آخر كلام

في

التفاضل والتكامل

٢٠١٨

إعداد

شريف حسين

01115209920

العلاقات الرياضية للربط

- مساحة الدائرة = ط نق²
- محيط الدائرة = ٢ ط نق
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢
- مساحة الكرة = ٤ ط نق²
- حجم الكرة = ٤/٣ ط نق³

في مكعب طول حرفه ل

- مساحته الجانبية = ٤ ل²
- مساحته الكلية = ٦ ل²
- حجمه = ل³

- مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = ن س² / (٤ ظا (ط/ن))
- مساحة القطاع الدائري = ½ ل نق
- محيط القطاع الدائري = ٢ نق + ل

بالون كروي عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة في حجمه ٨ ط سم³/ث عندما كان طول نصف القطر ٤ سم أوجد

① معدل الزيادة في طول نصف قطره

② معدل الزيادة في مساحته السطحية

الحل

دح/دن = ٨ ط ، نق = ٤

① ح = ٤/٣ ط نق³

دح/دن = ٤/٣ ط × ٣ نق² دنق/دن

٨ ط = ٤ ط × (٤)² دنق/دن

∴ دنق/دن = ١/٨ سم/ث

② م = ٤ ط نق²

دم/دن = ٤ ط × ٢ نق دنق/دن

= ٤ ط × ٢ × ٤ × ١/٨

= ٤ ط سم²/ث

- إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢/ط سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل ....

① ٤/ط سم/ث ② ٢/ط سم/ث ③ ١/ط سم/ث ● ٤ سم/ث

- يتمدد مكعب من المعدن محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم³/ث فإن معدل تغير طول حرفه عندما يكون حجمه ٨ سم³ هو ...... سم/ث

● ١/١٢ ② ١/٦ ③ ١/٨ ④ ١/٤

آخر كلام في التفاضل والتكامل

- مساحة المثلث = ½ طول القاعدة × الارتفاع
- مساحة المثلث = ½ حاصل ضرب طولي ضلعين × جا الزاوية المحصورة

في مثلث أ ب ج

نصف محيطه ح

ح = (أ ب + ب ج + ج أ) / ٢

∴ مساحة المثلث = √(ح (ح − أ ب)(ح − ب ج)(ح − ج أ))

- متوازي مستطيلات أبعاده س ، ص ، ع
  - حجمه = س ص ع
  - مساحته الجانبية = ٢ (س + ص) × ع
  - مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع)

① لو متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ∴ أبعاده س ، س ، ص

② لو متوازي مستطيلات مجموع أبعاده = ١٠٠ سم ∴ س + ص + ع = ١٠٠

③ لو متوازي مستطيلات مجموع أطوال أحرفه = ١٠٠ سم ∴ ٤ س + ٤ ص + ٤ ع = ١٠٠

④ لو متوازي مستطيلات طوله ضعف عرضه ∴ أبعاده س ، ٢ س ، ص

⑤ لو متوازي مستطيلات النسبة بين طوله وعرضه ٢ : ٣ ∴ أبعاده ٢ س ، ٣ س ، ع

- سقط حجر في بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم/ث أوجد معدل تزايد سطح الموجة عند نهاية ٥ ثوان

الحل

دنق/دن = ٤ سم/ث

في نهاية ٥ ثوان ∴ نق = ٤ × ٥ = ٢٠

م = ط نق²

دم/دن = ٢ ط نق دنق/دن

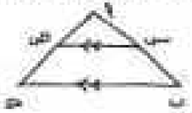
= ط × ٢ × ٢٠ × ٤

= ١٦٠ ط سم²/ث

- جسم يتحرك على المنحنى ص² = س³ إذا كان دس/دن = ½ وحدة/ث عندما ص = ١ فإن دص/دن عند هذه اللحظة = ... وحدة/ث

● ٣/٤ ② ٢/٣ ③ ٣/٢ ④ ٤/٣

- حجم الأسطوانة = ط نق² ع
- مساحة الأسطوانة الجانبية = ٢ ط نق ع
- مساحة الأسطوانة الكلية = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق²



في الشكل

∵ س ص // ب ج

∴ أ س / س ب = أ ص / ص ج

، أ س / أ ب = أ ص / أ ج = س ص / ب ج

- حجم الهرم الرباعي القائم = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

القاعدة على شكل مربع

- خزان مياه على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها الداخلي ٤٢ متر يراد تفريغ الماء منه بمعدل ٢ م³/د فما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان

الحل

نق = ٢١ م ، دح/دن = −٢ م³/د

ح = ط نق² ع

دح/دن = ط نق² دع/دن

−٢ = ط × (٢١)² دع/دن

دع/دن = −١/٦٩٣ م/د

- النقطة تتحرك على منحنى معادلته س² + ص² − ٤ س + ٨ ص − ٦ = ٠ فإذا كان معدل تغير الإحداثي السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (٣ ، ١) يساوي ٤ وحدات/ث أوجد معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن ن

الحل

س² + ص² − ٤ س + ٨ ص − ٦ = ٠

٢ س دس/دن + ٢ ص دص/دن − ٤ دس/دن + ٨ دص/دن = ٠

عند النقطة (٣ ، ١) دس/دن = ٤ وحدات/ث

∴ ٢ × ٣ × ٤ + ٢ × ١ دص/دن − ٤ × ٤ + ٨ دص/دن = ٠

∴ ١٠ دص/دن = −٨

دص/دن = −٨/١٠ وحدة/ث

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• يرتفع بالون رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ م/د وإذا تم رصد البالون من مشاهد في الأرض يبعد ٣٠٠ متر من موضع إطلاق البالون أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع [illegible] عندما يكون البالون على ارتفاع ٣٠٠ متر

الحل

$\frac{دس}{دن} = ٢٨$ م/د

$\therefore ظا\,هـ = \frac{س}{٣٠٠}$

$\therefore ظا\,هـ = \frac{١}{٣٠٠}\, س$

$قا^2 هـ \,\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٠٠}\,\frac{دس}{دن}$

عندما يكون البالون على ارتفاع ٣٠٠ متر $\therefore هـ = ٤٥^\circ$

$قا^2 ٤٥ \,\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٠٠} \times ٢٨$

$٢ \,\frac{دهـ}{دن} = \frac{٧}{٧٥}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{٧}{١٥٠}$ ء/د

• قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصلة في الأرض عند أحد طرفيه إذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بسرعة ثابتة ١٫٣ م/د أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

الحل

$\frac{دص}{دن} = ١٫٣$ م/د

$\therefore س^2 + ص^2 = ٢٥$

$٢س\,\frac{دس}{دن} + ٢ص\,\frac{دص}{دن} = ٠$

$س\,\frac{دس}{دن} + ص\,\frac{دص}{دن} = ٠$

$٤\,\frac{دس}{دن} + ٣ \times ١٫٣ = ٠$

$\frac{دس}{دن} = -\frac{٣٫٩}{٤}$ م/د

• إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{١}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل ...... سم/ث

(أ) $\frac{١}{\pi}$ (ب) ٢ (ج) π (د) ٢π

• يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢ سم/د ومساحتها بمعدل ٢٠π سم²/د فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوي ...... سم

(أ) [illegible] (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٠

• متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع، إذا تزايد طول ضلع قاعدته بمعدل ٠٫٤ سم/ث وتناقص الارتفاع بمعدل ٠٫٥ سم/ث أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٦ سم والارتفاع ٥ سم

الحل

أبعاد متوازي المستطيلات س، س، ع

$\frac{دس}{دن} = ٠٫٤$ ، $\frac{دع}{دن} = -٠٫٥$

$س = ٦$ ، $ع = ٥$

$ح = س^2 ع$

$\frac{دح}{دن} = س^2\,\frac{دع}{دن} + ع \times ٢س\,\frac{دس}{دن}$

$= ٣٦ \times -٠٫٥ + ٥ \times ٢ \times ٦ \times ٠٫٤$

$= ٦$ سم³/ث

• إذا كانت ح مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدتي المركز طولا نصفي قطريهما نق١، نق٢ حيث نق١ < نق٢ أوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن في اللحظة التي يكون فيها نق١ = ٦ سم، نق٢ = ١٠ سم إذا علم أن نصف قطر الدائرة الصغرى نق١ يتزايد بمعدل ٠٫٣ سم/ث، نق٢ يتناقص بمعدل ٠٫٢ سم/ث

الحل

$\frac{دنق_1}{دن} = ٠٫٣$ ، $نق_1 = ٦$

$\frac{دنق_2}{دن} = -٠٫٢$ ، $نق_2 = ١٠$

$ح = \pi نق_2^2 - \pi نق_1^2$

$ح = \pi (نق_2^2 - نق_1^2)$

$\frac{دح}{دن} = \pi \left(٢نق_2 \frac{دنق_2}{دن} - ٢نق_1 \frac{دنق_1}{دن}\right)$

$= \pi (٢ \times ١٠ \times -٠٫٢ - ٢ \times ٦ \times ٠٫٣)$

$= -\frac{٣٨}{٥}\pi$ سم²/ث

• صفيحة على شكل سداسي منتظم تتمدد بالحرارة وجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠٫١ سم/ث أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم

الحل

$م = \frac{ن\, س^2}{٤\, ظا \frac{١٨٠}{ن}}$

$م = \frac{٦\, س^2}{٤\, ظا ٣٠}$

$م = \frac{٦}{٤ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}\, س^2$

$م = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\, س^2$

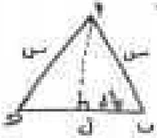
$\therefore \frac{دم}{دن} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times ٢س\,\frac{دس}{دن}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ \times ١٠ \times ٠٫١$

$= ٣\sqrt{٣}$ سم²/ث

• متناقص الضلعان المتساويان في مثلث متساوي الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم/د فما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث متساوي الأضلاع

الحل



$\frac{دس}{دن} = -٣$ سم/د

$م = \frac{١}{٢} ل \times \sqrt{س^2 - \frac{١}{٤}ل^2}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} ل \times \frac{٢س\,\frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^2 - \frac{١}{٤}ل^2}}$

عندما يصبح متساوي الأضلاع $\therefore س = ل$

$= \frac{١}{٢} ل \times \frac{٢ل \times -٣}{٢\sqrt{ل^2 - \frac{١}{٤}ل^2}}$

$= \frac{-٣ل^2}{٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} ل} = -\sqrt{٣}\, ل$ سم²/د

• مكعب من معدن يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله بمعدل ٢٧ سم³/د أوجد معدل الزيادة في مساحة أوجهه عندما يكون طول حرفه ٣ سم

الحل

$ح = س^3$

$\frac{دح}{دن} = ٣س^2\,\frac{دس}{دن}$

$٢٧ = ٣ \times (٣)^2\,\frac{دس}{دن}$

$\therefore \frac{دس}{دن} = ١$ سم/د

$م = ٦س^2$

$\frac{دم}{دن} = ١٢س\,\frac{دس}{دن}$

$= ١٢ \times ٣ \times ١$

$= ٣٦$ سم²/د

• تتحرك نقطة على المنحنى $ص^2 = ٢٥ - س^2$ بحيث $\frac{دص}{دن} = \frac{١}{[illegible]}$ فإن معدل [illegible] عند النقطة (−٣، ٤) $\frac{دس}{دن} = ...$

(أ) [illegible] (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

• إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما يساوي $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير الإحداثي الصادي يساوي ...... وحدة/ث

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (ج) [illegible] (د) [illegible]

تذكر

١) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = هـ$

٢) $\lim\limits_{س \to 0} \left(1 + س\right)^{\frac{1}{س}} = هـ$

• $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3س} = \dots\dots$

① 1 ② 3 ③ هـ ④ $هـ^{3}$

• $\lim\limits_{س \to 0} \left(1 + س\right)^{\frac{2}{س}} = \dots\dots$

① $\frac{1}{2}$ ② $هـ^{2}$ ③ $هـ^{\frac{1}{2}}$ ④ $\frac{هـ}{2}$

• $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+2}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2}$

$= هـ \times 1 = هـ$

• $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س-5}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \times \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{-5}$

$= هـ \times 1 = هـ$

• $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س}\right)^{س} = \dots = هـ^{3}$

• $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س+2}{س-1}\right)^{س+2}$

الحل

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س-1}{س-1} + \frac{3}{س-1}\right)^{س+2}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س-1}\right)^{س+2}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س-1}\right)^{س-1} \times \left(1 + \frac{3}{س-1}\right)^{3}$

$= هـ^{3} \times 1 = هـ^{3}$

تذكر

١) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{3^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} 3$

٢) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{لو_{أ}(1+س)}{س} = لو_{أ} هـ$

٣) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1+س)}{س} = 1$

• $\lim\limits_{س \to 0} \frac{3^{2س} - 1}{س} = \dots\dots$

① $2 لو 3$ ② $\frac{1}{2} لو_{هـ} 3$ ③ $لو_{هـ} \frac{3}{2}$ ④ $2 لو_{هـ} 3$

أهم كلام في التفاضل والتكامل

١) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{لو_{هـ} س}{س - 1} = \dots\dots$

① صفر ② 1 ③ هـ ④ $هـ^{-1}$

الحل

بوضع ص = س − 1

∴ س = 1 + ص

∴ $\lim\limits_{ص \to 0} \frac{لو_{هـ}(1+ص)}{ص} = 1$

ملاحظة

٢) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{هـ^{-س} - 1}{س}$

الحل

$= -\lim\limits_{س \to 0} \frac{هـ^{-س} - 1}{-س}$

$= -لو_{هـ} هـ = -1$

تذكر

تزايد وتناقص الدالة

١) د'(س) = ٠ ← س١ ، س٢

٢) نعوض في د'(س) بقيم بينهما

تزايد — تناقص — تزايد

د'(س) = + ، س١ ، د'(س) = − ، س٢ ، د'(س) = +

٣) نكتب فترات التزايد والتناقص

• حدد فترات التزايد والتناقص

① $د(س) = س^{3} - 3س + 2$

الحل

$د'(س) = 3س^{2} - 3$

∴ $3س^{2} - 3 = 0$ ∴ $3س^{2} = 3$ ∴ $س^{2} = 1$

∴ س = ± ١

متزايدة — متناقصة — متزايدة

د'(−2) = + ، −1 ، د'(0) = − ، 1 ، د'(2) = +

∴ د متزايدة في الفترة]−∞ ، −1[

ومتناقصة في الفترة]−1 ، 1[

ومتزايدة في الفترة]1 ، ∞[

⑤ $د(س) = س + 2 جا س$ ، $0 < س < 2ط$

الحل

$د'(س) = 1 + 2 جتا س$

$1 + 2 جتا س = 0$

$2 جتا س = -1$

$جتا س = \frac{-1}{2}$

الربع ② : س = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

الربع الثالث : س = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

متزايدة — متناقصة — متزايدة

٠ ، د'(+) ، ١٢٠ ($\frac{2ط}{3}$) ، د'(−) ، ٢٤٠ ($\frac{4ط}{3}$) ، د'(+) ، ٣٦٠ (2ط)

∴ د تزايدية على]٠ ، $\frac{2ط}{3}$[

∴ د تناقصية على]$\frac{2ط}{3}$ ، $\frac{4ط}{3}$[

∴ د تزايدية على]$\frac{4ط}{3}$ ، 2ط[

⑥ $د(س) = 2 لو_{هـ} س - س^{2}$

الحل

$د'(س) = 2 \times \frac{1}{س} - 2س$

$\frac{2}{س} - 2س = 0$ × س

$2 - 2س^{2} = 0$

$2س^{2} = 2$

$س^{2} = 1$

س = ١   س = −١ مرفوض

متزايدة — متناقصة

٠ ، د'($\frac{1}{2}$) = + ، ١ ، د'(٢) = −

د تزايدية على]٠ ، ١[

د تناقصية على]١ ، ∞[

• $\lim\limits_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1+3س^{?})}{2س} = \frac{3}{2}$

أهم ما في التفاضل والتكامل

• تذكر

① ص = حا ٢س ∴ صَ = ٢ جتا ٢س

② ص = جتا ٢س ∴ صَ = −٢ حا ٢س

③ ص = ظا ٢س ∴ صَ = ٢ قا٢ ٢س

④ ص = ظتا ٢س ∴ صَ = −٢ قتا٢ ٢س

⑤ ص = قا ٢س ∴ صَ = ٢ قا ٢س ظا ٢س

⑥ ص = قتا ٢س ∴ صَ = −٢ قتا ٢س ظتا ٢س

• إذا كانت ص = ٤ قا٢ س فإن صَ (ط/٤) = ...

(أ) −٨ (ب) صفر (ج) ٣٢ (د) ١٦

• أوجد دص/دس

(أ) ص = قتا٢(١ + ٣س٢)

الحل

دص/دس = ٢ قتا(١ + ٣س٢) × −قتا(١ + ٣س٢) ظتا(١ + ٣س٢) × ٦س

(ب) ص = ظتا(جتا ٢س)

الحل

دص/دس = −قتا٢(جتا ٢س) × −٢ حا ٢س

(ج) ص = قا √(س − ٤)

الحل

دص/دس = قا √(س − ٤) ظا √(س − ٤) × ١ / ٢√(س − ٤)

(د) ص = حا(قتا ٣س٢)

الحل

دص/دس = جتا(قتا ٣س٢) × −قتا ٣س٢ ظتا ٣س٢ × ٦س

• إذا كانت ص = √(٥ − ٢ع) ، ع = قا ٢س أثبت أن √٣ دص/دس + ١٢ = ٠ عند س = ط/٦

الحل

ص = √(٥ − ٢ قا ٢س)

∴ دص/دس = −٢ قا ٢س ظا ٢س / √(٥ − ٢ قا ٢س)

عند س = ط/٦ ∴ دص/دس = −٢ × ٢ × √٣ / √(٥ − ٤) = −٤√٣

√٣ دص/دس + ١٢ = √٣ × −٤√٣ + ١٢ = صفر

القيم القصوى

• القيم العظمى والصغرى المحلية

• الطريقة الأولى

بحث التزايد والتناقص

عند س١ توجد قيمة عظمى محلية هي د(س١)

عند س٢ توجد قيمة صغرى محلية هي د(س٢)

• الطريقة الثانية

① د'(س) = صفر

س = س١ ، س٢

② نعوض بـ س١ ، س٢ في المشتقة الثانية

③ إذا د''(س١) > ٠ ∴ عند س١ توجد نقطة قيمة صغرى محلية هي د(س١)

إذا د''(س٢) < ٠ ∴ عند س٢ توجد نقطة قيمة عظمى محلية هي د(س٢)

• أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

د(س) = س٣ + ٣س٢ − ٩س − ٧

الحل

د'(س) = ٣س٢ + ٦س − ٩

٣س٢ + ٦س − ٩ = ٠

س٢ + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

س = −٣ ، س = ١

∴ عند س = −٣ توجد قيمة عظمى محلية هي د(−٣) = (−٣)٣ + ٣(−٣)٢ − ٩(−٣) − ٧ = ٢٠

∴ عند س = ١ توجد نقطة قيمة صغرى محلية هي د(١) = (١)٣ + ٣(١)٢ − ٩(١) − ٧ = −١٢

• تذكر

النقط الحرجة

① د'(س) = ٠ س١ ، س٢ ، ... نقط حرجة

② أصفار المقام نقط حرجة

③ د(س) = { س٢ ، س ≥ ٣ ؛ ٥س ، س < ٣ }

د'(س) = { ٢س ، س ≥ ٣ ؛ ٥ ، س < ٣ }

= { ٢ × ٣ = ٦ ، س ≥ ٣ ؛ ٥ ، س < ٣ }

∵ د'+(٣) ≠ د'−(٣) ∴ عند س = ٣ نقطة حرجة

• أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

① د(س) = $س^{\frac{2}{3}}$(٢س − ٥)

الحل

د'(س) = ٢/٣ $س^{-\frac{1}{3}}$(٢س − ٥) + ٢$س^{\frac{2}{3}}$

= ٢(٢س − ٥) / ٣∛س + ٢$س^{\frac{2}{3}}$ = ٢$س^{\frac{2}{3}}$

×٣∛س: ٢(٢س − ٥) + ٦س = ٠

٤س − ١٠ + ٦س = ٠

س = ١

∵ أصفار المقام ٣∛س = ٠

س = ٠

عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية

هي د(٠) = صفر

عند س = ١ توجد نقطة قيمة صغرى محلية

هي د(١) = −٣

• يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) = ...

(أ) س٢ − ١ (ب) س٢ + ١ (ج) س٣ (د) −س٣

• يكون للدالة قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) = ...

(أ) س٢ − ٢ (ب) س٣ + ١ (ج) س٣ + ٣س (د) ٢س − س٢

المفكر في التفاضل والتكامل

* أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

د(س) = س + $\frac{٤}{س}$

الحل

د(س) = س + ٤ س$^{-١}$

د'(س) = ١ − ٤ س$^{-٢}$

∴ ١ − $\frac{٤}{س^٢}$ = ٠

$\frac{٤}{س^٢}$ = ١ ∴ س² = ٤

∴ س = ٢ ، س = −٢

إشارة د'

−∞ ، تزايدية ، متناقصة ، متناقصة ، تزايدية ، ∞

د'(−٣) = + ، −٢ ، د'(−١) = − ، ٠ ، د'(١) = − ، ٢ ، د'(٣) = +

∴ عند س = −٢ توجد قيمة عظمى محلية = −٤

عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية = ٤

* أوجد القيم القصوى المطلقة في [أ ، ب]

١) د'(س) = ٠

س₁ ، س₂ ، .... ∈ [أ ، ب]

٢) نعوض في الدالة د(س)

د(س₁) =

د(س₂) =

د(أ) =

د(ب) =

أكبر قيمة تكون عظمى مطلقة وأصغر قيمة تكون صغرى مطلقة

* أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث

① د(س) = س³ − ١٢س + ١٢ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

الحل

د'(س) = ٣س² − ١٢

٣س² − ١٢ = ٠

٣س² = ١٢

س² = ٤

س = ٢ ، س = −٢ ∈ [−٣ ، ٣]

د(٢) = ٨ − ٢٤ + ١٢ = −٤

د(−٢) = −٨ + ٢٤ + ١٢ = ٢٨

د(٣) = ٢٧ − ٣٦ + ١٢ = ٣

د(−٣) = −٢٧ + ٣٦ + ١٢ = ٢١

القيمة العظمى المطلقة = ٢٨

القيمة الصغرى المطلقة = −٤

② د(س) = س هـ$^{-س}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

الحل

د'(س) = س × −هـ$^{-س}$ + هـ$^{-س}$ × ١

−س هـ$^{-س}$ + هـ$^{-س}$ = ٠

هـ$^{-س}$ [−س + ١] = ٠

هـ$^{-س}$ = ٠ ، −س + ١ = ٠

س = ١

د(٠) = صفر

د(١) = $\frac{١}{هـ}$

د(٢) = ٢ هـ$^{-٢}$

∴ القيمة الصغرى المطلقة = صفر

القيمة العظمى المطلقة = $\frac{١}{هـ}$

* أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

د(س) = س − لو س

الحل

د'(س) = ١ − $\frac{١}{س}$

١ − $\frac{١}{س}$ = ٠

$\frac{١}{س}$ = ١ ∴ س = ١

−∞ ، متناقصة ، تزايدية ، ∞

د'($\frac{١}{٢}$) = − ، د'(٢) = +

∴ القيمة الصغرى المحلية

د(١) = ١ − لو$_{هـ}$ ١ = ١

* أوجد $\frac{دص}{دس}$ حيث ٣ص = جاس جتاص

الحل

٣ص = جاس جتاص

٣ $\frac{دص}{دس}$ = جاس × −جاص $\frac{دص}{دس}$ + جتاص جتاس

٣ $\frac{دص}{دس}$ + جاس جاص $\frac{دص}{دس}$ = جتاص جتاس

$\frac{دص}{دس}$ (٣ + جاس جاص) = جتاص جتاس

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{جتاص جتاس}{٣ + جاس جاص}$

١) إذا كانت س² + ص² = ١ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

أ) س ب) $\frac{١}{س}$ ج) $\frac{-س}{ص}$ د) −$\frac{دص}{دس}$

٢) إذا كانت س² + ص² = ٢ س ص فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

أ) −١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

الحل

س² − ٢ س ص + ص² = ٠

(س − ص)(س − ص) = ٠

س = ص

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ١

٣) إذا كانت ص² − ٢√س = ٠ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

أ) $\frac{دص}{دس^٢}$ ب) √س ج) $\frac{س}{ص^٢}$ د) $\frac{١}{ص^٢}$

٤) ميل المماس للمنحنى س ص² = ٣ عند النقطة (٣ ، ١) يساوي ......

أ) −٣ ب) −$\frac{١}{٦}$ ج) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{٣}{٢}$

* إذا كانت س = ٣ جتا ٢ث ، ص = ٤ جا ٣ث

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما ث = $\frac{π}{٤}$

الحل

س = ٣ جتا ٢ث ص = ٤ جا ٣ث

$\frac{دس}{دث}$ = −٣ × ٢ جا ٢ث $\frac{دص}{دث}$ = ٤ × ٣ جتا ٣ث

= −٦ جا ٢ث = ١٢ جتا ٣ث

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دث}$ × $\frac{دث}{دس}$

= $\frac{١٢ جتا ٣ث}{-٦ جا ٢ث}$

= −٢ × $\frac{جتا ١٣٥}{جا ٩٠}$ = √٢

* إذا كانت س = ٢ ع² + ٣ ، ص = √(٣ع) ، ع = ١

فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) ٢ د) ٦

* إذا كانت ص = ٢ ع³ + ٧ ، ع = ٢ س² − ٤ فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوي ......

أ) ٢ س ب) ٣ س ج) ٦ د) ٦ س

أقوى كلام في التفاضل والتكامل

* أوجد معدل تغير $\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$ بالنسبة إلى $\text{ع} = \sqrt{2\text{س}+1}$ عندما $\text{س} = 4$

الحل

$\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$ ، $\text{ع} = \sqrt{2\text{س}+1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}-1)-(\text{س}+1)}{(\text{س}-1)^2} = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\text{س}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+1}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2} \times \frac{\sqrt{2\text{س}+1}}{1}$

عند $\text{س} = 4$: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{-2}{(4-1)^2} \times \sqrt{2\times4+1} = -\frac{2}{3}$

* عين القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة $[0 ، 2]$ حيث $\text{د}(\text{س}) = 3\sqrt{4-\text{س}^2}$

الحل

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{3 \times -2\text{س}}{2\sqrt{4-\text{س}^2}} = \frac{-3\text{س}}{\sqrt{4-\text{س}^2}}$

$\frac{-3\text{س}}{\sqrt{4-\text{س}^2}} = 0$ ∴ $-3\text{س} = 0$ ∴ $\text{س} = 0$

أصفار المقام: $4 - \text{س}^2 = 0$

$\text{س}^2 = 4$ ∴ $\text{س} = 2 \in [0 ، 2]$ ، $\text{س} = -2 \notin [0 ، 2]$

∴ $\text{د}(0) = 6$ القيمة العظمى = ٦

∴ $\text{د}(2) = 0$ القيمة الصغرى = ٠

* أوجد قيم م التي يكون عندها المنحنى $\text{س} = 2\text{م}^3 - 5\text{م}^2 + 4\text{م} - 9$ ، $\text{ص} = 2\text{م}^2 + \text{م} - 5$

(١) مماس أفقي

الحل: $\frac{\text{دس}}{\text{دم}} = 6\text{م}^2 - 10\text{م} + 4$

$\frac{\text{دص}}{\text{دم}} = 4\text{م} + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}} = \frac{4\text{م}+1}{6\text{م}^2-10\text{م}+4}$

∴ $\frac{4\text{م}+1}{6\text{م}^2-10\text{م}+4} = 0$ ∴ $4\text{م}+1 = 0$

$\text{م} = -\frac{1}{4}$

(٢) مماس رأسي

$\frac{4\text{م}+1}{6\text{م}^2-10\text{م}+4} = \frac{1}{0}$ ∴ $6\text{م}^2 - 10\text{م} + 4 = 0$

$\text{م} = \frac{2}{3}$ أو $\text{م} = 1$

* عين القيم القصوى المطلقة للدالة $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|(\text{س}-4)$ في الفترة $[-1 ، 3]$

الحل

$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|(\text{س}-4)$

$= \begin{cases} \text{س}(\text{س}-4) & \text{س} \geq 0 \\ -\text{س}(\text{س}-4) & \text{س} < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \text{س}^2-4\text{س} & \text{س} \geq 0 \\ -\text{س}^2+4\text{س} & \text{س} < 0 \end{cases}$

$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س}-4 & \text{س} > 0 \\ -2\text{س}+4 & \text{س} < 0 \end{cases}$

∵ $2\text{س} - 4 = 0$ ∴ $\text{س} = 2$ — $-2\text{س} + 4 = 0$ ، $\text{س} = 2$

$\text{د}'(0) = \begin{cases} -4 \\ 4 \end{cases}$

∴ $\text{س} = 0$ نقطة حرجة

$\text{د}(0) = \text{صفر}$ ، $\text{د}(-1) = -5$

$\text{د}(2) = -4$ ، $\text{د}(3) = -3$

القيمة العظمى المطلقة = صفر

القيمة الصغرى المطلقة = −٥

١) ميل المماس لمنحنى الدائرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$ عند النقطة $(3 ، 4)$ يساوي ....

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $-\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{3}{16}$ (د) $\frac{4}{5}$

٢) إذا كانت $\text{ص} = 2\text{ع}^2$ ، $\text{ع} = 3\text{س}^2 - 2$ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوي ....

(أ) ٤ع (ب) ٢ (ج) $\frac{1}{4\text{ع}}$ (د) ٤

٣) إذا كانت د: $[-3 ، 4] \to$ ح ، $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - 3\text{س}$ فإن عدد النقاط الحرجة للدالة يساوي ....

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٤) نقطة تتحرك على المنحنى $\text{ص} = \text{س}^3$ بحيث $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 12$ ، عند النقطة $(2 ، 4)$ يكون $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ يساوي ....

(أ) −٨ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) ٣

٥) إذا كانت الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{ل}\,\text{س}^3 + 9\text{س}^2$ لها نقطة حرجة عند $\text{س} = -1$ فإن ل = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (ج) −٦ (د) ٦

٦) إذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}-2}$ فإن عند $\text{س} = 1$ ، $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = $ ....

(أ) −١٢ (ب) −٦ (ج) ٦ (د) ١٢

* أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة $[-1 ، 1]$ حيث $\text{د}(\text{س}) = 2\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 5$

الحل

$\text{د}(\text{س}) = 2\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 5$

$\text{د}'(\text{س}) = 6\text{س}^2 + 6\text{س}$

$6\text{س}^2 + 6\text{س} = 0$

$\text{س}(6\text{س} + 6) = 0$

$\text{س} = 0$ ، $\text{س} = -1$

$\text{د}(0) = 5$ ∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٣

$\text{د}(1) = 13$ القيمة الصغرى المطلقة = ٥

$\text{د}(-1) = 9$

* إذا كانت $\text{س}\,\text{جتا}\,\text{ص} + \text{ص}\,\text{جتا}\,\text{س} = 1$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\text{س} \times -\text{جا}\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتا}\,\text{ص} + \text{ص} \times -\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0$

$\text{جتا}\,\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س}\,\text{جا}\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}\,\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(\text{جتا}\,\text{س} - \text{س}\,\text{جا}\,\text{ص}) = \text{ص}\,\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}\,\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{ص}}{\text{جتا}\,\text{س} - \text{س}\,\text{جا}\,\text{ص}}$

* إذا كانت $\text{س} = \text{جا}\,2\pi\text{هـ}$ ، $\text{ص} = \text{جتا}\,2\pi\text{هـ}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{هـ} = \frac{1}{8}$

الحل

$\text{س} = \text{جا}\,2\pi\text{هـ}$ ، $\text{ص} = \text{جتا}\,2\pi\text{هـ}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = 2\pi\,\text{جتا}\,2\pi\text{هـ}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = -2\pi\,\text{جا}\,2\pi\text{هـ}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$

$= \frac{-2\pi\,\text{جا}\,2\pi\text{هـ}}{2\pi\,\text{جتا}\,2\pi\text{هـ}} = \frac{-\text{جا}\,45}{\text{جتا}\,45} = -1$

* أوجد ميل المماس للمنحنى $\text{جتا}\sqrt{\pi\text{ص}} = 3\text{س} + 1$ عند النقطة $(-\frac{1}{3} ، \frac{\pi}{4})$

الحل

$\text{جتا}\sqrt{\pi\text{ص}} = 3\text{س} + 1$

$-\text{جا}\sqrt{\pi\text{ص}} \times \frac{\pi\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{2\sqrt{\pi\text{ص}}} = 3$

$-\text{جا}\sqrt{\pi\times\frac{\pi}{4}} \times \frac{\pi}{2\sqrt{\pi\times\frac{\pi}{4}}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3$

$-1 \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3$

آخر كلام في التفاضل والتكامل

التحدب ونقط الانقلاب

١) $د''(س) = صفر$

$س = \dots\dots ، \dots\dots$

٢) نبحث في $د''(س)$ بقيم بينية

محدب لأعلى — محدب لأسفل — محدب لأعلى

$د''(س) = -$ (س١) $د''(س) = +$ (س٢) $د''(س) = -$

٣) نقط الانقلاب تفصل بين مناطق التحدب لأسفل ولأعلى

تذكر: $(٢ ، ٥)$ نقطة انقلاب $\therefore د''(٢) = صفر$

$(٢ ، ٥)$ نقطة حرجة $\therefore د'(٢) = صفر$

إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب عند $س = ٢$ حيث $د(س) = س^٣ + ك س^٢ + ٤$ فإن $ك = \dots\dots$

(أ) -٦ (ب) -٣ (ج) ٣ (د) ٦

منحنى الدالة د محدب لأسفل في ح إذا كانت $د(س) = \dots\dots$

(أ) $٣ - س^٢$ (ب) $٣ - س^٣$ (ج) $٣ - س^٤$ (د) $٣ + س^٢$

أوجد فترات التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١$

الحل

$د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١$

$د'(س) = ٣س^٢ - ٦س$

$د''(س) = ٦س - ٦$

$٦س - ٦ = ٠$

$س = ١$

$-\infty$ أعلى (١) أسفل ∞

$د''(٠) = -٦$ $د''(٢) = ٦$

المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، ١[$

المنحنى محدب لأسفل في $]١ ، \infty[$

نقطة الانقلاب $(١ ، -١)$

إذا كانت $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢}$ أوجد فترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت

الحل

$د(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٤)^{-\frac{١}{٣}}$

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}(س - ٤)^{-\frac{٤}{٣}}$

$-\frac{٢}{٩}(س - ٤)^{-\frac{٤}{٣}} = ٠$

$\therefore س - ٤ = ٠$

$س = ٤$

$-\infty$ (٤) ∞

$د''(٠) = -$ $د''(٥) = -$

المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، ٤[$

المنحنى محدب لأعلى في $]٤ ، \infty[$

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س - ٢}$ فإن $د''(٣) = \dots\dots$

(أ) -٣٦ (ب) -١٢ (ج) ٦ (د) ٤

أي الدوال التالية تحقق العلاقة $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ص$

(أ) $ص = \frac{١}{١٢}(س + ١)^٤$ (ب) $ص = هـ^س$ (ج) $ص = جاس$ (د) $ص = \frac{س}{س - ١}$

إذا كانت النقطة $(١ ، ١٢)$ هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة $د(س) = أس^٣ + ب س^٢$ أوجد قيم أ ، ب الحقيقية

الحل

$\because د'(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س$

$د''(س) = ٦أس + ٢ب$

$\therefore د''(١) = ٠$

$٦أ + ٢ب = ٠$

$٢ب = -٦أ$

$ب = -٣أ$ (١)

$\because د(١) = ١٢$

$\therefore أ + ب = ١٢$ (٢)

من (١) في (٢)

$\therefore أ - ٣أ = ١٢$

$-٢أ = ١٢$

$أ = -٦$

$\therefore ب = -٣ \times -٦$

$= ١٨$

إذا كانت $ص^٢ + ٢س ص = ٨$ أثبت أن $(س + ص)\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢\frac{دص}{دس} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = صفر$

الحل

$ص^٢ + ٢س ص = ٨$

$٢ص\frac{دص}{دس} + ٢س\frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠ \quad \div ٢$

$ص\frac{دص}{دس} + س\frac{دص}{دس} + ص = ٠$

$(س + ص)\frac{دص}{دس} + ص = ٠$

$(س + ص)\frac{د^٢ص}{دس^٢} + \frac{دص}{دس} \times \left(\frac{دص}{دس} + ١\right) + \frac{دص}{دس} = ٠$

$(س + ص)\frac{د^٢ص}{دس^٢} + \frac{دص}{دس} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + \frac{دص}{دس} = ٠$

$(س + ص)\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢\frac{دص}{دس} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = ٠$

إذا كانت $ص = ظاس$ أثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢ص(١ + ص^٢)$

الحل

$ص = ظاس$

$\frac{دص}{دس} = قا^٢س$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢قاس \, قاس \, ظاس$

$= ٢قا^٢س \, ظاس$

$= ٢ص \, قا^٢س$

$= ٢ص(١ + ظا^٢س)$

$= ٢ص(١ + ص^٢)$

تذكر: $١ + ظا^٢س = قا^٢س$

إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ٩$ أثبت أن $ص\frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ١ = ٠$

الحل

$س^٢ + ص^٢ = ٩$

$٢س + ٢ص\frac{دص}{دس} = ٠ \quad \div ٢$

$س + ص\frac{دص}{دس} = ٠$

$١ + ص\frac{د^٢ص}{دس^٢} + \frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore ص\frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ١ = ٠$

إذا كانت $ص = جا٢س \, جتا٢س$ فإن $ص''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \dots\dots$

(أ) -٤ (ب) صفر (ج) ٤ (د) ٨

إذا كانت $د(س) = ظاس$ فإن $د''\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ تساوي

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٤ (د) $\frac{٣}{٤}$

آخر كلام في التفاضل والتكامل

* إذا كانت س = ٢ن³ − ٥ ، ص = ٦ن² + ١ أوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما ن = ١

الحل

س = ٢ن³ − ٥ ، $\frac{دس}{دن}$ = ٦ن²

ص = ٦ن² + ١ ، $\frac{دص}{دن}$ = ١٢ن

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{١٢ن}{٦ن^٢} = ٢ن^{-١}$

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = -٢ن^{-٢} \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{-٢}{ن^٢} \times \frac{١}{٦ن^٢} = \frac{-١}{٣ن^٤}$

عندما ن = ١

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{-١}{١ \times ٣} = -\frac{١}{٣}$

* إذا كانت س = قا ع ، $\sqrt{ص}$ = ظا ع أثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢

الحل

س = قا ع ، ص = ظا² ع

$\frac{دس}{دع}$ = قا ع ظا ع ، $\frac{دص}{دع}$ = ٢ظا ع قا² ع

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= \frac{٢ظا ع قا^٢ ع}{قا ع ظا ع}$ = ٢قا ع

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢

* إذا كانت س² + ص² = ٤ أثبت أن ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٤ = ٠

الحل

س² + ص² = ٤

٢س + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

س + ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⟵ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

١ + $\frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس}$ + ص $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠

١ + $\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢$ + ص $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠

١ + $\left(\frac{-س}{ص}\right)^٢$ + ص $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠

١ + $\frac{س^٢}{ص^٢}$ + ص $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠ × ص²

ص² + س² + ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٠ ∴ ص³ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٤ = ٠

* إذا كانت س ص = جا س جتا س أثبت أن س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٤ س ص = ٠

الحل

س ص = جا س جتا س × ٢

٢س ص = ٢جا س جتا س

٢س ص = جا ٢س

٢س $\frac{دص}{دس}$ + ٢ص = ٢جتا ٢س ÷ ٢

س $\frac{دص}{دس}$ + ص = جتا ٢س

س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + $\frac{دص}{دس}$ + $\frac{دص}{دس}$ = −٢جا ٢س

س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ = −٢ × ٢س ص

س $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٤س ص = ٠

ملاحظة

* ميل المماس للمنحنى ص = د(س) يساوي $\frac{دص}{دس}$

* معادلة المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س₁ ، ص₁) هي

ص − ص₁ = $\frac{دص}{دس}$ (س − س₁)

* معادلة العمودي على المنحنى ص = د(س) عند النقطة (س₁ ، ص₁) هي

ص − ص₁ = $\frac{-١}{\left(\frac{دص}{دس}\right)}$ (س − س₁)

* أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢س − ظا س عند النقطة التي تقع على المنحنى والتي إحداثيها السيني $\frac{\pi}{٤}$

الحل

ص = ٢س − ظا س

عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٢ × $\frac{\pi}{٤}$ − ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$ − ١

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ − ١)

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ + قا² س = ٢ + قا² ٤٥ = ٤

∴ معادلة المماس

ص − ($\frac{\pi}{٢}$ − ١) = ٤(س − $\frac{\pi}{٤}$)

ص − $\frac{\pi}{٢}$ + ١ = ٤س − π

ص = ٤س − $\frac{\pi}{٢}$ − ١

* أوجد معادلة العمودي للمنحنى ص = ٣ + ٢قتا س عند النقطة التي تقع على المنحنى وإحداثيها السيني يساوي $\frac{٤\pi}{٣}$

الحل

ص = ٣ + ٢قتا س

عند س = $\frac{٤\pi}{٣}$

∴ ص = ٣ + ٢قتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = ١

∴ النقطة ($\frac{٤\pi}{٣}$ ، ١)

$\frac{دص}{دس}$ = قتا س ظتا س

= قتا $\frac{٤\pi}{٣}$ ظتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = ٢$\sqrt{٣}$

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

معادلة العمودي

ص − ١ = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$ (س − $\frac{٤\pi}{٣}$)

٢$\sqrt{٣}$ ص − ٢$\sqrt{٣}$ = −س + $\frac{٤\pi}{٣}$

س + ٢$\sqrt{٣}$ ص − ٢$\sqrt{٣}$ − $\frac{٤\pi}{٣}$ = ٠

* أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي للمنحنى ٣س² + ص² = ١٢ عند النقطة (−١ ، ٣)

الحل

٣س² + ص² = ١٢

٦س + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

−٦ + ٦ $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس}$ = ١

∴ ميل المماس = ١

معادلة المماس

ص − ٣ = ١(س + ١)

ص − ٣ = س + ١

ص = س + ٤

عند ص = ٠

∴ س = −٤

(−٤ ، ٠)

ميل العمودي = −١

معادلة العمودي

ص − ٣ = −١(س + ١)

ص − ٣ = −س − ١

ص = ٢ − س

عند ص = ٠

س = ٢

(٢ ، ٠)

∴ مساحة المثلث

= ½ × ٦ × ٣

= ٩ وحدة مساحة

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• يستند سلم طوله ٢٥٠ سم على حائط رأسي، فإذا انزلق الطرف العلوي للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ٦٠ سم/ث عندما يكون الطرف السفلي للسلم على بعد ٧٠ سم من الحائط أوجد:

أولاً: معدل انزلاق الطرف السفلي للسلم

ثانياً: معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض

الحل

$س^2 + ص^2 = (250)^2$

$2س \frac{دس}{دن} + 2ص \frac{دص}{دن} = 0$

[illegible]

$\frac{دس}{دن} = $ [illegible] سم/ث

$جا هـ = \frac{ص}{250}$

[illegible]

$\frac{دهـ}{دن} = $ [illegible] راديان/ث

• يسير رجل طوله ١.٨ متر في خط مستقيم مقترباً من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ٢.٤ متر/ث فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٧.٢ متر عن سطح الأرض أوجد:

أولاً: معدل تغير طول ظل الرجل

ثانياً: معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٩.٦ متر من عمود الإضاءة

الحل

[illegible]

$\frac{دص}{دن} = -0.6$ م/ث

[illegible]

$\frac{دف}{دن} = -1.96$ م/ث

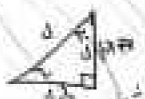
• يرتكز سلم بطرفه السفلي على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي، فإذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث أوجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$

الحل

$س^2 + ص^2 = ل^2$

$2س \frac{دس}{دن} + 2ص \frac{دص}{دن} = 0$

$س \frac{دس}{دن} + ص \frac{دص}{دن} = 0$



[illegible]

$\frac{دص}{دن} = -10\sqrt{3}$ سم/ث

• مثلث طول كل من ضلعيه ١٠ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما يتزايد بمعدل $\frac{1}{...}$ راديان/ث. أوجد معدل تغير مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم

الحل

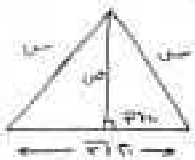
$م = \frac{1}{2} س ص جا هـ$

[illegible]

$= 5 + \frac{...}{2} \simeq$ [illegible] سم²/ث

• مثلث متساوي الساقين طول قاعدته [illegible] سم، إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل [illegible] سم/ث أوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها كل من الساقين طوله مساوياً لطول القاعدة

الحل



$\frac{دس}{دن} = -30$ سم/ث

$م = \frac{1}{2} \times$ [illegible] $\times ص$

[illegible]

$= -600$ سم²/ث

• مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة ١٢ سم، ٣٦ سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثاني يتناقص بمعدل ١ سم/ث

أولاً: أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

ثانياً: متى يصبح المثلث متساوي الساقين

الحل

[illegible]

$= 6$ سم²/ث

ثانياً: يصبح المثلث متساوي الساقين عندما

$12 + 2ن = 36 - ن$

$3ن = 24$

$ن = 8$ ثانية

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• أوجد المشتقة الأولى $\frac{دص}{دس}$

١) ص = س² + ٣ هـ^س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ٣ هـ^س

٢) ص = س³ هـ^س

$\frac{دص}{دس}$ = س³ هـ^س + هـ^س × ٣س²

٣) ص = هـ^{٣س²+٥}

$\frac{دص}{دس}$ = ٦س هـ^{٣س²+٥}

٤) ص = ٣ هـ^{ظاس}

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ هـ^{ظاس} × قاس قاس

٥) ص = ٣^س

$\frac{دص}{دس}$ = ٣^س لو_هـ ٣

٦) ص = ٣^{(س²−٥س+٤)}

$\frac{دص}{دس}$ = (٢س−٥) ٣^{(س²−٥س+٤)} لو_هـ ٣

٧) ص = ٢^{ظا²س}

$\frac{دص}{دس}$ = ٢^{ظا²س} لو_هـ ٢ × ٢ظاس قاس قاس

٨) ص = لو_هـ س

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{س}$

٩) ص = ٣س + لو_هـ س

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ + $\frac{١}{س}$

١٠) ص = لو_هـ (٣س² + ٩)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٦س}{٣س²+٩}$

١١) ص = لو_هـ $\frac{س²}{س+٧}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س+٧}{س²}$ × $\frac{(س+٧)×٢س − س²×١}{(س+٧)²}$

١٢) ص = لو_٣ س

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{س لو_هـ ٣}$

١٣) ص = لو_٣ (٣س−٤)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٣}{(٣س−٤) لو_هـ ٣}$

• أوجد $\frac{دص}{دس}$

أ) ص = س^{٢س}

الحل

بأخذ لو للطرفين

لو_هـ ص = لو_هـ س^{٢س}   ∴ لو_هـ ص = ٢س لو_هـ س

$\frac{١}{ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س × $\frac{١}{س}$ + لو_هـ س × ٢

$\frac{١}{ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ + ٢ لو_هـ س   × ص

$\frac{دص}{دس}$ = ص (٢ + ٢ لو_هـ س)

= س^{٢س} (٢ + ٢ لو_هـ س)

ب) ص = (جاس)^{قاس}

الحل

بأخذ لو للطرفين

لو_هـ ص = لو_هـ (جاس)^{قاس}

لو_هـ ص = قاس لو_هـ جاس

$\frac{١}{ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = قاس × $\frac{جتاس}{جاس}$ + لو_هـ جاس × قاس ظاس

$\frac{١}{ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{قاس}{جاس}$ × $\frac{جتاس}{قاس}$ + قاس ظاس لو_هـ جاس   × ص

$\frac{دص}{دس}$ = ص (١ + قا²س لو_هـ جاس)

$\frac{دص}{دس}$ = (جاس)^{قاس} (١ + قا²س لو_هـ جاس)

• إذا كانت ص = أ هـ^{ب/س}

أثبت أن س² ص″ + ٢س ص′ + ب ص′ = ٠

الحل

ص = أ هـ^{ب/س}

ص′ = أ هـ^{ب/س} × −ب س^{−٢}

ص′ = ص × $\frac{−ب}{س²}$ ⟵ س² ص′ = −ب ص

∴ س² ص′ = −ب ص

س² ص″ + ٢س ص′ = −ب ص′   × $\frac{دص}{دس}$

س² ص″ + ٢س ص′ + ب ص′ = ٠

س² ص″ + ٢س ص′ + ب ص′ = ٠

س² ص″ + ٢س ص′ + ب ص′ = ٠

---

١) إذا كانت د(س) = هـ^{٣س} فإن د′(س) = ...

ⓐ هـ^{٣س}   ⓑ ٣ هـ^{٣س}   ⓒ ٩ هـ^{٣س}   ⓓ ٢ هـ^{٣س}

٢) إذا كانت د(س) = ٤ هـ^{٢س} فإن د′(٢) = ...

ⓐ −د(٢)   ⓑ −٤د(٢)   ⓒ −د(٢)   ⓓ ٢د(٢)

٣) منحنى الدالة د : د(س) = ١ + لو(س−٢) هو نفس منحنى الدالة ر : ر(س) = لو س بالانتقال ......

ⓐ (٢،١)   ⓑ (−١،٢)   ⓒ (١،−٢)   ⓓ (١،٢)

٤) المسافة بين منحنى الدالة ص = لو ٣ (س+١) والمنحنى ص = لو (٣س+١) عند س = ٢ تساوي ......

ⓐ ١٣   ⓑ ٣٠   ⓒ ١٠١   ⓓ لو ٣ : لو ٩

٥) منحنى الدالة د(س) = هـ^{س+٢} + ٢ هو نفس منحنى ر(س) = هـ^س بالانتقال

ⓐ (٢،٣)   ⓑ (٢،٢)   ⓒ (−٢،٢)   ⓓ (−٢،٢)

٦) إذا كانت ك(س) = س د(س) ، د(٣) = −٥

فإن ك′(٣) = ...

ⓐ −٨٠   ⓑ −٤   ⓒ ١٥   ⓓ ٢٧

٧) إذا كانت د(س) = س² + ٣ لو_هـ س فإن د′(٣) = ...

ⓐ −١   ⓑ ١   ⓒ $\frac{٢}{٣}$ ⓓ ٦

• إذا كانت س² ص = ٤ب لو_هـ س

أثبت أن س² ص″ + ٥س ص′ + ٤ص = ٠

الحل

س² ص = ٤ب لو_هـ س

س² ص′ + ٢س ص = ٤ب × $\frac{١}{س}$ × س

س³ ص′ + ٢س² ص = ٤ب

س³ ص″ + ٣س² ص′ + ٢س² ص′ + ٤س ص = ٠

س³ ص″ + ٥س² ص′ + ٤س ص = ٠   ÷ س

س² ص″ + ٥س ص′ + ٤ص = ٠

• إذا كانت ٣ = هـ^{لو م} فإن م = ...

ⓐ ١   ⓑ $\frac{١}{هـ}$ ⓒ هـ   ⓓ ٧

• قطعة سلك يراد ثنيها على شكل قطاع دائري مساحته ١٦ سم² أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن وما قياس زاويته عندئذ

الحل

المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق

$\frac{1}{2}$ ل نق = ١٦ ∴ ل نق = ٣٢

ل = $\frac{٣٢}{نق}$ = ٣٢ نق$^{-1}$

ح = ٢ نق + ل

ح = ٢ نق + $\frac{٣٢}{نق}$

$\frac{دح}{دنق}$ = ٢ − ٣٢ نق$^{-2}$

٢ − $\frac{٣٢}{نق^2}$ = ٠ × نق²

٢ نق² − ٣٢ = ٠

٢ نق² = ٣٢ نق² = ١٦ ∴ نق = ٤

$\frac{د^2ح}{دنق^2}$ = ٦٤ نق$^{-3}$

عند نق = ٤ ∴ $\frac{د^2ح}{دنق^2}$ = ١ > ٠ أقل ما يمكن

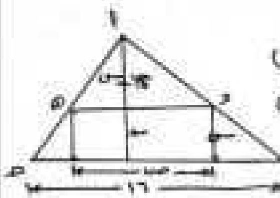
∴ المساحة = $\frac{1}{2}$ نق² هـ

∴ $\frac{1}{2}$ × (٤)² هـ = ١٦

∴ هـ = ٢

• أوجد بعدي مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع أحد أضلاعه على قاعدة المثلث ويقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين

الحل



∵ $\frac{ص}{١٦} = \frac{١٢ - س}{١٢}$

∴ ص = $\frac{٤ × ٤}{١٢}$ (١٢ − س)

ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ − س) ①

∴ م = س ص

م = $\frac{٤}{٣}$ س (١٢ − س)

م = ١٦ س − $\frac{٤}{٣}$ س²

م′ = ١٦ − $\frac{٨}{٣}$ س

∴ ١٦ − $\frac{٨}{٣}$ س = ٠

$\frac{٨}{٣}$ س = ١٦

س = ٦

م″ = −$\frac{٨}{٣}$ < ٠ أكبر مساحة

في ① ∴ ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ − ٦)

ص = ٨

∴ بعدا المستطيل ٦ سم، ٨ سم

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠، ٥) وتقع على المنحنى ص = $\frac{1}{2}$ س² − ٤

الحل

ف = $\sqrt{(س - ٠)^2 + (ص - ٥)^2}$

ف = $\sqrt{س^2 + (ص - ٥)^2}$

ف = $\sqrt{س^2 + (\frac{1}{2} س^2 - ٤ - ٥)^2}$

ف = $\sqrt{س^2 + (\frac{1}{2} س^2 - ٩)^2}$

ف′ = $\frac{٢ س + ٢ (\frac{1}{2} س^2 - ٩) × س}{٢ \sqrt{س^2 + (\frac{1}{2} س^2 - ٩)^2}}$ = ٠

٢ س + ٢ س ($\frac{1}{2}$ س² − ٩) = ٠

س [٢ + ٢ ($\frac{1}{2}$ س² − ٩)] = ٠

س = ٠ ، ٢ + ٢ ($\frac{1}{2}$ س² − ٩) = ٠

٢ + س² − ١٨ = ٠

س² = ١٦

س = ٤ س = −٤

ص = ٤ ص = ٤

النقط (٤، ٤) ، (−٤، ٤)

• أوجد ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة طول نصف قطرها ١٠ سم عندما يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن

الحل

(٢ نق)² + ع² = ٤٠٠

٤ نق² + ع² = ٤٠٠

٤ نق² = ٤٠٠ − ع²

نق² = ١٠٠ − $\frac{1}{4}$ ع²

∴ الحجم الأسطوانة

ح = π نق² ع

ح = π ع (١٠٠ − $\frac{1}{4}$ ع²)

[illegible]

∴ ع² = $\frac{٤٠٠}{٣}$ ، ع = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

• أوجد أقصر بعد بين المستقيم س − ٢ص + ١٠ = ٠ والمنحنى ص² = ٤س

الحل

ل = $\frac{|س - ٢ص + ١٠|}{\sqrt{(١)^2 + (-٢)^2}}$

ل = $\frac{|\frac{1}{4} ص^2 - ٢ص + ١٠|}{\sqrt{٥}}$

ل′ = $\frac{\frac{1}{2} ص - ٢}{\sqrt{٥}}$

∴ $\frac{1}{2}$ ص − ٢ = ٠

$\frac{1}{2}$ ص = ٢ ∴ ص = ٤

∴ س = ٤

أقصر بعد ل = $\frac{|٤ - ٨ + ١٠|}{\sqrt{٥}} = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

• حوض على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أطوال أحرفه يساوي ٢٤٠ سم أوجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحل

أبعاد الحوض هي س ، س ، ص

٤س + ٤س + ٤ص = ٢٤٠

س + س + ص = ٦٠

٢س + ص = ٦٠

∴ ص = ٦٠ − ٢س

ح = س² ص

ح = س² (٦٠ − ٢س)

ح = ٦٠ س² − ٢ س³

ح′ = ١٢٠ س − ٦ س²

∴ ١٢٠ س − ٦ س² = ٠

س (١٢٠ − ٦ س) = ٠

٦ س = ١٢٠ س = ٢٠

∴ ص = ٦٠ − ٤٠ ص = ٢٠

∴ الأبعاد ٢٠ سم، ٢٠ سم، ٢٠ سم

• معادلة المماس للمنحنى ... عند النقطة (٢، ١) هي .....

(أ) ٢ص = س + ١ (ب) ص = ٢س + ٣

(ج) ص = ٩س − ٣ (د) ٣ص = ٣س + ١

أفكار هامة في التفاضل والتكامل

• إذا كانت جا س = س ص أثبت أن
س²(ص + ص″) + ٢ جتا س = ٢ ص

الحل

جا س = س ص

جتا س = س ص′ + ص

− جا س = س ص″ + ص′ + ص′

− س ص = س ص″ + ٢ ص′

س ص″ + س ص + ٢ ص′ = ٠ ، ص′ = (جتا س − ص) / س

∴ س ص″ + س ص + ٢ (جتا س − ص) / س = ٠ × س

س² ص″ + س² ص + ٢ جتا س − ٢ ص = ٠

س²(ص + ص″) + ٢ جتا س = ٢ ص

• عيّن فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة د(س) = (س − ١)⁴ + ٣

الحل

د(س) = (س − ١)⁴ + ٣

د′(س) = ٤(س − ١)³

د″(س) = ١٢(س − ١)²

∴ ١٢(س − ١)² = ٠

∴ س − ١ = ٠

س = ١

محدب لأسفل | محدب لأسفل

د″(٠) = + ، د″(٢) = +

∴ المنحنى محدب لأسفل لكل س ∈ ح ولا توجد نقط انقلاب

• أوجد معادلة المماس للمنحنى
س² − ٣ س ص − ص² + ٣ = ٠ عند النقطة (−١ ، ٤)

الحل

٢س − ٣[س دص/دس + ص] − ٢ص دص/دس = ٠

٢ × −١ − ٣ × −١ × دص/دس − ٣ × ٤ − ٢ × ٤ دص/دس = ٠

−٥ دص/دس − ١٤ = ٠

دص/دس = ١٤ / −٥

∴ معادلة المماس

ص − ٤ = −١٤/٥ (س + ١)

٥ص − ٢٠ = −١٤س − ١٤

٥ص + ١٤س − ٦ = ٠

• خزان معدني مغلق مكون من متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢س وارتفاعه ص يعلوه نصف أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢س وارتفاعها ص إذا كان حجم الخزان الكلي ٧٢ ط سم³ أوجد قيمة س التي تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن

الحل

ح = ٧٢ ط

٢س × ٢س × ص + ½ ط س² ص = ٧٢ ط

ص = (٧٢ ط − ٤ س³) / (ط س²)

م = ٢ × ٢س × ٢س + ٤ × ٢س × ص + ½ × ٢ ط س² + ط س ص

م = ٨س² + ... (٧٢ ط − ٤س³)/(ط س²)

م = ٨س² + ٥٤/س − ...

م′ = ١٦س − ٥٤/س² − ... = ٠

١٦س³ − ٥٤ = ٠

س³ = ٥٤/١٦ ∴ س = ³√(٢٧/٨) = ٣/٢ سم

• إذا كانت ف هي بعد النقطة (١ ، ١) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ص = √س أوجد إحداثي النقطة (س ، ص) التي تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل

ف = √((س − ١)² + (ص − ١)²)

ف = √(س² − ٢س + ١ + ص²)

ف = √(س² − ٢س + ١ + س)

ف = √(س² − س + ١)

ف′ = (٢س − ١) / (٢√(س² − س + ١)) = ٠

٢س − ١ = ٠

س = ½ ∴ ص = 1/√2

∴ النقطة (½ ، 1/√2)

• مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن

الحل

ل = س ص / ٣٠

ل = ١/٣٠ س ص

ل = ١/٣٠ ص √(٩٠٠ − ص²)

س² + ص² = ٩٠٠ ، س = √(٩٠٠ − ص²)

ل′ = ١/٣٠ [ص × −٢ص / (٢√(٩٠٠ − ص²)) + √(٩٠٠ − ص²)]

−٢ص² / (٢√(٩٠٠ − ص²)) + √(٩٠٠ − ص²) = ٠

−ص² + ٩٠٠ − ص² = ٠

٢ص² = ٩٠٠

ص² = ٤٥٠

ص = ١٥√٢ سم ∴ س = ١٥√٢ سم

• إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوي ١٠ سم أوجد طول كل من ضلعي القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل

م = ½ س ص

م = ½ ص √(١٠٠ − ص²)

س² + ص² = ١٠٠ ، س = √(١٠٠ − ص²)

م′ = ½ [ص × −٢ص / (٢√(١٠٠ − ص²)) + √(١٠٠ − ص²)]

−ص² / √(١٠٠ − ص²) + √(١٠٠ − ص²) = ٠

−ص² + ١٠٠ − ص² = ٠

٢ص² = ١٠٠

ص² = ٥٠

ص = ٥√٢ سم

س = ٥√٢ سم

• العمودي للدائرة س² + ص² = ٢٥ عند أي نقطة عليها يمر بالنقطة

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (١ ، ١) (ج) ● (٠ ، ٠) (د) (−٥ ، −٥)

• منحنى الدالة د(س) = (س − ٢)³ ... محدب لأسفل في الفترة

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−١ ، ١[(ج)]−∞ ، ٢[(د) ●]٢ ، ∞[

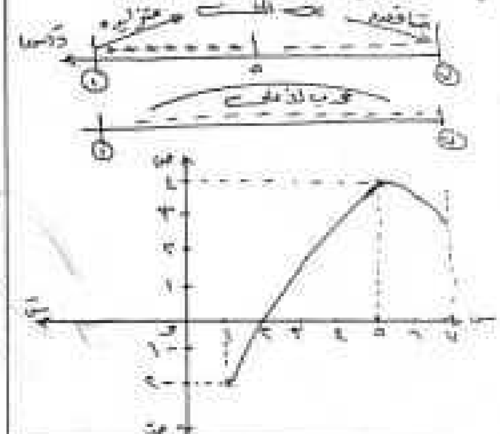
• ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث ... ويحقق الشروط:

١) د متصلة على الفترة [١ ، ٧] ، د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

٢) د'(١) = صفر ، د'(س) > ٠ عندما س < ٥ ، د'(س) < ٠ عندما س > ٥

٣) د''(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

الحل



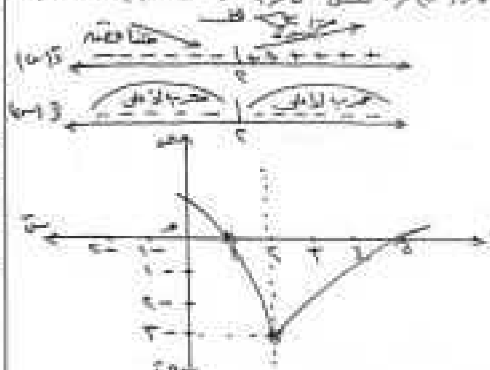
ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث:

د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = -٣

• د'(س) > ٠ لكل س ≠ ٢

• د''(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د''(س) < ٠ لكل س > ٢

الحل



• ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د التي لها الخواص الآتية:

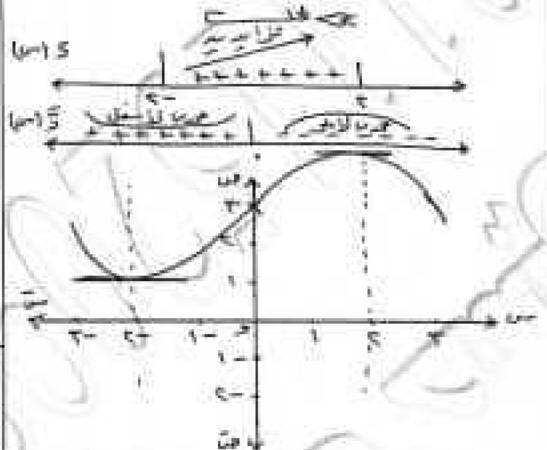
١) د(٠) = ٣ ٢) د'(٢) = د'(-٢) = ٠

٣) د'(س) > ٠ عندما -٢ < س < ٢

٤) د''(س) > ٠ عندما س < ٠

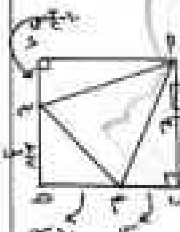
• د''(س) < ٠ عندما س > ٠

الحل



• أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، هـ ∈ أ ء بحيث أ هـ = س سم ، و ∈ ء جـ بحيث ء و = ٣/٢ س أوجد قيمة س التي تجعل مساحة △ ب هـ و أصغر ما يمكن

الحل



م = ١٠٠ - [١/٢ × ١٠ × س + ١/٢ × ٣/٢ س (١٠ - س) + ١/٢ × ١٠ (١٠ - ٣/٢ س)]

= ١٠٠ - [٥ س + ١٥/٢ س - ٣/٤ س^٢ + ٥٠ - ١٥/٢ س]

= ١٠٠ - [٥ س - ٣/٤ س^٢ + ٥٠]

= ٥٠ - ٥ س + ٣/٤ س^٢

م' = -٥ + ٣/٢ س

٣/٢ س = ٥

س = ١٠/٣ سم

• ارسم منحنى الدالة المتصلة د التي تحقق الخواص الآتية: د(٤) = ٤ ، د(٣) = ٢ ، د'(٢) = ٠

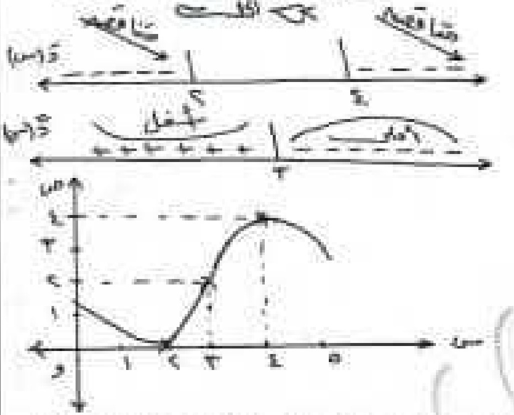
• د'(س) < ٠ عندما س > ٤ أو س < ٢

• د'(س) > ٠ عندما ٢ < س < ٤

• د''(س) > ٠ عندما س < ٣

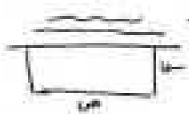
• د''(س) < ٠ عندما س > ٣

الحل



• حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم حدد كيف تضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل لتحيط بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج ، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟

الحل



٢ س + ص = ٨٠٠

ص = ٨٠٠ - ٢ س

م = س ص

م = س (٨٠٠ - ٢ س)

م = ٨٠٠ س - ٢ س^٢

م' = ٨٠٠ - ٤ س

٨٠٠ - ٤ س = ٠

٤ س = ٨٠٠

س = ٢٠٠

∴ ص = ٨٠٠ - ٢ × ٢٠٠ = ٤٠٠

∴ الطول ٤٠٠ متر والعرض ٢٠٠ م

∴ المساحة = ٤٠٠ × ٢٠٠ = ٨٠٠٠٠ م^٢

• تدريب

$\int (س^٢ - ٥ س + ٢)\, ء س$

$= \frac{س^٣}{٣} - \frac{٥ س^٢}{٢} + ٢ س + ث$

$\int (\frac{٣}{س} - ٥ \sqrt{س})\, ء س$

$= \int (٣ س^{-١} - ٥ س^{\frac{١}{٢}})\, ء س$

$= ٣ \text{ لو}_هـ |س| - ٥ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\int (٥ س - ٣)^٧\, ء س$

$= \frac{(٥ س - ٣)^٨}{٥ \times ٨} + ث$

$\int (٣ س - ٤)^٩\, ء س$

$= \frac{(٣ س - ٤)^{١٠}}{٣ \times ١٠} + ث$

$\int س^٢ (٥ - س^٣)^٧\, ء س$

$= \frac{(٥ - س^٣)^٨}{٨} + ث$

$\int (س - ٥)(س^٢ - ١٠ س + ٣)^٧\, ء س$

$= \frac{(س^٢ - ١٠ س + ٣)^٨}{٨} + ث$

• تدريب

$\int هـ^{٣س}\, ء س = \frac{١}{٣} هـ^{٣س} + ث$

$\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}\, ء س$

$= \int (\frac{١}{٢} هـ^{س} + \frac{١}{٢} هـ^{-س})\, ء س$

$= \frac{١}{٢} (هـ^{س} - هـ^{-س}) + ث$

$\int \frac{٢ هـ^{س} - ٣ هـ^{-س}}{هـ^{-س}}\, ء س$

$= \int (٢ هـ^{٢س} - ٣)\, ء س$

$= هـ^{٢س} - ٣ س + ث$

$\int (س^{هـ} + هـ^{س})\, ء س$

$= \frac{س^{هـ + ١}}{هـ + ١} + هـ^{س} + ث$

$\int جا س\, هـ^{جتا س}\, ء س$

$= - \int - جا س\, هـ^{جتا س}\, ء س$

$= - هـ^{جتا س} + ث$

$\int س\, هـ^{١ + س^٢}\, ء س = \frac{١}{٢} \int ٢ س\, هـ^{١ + س^٢}\, ء س$

$= \frac{١}{٢} هـ^{١ + س^٢} + ث$

$\int \frac{١}{س}\, ء س = \text{لو}_هـ |س| + ث$

$\int \frac{٧}{\text{لو}_هـ ٣ \, س}\, ء س = \frac{٧}{\text{لو}_هـ ٣} \int \frac{١}{س}\, ء س$

$= \frac{٧}{\text{لو}_هـ ٣} \text{لو}_هـ |س| + ث$

$\int (٣ س^٢ + \frac{٥}{س})\, ء س$

$= \int (٣ س^٢ + ٥ \times \frac{١}{س})\, ء س$

$= س^٣ + ٥ \text{ لو}_هـ |س| + ث$

$\int \frac{\text{لو}_هـ س^٣}{س \text{ لو}_هـ س}\, ء س$

$= \int \frac{٣ \text{ لو}_هـ س}{س \text{ لو}_هـ س}\, ء س$

$= \int \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{س}\, ء س$

$= \frac{٣}{٢} \text{ لو}_هـ |س| + ث$

$\int (\frac{س}{هـ} + \frac{هـ}{س})\, ء س$

$= \int (\frac{١}{هـ} س + هـ \times \frac{١}{س})\, ء س$

$= \frac{س^٢}{٢هـ} + هـ \text{ لو}_هـ |س| + ث$

$\int \frac{٤}{٢ س + ١}\, ء س = ٢ \int \frac{٢}{٢ س + ١}\, ء س$

$= ٢ \text{ لو}_هـ |٢ س + ١| + ث$

$\int \frac{٣ س^٢ + ٣}{س^٣ + ٣ س - ٥}\, ء س$

$= \text{لو}_هـ |س^٣ + ٣ س - ٥| + ث$

$\int ظا س\, ء س$

$= \int \frac{جا س}{جتا س}\, ء س$

$= - \int \frac{- جا س}{جتا س}\, ء س$

$= - \text{لو}_هـ |جتا س| + ث$

$= \text{لو}_هـ |قا س| + ث$

تذكر أن

$جتا س = \frac{١}{قا س}$

$جا س = \frac{١}{قتا س}$

$\int \frac{(س - ٣)^٢}{س}\, ء س$

$\int \frac{س^٢ - ٦ س + ٩}{س}\, ء س$

$\int (\frac{س^٢}{س} - \frac{٦ س}{س} + \frac{٩}{س})\, ء س$

$\int (س - ٦ + ٩ \times \frac{١}{س})\, ء س$

$= \frac{س^٢}{٢} - ٦ س + ٩ \text{ لو}_هـ |س| + ث$

① $\int ٣ س\, هـ^{س^٢}\, ء س = \text{-----}$

Ⓐ $\frac{٣}{٢} هـ^{س^٢} + ث$ Ⓑ $هـ^{س^٢} + ث$

Ⓒ $٣ هـ^{س^٢} + ث$ Ⓓ $٢ هـ^{س^٢} + ث$

② $\int ظا هـ\, ء هـ = \text{-----}$

Ⓐ $- \text{لو}_هـ |جتا هـ| + ث$ Ⓑ $- \text{لو}_هـ جتا هـ + ث$

Ⓒ $\text{لو}_هـ جتا هـ + ث$ Ⓓ $\text{لو}_هـ |جتا هـ| + ث$

③ في الشكل المقابل المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٢) وميل المماس عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $٢ هـ^{٢س}$ ، د(٠) = ٢ فإن د(س) = -----

Ⓐ ١ Ⓑ $هـ^{٢س}$ Ⓒ $٢ هـ^{٢س}$ Ⓓ $٢ هـ$

④ إذا كانت د(س) = $\frac{١}{٢} [هـ^{س} + هـ^{-س}]$ ، د(٠) = ١ ، د َ(٠) = ٠ فإن د(س) = -----

Ⓐ $-$ د(س) Ⓑ د(س)

Ⓒ $-$ د َ(س) Ⓓ د َ(س)

• تذكر:

١) ∫ جا ٢س ء س = $-\frac{1}{2}$ جتا ٢س + ث
٢) ∫ جتا ٢س ء س = $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث
٣) ∫ قا² ٢س ء س = $\frac{1}{2}$ ظا ٢س + ث
٤) ∫ قتا² ٢س ء س = $-\frac{1}{2}$ ظتا ٢س + ث
٥) ∫ قا س ظا س ء س = قا س + ث
٦) ∫ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

• تذكر:

١) جا²س + جتا²س = ١
٢) جا ٢س = ٢ جا س جتا س
٣) ١ + ظا²س = قا²س
٤) ١ + ظتا²س = قتا²س
٥) جتا ٢س = جتا²س − جا²س
٦) جتا ٢س = ٢ جتا²س − ١
∴ جتا²س = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا ٢س
٧) جتا ٢س = ١ − ٢ جا²س
∴ جا²س = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س

• أوجد:

١) ∫ قا س (قا س − ظا س) ء س
= ∫ (قا²س − قا س ظا س) ء س
= ظا س − قا س + ث

٢) ∫ $\frac{1}{1 - جتا^2 س}$ ء س
= ∫ $\frac{1}{جا^2 س}$ ء س
= ∫ قتا²س ء س
= − ظتا س + ث

٣) ∫ ٥ ظا ٥س قا ٥س ء س
= $\frac{1}{5}$ قا ٥س + ث

أهم أفكار في التفاضل والتكامل

• إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) معطى بالعلاقة $\frac{ءص}{ءس}$ = جا س جتا س أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{4}$، ١)

الحل

∫ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ جا س جتا س
∫ ءص = ∫ جا س جتا س ء س
ص = $\frac{1}{2}$ ∫ ٢ جا س جتا س ء س
ص = $\frac{1}{2}$ ∫ جا ٢س ء س
ص = $\frac{1}{2}$ × $-\frac{1}{2}$ جتا ٢س + ث
ص = $-\frac{1}{4}$ جتا ٢س + ث
١ = $-\frac{1}{4}$ جتا (٢ × $\frac{\pi}{4}$) + ث
١ = − [illegible] + ث
∴ ث = ١ + [illegible] = [illegible]
∴ معادلة المنحنى هي
ص = $-\frac{1}{4}$ جتا ٢س + [illegible]

• إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = قتا²س ، ص = ٣ عند س = $\frac{\pi}{4}$ فإن ص = ...

(أ) −٢ − ظتا س (ب) ٢ − ظتا س
(ج) −٣ − ظتا س (د) ٤ − ظتا س

• ∫ ٢ جتا²س ء س = ...

(أ) س + $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث (ب) س + جا ٢س + ث
(ج) س − $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث (د) س − جا ٢س + ث

• ∫ قا²س ظا س ء س = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ قا²س + ث (ب) $\frac{1}{2}$ قتا²س + ث
(ج) $\frac{1}{2}$ ظا²س + ث (د) $\frac{1}{3}$ ظا³س + ث

• ∫ (٣س + ٤) جا س ء س = ...

(أ) (٣س + ٤) جتا س + ٣ جا س + ث
(ب) −(٣س + ٤) جتا س + ٣ جا س + ث
(ج) (٣س + ٤) جتا س + ٤ جا س + ث
(د) −(٣س + ٤) جتا س − ٣ جا س + ث

• تذكر:

١) $\int_{ب}^{أ}$ د(س) ء س = $-\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س
٢) $\int_{أ}^{أ}$ د(س) ء س = صفر
٣) $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = $\int_{أ}^{جـ}$ د(س) ء س + $\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ء س

• إذا كانت د متصلة على ح ، $\int_{1}$ د(س) ء س = ٦ ، $\int$ د(س) = −١٤
أوجد $\int_{1}$ د(س) ء س

الحل

$\int_{1}$ د(س) ء س = $\int_{1}$ د(س) ء س + $\int$ د(س) ء س
= ٦ + −(−١٤) = ٢٠

• إذا كانت د متصلة على ح ، $\int_{2}$ د(س) ء س = ٢٥٥ ، $\int$ د(س) ء س = −١٥
أوجد $\int_{2}$ د(س) ء س

الحل

$\int_{2}$ د(س) ء س = $\int_{2}$ د(س) ء س + $\int$ د(س) ء س
٢٥٥ = ١٥ + $\int_{2}$ د(س) ء س
∴ $\int_{2}$ د(س) ء س = ٢٥٥ − ١٥
= ٢٤٠

• أوجد $\int_{0}^{5}$ |س − ٣| ء س

الحل

|س − ٣| = { س − ٣ ، س ≥ ٣ ؛ ٣ − س ، س < ٣ }

∴ $\int_{0}^{5}$ |س − ٣| = $\int_{0}^{3}$ (٣ − س) ء س + $\int_{3}^{5}$ (س − ٣) ء س
= $[٣س - \frac{س^2}{2}]_{0}^{3}$ + $[\frac{س^2}{2} - ٣س]_{3}^{5}$
= (٩ − $\frac{9}{2}$) + ($\frac{25}{2}$ − ١٥ − $\frac{9}{2}$ + ٩)
= $\frac{13}{2}$

أوجد:

١) $\int س^{3} (2س^{4} - 7)^{5} \, ءس$

الحل

$ع = 2س^{4} - 7$

$ءع = 8س^{3} \, ءس$

$\int س^{3} (2س^{4} - 7)^{5} \, ءس$

$= \int \frac{1}{8} ع^{5} \, ءع$

$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} ع^{6} + ث$

$= \frac{1}{48} (2س^{4} - 7)^{6} + ث$

٢) $\int \frac{س + 4}{(س^{2} + 8س)^{3}} \, ءس$

الحل

$ع = س^{2} + 8س$

$ءع = (2س + 8) \, ءس$

$ءع = 2(س + 4) \, ءس$

$\int \frac{س + 4}{(س^{2} + 8س)^{3}} \, ءس$

$= \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{ع^{3}} \, ءع$

$= \int \frac{1}{2} ع^{-3} \, ءع$

$= \frac{1}{2} \times \frac{ع^{-2}}{-2} + ث$

$= \frac{-1}{4(س^{2} + 8س)^{2}} + ث$

أوجد:

$\int (2 - س) هـ^{(4س - س^{2})} \, ءس$

$= \frac{1}{2} \int (4 - 2س) هـ^{(4س - س^{2})} \, ءس$

$= \frac{1}{2} هـ^{(4س - س^{2})} + ث$

$\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س} \, ءس$

$= \int \frac{1}{س} (لو_{هـ} س)^{\frac{1}{2}} \, ءس$

$= \frac{2}{3} (لو_{هـ} س)^{\frac{3}{2}} + ث$

أوجد:

١) $\int س \, هـ^{س} \, ءس$

الحل

التكامل بالتجزئ

$ص = س \qquad ءع = هـ^{س} \, ءس$

$ءص = ءس \qquad ع = هـ^{س}$

$\int س \, هـ^{س} \, ءس = س \, هـ^{س} - \int هـ^{س} \, ءس$

$= س \, هـ^{س} - هـ^{س} + ث$

٢) $\int لو_{هـ} س \, ءس$

الحل

$ص = لو_{هـ} س \qquad ءع = ءس$

$ءص = \frac{1}{س} \, ءس \qquad ع = س$

$\int لو_{هـ} س \, ءس = س \, لو_{هـ} س - \int س \times \frac{1}{س} \, ءس$

$= س \, لو_{هـ} س - \int ءس$

$= س \, لو_{هـ} س - س + ث$

٣) $\int س \, لو_{هـ} س \, ءس$

الحل

$ص = لو_{هـ} س \qquad ءع = س \, ءس$

$ءص = \frac{1}{س} \, ءس \qquad ع = \frac{1}{2} س^{2}$

$\int س \, لو_{هـ} س \, ءس = \frac{1}{2} س^{2} \, لو_{هـ} س - \int \frac{1}{2} س^{2} \times \frac{1}{س} \, ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} \, لو_{هـ} س - \frac{1}{2} \int س \, ءس$

$= \frac{1}{2} س^{2} \, لو_{هـ} س - \frac{1}{4} س^{2} + ث$

• $\int س (س^{2} + 3)^{2} \, ءس$ يساوي .....

(أ) $\frac{1}{3} (س^{2} + 3)^{3} + ث$ (ب) $\frac{1}{6} (س^{2} + 3)^{3} + ث$

(ج) $\frac{1}{2} (س^{2} + 3)^{3} + ث$ (د) $\frac{1}{4} (س^{2} + 3)^{4} + ث$

• أوجد: $\int \frac{س \, هـ^{س}}{(س + 1)^{2}} \, ءس$

الحل

بالتجزئ

$ص = س \, هـ^{س} \qquad ءع = (س + 1)^{-2} \, ءس$

$ءص = (س \, هـ^{س} + هـ^{س}) \, ءس \qquad ع = \frac{(س + 1)^{-1}}{-1}$

$\int \frac{س \, هـ^{س}}{(س + 1)^{2}} \, ءس$

$= \frac{-س \, هـ^{س}}{س + 1} - \int \frac{-1}{س + 1} \times هـ^{س}(س + 1) \, ءس$

$= \frac{-س \, هـ^{س}}{س + 1} + \int هـ^{س} \, ءس$

$= \frac{-س \, هـ^{س}}{س + 1} + هـ^{س} + ث$

• إذا كان $\int (2س + 3) \, لو_{هـ} س \, ءس = ص ع - \int ع \, ءص$ فإن ع = ...

(أ) $2 \, لو_{هـ} س$ (ب) $\frac{1}{2} \, لو_{هـ}(2س + 3)$

(ج) $لو_{هـ}(2س + 3)$ (د) $س(س + 3) \, لو_{هـ}$

الحل

$ص = لو_{هـ} س \qquad ءع = (2س + 3) \, ءس$

$ءص = \frac{1}{س} \, ءس \qquad ع = س^{2} + 3س$

$= (س^{2} + 3س) \, لو_{هـ} س - \int (س^{2} + 3س) \times \frac{1}{س} \, ءس$

• إذا كان $\int (2س - 1) \, هـ^{2س + 3} \, ءس = ص ع - \int ع \, ءص$ فإن $\int ع \, ءص$ = ...

(أ) $هـ^{2س + 3} + ث$

(ب) $\frac{1}{2} هـ^{2س + 3} + ث$

(ج) $- هـ^{2س + 3} + ث$

(د) $-\frac{1}{2} هـ^{2س + 3} + ث$

• المساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات

$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

• أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $د(س) = ٣س^٢ + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $س = -١$ ، $س = ٢$

الحل

فوق محور السينات

$م = \int_{-١}^{٢} (٣س^٢ + ١)\, ءس$

$= \left[س^٣ + س\right]_{-١}^{٢}$

$= (٨ + ٢) - (-١ - ١)$

$= ١٢$ وحدة مساحة

• أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $د(س) = \sqrt[٣]{٢س + ٢}$ والمستقيم $س = ٣$ ومحور السينات

الحل

$د(س) = ٠$

$\sqrt[٣]{٢س + ٢} = ٠$

$٢س + ٢ = ٠$

$س = -١$

$م = \int_{-١}^{٣} \sqrt[٣]{٢س + ٢}\, ءس$

$= \int_{-١}^{٣} (٢س + ٢)^{\frac{١}{٣}}\, ءس$

$= \left[\frac{٣}{٤} \frac{(٢س + ٢)^{\frac{٤}{٣}}}{٢}\right]_{-١}^{٣}$

$= \frac{٣}{٨}\left[٨^{\frac{٤}{٣}} - ٠\right] = ٦$ وحدة مساحة

• أوجد $\int س(٢س - ١)^٥\, ءس$

الحل

$ع = ٢س - ١$ ، $س = \frac{١}{٢}ع + \frac{١}{٢}$ ، $ءس = \frac{١}{٢}\, ءع$

$= \int (\frac{١}{٢}ع + \frac{١}{٢})\, ع^٥ \times \frac{١}{٢}\, ءع$

$= \int (\frac{١}{٤}ع^٦ + \frac{١}{٤}ع^٥)\, ءع$

$= \frac{١}{٢٨}ع^٧ + \frac{١}{٢٤}ع^٦ + ث$

$= \frac{١}{٢٨}(٢س - ١)^٧ + \frac{١}{٢٤}(٢س - ١)^٦ + ث$

• $\int_{-٢}^{٢} ٣س|س - ٤|\, ءس = \text{-----}$

(أ) -٢١ (ب) -٢٠ (ج) ٢٠ (د) ٢٧

• مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

$ص = د(س)$ ، $ص = ر(س)$

١ ← التقاطع ٢ ← تحديد الأعلى

$م = \int_{أ}^{ب} \left[د(س) - ر(س)\right]\, ءس$

• أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث

$د(س) = س^٢ - ٣$ ، $ر(س) = ٣ - (س + ١)^٢$

الحل

$د(س) = ر(س)$

$س^٢ - ٣ = ٣ - (س^٢ + ٢س + ١)$

$س^٢ - ٣ = ٣ - س^٢ - ٢س - ١$

$٢س^٢ + ٢س - ٤ = ٠$ ÷ ٢

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = -٢$ ، $س = ١$

$ر(٠) = ٢$ ← الأعلى

$د(٠) = -٣$

$م = \int_{-٢}^{١} \left[(٣ - (س + ١)^٢) - (س^٢ - ٣)\right]\, ءس$

$= \int_{-٢}^{١} \left[٣ - س^٢ - ٢س - ١ - س^٢ + ٣\right]\, ءس$

$= \int_{-٢}^{١} (٤ - ٢س^٢ - ٢س)\, ءس$

$= \left[٤س - \frac{٢س^٣}{٣} - س^٢\right]_{-٢}^{١}$

$= \left[٤ - \frac{٢}{٣} - ١\right] - \left[-٨ + \frac{١٦}{٣} - ٤\right]$

$= ٩$ وحدة مساحة

• أوجد $\int ٤س\, هـ^{٢س}\, ءس$

الحل

$ص = ٤س$ ، $ءع = هـ^{٢س}\, ءس$

$ءص = ٤\, ءس$ ، $ع = \frac{١}{٢} هـ^{٢س}$

$\int ٤س\, هـ^{٢س}\, ءس$

$= ٤س \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} - \int ٤ \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س}\, ءس$

$= ٢س\, هـ^{٢س} - هـ^{٢س} + ث$

• أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $ص = س^٢$ ، $ص = ٦س - س^٢$

الحل

$س^٢ = ٦س - س^٢$

$٢س^٢ - ٦س = ٠$

$٢س(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

$ص_١(١) = ١$ ، $ص_٢(١) = ٥$

$م = \int_{٠}^{٣} \left((٦س - س^٢) - س^٢\right)\, ءس$

$= \int_{٠}^{٣} (٦س - ٢س^٢)\, ءس$

$= \left[٣س^٢ - \frac{٢}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$= ٢٧ - ١٨ = ٩$ وحدة مساحة

• أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $ص - س = ٠$ ، $ص = ٤س - س^٢$

الحل

$ص = س$ ، $ص = ٤س - س^٢$

$س = ٤س - س^٢$

$س^٢ - ٣س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

$ص_٢(١) = ٣$ ، $ص_١(١) = ١$

$م = \int_{٠}^{٣} (٤س - س^٢ - س)\, ءس$

$= \int_{٠}^{٣} (٣س - س^٢)\, ءس$

$= \left[\frac{٣}{٢}س^٢ - \frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{٢٧}{٢} - ٩ = ٤{,}٥$ وحدة مساحة

• أوجد $\int (١ - س^٢)(٣س - س^٣)^٥\, ءس$

الحل

$= \frac{١}{٣}\int (٣ - ٣س^٢)(٣س - س^٣)^٥\, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣س - س^٣)^٦}{٦} + ث$

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة د حيث د : [-٤ ، ٢] ← ح حيث د(س) = س^٣ - ٤ س ومحور السينات وتقع أسفل محور السينات

الحل

د(س) = ٠

س^٣ - ٤ س = ٠

س(س^٢ - ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ±٢

م = $\int_{-2}^{0}$ (س^٣ - ٤ س) ء س - $\int_{0}^{2}$ (س^٣ - ٤ س) ء س

= [¼ س^٤ - ٢ س^٢] + [¼ س^٤ - ٢ س^٢]

= ...

= ... وحدة مساحة

• $\int$ قا س (قا س ظا س) ء س = ...

ⓐ ... ⓑ ... ⓒ ... ⓓ ...

• $\int$ ... ء س

ⓐ ... ⓑ ... ⓒ ... ⓓ ...

• $\int$ (٢ - ١ س) ء س = ...

ⓐ ١ ⓑ ٢ ⓒ ١ ⓓ صفر

• مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = ... ومحور السينات = ... وحدة مربعة

ⓐ ٢ ⓑ ٤ ⓒ ... ⓓ ...

• إذا كان $\int$ د(س) ء س = ٥ ، $\int$ د(س) = ٧ فإن $\int$ [٢ د(س) + ٣] ء س = ...

ⓐ -٢٠ ⓑ -٧ ⓒ ١٢ ⓓ ١٩

• إذا كانت د(س) = { ٣ + ٢ س - س^٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٣ - ٢ س - س^٢ ، س < ٠ }

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية

الحل

د′(س) = { ٢ - ٢ س ، س > ٠ ؛ -٢ - ٢ س ، س < ٠ }

د′(٠) غير موجودة

∴ الدالة لها قيمة عظمى محلية عند س = -١

هي د(-١) = ٣ + ٢(-١) - (-١)^٢ = ...

والدالة لها قيمة عظمى محلية عند س = ١

هي د(١) = ٣ + ٢ - ١ = ...

$\int$ د(س) ء س = $\int$ (...) ء س + $\int$ (...) ء س

= [...] + [...]

= ...

• أوجد $\int$ س^٢ لو س^٣ ء س

الحل

ص = لو س^٣ ، ء ع = س^٢ ء س

ء ص = ٣/س ء س ، ع = ⅓ س^٣

$\int$ س^٢ لو س^٣ ء س = ⅓ س^٣ لو س^٣ - $\int$ ... س^٢ ء س

= ⅓ س^٣ لو س^٣ - ... س^٣ + ث

• أكبر قيمة للمقدار ... س - س^٢ ، س ∈ ح هي ....

ⓐ ٨ ⓑ ١٦ ⓒ ٣٢ ⓓ ٦٤

• إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه يساوي ... وكان المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) فإن د(...) = ...

ⓐ ٢ ⓑ ٢ ⓒ ... ⓓ ...

• إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int$ د(س) ء س = ٩ ، $\int$ د(س) ء س = ٧ فإن $\int$ د(س) ء س = ...

ⓐ ٢ ⓑ ٩ ⓒ ١٦ ⓓ -٦٣

• إذا كانت الدالة د(س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س لها نقطة انقلاب عند (٣ ، ٢) أوجد قيمة أ ، ب ثم ارسم شكلاً عاماً للمنحنى

الحل

د(س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س ، (٣ ، ٢)

∴ ٢٧ + ٩ أ + ٣ ب = ٢

د′(س) = ٣ س^٢ + ٢ أ س + ب

د″(س) = ٦ س + ٢ أ

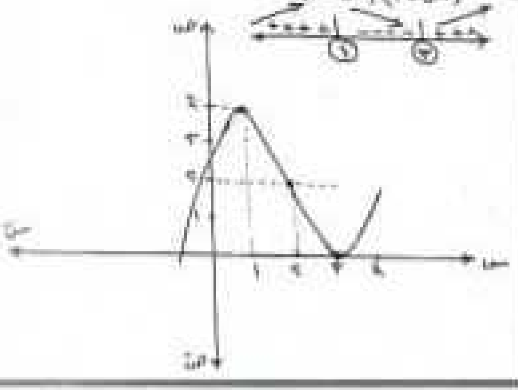
د″(٣) = ٠ ∴ ١٨ + ٢ أ = ٠

أ = -٩

٢٧ - ٨١ + ٣ ب = ٢

ب = ...

د′(س) = ٣ س^٢ - ١٨ س + ...



[illegible] في التفاضل والتكامل

• حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة حول محور السينات

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^2 \, ءس$$

• أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين $س = -1$ ، $س = 1$ دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن $د(س) = س^2 + 1$

الحل

$$ح = \pi \int_{-1}^{1} [س^2 + 1]^2 \, ءس$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (س^4 + 2س^2 + 1) \, ءس$$

$$= \pi \left[\frac{س^5}{5} + \frac{2}{3}س^3 + س \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right) \right]$$

$$= \frac{56}{15}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

• (٢٠١١) احسب حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^2$ والمستقيمين $ص = 0$ ، $ص = 1$ دورة كاملة حول محور السينات [illegible]

الحل

$ص_1 = 1$ ، $ص_2 = س^2$

$$ح = \pi \int_{0}^{1} (ص_1^2 - ص_2^2) \, ءس$$

$$= \pi \int_{0}^{1} [(1)^2 - (س^2)^2] \, ءس$$

$$= \pi \int_{0}^{1} [1 - س^4] \, ءس$$

$$= \pi \left[س - \frac{س^5}{5} \right]_{0}^{1} = \frac{4}{5}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

$\therefore$ [illegible]

• إذا كانت $\int د(س) \, ءس = 7$ ، $\int د(س) \, ءس = [illegible]$ فإن $\int [د(س) + [illegible]] \, ءس = \dots\dots$

(أ) ١٨ (ب) −٢ (ج) ١٠ (د) ١٤

• مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات $ص = [illegible]$ ، $ص = 0$ ، $س = 1$ تساوي ......

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) $\frac{9}{2}$ (د) ٦

• حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة حول محور الصادات

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} س^2 \, ءص$$

• أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^2 + 1$ ومحور الصادات والمستقيم $ص = 5$ دورة كاملة حول محور الصادات

الحل

نضع $س = 0$ ، $ص = 0 + 1$ ، $ص = 1$

$$ح = \pi \int_{1}^{5} (ص - 1) \, ءص$$

$$= \pi \left[\frac{ص^2}{2} - ص \right]_{1}^{5}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \right]$$

$$= 8\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

• أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = 4 - س^2$ والجزء الموجب من محوري الإحداثيات دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$$ح = \pi \int ص^2 \, ءس$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (4 - س^2)^2 \, ءس$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (16 - 8س^2 + س^4) \, ءس$$

$$= \pi \left[16س - \frac{8}{3}س^3 + \frac{س^5}{5} \right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{256}{15}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

• مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = 3س^2$ والمستقيمات $ص = 0$ ، $س = 2$ تساوي ......

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٦ (د) ٨

• إذا كانت د متصلة على ح ، $\int د(س) \, ءس = 7$ ، $\int د(س) \, ءس = 11$ فإن $\int د(س) \, ءس = \dots\dots$

(أ) −٤ (ب) ١٨ (ج) −١٨ (د) ٧٧

• $\int (س - 1) \, ءس = \dots\dots$

(أ) −٦ (ب) ٠ (ج) ٦ (د) ٨

• حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بالمنحنيين $ص = د(س)$ ، $ص = ر(س)$ دورة كاملة حول

① محور السينات

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} \left([د(س)]^2 - [ر(س)]^2\right) ءس$$

② محور الصادات

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} (س_1^2 - س_2^2) \, ءص$$

• أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^2$ والمستقيم $ص = 2س$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$ص_1 = ص_2$

$س^2 = 2س$

$س^2 - 2س = 0$

$س(س - 2) = 0$

$س = 0$ ، $س = 2$

$ص_1(1) = 1$ ، $ص_2(1) = 2$

$$ح = \pi \int_{0}^{2} \left((2س)^2 - (س^2)^2\right) ءس$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (4س^2 - س^4) \, ءس$$

$$= \pi \left[\frac{4س^3}{3} - \frac{س^5}{5} \right]_{0}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) - 0 \right]$$

$$= \frac{64}{15}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \sqrt{س + 1}$ والمستقيمات $ص = 0$ ، $س = 0$ ، $س = 1$

(أ) π (ب) $\frac{3\pi}{2}$ (ج) 2π (د) $\frac{5\pi}{2}$

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $ص = \frac{2}{س}$ والمستقيمات $س = 1$ ، $س = 4$ ، $ص = 0$ دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) 2π (د) 3π

• أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = (س − ٣)² دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$\frac{٤}{س}$ = (س − ٣)²

٤ = س(س² − ٦س + ٩)

س³ − ٦س² + ٩س − ٤ = ٠

س³ − ٦س² + ٥س + ٤س − ٤ = ٠

س(س² − ٦س + ٥) + ٤(س − ١) = ٠

س(س − ١)(س − ٥) + ٤(س − ١) = ٠

(س − ١)[س(س − ٥) + ٤] = ٠

(س − ١)(س² − ٥س + ٤) = ٠

(س − ١)(س − ١)(س − ٤) = ٠

س = ١ ، س = ٤

∵ ص₁ > ص₂ في الفترة

∴ الحجم = π $\int_{١}^{٤}$ (ص₁² − ص₂²) دس

= π $\int_{١}^{٤}$ [($\frac{٤}{س}$)² − (س − ٣)⁴] دس

= π $\int_{١}^{٤}$ [١٦س⁻² − (س − ٣)⁴] دس

= π $[\frac{-١٦}{س} - \frac{١}{٥}(س - ٣)^٥]_{١}^{٤}$

= ٥,٤ π وحدة حجم

• أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٣) وميل المماس عند أي نقطة عليه هو $\frac{١}{س - ٣}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س - ٣}$

ص = $\int \frac{١}{س - ٣}$ دس

ص = لو_هـ |س − ٣| + ث (٤ ، ٣)

٣ = لو_هـ ١ + ث

∴ ث = ٣

∴ معادلة المنحنى

ص = لو_هـ |س − ٣| + ٣

• أوجد ∫ جاس جتا³س دس

الحل

= − ∫ − جاس جتا³س دس

= − ¼ جتا⁴س + ث

• مثلث قائم الزاوية ... طولا ضلعي القائمة ٦ سم ، ٣٠ سم ، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ½ سم/ث وطول الضلع الثاني يتناقص بمعدل ٢ سم/ث أوجد

١) معدل التزايد في مساحة المثلث بعد ٣ ثوانٍ

٢) الزمن الذي تتوقف بعده تزايد مساحة المثلث

الحل

١) م = ½ (٦ + ½ ن)(٣٠ − ٢ن)

= ½ (١٨٠ + ٣ن − ن²)

= ٩٠ + $\frac{٣}{٢}$ن − ½ ن²

$\frac{دم}{دن}$ = $\frac{٣}{٢}$ − ن

∴ $\frac{دم}{دن}$ = $\frac{٣}{٢}$ − ٣ = − ١ ½ سم²/ث

٢) $\frac{دم}{دن}$ = ٠ ∴ $\frac{٣}{٢}$ − ن = ٠ ∴ ن = ...

• أوجد ∫ س(س + ٤)⁴ دس

الحل

ع = س + ٤

س = ع − ٤

دس = دع

∫ س(س + ٤)⁴ دس

= ∫ (ع − ٤)(ع)⁴ دع

= ∫ (ع⁵ − ٤ع⁴) دع

= ⅙ ع⁶ − ⅘ ع⁵ + ث

= $\frac{١}{٣٠}$ ع⁵ [٥ع − ٢٤] + ث

= $\frac{١}{٣٠}$ (س + ٤)⁵ (٥س − ٤) + ث

• ∫ $\frac{١}{س(لو_هـ س)^٢}$ دس = ∫ $\frac{١}{س}$ (لو_هـ س)⁻² دس

= $\frac{(لو_هـ س)^{-١}}{-١}$ + ث = $\frac{-١}{لو_هـ س}$ + ث

① منحنى الدالة د حيث د(س) = س³ − ٣س² + ٩ محدب لأعلى في الفترة ...

①]−∞ ، ٠[●]−∞ ، ١[③]١ ، ∞[④]٣ ، ∞[

② $\int_{٠}^{\frac{π}{٢}}$ (جاس + جتاس) دس يساوي ...

① ٤ ● ٢ ③ صفر ④ π

③ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٣٦ - س^٢}$ ومحور السينات تساوي ...

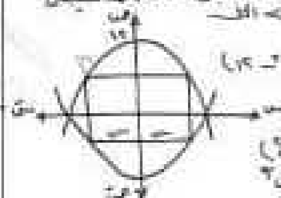
① ٣٦π ② ١٢π ● ١٨π ④ ٢٤π

④ إذا كانت د متصلة على ح ، $\int_{١}^{٣}$ د(س) دس = ٨ ، $\int_{٣}^{٥}$ د(س) دس = ... فإن $\int_{١}^{٥}$ د(س) دس = ...

① صفر ② ١ ③ ٣ ● ٥

• ارسم أكبر مستطيل يقع رأساه على المنحنى ص = س² − ١٢ والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ − س² أوجد أكبر مساحة للمستطيل

الحل



∵ البعد الرأسي

= ١٢ − س² − (س² − ١٢)

= ٢٤ − ٢س²

م = ٢س(٢٤ − ٢س²)

= ٤٨س − ٤س³

$\frac{دم}{دس}$ = ٤٨ − ١٢س²

∴ ٤٨ − ١٢س² = ٠

١٢س² = ٤٨

س² = ٤

س = ٢

∴ مساحة المستطيل = ٢س(٢٤ − ٢س²)

أكبر مساحة = ٢(٢)[٢٤ − ٢ × ٤]

= ٦٤ وحدة مساحة

• إذا كانت $\int_{١}^{٣}$ د(س) دس = ١٤ ، $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ١٦ فإن $\int_{١}^{٣}$ [د(س) − هـ(س)] دس يساوي ...

① −٣٠ ② −٢ ● ٢ ④ ٣٠

• إذا كانت د(س) = |س − ١| فإن $\int_{٠}^{٢}$ د(س) دس = ...

① −١ ② صفر ③ ٢ ④ ١

• مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س² ، ص = |س|

أ $٢\int_{0}^{1}$ (س² − س) ءس
ب $\int_{-1}^{1}$ (س − س²) ءس
ج $٢\int_{0}^{1}$ (س − س²) ءس
د $\int_{-1}^{1}$ (س − س²) ءس

• مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س³ والمستقيم ص = س تساوي ....

أ $\int_{0}^{1}$ (س³ − س) ءس
ب $٢\int_{-1}^{0}$ (س³ − س) ءس
ج $\int_{-1}^{1}$ (س − س³) ءس
د $٢\int_{0}^{1}$ (س − س³) ءس

• مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠ تساوي ....
أ ½   ب ١   ج ٢   د ٤

• مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س³ والمستقيمات ص = ٠ ، س = ٢ تساوي
أ ٨   ب ٤   ج ٢   د ١

• حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢√س ، ص = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات
أ ٠,٥π   ب صفر   ج π   د ٢π

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{1}{س}$ والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ دورة كاملة حول محور الصادات يساوي
أ $\frac{\pi}{4}$ ب $\frac{\pi}{2}$ ج π   د ٢π

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س² والمستقيم ص = ١ دورة كاملة حول محور الصادات
أ π   ب ½π   ج ¼π   د ٢π

آخر كلام في التفاضل والتكامل

• إذا كانت د(س) = ∫ (٣س² − ٤) ءس وكانت د(١) = ٣ فإن د(−١) = ...
أ −٦   ب −٣   ج ٧   د ١٩

• إذا كانت $\frac{ءص}{ءس}$ = س + $\frac{1}{س^2}$ وكانت ص = ½ عندما س = ١ فإن ص = ...
أ س² − $\frac{1}{س}$ ب $\frac{س^2 - 1}{س}$ ج $\frac{س^2 + 1}{2}$ د $\frac{س^2}{2}$ + ١

• ∫ ظا² س ءس يساوي ....
أ ظاس − س + ث   ب ظاس + س + ث
ج قا² س + ث   د ⅓ ظا³ س + ث

• إذا كان $\int_{2}^{3}$ د(س) ءس = ٤ فإن $\int_{2}^{3}$ [٢ د(س) − ١] ءس = ...
أ ٧   ب ١١   ج ١٢   د ٨ = ع

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص² = ٢س² ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣ دورة واحدة حول محور السينات يساوي ....
أ $\frac{٢٦\pi}{٥}$ ب $\frac{٢١١\pi}{٥}$ ج $\frac{٦٣٤\pi}{٥}$ د ٤π

• حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = قاس ، ص = ظاس والمستقيمين س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{4}$ دورة كاملة حول محور السينات
أ $\frac{\pi}{4}$ ب $\frac{\pi}{2}$ ج $\frac{\pi^2}{4}$ د ٢π

• إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = قتا² س ، ص = ٢ عندما س = $\frac{\pi}{4}$ فإن ص = ...
أ −(ظتاس + ٢)   ب −(قتاس + ٣)
ج ٢ − ظتاس   د ٣ − ظتاس

• ∫ قا⁴ س ظاس ءس يساوي ....
أ ¼ قا⁴ س + ث   ب ¼ قا⁴ س + ث
ج ¼ ظا⁴ س + ث   د −¼ ظا⁴ س + ث

• أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د(س) = س⁴ − ٤س³ في الفترة [٠ ، ٤]

الحل

د(س) = س⁴ − ٤س³
د َ(س) = ٤س³ − ١٢س²
٤س³ − ١٢س² = ٠
س²(٤س − ١٢) = ٠
س = ٠ ، س = ٣
د(٠) = صفر
د(٣) = −٢٧
د(٤) = صفر
∴ القيمة العظمى المطلقة = صفر
القيمة الصغرى المطلقة = −٢٧

• أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = $\frac{4}{س}$ ، ص = ٥ − س دورة كاملة حول محور السينات يساوي ٩π وحدة مكعبة

الحل

$\frac{4}{س}$ = ٥ − س
٤ = ٥س − س²
س² − ٥س + ٤ = ٠
(س − ١)(س − ٤) = ٠
س = ١ ، س = ٤

ص₁(٢) = ٢
ص₂(٢) = ٣

ح = π $\int_{1}^{4}$ [(٥ − س)² − ($\frac{4}{س}$)²] ءس
= π $\int_{1}^{4}$ (٢٥ − ١٠س + س² − $\frac{16}{س^2}$) ءس
= π $\int_{1}^{4}$ (٢٥ − ١٠س + س² − ١٦س⁻²) ءس
= π [٢٥س − ٥س² + $\frac{س^3}{3}$ + $\frac{16}{س}$]$_{1}^{4}$
= π [(١٠٠ − ٨٠ + $\frac{64}{3}$ + ٤) − (٢٥ − ٥ + ⅓ + ١٦)]
= π [٢٤ + $\frac{64}{3}$ − ٣٦ − ⅓]
= ٩π وحدة مكعبة

- [illegible]

$\int س^2 هـ^{-س} ءس$

الحل

$ص = س^2 \qquad ءع = هـ^{-س} ءس$

$ءص = ٢س ءس \qquad ع = -هـ^{-س}$

$\therefore \int = -س^2 هـ^{-س} + \int ٢س هـ^{-س} ءس$

$ص = ٢س \qquad ءع = هـ^{-س} ءس$

$ءص = ٢ ءس \qquad ع = -هـ^{-س}$

$\therefore \int = -س^2 هـ^{-س} - ٢س هـ^{-س} + \int ٢ هـ^{-س} ءس$

$= -س^2 هـ^{-س} - ٢س هـ^{-س} - ٢ هـ^{-س} + ث$

$= -هـ^{-س}[س^2 + ٢س + ٢] + ث$

$\int ٩س^2 هـ^{٣س} ءس$

الحل

$ص = ٩س^2 \qquad ءع = هـ^{٣س} ءس$

$ءص = ١٨س ءس \qquad ع = \frac{1}{3} هـ^{٣س}$

$\therefore \int = ٣س^2 هـ^{٣س} - \int ٦س هـ^{٣س} ءس$

$ص = ٦س \qquad ءع = هـ^{٣س} ءس$

$ءص = ٦ ءس \qquad ع = \frac{1}{3} هـ^{٣س}$

$\therefore \int = ٣س^2 هـ^{٣س} - ٢س هـ^{٣س} + \int ٢ هـ^{٣س} ءس$

$= ٣س^2 هـ^{٣س} - ٢س هـ^{٣س} + \frac{2}{3} هـ^{٣س} + ث$

$= هـ^{٣س}[٣س^2 - ٢س + \frac{2}{3}] + ث$

$\int \frac{(س+٣)^3 - ٢٧}{س} ءس$

الحل

$= \int \frac{[(س+٣) - ٣][(س+٣)^2 + ٣(س+٣) + ٩]}{س} ءس$

$= \int \frac{س[س^2 + ٦س + ٩ + ٣س + ٩ + ٩]}{س} ءس$

$= \int (س^2 + ٩س + ٢٧) ءس = \frac{1}{3}س^3 + \frac{9}{2}س^2 + ٢٧س + ث$

$\int \frac{س}{س^2 - ١} ءس$

الحل

$= \frac{1}{2} \int \frac{٢س}{س^2 - ١} ءس$

$= \frac{1}{2} لو|س^2 - ١| + ث$

$\int س جاس ءس$

الحل

$ص = س \qquad ءع = جاس ءس$

$ءص = ءس \qquad ع = -جتاس$

$\int س جاس ءس = -س جتاس + \int جتاس ءس$

$= -س جتاس + جاس + ث$

$\int \frac{٧س^2}{٢ - ٥س^3} ءس$

الحل

$= \frac{-٧}{١٥} \int \frac{-١٥س^2}{٢ - ٥س^3} ءس$

$= \frac{-٧}{١٥} لو|٢ - ٥س^3| + ث$

$\int (٣هـ^{٢س} + \frac{\pi}{س}) ءس$

$= \frac{3}{2} هـ^{٢س} + \pi لو|س| + ث$

$\int \frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣}} ءس$

الحل

$ع = س + ٣$

$س = ع - ٣$

$ءس = ءع$

$= \int \frac{ع - ٣ - ١}{ع^{\frac{1}{2}}} ءع$

$= \int (ع - ٤) ع^{-\frac{1}{2}} ءع$

$= \int (ع^{\frac{1}{2}} - ٤ع^{-\frac{1}{2}}) ءع$

$= \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}} - ٨ع^{\frac{1}{2}} + ث$

$= \frac{2}{3}(س+٣)^{\frac{3}{2}} - ٨(س+٣)^{\frac{1}{2}} + ث$

$\int (١ + جاس)^{\frac{1}{2}} جتاس ءس$

الحل

$= \int (١ + جاس)^{\frac{1}{2}} جتاس ءس$

$= \frac{2}{3}(١ + جاس)^{\frac{3}{2}} + ث$

- أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي $س\sqrt{س^2 + ١}$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = س\sqrt{س^2 + ١}$

$ءص = \int س\sqrt{س^2 + ١} ءس$

$ص = \frac{1}{2}\int ٢س(س^2 + ١)^{\frac{1}{2}} ءس$

$ص = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(س^2 + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

$ص = \frac{1}{3}(س^2 + ١)^{\frac{3}{2}} + ث \qquad (٠ ، ١)$

$١ = \frac{1}{3} + ث \qquad \therefore ث = \frac{2}{3}$

$\therefore$ معادلة المنحنى

$ص = \frac{1}{3}(س^2 + ١)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$

- أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi^2}{4} + ٩)$ والذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $٢س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}$

$ص = \int (٢س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}) ءس$

$ص = س^2 + ظا \frac{س}{2} + ث \qquad (\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi^2}{4} + ٩)$

$\therefore \frac{\pi^2}{4} + ٩ = \frac{\pi^2}{4} + ظا \frac{\pi}{4} + ث$

$٩ = ١ + ث$

$\therefore ث = ٨$

$\therefore$ معادلة المنحنى

$ص = س^2 + ظا \frac{س}{2} + ٨$

* أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص} + \text{س}^2 = 6$ ، $\text{ص} + 2\text{س} - 3 = 0$

الحل

$\text{ص}_1 = 6 - \text{س}^2$ $\quad$ $\text{ص}_2 = 3 - 2\text{س}$

$6 - \text{س}^2 = 3 - 2\text{س}$

$\text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$

$(\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$

$\text{س} = 3$ $\quad$ $\text{س} = -1$

$\text{ص}_1(0) = 6$ $\quad$ $\text{ص}_2(0) = 3$

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{3} [(6 - \text{س}^2) - (3 - 2\text{س})]\, \text{ء س}$

$= \int_{-1}^{3} (3 - \text{س}^2 + 2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \left[3\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{-1}^{3}$

$= \left[(9 - 9 + 9) - (-3 + \frac{1}{3} + 1)\right]$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

* أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات $\text{ص} = \text{س}^3 + 1$ ، $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 0$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$\text{ح} = \pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2\, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{1} (\text{س}^3 + 1)^2\, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{1} (\text{س}^6 + 2\text{س}^3 + 1)\, \text{ء س}$

$= \pi \left[\frac{1}{7}\text{س}^7 + \frac{2}{4}\text{س}^4 + \text{س}\right]_{0}^{1}$

$= \pi \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{4} + 1\right]$

$= \frac{23}{14}\pi$ وحدة حجم

* أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{س ص} = 2$ والمستقيمين $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 2$

الحل

$\text{ح} = \pi \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{\text{س}}\right)^2 \text{ء س}$

$= \pi \int_{1}^{2} (2\text{س}^{-1})^2\, \text{ء س}$

$= \pi \int_{1}^{2} 4\text{س}^{-2}\, \text{ء س}$

$= \pi \left[-4\text{س}^{-1}\right]_{1}^{2}$

$= \pi [-2 + 4] = 2\pi$ وحدة حجم

* أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $\text{ص} = \sqrt{2\text{س}}$ ، $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{س}^2$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$\text{ص}_1 = \text{ص}_2$

$\sqrt{2\text{س}} = \frac{1}{2}\text{س}^2$

$2\text{س} = \frac{1}{4}\text{س}^4$

$\text{س}^4 - 8\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س}^3 - 8) = 0$

$\text{س} = 0$ $\quad$ $\text{س} = 2$

$\text{ص}_1(1) = \sqrt{2}$ $\quad$ $\text{ص}_2(1) = \frac{1}{2}$

$\text{ح} = \pi \int_{0}^{2} \left[(\sqrt{2\text{س}})^2 - (\frac{1}{2}\text{س}^2)^2\right] \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{2} (2\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^4)\, \text{ء س}$

$= \pi \left[\text{س}^2 - \frac{1}{20}\text{س}^5\right]_{0}^{2}$

$= 2{,}4\,\pi$ وحدة مكعبة

* أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 1$ والمستقيمين $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$

الحل

$\sqrt{\text{ص}} = 1 - \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص} = 1 - 2\sqrt{\text{س}} + \text{س}$

عند $\text{س} = 0$ فإن $\text{ص} = 1$

عند $\text{ص} = 0$ فإن $\text{س} = 1$

$\therefore \text{م} = \int_{0}^{1} (1 - 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س})\, \text{ء س}$

$= \left[\text{س} - \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{6}$ وحدة مربعة

* أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - 2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[2 ، 4]$

الحل

$\text{م} = \int_{2}^{4} (\text{س} - 2)^3\, \text{ء س}$

$= \left[\frac{1}{4}(\text{س} - 2)^4\right]_{2}^{4}$

$= \frac{1}{4}[16 - 0] = 4$ وحدة مساحة

* أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنحنى $\text{ص} = \frac{1}{\text{س} - 1}$ والمستقيمين $\text{س} = 2$ ، $\text{س} = 4$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

$\text{ح} = \pi \int_{2}^{4} \left(\frac{1}{\text{س} - 1}\right)^2 \text{ء س}$

$= \pi \int_{2}^{4} (\text{س} - 1)^{-2}\, \text{ء س}$

$= \pi \left[-(\text{س} - 1)^{-1}\right]_{2}^{4}$

$= \pi \left[-\frac{1}{3} + 1\right]$

$= \frac{2}{3}\pi$