بسم الله الرحمن الرحيم

أجوبة ٥٠ سؤال تفاضل وتكامل (الوزارة)

١) ب	٢) جـ
٣) جـ	٤) ب
٥) ء	٦) ء
٧) م	٨) ب
٩) م	١٠) جـ
١١) جـ	١٢) ب
١٣) د'(س)	١٤) ٩
١٥) -٤	١٦) ٢
١٧) ٢٥,١٢ سم٢	١٨) ١٦
١٩) -١	٢٠)]-∞،٢,٥[∪]٢,٥،∞[
٢١) -١	٢٢) $\frac{1}{3}(2س+1)^{\frac{3}{2}}+ث$
٢٣) صفر	٢٤) صاس + حاس
	٢٥) ٢

أنس حسن

نسألكم الدعاء

(٢٦) اوجد $\int \sqrt{3س - 1}\ د س$ الحل

$$\int (3س-1)^{\frac{1}{2}} \cdot د س = \frac{(3س-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 3} + ث = \frac{2}{9}(3س-1)^{\frac{3}{2}} + ث$$

اوجد $\int جتا^{\frac{س}{2}} \cdot د س$ الحل

$$= \frac{جا^{\frac{س}{2}}}{\frac{1}{2}} + ث = 2 جا^{\frac{س}{2}} + ث$$

(٢٧) اذا كانت د حيث د(س) $= \begin{cases} س^3 + 4 & \text{عندما } س > 1 \\ أس + ب & \text{عندما } س \leq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمة أ، ب

الحل ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ تكون متصلة عند س = ١

أى أن النزاية اليمنى = النزاية اليسرى

$$\lim_{س \to 1^+} (أس + ب) = \lim_{س \to 1^-} (س^3 + 4)$$

$$أ + ب = 5$$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ المشتقة اليمنى = المشتقة اليسرى

$$3س^2 = أ \quad \text{عند } س = 1$$

$$∴ أ = 3$$

بالتعويض فى $أ + ب = 5$ ∴ $ب = 2$

(٢٨) اذا كان $س^2 + ص^2 = 16$ فأثبت أن $\frac{د^2 ص}{د س^2} + \left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 + 1 = 0$

الحل ← بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$$2س + 2ص \frac{د ص}{د س} = 0$$ بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س

$$2 + 2\left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 + 2ص \frac{د^2 ص}{د س^2} = 0 \div 2$$

$$ص \frac{د^2 ص}{د س^2} + \left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 + 1 = 0$$

نسألكم الدعاء

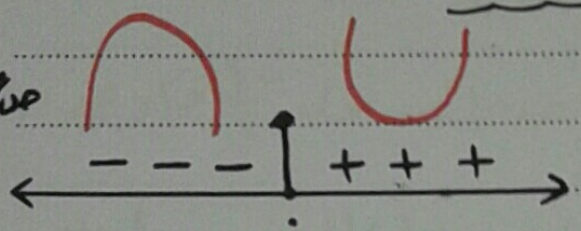
(٢٩) عين فترات التحدب الى أعلى وفترات التحدب الى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت للمنحنى ص = س (س² - ١)

الحل ص = س³ - س

الميل الأول ص' = ٣س² - ١

الميل الثاني ص'' = ٦س

بوضع ص'' = ٦س = ٠ ∴ س = ٠



من العبارة] -∞ ، ٠ [تحدب لأعلى

من العبارة] ٠ ، ∞ [تحدب لأسفل

نقطة الانقلاب س = ٠ ، بتعويض

من الدالة الأصلية ص = س (س² - ١) عندما س = ٠

تكون نقطة الانقلاب (٠ ، ٠)

(٣٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة: $\frac{ص}{س} = \frac{٢س^٣ + ١}{س^٢}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٢)

الحل

معادلة المنحنى = ∫ ميل المماس . دس

$$ص = \int \frac{٢س^٣ + ١}{س^٢} \cdot دس$$

$$ص = \int (٢س + س^{-٢}) \cdot دس$$

$$ص = \frac{٢س^٢}{٢} + \frac{س^{-١}}{-١} + ث$$

$$ص = س^٢ - \frac{١}{س} + ث$$

عند (١ ، ٢)

$$٢ = ١ - ١ + ث$$

$$\therefore ث = ٢$$

∴ معادلة المنحنى ص = $س^٢ - \frac{١}{س} + ٢$

نسألكم الدعاء

(٣١) يزداد طول حرف مكعب بمعدل ثابت يساوى $\frac{1}{4}$ سم/ث . اوجد معدل تغير حجمه عند اللحظة التى يكون فيها طول حرفه = ٦ سم

الحل نفرض الحجم ح ، طول الحرف ل

$\therefore ح = ل^3$ ، $\frac{د ل}{د ن} = \frac{1}{4}$ سم/ث عندما ل = ٦

$\frac{د ح}{د ن} = ٣ ل^2 \times \frac{د ل}{د ن} = ٣ \times (٦)^2 \times \frac{1}{4} = ٢٧$ سم^3/ث

(٣٢) اذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = س^2 - س - ١$ يساوى $\frac{1}{2}$ فاوجد معادلة هذا المماس . الحل

$\therefore$ ميل المماس $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2}$ وباستخدام معادلة المنحنى لـ س

$٢ ص \frac{د ص}{د س} = ١$ ← $٢ ص \times \frac{1}{2} = ١$ $\therefore ص = ١$

نعوض فى معادلة المنحنى عن ص = ١ لايجاد س $\therefore س = ٢$

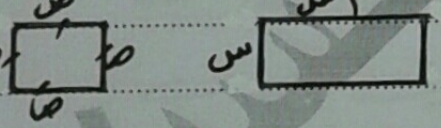
$\therefore$ المماس يمس المنحنى عند النقطة (٢، ١) والواقعة عليه

معادلة المماس (المستقيم) $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} =$ الميل

$\frac{ص + ١}{س - ٢} = \frac{1}{2}$ ← $ص = \frac{1}{2} س - ٢$

(٣٣) سلك طوله ٦٨ سم قسم الى جزئين . شكل الجزء الاول على شكل مستطيل عرضه س سم وطوله ضعف عرضه وشكل الجزء الثانى على شكل مربع اوجد قيمة س بحيث يكون مجموع مساحتى المستطيل والمربع أصغر ما يمكن

الحل طول السلك = محيط المستطيل + محيط المربع



$٦ س + ٤ ص = ٦٨$ ← $\therefore ص = ١٧ - \frac{3}{2} س$

م = مساحة المستطيل + مساحة المربع

$م = ٢ س^2 + ص^2$ ← بالتعويض عن $ص = ١٧ - \frac{3}{2} س$

$\therefore م = \frac{17}{4} س^2 - ٥١ س + ٢٨٩$

$\frac{د م}{د س} = \frac{17}{2} س - ٥١$ نضع $\frac{د م}{د س} = ٠$ ← $\therefore س = ٦$ سم

وبالتعويض $ص = ١٧ - \frac{3}{2}(٦) = \therefore ص = ٨$ سم

لسائكم الدعاء

(٣٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = { س + ٥ عندما س ≤ ٢ ، ٢س^٢ + ب عندما س > ٢ }

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة ب ثم ابحث قابلية الاشتقاق للدالة عند س = ٢

الحل ∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

٢س^٢ + ب = س + ٥

٨ + ب = ٢ + ٥ ∴ ب = ١٠ - ٨ = ٢

ليست قابلية الاشتقاق عند س = ٢ غير قابلة للاشتقاق [متروك للطالب]

(٣٥) أوجد معادلة العمودي للمنحنى الذي معادلته ص = √(٦ - س) عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س

الحل نوجد نقطة تقاطعهما التي تحقق المعادلتين معاً

∴ ص = √(٦ - س) ، ص = س ... بحل المعادلتين معاً

س = √(٦ - س) ... بتربيع الطرفين

س^٢ = ٦ - س ← س^٢ + س - ٦ = ٠ ← (س + ٣)(س - ٢) = ٠

س = -٣ ، س = ٢

بالتعويض عن س = -٣ في ص = √(٦ - (-٣)) = ٣ ... لا تحقق الشرط ص = س

بالتعويض عن س = ٢ في ص = √(٦ - ٢) = ٢ ... تحقق

∴ نقطة تقاطعهما (٢، ٢)

∴ ص = √(٦ - س) ← ص = (٦ - س)^(١/٢) عند (٢، ٢)

ص = (٦ - س)^(١/٢) ← ص = (٦ - س)^(-١/٢) × (-١)

ص = -١ / √(٦ - س)

∴ ميل المماس = ص = -١/٤ ← ∴ ميل العمودي = ٤

معادلة العمودي ← (ص - ص١) / (س - س١) = ميل العمودي

(ص - ٢) / (س - ٢) = ٤/١ ← ص - ٤س + ٦ = ٠

(٣٦) اوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة د في الفترة [-١، ٤]
حيث د(س) = س³ - ٩س² + ١٥س

الحل ← د'(س) = ٣س² - ١٨س + ١٥

نضع د'(س) = ٠ ونقسم ÷ ٣ ∴ س² - ٦س + ٥ = ٠

(س - ٥)(س - ١) = ٠ ← ∴ س = ٥ ، س = ١

∴ س = ٥ ∉ [-١، ٤] ، س = ١ ∈ [-١، ٤] وتعتبر نقطة حرجة

∴ د(١) = (١)³ - ٩(١)² + ١٥(١) = ٧

← القيمة العظمى المطلقة

د(-١) = (-١)³ - ٩(-١)² + ١٥(-١) = -٢٤ ← القيمة الصغرى المطلقة

د(٤) = (٤)³ - ٩(٤)² + ١٥(٤) = -٢٠

(٣٧) اوجد ∫ (٣س + ١)⁵ . دس الحل = $\frac{١}{١٢}$ (٣س + ١)⁶ + ث

∫ (قاس + ٢ ظاس) . دس الحل = طاس - ظا٢س + ث

(٣٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند اى نقطة عليه (س، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س}{١ + ظاص}$ اوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة الاصل

الحل ←

معادلة المنحنى = ∫ ميل المماس . دس

نستخدم قاعدة فصل المتغيرات والتكامل

∫ س . دس = ∫ ١ + ظاص . دص بالتكامل

$\frac{١}{٢}$ س² + ث = ص + ظاص

يمر بالنقطة (٠، ٠) ← ∴ ث = صفر

$\frac{١}{٢}$ س² = ص + ظاص

∴ ص + ظاص = $\frac{١}{٢}$ س²

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س² - ظاص

نسألكم الدعاء

(٣٩) إذا كان $س^{٢}ص = ٢س + ٥$ فأثبت أن $س^{٢}\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٤س\frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠$

الحل بالاستقامة بالنسبة لـ س

$٢س ص + س^{٢}\frac{دص}{دس} = ٢$ بالاستقامة مرة أخرى لـ س

$٢س\frac{دص}{دس} + ٢ص + ٢س\frac{دص}{دس} + س^{٢}\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٠$

بالتجميع

$\therefore س^{٢}\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٤س\frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠$

(٤٠) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها يزداد بمعدل ٠,٥ سم/ث وارتفاعها يزيد بمعدل ٠,٢٥ سم/ث أوجد معدل تغير حجم الاسطوانة عندما يكون نق = ٣ سم، ع = ٥ سم

الحل

$\frac{دنق}{دن} = \frac{١}{٢}$ سم/ث ، نق = ٣ سم

$\frac{دع}{دن} = \frac{١}{٤}$ سم/ث ، ع = ٥ سم

الحجم $= ح = ط نق^{٢} ع$

$\frac{دح}{دن} = ٢ط نق \frac{دنق}{دن} ع + ط نق^{٢} \frac{دع}{دن}$

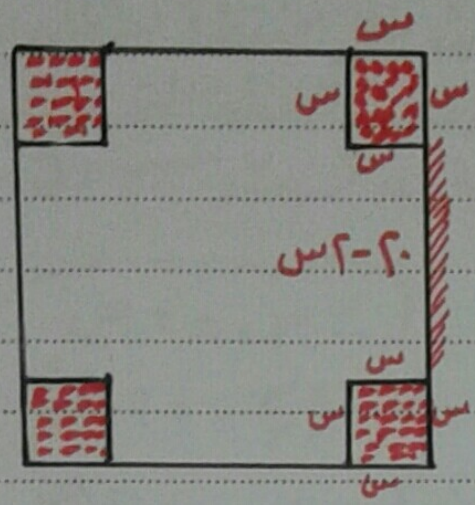
$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣ \times \frac{١}{٢} \times ٥ + \frac{٢٢}{٧} \times ٩ \times \frac{١}{٤}$

$\frac{دح}{دن} = ١٧,٢٥ ط$ سم^{٣}/ث

(٤١) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم. قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية. ثم ثنى الباقى ليكون صندوقاً بدون غطاء على شكل متوازى مستطيلات. أوجد طول ضلع المربع المقطوع الذى يجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن

الحل

نسألكم الدعاء



نفرض طول ضلع المربع المقطوع = س

فيكون متوازي المستطيلات أبعاده

س ، س ، ٢٠ - ٢س

حجم متوازي المستطيلات = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة

ح = س × س × (٢٠ - ٢س)

ح = ٢٠ س^{٢} - ٢س^{٣}

$\frac{د ح}{د س}$ = ٤٠ س - ٦ س^{٢} بوضع $\frac{د ح}{د س}$ = صفر

٤٠ س - ٦ س^{٢} = ٠

٢س (٢٠ - ٣س) = ٠ ∴ س = ٠ ← مرفوضة

س = $\frac{٢٠}{٣}$ سم

(٤٢) إذا كان ص^{٢} = س^{٢} (١ - س) فأثبت أن ص $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} + ٣س = ١

الحل بالاشتقاء بالنسبة لـ س مرتين مباشرة

حيث ص^{٢} = س^{٢} - س^{٣} ∴ يتنتج المطلوب (تدرك للطالب)

(٤٣) وعاء اسطواني حجمه ٨٠٠٠ ط سم^{٣}، أوجد أبعاده التي تجعل مساحته الكلية أقل ما يمكن إذا كان الوعاء مفتوحاً من أحد قاعدته العليا

الحل ∵ ح = ط ن^{٢} ع ← ٨٠٠٠ ط = ط ن^{٢} ع ← ع = $\frac{٨٠٠٠}{ن^{٢}}$

المساحة في حالة وجود قاعدة واحدة = ٢ ط ن ع + ط ن^{٢}

م = ٢ ط ن × $\frac{٨٠٠٠}{ن^{٢}}$ + ط ن^{٢} = ١٦٠٠٠ ط ن$^{-١}$ + ط ن^{٢}

بالاشتقاء لـ ن ∴ $\frac{د م}{د ن}$ = -١٦٠٠٠ ط ن$^{-٢}$ + ٢ ط ن

بوضع $\frac{د م}{د ن}$ = صفر ← ن = ٢٠ سم

بالتعويض ع = $\frac{٨٠٠٠}{ن^{٢}}$ = ١٠ سم

تسلم يكمد الدعاء

(٤٤) مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد باستظام بحيث يظل محتفظاً بشكله وبنفس النسبة بينه ابعاد أوجد مساحة المستطيل من اللحظة التي يزداد فيها الطول بمعدل ١ سم/ث وتزداد المساحة بمعدل ١ سم٢/ث

الحل

نفرض الطول = س ، العرض = ص

م = س ص

م = ٢ ص × ص = ٢ ص٢

$\frac{د م}{د ن} = ٤ ص \frac{د ص}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} = ٤ ص \times \frac{١}{٤ ص}$

١ = $\frac{د ص}{د ن}$ ∴

$\frac{د س}{د ن} = ٢ \frac{د ص}{د ن}$ ∴ س = ٢ ص ∴

١ = ٢ $\frac{د ص}{د ن}$ أو

∴ ص = ١ ∴ س = ٢ ص ∴ س = ٢

∴ مساحة المستطيل = س ص = ٢ × ١ = ٢ سم٢

(٤٥) عين مناطق التزايد والتناقص للمنحنى

ص = س٤ - ٦ س٢ + ٧ الحل

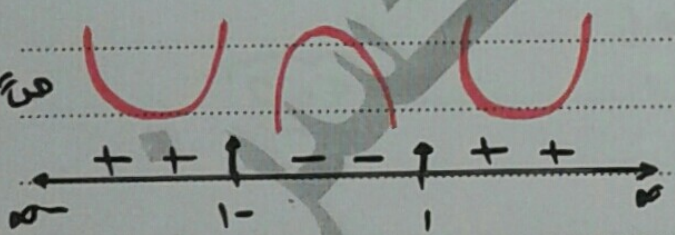
ص' = ٤ س٣ - ١٢ س

ص'' = ١٢ س٢ - ١٢ نضع ص' = ٠ ∴ س = ± ١

من الصفر]-∞ ، -١[تزايد تناقص

من الصفر]-١ ، ١[تزايد تناقص

من الصفر]١ ، ∞[تزايد تناقص



نقط الانقلاب عندما س = ١ ← ص = (١)٤ - ٦(١)٢ + ٧ = ٢

عندما س = -١ ← ص = (-١)٤ - ٦(-١)٢ + ٧ = ٢

ص (١ ، ٢) ، (-١ ، ٢)

سدد ربكم الدعاء

(٤٦) منحنى يمر بالنقطة (١،١) وميل المماس له عند أ نقطة عليه (س، ص) يساوى $٣س^{٢} - ٤س + ٥$ أوجد معادلة المماس له عند النقطة التى احداثيها السينى صفر

الحل ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢} - ٤س + ٥$

∴ $ص = \frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٤س^{٢}}{٢} + ٥س + ب$

المنحنى يمر بالنقطة (١،١)

∴ $١ = (١)^{٣} - ٢(١)^{٢} + ٥(١) + ب$ ∴ $ب = -٣$

∴ معادلة المنحنى $ص = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٣$

النقطة التى احداثيها السينى = صفر تحقق المعادلة

∴ $ص = ٠ - ٠ + ٠ - ٣$ ∴ $ص = -٣$

النقطة (٠، -٣) نقطة التماس

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} =$ ميل المماس عند $س = ٠$

∴ ميل المماس $\frac{د ص}{د س} = ٥$

$\frac{ص + ٣}{س - ٠} = \frac{٥}{١}$ ∴ $ص = ٥س - ٣$

(٤٧) إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \leq ١ \\ ٢س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

متصلة عند $س = ١$ ثم أبحث قابلية استقامة الدالة عند $س = ١$

الحل ∴ الدالة متصلة عند $س = ١$

∴ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

$٢س = س^{٢} + ١$

∴ $٢ = ١ + ١$ ∴ $أ = ١$

لبحث قابلية الاستقامة عند $س = ١$

يجب استخدام التفريط

$$\text{نها}_{ه \to ٠^{+}} \frac{د(س + ه) - د(س)}{ه} \quad ، \quad \text{نها}_{ه \to ٠^{-}} \frac{د(س + ه) - د(س)}{ه}$$

قابلة للاستقامة (متروك للطالب)

نسألكم الدعاء

(٤٨) المنحنى ص = س³ + أ س² + ب س له نقطة انقلاب عند (٣، -٩) أوجد: قيمة أ، ب ثم مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية له

الحل

∵ (٣، -٩) نقطة انقلاب لمنحنى المعادلة فهي تحقق معادلة المنحنى أي أن

ص = س³ + أ س² + ب س

-٩ = (٣)³ + أ(٣)² + ب(٣) ⟵ ∴ ٣أ + ب = -١٢ ①

∵ (٣، -٩) نقطة انقلاب ∴ ص'' = ٠ عند س = ٣

ص' = ٣س² + ٢أ س + ب

ص'' = ٦س + ٢أ ∴ ص'' = ٠ عند س = ٣

٠ = ١٨ + ٢أ ∴ أ = -٩

بالتعويض في ① ∴ ب = ١٥

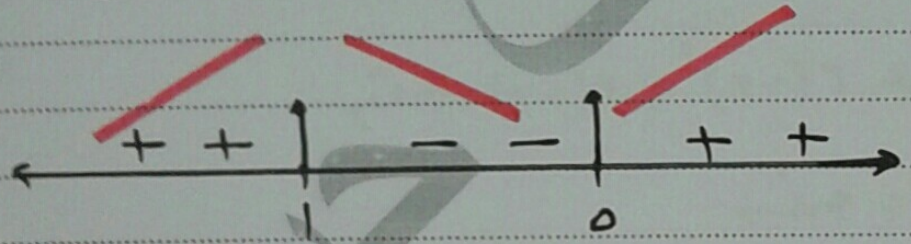
∴ ص = س³ - ٩س² + ١٥س

لإيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية

ص' = ٣س² - ١٨س + ١٥ نضع ص' = ٠ ∴

س² - ٦س + ٥ = ٠

(س - ٥)(س - ١) = ٠ ∴ س = ٥ ، س = ١



عند س = ١ ⟵ توجد قيمة عظمى محلية ⟵ بالتعويض في ص ⟵ ص = ٧

عند س = ٥ ⟵ توجد قيمة صغرى محلية ⟵ بالتعويض في ص ⟵ ص = -٢٥

المواقع (١، ٧) ، (٥، -٢٥)

↓ ↓

نقطة نهاية عظمى نقطة نهاية صغرى

نسأل لكم الدعاء

(٤٩) اذا علم ان $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٦س + ١٢$ عند كل نقطة من نقط منحنى الدالة ص = د(س) أوجد معادلة المنحنى اذا علم انه يمر بالنقطة (-٢، ٠) وميله عند هذه النقطة = صفر

الحل

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٦س + ١٢$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \int (٦س + ١٢) \, دس$ ... $\frac{دص}{دس}$ = صفر عندما س = -٢ (معطى)

$\frac{دص}{دس} = ٢س^٢ + ١٢س + ث_١$ ... بفرض $\frac{دص}{دس} = ٠$ ، س = -٢

$٠ = ٢(-٢)^٢ + ١٢(-٢) + ث_١$

$\therefore ث_١ = ٩$ ← $\frac{دص}{دس} = ٢س^٢ + ١٢س + ٩$

ومنه $ص = \int \frac{دص}{دس} \, دس$

$ص = \int (٢س^٢ + ١٢س + ٩) \, دس$

$ص = س^٣ + ٦س^٢ + ٩س + ث_٢$

∴ النقطة (-٢، ٠) تحقق معادلة المنحنى

$\therefore ٠ = (-٢)^٣ + ٦(-٢)^٢ + ٩(-٢) + ث_٢$

$\therefore ث_٢ =$ صفر

∴ معادلة المنحنى

$ص = س^٣ + ٦س^٢ + ٩س$

نسأل لكم الدعاء

⑤ يتكلف مصنع تصنيع وتسويق الوحدة من سلعة ما ٨٠ جنيهاً فإذا قدر أن عدد الوحدات التي سيباع من تلك السلعة سيكون $\frac{٤٠٠}{س - ٨٠} + ٥٠٠ (١٠٠ - س)$ حيث س ≠ ٨٠ سعر بيع الوحدة أوجد السعر الأمثل ليحقق أكبر ربح

الحل

تكلفة الوحدة من المصنع = ٨٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = س جنيه

∴ الربح من الوحدة = س − ٨٠

∴ الربح الكلي = الربح من الوحدة × عدد الوحدات

$$ر = (س - ٨٠) \times \left[\frac{٤٠٠}{س - ٨٠} + ٥٠٠ (١٠٠ - س)\right]$$

$$ر = ٤٠٠ + ٥٠٠ (١٠٠ - س)(س - ٨٠)$$

$$\therefore ر' = ٥٠٠ (س - ٨٠) + ٥٠٠ (١٠٠ - س)$$

بوضع ر' = صفر

$$س - ٨٠ = ١٠٠ - س$$

$$٢س = ١٨٠$$

$$\therefore س = ٩٠$$

$$\therefore ر'' (٩٠) < صفر$$

∴ أكبر سعر للوحدة ليحقق أكبر ربح عندما س = ٩٠ جنيه

الحمد لله رب العالمين