المنهج

① ملخص شامل للتفاضل والتكامل ص ١، ٢، ٣

② مسائل على التكامل والمساحات والحجوم ص ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

③ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى المطلقه ص ١٠

④ المعادلات الزمنيه المرتبطة ص ١١

⑤ النهايات، سلوك الدالة ص ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧

التزايد، التناقص، التحدب، النقط الحرجة، الإنقلاب

مشتقة الدوال المثلثية

ص= جاس $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس

ص= جتاس $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ جاس

ص=ظاس $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢}س

ص=ظتاس $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ قتا^{٢}س

ص= قاس $\frac{ءص}{ءس}$ = قاس ظاس

ص=قتاس $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ قتاس ظتاس

لاحظ إذا كان

ص = قا د(س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = د/(س)قاد(س)ظاد(س)

ص= ظا الزاوية

$\frac{ءص}{ءس}$ = تفاضل الزاوية قا^{٢} الزاوية

وهكذا مع كل الدوال

الاشتقاق الضمني:

تفاضل س بالنسبة الي س = ١

تفاضل ص بالنسبة الي س = $\frac{ءص}{ءس}$

تفاضل ع بالنسبة الي ص = $\frac{ءع}{ءص}$

مثال توضيحي:

ص=س^{٢} + ٣ع

تفاضل بالنسبة الي س

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + ٣ $\frac{ءع}{ءس}$

تفاضل بالنسبة الي ع

$\frac{ءص}{ءع}$ = ٢س $\frac{ءس}{ءع}$ + ٣

تفاضل بالنسبة الي ص

١ = ٢س $\frac{ءس}{ءص}$ + ٣ $\frac{ءع}{ءص}$

مثال: اذا كان ظا ص= جا ٥س

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

قا^{٢}ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥جتا٥س

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٥ \text{ جتا } ٥س}{قا^{٢}ص}$

الاشتقاق البارمتري

ص = د(ع) & ع =د(س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

ص = د(ع) & س = د(ع)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ ÷ $\frac{ءس}{ءع}$

مثال توضيحي:

س = ٢ أن^{٢} ، ص= أن^{٤} أوجد عند ن = ٤

$\frac{ءص}{ءن}$ = ٤ أن^{٣} $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ أن

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ ÷ $\frac{ءس}{ءن}$ = ن^{٢} = ١٦

المشتقات العليا

$\frac{ءص}{ءس}$ = المشتقة الاولي " ميل المماس " "معدل التغير للداله"

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ المشتقة الثانية

او "معدل تغير ميل المماس"

مثال توضيحي

اوجد المشتقة الثالثة:

ص = س^{٥} ـ٤س^{٣} +٣

ص$^{/}$ = ٥س^{٤} ـ١٢ س^{٢}

ص$^{//}$ = ٢٠س^{٣} ـ٢٤س

ص$^{///}$= ٦٠س^{٢} ـ ٢٤

مثال: اذا كان ٣ص^{٤} =٤س^{٣}

اثبت ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ +٣($\frac{ءص}{ءس}$)^{٢} = $\frac{٣س^{٢}}{ص^{٢}}$

الحل

١٢ص^{٣} $\frac{ءص}{ءس}$ =١٢س^{٢}

٣٦ص^{٢} ($\frac{ءص}{ءس}$)^{٢} +١٢ص^{٣} $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢٤س ÷١٢ص^{٢}

٣($\frac{ءص}{ءس}$)^{٢} +ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{٣س^{٢}}{ص^{٢}}$

ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ +٣($\frac{ءص}{ءس}$)^{٢} = $\frac{٣س^{٢}}{ص^{٢}}$

تطبيقات على المشتقة:

١) لايجاد ميل المماس عند نقطة: نحسب المشتقة الاولي ونعوض بالنقطة ف المشتقة

٢) لايجاد الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :نحسب ميل المماس ثم (للميل shift tan)

٣)لايجاد معادلة المماس او معادلة العمودي: يجب معلومية الميل ونقطة أولا:

معادلة المماس $\frac{ص-ص١}{س-س١}$ =م المماس

معادلةالعمودي $\frac{ص-ص١}{س-س١}$ =م العمودي

نقلب،نغير الاشارة

٤)ايجاد النقط الواقعه ع المنحنى

-نحسب المشتقة الاولي

-نضع المشتقة الاولي = الميل

- نقوم بحل المعادلة ونوجد قيم س والتعويض في اصل الدالة لايجاد ص

الميل يكون معطي بشكل مباشر او غير مباشر.

لايجاد الميل

الميل= $\frac{ص٢-ص١}{س٢-س١}$ بمعلومية نقطتين

= $\frac{-معامل س}{معامل ص}$ بمعلومية معادلة المستقيم

= ظا هـ بمعلومية الزاوية التي ٠٠

اذا كان المستقيمان متوازيان م١=م٢

اذا كان المستقيمان متعامدان م١×م٢= -١

ميل المستقيم الموازي محور السينات =صفر

ميل المستقيم الموازي محور الصادات غير معرف

لاحظ أن

$\frac{ءس}{ءص}$ = ١ ÷ $\frac{ءص}{ءس}$

المعادلات الزمنية المرتبطة

نكون قاعدة الدالة المطلوبة نفاضل بالنسبة للزمن ونوجد المطلوب

*يجب حفظ جميع قوانين المساحات والحجوم

*استخدام نظرية فيثاغورث واقليدس لايجاد المطلوب

*استخدام التشابه

*استخدام النسب المثلثية وقانون الجيب وجيب التمام

نهايات الدوال لمرتبطة بالعدد هـ

نهـا$_{س\to\infty}$ $\left(١+\frac{١}{س}\right)^{س}$ = هـ

نهـا$_{س\to٠}$ $(١+س)^{\frac{١}{س}}$ = هـ

نهـا$_{س\to\infty}$ $\left(١+\frac{١}{س}\right)^{أس}$ = هـ^{أ}

نهـا$_{س\to\infty}$ $\left(١+\frac{أ}{س}\right)^{س}$ = هـ^{أ}

نهـا$_{س\to٠}$ هـ^{س} = ١

نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{لو_{هـ}(١+س)}{س}$ =لو$_{هـ}$هـ

نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{لو_{هـ}(١+س)}{س}$ =لو$_{هـ}$هـ= ١

نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{أ^{س}-١}{س}$ =لو$_{هـ}$أ

نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{هـ^{س}-١}{س}$ =لو$_{هـ}$هـ = ١

AHMED RABIE

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

مشتقة الدالة الاسية:

د(س)= $هـ^{س}$ د/(س)= $هـ^{س}$

د(س)= $هـ^{ر(س)}$ د/(س)=ر/(س) $هـ^{ر(س)}$

تفاضل الداله الاسية للاساس هـ

= نفسها × تفاضل الاس

د(س)= $أ^{س}$ د/(س)= $أ^{س}$ لو$_{هـ}$ أ

تفاضل الداله الاسية للاساس أ

= نفسها × تفاضل الاس × لو$_{هـ}$ أ

مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

* د(س)= لو$_{هـ}$ س د/(س)= $\frac{١}{س}$

* د(س)=لو$_{أ}$ س

د/(س)= $\frac{١}{س لو_{هـ} أ}$ = $\frac{١}{س}$ لو$_{أ}$ هـ

• د(س)=لو$_{أ}$ ر(س)

د/(س)= $\frac{ر/(س)}{ر(س) لو_{هـ} أ}$

مشتقة لو (دالة)= $\frac{\text{تفاضل الدالة}}{\text{لو الدالة}}$

الاشتقاق اللوغاريتمي

اذا كانت س موجودة في الاساس والاس نقوم باخذ لوغاريتم الطرفين

مثال توضيحي

ص = $س^{س}$ باخذ لو$_{هـ}$ للطرفين

لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ $س^{س}$=س لو$_{هـ}$ س

$\frac{١}{ص}$ $\frac{ءص}{ءس}$ =لو$_{هـ}$ س+ س× $\frac{١}{س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ =

ص(لو$_{هـ}$ س + ١) = $س^{س}$(١+لو$_{هـ}$ س)

تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمة:

∫ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + ث

∫ $هـ^{ر(س)}$ ر/(س)ءس = $هـ^{ر(س)}$ + ث

∫ $أ^{س}$ ءس = $\frac{أ^{س}}{أ}$ + ث

∫ $أ^{س}$ ءس = $\frac{أ^{س}}{لو_{هـ} أ}$ + ث

∫ $أ^{ر(س)}$ ر/(س)ءس = $\frac{أ^{ر(س)}}{لو_{هـ} أ}$ +ث

∫دالة اسية ×تفاضل الاس ءس

= الدالة الاسية ×لو$_{هـ}$الاساس +ث

∫ $\frac{١}{س}$ ءس = لو$_{هـ}$|س| + ث

∫ $\frac{ر/(س)}{ر(س)}$ ءس=لو$_{هـ}$|ر(س)| + ث

∫ $\frac{\text{تفاضل المقام}}{\text{المقام}}$ ءس= لو$_{هـ}$ |المقام|+ث

سلوك الدالة

*** المشتقة الاولي**

نوجد منها النقط الحرجة ونوجد فترات التزايد والتناقص

النقطة الحرجة: هي النقطة التي تجعل المشتقة الاولي = ٠ أو النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابله للاشتقاق.

لايجاد النقط الحرجة

- نحسب المشتقة الاولي
- نساويها بالصفر ونحسب قيم س ونعوض في اصل الدالة لايجاد ص لايجاد فترات التزايد والتناقص نرسم خط الاعداد للمشقة الاولي ونبحث اشارتها

د/(س)>صفر تزايد

د/(س)<صفر تناقص

مع مراعاة مجال الدالة

لتحديد النقط الحرجة من حيث كونها عظمى محليا اوصغرى محليا

*اذا كانت تفصل بين تزايد ثم تناقص تكون عظمى محليا

*اذا كانت تفصل بين تناقص ثم تزايد تكون صغرى محليا

أو اختبار المشتقة الثانية

د//(أ)<صفر عظمى محليا

د//(أ)>صفر صغرى محليا

إذا كانت هناك نقطة حرجة معطاة فانها ١)تحقق معادلة المنحنى

٢)تجعل المشتقة الاولي = صفر

القيمة العظمة والصغرى المطلقة

اذا كانت ص= د(س) متصلة في الفترة [أ، ب] لايجاد اكبر واصغر قيمة للدالة

-نوجد النقط الحرجة اولا وليكن $س_١$،$س_٢$ يجب ان تنتمي الفترة

نحسب د($س_١$)= د($س_٢$)=

د(أ)= د(ب)=

اكبر القيم هي العظمي المطلقة

اصغر القيم هي الصغرى المطلقة

*** المشتقة الثانية**

نوجد منها نقط الانقلاب ونوجد فترات التحدب لاعلى ولاسفل

نقطة الانقلاب: هي النقطة التي تجعل المشتقة الثانية = ٠ أو النقطة التي تكون عندها د// غير معرفة

لايجاد نقط الانقلاب

- نحسب المشتقة الثانية
- نساويها بالصفر ونحسب قيم س ونعوض في اصل الدالة لايجاد ص لايجاد فترات التحدب

نرسم خط الاعداد للمشقة الثانية ونبحث اشارتها

د//(س)<صفر تحدب لاعلى

د//(س)>صفر تحدب لاسفل

إذا كانت هناك نقطة انقلاب معطاة فانها ١)تحقق معادلة المنحنى

٢)تجعل المشتقة الثانية = صفر

تطبيقات على القيم العظمي والصغر المطلقة

خطوات الحل:

- نكون قاعدة دالة الهدف المطلوبة"نعرفها اكبر مايمكن اقل"
- نجعل الدالة في متغير واحد من خلال المعطيات المعطاة
- نقوم بالاشتقاق بالنسبة لهذا المتغير ونساوي المشتقةبالصفر ونوجد قيمة المتغير
- اذا وجدت اكثر من قيمة نقوم بتحديد نوعها من حيث كونها عظمى او صغرى محليا
- نوجد المطلوب في المسألة

تكامل الدوال المثلثية

∫جتا س ءس = جاس + ث

∫ جا س ءس = ـ جتاس + ث

∫ $قا^{٢}$س ءس = ظاس + ث

∫ $قتا^{٢}$س ءس = ـ ظتاس + ث

∫ قاس ظاس ءس = قاس + ث

∫قتاس ظتاس ءس= ـ ظتاس+ث

لاحظ

∫ جتا(أس +ب)ءس =

جا$\frac{(أس+ب)}{أ}$ +ث

بصفه عامه مع كل القوانين

∫جتا "زاوية من الدرجة الاولي"

= $\frac{1}{\text{تفاضل الزاوية}}$ جا الزاوية +ث

قوانين اضافية

∫ظاس ءس = ـ لو |جتاس| +ث

∫ظتاس ءس = لو |جاس | +ث

∫دالة × مشتقتها = زود ع الاس واحد ونقسم ع الاس الجديد

∫$جا^{ن}$ س جتاس ءس = $\frac{جا^{ن+١}س}{ن+١}$

∫$قا^{٢}$س ظاس ءس

=∫$قا^{٢}$س قاس ظاس ءس

= $\frac{١}{٥}$ $قا^{٥}$س+ث

تذكر أن

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

جا(٢أ) =٢جاأجتاأ

جتا (٢أ) = $جتا^{٢}$أ ـ $جا^{٢}$أ

=٢$جتا^{٢}$أ ـ ١

=١ ـ ٢$جا^{٢}$أ

ظا(٢أ)= $\frac{٢ظاأ}{١ـظا^{٢}أ}$

AHMED RABIE

تفاضلي الدالة

ص= د(س)

ءص = د/(س) ءس

ءص تسمى تفاضلي ص

مثال توضيحي

ص=(س^{٣} +٥)^{٤}

ءص= ٤(س^{٣}+٥)^{٣}(٣س^{٢})ءس

التكامل بالتعويض

باختصار كدا:

عباره عن فرض يتم فرضه ف المسألة لتبسيط التكامل وتطبيق قاعدة تم دراستها

لو فرضك هيعقد المسألة الغي الفرض ده وشوفلك فرض تاني او التكامل بالتجزيء

الخطوات

نفرض ان ع = ----

من الفرض نوجد س = -----

نحسب ءس =----

نعوض في الكامل ليكون المتغير ع

نكامل الدالة ثم نحوله بدلاله س

مثال توضيحي:

$\int$ س $\sqrt{\text{س}+٥}$ ءس

الحل

لنفرض ان ع = س+٥

س= ع – ٥

ءس= ءع

ا =$\int$(ع–٥) ع$^{\frac{١}{٢}}$ ءع

ا =$\int$(ع$^{\frac{٣}{٢}}$ -٥ ع$^{\frac{١}{٢}}$) ءس

= $\frac{٢}{٥}$ ع$^{\frac{٥}{٢}}$ - $\frac{١٠}{٣}$ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ +ث

= $\frac{٢}{٥}$(س+٥)$^{\frac{٥}{٢}}$ – $\frac{١٠}{٣}$(س+٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ +ث

التكامل بالتجزيء

يستخدم لاجراء حاصل ضرب دالتين أحدهما يمكن تكاملها والاخرى مشتقتها منتهية

$\int$د$_{١}$ د$_{٢}$ ءس

نفرض أن

ص=د$_{١}$ ءع =د$_{٢}$ ءس

ءص=-----ءس ع=$\int$د$_{٢}$ءس

$\int$د$_{١}$ د$_{٢}$ ءس= ص ع –$\int$ع ءص

مثال توضيحي :

$\int$س جاس ءس

نضع ص=س ءع = جاس ءس

ءص =ءس ع= $\int$جاس ءس

ع = – جتاس

ا= – س جتاس – $\int$– جتاس ءس

= – س جتاس + جاس +ث

التكامل المحدد

اذا كانت الدالة د متصلة على [أ ،ب] وكانت ت المشتقة العكسية للدالة د على نفس الفترة بمعنى

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = [ت(س)]$_{أ}^{ب}$

= ت(ب) – ت(أ)

خواص التكامل المحدد:

$\int_{أ}^{أ}$ د(س)=صفر

$\int_{ب}^{أ}$ د(س)ءس= – $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس

$\int_{أ}^{ب}$ د(س)ءس= $\int_{أ}^{ج}$ د(س)+ $\int_{ج}^{ب}$ د(س)

حيث جـ ∈[أ ،ب]

لاحظ أن

اذا كانت د دالة زوجية متصله

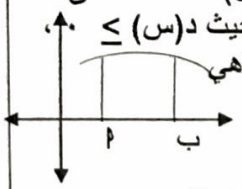
$\int_{-أ}^{أ}$ د(س)ءس=٢ $\int_{٠}^{أ}$ د(س) ءس

إذا كانت د دالة فردية متصله

$\int_{-أ}^{أ}$ د(س)ءس=صفر

مساحات المناطق المستوية

مساحة المنطقة المحدوده بمنحنى الدالة ص=د(س) المتصله على الفترة [أ، ب]حيث د(س) ≥ ٠، محور السينات هي



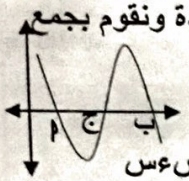
م = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

اذا كان المنحنى اسفل محور السينات نضع المقياس

*يفضل رسم المسألة وتحديد نقط التقاطع مع محور السينات "بوضع ص=٠" ونوجد قيم س التى تمثل حدود التكامل

*إذا كان المساحة المطلوبة مقسمة الي اكثر من منطقة نحسب مساحة كل منطقة على حدة ونقوم بجمع المساحات

المساحه



ا $\int_{أ}^{ج}$ ص ءس| + $\int_{ج}^{ب}$ ص ءس

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

اذا كان ص$_{١}$،ص$_{٢}$منحنيين ،المطلوب ايجاد المساحة المحصورة بينهما

الخطوات:

*نقوم برسم المنحنيين بصورة دقيقة لاستخراج نقط التقاطع التي تمثل حدود التكامل

*أو نقوم بحل المعادلتين معا جبريا لايجاد نقط التقاطع

أذا تقاطع عند س=أ ، س= ب

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ص$_{٢}$– ص$_{١}$ ءس

اذا تقاطع ف ثلاث نقاط عند س =أ ،ج ، ب

ا $\int_{أ}^{ج}$ ص$_{٢}$– ص$_{١}$ءس| + $\int_{ج}^{ب}$ ص$_{٢}$– ص$_{١}$ءس

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

أ/أحمد ربيع

حجوم الاجسام الدورانية

المجسم : ينشأ من دوران منطقة مستوية حول محور ثابت ف مستويها

الدوران حول محور السينات:

ح = $\int_{أ}^{ب}$ π ص^{٢} ءس

الدوران حول محور الصادات:

ح = $\int_{أ}^{ب}$ π س^{٢} ءص

دوران المنطقة المحصورة بين منحنيين

الخطوات:

*نقوم برسم المنحنيين بصورة دقيقة لاستخراج نقط التقاطع التي تمثل حدود التكامل

*أو نقوم بحل المعادلتين معا جبريا لايجاد نقط التقاطع

**الدوران حول محور السينات

أذا تقاطع عند س=أ ، س= ب

الحجم =π $\int_{أ}^{ب}$ ص$_{٢}^{٢}$– ص$_{١}^{٢}$ ءس

**الدوران حول محور الصادات

أذا تقاطع عند ص=أ ، ص= ب

الحجم =π $\int_{أ}^{ب}$ س$_{٢}^{٢}$– س$_{١}^{٢}$ ءص

وما توفيقي الا بالله عليه توكلت

واليه أنيب

AHMED RABIE

مسائل هامة على التكامل:نماذج الكتاب المدرسي:

١) $\int$ جاس جتا^{٣}س عس

= ـ $\int$ ـ جاس جتا^{٣}س عس دالة × تفاضلها

= ـ جتا^{٤}س + ث

٢) $\int$ س(٢س ـ ١)^{٣} عس تكامل بالتجزئ

ص = س عع = (٢س ـ ١)^{٣} عس

عص = ١عس ع = $\frac{(٢س - ١)^{٤}}{٤ \times ٢}$

المقدار = $\frac{س(٢س - ١)^{٤}}{٨}$ ـ $\int \frac{(٢س - ١)^{٤}}{٨}$ عس

المقدار = $\frac{س(٢س - ١)^{٤}}{٨}$ ـ $\frac{(٢س - ١)^{٥}}{٨٠}$ +ث

٣) $\int$ س هـ$^{-٢س}$ عس

ص= س عع = هـ$^{-٢س}$ عس

عص=١عس ع = $\frac{هـ^{-٢س}}{-٢}$

المقدار = $\frac{س.هـ^{-٢س}}{-٢}$ ـ $\int \frac{هـ^{-٢س}}{-٢}$ عس

المقدار = $\frac{س.هـ^{-٢س}}{-٢}$ ـ $\frac{هـ^{-٢س}}{٤}$ + ث

٤) $\int$ س(س ـ ٥)^{٣} عس بالتعويض

نفرض ان ع = س ـ ٥ ومنها س = ع+٥

عع = عس

المقدار = $\int$ (ع+٥)ع^{٣}عع = $\int$ (ع^{٤} +٥ع^{٣})عع

= $\frac{ع^{٥}}{٥}$ + $\frac{٥ع^{٤}}{٤}$ + ث= $\frac{(س - ٥)^{٥}}{٥}$ + $\frac{٥(س - ٥)^{٤}}{٤}$ + ث

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

٥) $\int$ ٤س هـ^{٢س} عس تكامل بالتجزيء

ص= ٤س عع = هـ^{٢س}عس

عص= ٤ عس ع = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س}

المقدار = ٢س هـ^{٢س} ـ $\int$ ٢هـ^{٢س} عس

= ٢س هـ^{٢س} ـ هـ^{٢س} + ث

٦) $\int$ (٣س^{٢} ـ ٤هـ^{٢س})عس= س^{٣} ـ٢هـ^{٢س} +ث

٧) $\int \frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣}}$ عس يمكن الحل بالتعويض او التجزئ

$\int$ (س ـ١) (س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ عس التعويض

نضع ص = س+٣ ومنها س = ص ـ ٣

عص = عس

المقدار = $\int$ (ص ـ٣ ـ١)(ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ عص

= $\int$ (ص ـ ٤)(ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ عص

= $\int$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ ـ ٤ص$^{-\frac{١}{٢}}$ عص

= $\frac{٢}{٣}$ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ـ ٨ص$^{\frac{١}{٢}}$ +ث

= $\frac{٢}{٣}$ (س+٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ـ ٨(س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ +ث

٨) $\int$ قتا$^{٢}\frac{س+٥}{٢}$ عس = ـ ٢ ظتا $\frac{س+٥}{٢}$ +ث

٩) $\int \frac{٥س}{٣س^{٢} - ١}$عس= $\frac{٥}{٦}\int \frac{٦س}{٣س^{٢} - ١}$ عس= $\frac{٥}{٦}$لوهـ|٣س^{٢}-١|+ث

١٠) $\int \frac{٧س^{٣}}{٢ - ٥س^{٤}}$ ع س = $\frac{٧}{-٢٠}\int \frac{-٢٠س^{٣}}{٢ - ٥س^{٤}}$ ع س

= $\frac{٧}{-٢٠}$ لوهـ|٢ـ ٥ س^{٤}|+ث

١١) $\int$ (٣هـ$^{-٥س}$+ $\frac{\pi}{س}$)ع س = $\frac{٣}{-٥}$ هـ$^{-٥س}$+πلو|س|+ث

١٢) $\int$ظتاس قتا^{٣}س عس=ـ$\int$(ـ ظتاس قتاس)قتا^{٢}س عس

= ـ$\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س +ث

١٣) $\int$س جاس عس التكامل بالتجزئ

ص = س عع = جاس عس

عص = ١عس ع = ـ جتاس

المقدار =ـ س جتاس ـ $\int$ـ جتاس عس

= ـ س جتاس + جاس + ث

١٤) $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ عس =٢ $\int_{٠}^{١} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ عس

=٢ $\int_{٠}^{١} \sqrt{س^{٢}(س^{٢} + ١)}$ عس=٢ $\int_{٠}^{١}$ س(س^{٢} + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ عس

= $\int_{٠}^{١}$ ٢س(س^{٢} + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ عس = $\left[\frac{٢}{٣}(س^{٢} + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$ = $\frac{٤\sqrt{٢} - ٢}{٣}$

١٥) $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{س + ١}$ عس التعويض

نضع ص=س+١ ومنها س =ص ـ١ ،عص = عس

المقدار =$\int$(ص ـ١)(ص)$^{\frac{١}{٢}}$ عص= $\int$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ـ ص$^{\frac{١}{٢}}$ عص

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

المقدار = $\frac{٢}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$

= $\left[\frac{٢}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$ = $\frac{١١٦}{١٥}$

١٦) $\int \frac{(س+٣)^{٣} - ٢٧}{س}$ ءس

نفرض ان ص = س+٣ ومنها س= ص − ٣

،ءس=ءص

المقدار = $\int \frac{ص^{٣} - ٢٧}{ص - ٣}$ ءص= $\int$(ص^{٢} +ص +٩)ءص

= $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} + $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} +٩ص +ث

= $\frac{١}{٣}$ (س+٣)^{٣} + $\frac{١}{٢}$ (س+٣)^{٢} +٩(س+٣) +ث

١٧) $\int$ س^{٢} هـ$^{-س}$ ءس

نضع ص=س^{٢} ءع = هـ$^{-س}$ ءس

ءص = ٢س ءس ع = − هـ$^{-س}$

المقدار= − س^{٢}هـ$^{-س}$ − $\int$−٢س هـ$^{-س}$ ءس

المقدار= − س^{٢}هـ$^{-س}$ + $\int$٢س هـ$^{-س}$ ءس

نضع ن = ٢س ءك = هـ$^{-س}$ ءس

ءن =٢ءس ك = − هـ$^{-س}$

المقدار = − س^{٢}هـ$^{-س}$ −٢س هـ$^{-س}$ +$\int$٢هـ$^{-س}$ءس

المقدار= − س^{٢}هـ$^{-س}$ −٢س هـ$^{-س}$ −٢هـ$^{-س}$ +ث

١٨) $\int$ |س −٢|ءس |س − ٢|= $\begin{cases} -س+٢ & س<٢ \\ س-٢ & س\geq٢ \end{cases}$ عند

المقدار = $\int$ − س+٢ ءس + $\int$ س − ٢ ءس

المقدار =[− $\frac{١}{٢}$ س^{٢}+٢س] + [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} −٢س]

= ٢ +٤،٥ = ٦،٥

١٩) $\int \frac{٣س}{س^{٢}-١}$ ءس= $\frac{٣}{٢}\int \frac{٢س}{س^{٢}-١}$ ءس

= $\frac{٣}{٢}$ لوم|س^{٢}−١|+ث

٢٠) $\int$٩س^{٢}هـ^{٣س}ءس

نضع ص=٩س^{٢} ءع = هـ^{٣س} ءس

ءص = ١٨س ءس ع = $\frac{١}{٣}$ هـ^{٣س}

المقدار= ٣س^{٢}هـ^{٣س} − $\int$٦س هـ^{٣س} ءس

نضع ن = ٦س ءك = هـ^{٣س} ءس

ءن =٦ءس ك = $\frac{١}{٣}$ هـ^{٣س}

المقدار = ٣س^{٢}هـ^{٣س}− [٢س هـ^{٣س} − $\int$٢هـ^{٣س}ءس]

المقدار= ٣س^{٢}هـ^{٣س} − ٢س هـ^{٣س} + $\frac{٢}{٣}$ هـ^{٣س} +ث

٢٠) $\int$ظا(٣س+١)ءس =$\int \frac{جا(٣س+١)}{جتا(٣س+١)}$ ءس

= − $\int \frac{-جا(٣س+١)}{جتا(٣س+١)}$ ءس = − $\frac{١}{٣}$ لوم|جتا(٣س+١)|+ث

٢١) $\int$(١− س^{٢})(٣س − س^{٣})^{٥}ءس

المقدار = $\frac{١}{٣}$ $\int$(٣− ٣س^{٢})(٣س − س^{٣})^{٥}ءس

= $\frac{١}{١٨}$ (٣س − س^{٣})^{٦} +ث

٢٢) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ د(س)ءس =٩، $\int_{٥}^{٣}$ د(س)ءس=٤

أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٥}$ [٣د(س)− ٦]ءس

∵ $\int_{٥}^{٣}$ د(س)ءس=٤ ∴ $\int_{٣}^{٥}$ د(س)ءس= −٤

∴ $\int_{-٢}^{٥}$ ٣د(س)ءس= ٣[$\int_{-٢}^{٣}$ د(س)ءس+ $\int_{٣}^{٥}$ د(س)ءس]

=١٥

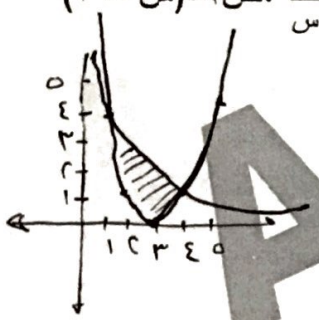
$\int_{-٢}^{٥}$ ٦ءس= [٦س]$_{-٢}^{٥}$ =٤٢

المقدار= $\int_{-٢}^{٥}$ ٣د(س)ءس − $\int_{-٢}^{٥}$ ٦ءس=١٥−٤٢=−٢٧

المساحات والحجوم

١) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص= $\frac{٤}{س}$ ،ص=(س − ٣)^{٢} دورة كاملة حول محور السينات الحلـــــ

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$= $\frac{٤}{س}$ ،ص$_{٢}$=(س − ٣)^{٢}



نلاحظ ان نقط التقاطع عند

س=١ ، س= ٤

الحجم =π $\int$ ص$_{١}^{٢}$ − ص$_{٢}^{٢}$ءس

=π $\int_{١}^{٤}$ $\frac{١٦}{س^{٢}}$ − (س − ٣)^{٤}ءس

=π $\left[\frac{١٦س^{-١}}{-١} - \frac{(س-٣)^{٥}}{٥}\right]_{١}^{٤}$ = $\frac{٢٧}{٥}$ πوحدة مكعبة

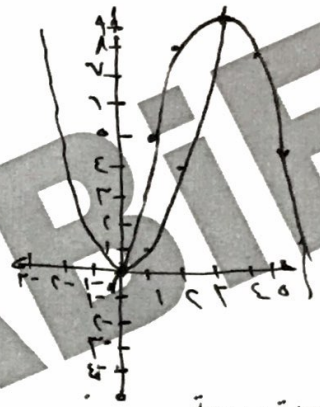
AHMED RABIE

٢)أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص=س^{٢}، ص=٦س – س^{٢} بالوحدات المربعة

الحلـــــــ

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$=س^{٢}، ص$_{٢}$=٦س – س^{٢}

نلاحظ أن نقط التقاطع عند س=٠ ،س=٣



م= $\int_{٠}^{٣}$(ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)ءس

= $\int_{٠}^{٣}$(٦س – س^{٢} – س^{٢})ءس

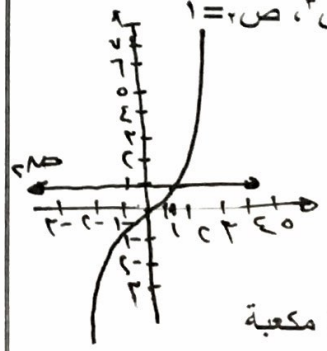
= $\int_{٠}^{٣}$(٦س – ٢س^{٢})ءس

= $\left[٣س^{٢} - \frac{٢}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٣}$ = ٩ وحدة مربعة

٣)إذا كان حجم الجسم الدوراني الناشء عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص=س^{٣} والمستقيمين س=٠ ، ص=١ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك اسطواني الشكل طوله ٤٣ وحدة فما طول نصف قطر السلك الحلـــــــ

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$=س^{٣}، ص$_{٢}$=١

نقطة التقاطع عند س=١



الحجم =π $\int_{٠}^{١}$ص$_{٢}^{٢}$ – ص$_{١}^{٢}$ءس

=π $\int_{٠}^{١}$١ – س^{٦} ءس

=π $\left[س - \frac{س^{٧}}{٧}\right]_{٠}^{١}$ = $\frac{٦}{٧}$ πوحدة مكعبة

حجم السلك=حجم الجسم الدوراني

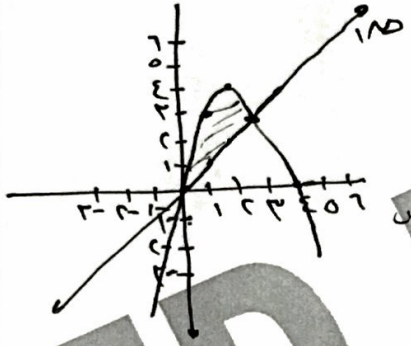
π نق^{٢} ×٤٢ = $\frac{٦}{٧}$ π ومنها نق^{٢} = $\frac{١}{٤٩}$

∴ نق = $\frac{١}{٧}$ وحدة طول

٤)أوجدمساحة المنطقةالمحددة بالمنحنيين س – ص=٠ ،ص=٤س – س^{٢} الحلـــــــ

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$=س،ص$_{٢}$=٤س – س^{٢}

لاحظ ان نقط التقاطع عند س=٠ ،س=٣



م= $\int_{٠}^{٣}$(ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)ءس

= $\int_{٠}^{٣}$(٤س – س^{٢} – س)ءس

= $\int_{٠}^{٣}$(٣س – س^{٢})ءس

= $\left[\frac{٣}{٢}س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٣}$ = $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

٥) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ١ والمستقيمين س=٠ ، ص=٠

الحلـــــــ

عند ص= ٠ فان س=١

حدود التكامل عند س=٠ ، س=١

$\sqrt{ص}$ = ١ – $\sqrt{س}$ بالتربيع ص=١ – ٢ $\sqrt{س}$ + س

م=| $\int_{٠}^{١}$(ص)ءس | =| $\int_{٠}^{١}$(١ – ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + س)ءس |

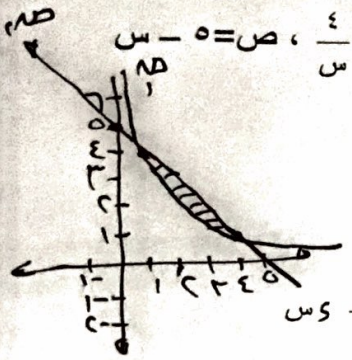
= $\left[س - \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

٦) اثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص= $\frac{٤}{س}$ ،ص=٥ – س دورة واحدة حول محور السينات = ٩π من الوحدات المكعبة.

الحلـــــــ

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$= $\frac{٤}{س}$ ، ص=٥ – س

نلاحظ ان نقط التقاطع عند س=١ ، س= ٤



الحجم =π $\int_{١}^{٤}$ص$_{٢}^{٢}$ – ص$_{١}^{٢}$ءس

=π $\int_{١}^{٤}$٢٥ – ١٠س + س^{٢} – $\frac{١٦}{س^{٢}}$ ءس

=π $\left[٢٥س - ٥س^{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} + ١٦س^{-١}\right]_{١}^{٤}$ =٩πوحدة مكعبة

٧)أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص=٤ – س^{٢} والجزأين الموجبين من محوري الاحداثيات دورة كاملة حول محور السينات

الحلـــــــ

محور الصادات س=٠

محور السينات عند ص=٠

٤ – س^{٢}=٠

س=٢ أو س= -٢ مرفوض

الحجم ح= π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ءس =π $\int_{٠}^{٢}$١٦ – ٨س^{٢} + س^{٤}ءس

= $\left[١٦س - \frac{٨}{٣}س^{٣} - \frac{س^{٥}}{٥}\right]_{٠}^{٢}$ = $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة مكعبة

AHMED RABIE

٨)اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س ص=٢ والمستقيمان س=١ ، س=٢

الحلـــــ

$ص = \frac{٢}{س}$

الحجم = $\pi \int_{١}^{٢} ص^{٢} ءس = \pi \int_{١}^{٢} \frac{٤}{س^{٢}} ءس = \pi \int_{١}^{٢} ٤س^{-٢} ءس$

$= \pi \left[-٤س^{-١} \right]_{١}^{٢} = ٢\pi$ وحدة مكعبة

٩)اذاكانت م المنطقةالمحددةبالمنحنى س ص=٤ + س^{٢} والمستقيمات س=١، س=٤ ، ص=٠ اوجد

أولا مساحة المنطقة م

ثانيا حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات

الحلـــــ

$ص = \frac{٤}{س} + س = ٤س^{-١} + س$

أولا المساحة م = $\int_{١}^{٤} (ص) ءس = \int_{١}^{٤} (\frac{٤}{س} + س) ءس$ |

$= \left[٤لو_{هـ} س + \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٤} =$

$(٤لو_{هـ} ٤ + ٨) - (٤لو_{هـ} ١ + \frac{١}{٢}) \simeq ١٣$ وحدة مربعة

ثانيا: الحجم = $\pi \int_{١}^{٤} ص^{٢} ءس = \pi \int_{١}^{٤} ١٦س^{-٢} + ٨ + س^{٢} ءس$

$= \pi \left[-١٦س^{-١} + ٨س + \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٤} = ٥٧\pi$ وحدة مكعبة

١٠) اوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين ص+س^{٢}=٦، ص+٢س – ٣=٠

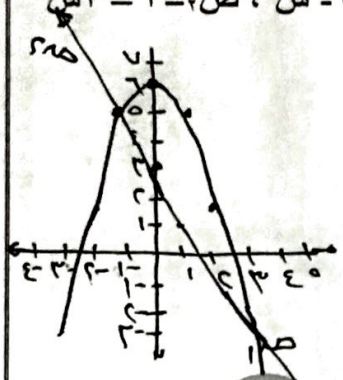
الحلـــــ

ص=٦- س^{٢} ، ص=٣ – ٢س

نقوم برسم المنحنيين ص$_{١}$=٦- س^{٢}، ص$_{٢}$=٣ – ٢س

نلاحظ أن نقط التقاطع

عند س= -١ ،س=٣



م= $\int_{-١}^{٣} (ص_{١} - ص_{٢}) ءس$

$= \int_{-١}^{٣} (٦ - س^{٢} - ٣ + ٢س) ءس$

$= \int_{-١}^{٣} (٣ - س^{٢} + ٢س) ءس$

$= \left[٣س - \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} \right]_{-١}^{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

١١)أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات ص=س^{٣} +١،ص=٠ ،س=٠ ، س=١ دورة كاملة حول محور السينات

الحلـــــ

الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} ص^{٢} ءس = \pi \int_{٠}^{١} س^{٦} + ٢س^{٣} + ١ ءس =$

$= \pi \left[\frac{س^{٧}}{٧} + \frac{٢س^{٤}}{٤} + س \right]_{٠}^{١} = \frac{٢٣}{١٤} \pi$ وحدة مكعبة

١٢)اذا كانت أ(٠، ٣) ،ب(١، ٤)،جـ(٢، ٠) أوجد باستخدام التكامل : أولا مساحة△أ ب جـ

ثانيا:حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أوجـ دورة كاملة حول محور الصادات

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ ميل أب = $\frac{٤ - ٣}{١ - ٠} = ١$

ميل ب جـ= $\frac{٤ - ٠}{١ - ٢} = -٤$ ميل أجـ= $\frac{٣ - ٠}{٠ - ٢} = \frac{٣}{-٢}$

معادلة أب هي $\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{١}{١}$

ومنها ص – ٣=س

ومنها ص$_{١}$=س+٣

معادلة ب جـ هي $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{-٤}{١}$

ومنها ص$_{٢}$= - ٤س+٨

معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ $\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{-٣}{٢}$ ومنها ٢ص – ٦= - ٣س

ومنها ٢ص = ٦ – ٣س ∴ص$_{٣}$ =-٣/٢ س

م△أب جـ= $\int_{١}^{٢} (ص_{١} - ص_{٣}) ءس + \int_{١}^{٢} (ص_{٢} - ص_{٣}) ءس =$

$\int_{١}^{٢} (س + ٣ - ٣ + \frac{٣س}{٢}) ءس + \int_{١}^{٢} (-٤س + ٨ - ٣ + \frac{٣س}{٢}) ءس$

$= \int_{١}^{٢} (\frac{٥س}{٢}) ءس + \int_{١}^{٢} (٥ - \frac{٥س}{٢}) ءس$

$= \left[\frac{٥س^{٢}}{٤} \right] + \left[٥س - \frac{٥س^{٢}}{٤} \right] = \frac{٥}{٢}$ وحدة مربعة

ثانيا ∴ص$_{٣}$ =-٣/٢ س ∴س$_{٣}$ = ٢ – ٢/٣ ص

الحجم = $\pi \int_{٠}^{٣} س^{٢} ءص = \pi \int_{٠}^{٣} ٤ - \frac{٨ص}{٣} + \frac{٤}{٩} ص^{٢} ءص =$

$= \pi \left[٤ص - \frac{٤ص^{٢}}{٣} + \frac{٤ص^{٣}}{٢٧} \right]_{٠}^{٣} = ٤\pi$ وحدة مكعبة

AHMED RABIE

مسائل تربط التفاضل والتكامل:

١٣)اذا كانت د(س)= س^{٣} ـ ٣س +٣ أوجد:

أولا القيم القصوى المطلقة للدالة في [٠، ٢]

ثانيا مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمات س=٠، س=٢ ، ص=٠

الحلـــــ

أولا: د^{١}(س)=٣س^{٢} ـ ٣

نضع ٣س^{٢} ـ ٣ =٠ ومنها

س=١ أو س= ـ١ مرفوض

د(١)=١

د(٠)=٣ ∴القيمة العظمى المطلقة = ٥

د(٢)=٥ ∴القيمة الصغرى المطلقة =١

ثانيا م = $\int_{٠}^{٢}$ س^{٣} ـ ٣س +٣ ءس

= $\left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٣س^{٢}}{٢} + ٣س\right]_{٠}^{٢}$ =٤ وحدة مربعة

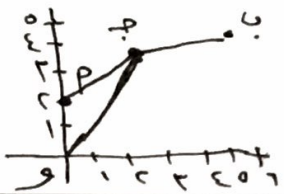
١٤)المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع منحنى الدالة د في النقطة جـ(س، ص)حيث س> ٠ ،أ(٠، ٢)،ب(٦، ٤)،

د(س)= $\frac{٩}{س}$ اوجد: أ) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

ب)احداثي نقطة جـ

جـ)معادلة العمودى على المنحنى دعند جـ واثبت انه يملا بنقطة الاصل و

ء)حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودي وجـ ومنحنى الدالة د والمستقيم س=٦ دورة كاملة حول محور السينات.



الحلـــــ

ميل أب= $\frac{٢ - ٤}{٠ - ٦}$ = $\frac{١}{٣}$

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي $\frac{ص - ٢}{س - ٠}$ = $\frac{١}{٣}$

س=٣ص ـ ٦ اولا

ب)نقطة جـ تقع على كلا من ص= $\frac{٩}{س}$ ، س=٣ص-٦

س ص =٩ بالتعويض

(٣ص ـ ٦)ص=٩ ومنها ٣ص^{٢}ـ ٦ص ـ٩ =٠

ومنها ص=٣ أو ص= ـ١ مرفوض

س=٣ س= ـ ٩

∴ جـ(٣،٣)

ثالثا ص=٩س$^{-١}$ ص$'$ = ـ٩س$^{-٢}$

عند س =٣ ص$'$ = ـ١ ميل المماس = ـ١

∴ ميل العمودي =١ والنقطة (٣،٣)

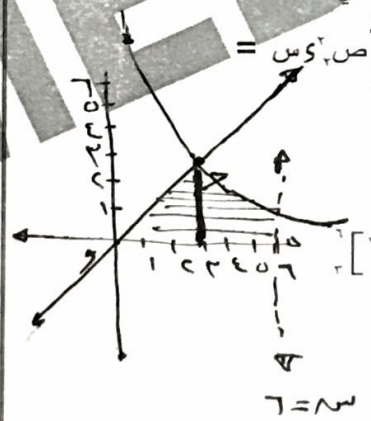
معادلة العمودي $\frac{ص - ٣}{س - ٣}$ = ١ ومنها ص ـ ٣=س ـ٣

∴ معادلة العمودي هي ص= س

عند س=٠ فإن ص=٠أي أنه يمر بنقطة الاصل

رابعا:معادلة المستقيم وجـ هي ص=س

الحجم ح=π$\int_{٣}^{٦}$ ص^{٢}ءس + π$\int_{٣}^{٦}$ ص^{٢}ءس =



π$\int_{٣}^{٦}$ س^{٢}ءس + π$\int_{٣}^{٦}$ $\frac{٨١}{س^{٢}}$ ءس

=π$\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٣}^{٦}$ + π$\left[-٨١س^{-١}\right]_{٣}^{٦}$

= $\frac{٤٥}{٢}$ π وحدة مكعبة

١٥) إذا كان معدل تغير ميل المماس للمنحنى عند اي نقطة هو ٦(١ ـ ٢س)وكان للممنحنى نقطة حرجة عند س=١ وللدالة قيمة صغرى محلية =٤ أوجد

أولا: معادلة العمودي للمنحنى عند س= ـ١

ثانيا: ارسم شكلا عاما للمنحني موضحا القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب ان وجدت

الحلـــــ

د$''$(س)=٦(١ ـ ٢س) = ٦ ـ١٢س

د$'$(س)=$\int$٦ ـ١٢س ءس = ٦س ـ٦س^{٢} +ث

نقطة حرجة عند س=١ المشتقة الاولي =٠

صفر= ٦ ـ ٦+ث ومنها ث= ٠

د$'$(س)=٦س ـ٦س^{٢}

نضع ٦س ـ٦س^{٢} =صفر

س=٠ أو س=١

عند س=٠ قيمة صغرى محليه =٤

اي ان (٠، ٤) تقع على منحنى الدالة

د(س)=$\int$٦س ـ٦س^{٢} ءس =٣س^{٢} ـ٢س^{٣} +ث

عند (٠، ٤) ٤=٠ ـ ٠ +ث ومنها ث=٤

د(س)=٣س^{٢} ـ ٢س^{٣} +٤

عند س= ـ١ د(ـ١)=٩ النقطة (ـ١، ٩)

ميل المماس د$'$(ـ١)= ـ١٢ ميل العمودي $\frac{١}{١٢}$

معادلة العمودي $\frac{ص - ٩}{س + ١}$ = $\frac{١}{١٢}$ ومنها

س+١=١٢ص-١٠٨ ومنها س ـ١٢ص+١٠٩=٠

ثانيا:لرسم المنحنى:

AHMED RABIE

$د^{١}(س)=٦س - ٦س^{٢}$

نضع ٦س - ٦س^{٢} =صفر

س=٠ أو س=١

د(٠)=٤ د(١)=٥

(٠، ٤) &(١، ٥) نقطة حرجة

الدالة تتزايد في الفترة]٠، ١[

تتناقص في]-∞، ٠[،، الفترة]١، ∞[

د(٠)=٤صغرى محلية د(١)=٥ عظمى محلية

$د^{١١}(س)=٦-١٢س$ نضع $د^{١١}(س)=٠$ ومنها

٦-١٢س=٠ ومنها س=$\frac{١}{٢}$

د($\frac{١}{٢}$)=$\frac{٩}{٢}$ ∴($\frac{١}{٢}$،$\frac{٩}{٢}$) نقطة انقلاب

]-∞، $\frac{١}{٢}$ [تحدب لاسفل

] $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [تحدب لاعلى

الشكل العام للمنحني ⟸

١٦)إذا كان ميل المماس للمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص)على المنحنى ٣(س^{٢}-١) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحني الدالة د ونقط الانقلاب ان وجدت علما بان المنحنى يمر بالنقطة (-٢، -١) ثم ارسم شكلا عاما للمنحنى

الحلـــــ

ميل المماس $د^{١}(س)=٣س^{٢}-٣$

د(س)=∫(٣س^{٢}-٣) ءس =س^{٣}-٣س +ث (-٢، -١)

-٨ +٦ +ث = -١ ومنها ث =١

معادلة المنحنى د(س)=س^{٣}-٣س+١

المشتقة الاولى $د^{١}(س)=٠$ ٣س^{٢}-٣=٠

ومنها س=١ أو س= -١

د(١)= -١صغرى محليا

د(-١)=٣ عظمى محليا

المشتقة الثانية $د^{١١}(س)=٦س$

نضع ٦س=٠ ومنها س=٠

د(٠)=١ (٠، ١)نقطة انقلاب

الشكل العام للمنحنى⟸

١٧) اذا كان ميل المماس للمنحنى ص=د(س) عند اي نقطة عليه =٦س^{٢}+ب س وكان د(٠)=٥ ،د(٢)= -٣ أوجد قيمة الثابت ب ثم ارسم الشكل العام للمنحنى

الحلـــــ

ميل المماس $د^{١}(س)=٦س^{٢}+ب س$

د(س)=∫(٦س^{٢}+ب س ءس = ٢س^{٣}+ب $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث

د(٠)=٥ ث =٥ ومنها د(س)=٢س^{٣}+ب $\frac{س^{٢}}{٢}$+٥

د(٢)= -٣∴١٦+٢ب +٥ = -٣ ∴٢ب=-٢٤ ∴ب=-١٢

د(س)=٢س^{٣}-٦س +٥

نضع $د^{١}(س)=٠$ ٦س^{٢}-٦س =٠

ومنها س=٠ أو س= ١

د(٠)=٥ عظمى محليا

د(١)=١ صغرى محليا

نضع $د^{١١}(س)=١٢س-٦=٠$

ومنها س= $\frac{١}{٢}$

($\frac{١}{٢}$،$\frac{٩}{٤}$) نقطة انقلاب

الشكل العام للمنحنى⟸

١٨)خزان فارغ سعته ١٠أمتار مكعبة يصب فيه الماء تدريجيا بمعدل (٢ن+٣) متر مكعب/دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق اوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

$\frac{ءح}{ءن}$ = ٢ن +٣

ح=∫ ٢ن+٣ ءن = ن^{٢} +٣ن +ث

عند ن = ٠ الخزان فارغ ح=٠ فإن ث =٠

ح=ن^{٢} +٣ن

عندما يمتلى الخزان ح=١٠ ن^{٢} +٣ن =١٠

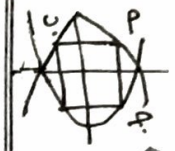
ن^{٢}+٣ن -١٠=٠ ومنها ن =٢ أو ن= -٥مرفوض

يمتلي الخزان بعد دقيقتين

تفاضل ٣ ثانوي إعداد أ/أحمد ربيع

مسائل هامة على تطبيقات على القيم العظمى والصغرى المطلقة نماذج الكتاب المدرسي:

١) رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص=س^{٢} – ١٢ والرأسان الاخران على المنحنى ص=١٢ – س^{٢} أحسب اكبر مساحه لهذا المستطيل. الحل



نفرض أب=٢س

أ(س، س^{٢}-١٢)

جـ(س،١٢-س^{٢})

طول أجـ =

$\sqrt{(س-س)^{٢}+(١٢-س^{٢}-س^{٢}-١٢)}$

أجـ = ٢٤ – ٢ س^{٢}

مساحة المستطيل م = الطول × العرض

م = ٢س(٢٤- ٢س^{٢})=٤٨س - ٤س^{٣}

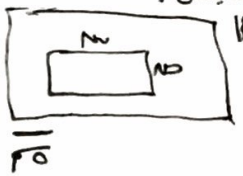
$\frac{دم}{دس}$=٤٨ – ١٢س^{٢} نضع $\frac{دم}{دس}$ =٠

س=٢ او س = -٢ مرفوض

م=٤(٢٤-٨)=٦٤ وحدة مربعة

٢) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوي ٨٠٠ سم^{٣} من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كلا من الهامشين العلوي والسفلي ١٠سم وكل من الهامشين الجانبين ٥سم، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته اصغر ما يمكن؟.

الحل



نفرض ان بعدا المادة المطبوعة هما س،ص

بعدا الملصق هما

س+٢٠،ص+١٠

مساحة المادة س ص = ٨٠٠

ص=$\frac{٨٠٠}{س}$

مساحة الملصق م = (س+٢٠)(ص+١٠)

م =(س+٢٠)($\frac{٨٠٠}{س}$ +١٠)

م=٨٠٠+١٠س +$\frac{١٦٠٠٠}{س}$ +٢٠٠

$\frac{دم}{دس}$= ١٠ - ١٦٠٠٠س$^{-٢}$ نضع $\frac{دم}{دس}$=٠

ومنها س =٤٠ س=-٤٠ مرفوض

عند س=٤٠ فإن ص=٢٠سم

ابعاد الملصق س+٢٠=٦٠سم،ص+١٠=٣٠سم

--------------*

٣)اذا كانت ف بعد النقطة (١، ٠)عن النقطة (س،ص) الواقعة على المنحنى ص= $\sqrt{س}$ اوجد احداثي النقطة(س،ص) التي تكون عندها ف اصغر ما يمكن.

الحل

ف= $\sqrt{(س-١)^{٢}+(ص-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{(س-١)^{٢}+س}$ بالتربيع

ف^{٢}=(س-١)^{٢}+س نفاضل بالنسبة الي س

$\frac{دف}{دس}$ =٢(س-١)+١=٢س-٢+١=٢س-١

نضع $\frac{دف}{دس}$=٠ اي ان ٢س-١=٠ ومنها س=$\frac{١}{٢}$

عند س=$\frac{١}{٢}$ فإن ص= $\sqrt{\frac{١}{٢}}$ النقطة($\frac{١}{٢}$، $\sqrt{\frac{١}{٢}}$)

--------------*

٤)ملعب على شكل مستطيل ينتهي ضلعان متقابلان منه بنصفي دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساويا لطول هذا الضلع إذا كان محيط الملعب ٤٠٠متر فاثبت ان مساحة سطح الملعب تكون اكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها.

الحل

طول نصف قطر الكرة =س

عرض المستطيل=٢س

طول المستطيل =ص

محيط الملعب =٤٠٠

٢π س+ص=٤٠٠ ومنها ص=٤٠٠ – ٢πس

مساحةالملعب = مساحةالدائرة +مساحةالمستطيل

م=πس^{٢} +س ص

م=πس^{٢}+س(٤٠٠ – ٢πس)

م= - πس^{٢} +٤٠٠س نشتق بالنسبة الي س

تفاضل ٣ ثانوي إعداد أ/أحمد ربيع

$\frac{دم}{دس}$= -٢πس +٤٠٠ نضع $\frac{دم}{دس}$ =٠

ومنها س = $\frac{٢٠٠}{π}$ متر

د"(س)= -٢π د"($\frac{٢٠٠}{π}$)< صفر عظمى محليا

اي ان المساحة اكبر ما يمكن

عندس = $\frac{٢٠٠}{π}$ متر فإن ص=٤٠٠-٢π$\frac{٢٠٠}{π}$=صفر

اي انه لا يوجد مستطيل

اي ان الملعب يكون على شكل دائرة نق= $\frac{٢٠٠}{π}$ متر

--------------*

٥)رسم في نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هي قطر نصف الدائرة ،طول قاعدته الصغري =طول كلا من ساقيه يساوي مقدار ثابت .عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن.

الحل

طول نصف قطر الدائرة متغير = س

طول القاعده الصغري = ٢ص

طول كلا من الساقين = ٢ص

ع ارتفاع شبه المنحرف

قياس زاوية القاعدة θ

ب هـ = س – ص

فيثاغورث ع^{٢} =٤ص^{٢} – (س – ص)^{٢}

ع^{٢}=٤ص^{٢}-س^{٢}+٢س ص – ص^{٢}

ع^{٢}=٣ص^{٢}+٢س ص – س^{٢}

مساحة شبه المنحرف م =$\frac{١}{٢}$(٢س+٢ص)ع

م =(س+ص)ع

م^{٢}=(س+ص)^{٢} ع^{٢}

م^{٢}= (س+ص)^{٢}[٣ص^{٢}+٢س ص – س^{٢}]

٢م $\frac{دم}{دس}$= ٢(س+ص)[٣ص^{٢}+٢س ص – س^{٢}]+

[٢ص – ٢س]× (س+ص)^{٢}نضع $\frac{دم}{دس}$=٠

ونقسم على (س+ص)

٢[٣ص^{٢}+٢س ص– س^{٢}]+[٢ص-٢ص]×(س+ص)^{٢}=٢ص^{٢}+٢ص س+٢ص^{٢}-٢س^{٢}-٢س ص=٠

٨ص^{٢}+٤س ص – ٤س^{٢}=٠ ÷٤

٢ص^{٢}+س ص – س^{٢}=٠

(٢ص – س)(ص+س)=٠

س=٢ص او ص=-س مرفوض

ب هـ =٢ص – ص= ص

جتا θ=$\frac{ص}{٢ص}$=$\frac{١}{٢}$ ∴ θ=٦٠°

٦) سلك طوله ٢٠مترا يراد تشكيله على هيئة مستطيل ماهي أبعاد المستطيل التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن. الحل

نفرض ان بعدي المستطيل س،ص

س+ص=١٠

∴ ص =١٠- س

مساحة المستطيل م=س ص

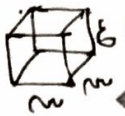
م=س(١٠ – س)=١٠س – س^{٢}

$\frac{دم}{دس}$= ١٠ – ٢س نضع$\frac{دم}{دس}$ =٠

١٠ – ٢س =٠ ومنها س =٥متر ∴ ص=٥متر

بعديه متساويين وطول كلا منهما ٥متر

٧)علبة على هيئة متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل اذا كان مجموع جميع احرفه =٢٤٠سم اوجد ابعادها حتى يصير حجمها اكبر ما يمكن. الحل



نفرض ان ابعاد المتوازي س،س،ع

٤س+٤س+٤ع=٢٤٠

س+س+ع=٦٠

ومنها ع =٦٠ – س

الحجم ح= س×س×ع=س^{٢} ع

ح=س^{٢}(٦٠ – س)=٦٠س^{٢} – س^{٣}

$\frac{دح}{دس}$ = ١٢٠س – ٣س^{٢} نضع $\frac{دح}{دس}$ =٠

١٢٠س – ٣س^{٢}=٠ ÷-٣

س^{٢} – ٤٠س=٠

س=٠ مرفوض او س=٤٠ ∴ ع=٦٠-٤٠=٢٠

ابعاده هي ٤٠،٤٠، ٢٠سم

وما توفيقي الا بالله عليه توكلت واليه أنيب

AHMED RABIE

تفاضل ٣ ثانوي إعداد أ/أحمد ربيع

مسائل هامة على المعدلات الزمنية المرتبطة نماذج الكتاب المدرسي:

١)مثلث قائم الزاوية في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة ٦سم، ٣٠سم فاذا كان طول الضلع الاول يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ سم/د وطل الضلع الثاني يتناقص بمعدل ١سم/د اوجد:
أولا:معدل التزايد ف مساحة المثلث بعد ٣ دقائق
ثانيا:الزمن الذي بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث

الحل

نفرض ان طولا ضلعي القائمة س ، ص

س=٦+ $\frac{١}{٣}$ ن ،ص=٣٠ − ن

م المساحة = $\frac{١}{٢}$ س ص= $\frac{١}{٢}$ (٦+ $\frac{١}{٣}$ ن)(٣٠ − ن)

م = ٩٠+٢ن − $\frac{١}{٦}$ ن^{٢} $\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ = ٢ − $\frac{١}{٣}$ ن

عند ن =٣ $\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ =١سم/د اولا

يتوقف تزايد المساحة عند $\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ =صفر

٢ − $\frac{١}{٣}$ ن=٠ ومنها ن =٦

يتوقف التزايد للمساحة بعد ٦ دقائق

--------------*

٢)يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظا بشكله بمعدل ٢٧سم^{٣}/د أوجد معدل الزيادة في مساحة أوجهه عند اللحظة التي يكون فيها طول حرفه ٣سم. الحل

حجم المكعب ح =ل^{٣} حيث ل طول ضلع المكعب

$\frac{\text{عح}}{\text{عن}}$ =٣ل^{٢} $\frac{\text{عل}}{\text{عن}}$ ∴ ٢٧ = ٣× ٣^{٢} $\frac{\text{عل}}{\text{عن}}$

∴ $\frac{\text{عل}}{\text{عن}}$ = ١ سم/د المساحة الكلية للمكعب م = ٦ل^{٢}

$\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ = ١٢ ل $\frac{\text{عل}}{\text{عن}}$ = ١٢×٣×١=٣٦سم^{٢}/د

٣)يتناقص الضلعان المتساويان في مثلث متساوي الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣سم/د ماهو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث متساوي الاضلاع

الحل

نفرض طول كلا من الساقين س $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ = −٣سم/د

ع^{٢}=س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ ل^{٢}

ع=$\left(\text{س}^{٢} - \frac{\text{ل}^{٢}}{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ ل ع = $\frac{١}{٢}$ ل $\left(\text{س}^{٢} - \frac{\text{ل}^{٢}}{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ = $\frac{١}{٤}$ ل $\left(\text{س}^{٢} - \frac{\text{ل}^{٢}}{٤}\right)^{-\frac{١}{٢}}$ ×٢س $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$

عند س=ل

$\frac{\text{عم}}{\text{عن}}$ = $\frac{١}{٤}$ ل $\left(\text{ل}^{٢} - \frac{\text{ل}^{٢}}{٤}\right)^{-\frac{١}{٢}}$ ×٢ل×−٣ = − $\sqrt{٣}$ل سم^{٢}

--------------*

٤)اذا كانت ح مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولا نصفا قريهما نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ حيث نق$_{٢}$ > نق$_{١}$ اوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن في اللحظة التي يكون فيها نق$_{٢}$=١٠سم ،نق$_{١}$=٦سم اذا علم نق$_{١}$ يتزايد بمعدل ٠،٣ سم/ث ، نق$_{٢}$يتناقص بمعدل ٠،٢سم/ث

الحل

ح= π(نق$_{٢}^{٢}$ − نق$_{١}^{٢}$)

$\frac{\text{عح}}{\text{عن}}$ = π(٢نق$_{٢}$ $\frac{\text{عنق}_{٢}}{\text{عن}}$ − ٢نق$_{١}$ $\frac{\text{عنق}_{١}}{\text{عن}}$)

=π(٢×١٠×−٠،٢ −٢×٦×٠،٣)=−٧،٦سم^{٢}/ث

--------------*

٥) متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع فاذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠،٤م/ث وتناقص الارتفاع بمعدل ٠،٥ سم/ث اوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلعه ٦سم، الارتفاع ٥سم

مع اطيب التمنيات بالنجاح أ/ أحمد ربيع

تفاضل ٣ ثانوي إعداد أ/أحمد ربيع

نفرض طول ضلع القاعده س والارتفاع ع الحجم ح= س^{٢}ع اشتقاق بالنسبة للزمن

$\frac{\text{عح}}{\text{عن}}$ =٢س $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ ع+س^{٢} $\frac{\text{عع}}{\text{عن}}$

=٢×٦×٠،٤×٣٦+٥×−٠،٥ =٦سم^{٣}/ث

--------------*

٦)قضيب طوله ٥ امتار مثبت بمفصل في الارض عند أحد طرفه فعندا رفع طرفه الاخر رأسيا الي اعلى بواسطة ونش بمعدل ١م/د أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الارض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣متر.

الحل

نفرض ارتفاع القضيب س طول مسقطه ص من فيثاغورث س^{٢}+ص^{٢}=٢٥

عند س=٣ فان ص^{٢}=٢٥−٩=١٦

ومنها ص= ٤

س^{٢}+ص^{٢}=٢٥

٢س $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ +٢ص $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$=٠

٢×٣×١+٢×٤× $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$ =٠ ومنها $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$ =$\frac{-٣}{٤}$ م/د

--------------*

٧)يرتفع بالون رأسيا لاعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨م/د فاذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض يبعد ٢٠٠ متر عن موقع اطلاق البالون اوجد معدل تغير زاويه ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠متر

الحل

س ارتفاع البالون

هـ زاوية ارتفاع البالون

ظا هـ = $\frac{\text{س}}{٢٠٠}$ =$\frac{١}{٢٠٠}$ س

قا^{٢}هـ $\frac{\text{عهـ}}{\text{عن}}$ =$\frac{١}{٢٠٠}$ $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$

عند س=٢٠٠م ، هـ =٤٥، $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ =٢٨م/د

قا^{٢}(٤٥) $\frac{\text{عهـ}}{\text{عن}}$ =$\frac{١}{٢٠٠}$ ×٢٨ ومنها $\frac{\text{عهـ}}{\text{عن}}$ =٠،٠٧ء/د

--------------*

٨)إناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩سم،طول نصف القطر الداخلي لقاعدته ٦سم،وضع داخل ساق معدنية طولها ١٦سم فاذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢سم/ث أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل الي نهاية قاعدتها.

الحل

طول جزء الساق المنزلق س بعد الساق عن القاعدة ص فيثاغورث

س^{٢}=٨١ +ص^{٢}

عندما تصل الساق للنهاية

عند ص=١٢ فان س= ١٥سم، $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ =٢سم/ث

س^{٢}=٨١ +ص^{٢} نفاضل بالنسبة للزمن

٢س $\frac{\text{عس}}{\text{عن}}$ =٢ص $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$

٢×١٥×٢=٢×١٢ $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$ ومنها $\frac{\text{عص}}{\text{عن}}$ = ٢،٥سم/ث

وما توفيقي الا بالله عليه توكلت واليه أنيب

مع اطيب التمنيات بالنجاح أ/ أحمد ربيع

AHMED RABIE

* مسائل هامة على نهاية الدالة

① نها $\left(\frac{2س-1}{2س+1}\right)^{2س}$ ، س ← ∞

الحل

نفرض أن ص = 2س+1 ومنها 2س = ص−1

نها $\left(\frac{ص-1-1}{ص}\right)^{ص-1}$ = نها $\left(\frac{ص-2}{ص}\right)^{ص-1}$ ، ص ← ∞

= نها $\left(1-\frac{2}{ص}\right)^{ص-1}$ = $هـ^{-2}$ ، ص ← ∞

② نها $\left(1+\frac{1}{س}\right)^{س+3}$ = هـ

③ نها $\left(1+\frac{2}{ن}\right)^{3ن}$ = $(هـ^{2})^{3}$ = $هـ^{6}$ ، ن ← ∞

④ نها $\left(\frac{س}{س+1}\right)^{س}$ ، س ← ∞ بوضع ص = س+1

عند س ← ∞ ص ← ∞

= نها $\left(\frac{ص-1}{ص}\right)^{ص-1}$ ، ص ← ∞

= نها $\left(1-\frac{1}{ص}\right)^{ص-1}$ = $(هـ^{-1})^{1}$ = $هـ^{-1}$ ، ص ← ∞

⑤ نها $\frac{2^{س}-1}{س}$ = لو$_{هـ}$ 2 ، س ← 0

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

* مسائل هامة على الإشتقاق

① إذا كان $هـ^{س ص} - س^{2} + ص^{3}$ = صفر أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = صفر

الحل

$هـ^{س ص}\left[ص + س\frac{دص}{دس}\right] - 2س + 3ص^{2}\frac{دص}{دس} = 0$

عند س = 0 ، $هـ^{0} + ص^{3} = 0$

$1 + ص^{3} = 0 \Leftarrow ص^{3} = -1$

∴ ص = −1 (0، −1)

$هـ^{0}[-1 + 0] - 2\times 0 + 3\frac{دص}{دس} = 0$

$-1 + 3\frac{دص}{دس} = 0 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}$

② أوجد معادلة المماس للمنحنى $س^{2} - 3س ص - ص^{2} + 3 = 0$ عند النقطة (−1، 4)

الحل

$2س - 3ص - 3س\frac{دص}{دس} - 2ص\frac{دص}{دس} = 0$

$-2 - 12 + 3\frac{دص}{دس} - 8\frac{دص}{دس} = 0$

$-5\frac{دص}{دس} = 14$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-14}{5}$

ميل المماس = $\frac{-14}{5}$ النقطة (−1، 4)

$\frac{ص-4}{س+1} = \frac{-14}{5}$

$5ص - 20 = -14س - 14 \Leftarrow 14س + 5ص - 6 = 0$

③ أوجد معدل تغير $\sqrt{16+س^{2}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س-2}$ عند س = −3

الحل

نفرض أن ص = $\sqrt{16+س^{2}}$ ، ع = $\frac{س}{س-2}$

ص = $(16+س^{2})^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{دع}{دس} = \frac{س-2-س}{(س-2)^{2}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2}(16+س^{2})^{-\frac{1}{2}} \times 2س$

$= س(16+س^{2})^{-\frac{1}{2}}$ ، $= \frac{-2}{(س-2)^{2}}$

المطلوب $\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس}$

$= س(16+س^{2})^{-\frac{1}{2}} \div \frac{-2}{(س-2)^{2}}$

عند س = −3 ، $\frac{دص}{دع} = -3(25)^{-\frac{1}{2}} \div \frac{-2}{(-3-2)^{2}}$

$= \frac{15}{2}$

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

④ إذا كان س جا ص + ص جتا س = ١ أوجد $\frac{دص}{دس}$

جتا ص − س جا ص $\frac{دص}{دس}$ + جتا س $\frac{دص}{دس}$ − ص جا س = صفر

− س جا ص $\frac{دص}{دس}$ + جتا س $\frac{دص}{دس}$ = ص جا س − جتا ص

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{ص جا س - جتا ص}{- س جا ص + جتا س}$

⑤ أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث ص = $س^{٢}$ لو$_{هـ}$ س

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س لو$_{هـ}$ س + $س^{٢}$ × $\frac{١}{س}$

= ٢س لو$_{هـ}$ س + س

⑥ إذا كان جا ص + جتا ٢س = ٠ أثبت أن

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ − $(\frac{دص}{دس})^{٢}$ ظا ص = ٤ جتا س قا ص

الحل

∵ جا ص + جتا ٢س = ٠ اشتقاق بالنسبة س

جتا ص $\frac{دص}{دس}$ − ٢جا ٢س = ٠

− جا ص $(\frac{دص}{دس})^{٢}$ + جتا ص $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ − ٤جتا ٢س = ٠

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

بالقسمة على جتا ص

− $\frac{جا ص}{جتا ص}$ $(\frac{دص}{دس})^{٢}$ + $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ − $\frac{٤ جتا ٢س}{جتا ص}$ = ٠

∴ $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ − ظا ص $(\frac{دص}{دس})^{٢}$ = ٤ جتا ٢س قا ص #

⑦ إذا كانت د(س) = ٤ + ظتا س − قا س

أوجد معادلة العمودي عند س = $\frac{\pi}{٤}$

عند س = $\frac{\pi}{٤}$

د($\frac{\pi}{٤}$) = ٤ + ١ − ٢ = $\boxed{٣}$ ($\frac{\pi}{٤}$، ٣)

د′(س) = − $قتا^{٢}$ س − ٢ قا س قا س ظا س

عند س = ٤٥°

د′(س) = −٢ − ٢ × ٢ × ١ = −٦

ميل المماس = −٦ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

$\frac{ص - ٣}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{١}{٦}$ ⟸ س − $\frac{\pi}{٤}$ = ٦ص − ١٨

∴ معادلة العمودي س − ٦ص + ١٨ − $\frac{\pi}{٤}$ = ٠

⑧ إذا كانت ص = أ $هـ^{س^{٢}+١}$ أثبت أن

$\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}}$ = ٤س ص (٣ + ٢$س^{٢}$)

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = أ $هـ^{س^{٢}+١}$ × ٢س = ٢أس $هـ^{س^{٢}+١}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ٢أ $هـ^{س^{٢}+١}$ + ٤أ$س^{٢}$ $هـ^{س^{٢}+١}$

$\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}}$ = ٤أس $هـ^{س^{٢}+١}$ + ٨أس $هـ^{س^{٢}+١}$ + ٨أ$س^{٣}$ $هـ^{س^{٢}+١}$

= ٤أس $هـ^{س^{٢}+١}$ [١ + ٢ + ٢$س^{٢}$]

= ٤س ص [٣ + ٢$س^{٢}$] #

⑨ أوجد معدل تغير لو$_{هـ}$(٩ + $س^{٣}$) بالنسبة إلى $س^{٢}$ + ٣ عند س = ١

نفرض أن ص = لو$_{هـ}$(٩ + $س^{٣}$) ع = $س^{٢}$ + ٣

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٣س^{٢}}{٩ + س^{٣}}$ $\frac{دع}{دس}$ = ٢س

$\frac{دص}{دع}$ = $\frac{٣س^{٢}}{٩ + س^{٣}}$ ÷ ٢س

عند س = ١ $\frac{دص}{دع}$ = $\frac{٣}{١٠}$ #

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

⑩ أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = لو_{هـ}(٢ - جتا س)$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل

عند $س = \frac{\pi}{٤} = ٤٥$ ، $ص = لو_{هـ}(٢ - ١) = لو_{هـ}١ = ٠$ ، $(\frac{\pi}{٤}, ٠)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جا س}{٢ - جتا س}$

عند $س = ٤٥$ ، $\frac{دص}{دس} = \boxed{١}$ ميل المماس $= ١$

المعادلة $\frac{ص - ٠}{س - \frac{\pi}{٤}} = ١$ ، $ص = س - \frac{\pi}{٤}$

⑪ أوجد معادلة المماس للمنحنى الدالة $د(س) = ٢ ظا^٣ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل

عند $س = \frac{\pi}{٤} = ٤٥°$ ، $ص = د(س) = ٢ ظا^٣ ٤٥ = ٢$

$د'(س) = ٦ ظا^٢ س قا^٢ س$ ، $(\frac{\pi}{٤}, ٢)$

$د'(\frac{\pi}{٤}) = ٦ ظا^٢ ٤٥ قا^٢ ٤٥ = ١٢$ "ميل المماس"

المعادلة $\frac{ص - ٢}{س - \frac{\pi}{٤}} = ١٢ \Leftarrow ص - ٢ = ١٢ س - ٣\pi$

معادلة المماس $ص = ١٢ س + ٢ - ٣\pi$

⑫ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $ص^٣ = س^٢$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند $س = ٨$ لأقرب دقيقه

الحل

عند $س = ٨ \Leftarrow ص^٣ = ٦٤ \Leftarrow ص = ٤$ ، $(٨, ٤)$

$\because ص^٣ = س^٢$

$\therefore ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٢س$

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

$٣ \times ١٦ \frac{دص}{دس} = ٢ \times ٨ \Leftarrow ٤٨ \frac{دص}{دس} = ١٦$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}$ الميل $= \frac{١}{٣}$

$\therefore ق(هـ) = ١٨.٢٦°$ shift tan $\frac{١}{٣}$

⑬ إذا كان $جا س = س ص$ أثبت أن $س^٢(ص + ص'') + ٢ جتا س = ٢ص$

الحل

$\because س ص = جا س$ نشتق بالنسبة إلى س

$ص + س ص' = جتا س \Leftarrow س ص' = جتا س - ص$

نشتق مرة أخرى

$ص' + ص' + س ص'' = -جا س$ ، $ص'' = \frac{جتا س - ص}{س}$

$\therefore ٢ص' + س ص'' = -س ص$ ، $جا س = س ص$

$\therefore ٢ \times \frac{جتا س - ص}{س} + س ص'' + س ص = ٠$

$٢ جتا س - ٢ص + س^٢ ص'' + س^٢ ص = ٠$

$س^٢(ص + ص'') + ٢ جتا س = ٢ص$

⑭ إذا كان المنحنى $ص = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$ مماسان متوازيان أحدهما عند النقطة $(-١, ٢)$ أوجد معادلة المماس الآخر

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٦س^٢ + ٦س + ٤$ "ميل المماس"

عند $س = -١$ ، $\frac{دص}{دس} = ٦ - ٦ + ٤ = \boxed{٤}$

$\because$ المماسان متوازيان $\therefore$ م١ = م٢ = ٤ ، $\frac{دص}{دس} = ٤$

$٦س^٢ + ٦س + ٤ = ٤ \Leftarrow ٦س^٢ + ٦س = ٠$

$\therefore س = ٠$ المطلوب أي $س = -١$ المعطى

عند $س = ٠ \Leftarrow ص = ٥$ ، $(٠, ٥)$ الميل $= ٤$

$\frac{ص - ٥}{س - ٠} = ٤ \Leftarrow ص - ٥ = ٤س$

$ص = ٤س + ٥$

⑮ إذا كانت المعادلتان البارمتريتان للدالة د: $ص = د(س)$ هما $س = ٢ن^٣ + ٣$ ، $ص = ن^٤$ أوجد عند $ن = ١$ أولاً معادلة المماس ثانياً $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

الحل

$\frac{دس}{دن} = ٦ن^٢$ ، $\frac{دص}{دن} = ٤ن^٣$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٤ن^٣}{٦ن^٢} = \frac{٢}{٣}ن$

أولاً عند $ن = ١$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣}$ ، $س = ٥$ ، $ص = ١$ ، $(٥, ١)$

$\frac{ص - ١}{س - ٥} = \frac{٢}{٣}$

$٣س - ١٠ = ٢ص - ٣$

$٣س - ٢ص - ٧ = ٠$

ثانياً $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣}ن$

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢}{٣} \frac{دن}{دس}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦ن^٢} = \boxed{\frac{١}{٩}}$

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

* مسائل هامة على سلوك الدالة
التزايد - التناقص - النقط الحرجة - الإنقلاب .....

① حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د
حيث د(س) = س + ٢جاس ، ٠ < س < ٢π

الحل

د'(س) = ١ + ٢جتاس نضع د'(س) = ٠

١ + ٢جتاس = ٠

٢جتاس = -١ ∴ جتاس = -½

س = ١٢٠° = ٢π/٣ ، س = ٢٤٠° = ٤π/٣

+++ ---- +++
٠ ، ٢π/٣ ، ٤π/٣ ، ٢π

]٠ ، ٢π/٣[تزايد ،]٢π/٣ ، ٤π/٣[تناقص
،]٤π/٣ ، ٢π[تزايد

② ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة الذي يحقق الشروط د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = -٣
د''(س) < ٠ لكل س ≠ ٢
د'(س) < ٠ لكل س < ٢
د'(س) > ٠ لكل س > ٢

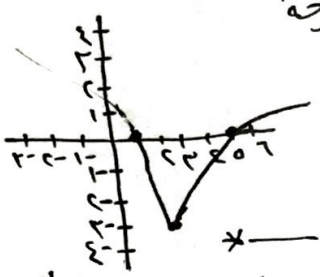
الحل

المنحنى يمر بالنقط (١، ٠) ، (٥، ٠) ، (٢، -٣)
د''(س) < ٠ المنحنى محدب لأعلى

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

عند س = ٢ نقطة حرجة

الشكل العام للمنحنى



③ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة [-١، ١] حيث د(س) = ٢س³ + ٦س² + ٥

الحل

د'(س) = ٦س² + ١٢س نضع د'(س) = ٠

٦س² + ١٢س = ٠

س² + ٢س = ٠ ومنها س = ٠ ، س = -٢ مرفوض

د(٠) = ٥ د(-١) = ٩ د(١) = ١٣

القيمة الصغرى المطلقة = ٥ ، العظمى المطلقة = ١٣

④ إذا كانت د(س) = { ٢س + س² عند س < ٠ ، ٢س - س² عند س ≥ ٠

أوجد ① القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة
② ∫₋₁³ د(س) ءس

الحل

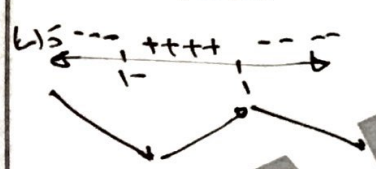
د'(س) = { ٢ + ٢س س < ٠
٢ - ٢س س > ٠

* نبحث الإشتقاق عند س = ٠.
د(٠⁺) = د(٠⁻) = ٠ الدالة متصلة عند س = ٠.
د'(٠⁺) = نهـ (د(٠+هـ) - د(٠)) / هـ = ٢
هـ → ٠
د'(٠⁻) = ———— = ٢
الدالة قابلة لإشتقاق عند س = ٠.

لا توجد نقطة حرجة

د'(س) = { ٢ + ٢س س < ٠
٢ س = ٠
٢ - ٢س س > ٠

نضع د'(س) = ٠
٢ + ٢س = ٠ ٢ - ٢س = ٠
س = -١ س = ١



د(-١) = -١ صغرى محلية
د(١) = ١ عظمى محلية

② ∫₋₁³ د(س) ءس = ∫₋₁⁰ (٢س + س²) ءس + ∫₀³ (٢س - س²) ءس

= [س² + س³/٣]₋₁⁰ + [س² - س³/٣]₀³

= -٣/٣

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

⑤ إذا كان للدالة $د(س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س$ نقطة انقلاب عند (٢، ٢) أوجد أ، ب ثم ارسم الشكل العام للمنحنى

الحل

عند (٢، ٢)

$٨ + ٤أ + ٢ب = ٢$ ÷٢

$٤ + ٢أ + ب = ١$

$د'(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب$

$د''(س) = ٦س + ٢أ$

عند $س = ٢$ $د''(٢) = ٠$ $\Leftarrow$ $١٢ + ٢أ = ٠$

$\therefore أ = -٦$ ومنها $ب = ٩$

$د(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س$

$د'(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$

$٣س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$

منها $س = ١$ ، $س = ٣$

$د(١) = ٤$

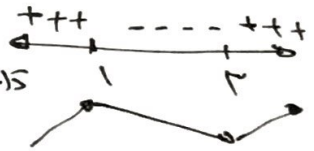
$د(٣) = ٠$

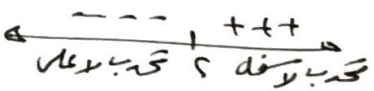
$د''(س) = ٦س - ١٢$

$٦س - ١٢ = ٠$

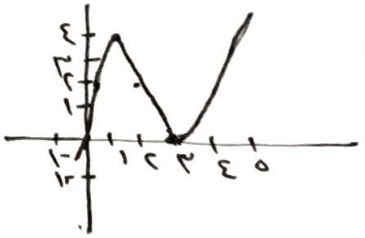
$س = ٢$

$د(٢) = ٢$





الشكل العام للمنحنى



تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

⑥ إذا كانت $د(س) = \sqrt[3]{(س-٤)^٢}$ أوجد نقط الانقلاب إن وجدت وفترات التحدب.

الحل

$د(س) = (س-٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س-٤)^{-\frac{١}{٣}}$

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}(س-٤)^{-\frac{٤}{٣}}$ نضع $د''(س) = ٠$

$د''(س) = \frac{-٢}{٩(س-٤)^{\frac{٤}{٣}}}$

$د''(٤)$ غير معرفة ، $د''(س) \neq ٠$

لا توجد نقط انقلاب

منحنى الدالة محدب لأعلى عند $س \in ح - \{٤\}$

⑦ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $د(س) = س^٤ - ٤س^٣$ على الفترة $[٠، ٤]$

الحل

$د'(س) = ٤س^٣ - ١٢س^٢$ نضع $د'(س) = ٠$

$٤س^٣ - ١٢س^٢ = ٠$

$٤س^٢(س - ٣) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أو $س = ٣$

$د(٠) = ٠$ $د(٣) = -٢٧$ $د(٤) = ٠$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة $= -٢٧$

" العظمى " " $= ٠$

⑧ إذا كان منحنى الدالة $د(س) = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + د$ له قيمة عظمى محلية عند (٢، ٤) ، نقطة انقلاب (١، ٢) أوجد معادلة المنحنى

الحل

(٢، ٤) نقطة حرجة

$٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ٤$

$د'(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س + جـ$

$د'(٢) = ٠$

$١٢أ + ٤ب + جـ = ٠$

(١، ٢) نقطة انقلاب

$أ + ب + جـ + د = ٢$

$د''(س) = ٦أس + ٢ب$

$د''(١) = ٠$

$٦أ + ٢ب = ٠$ ÷٢

$٣أ + ب = ٠ \Leftarrow ب = -٣أ$

$١٢أ - ١٢أ + جـ = ٠$

$\therefore جـ = ٠$

$\because أ + ب + جـ + د = ٢$ $\therefore أ - ٣أ + ٠ + د = ٢$

$\therefore د = ٢ + ٢أ$

$\because ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ٤$

$٨أ - ١٢أ + ٠ + ٢ + ٢أ = ٤ \Leftarrow -٢أ = ٢$

$\therefore أ = -١$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = ٠$ ، $د = ٠$

$د(س) = -س^٣ + ٣س^٢$

⑨ إذا كان $د(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س - ١$ عين فترات التزايد والتناقص

⑩ أوجد القيم القصوى المطلقة $[٠، ٢]$

الحل

$د'(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$

$د'(س) = ٠$

$٣س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$

$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$

$\therefore س = ١$ ، $س = ٣$

+++ | - - - | +++

تزايد ٣ تناقص ١ تزايد

$د(١) = ٣$ ← عظمى مطلقة

$د(٠) = -١$ ← صغرى مطلقة

$د(٢) = ١$

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE

(١٠) إذا كان د(س) = س³ + أ س² + ب س + ٤
أوجد أ، ب إذا كان للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢
، نقطة إنقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عاماً

الحل

د̄(٢) = ٠
د̄(١) = ٠

د̄(س) = ٣س² + ٢أس + ب
د̄̄(س) = ٦س + ٢أ
د̄̄(١) = ٠
٦ + ٢أ = ٠
أ = −٣

د̄(٢) = ٠
١٢ + ٤أ + ب = ٠
١٢ − ١٢ + ب = ٠
∴ ب = ٠

د(س) = س³ − ٣س² + ٤ ثم ارسم المنحنى

(١١) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث
د(س) = |س| (س − ٤) في الفترة [−١، ٣]

الحل

د(س) = { س² − ٤س ، ٠ ≤ س ≤ ٣
−س² + ٤س ، −١ ≤ س ≤ ٠

نبحث الإشتقاق عند س = صفر

د(٠⁺) = د(٠⁻) = ٠ متصله

د̄(٠⁺) = نهـا (د(٠ + هـ) − د(٠)) / هـ = −٤

د̄(٠⁻) = ——— = ٤

عند س = ٠ الدالة غير قابلة للإشتقاق
توجد نقطة حرجة.

تفاضل وتكامل ٣ث إعداد أ/أحمد ربيع

د̄(س) = { ٢س − ٤ ، ٠ < س ≤ ٣
−٢س + ٤ ، −١ ≤ س < ٠

٢س − ٤ = ٠ أو −٢س + ٤ = ٠
س = ٢ مرفوضة
−١ < س < ٠

د(٠) = ٠
د(٢) = −٤
د(٣) = −٣
د(−١) = −٥

∴ القيمة العظمى المطلقة للدالة = ٠
" " الصغرى " " = −٥

(١٢) عين فترات التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الإنقلاب إن وجدت للدالة د(س) = (س − ١)⁴ + ٣

الحل

د̄(س) = ٤(س − ١)³
د̄̄(س) = ١٢(س − ١)²
نضع د̄̄(س) = ٠
س − ١ = ٠
س = ١
د(١) = ٣

منحنى الدالة محدب لأعلى عند س ∈ ح
لا توجد نقطة إنقلاب لأن د̄̄(س) ≥ ٠

(١٣) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة [٠، ٢] حيث د(س) = ٣ √(٤ − س²)

الحل

د(س) = ٣(٤ − س²)^(١/٢)
د̄(س) = ٣/٢ (٤ − س²)^(−١/٢) × −٢س
= −٣س / (٤ − س²)^(١/٢)
نضع د̄(س) = ٠
ومنها −٣س = ٠ ∴ س = ٠
د(٠) = ٦ ∴ القيمة العظمى للدالة = ٦
د(٢) = ٠ القيمة الصغرى المطلقة للدالة = ٠

(١٤) ابحث تحدب منحنى الدالة د(س) = |س³ − ١|
موضحاً نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

د(س) = { س³ − ١ ، عند س ≥ ١
−س³ + ١ ، عند س < ١

عند س = ١
د(١⁺) = د(١⁻) = صفر ∴ الدالة متصله عند س = ١
د̄(١⁺) = نهـا (د(١ + هـ) − د(١)) / هـ = ٣
د̄(١⁻) = ——— = −٣
د̄(١⁺) ≠ د̄(١⁻) غير قابلة للإشتقاق

د̄(س) = { ٣س² ، عند س > ١
−٣س² ، س < ١
⟸ د̄(١) غير معرفه

د̄̄(س) = { ٦س ، عند س > ١
−٦س ، س < ١

تحدب لأعلى ، تحدب لأسفل ، نقطة

نضع د̄̄(س) = ٠ ومنها س = ٠ (٠، ١) نقطة إنقلاب

مع أطيب التمنيات أ/أحمد ربيع

AHMED RABIE