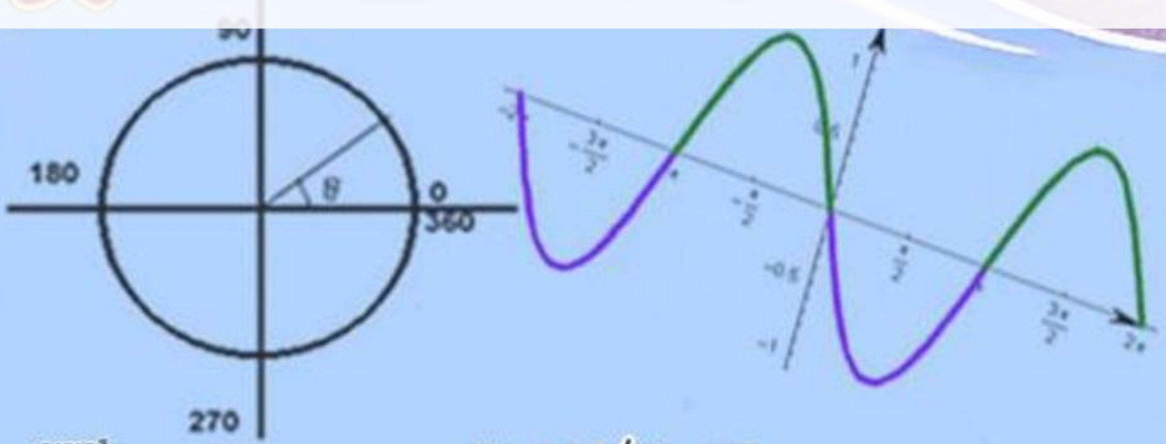
جمهورية مصر العربية

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للامتحانات
والتقويم التربوي

دليل تقويم الطالب
في مادة الرياضيات
التفاضل والتكامل

إجابة دليل تقويم الطالب
فى (التفاضل والتكامل)
منتدى توجيه الرياضيات



تصميم
د/سهير عبدربه

٢٠١٦/٢٠١٧ م

النموذج الأسترشادى الأول

١. $\lim\limits_{س \to هـ} \frac{لو_{هـ} س - ١}{س - هـ}$

نها $\frac{لو_{هـ} س - ١}{س - هـ}$ ، س ← هـ (١)

(أ) ١

(ب) هـ

(جـ) − هـ

(د) $\boxed{\frac{١}{هـ}}$

بوضع س − هـ = ص

$\therefore$ $\lim\limits_{ص \to ٠} \frac{لو_{هـ}(ص + هـ) - لو_{هـ} هـ}{ص} = د'(هـ)$ تعريف المشتقة

$د(س) = لو_{هـ} س \Leftarrow د'(س) = \frac{١}{س}$

$\Leftarrow د'(هـ) = \frac{١}{هـ}$

٢. $\int_{١}^{هـ} (لو_{هـ} س) \, ءس$ (١)

(أ) $\frac{١}{هـ}$

(ب) هـ

(جـ) $\boxed{١}$

(د) −١

$= \left[س لو_{هـ} س - \int ءس \right]_{١}^{هـ}$

$= (هـ لو_{هـ} هـ - هـ) - (لو_{هـ} ١ - ١)$

$=$ صفر $- (-١)$

$= \boxed{١}$

$لو_{هـ} س$	١
$\frac{١}{س}$	س

٣. إذا كان $ص = هـ^{(١ + لو_{هـ} س)}$ (٢)

فأثبت أن $\frac{دص}{دس}$ ثابتة لجميع قيم س الحقيقية الموجبة

$ص = هـ^{١} \times هـ^{لو_{هـ} س}$

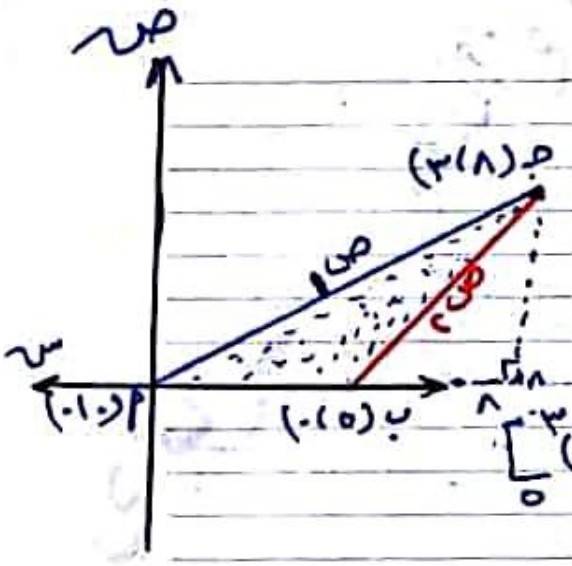
$= هـ \times س = هـ س$

$\therefore ص' = \boxed{هـ}$ ثابت لجميع قيم س الموجبة

---

٤. أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٨ ، ٣) (٢)

أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشئ من دوران سطح هذا المثلث دورة واحدة كاملة حول محور السينات



نوجد معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ ← $ص_١ = \frac{٣}{٨} س$

~~نوجد معادلة~~ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ← $ص_٢ = س - ٥$

حجم الجسم الدورانى الناشئ حول محور السينات

$= \pi \int_{٠}^{٨} ص_١^{٢} \, دس - \pi \int_{٥}^{٨} ص_٢^{٢} \, دس$

$= \frac{٩\pi}{٦٤} \times \frac{١}{٣} \left[س^{٣} \right]_{٠}^{٨} - \frac{\pi}{٣} \left[(س - ٥)^{٣} \right]_{٥}^{٨}$

$= ٢٤\pi - ٩\pi$

$= \boxed{١٥\pi}$

(١)

٥ - إذا كانت ص = π ظتا (π س) ، فإن $\frac{دص}{دس}$ تساوى

$$\frac{دص}{دس} = \pi \left[-\pi \text{ قتا}^2 \pi س \right]$$
$$= \boxed{-\pi^2 \text{ قتا}^2 \pi س}$$

(أ) $\pi + \pi$ قتا^2 (π س)

(ب) $\pi - \pi$ قتا^2 (π س)

(ج) π^2 قتا^2 (π س)

(د) $-\pi^2$ قتا^2 (π س)

---

(٢)

٦ - أسطوانة دائرية قائمة من المعدن فإذا علم أن نصف قطر قاعدتها ٥ سنتيمتر ، ويزداد بمعدل ٠,٢ سنتيمتر / ثانية وارتفاعها ١٠ سنتيمتر وينقص بمعدل ٠,٣ سنتيمتر / ثانية ،أوجد معدل زيادة حجم الأسطوانة ، متى يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن ؟

بوضع نق = ٥ + ٠,٢ ن

ع = ١٠ − ٠,٣ ن

$\therefore$ ح = π نق^2 ع

= π (٥ + ٠,٢ ن)^2 (١٠ − ٠,٣ ن)

$\frac{دح}{دن}$ = π [(٥ + ٠,٢ ن)^2 × −٠,٣ + (١٠ − ٠,٣ ن) × ٢ (٥ + ٠,٢ ن) × ٠,٢]

= π (٥ + ٠,٢ ن) [(٥ + ٠,٢ ن) × −٠,٣ + (١٠ − ٠,٣ ن) × ٠,٤]

المعدل المطلوب = π (٥ + ٠,٢ ن) (٢,٥ − ٠,١٨ ن) $\therefore$ وعند أكبر ما يمكن = صفر

$\therefore$ ٢,٥ − ٠,١٨ ن = ٠

$\therefore$ ن = $\boxed{١٣ \frac{٨}{٩}}$ ثانية

$\therefore \left(س ، \frac{٧ - ٤س}{٣}\right) \in$ المستقيم

٧. الإحداثى السينى لأقرب نقطة على المستقيم ٤ س + ٣ ص = ٧ من نقطة الأصل يساوى (١)

(أ) صفر

(ب) ١

(ج) ١٫١٢

(د) ١٫٩٦

$\because ص = \frac{٧ - ٤س}{٣}$

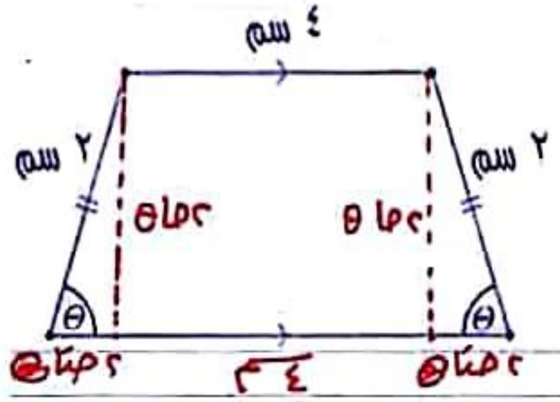
طول العمود = ع = $\frac{|٠ + ٠ - ٧|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ١٫٤$

$\therefore (١٫٤)^٢ = س^٢ + \left(\frac{٧ - ٤س}{٣}\right)^٢$

$٢٥٠٠ س^٢ - ٥٦٠٠ س + ٣١٣٦ = ٠$

وبحل المعادلة: $س = \frac{٢٨}{٢٥} = \boxed{١٫١٢}$

٨. أوجد قياس θ التى تجعل مساحة شبه المنحرف متساوى الساقين الموضح بالشكل أكبر ما يمكن (٢)



المساحة = $\frac{\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}}{٢} \times ع$

$= \frac{٤ + ٤ + ٤ جتا θ}{٢} \times ٢ جا θ$

$م = (٨ + ٤ جتا θ) \times جا θ$

$= ٨ جا θ + ٢(٢ جا θ جتا θ) = ٨ جا θ + ٢ جا ٢θ$

$م' = ٨ جتا θ + ٤ جتا ٢θ$ ، $م'' = -٨ جا θ - ٨ جا ٢θ$

وعند أكبر مساحة $م' = ٠ \longleftarrow ٨ جتا θ + ٤ جتا ٢θ = ٠$

$٢ جتا θ + جتا ٢θ = ٠ \longleftarrow ٢ جتا θ + \underbrace{٢ جتا^٢ θ - ١}= ٠$

$٢ جتا^٢ θ + ٢ جتا θ - ١ = ٠$ وباستخدام القانون العام

$جتا θ = \frac{-١ + \sqrt{٣}}{٢} \simeq ٠٫٣٦٦$ ، $جتا θ = \frac{-١ - \sqrt{٣}}{٢}$ مرفوض

$\therefore θ = \boxed{٦٨^\circ \; ٣١' \; ٤٥''}$

(١)

٩. $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{هـ}(١+س)}{٣^{س}-١}$

(أ) $لو_{هـ} ٣$

(ب) $هـ^{٣}$

(ج) $\dfrac{١}{لو_{هـ} ٣}$

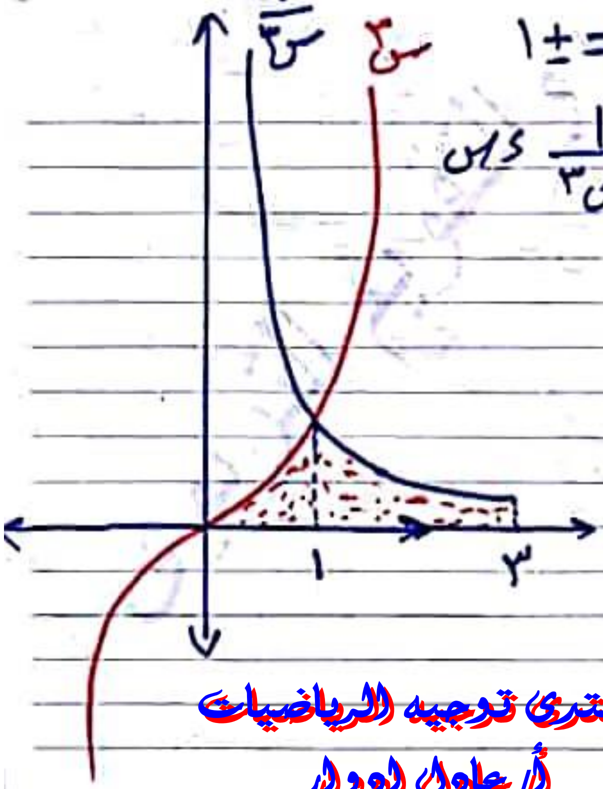
(د) $\dfrac{١}{هـ^{٣}}$

$$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\left(\dfrac{لو_{هـ}(١+س)}{س}\right)}{\left(\dfrac{٣^{س}-١}{س}\right)} = \boxed{\frac{١}{لو_{هـ} ٣}} = لو_{٣} هـ$$

(٢)

١٠. أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيات

ص = $س^{٣}$ ، ص = $\dfrac{١}{س^{٣}}$ ، س = ٠ ، س = ٣ ، ص = ٠



بإيجاد نقطة تقاطع المنحنيين س = ±١

∴ المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{١} س^{٣} \, ءس + \int_{١}^{٣} \dfrac{١}{س^{٣}} \, ءس$

$= \frac{١}{٤}\left[س^{٤}\right]_{٠}^{١} - \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{س^{٢}}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٤}{٩}$

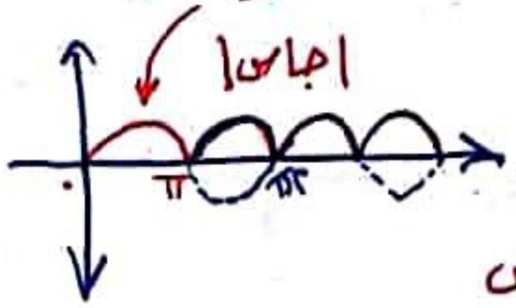
$= \boxed{\frac{٢٥}{٣٦}}$ وحدة مربعة

(١)

١١. $\int_{0}^{10\pi} |\text{جا س}|\ \text{ء س}$

محور السينات فقط

تكرره ١٠ مرات



Ⓐ ١٠

Ⓑ ١٠ π

Ⓒ ٢٠

Ⓓ ٢٠ π

$$= 10 \int_{0}^{\pi} \text{جاس ءس}$$

$$= 10 \left[-\text{جتاس}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= 10 \left[-\text{جتا}\,\pi + \text{جتا}\,0\right]$$

$$= 10 \left[1 + 1\right] = \boxed{20}$$

---

(٢)

تحتاج تصويب

١٢. إذا كان س = ن^{٢} + ٣ ، ص = ن^{٣} + ٢ ، فأوجد $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}}$ عندما ن = ٢

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 2\text{ن} \qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 3\text{ن}^{2}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{3}{2}\text{ن}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = \frac{3}{2} \; \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2\text{ن}} = \frac{3}{4\text{ن}}$$

وعند ن = ٢

$$\therefore \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

١٣. إذا كانت ص = جتا س ، فإن ص$^{(١٠٠٠)}$ تساوى (١)

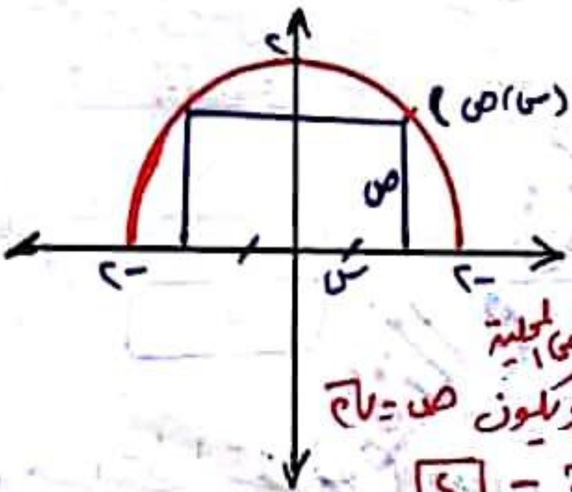
(أ) جتا س
(ب) - جتا س
(ج) جا س
(د) - جا س

∵ ص$^{(١)}$ = − جا س
ص$^{(٢)}$ = − جتا س
ص$^{(٣)}$ = جا س
ص$^{(٤)}$ = جتا س = ص ... وهكذا
دورة رباعية
∴ ص$^{(١٠٠٠)}$ = جتا س الاختيار (أ)

تحتاج تعديل

١٤. أكبر مساحة لمستطيل مرسوم داخل نصف الدائرة ص = $\sqrt{٤ - س^٢}$ (١)

(أ) ١،٤
(ب) $\sqrt{٣}$
(ج) ٢$\sqrt{٣}$
(د) ٤



المساحة = م = ٢س × ص
∴ م = ٢س $\sqrt{٤ - س^٢}$
م' = $\frac{٢[٤ - ٢س^٢]}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ = صفر عند العظمى المحلية
∴ س = ± $\sqrt{٢}$ وتكون ص = $\sqrt{٢}$
∴ م = ٢$\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ = $\boxed{٤}$

تحتاج تعديل

$د(س) = جاس + \frac{س}{٢}$

١٥. إذا كانت د : [٠ ، π] ← ح ، حيث $د(س) = جتا\,س + \frac{س}{٢}$ (٢)

فعين فترات التزايد والتناقص للدالة د

وكذلك عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب للدالة د

على الفترة المعطاة

$د'(س) = -جاس + \frac{١}{٢}$ ، $د''(س) = -جتا\,س$

* ∴ عند النقط الحرجة $د'(س) = ٠ \leftarrow س = ٣٠°$ أو $١٥٠°$

س		٣٠		١٥٠	
د(س)	↗		↘		↗
د'(س)	+ +		− −		+ +

* الدالة تزايدية لكل س ∈ $]٠ ، \frac{π}{٦}[$ ، س ∈ $]\frac{٥π}{٦} ، π[$
* الدالة تناقصية لكل س ∈ $]\frac{π}{٦} ، \frac{٥π}{٦}[$

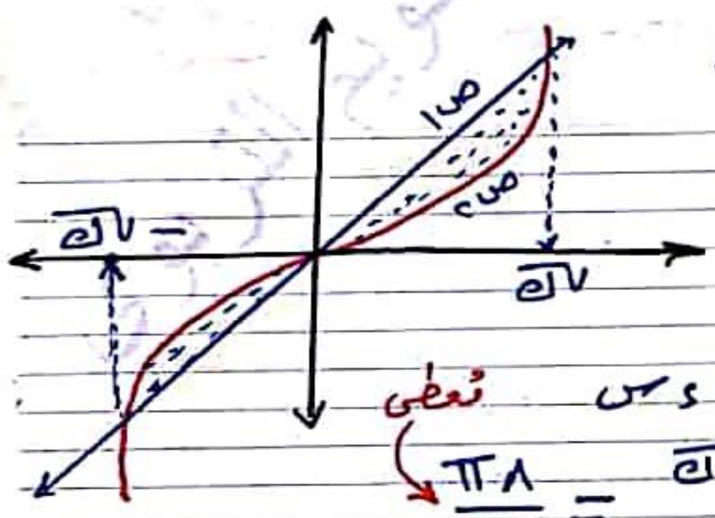
$د''(س) = -جتا\,س = ٠$ عند نقط الانقلاب $\leftarrow س = ٩٠° = \frac{π}{٢}$

* المنحنى محدب لأعلى $]٠ ، \frac{π}{٢}[$

ومحدب لأسفل $]\frac{π}{٢} ، π[$

$د(\frac{π}{٢}) = جتا\,٩٠ + \frac{π}{٤} = \frac{π}{٤} \leftarrow (\frac{π}{٢} ، \frac{π}{٤})$ نقطة انقلاب

١٦. إذا كان حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $\boxed{ص = س^٣}$ ، والمستقيم $\boxed{ص = ك\,س}$ حول محور السينات دورة واحدة كاملة يساوي $\frac{٨π}{٢١}$ وحدة مكعبة فاحسب قيم ك . (٢)



نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين

∴ س = ٠ أو $س = \pm\sqrt{ك}$

∴ حجم المجسم المطلوب =

$= ٢π \int_{٠}^{\sqrt{ك}} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ء س$

$= ٢π \int_{٠}^{\sqrt{ك}} (ك^٢س^٢ - س^٦)\, ء س$

$= ٢π \left[\frac{ك^٢س^٣}{٣} - \frac{س^٧}{٧}\right]_{٠}^{\sqrt{ك}} = \frac{٨π}{٢١}$ معطى

∴ $ك^{\frac{٧}{٢}} = ١$

$ك = ١^{\frac{٢}{٧}} \leftarrow \boxed{ك = ١}$

١٧. اذا كان ص = ٣^ع ، ع = جا ن ، ن = لوهـ س وكان $\frac{دص}{دس}$ = د′(س) (١)

فإن د′(١) = ...

① ٣ لوهـ ٣

② لوهـ ٣

③ − ٣ لوهـ ٣

④ ١

$ص = ٣^{ع} = ٣^{جا ن} = ٣^{جا(لوهـ س)}$

$\frac{دص}{دس} = ٣^{جا(لوهـ س)} \times جتا(لوهـ س) \times \frac{١}{س} \times لوهـ ٣$

$\therefore \frac{دص}{دس}_{س=١} = ٣^{جا(صفر)} \times جتا(صفر) \times \frac{١}{١} \times لوهـ ٣$

$= ١ \times ١ \times ١ \times لوهـ ٣$

$= لوهـ ٣$

---

١٨. ارسم الشكل العام للمنحنى د(س) = ٢س^٣ − ٩س^٢ + ١٢س − ٢ مبينا علية القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب ان وجدت (٢)

الحل:

د(س) = ٦س^٢ − ١٨س + ١٢

د′(س) = صفر

س = ٢ س = ١

د′(س): + + + (١) − − − − − (٢) + + + +

عند س = ١ يوجد قيمة عظمى محلية

د(١) = ٢ − ٩ + ١٢ − ٢ = ٣

عند س = ٢ يوجد قيمة صغرى محلية

د(٢) = ١٦ − ٣٦ + ٢٤ − ٢ = ٢

د″(س) = صفر

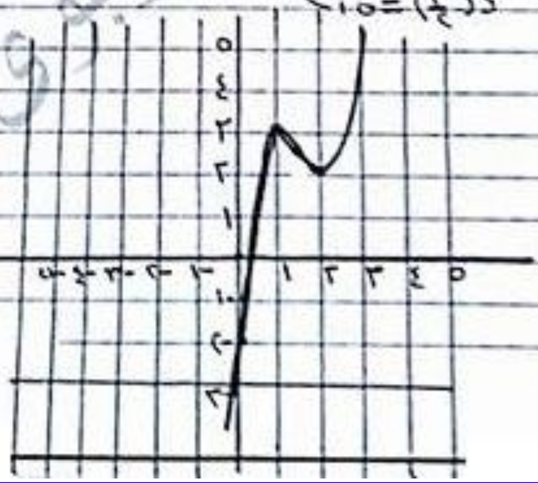
١٢س − ١٨ = صفر

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

د″(س): − − − − ($\frac{٣}{٢}$) + + +

عند س = $\frac{٣}{٢}$ يوجد انقلاب

د($\frac{٣}{٢}$) = ٢.٥



١٩. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = لو$_{هـ}$ س^٢ - (لو$_{هـ}$ س)^٢ عند س = هـ . (٢)

الحل :

$\boxed{د(س) = ٢ لو_{هـ} س - [لو_{هـ} س]^٢}$ وبالاشتقاق

∴ دَ(س) = ٢ × $\frac{١}{س}$ - ٢ (لو$_{هـ}$ س) × $\frac{١}{س}$

= ميل المماس = م

∴ [م]$_{س=هـ}$ = $\frac{٢}{هـ}$ - ٢ (لو$_{هـ}$ هـ) × $\frac{١}{هـ}$ = $\frac{٢}{هـ}$ - $\frac{٢}{هـ}$

∴ ميل المماس = $\boxed{صفر}$

٢٠. اذا كان المماس لمنحنى الدالة د (س) = لو$_{٢}$ (س^٢ − ٤ س + ٨) يوازي محور السينات (١)

عند س = ك فإن د (ك) = ...

نوجد دَ(س) = $\frac{١}{س^٢ - ٤س + ٨}$ × (٢س - ٤) لو$_{٢}$ هـ

Ⓐ ٣ −
∵ المماس // السينات عند س = ك

Ⓑ ١-
∴ دَ(ك) = صفر

Ⓒ ٢
∴ ٢ك - ٤ = ٠

Ⓓ ٤
ك = $\boxed{٢}$

الاختيار ج

النموذج الأسترشادى الثانى

أجب عن الأسئلة التالية:

١. (١)

اذا كان د(س) = $\sqrt{\text{جا}٢\text{س}}$ - قتا س . فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ...

$\text{دَ(س)} = \frac{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{جا}٢\text{س}}} + \text{قتاس ظتاس}$

$\text{دَ}(٤٥^\circ) = \frac{\text{جتا}٢\times٤٥}{\sqrt{\text{جا}٢\times٤٥}} + \text{قتا}٤٥\ \text{ظتا}٤٥^\circ$

$= \frac{\text{صفر}}{١} + \sqrt{٢} \times ١$

$= \boxed{\sqrt{٢}}$ الاختيار (أ)

(أ) $\sqrt{٢}$

(ب) ١

(ج) صفر

(د) -١

٢. (١)

$\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤-\text{س}^٢}\ \text{ء س}$ = ...

بوضع ص = $\sqrt{٤-\text{س}^٢}$

∴ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$

تمثل معادلة دائرة

مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها ٢ سم

∴ $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤-\text{س}^٢}\ \text{ءس}$ تمثل مساحة

ربع الدائرة = $\frac{١}{٤} \times \pi\ \text{نق}^٢$

= π

(أ) صفر

(ب) ٢

(ج) π

(د) $\frac{\pi}{٢}$

٣. اذا كان د : $[\frac{١}{هـ} ، هـ] \leftarrow ح$ وكان د(س) = س − لو$_{هـ}$ س (٢)

ابحث فترات التزايد والتناقص ثم أوجد القيم العظمي والصغري المطلقة للدالة .

الحل: $\grave{د}$(س) = ١ − $\frac{١}{س}$ = صفر عند النقط الحرجة

∴ وضعنا ١ = $\frac{١}{س}$ ← س = ١

$\frac{١}{هـ}$ ① هـ

س		
د(س)	↘	↗
$\grave{د}$(س)	--	++

د(س) تناقصية في]$\frac{١}{هـ}$ ، ١[

د(س) تزايدية في]١ ، هـ[

∴ عند س = ١ ← د(١) = $\boxed{١}$ ← (١،١) صغرى محلية

صغرى مطلقة

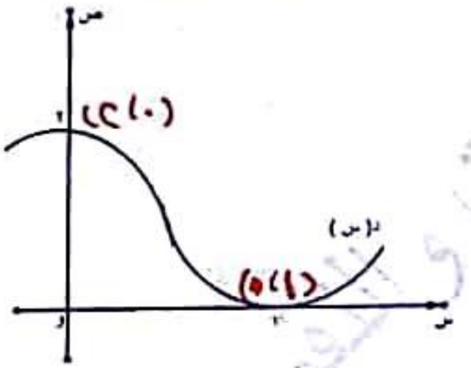
د($\frac{١}{هـ}$) = $\frac{١}{هـ}$ − لو$_{هـ}$ هـ$^{-١}$ = $\boxed{\frac{١}{هـ} + ١}$ ≃ $\boxed{١٫٤}$

د(هـ) = $\boxed{هـ − ١}$ ≃ $\boxed{١٫٧}$ عظمى مطلقة

---

٤. في الشكل المقابل أوجد (٢)

$$\int_{٠}^{١} [د(س)]^{٢} \grave{د}(س) \, ءس$$



الحل: من الرسم د(٠) = ٢ ، د(١) = ٠

التكامل المعطى = $\int$ [دالة]^{ن} × مشتقتها

$$= \left[\frac{[د(س)]^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{[د(١)]^{٣}}{٣} - \frac{[د(٠)]^{٣}}{٣}$$

$$= صفر - \frac{(٢)^{٣}}{٣}$$

$$= \boxed{-\frac{٨}{٣}}$$

(١)

٥. $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س} + ٥}{\text{س} + ٣} \right)^{\text{س}} = \dots\dots\dots\dots\dots$

(أ) هـ

(ب) $\text{هـ}^{٢}$

(جـ) $\frac{١}{\text{هـ}^{٢}}$

(د) $\frac{٢}{\text{هـ}}$

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\frac{(\text{س}+٣) + ٢}{\text{س}+٣} \right]^{\text{س}} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[١ + \frac{٢}{\text{س}+٣} \right]^{\text{س}}$$

بوضع س + ٣ = ص

∴ س = ص − ٣

$$\therefore \underset{\text{ص} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[١ + \frac{٢}{\text{ص}} \right]^{\text{ص} - ٣}$$

$$= \text{هـ}^{٢}$$

الاختيار (ب)

(٢)

٦. ١. باستخدام طرق التكامل اوجد

$$\int^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣} \left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \right) \text{ءس}$$

الحل:

$$= \left[\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \right]^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}} ٣} + \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣} - \left(\frac{١}{٢} + ١ \right)$$

$$= \frac{١}{٢} \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٩} + \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣} - \frac{١}{٢} - ١$$

$$= \frac{٩}{٢} + ٣ - \frac{١}{٢} - ١ = \boxed{٦}$$

(١)

٧. قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني $ص = لو_هـ \left(\frac{هـ^{٢س}}{س^٣+٢}\right)$ مع الاتجاة الموجب لمحور السينات عند س = ١ يساوي ....

ⓐ $\frac{\pi}{٢}$

ⓑ $\frac{\pi}{٣}$

ⓒ $\frac{\pi}{٦}$

ⓓ $\frac{\pi}{٤}$

$\therefore ص = لو_هـ هـ^{٢س} - لو_هـ (س^٣+٢)$

$= ٢س - لو_هـ (س^٣+٢)$

$\therefore ص' = ٢ - \frac{١}{س^٣+٢} \times ٣س^٢$

الميل عند س = ١ هو $[ص']_{س=١}$

$م = ظاهـ = ٢ - ١ = ١$

$\therefore هـ = ٤٥° = \frac{\pi}{٤}$ الاختيار (د)

(٢)

٨. اوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $٢ + لو_هـ ص . لو_هـ س = س^٢ + ص$ عند النقطة التي احداثيها السيني = ١

عند س = ١ ← $٢ + لو_هـ ص \times ٠ = ١ + ص$

← ص = ١

الحل :

$\therefore$ نقطة التماس هي (١، ١)

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س للطرفين :

$صفر + لو_هـ ص \times \frac{١}{س} + لو_هـ س \times \frac{١}{ص} \times ص' = ٢س + ص'$

ونوجد الميل = ص' عند س = ١ ، ص = ١

$\therefore ٠ + ٠ + ٠ = ٢ + ص' \Leftarrow ص' = م = -٢$

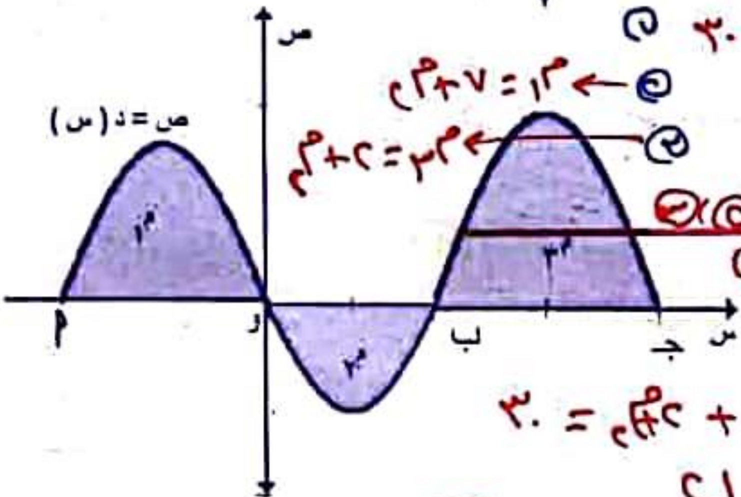
$\therefore$ معادلة المماس : $\frac{ص-١}{س-١} = -٢ \Leftarrow ٢س + ص - ٣ = ٠$

معادلة العمودى : $\frac{ص-١}{س-١} = \frac{١}{٢} \Leftarrow س - ٢ص + ١ = ٠$

(١)

٩. فى الشكل المقابل اذا كان $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = ٧$ ، $\int_{ب}^{جـ} د(س)\, ء س = ٢$

وكان م١ + م٢ + م٣ = ٣٠ وحدة مربعة فإن م٢ = ... وحدة مربعة



ⓐ ٢١

ⓑ ١٤

ⓒ ٩

ⓓ ٧

∵ م١ + م٢ + م٣ = ٣٠ (١)

∵ م١ − م٢ = ٧ (٢) ← م١ = ٧ + م٢

∵ م٣ − م٢ = ٢ (٣) ← م٣ = ٢ + م٢

وبالتعويض من (٢)(٣) فى المعادلة (١)

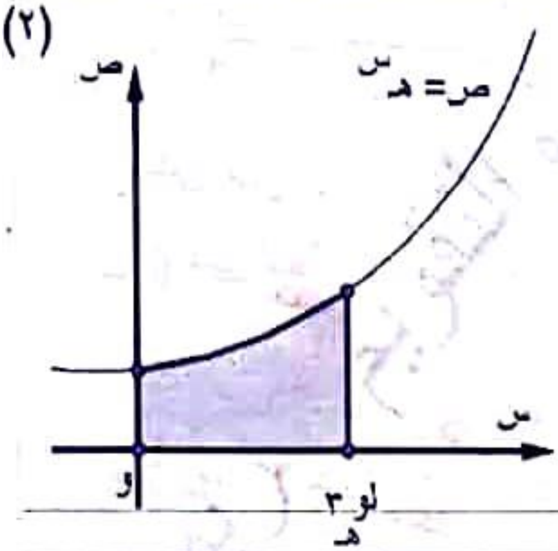
∵ ٧ + م٢ + م٢ + ٢ + م٢ = ٣٠

∴ ٣ م٢ = ٢١

← م٢ = $\boxed{٧}$ الاختيار (د)

(٢)

١٠. أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات



القانون

الحجم = $\pi \int_{أ}^{ب} ص^٢\, ء س$ حول محور السينات

الحل :

الحجم = $\pi \int_{٠}^{لو_هـ ٣} (هـ^{س})^٢\, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{لو_هـ ٣} هـ^{٢س}\, ء س = \frac{\pi}{٢} \left[هـ^{٢س} \right]_{٠}^{لو_هـ ٣}$

$= \frac{\pi}{٢} \left[هـ^{٢ لو_هـ ٣} - هـ^{٠} \right] = \frac{\pi}{٢} \left[٩ - ١ \right]$

$= \boxed{٤\pi}$ وحدة مكعبة

عند س = $\frac{\pi}{2}$ ← فإن د($\frac{\pi}{2}$) = $(جا \frac{\pi}{2})^{\frac{\pi}{2}} = (1)^{\frac{\pi}{2}} = 1$

∴ نقطة التماس ($\frac{\pi}{2}$ ، 1)

(١)

١١. اذاكان د(س) = (جا س)^س فإن د'($\frac{\pi}{2}$) = ...

بأخذ لوغاريتم الطرفين $لو_{هـ}$

∴ $لو_{هـ}$ ص = س $لو_{هـ}$ جا س   وبالتفاضل

∴ $\frac{1}{ص}$ ص' = س × $\frac{1}{جا س}$ × جتا س + $لو_{هـ}$ جا س × 1

∴ ص' = $\frac{\pi}{2}$ × 1 × 0 + $لو_{هـ}$ جا $\frac{\pi}{2}$ × 1

∴ ص' = صفر + $لو_{هـ}$ 1 × 1

= صفر + صفر

= $\boxed{صفر}$ الاختيار (أ)

(أ) صفر
(ب) ١
(ج) ٢
(د) ٣

---

(٢)

١٢. أوجد النقط الواقعة علي المنحني ص = $\frac{لو_{هـ} س}{س}$ والتي عندها المماس لهذا المنحني يوازي ~~محور السينات~~

بالاشتقاق قسمة دالتين .

الحل :

$\frac{دص}{دس} = \frac{س \times \frac{1}{س} - 1 \times لو_{هـ} س}{س^2} = \frac{1 - لو_{هـ} س}{س^2}$

∴ المماس // السينات ⟸ ∴ ميل المماس = صفر .

∴ $1 - لو_{هـ} س = 0$ ⟸ $لو_{هـ} س = 1$

⟸ س = هـ

∴ د(هـ) = $\frac{لو_{هـ} هـ}{هـ} = \frac{1}{هـ}$

∴ النقطة المطلوبة = (هـ ، $\frac{1}{هـ}$)

#

(١)

١٣. $\int_{-1}^{1} \frac{س^٣}{س^٤ + جتا س} \, ء(س) = ...$

أ) -١
ب) صفر
ج) ١
د) ٤

باختبار الدالة المعطاه من حيث كونها زوجية أو فردية

$\frac{(-س)^٣}{(-س)^٤ + جتا(-س)} = - \frac{س^٣}{س^٤ + جتا س} = - د(س)$

∴ الدالة فردية

∴ التكامل المطلوب = $\boxed{صفر}$

الاختيار (ب)

(١)

١٤. اذا كان د (س) = $هـ^{٨س - س^٢}$ فإن الدالة تزايدية في الفترة ....

أ)]-∞، صفر]
ب) [صفر، ∞[
ج)]٤، ∞[
د)]-∞، ٤]

نوجد النقط الحرجة بوضع د̄(س) = صفر

د̄(س) = $هـ^{٨س - س^٢} \times (٨ - ٢س)$

وهي تساوي صفر عندما:

٨ - ٢س = ٠ ← س = ٤

د̄(س)   + + +   (٤)   - - -

تتزايد في الفترة]-∞، ٤]

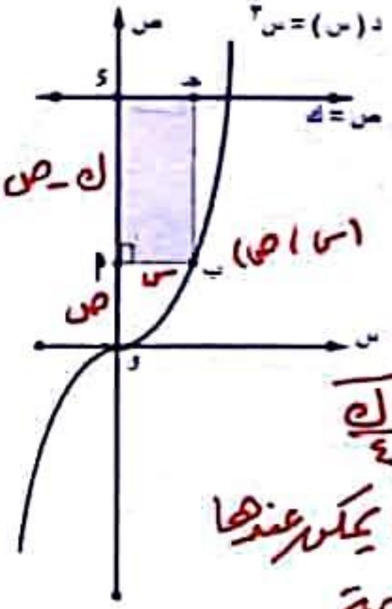
الاختيار (د)

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

١٥. في الشكل المقابل : (٢)

اذا كانت اكبر مساحة للمستطيل أ ب جـ د يساوي ٤٨ وحدة مربعة اوجد قيمة ك



المساحة = م = س [ك ـ ص]

$\therefore$ م = س [ك ـ س^٣] ← (*)

$\therefore$ م = س ك ـ س^٤

الحل: وبالتفاضل :

م' = ك ـ ٤ س^٣ ← م'' = ـ١٢ س^٢

عند العظمى أو الصغرى م' = ٠ ← س = $\sqrt[3]{\frac{ك}{٤}}$

وعندها م'' سالبة أى أنه المساحة أكبر ما يمكن عندها

وبالتعويض فى المعادلة (*) للحصول على أكبر مساحة .

$\therefore$ م = أكبر مساحة = $\sqrt[3]{\frac{ك}{٤}}$ [ك ـ $\frac{ك}{٤}$] = $\sqrt[3]{\frac{ك}{٤}}$ × $\frac{٣ك}{٤}$

، $\because$ $(\frac{ك}{٤})^{\frac{1}{3}}$ × $\frac{٣ك}{٤}$ = ٤٨ (معطى) ÷ ٣

$\therefore$ $(\frac{ك}{٤})^{\frac{4}{3}}$ = ١٦ ← $(\frac{ك}{٤})^{\frac{1}{3}}$ = ± ٢ ← $\boxed{ك = ٣٢}$ ، ك = ـ٣٢ مرفوضة

---

١٦. كرة تسقط من ارتفاع ٤٤,١ متر وكانت اشعة الشمس تميل علي الافقي بزاوية قياسها ٦٠° (٢)

أوجد المعدل الزمني الذي يتحرك به ظل الكرة علي الارض في اللحظة التي تلمس فيها الكرة سطح الارض . عند أى لحظة زمنية ن

ف = ع. ن + ½ جـ ن^٢

الحل: = ½ × ٩,٨ ن^٢ = ٤,٩ ن^٢

$\therefore$ أب = ٤,٩ ن^٢ ، ب د = ٤٤,١ ـ ٤,٩ ن^٢

نضع ف = ٤٤,١ لإيجاد زمن الوصول للأرض = $\boxed{٣ ث}$

من هندسة △ ب د هـ :

ظا ٦٠ = $\frac{ب د}{د هـ}$ ← $\sqrt{٣}$ = $\frac{٤٤,١ ـ ٤,٩ ن^٢}{س}$

$\therefore$ $\boxed{\sqrt{٣} س = ٤٤,١ ـ ٤,٩ ن^٢}$ ← $\sqrt{٣}$ $\frac{دس}{دن}$ = ـ٤,٩ × ٢ ن

= ـ٤,٩ × ٢ × ٣

$\therefore$ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{ـ٤,٩ × ٦}{\sqrt{٣}}$ = $\boxed{ـ٩,٨ \sqrt{٣}}$ م/ث

(١)

١٧. اذا كان ص = ٣^ع ، ع = جا ن ، ن = لو_هـ س وكان $\frac{دص}{دس}$ = د'(س)

فإن د'(١) = ...

(أ) ٣ لو_هـ ٣

(ب) لو_هـ ٣

(ج) − ٣ لو_هـ ٣

(د) ١

$ص = ٣^{ع} = ٣^{جا ن} = ٣^{جا(لو_هـ س)}$

$\frac{دص}{دس} = ٣^{جا(لو_هـ س)} \times جتا(لو_هـ س) \times \frac{١}{س} \times لو_هـ ٣$

$\therefore \frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = ٣^{جا(صفر)} \times جتا(صفر) \times \frac{١}{١} \times لو_هـ ٣$

$= ١ \times ١ \times ١ \times لو_هـ ٣$

$= لو_هـ ٣$

(٢)

١٨. ارسم الشكل العام للمنحني د(س) = ٢ س^٣ − ٩ س^٢ + ١٢ س − ٢ مبينا علية القيم القصوي المحلية ونقط الانقلاب ان وجدت

الحل:

د'(س) = ٦س^٢ − ١٨س + ١٢

د'(س) = صفر

س = ٢ ، س = ١

د'(س) : + + + (١) − − − − − (٢) + + + +

عند س = ١ يوجد قيمة عظمى محلية

د(١) = ٢ − ٩ + ١٢ − ٢ = ٣

عند س = ٢ يوجد قيمة صغرى محلية

د(٢) = ١٦ − ٣٦ + ٢٤ − ٢ = ٢

د''(س) = صفر

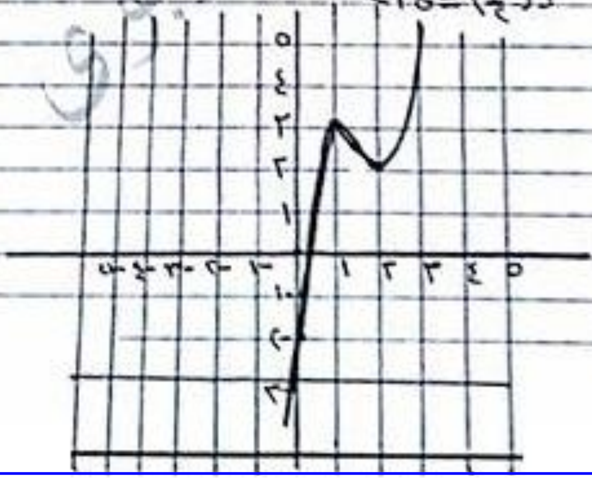
١٢س − ١٨ = صفر

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

د''(س) : − − − − ($\frac{٣}{٢}$) + + +

عند س = $\frac{٣}{٢}$ يوجد انقلاب

د($\frac{٣}{٢}$) = ٢٫٥



١٩. أوجد ميل المماس لمنحني الدالة د : د (س) = لو$_{هـ}$ س^{٢} - $\left(\text{لو}_{هـ}\text{ س}\right)^{٢}$ عند س = هـ . (٢)

الحل :

$$\boxed{د(س) = ٢ \text{ لو}_{هـ} س - [\text{لو}_{هـ} س]^{٢}}$$

وبالاشتقاق

$$\therefore د'(س) = ٢ \times \frac{١}{س} - ٢ (\text{لو}_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$$

$$= \text{ميل المماس} = م$$

$$\therefore [م]_{س=هـ} = \frac{٢}{هـ} - ٢(\text{لو}_{هـ} هـ) \times \frac{١}{هـ} = \frac{٢}{هـ} - \frac{٢}{هـ}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \boxed{\text{صفر}}$$

---

٢٠. اذا كان المماس لمنحني الدالة د (س) = لو$_{٢}$ $\left(\text{س}^{٢} - ٤ \text{ س} + ٨\right)$ يوازي محور السينات (١)

عند س = ك فإن د (ك) = ...

نوجد $د'(س) = \frac{١}{س^{٢} - ٤س + ٨} \times (٢س - ٤) \text{ لو}_{٢} هـ$

(أ) - ٣

(ب) -١

(ج) ٢

(د) ٤

$\therefore$ المماس // السينات عند س = ك

$\therefore د'(ك) = \text{صفر}$

$\therefore ٢ك - ٤ = ٠$

$ك = \boxed{٢}$

الاختيار (ج)

النموذج الأسترشادى الثالث

١ إذا كانت ص = $هـ^{-٢س}$ فإن $\frac{د^٧ ص}{د س^٧}$ = ... (١)

Ⓐ $-١٤ هـ^{-٢س}$

Ⓑ $١٢٨ هـ^{-٢س}$

Ⓒ $-١٢٨ هـ^{-٢س}$

Ⓓ $-١٢٨ هـ^{٢س}$

ص = $هـ^{-٢س}$

$\frac{د ص}{د س} = (-٢)^١ هـ^{-٢س}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = (-٢)^٢ هـ^{-٢س}$

$\frac{د^٧ ص}{د س^٧} = (-٢)^٧ هـ^{-٢س}$

$= \boxed{-١٢٨ هـ^{-٢س}}$

تحتاج تعديل

٢ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ $لو_{هـ} (١ + ٥س)^{\frac{-٢}{س}}$ (١)

Ⓐ $هـ^{-١٠}$

Ⓑ $-١٠ هـ$

Ⓒ $-١٠ لو هـ$

Ⓓ -١٠

$= لو_{هـ} [\lim_{س \leftarrow ٠} (١ + ٥س)^{\frac{١}{س}}]^{-٢}$

$= لو_{هـ} [هـ^٥]^{-٢}$

$= لو_{هـ} هـ^{-١٠} = -١٠ لو_{هـ} هـ$

$= \boxed{-١٠}$

الاختيار (د)

٣ $\int \frac{س}{س^٢ + ١} د س$ = ... (١)

Ⓐ $\frac{١}{٢} لو_{هـ} (س^٢ + ١) + ث$

Ⓑ $٢ لو_{هـ} (س^٢ + ١) + ث$

Ⓒ $\frac{١}{٢} س^٢ + لو_{هـ} س + ث$

Ⓓ $لو_{هـ} (س^٢ + ١) + ث$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢س}{س^٢ + ١} د س$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س^٢ + ١| + ث$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} (س^٢ + ١) + ث$

الاختيار (أ)

~~تحتاج تعديل $\frac{ء^٢ص}{ءع^٢}$~~

٤ إذا كانت ص = لوهـ (٩ + س^٣) ، ع = س^٣ + ٣ فإن $\frac{ء^٢ص}{ءع^٢}$ = ... (١)

(أ) $\frac{١}{٩ + س^٣}$

(ب) $\frac{١}{(٩ + س^٣)^٢}$

(جـ) $\frac{-٣س^٢}{(٩ + س^٣)^٢}$

(د) $\frac{-١}{(٩ + س^٣)^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^٢}{٩+س^٣}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٣س^٢$

المطلوب $\frac{ءص}{ءع} = \frac{٣س^٢}{٩+س^٣} \times \frac{١}{٣س^٢} = \boxed{\frac{١}{٩+س^٣}}$

وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ ع

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءع^٢} = \frac{-٣س^٢}{(٩+س^٣)^٢} \times \frac{ءس}{ءع} = \boxed{\frac{-١}{(٩+س^٣)^٢}}$

الاختيار (د)

تحتاج تعديل

٥ ∫ (قتا^٤ س – قتا^٢ س ظتا^٢ س) ءس = ... (١)

{قتا^٢ س – ظتا^٢ س = ١}

(أ) $\frac{قتا^٥ س}{٥} - \frac{ظتا^٣ س}{٣}$ + ث

(ب) – ظا س + ث

(جـ) – ظتا س + ث

(د) $\frac{١}{٢}$ قتا^٢ س + ث

المطلوب = ∫ قتا^٢ س [قتا^٢ س – ظتا^٢ س] ءس

= ∫ قتا^٢ س ءس

= $\boxed{– ظتا س + ث}$

الاختيار (جـ)

٦ إذا كان س^٣ + ٣ س^٢ ص + ٣ س ص^٢ + ص^٣ = ١٥ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... (١)

(أ) ١

(ب) –١

(جـ) ٣

(د) –٣

الطرف الأيمن = مفكوك (س+ص)^٣

$\therefore$ (س + ص)^٣ = ١٥ وبأخذ ∛ الطرفين

$\therefore$ س + ص = $\sqrt[٣]{١٥}$

$\therefore$ ص = $\sqrt[٣]{١٥}$ – س

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \boxed{-١}$

الاختيار (ب)

٧. إذا كانت د (س) دالة زوجية متصلة على ح وكان $\int_{0}^{2}$ د(س) ءس = ٧ ،

$\int_{-2}^{8}$ د (س) ءس = ١٩ فإن $\int_{2}^{8}$ د (س) ءس = ... (١)

أ) ٥

ب) ١٢

ج) ٢٦

د) ١٩

د(س) دالة زوجية ∴ $\int_{-2}^{0}$ د(س) ءس = ٧ ، $\int_{-2}^{2}$ د(س) ءس = ١٤

∵ $\int_{2}^{8}$ د(س) ءس = $\int_{-2}^{8}$ د(س) ءس − $\int_{-2}^{2}$ د(س) ءس

= ١٩ − ١٤ = $\boxed{٥}$ (أ)

٨. إذا كانت دَ (س) = أ س² + ٨ س ، وعند س = ١ توجد نقطة انقلاب للدالة (١)

فإن قيمة الثابت أ = ...

أ) ٨

ب) −٨

ج) ٤

د) −٤

دَ(س) = أ س² + ٨ س ⟸ دً(س) = ٢ أ س + ٨

∵ عند س = ١ يوجد نقطة انقلاب ∴ دً(١) = صفر

٢ أ + ٨ = صفر ⟸ ٢ أ = −٨ ⟸ $\boxed{أ = −٤}$ (د)

٩. مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س³ ، والمستقيمان س = −١ ، س = ٢ (١)

تساوي ...... وحدة مربعة

أ) $\frac{١}{٤}$

ب) $\frac{١٧}{٤}$

ج) $\frac{١٥}{٤}$

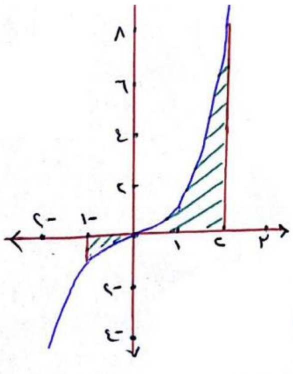
صيغة السؤال ينقصها والمستقيمان س = −١ ، س = ٢ ، ص = صفر

المساحة = $\left|\int_{-1}^{0} س^3 ءس\right| + \left|\int_{0}^{2} س^3 ءس\right|$

= $\left|\frac{1}{4}[س^4]_{-1}^{0}\right| + \frac{1}{4}[س^4]_{0}^{2}$

= $\frac{1}{4}|٠ − ١| + \frac{1}{4}[١٦ − ٠]$

= $\frac{1}{4} + ٤ = ٤\frac{1}{4} = \boxed{\frac{١٧}{٤}}$ وحدة مربعة (ب)

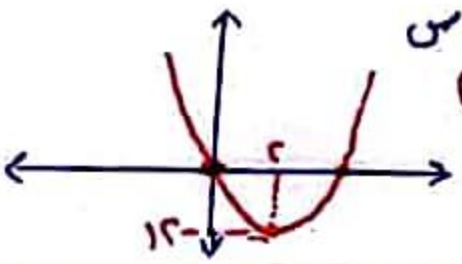


١٠. إذا كانت دً(س) = ٣ س^{٢} − أس حيث أ ثابت وكانت (٢ ، ٥) نقطة حرجة للدالة (١)
د(س) فإن هذه النقطة تكون نقطة ..... للدالة

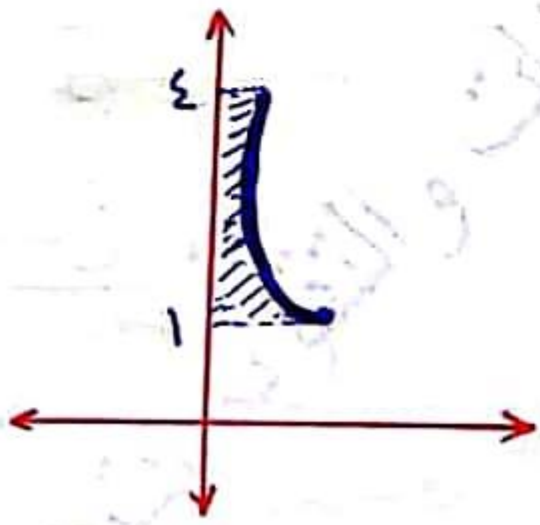
(أ) عظمى محلية
(ب) $\boxed{\text{صغرى محلية}}$
(ج) قصوى مطلقة
(د) انقلاب

دً(س) = ٦ س − أ
دً́(س) = ٦ > ٠ موجبة دائماً .
∴ دً́(٢) = ٦ > ٠ موجبة .
∴ (٢ ، ٥) صغرى محلية

* لاحظ أ = ١٢ $\xleftarrow{\text{متكوس}}$ د(س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س
= ٣ س (س − ٤)



١١. عند دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ حيث ١ ≤ ص ≤ ٤ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات أوجد حجم الجسم الناشئ من الدوران .



الحجم = $\pi \int_{١}^{٤}$ س^{٢} دص

= $\pi \int_{١}^{٤} \frac{١}{ص}$ دص

= π [لوهـ |ص|]$_{١}^{٤}$

= π [لوهـ ٤ − لوهـ ١]

= π [لوهـ ٤ − صفر]

= $\boxed{\pi \text{ لوهـ } ٤}$ وحدة مكعبة .

(٢)

١٢ أوجد : $\int \sqrt[3]{\text{س}^4 - \text{س}^3}\ \text{ء س}$

$\text{التكامل} = \int \text{س} \left[\sqrt[3]{\text{س} - 1}\right] \text{ء س}$

بفرض $\text{ع}^3 = \text{س} - 1 \leftarrow \text{س} = \text{ع}^3 + 1$

$\leftarrow \text{ء س} = 3\,\text{ع}^2\ \text{ء ع}$

$\therefore \text{التكامل} = \int (\text{ع}^3 + 1) \times \text{ع} \times 3\,\text{ع}^2\ \text{ء ع}$

$= 3\int (\text{ع}^6 + \text{ع}^3)\ \text{ء ع}$

$= 3\left[\frac{\text{ع}^7}{7} + \frac{\text{ع}^4}{4}\right] + \text{ث}$

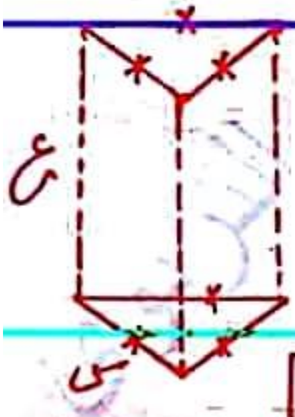
$= \frac{3}{7}(\text{س} - 1)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(\text{س} - 1)^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$

$= \frac{3}{28}(\text{س} - 1)^{\frac{4}{3}}\left[4(\text{س} - 1) + 7\right] + \text{ث}$

$= \frac{3}{28}(\text{س} - 1)^{\frac{4}{3}}\left[4\text{س} + 3\right] + \text{ث}$

١٣ منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ع سم وقاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه س سم فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ١ سم / ث بينما يتناقص ارتفاعه بمعدل ١ سم / ث . فأوجد العلاقة بين ع ، س عند اللحظة التي يكون فيها الحجم ثابتاً .

$\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = +1 \qquad \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} = -1$



$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{جا } 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2$

$\therefore \text{حجم المنشور} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{ع}$

$\therefore \underset{\text{ثابت}}{\text{ح}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2\,\text{ع}$ وبالاشتقاق

$\therefore \text{صفر} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\text{س}^2\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} + \text{ع} \times 2\text{س}\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}\right]$

$0 = \text{س}^2 \times -1 + 2\,\text{س}\,\text{ع} \times 1$

$\therefore 0 = -\text{س} + 2\text{ع}$

$\therefore \text{س} = 2\text{ع}$

ضلع القاعدة = ضعف الارتفاع

١٤ إذا كانت د (س) = س^٤ − ٤ س^٣ فإن : (٢)

(أ) د (س) متناقصة عندما س ∈ ....

(ب) منحنى د (س) محدباً لأعلى عندما س ∈ ....

دَ(س) = ٤ س^٣ − ١٢ س^٢

دً(س) = ١٢ س^٢ − ٢٤ س

عند النقط الحرجة دَ(س) = ٠ ⟸ ٤ س^٢ (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٣

عند نقط الانقلاب دً(س) = ٠

∴ ١٢ س (س − ٢) = ٠

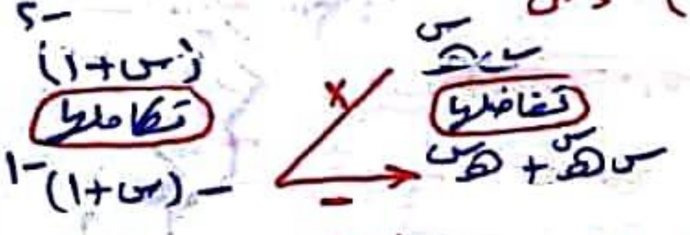
∴ س = ٠ أو س = ٢

(أ) د(س) متناقصة عندما س ∈]−∞ ، ٣]

(ب) منحنى د(س) محدب لأعلى عندما س ∈]٠ ، ٢[

١٥ أوجد : ∫ (س هـ^س)/(س+١)^٢ ءس باستخدام التجزئ

التكامل = ∫ س هـ^س (س+١)^{−٢} ءس

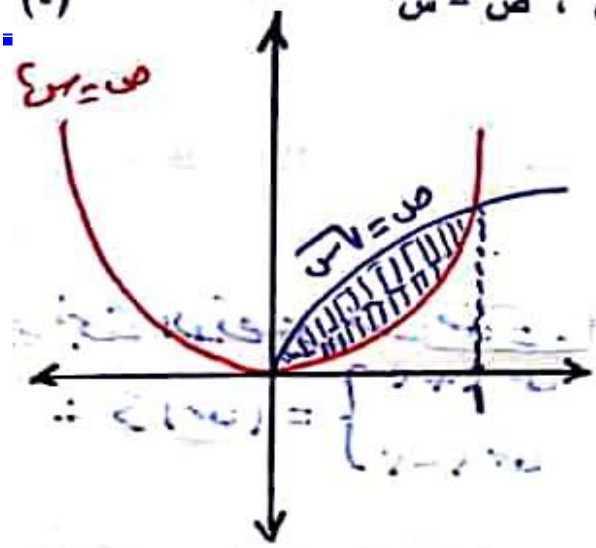


التكامل = − س هـ^س (س+١)^{−١} − ∫ −(س+١)^{−١} × هـ^س (س+١) ءس

= (− س هـ^س)/(س+١) + ∫ هـ^س ءس

= (− س هـ^س)/(س+١) + هـ^س + ث

١٦ أوجد المساحة الواقعة بين المنحنيين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س^٢ (٤)



نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين معاً

∴ س = س^٤

∴ س (س^٣ − ١) = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ ($\sqrt{س}$ − س^٢) ء س

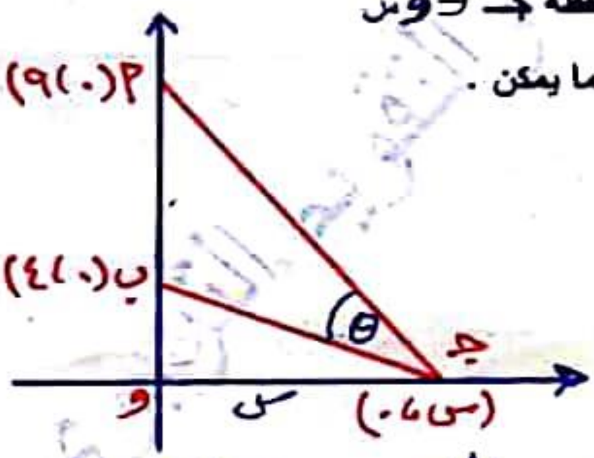
= $\left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{١}$

= $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}$

= $\boxed{\frac{١}{٣}}$ وحدة مربعة .

١٧ إذا كانت النقطة م (٠ ، ٩) ، ب (٠ ، ٤) ، النقطة جـ ∈ $\overrightarrow{وس}$

أوجد إحداثي جـ ليكون قياس (م$\hat{جـ}$ب) أكبر ما يمكن .



∵ θ = (م$\hat{جـ}$و) − (و$\hat{جـ}$ب)

∴ ظا θ = ظا [(م جـ و) − (ب جـ و)]

= $\frac{ظا(م جـ و) - ظا(ب جـ و)}{١ + ظا(م جـ و) ظا(ب جـ و)}$

∴ ظا θ = $\frac{\frac{٩}{س} - \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٩}{س} \times \frac{٤}{س}} \times \frac{س^٢}{س^٢}$ ⟸ ظا θ = $\frac{٥ س}{س^٢ + ٣٦}$ وبا

∴ قا$^٢\theta \frac{ء\theta}{ءس}$ = $\frac{٥(س^٢+٣٦) - ٢س \times ٥س}{(س^٢+٣٦)^٢}$ = $\frac{١٨٠ - ٥س^٢}{(س^٢+٣٦)^٢}$

$\frac{ء\theta}{ءس}$ = صفر عند القيم العظمى والصغرى

∴ ١٨٠ − ٥س^٢ = ٠ ⟵ س^٢ = ٣٦ ⟵ س = ±٦

$\frac{ء\theta}{ءس}$: − − − (−٦) + + + + (٦) − − −

∴ س = ٦ قيمة عظمى ⟵ إحداثي جـ (٦ ، صفر)

١٨) إذا كانت :

د (س) = { ٢ س + س٢ عندما س < ٠ ، ٢ س − س٢ عندما س ≥ ٠ }

فإن : (أ) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في [٠ ، ٥]

(ب) أوجد $\int_{-1}^{2}$ د (س) ء س

* نبحث الاتصال عند $\boxed{\text{س} = ٠}$ نجد أنها متصلة وكذلك قابلة للاشتقاق عندها

∴ د'(س) = { ٢ + ٢س س < ٠ ، ٢ − ٢س س > ٠ }

نضع د'(س) = ٠ . عند النقط الحرجة

س = −١ مرفوض ∉ [٠ ، ٥]

$\boxed{\text{س} = ١}$ مقبولة ∈ [٠ ، ٥]

نوجد . د(٠) = صفر

د(١) = $\boxed{١}$ عظمى مطلقة .

د(٥) = $\boxed{-١٥}$ صغرى مطلقة

$\int_{-1}^{2}$ د(س) ء س = $\int_{-1}^{0}$ (٢س + س٢) ء س + $\int_{0}^{2}$ (٢س − س٢) ء س

= $[\text{س}^2 + \frac{\text{س}^3}{3}]_{-1}^{0} + [\text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3}]_{0}^{2}$

= $\frac{-2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ #

١٩) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}}}{2\,\text{جتا}^2\,\text{س}}$ ء س = ... + ث

(أ) ٢ هـ^ظاس

(ب) $\frac{1}{2}$ هـ^ظاس

(ج) $\frac{1}{2}$ قا س هـ^ظاس

(د) ٢ قا٢ س هـ^ظاس

(١)

التكامل = $\frac{1}{2}\int$ هـ^ظاس × قا٢س ء س (مشتقتها)

= $\boxed{\frac{1}{2}\ \text{هـ}^{\text{ظاس}}}$ + ث

الاختيار (ب)

٢٠. د(س) = $س^٣ - ٣ س^٢ + ٥$ متناقصة عندما س ∈ .... (١)

ⓐ]٠، ٣[

ⓑ [٠، ٢]

ⓒ]٠، ٢[

ⓓ ح − [٠، ٢]

د'(س) = ٣ س^٢ − ٦ س = صفر عند النقط الحرجة

~~د''(س) = ٦ س − ٦~~ X ليس لها فائدة هنا

٣ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٢

د'(س) : +++ ، ٠ ، − − − ، ٢ ، +++

∴ الدالة متناقصة فى]٠، ٢[

الاختيار ج

النموذج الأسترشادى الرابع

(١)

١ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{هـ^{س} - ٢س - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر
(ب) −٢
(ج) ١
(د) −١

$نها_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} - نها_{س \to ٠} \frac{٢س}{س}$ نظرية

$= ١ - ٢$

$= \boxed{-١}$

الإجابة (د)

(١)

٢ إذا كانت د(س) = لو$_{هـ}$ (٢ + $\sqrt{٢}$ قتا س) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$

فإن: د$'$($\frac{\pi}{٤}$) = ...

(أ) $-\frac{١}{٤}$
(ب) $-\frac{١}{٢}$
(ج) $\frac{١}{٢}$
(د) ٤

$د'(س) = \frac{١}{٢ + \sqrt{٢} قتا س} \times (٠ - \sqrt{٢} قتا س ظتا س)$

$\therefore د'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-\sqrt{٢} قتا \frac{\pi}{٤} ظتا \frac{\pi}{٤}}{٢ + \sqrt{٢} قتا \frac{\pi}{٤}}$

$= \frac{-\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١}{٢ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{-٢}{٤} = \boxed{-\frac{١}{٢}}$

(١)

٣ إذا كان جتا ٢ س = جا ص فإن ($\frac{دص}{دس}$) عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تساوي ....

(أ) ±٢
(ب) −٢
(ج) ٢
(د) −١

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ ⟸ جتا $\frac{\pi}{٣}$ = جا ص ⟸ جا ص = $\frac{١}{٢}$

ص = $\frac{\pi}{٦}$ (أول) ، ص = $\frac{٥\pi}{٦}$ (ثانى)

وبالاشتقاق:

$-٢ جا ٢س = جتا ص \frac{دص}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٢ جا ٢س}{جتا ص}$

عند ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$) ⟸ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٢ \times \cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}}{\cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}} = \boxed{-٢}$

عند ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$) ⟸ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٢ \times \cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}}{-\cancel{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}} = \boxed{٢}$

الإجابة $\boxed{\pm ٢}$ لاختيار (أ)

٤ إذا كانت ص = ٤ ن³ + ٤ ، ع = ٣ ن² + ٢ (١)

فإن معدل تغير ع بالنسبة لـ ص تساوي ......

(أ) ٢ ن

(ب) -٢

(ج) $\frac{١}{٢ ن}$

(د) ٤

$\frac{ءص}{ءن} = ١٢ ن^٢$

$\frac{ءع}{ءن} = ٦ ن$

$\therefore \frac{ءع}{ءص} = \frac{ءع}{ءن} \div \frac{ءص}{ءن} = \frac{٦ ن}{١٢ ن^٢}$

$= \boxed{\frac{١}{٢ن}}$

الاختيار (ج)

٥ إذا كانت : د(س) = أ س² - ٨ ب حيث أ ، ب ثوابت وكان لمنحنى د (س) نقطة (١)

عظمى محلية هي (٢ ، ٥) فإن أ ∈ ....

(أ)] ٢ ، ∞ [

(ب)] ٠ ، ∞ [

(ج)] -∞ ، ٠ [

(د)] -∞ ، ٢ [

د َ(س) = ٢ أ س

د ً(س) = ٢ أ

لكي يوجد قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٥)

$\therefore$ د ً(٢) = ٢ أ < صفر

$\therefore$ أ < صفر

$\therefore$ أ ∈ $\boxed{] -\infty ، صفر [}$

الاختيار (ج)

٦) إذا كانت $\int_{2}^{أ} (٤س + ١)\, ءس = ٤٥$ فإن أ ∈ .... (١)

أ) $\{\frac{١١}{٢} ، ٥\}$

ب) $\{-\frac{١١}{٢} ، -٥\}$

ج) $\{\frac{١١}{٢} ، -٥\}$

د) $\{-\frac{١١}{٢} ، ٥\}$

∵ $[٢س^2 + س]_{2}^{أ} = ٤٥$

∴ $٢أ^2 + أ - (٢×٤+٢) = ٤٥$

∴ $٢أ^2 + أ - ٥٥ = ٠$

∴ $(أ - ٥)(٢أ + ١١) = ٠$

∴ $أ = \boxed{٥}$ ، $أ = \boxed{\frac{-١١}{٢}}$

∴ $أ ∈ \boxed{\{-\frac{١١}{٢} ، ٥\}}$

٧) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{س+١}$ (١)

والمستقيمات س = ١ ، س = -١ ، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات

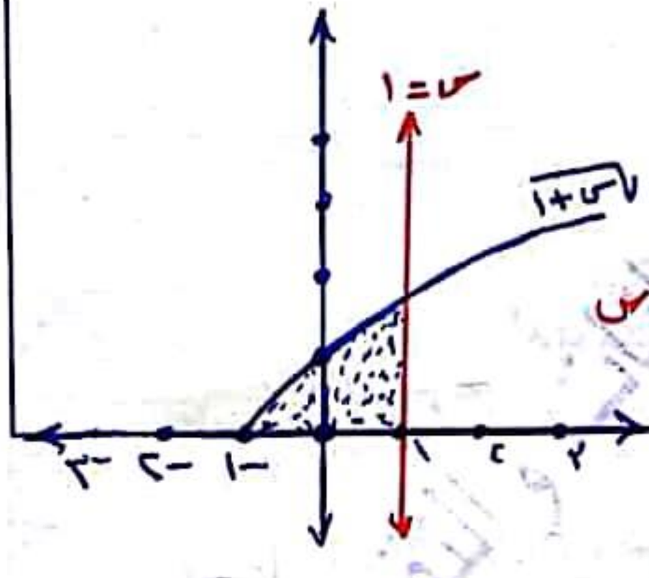
تساوي .... وحدة مكعبة

أ) $\frac{٣}{٢}\pi$

ب) $\frac{١}{٢}\pi$

ج) ٢π

د) π



مجال الدالة هو $[-١ ، ∞[$

الحجم $= \pi \int_{-1}^{1} ص^2\, ءس$

∴ الحجم $= \pi \int_{-1}^{1} (س+١)\, ءس$

$= \pi \cdot [\frac{١}{٢}س^2 + س]_{-1}^{1}$

$= \pi [\frac{١}{٢} + ١ - (\frac{١}{٢} - ١)] = \boxed{٢\pi}$ وحدة مكعبة

الاختيار ج

٨) إذا كانت : $ص = م\,س^{ن} - ب\,س^{ن+1} + 5$ كثيرة حدود ، م ، ب ، جـ ، ء $\in$ ط$^{+}$ (١)

فإن $\frac{d^{ن}ص}{dس^{ن}}$ يمكن أن يمثلها أحد الأشكال الآتية :

$ص^{(1)} = ن\,م\,س^{ن-1} - ب(ن+1)\,س^{ن}$

$ص^{(2)} = ن(ن-1)\,م\,س^{ن-2} - ب(ن+1)\,ن\,س^{ن-1}$

⋮

وهكذا

$ص^{(ن)} = \underline{لن}\,م\,س^{ن-ن} - ب\,ل^{ن+1}_{ن-1}\,س^{1}$

أى أن

$$ص^{(ن)} = \underline{لن}\,م - ب\,ل^{ن+1}_{ن-1}\,س$$

= ثابت − ثابت × س

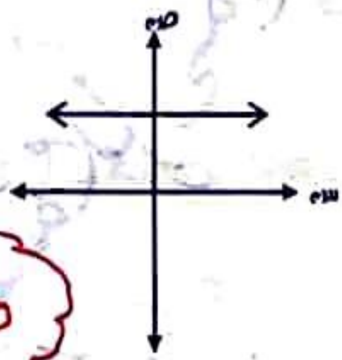
وهى معادلة خط مستقيم

* ميله سالب

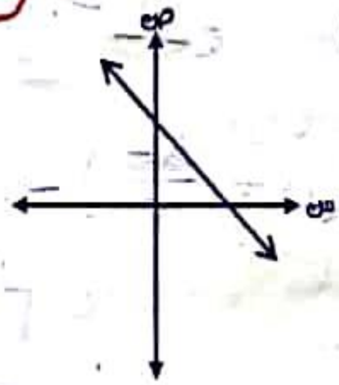
* ويقطع محور الصادات فى جزء طوله موجب ≠ ٠ .

(أ)

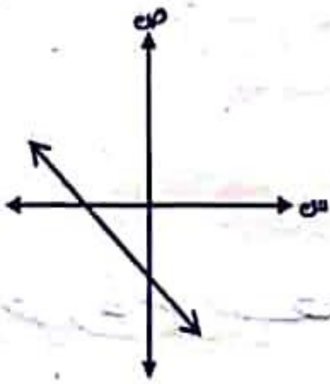
(ب)



(جـ)



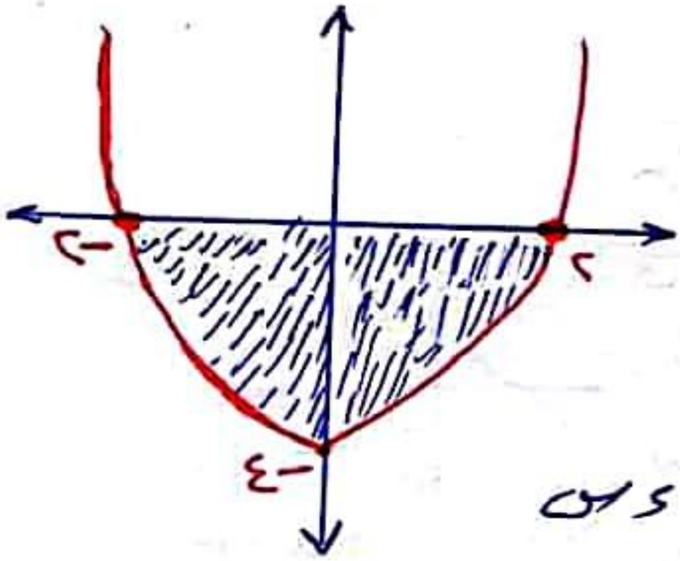
(د)



الاختيار (ج) هو الشكل الصحيح

٩. أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} − ٤ ومحور السينات .

الجزء المطلوب مساحته
تحت محور السينات
أى سالب



$$\text{المساحة} = -\int_{-٢}^{٢} \text{ص}\ \text{ء س}$$

$$= -\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٤)\ \text{ء س}$$

$$= -\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= -\left[\frac{٨}{٣} - ٨ - \left(\frac{-٨}{٣} + ٨\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{٣٢}{٣}\right]$$

$$= \frac{٣٢}{٣}$$

$$= \boxed{١٠ \frac{٢}{٣}}$$ وحدة مربعة .

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

١٠. باستخدام التكامل بالتعويض المناسب أوجد: $\int \text{س}^{2}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{ءس}$ (٣)

بوضع $٢\text{س} + ١ = \text{ص}$

$\therefore \text{س} = \frac{1}{2}\text{ص} - \frac{1}{2}$ $\quad$ ، $\text{ءس} = \frac{1}{2}\text{ءص}$

بالتعويض

$$\int \text{س}^{2}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{ءس} = \int \left(\frac{1}{2}\text{ص} - \frac{1}{2}\right)^{2} \times \text{ص}^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\ \text{ءص}$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}\text{ص}^{2} - \frac{1}{2}\text{ص} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2}\text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{1}{8}\text{ص}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{1}{28}\text{ص}^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{10}\text{ص}^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{28}(٢\text{س}+١)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{10}(٢\text{س}+١)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12}(٢\text{س}+١)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

---

١١. باستخدام التكامل بالتجزئ أوجد: $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

بوضع $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\quad$ $\text{ءع} = \text{س ءس}$

$\text{ءص} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ $\quad$ $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س}^{2}$

$$\therefore \int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$$

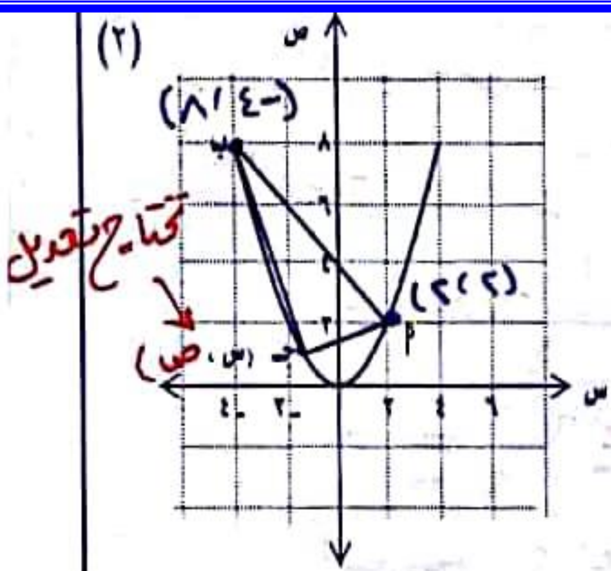
$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{س ءس}$$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^{2} + \text{ث}$$

١٢. النقط أ (٢ ، ٢) ، ب (-٤ ، ٨) ، جـ (س ، ص) جميعها تنتمي لمنحنى ص = $\frac{١}{٢}$ س^٢

أوجد احداثيات النقطة جـ لتكون مساحة سطح Δ أ ب جـ أكبر ما يمكن .

(٢)



∵ جـ ∈ للمنحنى

∴ جـ = (س ، $\frac{١}{٢}$ س^٢)

∵ م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ -٤ & ٨ & ١ \\ س & \frac{١}{٢}س^٢ & ١ \end{vmatrix}$ قانون يدرس في الصف الأول ث

= $\frac{١}{٢}$ [س (٢ - ٨) - $\frac{١}{٢}$ س^٢ (٢ + ٤) + ١ (١٦ + ٨)]

= $\frac{١}{٢}$ [-٦ س - ٣ س^٢ + ٢٤]

∴ م$'$ = $\frac{١}{٢}$ [-٦ - ٦ س] = ٠ عند العظمى أو الصغرى

∴ $\boxed{س = -١}$ ، $\boxed{ص = \frac{١}{٢}}$

= -٣ - ٣ س

م$''$ = -٣ سالبة دائماً

∴ عظمى دائماً

∴ إحداثي جـ هو

$\boxed{(-١ ، \frac{١}{٢})}$

١٣) إذا كانت (١ ، ٥) نقطة انقلاب للمنحنى الذي معادلته ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٧

أوجد قيمة أ ، ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٥)

∴ هي تحققه

∴ أ + ب + ٧ = ٥ ← $\boxed{\text{أ + ب = −٢}}$ (١)

∴ ص' = ٣أ س^{٢} + ٢ب س

ص'' = ٦أ س + ٢ب

∵ (١ ، ٥) نقطة انقلاب

∴ د''(١) = صفر

∴ ٦أ × ١ + ٢ب = ٠ ← ٦أ + ٢ب = ٠

∴ $\boxed{\text{٣أ + ب = ٠}}$ (٢)

وبضرب المعادلة (١) × −١ والجمع على (٢).

∴ ٢أ = ٢ ← $\boxed{\text{أ = ١}}$

، $\boxed{\text{ب = −٣}}$

#

١٤ إذا كان ميل العمودي على المنحنى ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) (٣)

يساوي $\frac{١}{٤س - ٣س^٢}$ ، د (١) = ٥ أوجد معادلة المنحنى

∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{م} = \frac{١}{٤س - ٣س^٢}$

∴ $م = ٣س^٢ - ٤س = \frac{ءص}{ءس}$ وبالتكامل

∴ $ص = \int (٣س^٢ - ٤س) \, ءس$

∴ $ص = س^٣ - ٢س^٢ + ث$

لكن د(١) = ٥

∴ ٥ = ١ − ٢ + ث ← ث = ٦

∴ $ص = س^٣ - ٢س^٢ + ٦$ المعادلة المطلوبة .

١٥ إثبت أن : $\int \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\,\text{ء س} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2} + \text{ث}$

الطرف الأيمن $= \int \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{(\text{س}+1)-2}{\text{س}+1}\,\text{ء س}$

$= \int \left(1 - \frac{2}{\text{س}+1}\right)\text{ء س}$

$= \text{س} - 2\int \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{ء س}$

$= \text{س} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{ث}$

$= \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^2 + \text{ث}$

من عندنا

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^2 + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^2 + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2} + \text{ث}$

= الطرف الأيسر #

١٦ إذا كان المستقيم ص − ٨س + جـ = ٠ يمس المنحنى ص = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١ (٣)
أوجد قيمة الثابت جـ .

∵ ص − ٨ س + جـ = ٠ ⟸ ص = ٨ س − جـ

، ∵ ص = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١

(للأولى) (للثانية)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٨ ، $\frac{دص}{دس}$ = ٦ س + ٢

∵ المنحنيان متماسان

∴ ميل الأول = ميل المماس الثاني عند نقطة التماس

∴ ٨ = ٦ س + ٢ ⟵ $\boxed{س = ١}$

وبالتعويض في المنحنى الثاني

⟵ $\boxed{ص = ٤}$

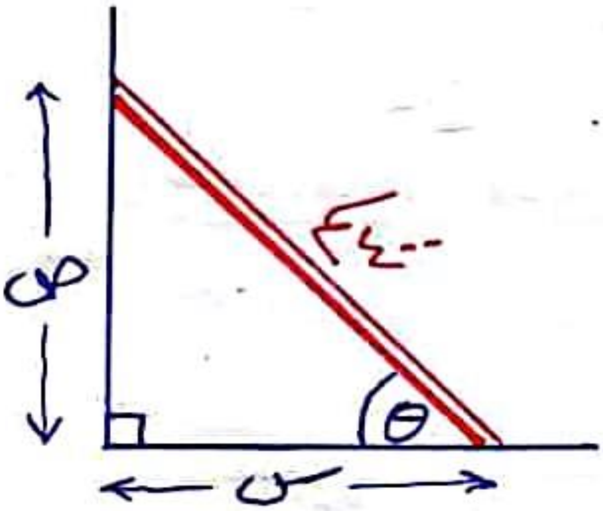
∴ نقطة التماس هي (١ ، ٤)
وهي تحقق كلا المنحنيين

∴ ٤ = ٨ × ١ − جـ

∴ $\boxed{جـ = ٤}$

#

(١٧) سلم طوله ٤ متر يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي وبطرفه الآخر على أرضية أفقية فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢٠ سم / ث احسب معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$



$\frac{دس}{دن} = +٢٠$ سم/ث

$\frac{دص}{دن} = ؟؟؟$

عند $θ = ٦٠°$

$س = ٤٠٠$ جتا $٦٠ = \boxed{٢٠٠}$

$ص = ٤٠٠$ جا $٦٠ = \boxed{٢٠٠\sqrt{٣}}$

ومن فيثاغورث : $س^٢ + ص^٢ = (٤٠٠)^٢$

وبالتفاضل :

$\cancel{٢}س \frac{دس}{دن} + \cancel{٢}ص \frac{دص}{دن} =$ صفر

وبالتعويض :

$\therefore \cancel{٢٠٠} \times ٢٠ + \cancel{٢٠٠}\sqrt{٣} \frac{دص}{دن} =$ صفر

$\therefore \frac{دص}{دن} = \frac{-٢٠}{\sqrt{٣}} = \boxed{\frac{-٢٠\sqrt{٣}}{٣}}$ سم/ث