الوحدة الأولى : التباديل ، التوافيق ، ذات الحدين

⊛ مبدأ العد : (قاعدة الضرب) :

إذا كان عدد طرق إجراء عملية (م) ، عدد طرق إجراء عملية أخرى (ن)
فإن عدد طرق إجراء العملية الأولى و الثانية = م × ن

مثال كم عدد مكون من ثلاث أرقام مختلفة من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل عدد طرق رقم الآحاد = ٥
" " " العشرات = ٤
" " " المئات = ٣
∴ عدد طرق تكوين ٣ أرقام مختلفة = ٥×٤×٣ = ٦٠ عدد

⊛ مبدأ العد : (قاعدة الجمع) :

إذا كان عدد طرق إجراء عملية (م) ، عدد طرق إجراء عملية أخرى (ن)
فإن عدد طرق إجراء العملية الأولى أو العملية الثانية = م + ن

مثال فصل دراسي به ٩ أولاد ، ٦ بنات يراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس كم عدد الطرق.

الحل عدد طرق اختيار الأولاد فقط = ^{٩}ق$_{٤}$ = ١٢٦ طريقة
" " " بنات فقط = ^{٦}ق$_{٤}$ = ١٥ "
∴ عدد طرق اختيار الفريق = ١٢٦ + ١٥ = ١٤١ طريقة

مثال تحتوي ورقة امتحان على ٨ أسئلة وعلى الطالب ان يجيب على ٦ منها. بشرط ان تتضمن سؤالين على الأقل من الأربعة الأولى. فكم طريقة عليه إختيار الأسئلة.

الحل

عليه اختيار ② من الأربعة و ٤ من الباقي = $^{٤}\text{ق}_{٢} \times {}^{٤}\text{ق}_{٤} = ٦$

" " " ③ " " و ٣ " " = $^{٤}\text{ق}_{٣} \times {}^{٤}\text{ق}_{٣} = ١٦$

" " " ④ " " و ٢ " " = $^{٤}\text{ق}_{٤} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢} = ٦$

∴ عدد الطرق = ٦ + ١٦ + ٦ = ٢٨ طريقة

⊛ عدد طرق اختيار عينة مع الاحلال او بدون احلال :

① إذا كان الاختيار مع الإحلال والترتيب فإن عدد الطرق = $(\text{ن})^{\text{ر}}$

مثل عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

= $(٥)^{٢} = ٢٥$

② إذا كان الاختيار مع الإحلال وبدون ترتيب عدد الطرق = $^{\text{ن}+\text{ر}-١}\text{ق}_{\text{ر}}$

مثل عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق = $^{٤+٣-١}\text{ق}_{٣} = {}^{٦}\text{ق}_{٣} = ٢٠$

③ إذا كان الاختيار بدون إحلال مع الترتيب عدد الطرق = $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$

مثل عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ١٠ أماكن بالترتيب.

= $^{١٠}\text{ل}_{٤} = ٥٠٤٠$

④ إذا كان الاختيار بدون إحلال مع عدم الترتيب = $^{ن}ق_{ر}$

مثال عدد طرق اختيار ٥ أشخاص من ١٢ شخص = $^{١٢}ق_{٥}$ = ٧٩٢

أمثلة

① حقيبة بها ١٢ كرة حمراء، ٨ كرات بيضاء أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء، ٢ بيضاء في كل من الحالات الآتية:

① إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب

الحل

عدد الطرق = $(١٢)^{٣} \times (٨)^{٢}$ = ١١٠٥٩٢ طريقة

② إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

الحل

عدد الطرق = $^{١٢}ل_{٣} \times {}^{٨}ل_{٢}$ = ٧٣٩٢٠ طريقة

③ إذا كان السحب بدون إحلال وبدون ترتيب

الحل

عدد الطرق = $^{١٢}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٢}$

= ٦١٦٠ طريقة

② إذا كان س = {٢، ٣، ٤، ٥} ويفرض عدم تكرار أي رقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية:

① إذا كان العدد مكون من ٣ أرقام بالضبط

② " " " من ٣ أرقام على الأقل

③ " " " من ٣ أرقام على الأكثر

الحل

① $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤ عدد

② $^{٤}ل_{٣} + {}^{٤}ل_{٤}$ = ٤٨ عدد

③ $^{٤}ل_{٣} + {}^{٤}ل_{٢} + {}^{٤}ل_{١}$ = ٤٠ عدد

* التباديل :-

التبديل هو عدد الطرق المرتبة لأخذ ر من ن حيث ر ≤ ن

^nP_r ، ${}^{ن}ل_{ر}$

* قوانين التباديل :-

① ${}^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١) .... (ن-ر+١)$

لكل ن ≥ ر ، ن ∈ ص$^+$ ، ر ∈ ط

② ${}^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) ...... ٣×٢×١$

③ ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ لكل ن ≥ ر ، ن ∈ ص$^+$ ، ر ∈ ط

④ $\underline{|ن} = ن \, \underline{|ن-١} = ن(ن-١) \, \underline{|ن-٢}$

---

* التوافيق :

هو عدد المجموعات الممكنة لأخذ ر من ن حيث ر ≤ ن

^nC_r ، ${}^{ن}ق_{ر}$

* قوانين التوافيق :

① ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ لكل ن ∈ ص$^+$ ، ر ∈ ط ، ن ≥ ر

② ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\,\underline{|ر}}$ " " " "

② ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ (قانون التبسيط)

مثل ${}^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{٢}$

④ إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص} \longrightarrow ∴$ { إما $س = ص$ ، أو $س + ص = ن$ }

⑤ **قانون النسبة** : $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \dfrac{ن-(ر-١)}{ر} = \dfrac{ن-ر+١}{ر}$

مثل $\dfrac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}} = \dfrac{ن-٤}{٥}$

⑥ **قانون الجمع** : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

مثل ${}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٢} = {}^{ن+١}ق_{٤}$

أمثلة :-

① إذا كان ${}^{ن+١}ق_{٢} = ١٦٥$ ، ${}^{ن}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{ن}ق_{ر+٥}$ أوجد قيمة ${}^{ن+٢}ل_{٧ر+٢}$

الحل $∵ {}^{ن+١}ق_{٢} = ١٦٥ = {}^{١١}ق_{٢}$

$∴ ن + ١ = ١١$

$∴ ن = ١٠$

$∵ {}^{١٠}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{١٠}ق_{ر+٥}$

إما

$ر^٢ + ٢ر = ر + ٥$

$ر^٢ + ٢ر - ٥ = ٠$ مرفوضة

أو

$ر^٢ + ٢ر + ر + ٥ = ١٠$

$ر^٢ + ٤ر - ٥ = ٠$

$∴ ر = -٥$ مرفوضة أو $ر = ١$

$∴ {}^{ن+٢}ل_{٧ر+٢} = {}^{١٢}ل_{١٠}$

$= ٢٣٩٥٠٠٨٠٠$

② اثبت أن

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}}$$

ومن ذلك أوجد قيمة

$$\frac{{}^{١٧}\text{ق}_{٩} + {}^{١٧}\text{ق}_{٨}}{{}^{١٧}\text{ق}_{٨}}$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} + \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} + ١$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١+\text{ر}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}}$$

$$\therefore \frac{{}^{١٧}\text{ق}_{٩} + {}^{١٧}\text{ق}_{٨}}{{}^{١٧}\text{ق}_{٨}} = \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}}$$

$$= \frac{١٧+١}{٩}$$

= ②

② إذا كان

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} : {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+٢} = ٢:٣:٦$$

أوجد قيمة $\underline{|٢\text{ر}-\text{ن}}$

الحل

$$\because \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ن}-\text{ر}}{\text{ر}+١} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore ٢\text{ن} - ٢\text{ر} = ٣\text{ر} + ٣$$

$$\therefore ٢\text{ن} = ٥\text{ر} + ٢ \rightarrow ①$$

$$\because {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+٢} \div {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\therefore \frac{\underline{|\text{ن}+١}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ر}+٢}} \div \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ر}+١}} = ٢$$

$$\therefore \frac{(\text{ن}+١)\cancel{\underline{|\text{ن}}}}{\cancel{\underline{|\text{ن}-\text{ر}-١}}\times(\text{ر}+٢)\cancel{\underline{|\text{ر}+١}}} \times \frac{\cancel{\underline{|\text{ن}-\text{ر}-١}}\ \cancel{\underline{|\text{ر}+١}}}{\cancel{\underline{|\text{ن}}}} = ٢$$

$$\therefore \text{ن} + ١ = ٢\text{ر} + ٤$$

$$\therefore \text{ن} = ٢\text{ر} + ٢ \rightarrow ②$$

بالتعويض من ② في ①

$$\therefore ٢(٢\text{ر}+٢) = ٥\text{ر} + ٢$$

$$\therefore \boxed{\text{ر} = ٣} \quad \text{،} \quad \boxed{\text{ن} = ٩}$$

$$\therefore \underline{|٢\text{ر}-\text{ن}} = \underline{|٩-٩} = \underline{|٠} = ١$$

④ إذا كان $٤ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٦}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$

تكون متتابعة حسابية .

فما قيمة ن .

الحل

$\because$ المتتابعة حسابية

$$\therefore ٣ \times {}^{ن}ق_{٦} = \frac{(٤ \times {}^{ن}ق_{٥}) + (٣ \times {}^{ن}ق_{٧})}{٢}$$

$$\therefore ٦ \times {}^{ن}ق_{٦} = (٤ \times {}^{ن}ق_{٥}) + (٣ \times {}^{ن}ق_{٧})$$

بالقسمة ${}^{ن}ق_{٦}$

$$\therefore ٦ = ٤ \times \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٦}} + \left(\frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}} \times ٣\right)$$

$$\therefore ٦ = \left(٤ \times \frac{٦}{ن-٥}\right) + \left(٣ \times \frac{ن-٦}{٧}\right)$$

$$\therefore ٦ = \frac{٢٤}{ن-٥} + \frac{٣ن-١٨}{٧}$$

بالضرب $\times ٧ (ن - ٥)$

$$٤٢(ن-٥) = (٢٤ \times ٧) + (٣ن-١٨)(ن-٥)$$

$$٤٢ن - ٢١٠ = ١٦٨ + ٣ن^{٢} - ٣٣ن + ٩٠$$

$$\therefore ٣ن^{٢} - ٧٥ن + ٤٦٨ = ٠$$

$\therefore ن = ١٣$ ، $ن = ١٢$

⑤ اوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$٢ \underline{|٢ن} = (ن^{٢} + ٣ن + ٢)(\underline{|ن})^{٢}$$

الحل

$$\underline{|٢} \; \underline{|٢ن} = \left[(ن+٢)(ن+١)\underline{|ن}\right] \underline{|ن}$$

$$\underline{|٢} \; \underline{|٢ن} = \underline{|ن+٢} \; \underline{|ن}$$

$$\therefore \frac{\underline{|ن+٢}}{\underline{|٢}} = \frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}}$$

$${}^{ن+٢}ل_{ن} = {}^{٢ن}ل_{ن}$$

$$\therefore ن + ٢ = ٢ن$$

$$\therefore ن = ٢$$

$$\therefore م.ح = \{٢\}$$

⑥ اوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\underline{|٢ن} \; \underline{|ن-٣} = ٧٢ \; \underline{|٣ن-٧}$$

الحل

$$\frac{\underline{|٢ن} \; \underline{|ن-٣}}{(٣ن-٦)\underline{|٣ن-٧}} = \frac{٧٢}{(٣ن-٦)}$$

$$\frac{\underline{|٢ن} \; \underline{|ن-٣}}{\underline{|٣ن-٦}} = \frac{\overset{٢٤}{٧٢}}{٣(ن-٢)}$$

$$\therefore \frac{\underline{|٢ن} \times [(ن-٢)\underline{|ن-٣}]}{\underline{|٣ن-٦}} = \underline{|٤}$$

$$\therefore \underline{|٢ن} \times \underline{|ن-٢} = \underline{|٤} \times \underline{|٣ن-٦}$$

$$\therefore \frac{\underline{|٣ن-٦}}{\underline{|ن-٢}} = \frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|٤}}$$

$$\therefore {}^{٣ن-٦}ل_{٢ن-٤} = {}^{٢ن}ل_{٢ن-٤}$$

$$\therefore ٣ن - ٦ = ٢ن$$

$$\therefore ن = ٦$$

$$\therefore م.ح = \{٦\}$$

---

⑦ إذا كان

$$٢ = \frac{{}^{١٢}ق_ر + {}^{١٢}ق_{ر+١}}{{}^{١٢}ق_{ر-١} + {}^{١٢}ق_ر}$$

فما قيمة $\underline{\underline{ر}}$.

الحل

$$٢ = \frac{{}^{١٢+١}ق_{ر+١}}{{}^{١٢+١}ق_ر}$$

$$\therefore ٢ = \frac{{}^{١٤}ق_{ر+١}}{{}^{١٤}ق_ر}$$

$$\therefore \frac{١٤-ر}{ر+١} = ٢$$

$$٢ر + ٢ = ١٤ - ر$$

$$\therefore ر = ٤$$

---

⑧ اثبت أن

$$\frac{ن+١}{ر+١} = {}^{ن}ق_ر \div {}^{ن+١}ق_{ر+١}$$

ومن ذلك اوجد قيمة

$$\frac{{}^{١٥}ق_٥ + {}^{١٤}ق_٤}{{}^{١٤}ق_٤ + {}^{١٢}ق_٢}$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر}\,\underline{|ر+١}} \div \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\,\underline{|ر}}$$

$$= \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر}\,\underline{|ر+١}} \times \frac{\cancel{\underline{|ن-ر}}\,\underline{|ر}}{\underline{|ن}}$$

$$= \frac{(ن+١)\cancel{\underline{|ن}}}{(ر+١)\cancel{\underline{|ر}}} \times \frac{\underline{|ر}}{\underline{|ن}} = \frac{ن+١}{ر+١}$$

$= \text{الأيسر}$

المقدار [بقسمة البسط والمقام على ${}^{١٤}ق_٤$]

$$= \frac{\frac{{}^{١٥}ق_٥}{{}^{١٤}ق_٤} + ١}{\frac{{}^{١٢}ق_٢}{{}^{١٤}ق_٤} + ١}$$

$$= \frac{\frac{١٥}{٥} + ١}{\frac{٤}{١٤} + ١} = \frac{٢٨}{٩}$$

⑨ اوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه

(أ) ٦ أضلاع (ب) ٨ أضلاع

الحل

∵ عدد أقطار أى مضلع = عدد القطع المستقيمة − عدد الأضلاع

(أ) عدد الأقطار = ${}^{6}\text{ق}_{2} - 6$

= ٩ أقطار

(ب) " " = ${}^{8}\text{ق}_{2} - 8$

= ٢٠ قطر

---

⑩ يراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال و ٣ نساء:

(أ) اوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط

(جـ) " " " " " على الأقل

الحل

(أ) عدد الطرق = $({}^{9}\text{ق} \times {}^{3}\text{ق}_{3}) + ({}^{9}\text{ق}_{2} \times {}^{3}\text{ق}_{2})$

$+ ({}^{9}\text{ق}_{3} \times {}^{3}\text{ق}_{1}) + ({}^{9}\text{ق}_{4})$

= ٤٩٥ طريقة

(ب) عدد الطرق = ${}^{9}\text{ق}_{3} \times {}^{3}\text{ق}_{1}$

= ٢٥٢ طريقة

(جـ) عدد الطرق = $({}^{9}\text{ق}_{1} \times {}^{3}\text{ق}_{3}) + ({}^{9}\text{ق}_{2} \times {}^{3}\text{ق}_{2})$

$+ ({}^{9}\text{ق}_{3} \times {}^{3}\text{ق}_{1})$

= ٢٦٩ طريقة

---

⑪ اوجد قيمة كل من ن ، ر إذا كان

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1} = 1 : 5 : 15$

الحل

∵ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \dfrac{5}{1}$

∴ $\dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} = \dfrac{5}{1}$

$\text{ن} - \text{ر} + 1 = 5\,\text{ر}$

∴ $\text{ن} = 6\,\text{ر} - 1 \longleftarrow ①$

∵ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{15}{5} = 3$

∴ $\dfrac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + 1} = 3$

∴ $\text{ن} - \text{ر} = 3\,\text{ر} + 3$

$\text{ن} = 4\,\text{ر} + 3 \longleftarrow ②$

من ① ، ② ∴ $6\,\text{ر} - 1 = 4\,\text{ر} + 3$

∴ $2\,\text{ر} = 4$ ∴ $\boxed{\text{ر} = 2}$

بالتعويض فى ① ∴ $\text{ن} = 11$

* نظرية ذات الحدين :-

$\because (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$ (٣ حدود)

$\because (س + ص)^{٣} = س^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} + ص^{٣}$ (٤ حدود)

$$\therefore (س + ص)^{ن} = \overset{ح_{١}}{س^{ن}} + \overset{ح_{٢}}{\left[ن ق_{١} ص^{١} س^{ن-١}\right]} + \overset{ح_{٣}}{\left[ن ق_{٢} ص^{٢} س^{ن-٢}\right]} + \ldots\ldots + ص^{ن} \longrightarrow ح_{ن+١}$$

ملاحظة هامة :-

عدد حدود المفكوك $= ن + ١$

* الحد العام في مفكوك $(س + ص)^{ن}$:-

$$ح_{ر+١} = ن ق_{ر} \times (الثاني)^{ر} \times (الأول)^{ن-ر}$$

$$= ن ق_{ر} \times (ص)^{ر} \times (س)^{ن-ر}$$

أمثلة :-

① اوجد مفكوك $(٢ - أ)^{٤}$

الحل $(٢ - أ)^{٤} = \overset{ح_{١}}{(٢)^{٤}} - \overset{ح_{٢}}{\left[٤ ق_{١} أ^{١} (٢)^{٣}\right]} + \overset{ح_{٣}}{\left[٤ ق_{٢} أ^{٢} (٢)^{٢}\right]} - \overset{ح_{٤}}{\left[٤ ق_{٣} أ^{٣} (٢)^{١}\right]} + \overset{ح_{٥}}{أ^{٤}}$

$= ١٦ - ٣٢ أ + ٢٤ أ^{٢} - ٨ أ^{٣} + أ^{٤}$

② اوجد $ح_{٥}$ في مفكوك $(س + ٢ص)^{١٠}$ حسب قوى س المتنازلية

الحل $ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \, (٢ص)^{٤} (س)^{٦}$

$= ٣٣٦٠ ص^{٤} س^{٦}$

③ اوجد $ح_٩$ من النهاية في مفكوك $(س - \frac{٢}{س})^{١٢}$

الحل المفكوك $(\frac{٢}{س} - س)^{١٢}$

$\therefore ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ (-س)^٨ (\frac{٢}{س})^٤ = ٧٩٢٠ س^٤$

ملاحظة :-

* $(س+ص)^ن + (س-ص)^ن = ٢[ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + ...]$ حدود فردية الرتبة

* $(س+ص)^ن - (س-ص)^ن = ٢[ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ...]$ " " زوجية " "

مثال اوجد قيمة $(\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٢})^٤ + (\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢})^٤$

الحل المقدار $= ٢[ح_١ + ح_٣ + ح_٥]$

$= ٢[(\sqrt{٣})^٤ + ({}^٤ق_٢ (\sqrt{٣})^٢ (٢\sqrt{٢})^٢) + (٢\sqrt{٢})^٤]$

$= ٢[٩ + ١٤٤ + ٦٤] = ٤٢٤$

*** الحد الأوسط [أو الحدين الأوسطين] في مفكوك $(س+ص)^ن$:-**

① إذا كان ن عدد زوجي ← فإن عدد الحدود فردي

ويكون هناك حد أوسط رتبته $= \frac{ن}{٢} + ١$

② إذا كان ن عدد فردي ← فإن عدد الحدود زوجي

ويكون هناك حدين أوسطين رتبتهما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٢}{٢}$

مثال ① أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(أ + ٥ب)^{٧}$

الحل الحدين الأوسطين هما $ح_{٤}$، $ح_{٥}$

$ح_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}\,(٥ب)^{٣}\,(أ)^{٤} = ٤٣٧٥\,ب^{٣}\,أ^{٤}$

$ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٤}\,(٥ب)^{٤}\,(أ)^{٣} = ٢١٨٧٥\,ب^{٤}\,أ^{٣}$

② أوجد معامل الحد الذي يشتمل على $س^{٩}$ في مفكوك $س^{٥}\left(٢س + \frac{١}{٢س}\right)^{١٠}$

الحل

$ح_{ر+١} = س^{٥} \times {}^{١٠}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} \times (٢س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times (٢)^{١٠-٢ر} \times (س)^{١٥-٢ر}$

$\therefore ١٥ - ٢ر = ٩$ $\boxed{\therefore ر = ٣}$

$\therefore$ معامل $س^{٩} = {}^{١٠}ق_{٣} \times (٢)^{٤} = ١٩٢٠$

③ أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س في مفكوك $\left(٢س^{٣} - \frac{١}{٢س^{٤}}\right)^{٩}$

الحل

$\because ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \times \left(-\frac{١}{٢س^{٤}}\right)^{ر} \times (٢س^{٣})^{٩-ر}$

$= {}^{٩}ق_{ر} \times (-١)^{ر} \times (٢)^{٩-٢ر} \times (س)^{٢٧-٥ر}$

$\because$ الحد خالٍ من س

$\therefore ٢٧ - ٥ر = ٠$ $\therefore ر = \frac{٢٧}{٥}$

$\because ر \in ص^{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س

$\ast$ النسبة بين أي حد والحد السابق له مباشرة في مفكوك $(س + ص)^{ن}$:

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ص}{س} \quad \frac{(\text{الثاني})}{(\text{الأول})}$$

أمثلة ① أوجد $\frac{ح_{٧}}{ح_{٨}}$ في مفكوك $\left(س + \frac{١}{٣}س^{-١}\right)^{١٥}$

الحل $\because \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \left(\frac{١٥-٧+١}{٧}\right) \times \left(\frac{\frac{١}{٣}س^{-١}}{س}\right) = \frac{٣}{٧س^{٢}}$

$\therefore \frac{ح_{٧}}{ح_{٨}} = \frac{٧س^{٢}}{٣}$

② في مفكوك $\left(٣س\sqrt{س} - \frac{٢}{\sqrt{س}}\right)^{١٨}$

أوجد $\frac{\text{معامل الحد الأوسط}}{\text{معامل } ح_٩}$

الحل

ترتيب الحد الأوسط $= \frac{١٨}{٢} + ١ = ١٠$

∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_٩} = \left(\frac{١٨-٩+١}{٩}\right) \times \left(\frac{-٢}{\sqrt{س}} \times \frac{١}{٣س\sqrt{س}}\right)$

$= \frac{١٠}{٩} \times \frac{-٢}{٣س^٢}$

∴ $\frac{\text{معامل } ح_{١٠}}{\text{〃 } ح_٩} = \frac{-٢٠}{٢٧}$

الحل ∵ $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{ن-٦+١}{\cancel{٦}_{٢}} \times \frac{س}{١} = \frac{٢}{\cancel{٣}_{١}}$

∴ $(ن-٥) \times س = ٤ \longrightarrow$ ①

∵ $\frac{ح_٨}{ح_٧} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧}$

∴ $\left(\frac{ن-٧+١}{\cancel{٧}}\right) \times \frac{س}{١} = \frac{٣}{\cancel{٧}}$

∴ $(ن-٦) \times س = ٣ \longrightarrow$ ②

بالقسمة ∴ $\frac{ن-٥}{ن-٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\boxed{ن = ٩}$ ، $\boxed{س = ١}$

---

③ في مفكوك $(س+ص)^{ن+٤}$ إذا كان $\frac{ح_٣}{ح_٤}$ تساوي $\frac{ح_٢}{ح_٣}$ في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ فما قيمة ن

الحل

∵ $\frac{ح_٤}{ح_٣}$ في المفكوك الأول $= \frac{ح_٣}{ح_٢}$ في الثاني

∴ $\frac{ن+٤-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ن+٢}{٣} = \frac{ن-١}{٢}$

$\boxed{∴ ن = ٧}$

---

④ في مفكوك $(١+س)^{ن}$ إذا كان

$ح_٦ : ح_٧ : ح_٨ = ٢١ : ١٤ : ٦$

أوجد قيمتي ن ، س

---

⑤ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س إلى الحد السابق له في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س^٢}\right)^{١٢}$ كنسبة ٧ : ٣

فما قيمة س

الحل $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \times \left(\frac{١}{س^٢}\right)^{ر} \times (س)^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_ر \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} \times (س)^{١٢-٢ر}$

∴ $١٢ - ٢ر = ٠$ $\boxed{∴ ر = ٦}$

∴ $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{٧}{٣}$

∴ $\left(\frac{١٢-٦+١}{\cancel{٦}}\right) \times \left(\frac{١}{س} \times \frac{١}{س^٢}\right) = \frac{٧}{\cancel{٣}}$

∴ $٧ \times \frac{١}{٤س^٢} = ٧$

∴ $٤س^٢ = ١$ ∴ $س = \pm\frac{١}{٢}$

⑥ فى مفكوك $(٤س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٥}$ اوجد

① قيمة الحد الخالى من س

② قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

الحل

① ∴ $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_ر \times (\frac{١}{٢س})^ر \times (٤س^٢)^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_ر \times (\frac{١}{٢})^ر \times (٤)^{١٥-ر} \times (س)^{٣٠-٣ر}$

∴ $٣٠ - ٣ر = ٠$ $\boxed{∴ ر = ١٠}$

∴ $ح_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠} \times (\frac{١}{٢})^{١٠} \times (٤)^{٥} = ٣٠٠٣$

② الحدين الأوسطين هما $ح_٨$ ، $ح_٩$

∵ $ح_٩ = ح_٨$ معطى

∴ $\frac{ح_٩}{ح_٨} = ١$

∴ $\frac{١٥-٨+١}{٨} \times (\frac{١}{٢س} \times \frac{١}{٤س^٢}) = ١$

$\frac{١}{٨س^٣} = ١$ $\boxed{∴ س = \frac{١}{٢}}$

⑦ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاث حدود متتالية فى مفكوك $(١ + س)^ن$ هى ١ : ٢ : ٣ اوجد قيمة ن

الحل نفرض ان الحدود هى

$ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

∵ $\frac{معامل\ ح_{ر+١}}{معامل\ ح_ر} = \frac{٢}{١}$

∴ $\frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{١}{١} = ٢$

∴ $ن = ٣ر - ١ \longleftarrow$ ①

∵ $\frac{معامل\ ح_{ر+٢}}{معامل\ ح_{ر+١}} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} \times \frac{١}{١} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ن = ٥ر + ٣ \longleftarrow$ ②

$\boxed{∴ ر = ٥}$ ، $\boxed{ن = ١٤}$

⑧ فى مفكوك $(س^ل + \frac{١}{س})^٦$ حيث ل عدد صحيح موجب اوجد قيم ل التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_ر \times (\frac{١}{س})^ر \times (س^ل)^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_ر \times (س)^{٦ل - ل ر - ر}$

∴ $٦ل - ل ر - ر = ٠$

∴ $ل(٦ - ر) = ر$

∴ $ل = \frac{ر}{٦ - ر}$

عندما ر = ٠ ← ∴ ل = ٠ مرفوض

" ر = ١ ← ∴ ل = $\frac{١}{٥}$ "

" ر = ٢ ← ∴ ل = $\frac{١}{٢}$ "

" ر = ٣ ← ∴ ل = ١ يحقق ✓

" ر = ٤ ← ∴ ل = ٢ " ✓

" ر = ٥ ← ∴ ل = ٥ " ✓

" ر = ٦ ← ∴ ل غير معرف

∴ قيم ل هى ١ ، ٢ ، ٥

⑨ إذا كان

$$(\text{أ} - \text{س})^{١٤} = \text{ج}_{٠} + \text{ج}_{١}\,\text{س}^{١} + \text{ج}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \text{ج}_{٣}\,\text{س}^{٣} + \ldots\ldots + \text{ج}_{١٤}\,\text{س}^{١٤}$$

وكان

$$٤\,\text{ج}_{٤} + ١١\,(\text{ج}_{٣} + \text{ج}_{٢}) = \text{صفر}$$

اوجد قيمة أ

الحل

$$\text{ح}_{٣} = {}^{١٤}\text{ق}_{٢}\,(-\text{س})^{٢}\,(\text{أ})^{١٢} = \text{ج}_{٢}\,\text{س}^{٢}$$

$$\boxed{٩١\,\text{أ}^{١٢} = \text{ج}_{٢}}$$

$$\text{ح}_{٤} = {}^{١٤}\text{ق}_{٣}\,(-\text{س})^{٣}\,(\text{أ})^{١١} = \text{ج}_{٣}\,\text{س}^{٣}$$

$$\boxed{-٣٦٤\,\text{أ}^{١١} = \text{ج}_{٣}}$$

$$\text{ح}_{٥} = {}^{١٤}\text{ق}_{٤}\,(-\text{س})^{٤}\,(\text{أ})^{١٠} = \text{ج}_{٤}\,\text{س}^{٤}$$

$$\boxed{١٠٠١\,\text{أ}^{١٠} = \text{ج}_{٤}}$$

$$\because\ ٤\,\text{ج}_{٤} + ١١\,(\text{ج}_{٣} + \text{ج}_{٢}) = ٠$$

$$٤٠٠٤\,\text{أ}^{١٠} + ١١\,(-٣٦٤\,\text{أ}^{١١} + ٩١\,\text{أ}^{١٢}) = ٠$$

$$٤٠٠٤\,\text{أ}^{١٠} - ٤٠٠٤\,\text{أ}^{١١} + ١٠٠١\,\text{أ}^{١٢} = ٠$$

$$\therefore\ ١٠٠١\,\text{أ}^{١٢} - ٤٠٠٤\,\text{أ}^{١١} + ٤٠٠٤\,\text{أ}^{١٠} = ٠$$

$$١٠٠١\,\text{أ}^{١٠}\,(\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} + ٤) = ٠$$

إما $\text{أ} = ٠$ مرفوض   او $\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} + ٤ = ٠$

$$(\text{أ} - ٢)(\text{أ} - ٢) = ٠$$

$$\boxed{\therefore\ \text{أ} = ٢}$$

⑩ اوجد معامل س في مفكوك $\left(\frac{٣س}{٢}+\frac{٢}{٣س}\right)^{١١}$. ثم اوجد قيمة أكبر حد في هذا المفكوك عندما $س=\frac{٢}{٣}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{٢}{٣س}\right)^{ر} \times \left(\frac{٣س}{٢}\right)^{١١-ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ر} \times (س)^{-ر} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر} \times (س)^{١١-ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ر} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر} (س)^{١١-٢ر}$

$\therefore ١١-٢ر=١$ $\boxed{\therefore ر=٥}$

$\therefore$ معامل $ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦}$

$= ٦٩٣$

$\therefore \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} \geq ١$

$\therefore \frac{١١-ر+١}{ر} \times \left(\frac{٢}{٣س} \times \frac{٢}{٣س}\right) \geq ١$

$\left(\frac{١٢-ر}{ر}\right) \times \frac{٤}{٩س٤} \geq ١$

عندما $س=\frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{١٢-ر}{ر} \geq ١$

$\therefore ١٢-ر \geq ر$

$\therefore ٦ \geq ر$

$\therefore ر=٥$ او $ر=٦$

$\therefore ح_{٧} = ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦} \times \left(\frac{٢}{٣}\right) = ٤٦٢$

⑪ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(س٤+\frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ هو أكبر الحدود عددياً اثبت أن

$\frac{ن}{ن+١} < س^{٣} < \frac{ن+١}{ن}$

الحل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٢ن}{٢}+١$

$= ن+١$

$\therefore ح_{ن+١}$ هو أكبر الحدود

$\therefore ح_{ن+١} > ح_{ن}$ و $ح_{ن+١} > ح_{ن+٢}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} > ١$

$\therefore \frac{٢ن-ن+١}{ن} \times \left(\frac{١}{س} \times \frac{١}{س٤}\right) > ١$

$\frac{ن+١}{ن} > س^{٢} \longrightarrow ①$

$\frac{ح_{ن+٢}}{ح_{ن+١}} < ١$

$\frac{٢ن-ن-١+١}{ن+١} \left(\frac{١}{س٤}\right) < ١$

$\frac{ن}{ن+١} < س^{٢} \longrightarrow ②$

من ① و ②

$\therefore \frac{ن}{ن+١} < س^{٢} < \frac{ن+١}{ن}$

الباب الثاني : مجموعة الأعداد المركبة (ك)

⊛ العدد التخيلي :- **مثال** أوجد م.ح $\text{س}^{٢}+١=٠$

الحل $\text{س}^{٢}=-١$ $[\because \text{م.ح}=\phi \text{ في ح}]$

$\therefore \text{س}=\pm\sqrt{-١}=\pm\text{ت}$

$\therefore \text{م.ح}=\{\text{ت} ، -\text{ت}\}$

تعريف

$\text{ت}=\sqrt{-١}$	$(\text{ت})^{٥}=\text{ت}$	$(\text{ت})^{٦٠}=١$	$\frac{١}{\text{ت}}=-\text{ت}$
$(\text{ت})^{٢}=-١$	$(\text{ت})^{٦}=(\text{ت})^{٢}=-١$	$(\text{ت})^{٤٣}=(\text{ت})^{٣}=-\text{ت}$	$\frac{١}{(\text{ت})^{٣}}=\text{ت}$
$(\text{ت})^{٣}=-\text{ت}$	$(\text{ت})^{٧}=(\text{ت})^{٣}=-\text{ت}$	$(\text{ت})^{١٠٢}=(\text{ت})^{٢}=-١$	$(\text{ت})^{٨\text{ن}-٣}=\frac{(\text{ت})^{٨\text{ن}}}{(\text{ت})^{٣}}=\frac{١}{-\text{ت}}=\text{ت}$
$(\text{ت})^{٤}=١$	$(\text{ت})^{٨}=١$	$(\text{ت})^{٤\text{ن}}=١$	

⊛ مجموعة الأعداد المركبة :- (ك)

$\text{ك}=\{\text{س}+\text{ت ص} : \text{س ، ص} \in \text{ح} ، (\text{ت})^{٢}=-١\}$ **(صورة جبرية)**

مثل $\text{ع}=٣+٤\text{ت}$ حيث ٣ جزء حقيقي ، ٤ت جزء تخيلي

$\text{ع}_{١}=-٢$ ، $\text{ع}_{٢}=٥\text{ت}$

⊛ تساوى عددين مركبين :

① إذا كان $\text{س}_{١}+\text{ت ص}_{١}=\text{س}_{٢}+\text{ت ص}_{٢}$

$\therefore \text{س}_{١}=\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{١}=\text{ص}_{٢}$

② إذا كان $\text{س}+\text{ت ص}=٠$

$\therefore \text{س}=٠$ ، $\text{ص}=٠$

مثل إذا كان

$\text{س}+\text{ت ص}=٥-\text{ت}$

$\therefore \text{س}=٥$ ، $\text{ص}=-١$

⊛ جمع عددين مركبين :

مثال $(٢ + ٢\bar{\text{ت}}) + (١ - ٤\bar{\text{ت}}) = ٣ - \bar{\text{ت}}$

$(٤ + ٢\bar{\text{ت}}) + (٥\bar{\text{ت}}) = ٤ + ٨\bar{\text{ت}}$

⊛ ضرب عددين مركبين :

مثال $(٢ + ٢\bar{\text{ت}})(١ - ٤\bar{\text{ت}}) = ٢ - ٨\bar{\text{ت}} + ٢\bar{\text{ت}} + ١٢$

$= ١٤ - ٥\bar{\text{ت}}$

⊛ مرافق العدد المركب :

إذا كان $\text{ع} = \text{س} + \bar{\text{ت}}\,\text{ص}$ فإن مرافقه

العدد $\text{ع} = \bar{\text{ع}} = \text{س} - \bar{\text{ت}}\,\text{ص}$

مثال إذا كان $\text{ع} = ٢ + ٣\bar{\text{ت}}$ فإن $\bar{\text{ع}} = ٢ - ٣\bar{\text{ت}}$

مع ملاحظة أن :

① $\text{ع} + \bar{\text{ع}} = ٢\text{س}$ (جزء حقيقي)

② $\text{ع} \times \bar{\text{ع}} = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢$ (جزء حقيقي)

أمثلة اختصر كل مما يأتي :

① $\frac{٣}{٢ + \bar{\text{ت}}}$

الحل $\frac{٣}{(٢ + \bar{\text{ت}})} \times \frac{(٢ - \bar{\text{ت}})}{(٢ - \bar{\text{ت}})} = \frac{٣(٢ - \bar{\text{ت}})}{٤ + ١}$

$= \frac{٦}{٥} - \frac{٣}{٥}\bar{\text{ت}}$

② $(١ + \bar{\text{ت}})^٤ - (١ - \bar{\text{ت}})^٤$

الحل $= \left((١ + \bar{\text{ت}})^٢\right)^٢ - \left((١ - \bar{\text{ت}})^٢\right)^٢$

$= (\cancel{١} + ٢\bar{\text{ت}} - \cancel{١})^٢ - (\cancel{١} - ٢\bar{\text{ت}} - \cancel{١})^٢$

$= -٤ + ٤ =$ صفر

③ $\left(٢ - \frac{١}{\bar{\text{ت}}}\right)^٦$

الحل المقدار $= (٢ + \bar{\text{ت}})^٦ = \left[(٢ + \bar{\text{ت}})^٢\right]^٣$

$= (٤ + ٤\bar{\text{ت}} - ١)^٣$

$= (٣ + ٤\bar{\text{ت}})^٣$

$= (٣ + ٤\bar{\text{ت}})^٢ \times (٣ + ٤\bar{\text{ت}})$

$= (٩ + ٢٤\bar{\text{ت}} - ١٦)(٣ + ٤\bar{\text{ت}})$

$= (-٧ + ٢٤\bar{\text{ت}})(٣ + ٤\bar{\text{ت}})$

$= -١١٧ + ٤٤\bar{\text{ت}}$

④ $\frac{(٢+\bar{\text{ت}})(٢+\bar{\text{ت}})}{(٢-\bar{\text{ت}})(٢-\bar{\text{ت}})}$

الحل

المقدار = $\frac{٦+٥\bar{\text{ت}}-١}{٦-٥\bar{\text{ت}}-١} = \frac{٥+٥\bar{\text{ت}}}{٥-٥\bar{\text{ت}}}$

$= \frac{(١+\bar{\text{ت}})\times(١+\bar{\text{ت}})}{(١-\bar{\text{ت}})\times(١+\bar{\text{ت}})} = \frac{\cancel{١}+٢\bar{\text{ت}}-\cancel{١}}{١+١}$

$= \bar{\text{ت}}$

---

⑤ اوجد م.ح خ ك للمعادلة

$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٢٥ = ٠$

الحل

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٢٥

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

$\text{س} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ١٠٠}}{٢}$

$\text{س} = \frac{٦ \pm \sqrt{-٦٤}}{٢} = \frac{٦ \pm ٨\bar{\text{ت}}}{٢}$

∴ $\text{س} = ٣ \pm ٤\bar{\text{ت}}$

∴ م.ح = $\{٢+٤\bar{\text{ت}} ، ٢-٤\bar{\text{ت}}\}$

---

⑥ إذا كان −٣ أحد جذور المعادلة

$\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - \text{س} + ١٥ = ٠$

اوجد الجذرين الآخرين.

الحل

∴ (س + ٢) هو أحد عوامل المقدار

∴ المقدار = $\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - \text{س} + ١٥$

$= (\text{س}+٢)(\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٥) = ٠$

∴ $\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٥ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٥

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

$\text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}}{٢}$

$\text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = \frac{٢ \pm ٤\bar{\text{ت}}}{٢}$

∴ $\text{س} = ١ \pm ٢\bar{\text{ت}}$

∴ جذور المعادلة هي −٣ ، ١ + ٢ت ، ١ − ٢ت

---

⑦ إذا كان $\text{س} = \frac{٧-\bar{\text{ت}}}{٢-\bar{\text{ت}}}$ ، $\text{ص} = \frac{١٢-\bar{\text{ت}}}{٤+\bar{\text{ت}}}$

أثبت أن س ، ص مترافقان

وأثبت أن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٦$

الحل

$\text{س} = \frac{(٧-\bar{\text{ت}})\times(٢+\bar{\text{ت}})}{(٢-\bar{\text{ت}})\times(٢+\bar{\text{ت}})} = \frac{١٥+٥\bar{\text{ت}}}{٥} = \boxed{٣+\bar{\text{ت}}}$

$\text{ص} = \frac{(١٢-\bar{\text{ت}})\times(٤-\bar{\text{ت}})}{(٤+\bar{\text{ت}})\times(٤-\bar{\text{ت}})} = \frac{٥١-١٧\bar{\text{ت}}}{١٧}$

$= \boxed{٣-\bar{\text{ت}}}$

∴ س ، ص مترافقان

∴ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = (٢+\bar{\text{ت}})^٢ + (٢-\bar{\text{ت}})^٢$

$= ٩ + \cancel{٦\bar{\text{ت}}} - ١ + ٩ - \cancel{٦\bar{\text{ت}}} - ١ = ⑯$

⑧ اوجد قيم س ، ص الحقيقية في كل حالة

① س + ت ص = (٢ − ٣ت)^{٢}

الحل

س + ت ص = ٤ − ١٢ت − ٩

= −٥ − ١٢ت

∴ س = −٥ ، ص = −١٢

② (س + ت ص)(٢ − ٢ت) = ١

الحل

س + ت ص = $\frac{١}{(٢ − ٢ت)} \times \frac{(٢ + ٢ت)}{(٢ + ٢ت)}$

س + ت ص = $\frac{٢ + ٢ت}{١٢} = \frac{٢}{١٢} + \frac{٢}{١٢}$ت

∴ س = $\frac{٢}{١٢}$ ، ص = $\frac{٢}{١٢}$

③ (س + ٢ص ت)^{٢} + $\frac{٨(١ − ت)}{١ + ت}$ + ١٥ = ٠

الحل

س^{٢} + ٤س ص ت − ٤ص^{٢} + $\left[\frac{٨(١ − ت) \times (١ − ت)}{(١ + ت) \times (١ − ت)}\right]$ + ١٥ = ٠

س^{٢} + ٤س ص ت − ٤ص^{٢} + $\left[\frac{٨(١ − ٢ت − ١)}{٢}\right]$ + ١٥ = ٠

س^{٢} + ٤س ص ت − ٤ص^{٢} − ٨ت + ١٥ = ٠

∴ س^{٢} − ٤ص^{٢} + ١٥ = ٠ ①

٤س ص − ٨ = ٠

س ص = ٢

② س = $\frac{٢}{ص}$

بالتعويض من ② في ①

∴ $\frac{٤}{ص^{٢}}$ − ٤ص^{٢} + ١٥ = ٠ × ص^{٢}

∴ ٤ − ٤ص^{٤} + ١٥ص^{٢} = ٠

∴ ٤ص^{٤} − ١٥ص^{٢} − ٤ = ٠

∴ (٤ص^{٢} + ١)(ص^{٢} − ٤) = ٠

ص^{٢} = −$\frac{١}{٤}$ ، ص^{٢} = ٤

مرفوضة

$\boxed{∴ ص = ±٢}$

$\boxed{∴ س = ±١}$

⑨ إذا كان $\frac{٤ + ٧ت}{٢ + ت}$ هو أحد جذري معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها أعداد حقيقية ، أوجد هذه المعادلة

الحل

$\frac{(٤ + ٧ت)}{(٢ + ت)} \times \frac{(٢ − ت)}{(٢ − ت)} = \frac{١٥ + ١٠ت}{٥} = \boxed{٣ + ٢ت}$

∴ المعاملات أعداد حقيقية

∴ الجذر الآخر = ٣ − ٢ت (المرافق)

مجموع الجذرين = ⑥ حقيقي

حاصل ضرب الجذرين = ٩ + ٤ = ١٢ حقيقي

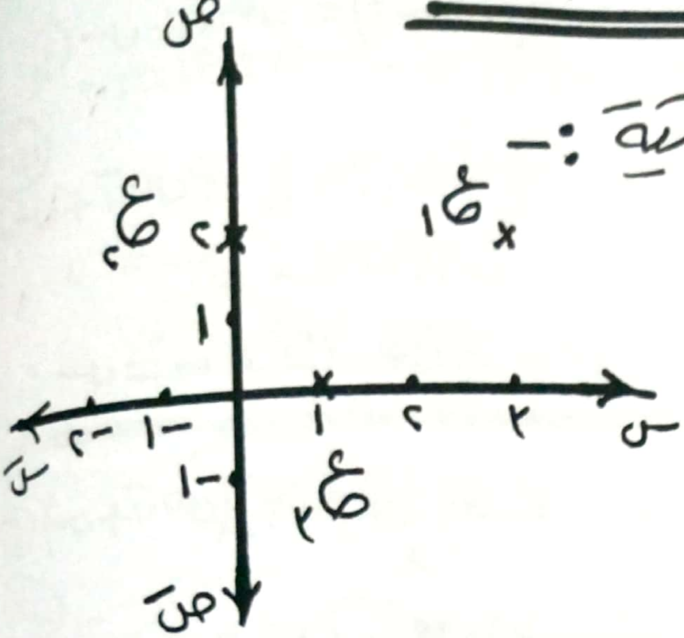
∴ المعادلة التربيعية هي

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (حاصل الضرب) = ٠

∴ س^{٢} − ٦س + ١٢ = ٠

⊛ تمثيل العدد المركب بشكل أرجاند :

مثال مثل الأعداد المركبة الآتية :-

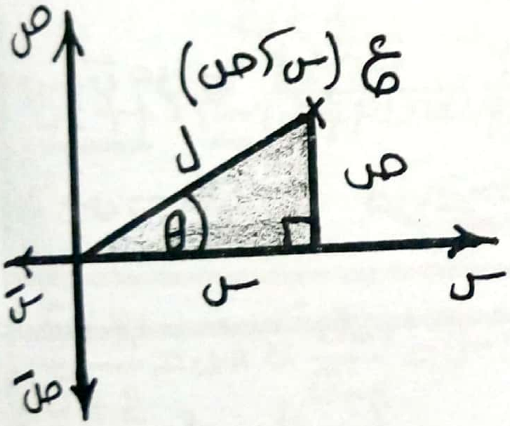


$ع_1 = ٣ + ٢ت = (٣ ، ٢)$

$ع_2 = ٢ت = (٠ ، ٢)$

$ع_3 = ١ = (١ ، ٠)$

⊛ المقياس والسعة للعدد المركب :-



إذا كان ع = س + ت ص = (س ، ص) فإن

مقياس العدد ع = |ع| = ل

حيث $\boxed{ل = \sqrt{س^2 + ص^2}}$

السعة θ : $ظاθ = \frac{ص}{س}$ ، $جاθ = \frac{ص}{ل}$ ، $جتاθ = \frac{س}{ل}$

حيث $\boxed{θ \in [-\pi ، \pi]}$

$∴ ع = \boxed{س + ت ص} = \boxed{ل (جتاθ + ت جاθ)} = \boxed{ل هـ^{تθ}}$ (أويلر)

الصورة الجبرية ، الصورة المثلثية ، الصورة الأسية

حيث θ في الصورة الأسية مقاسة بالتقدير الدائري

اى ان إذا كان $θ = ٦٠^\circ$ ⟵ $∴ θ^{د} = \frac{٦٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{١}{٣} \pi^{د}$

مثال اوجد المقياس والسعة ثم اوجد الصورة المثلثية والصورة الأسية للعدد ع = ٢ − ٢ت

الحل

$\because$ ع = (٢، −٢) ∈ ع ٤ $\therefore$ θ تقع في الربع الرابع

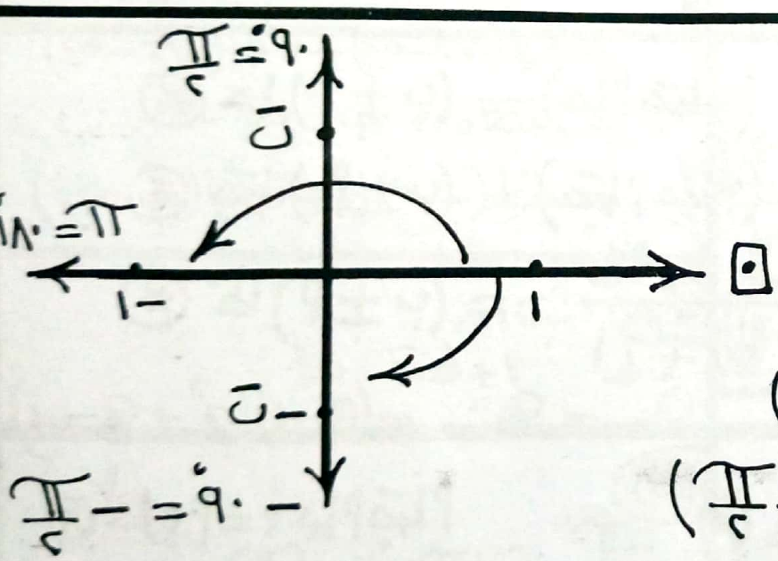
ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\because$ ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-2}{2} = -1$ ، $\therefore \theta = -45 = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ ع = $2\sqrt{2}\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ المثلثية

$\therefore$ ع = ل $\text{هـ}^{\text{ت}\theta} = 2\sqrt{2} \times \text{هـ}^{-\frac{\pi}{4}\theta}$ الأسية

حالات خاصة :



$1 = \text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0$

$-1 = \text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi$

ت $= \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

−ت $= \text{جتا}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

مثال اوجد الصورة المثلثية و الأسية لكل من :

$\text{ع}_1 = 5\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = -3\text{ت}$ ، $\text{ع}_3 = -7$

الحل

$\text{ع}_1 = 5 \times \text{ت} = 5\left[\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right] = 5 \times \text{هـ}^{\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

$\text{ع} = 3 \times -\text{ت} = 3\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3 \times \text{هـ}^{-\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

$\text{ع}_2 = 7 \times -1 = 7\left[\text{جتا}(\pi) + \text{ت جا}(\pi)\right] = 7 \times \text{هـ}^{\pi\text{ت}}$

مراجعة هامة :-

جا(١٨٠ - هـ) = جا هـ	جتا(١٨٠ - هـ) = - جتا هـ
جا(١٨٠ + هـ) = - جا هـ	جتا(١٨٠ + هـ) = - جتا هـ
جا(٢٦٠ - هـ) = - حا هـ	جتا(٢٦٠ - هـ) = جتا هـ
حا(٩٠ - هـ) = جتا هـ	جتا(٩٠ - هـ) = حا هـ
حا(٩٠ + هـ) = جتا هـ	جتا(٩٠ + هـ) = - حا هـ
حا(٢٧٠ - هـ) = - جتا هـ	جتا(٢٧٠ - هـ) = - حا هـ
حا(٢٧٠ + هـ) = - جتا هـ	جتا(٢٧٠ + هـ) = حا هـ

⊛ حا(أ ± ب) = (حا أ جتا ب) ± (جتا أ حا ب)

⊛ جتا(أ ± ب) = (جتا أ جتا ب) ∓ (حا أ حا ب)

⊛ $$\text{ظا}(\text{أ} \pm \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{١ \mp (\text{ظا أ ظا ب})}$$

⊛ حا٢أ = ٢ جا أ جتا أ

⊛ $$\text{ظا}\,٢\text{أ} = \frac{٢\,\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$$

⊛ $$\text{جتا}\,٢\text{أ} = \left\{\begin{array}{c} \text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{حا}^{٢}\text{أ} \\ ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١ \\ ١ - ٢\,\text{حا}^{٢}\text{أ} \end{array}\right\}$$

مثال اوجد الصورة المثلثية والأسية للعدد $\text{ع} = \frac{\sqrt{٣} - \text{ت}}{٢\,\text{ت}}$

الحل

$$\text{ع} = \frac{(\sqrt{٣} - \text{ت}) \times \text{ت}}{(٢\,\text{ت}) \times \text{ت}} = \frac{\sqrt{٣}\,\text{ت} + ١}{-٢}$$

$$\text{ع} = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت} = \left(-\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$$

θ تقع خ الربع الثالث

ل = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}$ = $\sqrt{١}$ = ١

∵ ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{-\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

ق$(\hat{θ})$ ∈ الربع الثالث = −١٨٠° + ٦٠ = −١٢٠ = −١٢٠ × $\frac{π}{١٨٠}$ = −$\frac{٢}{٣}$π

∴ ع = ١ [جتا(−$\frac{٢}{٣}$π) + ت حا(−$\frac{٢}{٣}$π)]

= ل × $ه^{\bar{ت}\,θ}$ = ١ × $ه^{-\frac{٢}{٣}π\,\bar{ت}}$

مثال اوجد الصورة المثلثية لكل من

① $ع_{١}$ = ٢$\sqrt{٢}$ [جتا ٢٠ − ت حا ٢٠]

الحل

$ع_{١}$ = ٢$\sqrt{٢}$ [جتا(٣٦٠ − ٢٠) + $\bar{ت}$ جا(٣٦٠ − ٢٠)]

= ٢$\sqrt{٢}$ [جتا ٣٤٠ + $\bar{ت}$ حا ٣٤٠]

= ٢$\sqrt{٢}$ [جتا(−٢٠) + $\bar{ت}$ جا(−٢٠)]

---

③ $ع_{٣}$ = −٢ [جتا ٦٠ + $\bar{ت}$ حا ٦٠]

= ٢ [−جتا ٦٠ − ت حا ٦٠]

= ٢ [جتا ٢٤٠ + ت حا ٢٤٠]

= ٢ [جتا(−٦٠) + ت جا(−٦٠)]

---

② $ع_{٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$ [حا ٤٥ − ت جتا ٤٥]

= ٢$\sqrt{٢}$ [جتا(٢٧٠ + ٤٥) + $\bar{ت}$ جا(٢٧٠ + ٤٥)]

= ٢$\sqrt{٢}$ [جتا ٣١٥ + ت حا ٣١٥]

= ٢$\sqrt{٢}$ [جتا(−٤٥) + ت جا(−٤٥)]

---

④ $ع_{٤}$ = −(حا ٤٥ + ت جتا ٤٥)

= (−حا ٤٥ − ت جتا ٤٥)

= جتا(٢٧٠ − ٤٥) + ت جا(٢٧٠ − ٤٥)

= جتا ٢٢٥ + ت حا ٢٢٥

= جتا(−١٢٥) + ت حا(−١٢٥)

مثال اثبت ان

$ه^{ط\bar{ت}}$ − $ه^{٢ + ط\bar{ت}}$ = (ه − ١)($ه^{٢}$ + ه + ١)

الحل

$ه^{\bar{ت}π}$ = جتا π + ت حا π = −١

$ه^{٢ + ط\bar{ت}}$ = $ه^{٢}$ × $ه^{ط\ddot{ت}}$

= $ه^{٢}$ [جتا(π) + ت حا(π)]

= $ه^{٢}$ × −١ = −$ه^{٢}$

∴ الايمن = −١ + ($ه^{٣}$)

= $ه^{٣}$ − ١

الأيسر = (ه − ١)($ه^{٢}$ + ه + ١)

المقياس و السعة لحاصل الضرب و خارج القسمة :

إذا كان $ع_1 = ل_1 [\text{جتا}\, \theta_1 + \text{ت جا}\, \theta_1]$ ، $ع_2 = ل_2 [\text{جتا}\, \theta_2 + \text{ت جا}\, \theta_2]$

فإن $\boxed{ع_1 \times ع_2} = ل_1 ل_2 [\text{جتا}\, (\theta_1 + \theta_2) + \text{ت جا}\, (\theta_1 + \theta_2)]$

، $\boxed{\frac{ع_1}{ع_2}} = \frac{ل_1}{ل_2} [\text{جتا}\, (\theta_1 - \theta_2) + \text{ت جا}\, (\theta_1 - \theta_2)]$

، $\boxed{ع_1^{ن}} = ل_1^{ن} [\text{جتا}\, ن\theta_1 + \text{ت جا}\, ن\theta_1]$

نظرية ديموافر للأس الصحيح

مثال إذا كان

$ع_1 = ٢ [\text{جتا}\, ٢٠ - \text{ت جا}\, ٢٠]$

$ع_2 = -٤ [\text{جتا}\, ٤٥ - \text{ت جا}\, ٤٥]$

أوجد :

① $ع_1 ع_2$ ② $ع_1^{٢}$ ③ $\frac{ع_1}{ع_2}$

الحل

$ع_1 = ٢ [\text{جتا}\, (-٢٠) + \text{ت جا}\, (-٢٠)]$

$ع_2 = ٤ [-\text{جتا}\, ٤٥ + \text{ت جا}\, ٤٥]$

$ع_2 = ٤ [\text{جتا}\, (١٨٠ - ٤٥) + \text{ت جا}\, (١٨٠ - ٤٥)]$

$ع_2 = ٤ [\text{جتا}\, ١٢٥ + \text{ت جا}\, ١٢٥]$

① $ع_1 ع_2 = ٨ [\text{جتا}\, (-٢٠ + ١٢٥) + \text{ت جا}\, (-٢٠ + ١٢٥)]$

$= ٨ [\text{جتا}\, ١٠٥ + \text{ت جا}\, ١٠٥]$

② $ع_1^{٢} = ٤ [\text{جتا}\, (-٢٠ \times ٢) + \text{ت جا}\, (-٢٠ \times ٢)]$

$= ٤ [\text{جتا}\, (-٦٠) + \text{ت جا}\, (-٦٠)]$

③ $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٢}{٤} [\text{جتا}\, (-٢٠ - ١٢٥) + \text{ت جا}\, (-٢٠ - ١٢٥)]$

$= \frac{٢}{٤} [\text{جتا}\, (-١٦٥) + \text{ت جا}\, (-١٦٥)]$

$= \frac{١}{٢} [\text{جتا}\, (-١٦٥) + \text{ت جا}\, (-١٦٥)]$

② إذا كان

- $ع_1 = ٥[\text{جتا}\,θ + \bar{\text{ت}}\,\text{جا}\,θ]$

$ع_2 = ٥[\text{جا}\,٢θ + \bar{\text{ت}}\,\text{جتا}\,٢θ]$

حيث $θ \in]٠ ، ٩٠°[$ ، $\text{ظا}\,θ = \frac{٣}{٤}$

اوجد

الصورة المثلثية وكذلك الصورة الجبرية $ع_1 \times ع_2$

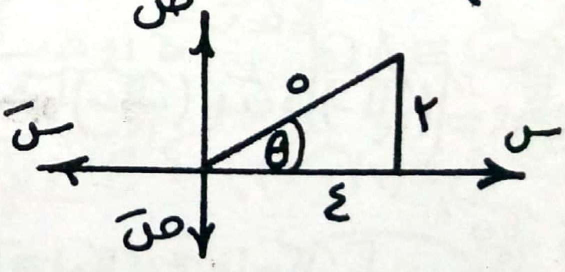
الحل

- $ع_2 = ٥[\text{جتا}(٩٠ - ٢θ) + \bar{\text{ت}}\,\text{جا}(٩٠ - ٢θ)]$

$ع_1 \times ع_2 = ٢٥[\text{جتا}(٩٠ - θ) + \bar{\text{ت}}\,\text{جا}(٩٠ - θ)]$

← الصورة المثلثية

$ع_1 ع_2 = ٢٥[\text{جا}\,θ + \bar{\text{ت}}\,\text{جتا}\,θ]$



$\therefore ع_1 ع_2 = ٢٥[\frac{٢}{٥} + \frac{٤}{٥}\bar{\text{ت}}]$

$= ١٠ + ٢٠\,\bar{\text{ت}}$

③ أثبت أن:

$$\frac{١ + \text{جتا}\,θ + \bar{\text{ت}}\,\text{جا}\,θ}{١ - \text{جتا}\,θ - \bar{\text{ت}}\,\text{جا}\,θ} = \bar{\text{ت}}\,\text{ظتا}\,\frac{θ}{٢}$$

الحل

الأيمن =

$$\frac{\cancel{١} + (٢\,\text{جتا}^٢\frac{θ}{٢} - \cancel{١}) + (\bar{\text{ت}} \times ٢\,\text{جا}\frac{θ}{٢}\,\text{جتا}\frac{θ}{٢})}{\cancel{١} - (\cancel{١} - ٢\,\text{جا}^٢\frac{θ}{٢}) - (\bar{\text{ت}} \times ٢\,\text{جا}\frac{θ}{٢}\,\text{جتا}\frac{θ}{٢})}$$

$$= \frac{٢\,\text{جتا}^٢\frac{θ}{٢} + (٢\,\text{جا}\frac{θ}{٢}\,\text{جتا}\frac{θ}{٢}\,\bar{\text{ت}})}{٢\,\text{جا}^٢\frac{θ}{٢} - (٢\,\text{جا}\frac{θ}{٢}\,\text{جتا}\frac{θ}{٢}\,\bar{\text{ت}})}$$

$$= \frac{\cancel{٢}\,\text{جتا}\frac{θ}{٢}[\text{جتا}\frac{θ}{٢} + \text{جا}\frac{θ}{٢}\,\bar{\text{ت}}]}{\cancel{٢}\,\text{جا}(\frac{θ}{٢})[\text{جا}\frac{θ}{٢} - \text{جتا}\frac{θ}{٢}\,\bar{\text{ت}}]} \times \frac{\bar{\text{ت}}}{\bar{\text{ت}}}$$

$$= \frac{\text{ظتا}\frac{θ}{٢}\,[\text{جتا}\frac{θ}{٢} + \bar{\text{ت}}\,\text{جا}\frac{θ}{٢}] \times \bar{\text{ت}}}{[\bar{\text{ت}}\,\text{جا}\frac{θ}{٢} + \text{جتا}\frac{θ}{٢}]}$$

$= \text{ظتا}\,\frac{θ}{٢}\,\bar{\text{ت}}$

ملاحظات :-

① $|ع| \geq ٠$

② $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$

③ $ع\bar{ع} = |ع|^٢ = |\bar{ع}|^٢$

⊛ نظرية ديموافر بأس نسبي موجب :-

$$(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{\frac{١}{ن}} = \text{جتا}\left(\frac{\theta + ٢\pi ر}{ن}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta + ٢\pi ر}{ن}\right)$$

حيث $ر = ...، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ......$

التى تجعل السعة $\frac{\theta + ٢\pi ر}{ن} \in [-\pi ، \pi]$

امثلة

① اوجد قيمة

$$ع = (\text{جتا}\ ٢٠ + \text{ت جا}\ ٢٠)^{\frac{١}{٢}}$$

الحل

$$ع = \text{جتا}\left(\frac{٢٠ + ٢\pi ر}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٢٠ + ٢\pi ر}{٢}\right)$$

عندما $ر = ٠$

$\therefore ع_١ = \text{جتا}\ ١٠ + \text{ت جا}\ ١٠$

عندما $ر = ١$

$\therefore ع_٢ = \text{جتا}\ ١٩٠ + \text{ت جا}\ ١٩٠$

$= \text{جتا}(-١٦٠) + \text{ت جا}(-١٦٠)$

② اوجد $ع \in ك$ بالصورة المثلثية، الأسية

حيث $ع^٤ = ٨(١ - \sqrt{٣}\,ت)$

الحل

$ع^٤ = (٨ - ٨\sqrt{٣}\,ت)$

$ل = \sqrt{(٨)^٢ + (-٨\sqrt{٣})^٢} = ١٦$

θ تقع في الربع الرابع

$\text{ظا}\,\theta = \frac{-٨\sqrt{٣}}{٨} = -\sqrt{٣}$

$\theta = -٦٠ = -\frac{\pi}{٣}$

$$ع^٤ = ١٦\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right]$$

$$\therefore ع = ٢\left[\text{جتا}\ \frac{١}{٤}\left(-\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ر\right) + \text{ت جا}\ \frac{١}{٤}\left(-\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ر\right)\right]$$

عند $ر = ٠$

$\therefore ع_١ = ٢\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{١٢}\right)\right] = ٢\,هـ^{-\frac{\pi}{١٢}ت}$

عند $ر = ١$

$\therefore ع_٢ = ٢\left[\text{جتا}\ \frac{٥\pi}{١٢} + \text{ت جا}\ \frac{٥\pi}{١٢}\right] = ٢\,هـ^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$

عند $ر = -١$

$ع_٣ = ٢\left[\text{جتا}\left(-\frac{٧\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{٧\pi}{١٢}\right)\right] = ٢\,هـ^{-\frac{٧\pi}{١٢}ت}$

عند $ر = ٢$

$ع_٤ = ٢\left[\text{جتا}\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)\right] = ٢\,هـ^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}$

$$\therefore م.ح = \left\{٢\,هـ^{-\frac{\pi}{١٢}ت}،\ ٢\,هـ^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}،\ ٢\,هـ^{-\frac{٧\pi}{١٢}ت}،\ ٢\,هـ^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}\right\}$$

⑤ أوجد قيم س ، ص الحقيقية حيث $(\text{س} + \text{ت ص})^{٢} = \dfrac{٣٦ - ٢\text{ت}}{٣ + ٢\text{ت}}$

الحل

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} + ٢\text{س ص ت} = \dfrac{(٣٦ - ٢\text{ت}) \times (٢ - ٢\text{ت})}{(٣ + ٢\text{ت}) \times (٢ - ٢\text{ت})} = ٨ - ٦\text{ت}$

$\therefore \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٨$ ①

بالتربيع

$٢\text{س ص} = -٦$ ②

بالتربيع

$\therefore \text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٦٤$ ③

$٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} = ٣٦$ ④

بجمع ③ ، ④ $\therefore \text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ١٠٠$

$\therefore (\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{٢} = ١٠٠$

$\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠$ ⑤

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٨$ ①

بالجمع

$\therefore ٢\text{س}^{٢} = ١٨$

$\therefore \text{س} = \pm ٣$ ، $\text{ص} = \mp ١$

---

⑥ ضع العدد $\text{ع}_{١} = ٢\sqrt{٣} + ٢\text{ت}$ على الصورة الأسية ، وإذا كان $\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢} = ٨\,\text{هـ}^{\frac{٥}{٦}\pi\text{ت}}$ ، أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $\text{ع}_{٢}$ على الصورة المثلثية

الحل

$\text{ع}_{١} = (٢\sqrt{٣} ، ٢)$ ، θ تقع في الربع الأول

$\text{ل} = \sqrt{١٢ + ٤} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{س}}{\text{ل}} = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \text{ق}(\hat{\theta}) = ٣٠ \times \dfrac{\pi}{١٨٠} = \dfrac{١}{٦}\pi$

$\therefore \text{ع}_{١} = ٤\,\text{هـ}^{\frac{١}{٦}\pi\text{ت}}$

معطى $\therefore \text{ع}_{١} \times \text{ع}_{٢} = ٨\,\text{هـ}^{\frac{٥}{٦}\pi\text{ت}}$

$\therefore \text{ع}_{٢} = \dfrac{٨\,\text{هـ}^{\frac{٥}{٦}\pi\text{ت}}}{٤\,\text{هـ}^{\frac{١}{٦}\pi\text{ت}}} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٢}{٣}\pi\text{ت}}$

$\therefore \text{ع}_{٢} = ٢\left[\text{جتا}\,١٢٠ + \text{ت}\,\text{حا}\,١٢٠\right]$

$\therefore \sqrt{\text{ع}_{٢}} = \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\,١٢٠ + \text{ت}\,\text{حا}\,١٢٠\right]^{\frac{١}{٢}}$

$= \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\left(\dfrac{١٢٠ + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\left(\dfrac{١٢٠ + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right)\right]$

عندما $\text{ر} = ٠$

$\therefore$ الجذر الأول $= \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\,٦٠ + \text{ت}\,\text{حا}\,٦٠\right]$

عندما $\text{ر} = ١$

$\therefore$ الجذر الثاني $= \sqrt{٢}\left[\text{جتا}(-١٢٠) + \text{ت}\,\text{حا}(-١٢٠)\right]$

⑦ إذا كان $س = \frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ، $ص = \frac{٢}{جتا \frac{\pi}{٦} - ت جا \frac{\pi}{٦}}$ أثبت أن س ، ص مترافقان وأوجد الجذور التكعيبية للعدد ع حيث $ع = س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

الحل

$$س = \frac{٤}{(\sqrt{٣} + ت)} \times \frac{(\sqrt{٣} - ت)}{(\sqrt{٣} - ت)} = \boxed{\sqrt{٣} - ت} \quad ①$$

$$ص = \frac{٢}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} ت)} \times \frac{(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت)}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت)}$$

$$= \boxed{\sqrt{٣} + ت} \quad ②$$

من ① ، ② ∴ س ، ص مترافقان

$$∴ ع = (س - ص)^٢$$

$$= (-٢ت)^٢ = -٤ = ٤ \times -١$$

$$ع = ٤ [جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠]$$

$$∴ \sqrt[٣]{ع} = \sqrt[٣]{٤} [جتا (\frac{١٨٠ + ٢ ر \pi}{٣}) + ت جا (\frac{١٨٠ + ٢ ر \pi}{٣})]$$

حيث ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما ر = ٠

$$∴ الجذر الأول = \sqrt[٣]{٤} [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠]$$

$$= \sqrt[٣]{٤} \, هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$$

↓

وهكذا

---

⑧ أوجد م.ح في ك حيث

$$ع^٢ + \bar{ع} = ٠$$

الحل بفرض أن

$$ع = س + ت ص$$

$$∴ س^٢ + ٢ س ص ت - ص^٢ + س - ت ص = ٠$$

$$∴ س^٢ - ص^٢ + س = ٠ \quad ①$$

$$، ٢ س ص - ص = ٠ \quad ②$$

$$ص (٢ س - ١) = ٠$$

اما ص = ٠	او $س = \frac{١}{٢}$
بالتعويض في ①	بالتعويض في ①
$س^٢ + س = ٠$	$∴ \frac{١}{٤} - ص^٢ + \frac{١}{٢} = ٠$
$س (س + ١) = ٠$	$∴ ص^٢ = \frac{٣}{٤}$
∴ س = ٠	$∴ ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
س = −١	

$$∴ ع = ٠ + ٠ = ٠$$

$$او \quad ع = -١ + ٠ = -١$$

$$او \quad ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

$$او \quad ع = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

$$∴ م.ح = \{٠ ، -١ ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\}$$

⑨ عبر عن جتا ٢ θ بدلالة جتا θ

الحل

∵ (جتا θ + ت جا θ)^{٣} =

= جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ =

جتا^{٢} θ + (٣ جتا^{٢} θ × ت جا θ)

+ (٣) (ت جا θ)^{٢} (جتا θ) + (ت جا θ)^{٣}

بمساواة الأجزاء الحقيقية

∴ جتا ٢ θ = جتا^{٢} θ − ٣ جا^{٢} θ جتا θ

= جتا^{٢} θ − ٣ (١ − جتا^{٢} θ) جتا θ

= جتا^{٢} θ − ٣ جتا θ + ٣ جتا^{٢} θ

= ٤ جتا^{٢} θ − ٣ جتا θ

---

⑩ مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسية للعدد −٣٢

الحل

ع^{٥} = ٣٢ × −١

ع^{٥} = ٣٢ [جتا π + ت جا π]

∴ ع = (٣٢)$^{\frac{١}{٥}}$ [جتا π + ت جا π]$^{\frac{١}{٥}}$

= ٢ [جتا $\frac{١}{٥}$ (π + ٢π ه) + ت جا $\frac{١}{٥}$ (π + ٢π ه)

عندما ر = ٠

ع$_{١}$ = ٢ [جتا $\frac{\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{\pi}{٥}$]

= ٢ [جتا ٣٦ + ت جا ٣٦]

عندما ر = ١

ع$_{٢}$ = ٢ [جتا (٣٦ + ٧٢) + ت جا (٣٦ + ٧٢)]

عندما ر = −١

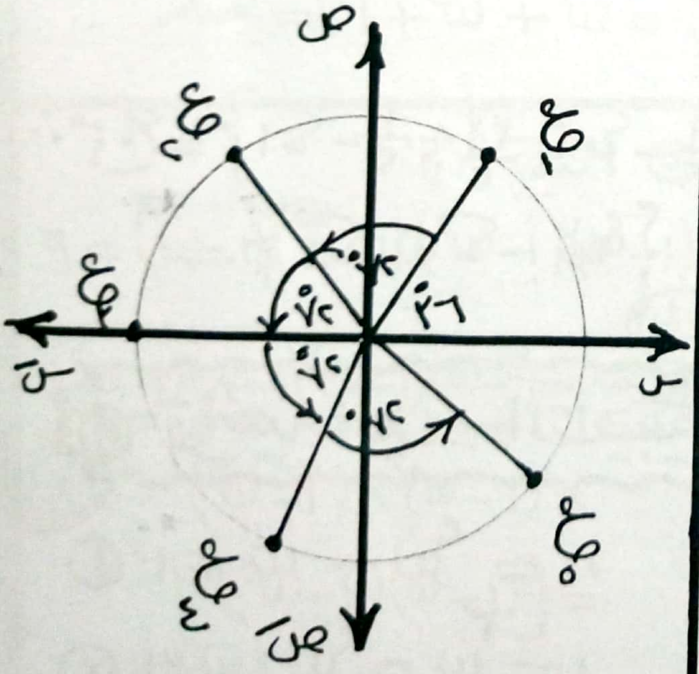
ع$_{٣}$ = ٢ [جتا (−٣٦) + ت جا (−٣٦)]

عندما ر = −٢

ع$_{٤}$ = ٢ [جتا (−١٠٨) + ت جا (−١٠٨)]

عندما ر = ٢

∴ ع$_{٥}$ = ٢ [جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠]



* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

مثال اوجد م.ح للمعادلة س^{٣} = ١

الحل س = $\sqrt[٣]{١}$ = (جتا٠ + ت جا٠)$^{\frac{١}{٣}}$

س = جتا$\left(\frac{٠ \pm ٢\pi ر}{٣}\right)$ + ت جا$\left(\frac{٠ \pm ٢\pi ر}{٣}\right)$

بفرض ر = ٠ ← ∴ الجذر الأول = جتا٠ + ت جا٠ = **١**

" ر = ١ ← ∴ " الثانى = جتا١٢٠ + ت جا١٢٠ = **$-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت**

= **ω**

" ر = -١ ← ∴ " الثالث = جتا(-١٢٠) + ت جا(-١٢٠) = **$-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت**

= **$\omega^{٢}$**

∴ م.ح = {١، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت} او

= {١، ω، $\omega^{٢}$}

---

* قوانين الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

① $١ + \omega + \omega^{٢} = ٠$

② $١ \times \omega \times \omega^{٢} = \omega^{٣} = ١$

③ $\omega - \omega^{٢} = \omega^{٢} - \omega = \pm\sqrt{٣}$ ت

ملاحظة

$\omega^{٥} = \omega^{٢}$

$\omega^{٧} = \omega$

$\omega^{١٥} = ١$

$\omega^{٦٠} = ١$

أمثلة

① اثبت أن:

$$(١ - ٢ω + ω^٢)(١ + ω - ω^٢) = ٦$$

الحل

$$\text{الأيمن} = (\underline{١} - ٢ω + \underline{ω^٢})(\underline{١ + ω} - ω^٢)$$

$$= (-ω - ٢ω)(-ω^٢ - ω^٢)$$

$$= -٣ω \times -٢ω^٢$$

$$= ٦ω^٣ = ٦ = \text{الأيسر}$$

② اثبت أن:

$$\left(\frac{١}{١ + ٢ω^٢} - \frac{١}{١ + ٢ω^٤}\right)^٢ = \frac{-٢٧}{٤٩}$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \left(\frac{\cancel{١} + ٢ω - \cancel{١} - ٢ω^٢}{(١ + ٢ω^٢)(١ + ٢ω)}\right)^٢$$

$$= \left(\frac{٣(ω - ω^٢)}{١ + \underline{٢ω + ٢ω^٢} + ٩}\right)^٢$$

$$= \left(\frac{٢ \times \pm\sqrt{٣}\,\text{ت}}{١٠ + ٢(ω + ω^٢)}\right)^٢$$

$$= \frac{٩ \times ٢ \times -١}{٤٩} = \frac{-٢٧}{٤٩}$$

③ اثبت أن:

$$\left(\frac{٥ - ٢ω^٢}{٥ω - ٣} - \frac{٢ - ٧ω}{٢ω^٢ - ٧}\right)^٤ = ٩$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \left[\frac{٥ω^٣ - ٢ω^٢}{٥ω - ٣} - \frac{٢ω^٣ - ٧ω}{٢ω^٢ - ٧}\right]^٤$$

$$\text{الأيمن} = \left[\frac{ω^٢\cancel{(٥ω - ٣)}}{\cancel{(٥ω - ٣)}} - \frac{ω\cancel{(٢ω^٢ - ٧)}}{\cancel{٢ω^٢ - ٧}}\right]^٤$$

$$= \left[ω^٢ - ω\right]^٤$$

$$= \left[\pm\sqrt{٣}\,\text{ت}\right]^٤ = ٩$$

④ اثبت أن:

$$\left(١ + \underline{ω + \frac{٢}{ω}}\right)^٢ + \left(١ + ٢ω + \frac{١}{ω}\right)^٢$$

$$+ \left(٢ + ω^٢ + \frac{١}{ω^٢}\right)^٢ = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{الأيمن} = (-ω^٢ + ٢ω^٢)^٢ + (\underline{١} + ٢ω + \underline{ω^٢})^٢$$

$$+ (٢ + \underline{ω^٢ + ω})^٢$$

$$= ω^٤ + (-ω + ٢ω)^٢ + (٢ - ١)^٢$$

$$= ω + ω^٢ + ١ = \text{صفر}$$

⑤ اثبت أن:

$$(١ - ω)(١ - ω^٢)(١ - ω^٤)(١ - ω^٥) = ٩$$

الحل

$$\text{الأيمن} = (١ - \underline{ω})(١ - \underline{ω^٢})(١ - \underline{ω})(١ - \underline{ω^٢})$$

$$= (١ - ω)^٢ \times (١ - ω^٢)^٢$$

$$= \left[(١ - ω)(١ - ω^٢)\right]^٢$$

$$= \left[١ - \underline{ω^٢ - ω} + ω^٣\right]^٢$$

$$= \left[١ - (ω^٢ + ω) + ١\right]^٢$$

$$= \left[١ + ١ + ١\right]^٢ = ٩$$

⑥ اثبت أن

$(١-\omega)(١-\omega^{٢})(١-\omega^{٤})(١-\omega^{٨})$

...... إلى ٢ن من العوامل $= (٣)^{\text{ن}}$

الحل

الأيمن $= (\underline{١-\omega})(\underline{\underline{١-\omega^{٢}}})(\underline{١-\omega})(\underline{\underline{١-\omega^{٢}}})$ ...... إلى ٢ن من العوامل

$= (١-\omega)(١-\omega)$ ...... إلى ن من العوامل

$\times (١-\omega^{٢})(١-\omega^{٢})$ ...... إلى ن من العوامل

$= (١-\omega)^{\text{ن}} \times (١-\omega^{٢})^{\text{ن}}$

$= [(١-\omega)(١-\omega^{٢})]^{\text{ن}}$

$= (٣)^{\text{ن}}$

---

⑦ اثبت أن جذري المعادلة

$\text{ع}^{٢} - (٢-\text{ت})\,\text{ع} - \text{ت} = ٠$

هما $١+\omega\,\text{ت}$ ، $١+\omega^{٢}\,\text{ت}$

الحل

$\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -(٢-\text{ت})$ ، $\text{جـ} = -\text{ت}$

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$= \frac{٢-\text{ت} \pm \sqrt{٤ - \cancel{٤\text{ت}} - ١ + \cancel{٤\text{ت}}}}{٢}$$

$$= \frac{٢-\text{ت} \pm \sqrt{٣}}{٢}$$

أما

$\text{ع}_{١} = \frac{٢-\text{ت}+\sqrt{٣}}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{٢}\text{ت} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ١ + \text{ت}\left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)$

$= ١ + \omega^{٢}\,\text{ت}$

أو

$\text{ع}_{٢} = \frac{٢-\text{ت}-\sqrt{٣}}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{٢}\text{ت} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ١ + \text{ت}\left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)$

$= ١ + \omega\,\text{ت}$

وهو المطلوب

---

⑧ إذا كان $\text{ع}_{١} = \omega + \text{ت}$ ، $\text{ع}_{٢} = \omega^{٢} + \text{ت}$ أوجد $\sqrt{\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}}$ في الصورة المثلثية

الحل

$\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢} = \cancel{\omega^{٣}} + \text{ت}\,\omega + \text{ت}\,\omega^{٢} + \cancel{\text{ت}^{٢}}$

$= \text{ت}\,(\omega + \omega^{٢})$

$= -\text{ت}$

$\sqrt{\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}} = \left(\text{جتا}(-٩٠) + \text{ت}\,\text{جا}(-٩٠)\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= \text{جتا}\left(\frac{-٩٠ + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\left(\frac{-٩٠ + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right)$

عندما ر = ٠

∴ الجذر الأول $= \text{جتا}(-٤٥) + \text{ت}\,\text{جا}(-٤٥)$

عندما ر = ١

∴ الجذر الثاني $= \text{جتا}\,١٣٥ + \text{ت}\,\text{جا}\,١٣٥$

الباب الثالث : المحددات والمصفوفات

المحدد : هو مجموعة من العناصر موضوعة على صورة صفوف وأعمدة حيث عدد الصفوف = عدد الأعمدة

مثال $م_٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$ (محدد من الدرجة الثانية)

حيث قيمة المحدد $= (٢ \times ٥) - (١ \times ٣) = ٧$

مثال $م_٢ = \begin{vmatrix} \overset{+}{١} & ٢ & ٣ \\ \overset{-}{٠} & ٥^{+} & \overset{-}{٤} \\ ١^{+} & ١ & -٣ \end{vmatrix} = ١\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} - ٠\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١(-١٥-٤) - ٠ + ١(٨-١٥) = -٢٦$

حل آخر

$-٠\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠ + ٥(-٣-٣) - ٤(١-٢) = -٢٦$

خاصية (١) :-

قيمة المحدد لا يتغير إذا تم فكة عن طريق أى صف أو أى عمود

مثال إذا كان $\begin{vmatrix} أ & د \\ ب & جـ \end{vmatrix} = ٥$ اوجد قيمة $\begin{vmatrix} أ-د & ٢أ \\ ب-جـ & ٢ب \end{vmatrix}$

الحل $\because \begin{vmatrix} أ & د \\ ب & جـ \end{vmatrix} = ٥ \qquad \therefore أجـ - ب د = ٥$

$\therefore \begin{vmatrix} أ-د & ٢أ \\ ب-جـ & ٢ب \end{vmatrix} = ٢ب(أ-د) - ٢أ(ب-جـ)$

$= \cancel{٢أب} - ٢ب د - \cancel{٢أب} + ٢أجـ$

$= ٢(أجـ - ب د)$

$= ٢ \times ٥ = ١٠$

* سابع : خواص المحددات :-

خاصية ② : قيمة المحدد لا تتغير إذا تم تبديل الصفوف للأعمدة أو الأعمدة لصفوف بنفس الترتيب

مثل

$$م = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$م = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$$

خاصية ③ : إذا تم تبديل (صف بصف) أو (عمود بعمود) فإن قيمة المحدد الناتج = -١ × قيمة المحدد الأصلي

مثل

$$م = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$م = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ - ١٥ = -١٣$$

خاصية ④ : قيمة المحدد = صفر إذا كان جميع عناصر أي صف (أو أي عمود) جميعها = صفر

خاصية ⑤ : قيمة المحدد = صفر إذا تساوى عناصر (صفين) المتناظره او تساوى عناصر (عمودين) المتناظرة

مثل

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ ÷ & ! & ♀ \end{vmatrix} = ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = صفر - صفر = صفر$$

خاصية ⑥ إذا أمكن إخراج عامل مشترك من أي صف (أو عمود) فإن هذا العامل يضرب خارج المحدد

مثل

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٤ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

خاصية ⑦ إذا أمكن كتابة عناصر أي صف (أو أي عمود) كمجموع عددين فإنه يمكن كتابة قيمة المحدد = مجموع محددين ،

مثل

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix} = ٦ - ٨ = -٢$$

أو

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢+١ \\ ٢ & ٣+٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (٤-٣) + (٢-٥) = ١ - ٣ = -٢$$

خاصية ⑧ إذا أضيف لعناصر أي صف (أو عمود) مضاعفات أي صف (أو عمود آخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير.

مثل

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٨ - ١٥ = -٧$$

بضرب ص١ × ٢ وإضافتة إلى ص٢

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٢٨ - ٣٥ = -٧$$

بضرب ع١ × -٢ وإضافته إلى ع٢

$$\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠ + ٣ = -٧$$

خاصية ⑨

قيمة المحدد الذى ع الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسى

مثال

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٣ \times ٤ = ١٢$$

خاصية ⑩

عند ضرب عناصر أى صف (أو أى عمود) × مرافقات صف آخر (أو عمود آخر) فإن الناتج = ٠

مثال

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٠ \\ ٦ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$$

$$= ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٦ & ٦ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix}$$

$$= ١٦ - ٢١ - ٢(٦ - ١٨) + ٣(٧ - ١٢)$$

$$= -٥ + ٢٠ - ١٥$$

= صفر

أمثلة:

① أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٧ \\ -٢ & -٥ & ٥ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٧ \\ -٢ & ١٠ & ٥ \\ ٢ & -٤ & -٣ \end{vmatrix} =$$ صفر

الحل

الأيمن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ & ٧ \\ -٢ & ٥ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٣ \end{vmatrix}$ = صفر

لأن ع٢ = ع٣

② أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١٢ & ١٥ & ١٧ \\ ٨ & ١١ & ١٣ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} =$$ صفر

الحل بضرب ص٢ × -١ وإضافته إلى ص١

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ٨ & ١١ & ١٣ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

بضرب ص٣ × -١ وإضافته إلى ص٢

$$= \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ١٠ & ١٠ & ١٠ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤٠ \times ٠ = ٠$$

③ أوجد قيمة ك بحيث يكون (س − ٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{س}+٢ & ٥ & ٣ \\ \text{ك}-٤ & \text{ك}-٢\text{س} & \text{ك} \\ ١ & \text{ك}+١ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

∵ س = ٢

$$\therefore \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{٥} & \overset{\ominus}{٥} & \overset{\oplus}{٣} \\ \text{ك}-٤ & \text{ك}-٤ & \text{ك} \\ ١ & \text{ك}+١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore ٥\begin{vmatrix} \text{ك}-٤ & \text{ك} \\ \text{ك}+١ & ١ \end{vmatrix} - ٥\begin{vmatrix} \text{ك}-٤ & \text{ك} \\ ١ & ١ \end{vmatrix} +$$

$$٢\begin{vmatrix} \text{ك}-٤ & \text{ك}-٤ \\ ١ & \text{ك}+١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore ٥[\cancel{\text{ك}}-٤-\text{ك}^٢-\cancel{\text{ك}}] - ٥[\cancel{\text{ك}}-٤-\cancel{\text{ك}}]$$

$$+٢[\text{ك}^٢-٢\text{ك}-٤-\text{ك}+\cancel{٤}] = ٠$$

$$-\cancel{٢٠}-٥\text{ك}^٢+\cancel{٢٠}+٢\text{ك}^٢-١٢\text{ك} = ٠$$

$$-٢\text{ك}^٢-١٢\text{ك} = ٠$$

$$٢\text{ك}(-\text{ك}-٦) = ٠$$

∴ إما ك = ٠ أو ك = ٦

④ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب ج} & \text{أ}^٢ & \text{أ}^٢ \\ \text{ب}^٢ & \text{ج أ} & \text{ب}^٢ \\ \text{ج}^٢ & \text{ج}^٢ & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب ج} & \text{أ ب} & \text{ج أ} \\ \text{أ ب} & \text{ج أ} & \text{ب ج} \\ \text{أ ج} & \text{ب ج} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

الحل

بأخذ ب ج عامل مشترك من ع١

ج أ عامل مشترك من ع٢ ، أ ب عامل مشترك من ع٣

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{ب ج} \times \text{ج أ} \times \text{أ ب} \begin{vmatrix} ١ & \frac{\text{أ}}{\text{ج}} & \frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}} \\ \frac{\text{ب}}{\text{ج}}\cdot\frac{\text{ب}}{\text{أ}} & ١ & \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\cdot\frac{\text{ب}}{\text{ب}} \\ \frac{\text{ج}}{\text{ب}} & \frac{\text{ج}}{\text{أ}} & ١ \end{vmatrix}$$

ونضرب ب ج × ص١ ، ج أ خ ص٢

أ ب خ ص٣

$$\therefore \text{الأيمن} \begin{vmatrix} \text{ب ج} & \text{أ ب} & \text{أ ج} \\ \text{أ ب} & \text{أ ج} & \text{ب ج} \\ \text{أ ج} & \text{ب ج} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

= الطرف الأيسر

④ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بجـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{أجـ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})$$

الحل بضرب ص١ × −١ وإضافته إلى ص٢ مرة و ص٣ مرة أخرى

$$= \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بجـ} \\ ٠ & \text{ب}-\text{أ} & \text{جـ}(\text{أ}-\text{ب}) \\ ٠ & \text{جـ}-\text{أ} & \text{ب}(\text{أ}-\text{جـ}) \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بجـ} \\ ٠ & ١- & \text{جـ} \\ ٠ & ١ & -\text{ب} \end{vmatrix}$$

بضرب ص٢ × ١ وإضافته إلى ص٣

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بجـ} \\ ٠ & ١- & \text{جـ} \\ ٠ & ٠ & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{ب}-\text{جـ})$$

⑤ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{دس} & \text{دس}-\text{أ} & ١ \\ \text{ب}+\text{هـس} & \text{هـس}-\text{ب} & ١ \\ \text{جـ}+\text{وس} & \text{وس}-\text{جـ} & ١ \end{vmatrix} = ٢\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل بضرب ع٢ × ١ وإضافته لـ ع١

$$= \begin{vmatrix} ٢\text{دس} & \text{دس}-\text{أ} & ١ \\ ٢\text{هـس} & \text{هـس}-\text{ب} & ١ \\ ٢\text{وس} & \text{وس}-\text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢\text{س} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{دس}-\text{أ} & ١ \\ \text{هـ} & \text{هـس}-\text{ب} & ١ \\ \text{و} & \text{وس}-\text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$$

بضرب ع١ × −س وإضافته إلى ع٢

$$= ٢\text{س} \begin{vmatrix} \text{د} & -\text{أ} & ١ \\ \text{هـ} & -\text{ب} & ١ \\ \text{و} & -\text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= -٢\text{س} \begin{vmatrix} -\text{أ} & \text{د} & ١ \\ -\text{ب} & \text{هـ} & ١ \\ -\text{جـ} & \text{و} & ١ \end{vmatrix} = ٢\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{د} & ١ \\ \text{ب} & \text{هـ} & ١ \\ \text{جـ} & \text{و} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

⑥ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{أ} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٣}$$

الحل بضرب ع٢ × −ب وإضافته إلى ع١

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^{٢} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

بضرب ع٣ × −جـ٢ وإضافته إلى ع١

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٣} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٣} = \text{الأيسر}$$

⑦ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب+جـ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{جـ+أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ+ب} \end{vmatrix} = \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{٠} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

الحل بجمع ص٢ + ص٣ واضافتها إلى ص١

$$= \begin{vmatrix} \text{٢ب+٢جـ} & \text{٢أ+٢جـ} & \text{٢أ+٢ب} \\ \text{ب} & \text{جـ+أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ب+جـ} & \text{أ+جـ} & \text{أ+ب} \\ \text{ب} & \text{جـ+أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

بضرب ص٣ × −١ واضافتها إلى ص١

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{٠} \\ \text{ب} & \text{جـ+أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

بضرب ص١ × −١ وإضافتها إلى ص٢

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

بضرب ص٢ × −١ واضافتها إلى ص٣

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{٠} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

⑧ اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{−أ} & \text{٠} & \text{جـ} \\ \text{−ب} & \text{−جـ} & \text{٠} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل نفرض أن

$$\text{م} = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{−أ} & \text{٠} & \text{جـ} \\ \text{−ب} & \text{−جـ} & \text{٠} \end{vmatrix} \rightarrow ①$$

بجعل الصفوف أعمدة

$$\therefore \text{م} = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{−أ} & \text{−ب} \\ \text{أ} & \text{٠} & \text{−جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

بأخذ −١ عامل مشترك من كل صف

$$\therefore \text{−١} \times \text{−١} \times \text{−١} \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{−أ} & \text{٠} & \text{جـ} \\ \text{−ب} & \text{−جـ} & \text{٠} \end{vmatrix} = \text{م} \quad ②$$

بجمع ① ، ②

$$\therefore \text{٠} = \text{٢م}$$

$$\therefore \text{م} = \text{٠}$$

⑨ إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{هـ} \end{vmatrix} = \text{٧}$$

اوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٣ص} & \text{٣ع} \\ \text{٤ل+س} & \text{٤م+ص} & \text{٤ن+ع} \\ \text{٥ك+٢ل} & \text{٥ط+٢م} & \text{٥هـ+٢ن} \end{vmatrix}$$

الحل

$$\text{المقدار} = \text{٣} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{٤ل+س} & \text{٤م+ص} & \text{٤ن+ع} \\ \text{٥ك+٢ل} & \text{٥ط+٢م} & \text{٥هـ+٢ن} \end{vmatrix}$$

بضرب $ص_١ \times -١$ وإضافتها إلى $ص_٢$

$$\therefore \text{المحدد} = ٣ \times ٤ \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ٥ك+٢ل & ٥ط+٢م & ٥هـ+٢ن \end{vmatrix}$$

بضرب $ص_٢ \times -٢$ وإضافتها إلى $ص_٣$

$$\therefore \text{المحدد} = ٣ \times ٤ \times ٥ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \times ٤ \times ٥ \times ٧ = ٤٢٠$$

---

⑩ حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} س & س^{٢} & أ^{٣}-س^{٣} \\ ب & ب^{٢} & أ^{٣}-ب^{٣} \\ ج & ج^{٢} & أ^{٣}-ج^{٣} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

حيث ب ≠ ج

الحل

$$\begin{vmatrix} س & س^{٢} & أ^{٢} \\ ب & ب^{٢} & أ^{٢} \\ ج & ج^{٢} & أ^{٢} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & س^{٢} & -س^{٣} \\ ب & ب^{٢} & -ب^{٣} \\ ج & ج^{٢} & -ج^{٣} \end{vmatrix} = ٠$$

$$= أ^{٢} \begin{vmatrix} س & س^{٢} & ١ \\ ب & ب^{٢} & ١ \\ ج & ج^{٢} & ١ \end{vmatrix} - س ب ج \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & ج & ج^{٢} \end{vmatrix} = ٠$$

$$= أ^{٢} \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & ج & ج^{٢} \end{vmatrix} - س ب ج \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & ج & ج^{٢} \end{vmatrix} = ٠$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & ج & ج^{٢} \end{vmatrix} (أ^{٢} - س ب ج) = ٠$$

بضرب $ص_١ \times -١$ وإضافتها إلى $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$= (ب - س)(ج - س) \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ٠ & ١ & ب+س \\ ٠ & ١ & ج+س \end{vmatrix} \times$$

$$(أ^{٣} - س ب ج) = ٠$$

بضرب $ص_٢ \times -١$ وإضافته إلى $ص_٣$

$$= (ب - س)(ج - س) \begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ٠ & ١ & ب+س \\ ٠ & ٠ & ج-ب \end{vmatrix} \times$$

$$(أ^{٣} - س ب ج) = ٠$$

$$= (ب - س)(ج - س) \times (ج - ب) \times (أ^{٣} - س ب ج)$$

$$= ٠$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{إما } س = ب \\ \text{أو } س = ج \\ \text{أو } ج = ب \end{array}\right\} \text{مرفوضة}$$

$$\text{أو } أ^{٣} - س ب ج = ٠$$

$$\therefore أ^{٣} = س ب ج$$

$$\therefore س = \frac{أ^{٣}}{ب ج}$$

⊛ المصفوفات :-

⊛ المعكوس الضربي للمصفوفة :-

إذا كان $أ = \begin{pmatrix} س & ع \\ ص & ل \end{pmatrix}$

فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ هو $أ^{-1}$

بشرط أن $Δ = |أ| \neq ٠$ حيث

$$أ^{-1} = \frac{١}{Δ} \begin{pmatrix} ل & -ع \\ -ص & س \end{pmatrix}$$

أمثلة : أوجد المعكوس الضربي إن وجد لكل من :-

① $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ② $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

① $Δ = |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$

∴ المصفوفة أ ليس لها معكوس ضربي

② $Δ = |ب| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ - ٤ = ٢$ ∴ يوجد معكوس ضربي

حيث $ب^{-1} = \frac{١}{Δ} \times \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -٢ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{pmatrix}$

مثال أوجد قيم س التي تجعل للمحدد $\begin{pmatrix} س^٢ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ يوجد له معكوس ضربي

الحل

$\begin{vmatrix} س^٢ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

$٢س^٢ - ٨ = ٠$

$س^٢ = ٤$

∴ $س = \pm ٢$

∴ قيم س التي تجعل للمحدد معكوس ضربي $= ح - \{٢، -٢\}$

⊛ المعكوس الضربي لمصفوفة على النظم ٣×٣ :-

⊛ **مصفوفة المرافقات** : كما في المثال الآتي

⊛ **المصفوفة الملحقة** ($\text{أ}^{\text{مل}}$) : هي مدور مصفوفة المرافقات

⊛ **لإيجاد معكوس مصفوفة على النظم ٣×٣ نتبع الآتي :**

① نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة $|\text{أ}| \neq ٠$.

② " مصفوفة المرافقات

③ " المصفوفة الملحقة (مدور مصفوفة المرافقات)

④ " المعكوس الضربي $= \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

مثال اوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

الحل

① $$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \overset{+}{٢} & \overset{-}{-١} & \overset{+}{٢} \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(٠-٢٠) + ١(٠-٥) + ٢(١٦-٢)$$

$$= -٤٠ - ٥ + ٢٩$$

$$= -٦ \neq ٠$$

② مصفوفة العوامل المرافقة

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٢٠ & ٥ & ١٢ \\ ١٢ & -٢ & -٩ \\ -١٤ & ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

③ $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢٠ & ١٢ & -١٤ \\ ٥ & -٣ & ٢ \\ ١٣ & -٩ & ١٠ \end{pmatrix}$

④ $\therefore أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \times أ^{مل} = -\frac{١}{٦} \begin{pmatrix} -٢٠ & ١٢ & -١٤ \\ ٥ & -٣ & ٢ \\ ١٣ & -٩ & ١٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{١٠}{٣} & -٢ & \frac{٧}{٣} \\ -\frac{٥}{٦} & \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٣} \\ -\frac{١٣}{٦} & \frac{٣}{٢} & -\frac{٥}{٣} \end{pmatrix}$

⊛ خواص معكوس المصفوفة :-

① $(أب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$

② $(أ^{-١})^{-١} = أ$

③ $(أ^{-١})^{مد} = (أ^{مد})^{-١}$

④ $(أ^{-١})^{٢} = (أ^{٢})^{-١}$

⑤ $(I)^{-١} = I$

حيث I مصفوفة الوحدة المربعة

$I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

مثال إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ اثبت أن

① $(أب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$ ② $(أ^{-١})^{-١} = أ$

الحل ①

$\because |أ| = ٧$ ، $|ب| = ١١$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ -\frac{١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$

$$ب^{-١} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{١١} & -\frac{١}{١١} \\ \frac{١}{١١} & \frac{٢}{١١} \end{pmatrix}$$

$$أ \times ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٦+١ & ٣-٥ \\ ٢-٢ & ١+١٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |أ ب| = ٧٧ + ٠ = ٧٧ \neq ٠$$

$$\therefore (أ ب)^{-١} = \frac{١}{٧٧}\begin{pmatrix} ١١ & ٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧٧} \\ ٠ & \frac{١}{١١} \end{pmatrix} \quad ①$$

$$ب^{-١} \times أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{١١} & -\frac{١}{١١} \\ \frac{١}{١١} & \frac{٢}{١١} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ -\frac{١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١٠}{٧٧} + \frac{١}{٧٧} & \frac{٥}{٧٧} - \frac{٣}{٧٧} \\ \frac{٢}{٧٧} - \frac{٢}{٧٧} & \frac{١}{٧٧} + \frac{٦}{٧٧} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧٧} \\ ٠ & \frac{١}{١١} \end{pmatrix} \quad ②$$

من ① ، ②

$$\therefore (أ ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$$

② $$\because أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ -\frac{١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$$

$$\because |أ^{-١}| = \frac{٦}{٤٩} + \frac{١}{٤٩} = \frac{١}{٧} \neq ٠$$

$$\therefore (أ^{-١})^{-١} = \frac{١}{|أ^{-١}|} \times \begin{pmatrix} \frac{٣}{٧} & -\frac{١}{٧} \\ \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧} \end{pmatrix}$$

$$= ٧ \times \begin{pmatrix} \frac{٣}{٧} & -\frac{١}{٧} \\ \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore (أ^{-١})^{-١} = أ$$

⊛ حل المعادلات باستخدام المعكوس الضربي :-

مثال

اوجد م.ح للمعادلتين

٢س + ٣ص = ٧

٣س − ص = ٥

باستخدام المعكوس الضربي

الحل

المعادلة المصفوفية

$$\text{أ} \times \text{ب} = \text{جـ}$$

حيث

$$\text{أ مصفوفة المعاملات} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب مصفوفة المجاهيل} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\text{جـ \,"\, الثوابت} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب} = \text{أ}^{-١} \times \text{جـ} \quad ①$$

⊛ نوجد $\text{أ}^{-١}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٢ - ٩$$

$$= -١١ \neq ٠$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١١} & \frac{٣}{١١} \\ \frac{٣}{١١} & \frac{-٢}{١١} \end{pmatrix}$$

بالتعويض في ①

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١١} & \frac{٣}{١١} \\ \frac{٣}{١١} & \frac{-٢}{١١} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٧}{١١} + \frac{١٥}{١١} \\ \frac{٢١}{١١} - \frac{١٠}{١١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢

ص = ١

∴ م.ح = {(٢، ١)}

مثال

اوجد م.ح للمعادلتين

٤س + ص = ٠

س + ٢ع = ١٠

ص − ٧ع = ٠

باستخدام المعكوس الضربي

الحل

$$\because \text{أ} \times \text{ب} = \text{جـ}$$

$$\therefore \text{ب} = \text{أ}^{-١} \times \text{جـ} \quad ①$$

⊛ نوجد $\text{أ}^{-١}$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ٤(٠ - ٢) - ١(-٧ - ٠) + ٠(١ - ٠)$$

$$= -٨ + ٧ + ٠$$

$$= -١ \neq ٠$$

مصفوفة العوامل المرافقة = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٧ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -٧ & ١ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ -٧ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ -٧ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٧ & -٢ \\ -٤ & -٢٨ & ٧ \\ -١ & -٨ & ٢ \end{pmatrix}$

$أ^{حل}$ = محدور المصفوفة

$= \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٢ \\ -٨ & -٢٨ & ٧ \\ -١ & -٤ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{-١} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٢ \\ -٨ & -٢٨ & ٧ \\ -١ & -٤ & ١ \end{pmatrix}$

بالتعويض في ①

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -٧ & ٢ \\ ٨ & ٢٨ & -٧ \\ ١ & +٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -١٠٥ \\ ٤٢٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$

∴ س = -١٠٥ ، ص = ٤٢٠ ، ع = ٦٠

∴ م.ح = {(-١٠٥ ، ٤٢٠ ، ٦٠)}

⊛ المصفوفة المنفردة :

محددها = ٠

⊛ المصفوفة الغير المنفردة :

محددها ≠ ٠

مثال اوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٢ \\ س+١ & ٢س & ٣س \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ منفرده

الحل ∴ المصفوفة منفردة ∴ المحدد = ٠

٢[(٣س×٤) - ٢(س+١)] + ١[(٣س×٤) - ٤(س+١)] + ٢[(٣س×٢) - (٢س×٤)] = ٠

٢(١٢س - ٢س - ٢) + [٨س - ٤س - ٤] + ٢[٤س - ١٢س] = ٠

٢٠س - ٦ + ٤س - ٤ - ٢٤س = ٠

١٠س = ١٠ ∴ س = ١

⊛ مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة الغير صفرية هي أعلى درجة لمحدد او محدد أصغر للمصفوفة قيمته ≠ ٠.

إذا كان المصفوفة أ غير صفرية على النظم $م \times ن$ حيث $م \le ن$ فإن مرتبة أ نرمز لها بالرمز ر(أ) حيث

$$\boxed{١ \le ر(أ) \le ن}$$

مثال اوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

① $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

الحل

$\because |أ| = ٢٥ \ne ٠$

$\therefore ر(أ) = ٣$

② $ج = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ ٢ & -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل المصفوفة ج على النظم ٢×٣

$\because \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ + ٤ = -٥ \ne ٠$

$\therefore ر(أ) = ٢$

③ $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

$\because |ب| = ٠$ لأن $ع_٣ = ع_١ + ع_٢$

$\therefore ر(ب) < ٣$

نوجد رتبة اى محدد من الرتبة ٢

$\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٢ = ٧ \ne ٠$

$\therefore ر(ب) = ٢$

④ $د = \begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ١٢ & ١٥ \end{pmatrix}$

الحل المصفوفة د على النظم ٢×٣

$\because \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١٢ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore$ قيمة كل من المحددات الصغرى = ٠

$\therefore ر(أ) < ٢$

$\therefore ر(د) = ١$

ملاحظات :

① مرتبة المصفوفة الصفرية = ٠

② مرتبة المصفوفة أ = مرتبة المصفوفة $أ^{مد}$

③ إذا كان أ مصفوفة وحدة على النظم $م \times م$ فإن مرتبة أ = م لأن $|أ| = ١ \ne ٠$

⊛ المعادلات الخطية المتجانسة :

هي المعادلات التي كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت = ٠

مثل ٢س + ٢ص = ٠ ٤ ٢س − ص = ٠

⊛ المعادلات الخطية الغير متجانسة :

هي المعادلات التي أحد عناصر الثوابت ≠ ٠

مثل ٢س − ص = ٥ ٤ س + ص = ٧

⊛ المصفوفة الموسعة :

إذا كان لدينا نظام م من المعادلات الخطية م ٤ ن من المجاهيل فإننا نكتب على الصورة أ × ب = ج فإن المصفوفة الموسعة هي أ* star

حيث أ* = (أ | ج) وهي على النظم م × (ن + ١)

أمثلة أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة :

① ٢س − ٥ص = ٢
٢س + ٧ص = ٩
٤س − ص = ٢

الحل

$$\left(\begin{array}{c|cc} ٢ & -٥ & ٢ \\ ٩ & ٧ & ٢ \\ ٢ & -١ & ٤ \end{array}\right) = أ^*$$

② س + ص + ع = ٩
٢س − ٢ص + ٢ع = ٢
٢س + ٢ص − ٢ع = −٢

الحل

$$\left(\begin{array}{c|ccc} ٩ & ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & -٢ & ٢ \\ -٢ & -٢ & ٢ & ٢ \end{array}\right) = ب^*$$

⊛ امكانية حل أنظمة المعادلات الخطية :

أولاً : المعادلات غير المتجانسة :-

المجموعة أ × ب = ج حيث ج ≠ □

① يكون للمجموعة المكونة من ن من المعادلات في ن مجهول حل وحيد

إذا كان ر(أ) = ر(أ*) = ن

② يكون للمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول (عدد لانهائي)

إذا كان ر(أ) = ر(أ*) = ك حيث ك < ن

③ إذا كان ر(أ) ≠ ر(أ*) فإن مجموعة المعادلات ليس لها حل على الإطلاق

ثانياً : المعادلات المتجانسة :

المجموعة أ ب = □ (المصفوفة الصفرية)

حيث رتبة مصفوفة المعاملات هي نفسها رتبة المصفوفة الموسعة

① إذا كان عدد المجاهيل = ن = ر(أ) = ر(أ*)

يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري

② إذا كان ر(أ) < ن ، |أ| = ٠

فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

أمثلة: اوجد عدد الحلول للنظام

① ٣س − ٢ص + ٣ع = ٠

س + ص = ٠

ص − ع = ٠

الحل

مصفوفة المعاملات

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢- & ٣ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١- \end{pmatrix}$$

|أ| = ٣(−١−٠) + ٢(−١−٠) + ٣(١−٠)

= −٣ − ٢ + ٣ = −٢ ≠ ٠

∴ ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ هناك حل وحيد وهو الحل الصفري

∴ م.ح = {(٠، ٠، ٠)}

---

② ٣س + ص + ٤ع = ٠

٢س + ٣ص + ٥ع = ٠

−س + ٢ص + ع = ٠

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن $ع_٣ = ع_١ + ع_٢$

∴ ر(أ) = ٢

∵ ر(أ) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للنظام عدد لانهائي من الحلول

ولايجاد الحل العام

بفرض أن س = ل

∴ ص + ٤ع = −٣ل ①

٣ص + ٥ع = −٢ل ②

من ① ص = −٣ل − ٤ع

بالتعويض في ②

∴ ٣(−٣ل − ٤ع) + ٥ع = −٢ل

−٩ل − ١٢ع + ٥ع = −٢ل

−٧ع = ٧ل (÷ −٧)

∴ ع = −ل

بالتعويض في ①

∴ ص − ٤ل = −٣ل

∴ ص = ل

∴ م.ح = {(ل، ل، −ل)}

② اوجد قيمة ل التي تجعل للمعادلات

ل س + ص + ع = ١

س + ل ص + ع = ١

س + ص + ل ع = ١

عدد غير منتهي من الحلول

الحل :

∵ $\begin{pmatrix}\text{ل} & ١ & ١\\ ١ & \text{ل} & ١\\ ١ & ١ & \text{ل}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}١\\ ١\\ ١\end{pmatrix}$

∵ للمعادلات عدد غير منتهي من الحلول

∴ ر(م) = ر(م*) < عدد المجاهيل

وبوضع $\begin{vmatrix}\text{ل} & ١ & ١\\ ١ & \text{ل} & ١\\ ١ & ١ & \text{ل}\end{vmatrix} = ٠$

∴ ل(ل^{٢} − ١) − ١(ل − ١) + ١(١ − ل) = ٠

ل(ل^{٢} − ١) − ل + ١ + ١ − ل = ٠

ل(ل − ١)(ل + ١) − ٢ل + ٢ = ٠

ل(ل − ١)(ل + ١) − ٢(ل − ١) = ٠

(ل − ١)(ل^{٢} + ل − ٢) = ٠

(ل − ١)(ل + ٢)(ل − ١) = ٠

∴ ل = ١ او ل = −٢

عند ل = ١

∴ |م| = ٠ ر(م) = ١

∵ ١ ≤ ر(م) < ٣

∵ م* = $\begin{pmatrix}١ & ١ & ١ & \vdots & ١\\ ١ & ١ & ١ & \vdots & ١\\ ١ & ١ & ١ & \vdots & ١\end{pmatrix}$

ر(م*) = ١

∴ عند ل = ١ يوجد عدد لانهائي من الحلول

عند ل = −٢

∴ م = $\begin{pmatrix}-٢ & ١ & ١\\ ١ & -٢ & ١\\ ١ & ١ & -٢\end{pmatrix}$

ر(م) = ٢

م* = $\begin{pmatrix}-٢ & ١ & ١ & \vdots & ١\\ ١ & -٢ & ١ & \vdots & ١\\ ١ & ١ & -٢ & \vdots & ١\end{pmatrix}$

ر(م*) = ٣

∵ ر(م) ≠ ر(م*)

∴ لا يوجد حل عند ل = −٢