}س = جتا^{2}س

١ − جتا^{2}س = جا^{2}س

---

١ + ظا^{2}س = قا^{2}س

قا^{2}س − ظا^{2}س = ١

قا^{2}س − ١ = ظا^{2}س

---

١ + ظتا^{2}س = قتا^{2}س

جتا ٢س

جتا^{2}س − جا^{2}س

٢ جتا^{2}س − ١

١ − ٢ جا^{2}س

جتا^{2}س = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا ٢س

جا^{2}س = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س

المسائل

١) $\int$ (جا س + جتا س) ء س

الحل

− جتا س + جا س + ث

---

٢) $\int$ قا^2 (٥ − ٣س) ء س

الحل

$\frac{-1}{3}$ ظا (٥ − ٣س) + ث

---

٣) $\int$ قا ٢س ظا ٢س ء س

الحل

$\frac{1}{2}$ قا ٢س + ث

٤) $\int (1+\text{ظا}^2\text{س})\,\text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\int 1\ \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

٥) $\int \frac{1}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$\int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$\int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = -\text{ظتاس} + \text{ث}$

٦) $\int \frac{\text{جا}^2(2\text{س}-3)}{1-\text{جتا}(2\text{س}-3)}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1-\text{جتا}^2(2\text{س}-3)}{1-\text{جتا}(2\text{س}-3)}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{[1-\text{جتا}(2\text{س}-3)]}\,[1+\text{جتا}(2\text{س}-3)]}{\cancel{[1-\text{جتا}(2\text{س}-3)]}}\ \text{ءس}$

$\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}(2\text{س}-3) + \text{ث}$

٧) $\int \text{جا}^5\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{ءس}$

$\text{د(س)} = \text{جاس}$

$\text{د}'\text{(س)} = \text{جتاس}$

$\frac{1}{6}\text{جا}^6\text{س} + \text{ث}$

٨) $\int \text{قا}^5\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$

$\text{د(س)} = \text{قاس}$

$\text{د}'\text{(س)} = \text{قاس ظاس}$

$\int \text{قا}^4\text{س}\ (\text{قاس ظاس})\ \text{ءس}$

$\frac{1}{5}\text{قا}^5\text{س} + \text{ث}$

٩) $\int \text{ظتا}^3\text{س}\ \text{ءس}$

$\int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$\int (\text{قتا}^2\text{س}-1)\ \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ظتاس} - \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$\int \left[\text{قتاس}\,(\text{قتاس ظتاس}) - \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right] \text{ءس}$

$-\frac{1}{2}\text{قتا}^2\text{س} - \text{لوهـ}\,|\text{جاس}| + \text{ث}$

أو $= -\frac{1}{2}\text{قتا}^2\text{س} + \text{لوهـ}\,|\text{قتاس}| + \text{ث}$

ملحوظة هامة

∫ هـ^س [د(س) + د'(س)] ءس

= هـ^س د(س) + ث

أمثلة

* ∫ هـ^س [جتاس + جاس] ءس

= هـ^س جاس + ث

* ∫ هـ^س (ظتاس − قتا²س) ءس

= هـ^س ظتاس + ث

* مع العلم انه فى الخطوات نستخدم التجزئ العادى

---

(١٠) ∫ س جتاس ءس

س	جتاس
١	جاس

س جاس − ∫ جاس ءس

س جاس + جتاس + ث

---

(١١) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر (١، −٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه هو دص/دس = ٣π جتا πس − ٢π جا πس

الحل

∵ دص/دس = ٣π جتا πس − ٢π جا πس

بالتكامل

ص = ∫ (٣π جتا πس − ٢π جا πس) ءس

= $\frac{٣\pi}{\pi}$ جا πس + $\frac{٢\pi}{\pi}$ جتا πس + ث

ص = ٣ جا πس + ٢ جتا πس + ث

بالتعويض بـ (١، −٢)

٣ جا ١٨٠° + ٢ جتا ١٨٠° + ث = −٢

−٢ + ث = −٢

ث = −٢ + ٢ ∴ ث = ٠

∴ المعادلة هى ص = ٣ جا πس + ٢ جتا πس

الدرس الثالث
التكامل المحدود

① $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ء س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ء س}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ء س} = \text{صفر}$

③ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ء س} =$

④ $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\, \text{ء س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ء س}$

* فى حالة التماثل $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}}$ نبحث نوع

(أ) إذا كانت الدالة فردية $\text{د(}-\text{س)} = -\text{د(س)}$

$\therefore \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ء س} = \text{صفر}$

(ب) وإذا كانت زوجية $\text{د(}-\text{س)} = \text{د(س)}$

$\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ء س} = 2\int_{0}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ء س}$

⑤ لاحظ $\text{جتا}(-\theta) = \text{جتا}\,\theta$ زوجية

$\text{جا}(-\theta) = -\text{جا}\,\theta$

$\text{ظا}(-\theta) = -\text{ظا}\,\theta$ فردية

المسائل

① $\int_{-1}^{2} (2\text{س} + 3)\, \text{ء س}$

الحل

$\left[\frac{2\text{س}^2}{2} + 3\text{س}\right]_{-1}^{2}$

$= \left[\text{س}^2 + 3\text{س}\right]_{-1}^{2}$

$= [4 + 6] - [1 - 3]$

$10 + 2 = 12$

② $\int_{0}^{1} 2\,\text{جا}\,\pi\,\text{ع}\, \text{ء ع}$

الحل

$\left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,\pi\,\text{ع}\right]_{0}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,180\right] - \left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,0\right]$

$\left(-\frac{2}{\pi} \times -1\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \times 1\right)$

$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$

③ $\int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1 + \text{س}^2}\, \text{ء س}$

الحل

نبحث نوع الدالة $\text{د(}-\text{س)} = \frac{-\text{س}}{1 + (-\text{س})^2} = -\left(\frac{\text{س}}{1 + \text{س}^2}\right)$

فردية

$\therefore \int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1 + \text{س}^2}\, \text{ء س} = \text{صفر}$

④ $\int_{-٢}^{٢} (س^{٣} \sqrt{س^{٤}+٣}) \, ءس$

الحل

نبحث نوع الدالة

$د(-س) = (-س)^{٣} \sqrt{(-س)^{٤}+٣}$

$= -(س^{٣} \sqrt{س^{٤}+٣}) = -د(س)$

فردية

$\therefore \int_{-٢}^{٢} (س^{٣} \sqrt{س^{٤}+٣}) \, ءس = صفر$

---

⑤ $\int_{-٣}^{٣} (س^{٢}-١) \, ءس$

الحل

$د(-س) = (-س)^{٢}-١ = س^{٢}-١$

$= د(س)$ زوجية

$= ٢ \int_{٠}^{٣} (س^{٢}-١) \, ءس$

$٢ \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - س\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢\left[(\frac{١}{٣} \times ٢٧ - ٣) - (\quad ٠ \quad)\right]$

$٢\left[(٩-٣)\right] = ١٢$

---

⑥ إذا كانت د متصلة $[٢، ٧]$

فأوجد $\int_{٢}^{٧} د(س) \, ءس + \int_{٧}^{٤} د(س) \, ءس$

$= - - -$

الحل

$\int_{٢}^{٧} د(س) \, ءس - \int_{٤}^{٧} د(س) \, ءس$

$\therefore \int_{٢}^{٤} د(س) \, ءس$

---

⑦ إذا كانت د متصلة $[١، ٤]$

فأوجد $\int_{١}^{٤} د(س) \, ءس + \int_{٤}^{١} د(س) \, ءس = ...$

الحل

$= \int_{١}^{٤} د(س) \, ءس - \int_{١}^{٤} د(س) \, ءس = صفر$

---

⑧ إذا كانت د دالة زوجية متصلة

على $[-٤، ٤]$ ، $\int_{-٤}^{٤} د(س) \, ءس = ٢٠$

، $\int_{٠}^{٢} د(س) \, ءس = ٦$

ما قيمة $\int_{-٤}^{٢} د(س) \, ءس$ ؟

الحل

$\because \int_{-٤}^{٤} د(س) \, ءس = ٢ \int_{-٤}^{٠} د(س) \, ءس = ٢٠$

$\therefore \int_{-٤}^{٠} د(س) \, ءس = ١٠$

$\therefore \int_{-٤}^{٢} د(س)\, ءس$

$= \int_{-٤}^{٠} د(س)\, ءس + \int_{٠}^{٢} د(س)\, ءس$

$= ١٠ + ٦ = ١٦$

٩ إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + س^٢ & ، س < ٠ \\ ٢س - س^٢ & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

أوجد $\int_{-١}^{٣} د(س)\, ءس$

الحل

$\int_{-١}^{٣} د(س)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٠} د(س)\, ءس + \int_{٠}^{٣} د(س)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٠} (٢س + س^٢)\, ءس + \int_{٠}^{٣} (٢س - س^٢)\, ءس$

$= \left[س^٢ + \frac{١}{٣} س^٣\right]_{-١}^{٠} + \left[س^٢ - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$\left[٠ - (١ - \frac{١}{٣})\right] + \left[(٩ - ٩) - ٠\right]$

$= \frac{-٢}{٣}$

١٠ $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\, ءس$

الحل

$$د(س) = |س + ١| = \begin{cases} س + ١ & س \geq -١ \\ -س - ١ & س < -١ \end{cases}$$

$\therefore \int_{-٤}^{٢} د(س)\, ءس$

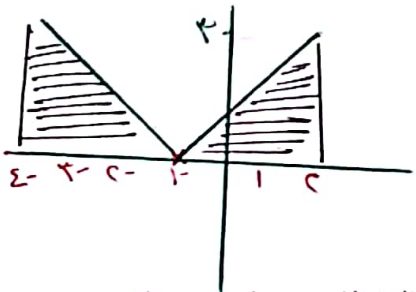
$= \int_{-٤}^{-١} د(س)\, ءس + \int_{-١}^{٢} د(س)\, ءس$

$= \left[-\frac{١}{٢} س^٢ - س\right]_{-٤}^{-١} + \left[\frac{١}{٢} س^٢ + س\right]_{-١}^{٢}$

حل آخر

ملحوظة

يمكن حل تكاملات المقياس بهذه الطريقة



المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ + \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣$

$= ٤٫٥ + ٤٫٥ = ٩$

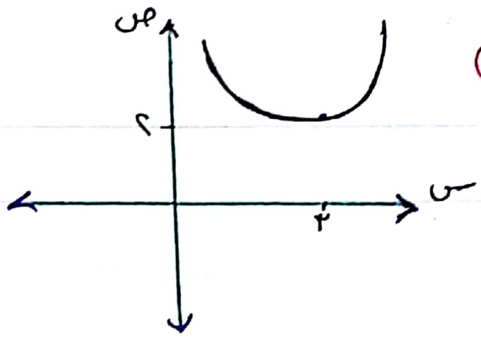
الدرس الرابع

المساحات في المستوى

تذكر أن

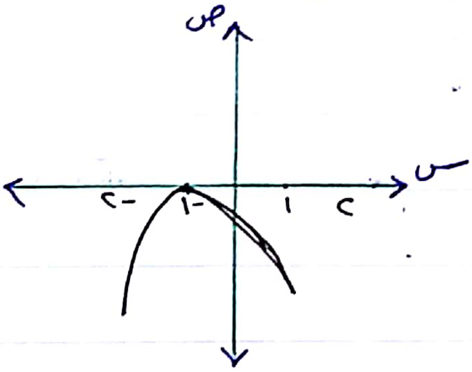
(١) $د(س) = (س - ٣)^٢ + ٢$

(٣، ٢)

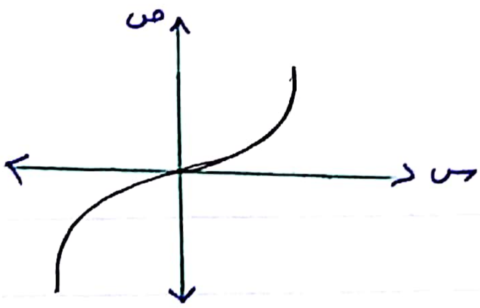


(٢) $د(س) = -(س + ١)^٢$

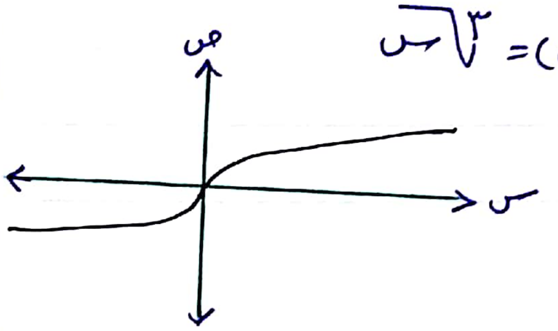
(-١، ٠)



(٣) $د(س) = س^٣$

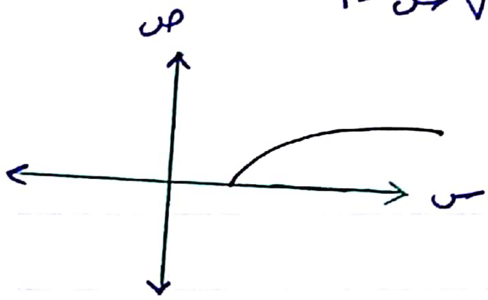


(٤) $د(س) = \sqrt[٣]{س}$

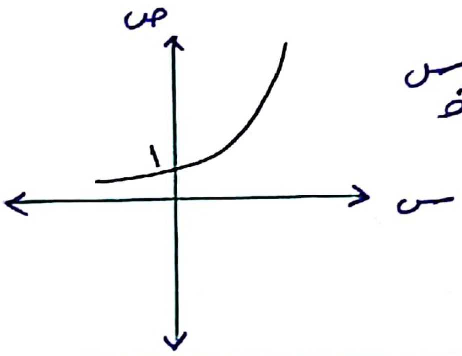


(٥) $د(س) = \sqrt{س - ١}$

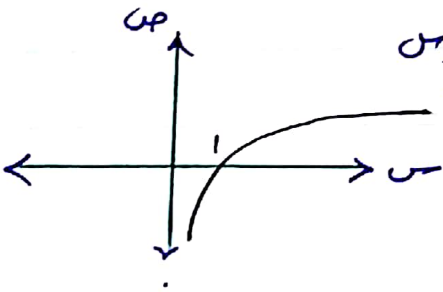
(١، ٠)



(٦) $د(س) = هـ^{س}$



(٧) $د(س) = لو_{هـ} س$



محور السينات ص = ٠

محور الصادات س = ٠

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين

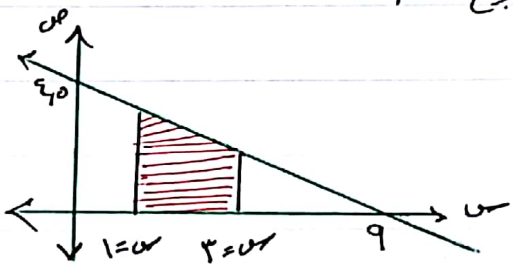
(٨) $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ٠$

الحل

نرسم المستقيم $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$

بوضع $\text{س} = ٠$ ∴ $\text{ص} = ٤٫٥$

بوضع $\text{ص} = ٠$ ∴ $\text{س} = ٩$



$\text{ص} = ٠$ محور السينات

∵ $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$

$٢\text{ص} = ٩ - \text{س}$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}(٩ - \text{س})$

$$\int_{١}^{٣} \frac{١}{٢}(٩ - \text{س})\, \text{ء س}$$

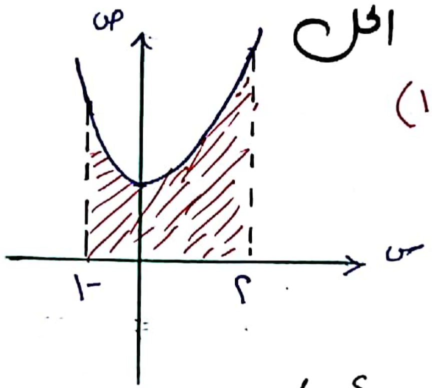
$$\frac{١}{٢}\left[٩\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٣}$$

$$\frac{١}{٢}\left[(٢٧ - ٤٫٥) - (٩ - \frac{١}{٢})\right]$$

$\frac{١}{٢}[١٤] = ٧$ وحدة مربعة

(٩) منحنى الدالة $\text{د(س)} = ٣\text{س}^{٢} + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٢$

الحل



رأس المنحنى (٠، ١)

$$\text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + ١)\, \text{ء س}$$

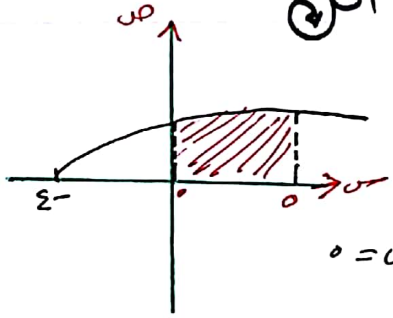
$$= \left[\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= (٨ + ٢) - (-١ - ١)$$

$= ١٠ + ٢ = ١٢$ وحدة مربعة

(١٠) المنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٤}$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٥$ ، $\text{ص} = ٠$

الحل



رأس المنحنى (−٤، ٠)

$\text{ص} = ٠$ محور السينات

، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٥$

$$\text{المساحة} = \int_{٠}^{٥} \sqrt{\text{س} + ٤}\, \text{ء س}$$

$$\left[\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٥}$$

$= \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة

(١١) منحنيي الدالتين د(س) = س² − ٢
، ر(س) = ٣ − (س + ١)²

الحل

بحل المعادلتين لإيجاد نقط التقاطع

س² − ٢ = ٣ − (س² + ٢س + ١)

س² − ٢ = ٣ − س² − ٢س − ١

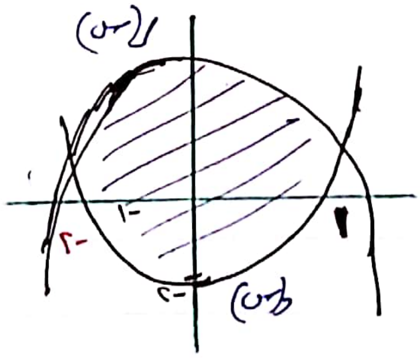
٢س² + ٢س − ٢ − ٣ + ١ = ٠

٢س² + ٢س − ٤ = ٠ ÷ ٢

س² + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = -٢}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$



م = $\int_{-٢}^{١}$ [ر(س) − د(س)] دس

= $\int_{-٢}^{١}$ [(٣ − (س + ١)²) − (س² − ٢)] دس

= $\int_{-٢}^{١}$ [٣ − س² − ٢س − ١ − س² + ٢] دس

= $\int_{-٢}^{١}$ [−٢س² − ٢س + ٤] دس

= $\left[-\frac{٢}{٣}\right.$ س³ − س² + ٤س$\left.\right]_{-٢}^{١}$ = ٩ وحدة مربعة

(١٢) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث

د(س) = س³ − ٣س² + ٥

، ر(س) = س + ٢

الحل

بحل المعادلتين لإيجاد نقط التقاطع

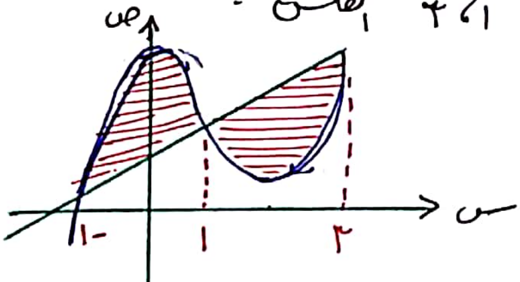
س³ − ٣س² + ٥ = س + ٢

س³ − ٤س² + ٣ = ٠

س = −١ ، ١ ، ٣ بالآلة

هناخد نقطة بين −١ ، ١ (٠) ونعوض في المعادلتين
هنجد أن د(س) > ر(س)

وبين ١ ، ٣ العكس (٢).



م = $\int_{-١}^{١}$ (س³ − ٣س² + ٥) − (س + ٢) دس

+ $\int_{١}^{٣}$ (س + ٢) − (س³ − ٣س² + ٥) دس

= $\int_{-١}^{١}$ (س³ − ٣س² − س + ٣) دس

+ $\int_{١}^{٣}$ (−س³ + ٣س² + س − ٣) دس

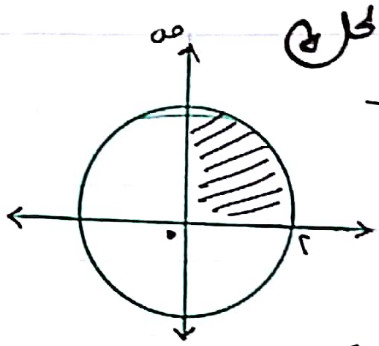
= $\left[\frac{١}{٤}\right.$س⁴ − س³ − $\frac{١}{٢}$س² + ٣س$\left.\right]_{-١}^{١}$ + $\left[-\frac{١}{٤}\right.$س⁴ + س³ + $\frac{١}{٢}$س² − ٣س$\left.\right]_{١}^{٣}$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة

١٣ باستخدام المساحة تحت المنحنى أوجد قيمة

$$\int_{0}^{2} \sqrt{4 - س^2}\; ء س$$

الحل



$ص = \sqrt{4 - س^2}$

$ص^2 = 4 - س^2$

$ص^2 + س^2 = 4$

وهى معادلة دائرة مركزها (٠، ٠)

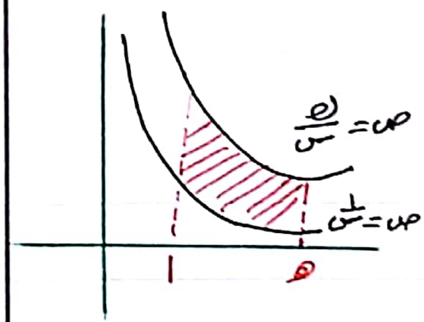
وطول نصف قطرها = ٢ وحدة طول

المساحة = $\frac{1}{4} \pi نق^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times 4$

$= \pi$ وحدة مربعة

---

١٤ إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٢ وحدة مربعة



فإن ك = ---

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

$$\int_{1}^{هـ} \left(\frac{ك}{س} - \frac{1}{س}\right) ء س$$

$$\left[ك \, لو_{هـ} |س| - لو_{هـ} |س| \right]_{1}^{هـ}$$

$$= \left[ك(لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} 1) - (لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} 1) \right] = 2$$

$ك - 1 = 2$

$\therefore ك = 3$ أى خدمة

ملحوظة

إذا لم يستطيع تعيين المنحنى الأعلى والأسفل [في مسائل متحبيه] اشتغل أى حاجة بس خد قيمه مطلقة وهتطلع صح

آخر درس يا جدعان
حجوم الأجسام الدورانية

① إذا كان الدوران حول محور السينات

$$ح = \pi \int_{س_1}^{س_2} ص^2 \; ءس$$

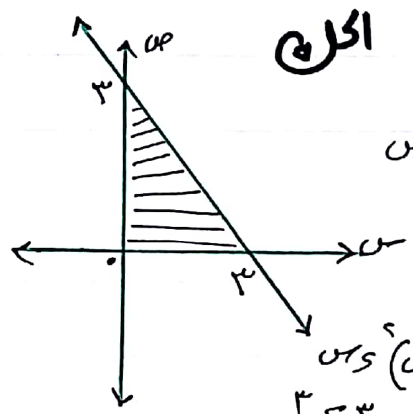
② إذا كان الدوران حول محور الصادات

$$ح = \pi \int_{ص_1}^{ص_2} س^2 \; ءص$$

المسائل

① أوجد حجم الجسم الناتج من دوران ص = ٣ − س ، س = ٠ ، ص = ٠ حول محور السينات دورة كاملة

الحل



$$= \pi \int_{0}^{3} ص^2 \; ءس$$

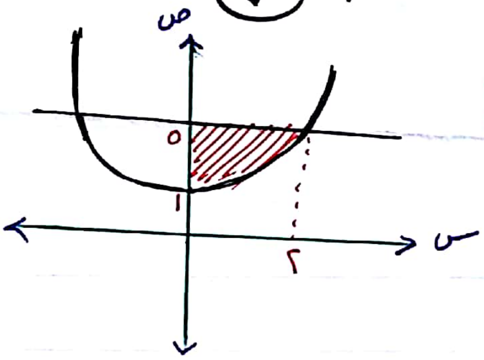
$$= \pi \int_{0}^{3} (٣ - س)^2 \; ءس$$

$$\pi \left[\frac{-1}{3} (س - ٣)^3 \right]_{0}^{3}$$

$$\pi \left[٠ - \left(\frac{-1}{3} \times ٢٧ \right) \right] = ٩\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

② أوجد حجم الناتج من دوران ص = س² + ١ ، س = ٠ ، ص = ٥ حول محور الصادات ومن الربع الأول

الحل



$$ح = \pi \int_{1}^{5} س^2 \; ءص$$

$$س^2 = ص - ١$$

$$ح = \pi \int_{1}^{5} (ص - ١) \; ءص$$

$$\pi \left[\frac{1}{2} ص^2 - ص \right]_{1}^{5}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{25}{2} - ٥ \right) - \left(\frac{1}{2} - ١ \right) \right]$$

$$= ٨\pi \text{ وحدة حجم}$$

③ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س² والمستقيم ص = ٢س دورة كاملة حول محور السينات

الحل

نقط التقاطع

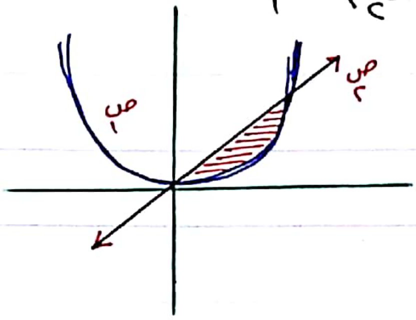
$$س^2 = ٢س$$

$$س^2 - ٢س = ٠$$

$$س(س - ٢) = ٠$$

$$س = ٠ \quad ، \quad س = ٢$$

فى هذه الفترة ص٢ > ص١



$\text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{ص}_{\text{٢}}^{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}^{\text{٢}})\, \text{ء س}$

$= \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} [(\text{٢س})^{\text{٢}} - (\text{س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}]\, \text{ء س}$

$\pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٤}})\, \text{ء س}$

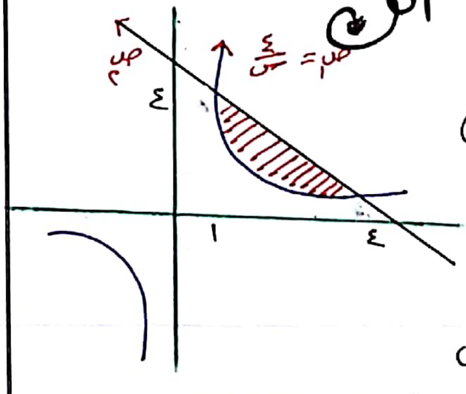
$\pi \left[\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{س}^{\text{٥}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٢}}$

$= \pi \left(\frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \text{٨} - \frac{\text{٣٢}}{\text{٥}}\right)$

$\pi \left(\frac{\text{٣٢}}{\text{٣}} - \frac{\text{٣٢}}{\text{٥}}\right) = \frac{\text{٦٤}}{\text{١٥}}\pi$ وحدة حجم

٤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$ والمستقيم $\text{س} + \text{ص} = \text{٥}$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل



لإيجاد نقط التقاطع

$\frac{\text{٤}}{\text{س}} = \text{٥} - \text{س}$

$\text{٤} = \text{٥س} - \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥س} - \text{٤} = \text{٠}$

$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٤} = \text{٠}$

$\text{س} = \text{١}$ ، $\text{س} = \text{٤}$

، $\text{ص}_{\text{٢}} > \text{ص}_{\text{١}}$

$\text{ح} = \pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} (\text{ص}_{\text{٢}}^{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}^{\text{٢}})\, \text{ء س}$

$= \pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \left[(\text{٥} - \text{س})^{\text{٢}} - \left(\frac{\text{٤}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}\right] \text{ء س}$

$\pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} (\text{٥} - \text{س})^{\text{٢}} - \text{١٦ س}^{\text{-٢}}\, \text{ء س}$

$\pi \left[\frac{\text{-١}}{\text{٣}}(\text{٥} - \text{س})^{\text{٣}} + \text{١٦ س}^{\text{-١}}\right]_{\text{١}}^{\text{٤}}$

$\pi \left[\left(\frac{\text{-١}}{\text{٣}} \times \text{١} + \frac{\text{١٦}}{\text{٤}}\right) - \left(\frac{\text{-٦٤}}{\text{٣}} + \frac{\text{١٦}}{\text{١}}\right)\right]$

$\pi \left[\frac{\text{-١}}{\text{٣}} + \text{٤} + \frac{\text{٦٤}}{\text{٣}} - \text{١٦}\right] = \text{٩}\pi$ وحدة حجم

٥ $\pi \int_{\text{-٢}}^{\text{٢}} (\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})\, \text{ء س}$ ، هو حجم . . .

(أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات

(ب) مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات

(ج) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة

(د) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{٤}$

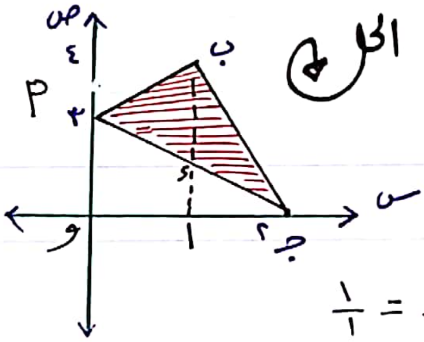
دائرة عند دورانها يعطى كرة نق = ٢ وحدة

٦) إذا كانت أ$(٠ ، ٣)$ ، ب$(١ ، ٤)$ ، جـ$(٢ ، ٠)$

أوجد باستخدام التكامل:

أ) مساحة سطح Δ أ ب جـ

ب) حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ و جـ دورة كاملة حول محور الصادات.



الحل

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$: $\frac{\text{ص}-٣}{\text{س}-٠} = \frac{٤-٣}{١-٠} = \frac{١}{١}$

$\text{ص}-٣ = \text{س}$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \text{س}+٣}$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$: $\frac{\text{ص}-٠}{\text{س}-٢} = \frac{٤-٠}{١-٢} = -٤$

$\boxed{\text{ص} = -٤\text{س}+٨}$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$: $\frac{\text{ص}-٣}{\text{س}-٠} = \frac{٠-٣}{٢-٠} = \frac{-٣}{٢}$

$\boxed{\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} + ٣}$

مساحة Δ أ ب جـ = م Δ أ ب د + م Δ د ب جـ

$= \int_{٠}^{١} (\text{س}+٣) - (\frac{-٣}{٢}\text{س}+٣)\, \text{ء س} + \int_{١}^{٢} (-٤\text{س}+٨) - (\frac{-٣}{٢}\text{س}+٣)\, \text{ء س}$

$= \int_{٠}^{١} (\frac{٥}{٢}\text{س})\, \text{ء س} + \int_{١}^{٢} (\frac{-٥}{٢}\text{س}+٥)\, \text{ء س}$

$= \left[\frac{٥}{٤}\text{س}^٢\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{-٥}{٤}\text{س}^٢ + ٥\text{س}\right]_{١}^{٢}$

$= \frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة

لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران Δ أ و جـ

$\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} + ٣$

$\therefore \frac{-٣}{٢}\text{س} = \text{ص} - ٣$

$\text{س} = \frac{-٢}{٣}\text{ص} - ٣ \times \frac{-٢}{٣}$

$\boxed{\text{س} = \frac{-٢}{٣}\text{ص} + ٢}$

$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^٢\, \text{ء ص}$

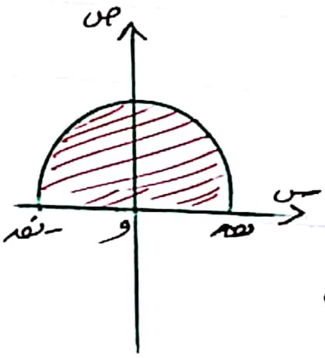
$= \pi \int_{٠}^{٣} (\frac{-٢}{٣}\text{ص}+٢)^٢\, \text{ء ص}$

$= \pi \left[\frac{(\frac{-٢}{٣}\text{ص}+٢)^٣}{٣ \times \frac{-٢}{٣}}\right]_{٠}^{٣} = ٤\pi$ وحدة حجم

٧) باستخدام التكامل اثبت أن

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi \text{نق}^٣$

الحل



الكرة تنتج من دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل حول محور السينات

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{نق}^٢$

$\text{ص}^٢ = \text{نق}^٢ - \text{س}^٢$

$\therefore$ حجم الكرة $= \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} (\text{نق}^٢ - \text{س}^٢)\, \text{ء س}$

$= ٢\pi \int_{٠}^{\text{نق}} (\text{نق}^٢ - \text{س}^٢)\, \text{ء س}$

$$ح = ٢\pi \left[\text{نق}^2 س - \frac{1}{3} س^3\right]_0^{\text{نق}}$$

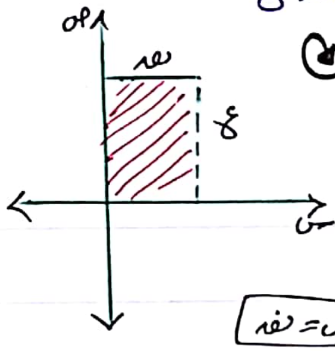
$$٢\pi \left[\text{نق}^3 - \frac{1}{3}\text{نق}^3\right]$$

$$٢\pi \times \frac{2}{3}\text{نق}^3 = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3 \text{ وحدة مكعبة}$$

---

(٨) اثبت أن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة $\pi\,\text{نق}^2 ع$

الحل



الاسطوانة تنشأ من دوران مستطيل بعداه نق، ع حول محور الصادات

$\boxed{س = \text{نق}}$

$$\text{الحجم} = \pi \int_0^{ع} س^2\, دص$$

$$= \pi \int_0^{ع} \text{نق}^2\, دص$$

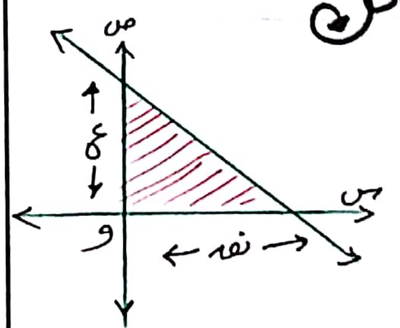
$$\pi \frac{1}{3}\left[\text{نق}^2 ص\right]_0^{ع}$$

$$ح = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2 ع \text{ وحدة مكعبة } \#$$

---

(٩) اثبت أن حجم المخروط $\frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2 ع$

الحل



$$\frac{س}{\text{نق}} + \frac{ص}{ع} = 1$$

دى المعادلة بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور

حول محور الصادات

$$\frac{س}{\text{نق}} = 1 - \frac{ص}{ع} \quad \therefore س = \text{نق}\left(1 - \frac{ص}{ع}\right)$$

$$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_0^{ع} س^2\, دص$$

$$\pi \int_0^{ع} \left(\text{نق} - \frac{\text{نق}\, ص}{ع}\right)^2 دص$$

$$= \pi \int_0^{ع} \left(\text{نق}^2 - \frac{٢\,\text{نق}^2 ص}{ع} + \frac{\text{نق}^2 ص^2}{ع^2}\right) دص$$

$$= \pi \left[\text{نق}^2 ص - \frac{\text{نق}^2 ص^2}{ع} + \frac{1}{3}\frac{\text{نق}^2 ص^3}{ع^2}\right]_0^{ع}$$

$$= \pi \left[\cancel{\text{نق}^2 ع} - \cancel{\frac{\text{نق}^2 ع^2}{ع}} + \frac{1}{3}\frac{\text{نق}^2 ع^3}{ع^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2 ع \text{ وحدة مكعبة}$$

انتظرى المصحح مع أطيب تمنياتى

القلبية بالنجاح والتفوق

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات