اجابات اختبارات الجبر و الهندسة الفراغية

الاختبار الأول

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ^{ن}ق$_{ن-٣}$ = ٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

∵ ^{ن}ق$_{ن-٣}$ = ٢٠ ∴ ^{ن}ق$_{٣}$ = ٢٠ ∴ ^{ن}ل$_{٣}$ = ٢٠ ٣|

∴ ^{ن}ل$_{٣}$ = ١٢٠ = ^{٦}ل$_{٣}$ ∴ ن = ٦

(٢) ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ... + ت^{١٠٠} = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ١٠٠

الحل

المقدار = (ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤}) + ... + ت^{١٠٠}

= (ت – ١ – ت + ١) + (ت – ١ – ت + ١) + ... إلى ٢٥ حداً

= صفر + صفر + ... إلى ٢٥ حداً = صفر

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ت ، أساسها ر = ت

، حدها الأخير ل = ت^{١٠٠} = (ت^{٤})^{٢٥} = ١

∴ حـ$_{١٠٠}$ = $\frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١}$ = $\frac{١ \times \text{ت} - \text{ت}}{\text{ت} - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{ت} - ١}$ = صفر

(٣) إذا كان : أ (٧ ، –١ ، ٨) ، ب (١١ ، ٢ ، –٤) فإن :

طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (حـ) ١٢ (ء) ١٣

الحل

(أ ب)^{٢} = (١١ – ٧)^{٢} + (٢ + ١)^{٢} + (–٤ – ٨)^{٢} = ١٦ + ٩ + ١٤٤

∴ (أ ب)^{٢} = ١٦٩ ∴ طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ١٣ سم

(٤) إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س – ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠

معادلة كرة طول قطرها = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (ء) ٢٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س – ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠

∴ مركز الكرة (– $\frac{١}{٢}$ معامل س ، – $\frac{١}{٢}$ معامل ص ، – $\frac{١}{٢}$ معامل ع)

= (–٢ ، ٣ ، –٤)

، نق^{٢} = (–١)^{٢} + (٣)^{٢} + (–٤)^{٢} – ٤ = ٢٥ ∴ نق = ٥

∴ طول قطر الكرة = ١٠

حل آخر

نكتب معادلة الكرة على الصورة القياسية باستخدام إكمال المربع كما يلى :

(س^{٢} + ٤ س + ٤) + (ص^{٢} – ٦ ص + ٩) + (ع^{٢} + ٨ ع + ١٦) + ٤

– (٤ + ٩ + ١٦) = ٠

∴ (س + ٢)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٥

∴ نق = ٥ ∴ طول قطر الكرة = ١٠

(٥) إذا كان ل$_{١}$: $\frac{\text{س} - ١}{١}$ = $\frac{\text{ص} + ٢}{-٢}$ = $\frac{\text{ع} + ١}{-٤}$ يوازى

ل$_{٢}$: $\frac{\text{س} + ٥}{-٢}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ك} + ١}$ = $\frac{\text{ع} - ١}{٨}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

∵ ل$_{١}$ // ل$_{٢}$ ∴ $\frac{١}{-٢}$ = $\frac{-٢}{\text{ك} + ١}$ = $\frac{-٤}{٨}$

∴ ك + ١ = ٤ و منها : ك = ٣

(٦) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ (–٢ ، –٦ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ (٢ ، ٦ ، –١) فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

الحل

$$حتا\ \theta = \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\ \|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(–٢ ، –٦ ، ١)\bullet(٢ ، ٦ ، –١)}{\sqrt{٤+٣٦+١}\ \sqrt{٤+٣٦+١}}$$

$$= \frac{–٤ –٣٦ –١}{\sqrt{٤١}\ \sqrt{٤١}} = \frac{–٤١}{٤١} = –١ \quad ∴ \theta = ١٨٠°$$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) معامل $س^{٥}$ فى مفكوك $(٣ – ٢س)^{٧}$ يساوى ....

الحل

$∵ ح_{ر+١} = {}^{٧}ق_{ر} × (–٢س)^{ر}(٣)^{٧–ر}$

$= {}^{٧}ق_{ر} × (–٢)^{ر}(٣)^{٧–ر}(س)^{ر}$ ∴ ر = ٥

∴ الحد المشتمل على $س^{٥}$ هو $ح_{٦}$

∴ معامل $س^{٥}$ = معامل $ح_{٦}$ = ${}^{٧}ق_{٥} × (–٢)^{٥}(٣)^{٢}$ = (–٣٢) × ٩

= –٦٠٤٨

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} – ٨ = ٠$ فى ح هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية ∴ $\Delta = س^{٣}$

∴ المعادلة هى : $س^{٣} – ٨ = ٠$ ∴ $س^{٣} = ٨$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = { ٢ }

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ك\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = –٦\overrightarrow{س} – ٤\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$ و كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$ ∴ (٢ ، ٣ ، ك)•(–٦ ، –٤ ، ٤) = ٠

∴ –١٢ – ١٢ + ٤ك = ٠ ∴ ٤ك = ٢٤ ∴ ك = ٦

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} – ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ فإن : $\overrightarrow{أ} × \overrightarrow{ب}$ = ...

الحل

$$\overrightarrow{أ} × \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ١ & –٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٨\overrightarrow{س} – ٥\overrightarrow{ص} – ٦\overrightarrow{ع}$$

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، –٣ ، ١) و طول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ هى ....

الحل

معادلة الكرة هى : $(س – ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع – ١)^{٢} = ٢٠$

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، –١ ، ٤) ، ب (–١ ، ٠ ، ٢) هى ....

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = (–١ ، ٠ ، ٢) – (٢ ، –١ ، ٤) = (–٣ ، ١ ، –٢)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{س – ٢}{–٣} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع – ٤}{–٢}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $\left(٢س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س

و أثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^{٥}$

الحل

نفرض أن الحد الخالى س هو الحد العام

$$∴ ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} × \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} (٢س)^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_{ر} × (٢)^{١٥-ر} (س)^{-٢ر} (س)^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_{ر} × (٢)^{١٥-ر} (س)^{١٥-٣ر}$$

بوضع : $١٥ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ٥$

∴ الحد الخالى من س هو $ح_{٦} = {}^{١٥}ق_{٥} × (٢)^{١٠} = ٣٠٧٥٠٧٢$

، بفرض أن الحد المشتمل على $س^{٥}$ هو الحد العام

بوضع : $١٥ - ٣ر = ٥$ ∴ $ر = \frac{١٠}{٣} \notin ص^{+}$

∴ هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^{٥}$

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٣ع+٢}{٤}$$

الحل

نفرض أن : $\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٣ع+٢}{٤} = ك$

∴ $\frac{س+٣}{٢} = ك$ و منها : $س = -٣ + ٢ك$

، $\frac{٢ص-١}{٥} = ك$ و منها : $ص = \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}ك$

، $\frac{٣ع+٢}{٤} = ك$ و منها : $ع = -\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣}ك$

، $\vec{ر} = (-٣ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{٢}{٣}) + ك(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣})$

، $\frac{س+٣}{٢} = \frac{ص-\frac{١}{٢}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{ع+\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}}$

السؤال الرابع :

(١) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{pmatrix}$

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{vmatrix} = ١(-٦٣-٥) + ١(٤٢-١) + ٢(١٠+٣) = -١$$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١} = -٦٣ - ٥ = -٦٨$ ،

$أ_{١٢} = -(٤٢-١) = -٤١$ ، $أ_{١٣} = ١٠ + ٣ = ١٣$ ،

$أ_{٢١} = -(-٢١-١٠) = ٣١$ ، $أ_{٢٢} = ٢١ - ٢ = ١٩$ ، $أ_{٢٣} = -(٥+١) = -٦$ ،

$أ_{٣١} = ١ + ٤ = ٥$ ، $أ_{٣٢} = -(١-٤) = ٣$ ، $أ_{٣٣} = -٣ + ٢ = -١$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -٦٨ & -٤١ & ١٣ \\ ٣١ & ١٩ & -٦ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix}$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} × أ^{مد} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٨ & -٣١ & -٥ \\ ٤١ & -١٩ & -٣ \\ -١٣ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$$

(٢) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ على الصورة المثلثية

الحل

∴ $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ ∴ $س = ٢$ ، $ص = -٢\sqrt{٣}$

∴ $ل^{٢} = (٢)^{٢} + (-٢\sqrt{٣})^{٢} = ٤ + ١٢ = ١٦$ ∴ $ل = ٤$

∴ $ظا θ = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ ، ∵ $س > ٠$ ، $ص < ٠$

∴ ع يقع فى الربع الرابع ، ∴ $\theta = \text{ظا}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$

∴ ع = ٤ (حتا $(-\frac{1}{3}\pi)$ + ت حا $(-\frac{1}{3}\pi)$)

، $\text{ع}^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{حتا}\ \frac{(-\frac{1}{3}\pi) + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت حا}\ \frac{(-\frac{1}{3}\pi) + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$ ، ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ ∴ الجذر الأول = ٢ (حتا $(-\frac{1}{6}\pi)$ + ت حا $(-\frac{1}{6}\pi)$) ،

عندما : ر = ١ ∴ الجذر الثانى = ٢ (حتا $\frac{5}{6}\pi$ + ت حا $\frac{5}{6}\pi$)

السؤال الخامس :

(أ) حل المعالات الآتية : س + ٣ ص + ٢ ع = ١٣ ،
٢ س − ص + ع = ٣ ، ٣ س + ص − ع = ٢
باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 3(-2-3) + 2(2+3) = 25$$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}_{11}} = 1 - 1 = 0$ ،

$\overline{\text{أ}_{12}} = -(-2-3) = 5$ ، $\overline{\text{أ}_{13}} = 2 + 3 = 5$ ،

$\overline{\text{أ}_{21}} = -(-3-2) = 5$ ، $\overline{\text{أ}_{22}} = -1 - 6 = -7$ ، $\overline{\text{أ}_{23}} = -(1-9) = -8$ ،

$\overline{\text{أ}_{31}} = 3 + 2 = 5$ ، $\overline{\text{أ}_{32}} = -(1-4) = 3$ ، $\overline{\text{أ}_{33}} = -1 - 6 = -7$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 8 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مد}} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ ∴ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ب}$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ، مجموعة الحل = {(١ ، ٢ ، ٣)}

(ب) أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢ س + ص − ع = −١ ،
س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ع = ٦

الحل

٢ س + ص − ع = −١ (١) ، س + ص + ع = ٢ (٢)

، ٣ س − ص − ع = ٦ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) ينتج : ٤ س = ٨ ∴ س = ٢

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣ س + ٢ ص = ١ (٤)

بالتعويض عن قيمة س ينتج : ٦ − ٢ ص = ١ ∴ ٢ ص = −٥

و منها : ص = $-\frac{5}{2}$ بالتعويض فى (٢) ينتج : ع = $\frac{5}{2}$

∴ نقطة تقاطع المستويات هى : (٢ ، $-\frac{5}{2}$ ، $\frac{5}{2}$)

حل آخر

من (٤) بفرض أن : س = ك ∴ ٣ ك + ٢ ص = ١ ∴ ص = $\frac{1 - 3\text{ك}}{2}$ (٥)

بالتعويض فى (٢) ينتج : ٣ ك + (١ − ٣ ك)/٢ + ع = ٢   بالضرب × ٢

∴ ك + ١ − ٣ ك + ٢ ع = ٤   ∴ ٢ ع − ك = ٣

و منها : ع = (٣ + ك)/٢   (٦)   بالتعويض فى (٣) ينتج :

٣ ك − (١ − ٣ ك)/٢ − (٣ + ك)/٢ = ٦   بالضرب × ٢

٦ ك − ١ + ٣ ك − ٣ − ك = ١٢   ∴ ٨ ك = ١٦   ∴ ك = ٢

بالتعويض فى (٥) ، (٦) ∴ ص = − ٥/٢   ،   ع = ٥/٢

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ك عدد لا نهائى من الحلول فإن : ك = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

الحل

∵ أ = (٢ ١ / ٤ ٢) ، أ* = (٢ ١ | ١ / ٤ ٢ | ك) ، أ* على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما عدد لا نهائى من الحلول

، و عدد المجاهيل = ٢   ∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ* هى ٢ ، و قيمته = ٠

∴ |٢ ١ / ٢ ك| = ٠   ∴ ك − ٢ = ٠   ومنها : ك = ٢

(٢) إذا كان : ن+١ق٣ : نق٤ = ٢ : ٣   فإن : ن = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (جـ) ٥   (د) ١١

الحل

∵ ن+١ق٣ / نق٤ = ٢/٣   ∴ (|ن + ١) / (|ن − ٢ |٣) × (|٤ |ن − ٤) / |ن = ٢/٣

∴ ((ن + ١) |ن) / ((ن − ٢)(ن − ٣) |ن − ٤ |٣) × (٤ |ن − ٤ |٣) / |ن = ٢/٣

و منها : (ن − ٢)(ن − ٣) = ٦ (ن + ١)

∴ ن² − ٥ ن + ٦ = ٦ ن + ٦   أى : ن² − ١١ ن = ٠

∴ ن (ن − ١١) = ٠   و منها : ن = ٠ مرفوض   ،   ن = ١١

(٣) إذا كان : س² + ص² + ع² + ٦ س − ٤ ص + ١٠ ع − ٨ = ٠ معادلة كرة مركزها م فإن : م = ...

(أ) ١٠   (ب) ١١   (جـ) ١٢   (د) ١٣

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س² + ص² + ع² + ٦ س − ٤ ص + ١٠ ع − ٨ = ٠

∴ مركز الكرة (− ½ معامل س ، − ½ معامل ص ، − ½ معامل ع)

= (− ٣ ، ٢ ، − ٥)

(٤) إذا كان : →أ = (− ٢ ، ٤ ، ٦) ، →ب = (٠ ، ك ، ٣) حيث ك ∈ ص+ و كان || →أب || = ٧ فإن : قيمة ك = ...

(أ) ١٠   (ب) ٨   (جـ) ٦   (د) ٤

الحل

∵ || →أب || = ٧ وحدة طول   ∴ (|| →أب ||)² = ٤٩

∴ ٤ + (ك − ٤)² + ٩ = ٤٩   ∴ (ك − ٤)² = ٣٦

∴ ك − ٤ = ٦   أو   ك − ٤ = − ٦

∴ ك = ١٠   ∴ ك = − ٢ مرفوض لأن : ك ∈ ص+

أحمد الشنتورى

(٥) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{\text{أ}} = (2 ، 0 ، 2)$ ، $\vec{\text{ب}} = (0 ، 0 ، 4)$ فإن $\theta = ...$

(أ) 30° (ب) 45° (حـ) 60° (ء) 90°

الحل

$$\text{حتا}\ \theta = \frac{\vec{\text{أ}} \bullet \vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|} = \frac{(2 ، 0 ، 2)\bullet(0 ، 0 ، 4)}{\sqrt{8}\ \sqrt{16}} = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \theta = 45^\circ$

(٦) إذا كان $\text{ل}_1 : \frac{\text{س} - 3}{2} = \frac{-\text{ص} - 1}{6} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$ يوازى

$\text{ل}_2 : \frac{\text{س} + 2}{6} = \frac{\text{ص} - 4}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - 1}{3}$ فإن $\text{ك} + \text{م} = ...$

(أ) -17 (ب) -10 (حـ) 10 (ء) 17

الحل

$\text{ل}_1 : \frac{\text{س} - 3}{2} = \frac{\text{ص} - (-1)}{-6} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$

$\because$ ميل ل_1 $(\vec{\text{هـ}}_1) = (2 ، -6 ، \text{ك})$ ، ميل ل_2 $(\vec{\text{هـ}}_2) = (6 ، \text{م} ، 3)$

، $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ $\therefore \frac{2}{6} = \frac{-6}{\text{م}} = \frac{\text{ك}}{3}$ ومنها :

$2\text{م} = -36$ $\therefore \text{م} = -18$ ، $6\text{ك} = 6$ $\therefore \text{ك} = 1$

$\therefore \text{ك} + \text{م} = -18 + 1 = -17$

حل آخر

$\because \text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ $\therefore \vec{\text{هـ}}_1 = \text{ن}\,\vec{\text{هـ}}_2$ $\therefore (2 ، -6 ، \text{ك}) = \text{ن}(6 ، \text{م} ، 3)$

$\therefore 2 = 6\text{ن}$ و منها : $\text{ن} = \frac{1}{3}$

، $-6 = \text{ن}\,\text{م}$ $\therefore -6 = \frac{1}{3}\text{م}$ و منها : $\text{م} = -18$

، $\text{ك} = 3\text{ن}$ $\therefore \text{ك} = 3 \times \frac{1}{3}$ و منها : $\text{ك} = 1$

$\therefore \text{ك} + \text{م} = -18 + 1 = -17$

حل ثالث

$\because \text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ $\therefore \vec{\text{هـ}}_1 \times \vec{\text{هـ}}_2 = \vec{0}$ $(\vec{\text{و}})$

$$\therefore \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ 2 & -6 & \text{ك} \\ 6 & \text{م} & 3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\therefore (-18 - \text{م}\,\text{ك})\vec{\text{س}} - (6 - 6\text{ك})\vec{\text{ص}} + (2\text{م} - 36)\vec{\text{ع}} = \vec{0}$

و منها : $6 - 6\text{ك} = 0$ و منها : $\text{ك} = 1$

، $2\text{م} = -36$ و منها : $\text{م} = -18$

$\therefore \text{ك} + \text{م} = -18 + 1 = -17$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ ....\ + \omega^{100} = ...$

الحل

المقدار $= 33(\omega + \omega^2 + \omega^3) + [(\omega^3)^{33} \times \omega]$

$= 33 \times 0 + 1 \times \omega = \omega$

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول $\text{أ} = \omega$ ، أساسها $\text{ر} = \omega$

، حدها الأخير $\text{ل} = \omega^{100} = (\omega^3)^{33} \times \omega = 1 \times \omega = \omega$

$$\therefore \text{حـ}_{100} = \frac{\text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1} = \frac{\omega \times \omega - \omega}{\omega - 1} = \frac{\omega(\omega - 1)}{\omega - 1} = \omega$$

(٢) إذا كان : أ َ ، ب َ ، حـ َ هى أطوال أضلاع مثلث فإن قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' & \text{حـ}' \\ 5 & 7 & 8 \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا حـ} \end{vmatrix} = ...$$

الحل

$\because \frac{\text{أ}'}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{حا حـ}} = \text{ك}$

أحمد الشنتورى

∴ $\acute{أ} = ك\,\text{حا}\,أ$ ، $\acute{ب} = ك\,\text{حا}\,ب$ ، $\acute{حـ} = ك\,\text{حا}\,حـ$

$$\therefore \begin{vmatrix} \acute{أ} & \acute{ب} & \acute{حـ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا}\,أ & \text{حا}\,ب & \text{حا}\,حـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ك\,\text{حا}\,أ & ك\,\text{حا}\,ب & ك\,\text{حا}\,حـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا}\,أ & \text{حا}\,ب & \text{حا}\,حـ \end{vmatrix}$$

$$= ك \begin{vmatrix} \text{حا}\,أ & \text{حا}\,ب & \text{حا}\,حـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا}\,أ & \text{حا}\,ب & \text{حا}\,حـ \end{vmatrix} = ٠$$ لأن : $ص_١ = ص_٣$

(٣) إذا كان $\vec{أ} = (-١ ، ٤ ، ٢)$ ، $\vec{ب} = (٢ ، ٢ ، ١)$ فإن : مركبة $\vec{أ}$ فى إتجاه $\vec{ب}$ = ...

الحل

مركبة $\vec{أ}$ فى اتجاه $\vec{ب}$ $= \dfrac{\vec{أ} \bullet \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} = \dfrac{(-١ ، ٤ ، ٢)\bullet(٢ ، ٢ ، ١)}{\sqrt{٩}} = \dfrac{٨}{٣}$

(٤) إذا كان : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤\,ك\,س + ٤\,ص - ٨\,ك\,ع + ٢\,ك = ٠$ معادلة كرة طول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ مركز الكرة $= (٢ك ، -٢ ، ٤ك)$ ، نق $= ٢\sqrt{٥}$ ، حـ $= ٢ك$

∴ $٤ك^٢ + ٤ + ١٦ - ٢ك = ٢٠$ ∴ $٤ك^٢ - ٢ك = ٠$

∴ $٢ك(٢ك - ١) = ٠$ و منها : $ك = ٠$ أ، $ك = \frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان : المستوى $٣س - ص + ٢ع + ٣ = ٠$ ، المستوى $ك\,س - ٤ص + ع - ٥ = ٠$ متعامدان فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ متجها الاتجاه العموديين على المستويين هما :

$\vec{ن}_١ = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\vec{ن}_٢ = (ك ، -٤ ، ١)$

، ∵ المستويان متعامدان ∴ $\vec{ن}_١ \bullet \vec{ن}_٢ = ٠$

∴ $(٣ ، -١ ، ٢) \bullet (ك ، -٤ ، ١) = ٠$

∴ $٣ك + ٤ + ٢ = ٠$ ∴ $٣ك = -٦$ ∴ $ك = -٢$

(٦) إذا كانت : حـ$(-١ ، ٦ ، -٥)$ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ$(ك - ٢ ، -١ ، م + ٣)$ ، ب$(٢ ، ن - ٧ ، -٢)$ فإن : $ك + م - ن = ...$

الحل

∵ حـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\dfrac{ك - ٢ + ٢}{٢} = -١$ ∴ $ك = -٢$

، $\dfrac{-١ + ن - ٧}{٢} = ٦$ ∴ $ن - ٨ = ١٢$ ∴ $ن = ٢٠$

، $\dfrac{م + ٣ - ٢}{٢} = -٥$ ∴ $ن + ١ = -١٠$ ∴ $م = -١١$

∴ $ك + م - ن = -٢ - ١١ - ٢٠ = -٣٣$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) أوجد معامل $س^٥$ فى مفكوك $(١ - س + س^٢)(١ + س)^{١١}$

الحل

المقدار $= (١ - س + س^٢)(١ + س)^{١١}$

$= (١ - س + س^٢)(١ + {}^{١١}ق_١\,س + {}^{١١}ق_٢\,س^٢ + {}^{١١}ق_٣\,س^٣ + {}^{١١}ق_٤\,س^٤$

$+ {}^{١١}ق_٥\,س^٥ + ... + س^{١١})$

الحدود المشتملة على $س^٥$ هى : $١ \times {}^{١١}ق_٥\,س^٥$ ، $-س \times {}^{١١}ق_٤\,س^٤$ ، $س^٢ \times {}^{١١}ق_٣\,س^٣$

∴ معامل $س^٥ = {}^{١١}ق_٥ - {}^{١١}ق_٤ + {}^{١١}ق_٣ = ٤٦٢ - ٣٣٠ + ١٦٥ = ٢٩٧$

(٢) أثبت أن : المستقيم $\dfrac{س - ١}{٣} = \dfrac{ص + ٣}{-١} = \dfrac{ع}{٣}$ يقطع المستوى $٣س + ٢ص + ع - ٨ = ٠$ فى نقطة ثم أوجد

زاوية ميل المستقيم على المستوى

الحل

نفرض أن : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣} = ك$

∴ $س = ١ + ٢ك$ ، $ص = -٣ - ك$ ، $ع = ٣ك$

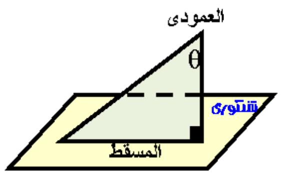
بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

$٣(١ + ٢ك) + ٢(-٣ - ك) + ٣ك - ٨ = ٠$

∴ $٣ + ٦ك - ٦ - ٢ك + ٣ك - ٨ = ٠$ ∴ $٧ك = ١١$ ∴ $ك = \frac{١١}{٧}$

∴ $س = ١ + ٢ \times \frac{١١}{٧} = \frac{٢٩}{٧}$ ، $ص = -٣ - \frac{١١}{٧} = -\frac{٣٢}{٧}$

، $ع = ٣ \times \frac{١١}{٧} = \frac{٣٣}{٧}$ ∴ نقطة التقاطع هى $(\frac{٢٩}{٧} ، -\frac{٣٢}{٧} ، \frac{٣٣}{٧})$



متجه الاتجاه العمودى على المستوى = $(٣ ، ٢ ، ١)$

، متجه اتجاه المستقيم = $(٢ ، -١ ، ٣)$

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيم و العمودى على المستوى = θ

∴ $حتا \theta = \frac{(٣ ، ٢ ، ١) \bullet (٢ ، -١ ، ٣)}{\sqrt{١٤}\ \sqrt{١٤}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$

∴ $\theta = ٦٠^\circ$ ∴ قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى = $٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$

السؤال الرابع :

(أ) أحسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ و من ثم أثبت أن :

مجموعة حل المعادلات $٢س - ص - ٣ع = ٠$ ، $س + ٢ص + ع = ١$ ، $٣س - ٥ص + ٢ع = ١٣$ لها حل وحيد و أوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢(٤ + ٥) + ١(٢ - ٣) - ٣(-٥ - ٦) = ٥٠ \neq ٠$

∴ ر(أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : $أ\ \tilde{س} = ب$ حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\tilde{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١} = ٤ + ٥ = ٩$ ،

$أ_{١٢} = -(٢ - ٣) = ١$ ، $أ_{١٣} = -٥ - ٦ = -١١$ ،

$أ_{٢١} = -(-٢ - ١٥) = ١٧$ ، $أ_{٢٢} = ٤ + ٩ = ١٣$ ، $أ_{٢٣} = -(-١٠ + ٣) = ٧$ ،

$أ_{٣١} = -١ + ٦ = ٥$ ، $أ_{٣٢} = -(٢ + ٣) = -٥$ ، $أ_{٣٣} = ٤ + ١ = ٥$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٩ & ١ & -١١ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \\ ٥ & -٥ & ٥ \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ∴ $\tilde{س} = أ^{-١}\ ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ -٥٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = -١ ، ع = ١ ، مجموعة الحل = {(٢ ، -١ ، ١)}

(٢) أوجد الصورة الأسية للعدد $ع = \frac{٢ + ٦\text{ت}}{٣ - \text{ت}}$ ثم أوجد كلاً من :

$ع^{-١}$ ، $\bar{ع}$ ، $\sqrt{ع}$ على الصورة المثلثية

الحل

$$ع = \frac{٢+٦\text{ت}}{٣-\text{ت}} \times \frac{٣+\text{ت}}{٣+\text{ت}} = \frac{٦+٢٠\text{ت}-٦}{٩+١} = ٢\,\text{ت}$$

$$= ٢\,(\text{حتا}\ \tfrac{١}{٢}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٢}\pi) = ٢\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\pi\text{ت}}$$

، ∵ $١ = \text{حتا}\ ٠ + \text{ت حا}\ ٠$.

$$\therefore ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{حتا}\ ٠ + \text{ت حا}\ ٠}{\text{حتا}\ \tfrac{١}{٢}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٢}\pi}\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{حتا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi)\right)$$

$$،\ \bar{ع} = ٢\,(\text{حتا}\ \tfrac{١}{٢}\pi - \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٢}\pi)$$

$$= ٢\,(\text{حتا}\ (٠ - \tfrac{١}{٢}\pi) + \text{ت حا}\ (٠ - \tfrac{١}{٢}\pi))$$

$$= ٢\,(\text{حتا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi))$$

$$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\ \tfrac{١}{٢}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٢}\pi)^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \text{حتا}\ \frac{\tfrac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢} + \text{ت حا}\ \frac{\tfrac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢}\ ،\ ر = ٠ ، -١$$

عندما : $ر = ٠$ فإن : $ع_{١}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\ \tfrac{١}{٤}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٤}\pi)$ ،

عندما : $ر = -١$ فإن : $ع_{٢}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi))$

، $ع^{\frac{١}{٢}} = ٢(\text{حتا} \quad + \text{ت حا} \quad)$ ، $ر = ٠ ، -١$

عندما : $ر = ٠$ فإن : $\sqrt{ع} = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\ \tfrac{١}{٤}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٤}\pi)$ ،

عندما : $ر = -١$ فإن : $\sqrt{ع} = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi))$

السؤال الخامس :

(أ) أثبت أن : إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}} = \sqrt{٢}$

الحل

نفرض أن : $ع_{١} = \text{ت} = \text{حتا}\ \tfrac{١}{٢}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٢}\pi$

$$\therefore ع_{١} = \sqrt{\text{ت}} = \left(\text{حتا}\ \frac{\tfrac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢} + \text{ت حا}\ \frac{\tfrac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢}\right)$$

، $ر = ٠ ، -١$

عندما : $ر = ٠$ فإن : $\sqrt{ع_{١}} = \text{حتا}\ \tfrac{١}{٤}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{١}{٤}\pi$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} \qquad (١)$$

، عندما : $ر = -١$ فإن : $\sqrt{ع_{١}} = \text{حتا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{٣}{٤}\pi)$

$$= -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} \qquad (٢)$$

و نفرض أن : $ع_{٢} = -\text{ت} = \text{حتا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{١}{٢}\pi)$

$$\therefore ع_{٢} = \sqrt{-\text{ت}} = \left(\text{حتا}\ \frac{(-\tfrac{١}{٢}\pi) + ٢ر\pi}{٢} + \text{ت حا}\ \frac{(-\tfrac{١}{٢}\pi) + ٢ر\pi}{٢}\right)$$

، $ر = ٠ ، ١$

عندما : $ر = ٠$ فإن : $\sqrt{ع_{٢}} = \text{حتا}\ (-\tfrac{١}{٤}\pi) + \text{ت حا}\ (-\tfrac{١}{٤}\pi)$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} \qquad (٣)$$

، عندما : $ر = ١$ فإن : $\sqrt{ع_{٢}} = \text{حتا}\ \tfrac{٣}{٤}\pi + \text{ت حا}\ \tfrac{٣}{٤}\pi$

$$= -\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} \qquad (٤)$$

من (٢) ، (٤) :

إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} + \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت}$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

(٢) إذا كان : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١

، (س + ٤)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ٤ معادلتا كرتين

أوجد البعد بين مركزى الكرتين و بين أن الكرتين غير متقاطعتين

الحل

مركز الكرة الأولى (م$_{١}$) = (٢ ، −٤ ، ٢) ، نق$_{١}$ = ١

مركز الكرة الثانية (م$_{٢}$) = (−٤ ، ٤ ، ٢) ، نق$_{٢}$ = ٢

∴ (م$_{١}$م$_{٢}$)^{٢} = (−٤ − ٢)^{٢} + (٤ + ٤)^{٢} + (٢ − ٢)^{٢} = ١٠٠

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ = ١٠ ، ∵ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ٣

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

∴ الكرتان متباعدتان (غير متقاطعتين)

الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع معاملات الحدود فى مفكوك (١ + س)^{٥} يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٥ (حـ) ٣٢ (ء) ٥

الحل

مجموع معاملات الحدود فى مفكوك (١ + ١)^{٥} = (٢)^{٥} = ٣٢

(٢) إذا كان : س عدد مركب فإن : عدد حلول المعادلة

$\begin{vmatrix} س^{٣} + ١ & س - ١ \\ س + ١ & س^{٣} - ١ \end{vmatrix}$ = ٠ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (حـ) ٤ (ء) ٣

الحل

∵ Δ = (س^{٣} + ١)(س^{٣} − ١) − (س + ١)(س − ١)

= س^{٦} − ١ − (س^{٢} − ١) = س^{٦} − ١ − س^{٢} + ١ = س^{٦} − س^{٢}

= س^{٢}(س^{٤} − ١) = س^{٢}(س + ١)(س − ١)(س^{٢} + ١)

∴ المعادلة هى : س^{٢}(س + ١)(س − ١)(س^{٢} + ١) = ٠

، ∵ س عدد مركب ∴ عدد حلول : س^{٢} + ١ = ٠ هو : ٢

، ∵ عدد حلول : س^{٢}(س + ١)(س − ١) = ٠ هو : ٣

∴ عدد حلول المعادلة هو : ٥

(٣) إذا كان : (س ، ص ، ع) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(−٤ ، ٠ ، ٥)

، ب(−٢ ، ٤ ، −١٣) فإن : س + ص + ع = ...

(أ) −٥ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ٩

الحل

∵ (س ، ص ، ع) منتصف $\overline{أب}$ ∴ س = $\frac{-٤ - ٢}{٢}$ = −٣

، ص = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢ ، ع = $\frac{٥ - ١٣}{٢}$ = −٤

∴ س + ص + ع = −٣ + ٢ − ٤ = −٥

(٤) إذا كان : أ(−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب(١ ، ٢ ، ل) و كان طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{٧٧}$ فإن : إحدى قيم ل هى ....

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (ء) ٢٠

الحل

∵ طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{٧٧}$ ∴ أب = $\sqrt{٧٧}$ ∴ (أب)^{٢} = ٧٧

∴ (١ + ٤)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢} + (ل − ٣)^{٢} = ٧٧

∴ ٢٥ + ١٦ + (ك − ٣)^{٢} = ٧٧ ∴ (ك − ٣)^{٢} = ٣٦

∴ ك − ٣ = ٦ و منها : ك = ٩ " إحدى قيم ك "

أو ك − ٣ = −٦ و منها : ك = −٣

(٥) إذا كان : أ⃗ (−١ ، ٣ ، ٤) ، ب⃗ (٠ ، −٢ ، ٥) فإن :

|| أب⃗ || = ...

(أ) ٢ √٣ (ب) ٣ √٣ (جـ) ٤ √٣ (د) ٥ √٣

الحل

(|| أب⃗ ||)^{٢} = (٠ + ١)^{٢} + (−٢ − ٣)^{٢} + (٥ − ٤)^{٢} = ٢٧

∴ || أب⃗ || = √٢٧ = ٣ √٣

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٠ ، −٥) على المستوى

٢س + √٥ ص + ٤ ع − ٦ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٧

الحل

طول العمود = $\frac{|٢ \times ٣ + \sqrt{٥} \times ٠ + ٤ \times (-٥) - ٦|}{\sqrt{٢ + ٥ + ١٦}}$ = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° فإن : سعة العدد ع = ...

الحل

∵ ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° = حتا (−٩٠° + ٦٠°) + ت حا (−٩٠° + ٦٠°)

= حتا (−٣٠°) + ت حا (−٣٠°)

∴ سعة العدد ع = (−٣٠°) = (−$\frac{١}{٦}$ π)

(٢) رتبة المصفوفة أ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{pmatrix}$ = ...

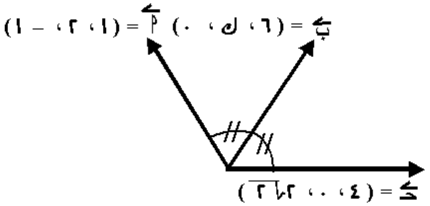
الحل

∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٠ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٠ لأن : ص$_١$ = ص$_٢$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ قيمة كل المحددات الصغرى = ٠ ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

(٣) فى الشكل الموضح :



أ⃗ = (١ ، ٢ ، −١) ،

ب⃗ = (٦ ، ك ، ٠) ،

جـ⃗ = (٤ ، ٠ ، ٢ √٢)

قيمة ك = ...

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين أ⃗ ، ب⃗ = θ ، بين ب⃗ ، جـ⃗ = β

، ∵ θ = β ∴ حتا θ = حتا β ∴ $\frac{\vec{أ} \bullet \vec{ب}}{||\vec{أ}||\,||\vec{ب}||}$ = $\frac{\vec{ب} \bullet \vec{جـ}}{||\vec{ب}||\,||\vec{جـ}||}$

∴ $\frac{٦ + ٢ك}{\sqrt{٦}\,\sqrt{٣٦ + ك^{٢}}}$ = $\frac{٢٤}{٢\sqrt{٦}\,\sqrt{٣٦ + ك^{٢}}}$

و منها : ٦ + ٢ك = ١٢ و منها : ك = ٣

(٤) طول نصف قطر الكرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س − ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠

يساوى = ...

الحل

∵ مركز الكرة = (−٢ ، ٣ ، −٤) ، حـ = −٤

∴ نق^{٢} = ٤ + ٩ + ١٦ − ٤ = ٢٥ ∴ نق = ٥

(٥) إذا كان : المستقيم $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ل}$ **يوازى المستقيم** $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ **فإن :** ل + م = ...

الحل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{-٦}{م} = \frac{ل}{٣}$ و منها :

٢ م = −٢٤ ∴ م = −١٢ ، ٤ ل = ٦ ∴ ل = ١,٥

∴ ل + م = −١٢ + ١,٥ = −١٠,٥

(٦) إذا كان : المستقيم $\frac{س + ٢}{٦} = \frac{ص - ١}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ **عمودى على المستقيم** $\frac{س - ٩}{-٢} = \frac{ص + ٨}{١}$ ، ع = ٣ **فإن :** م = ...

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (٦ ، م ، ٣) ، (−٢ ، ١ ، ٠)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (٦ ، م ، ٣) • (−٢ ، ١ ، ٠) = ٠

∴ −١٢ + م = ٠ ∴ م = ١٢

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣ أ + ٦ أ س + ٥ أ س^{٢} + ...$

حيث ن ∈ $ص_{+}$ أوجد قيمة كل من م ، أ

الحل

∵ معامل $ع_{١}$ = ٣ أ ، معامل $ع_{٢}$ = ٦ أ ، معامل $ع_{٣}$ = ٥ أ

∴ $\frac{معامل\ ع_{٢}}{معامل\ ع_{١}} = \frac{٦ أ}{٣ أ} = ٢$ ∴ $\frac{ن - ١ + ١}{١} \times \frac{١}{م} = ٢$ ∴ ن = ٢ م

، $\frac{معامل\ ع_{٣}}{معامل\ ع_{٢}} = \frac{٥ أ}{٦ أ} = \frac{٥}{٦}$ ∴ $\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{١}{م} = \frac{٥}{٦}$

و منها : ٣ ن − ٣ = ٥ م بالتعويض عن : ن = ٢ م

∴ ٦ م − ٣ = ٥ م و منها : م = ٣ ، بالتالى : ن = ٦

، ∵ $م^{ن}$ = ٣ أ ∴ $٣^{٦}$ = ٣ أ و منها : أ = $٣^{٥}$ = ٢٣٤

(٢) أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى و أكتب الصورة العامة لهذا الحل : ٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س + ٥ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠

الحل

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$ = ٢ (−٥ + ٣) + ١ (−٤ + ٢) − ٣ (١٢ − ١٠) = ٠

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٠ + ٤ = ١٤ ≠ ٠ ∴ ر (أ) < ٢

، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، ر (أ) < عدد المجاهيل

، المعادلات متجانسة ∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول غير الحل الصفرى

لإيجاد الصورة العامة للحل نتبع الخطوات التالية :

١) نكتب المصفوفة الموسعة ($أ^{*}$) للمصفوفة أ " لاحظ الحدود المطلقة = ٠ "

٢) نجرى تحويلات أولية على صفوف $أ^{*}$ (كما فى المحددات) لنوجد مصفوفة مكافئة لها على صورة مصفوفة مثلثية أو تحتوى على أكبر عدد من الأصفار

٣) نقرأ المعادلات من خلال الصفوف ثم نوجد الحل " لاحظ : لا معنى لـ $أ^{-١}$ "

$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -١ & ٠ \end{array}\right)$ بإجراء : $ص_{٢} - ٢ ص_{١}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$

$\text{ﭐ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٧ & -٧ & ٠ \\ ٠ & ٤ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$ ∴ من الصف الثانى : ٧ ص – ٧ ع = ٠

∴ ص = ع ، بفرض أن : ص = ل ∴ ع = ل

، ∵ من الصف الأول : ٢ س – ص + ٣ ع = ٠ ∴ ٢ س – ل + ٣ ل = ٠

و منها : ٢ س = – ٢ ل ∴ س = – ل

∴ الصورة العامة للحل هى : (– ل ، ل ، ل)

السؤال الرابع :

(١) إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = ١$ ، سعة $(ع_١ ع_٢^٣) = ٨١^\circ$ ، سعة $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = ٣٣^\circ$ أوجد على صورة س + ص ت

$(ع_١^{١٥} + ع_٢^{١٥})$

الحل

نفرض أن : سعة $ع_١ = θ_١$ ، سعة $ع_٢ = θ_٢$

∴ $θ_١ + ٣ θ_٢ = ٨١^\circ$ ، $θ_١ - θ_٢ = ٣٣^\circ$ بالطرح ينتج :

$٤ θ_٢ = ٤٨^\circ$ ∴ $θ_٢ = ١٢^\circ$ ، $θ_١ = ٤٥^\circ$

∴ $ع_١ =$ حتا ٤٥° + ت حا ٤٥° ، $ع_٢ =$ حتا ١٢° + ت حا ١٢°

∴ $ع_١^{١٥} =$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)^{١٥} = حتا ٦٧٥° + ت حا ٦٧٥°

= حتا (-٤٥°) + ت حا (-٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

، $ع_٢^{١٥} =$ (حتا ١٢° + ت حا ١٢°)^{١٥} = حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠° = – ١

∴ $(ع_١^{١٥} + ع_٢^{١٥}) = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - ١\right) - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ﭐ (– ٢ ، ٣ ، ١) على المستقيم $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ١}{٤}$

الحل

نفرض أن : $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ١}{٤} = ل$

∴ $\frac{س + ٢}{٢} = ل$ و منها : س = – ٢ + ٢ ل

، $\frac{ص - ٣}{٤} = ل$ و منها : ص = ٣ + ٤ ل

، $\frac{ع - ١}{٤} = ل$ و منها : ع = ١ + ٤ ل

∴ $\overrightarrow{ر} = (-٢ ، ٣ ، ١) + ل (٢ ، ٤ ، ٤)$

∴ النقطة (– ٢ ، ٣ ، ١) تقع على المستقيم ∴ طول العمود = صفر

السؤال الخامس :

(١) أثبت أن : $\begin{vmatrix} ﭐ & ب & حـ \\ ﭐ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ ب حـ & حـ ﭐ & ﭐ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ﭐ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ ﭐ^٣ & ب^٣ & حـ^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

الحل

بضرب $ع_١ \times$ ﭐ ، $ع_٢ \times$ ب ، $ع_٣ \times$ حـ

∴ الطرف الأيمن = $\frac{١}{ﭐ ب حـ} \begin{vmatrix} ﭐ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ ﭐ^٣ & ب^٣ & حـ^٣ \\ ﭐ ب حـ & ﭐ ب حـ & ﭐ ب حـ \end{vmatrix}$

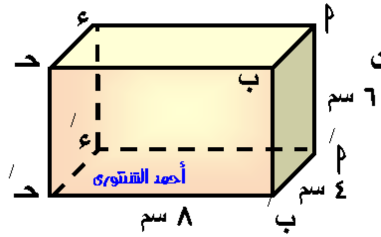
بأخذ ﭐ ب حـ مشترك من عناصر $ص_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{ﭐ ب حـ}{ﭐ ب حـ} \begin{vmatrix} ﭐ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ ﭐ^٣ & ب^٣ & حـ^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ﭐ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ ﭐ^٣ & ب^٣ & حـ^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر

(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ/ ب/ حـ/ ء/ متوازى مستطيلات

أوجد $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ • $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$



الحل

نعتبر ء/ نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ أ (٠ ، ٨ ، ٦) ، ب (٤ ، ٨ ، ٦) ،

حـ (٤ ، ٠ ، ٦) ، ء (٠ ، ٠ ، ٦)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = (٠ ، ٠ ، ٦) − (٤ ، ٨ ، ٦) = (−٤ ، −٨ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = (٠ ، ٨ ، ٦) − (٤ ، ٠ ، ٦) = (−٤ ، ٨ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ • $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = (−٤ ، −٨ ، ٠) • (−٤ ، ٨ ، ٠)

= ١٦ − ٦٤ + ٠ = −٤٨

الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ١٠ق ر+١ : ١٠ق ر−١ = ٢١ : ١٠

فإن : قيمة ر = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(حـ) ٥　　(ء) ٦

الحل

∵ $\frac{\text{١٠ق ر+١}}{\text{١٠ق ر−١}} = \frac{٢١}{١٠}$　　∴ $\frac{\text{١٠ق ر+١}}{\text{١٠ق ر}} \times \frac{\text{١٠ق ر}}{\text{١٠ق ر−١}} = \frac{٢١}{١٠}$

∴ $\frac{\text{١٠ − ر − ١ + ١}}{\text{ر + ١}} \times \frac{\text{١٠ − ر + ١}}{\text{ر}} = \frac{٢١}{١٠}$　　∴ $\frac{\text{١١ − ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{١٠ − ر}}{\text{ر + ١}} = \frac{٢١}{١٠}$

∴ ٢١ ر (ر + ١) = ١٠ (١١ − ر) (١٠ − ر)

∴ ٢١ ر^{٢} + ٢١ ر = ١١٠٠ − ٢١٠ ر + ١٠ ر^{٢}

∴ ١١ ر^{٢} + ٢٣١ ر − ١١٠٠ = ٠　　∴ ر^{٢} + ٢١ ر − ١٠٠ = ٠

∴ (ر + ٢٥) (ر − ٤) = ٠　　ر = −٢٥ مرفوض ، ر = ٤

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{لو}_{٢}\text{ ٣} & ٣ & ٩ \\ ٠ & \text{لو}_{٣}\text{ ٥} & ٧ \\ ٠ & ٠ & \text{لو}_{٥}\text{ س} \end{vmatrix} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ١٦　　(ب) ٣٢　　(حـ) ٦٤　　(ء) ١٢٨

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية　　∴ Δ = لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ س

∴ لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ س = ٤　　∴ $\frac{\text{لو}_{هـ}\text{ ٣}}{\text{لو}_{هـ}\text{ ٢}} \times \frac{\text{لو}_{هـ}\text{ ٥}}{\text{لو}_{هـ}\text{ ٣}} \times \frac{\text{لو}_{هـ}\text{ س}}{\text{لو}_{هـ}\text{ ٥}} = ٤$

∴ $\frac{\text{لو}_{هـ}\text{ س}}{\text{لو}_{هـ}\text{ ٢}} = ٤$　　∴ لو$_{٢}$ س = ٤　　∴ س = $(٢)^{٤}$ = ١٦

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، −٣) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (−٢ ، ١ ، ٠) فإن : || ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ || = ...

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$　　(ب) ١١　　(حـ) ١٢　　(ء) ٧ $\sqrt{٢}$

الحل

∵ ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (٣ ، −٣ ، ٦) − (٠ ، ٢ ، −٣) + (−٢ ، ١ ، ٠) = (١ ، −٤ ، ٩)

∴ || ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ || = || (١ ، −٤ ، ٩) || = $\sqrt{١ + ١٦ + ٨١}$

= $\sqrt{٩٨}$ = ٧ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

(٤) إذا كان ل$_{١}$: $\frac{\text{س + ٢}}{\text{− ١}} = \frac{\text{ص + ٣}}{٣} = \frac{\text{ع + ٥}}{٢}$ عمودى على

ل١ : $\frac{س}{2} = \frac{ص - 5}{ك} = \frac{ع - 6}{م}$ فإن : ٣ ك + ٢ م = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (حـ) ٢ (ء) ٤

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (−١ ، ٣ ، ٢) ، (٢ ، ك ، م)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (−١ ، ٣ ، ٢) • (٢ ، ك ، م) = ٠

∴ −٢ + ٣ ك + ٢ م = ٠ ∴ ٣ ك + ٢ م = ٢

(٥) قياس الزاوية بين المستقيمين س − ١ = $\frac{ص + 2}{\sqrt{2}}$ = − ع + ١ ، − س = ع + ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (حـ) ١٣٥° (ء) ١٥٠°

الحل

∵ $\frac{س - 1}{1} = \frac{ص + 2}{\sqrt{2}} = \frac{ع - 1}{1}$ ، $\frac{س}{-1} = \frac{ع + 3}{1}$ ، ص = ٤

∴ متجها اتجاه المستقيمان هما : (١ ، $\sqrt{2}$ ، −١) ، (−١ ، ١ ، ٠)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

∴ جتا θ = $\frac{|(1 ، \sqrt{2} ، -1) \bullet (-1 ، 1 ، 0)|}{\sqrt{4}\ \sqrt{2}} = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ θ = ٤٥°

(٦) جيوب تمام الاتجاه للمتجه (٢ ، −٤ ، ٤) هى ....

(أ) (٢ ، −٤ ، ٤) (ب) (١ ، −٢ ، ٢)

(حـ) ($\frac{1}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$) (ء) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$)

الحل

∵ ‖ (٢ ، −٤ ، ٤) ‖ = ٦

∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه = ($\frac{2}{6}$ ، $-\frac{4}{6}$ ، $\frac{4}{6}$) = ($\frac{1}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $(3 + 7\omega + 3\omega^2)(3 - 7\omega^2 + 3\omega) = ...$

الحل

المقدار = $(3(1+\omega^2) + 7\omega)(3(1+\omega) - 7\omega^2)$

$= (-3\omega + 7\omega)(-3\omega^2 - 7\omega^2) = 4\omega \times (-10\omega^2)$

$= -40\omega^3 = -40$

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ أ على النظم ٣ × ٢ ∴ رتبة أعلى درجة محدد يمكن تكوينه منها هو ٢

∴ نوجد : $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12 \neq 0$ ∴ ر (أ) > ٢

(٣) مركز الكرة س² + ص² + ع² + ٨ س − ١٢ ص + ٢ ع + ١ = ٠ يساوى .... =

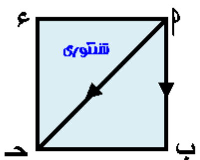
الحل

∵ مركز الكرة (−½ معامل س ، −½ معامل ص ، −½ معامل ع)

∴ مركز الكرة = (−٤ ، ٦ ، −١)

(٤) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أحـ}$ = ...

الحل



∵ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم

∴ ‖ $\overrightarrow{أب}$ ‖ = ١٠ ، ‖ $\overrightarrow{أحـ}$ ‖ = ١٠ $\sqrt{2}$

، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°

∴ $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أحـ}$ = ‖ $\overrightarrow{أب}$ ‖ ‖ $\overrightarrow{أحـ}$ ‖ جتا ٤٥° = ١٠ × ١٠ $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ١٠٠

(٥) متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ (٢ ، ٣ ، ٢ $\sqrt{٣}$) يساوى ....

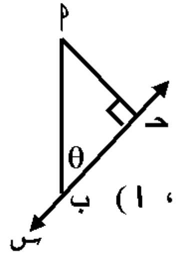
الحل

∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \left(\dfrac{٢}{٥} ، \dfrac{٣}{٥} ، \dfrac{٢}{٥}\sqrt{٣} \right)$

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (− ٢ ، − ٣ ، ١) على محور س يساوى ....

الحل



بفرض أن : أ (− ٢ ، − ٣ ، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) تقع على محور س ، حـ مسقط أ على محور س

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = (− ٢ ، − ٣ ، ١) − (١ ، ٠ ، ٠) = (− ٣ ، − ٣ ، ١)

∴ ب حـ هو مقياس مسقط $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ على محور س

∴ ب حـ = $\dfrac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \bullet \overrightarrow{\text{س}}|}{\|\overrightarrow{\text{س}}\|} = \dfrac{|(-٣ ، -٣ ، ١) \bullet (١ ، ٠ ، ٠)|}{\sqrt{١ + ٠ + ٠}} = |-٣| = ٣$

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١} = \sqrt{١٩}$ ∴ من هندسة الشكل :

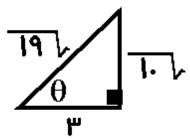
∴ $(\text{أ حـ})^٢ = (\text{ب أ})^٢ - (\text{ب حـ})^٢ = (\sqrt{١٩})^٢ - (٣)^٢ = ١٩ - ٩ = ١٠$

∴ أ حـ = $\sqrt{١٠}$ ∴ طول العمود = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

حل آخر

بفرض أن : θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ و محور س

، ∵ حتا θ = $\dfrac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \bullet \overrightarrow{\text{س}}|}{\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{س}}\|} = \dfrac{|(-٣ ، -٣ ، ١) \bullet (١ ، ٠ ، ٠)|}{\sqrt{٩ + ٩ + ١} \, \sqrt{١ + ٠ + ٠}} = \dfrac{٣}{\sqrt{١٩}}$



∴ حا θ = $\dfrac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}}$

∴ أ حـ = $\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|$ حا θ = $\sqrt{١٩} \times \dfrac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}} = \sqrt{١٠}$

حل ثالث

بفرض أن : θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ و محور س ، ∵ حا θ = $\dfrac{\|\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{س}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{س}}\|}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٣ & -٣ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{ص}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ع}} = (٠ ، ١ ، ٣)$

∴ $\|\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{س}}\| = \|(٠ ، ١ ، ٣)\| = \sqrt{١٠}$ ∴ حا θ = $\dfrac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}}$

∴ أ حـ = $\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|$ حا θ = $\sqrt{١٩} \times \dfrac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}} = \sqrt{١٠}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) أوجد أكبر حد فى مفكوك $(٣ + ٢\text{س})^٦$ عندما : س = ١

الحل

∵ عدد حدود المفكوك = ٦ + ١ = ٧ (عدد فردى)

∴ أكبر حد هو الحد الذى رتبته = $\dfrac{٦}{٢}$ = ٣ أى : $\text{ح}_٣$

، $\text{ح}_٣ = {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times (٢\text{س})^٢ \times (٣)^٤$

و عندما : س = ١ فإن : $\text{ح}_٣ = {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times (٢)^٢ \times (٣)^٤ = ٤٨$

حل آخر

نفرض أن : $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو أكبر حد فى المفكوك ∴ $\text{ح}_{\text{ر}+١} > \text{ح}_{\text{ر}}$

∴ $\dfrac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \geq ١$ ∴ عندما : س = ١ فإن : $\dfrac{٦ - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \dfrac{٢}{٣} \geq ١$

∴ $\dfrac{٢(٧ - \text{ر})}{٣\text{ر}} \geq ١$ ∴ $١٤ - ٢\text{ر} \geq ٣\text{ر}$

∴ $١٤ - ٢\text{ر} \geq ٣\text{ر}$ ∴ $١٤ \geq ٥\text{ر}$ ∴ $\text{ر} \leq \dfrac{١٤}{٥}$

∴ ر = ٢ ∴ أكبر هو $\text{ح}_٣$

، $\text{ح}_٣ = {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times (٢)^٢ \times (٣)^٤ = ٤٨٦٠$

(٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$
$\overrightarrow{ح} = (٠ ، ٢ ، ٤)$

الحل

حجم متوازى السطوح = $| \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ح} |$

، ∵ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ح} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١(-٨ + ٠) + ١(١٢ + ٠) + ٢(٦ + ٠) = ١٦$

∴ حجم متوازى السطوح = ١٦ وحدة حجم

السؤال الرابع :

(أ) أوجد جذور المعادلة : $ع^٤ + ٤ =$ صفر على الصورة المثلثية

الحل

$ع^٤ = -٤ = ٤ (\text{جتا } \pi + ت \text{ جا } \pi)$

∴ $ع = \left(٤ (\text{جتا } \pi + ت \text{ جا } \pi)\right)^{\frac{1}{4}} = \left((\sqrt{٢})^٤\right)^{\frac{1}{4}} (\text{جتا } \pi + ت \text{ جا } \pi)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{٢} \left(\text{جتا } \frac{\pi + ٢ ر \pi}{٤} + ت \text{ جا } \frac{\pi + ٢ ر \pi}{٤}\right)$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، -١ ، -٢

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_١ = \sqrt{٢} (\text{جتا } \frac{1}{4}\pi + ت \text{ جا } \frac{1}{4}\pi)$

عندما : ر = ١ فإن : $ع_٢ = \sqrt{٢} (\text{جتا } \frac{3}{4}\pi + ت \text{ جا } \frac{3}{4}\pi)$

عندما : ر = -١ فإن : $ع_٣ = \sqrt{٢} (\text{جتا } (-\frac{1}{4}\pi) + ت \text{ جا } (-\frac{1}{4}\pi))$

عندما : ر = -٢ فإن : $ع_٤ = \sqrt{٢} (\text{جتا } (-\frac{3}{4}\pi) + ت \text{ جا } (-\frac{3}{4}\pi))$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ح}$ ثلاثة متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى
أوجد : (أ) $\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح} \|$

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (\frac{1}{3} ، -\frac{2}{3} ، \frac{2}{3})$ ، $\overrightarrow{ب} = (\frac{3}{5} ، ٠ ، -\frac{4}{5})$
أوجد $\overrightarrow{ح}$

الحل

(أ) $(\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح} \|)^٢ = (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح}) \bullet (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح})$

$= ٤\|\overrightarrow{أ}\|^٢ - ٢\overrightarrow{أ}\bullet\overrightarrow{ب} + ٦\overrightarrow{أ}\bullet\overrightarrow{ح} - ٢\overrightarrow{ب}\bullet\overrightarrow{أ} + \|\overrightarrow{ب}\|^٢$

$- ٣\overrightarrow{ب}\bullet\overrightarrow{ح} + ٦\overrightarrow{ح}\bullet\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ح}\bullet\overrightarrow{ب} + ٤\|\overrightarrow{ح}\|^٢$

، ∵ المتجهات متعامدة مثنى مثنى

∴ $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{ح}\| = ١$ ،

$\overrightarrow{أ}\bullet\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب}\bullet\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}\bullet\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ح}\bullet\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}\bullet\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ح}\bullet\overrightarrow{ب} = ٠$.

∴ $(\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح} \|)^٢ = ٤ + ١ + ٩ = ١٤$

∴ $\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ح} \| = \sqrt{١٤}$

(ب) نفرض أن : $\overrightarrow{ح} = (ك ، ل ، م)$

، ∵ $\overrightarrow{ح}$ متجه وحدة ∴ $ك^٢ + ل^٢ + م^٢ = ١$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{أ}$ ∴ $\frac{1}{3} ك - \frac{2}{3} ل + \frac{2}{3} م = ٠$ بالضرب × ٣

∴ $ك - ٢ ل + ٢ م = ٠$ (٢)

، ∵ $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{3}{5} ك - \frac{4}{5} م = ٠$

و منها : $ك = \frac{4}{3} م$ (٣) بالتعويض من (٣) فى (٢) ينتج :

$\frac{4}{3} م - ٢ ل + ٢ م = ٠$ ∴ $\frac{10}{3} م = ٢ ل$ أى : $ل = \frac{5}{3} م$

بالتعويض فى (١) ينتج :

$\frac{16}{9}\text{م}^2 + \frac{25}{9}\text{م}^2 + \text{م}^2 = 1$ ∴ $\frac{50}{9}\text{م}^2 = 1$

و منها : $\text{م} = \pm \frac{3}{10}\sqrt{2}$ ∴ $\text{ك} = \pm \frac{4}{10}\sqrt{2}$ ، $\text{ل} = \pm \frac{5}{10}\sqrt{2}$

∴ $\overrightarrow{\text{ح}} = \pm \frac{1}{10}\sqrt{2}\,(4 ، 5 ، 3)$

السؤال الخامس :

(١) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية و أكتب الحل إن وجد :

$\text{س} + \text{ص} = 2$ ، $2\text{س} + 3\text{ص} = 5$

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ ، أ^* على النظم 2×3

، ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$ ∴ $\text{ر}(\text{أ}) = 2$

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ^* هى ٢

و قيمة جميع هذه المحددات $\neq 0$ ∴ $\text{ر}(\text{أ}^*) = 2$

∴ $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) = 2 =$ عدد المجاهيل ∴ للمجموعة حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : $\text{أ}\,\underset{\sim}{\text{س}} = \text{ب}$ حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{\text{س}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\text{أ}|}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∴ $\text{س} = 1$ ، $\text{ص} = 1$

حل آخر

نجرى تحويلات أولية على صفوف أ^* (كما فى المحددات)

$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ بإجراء : $\text{ص}_2 - 2\,\text{ص}_1$ ∴ $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

∴ من الصف الثانى : $\text{ص} = 1$

، من الصف الأول : $\text{س} + \text{ص} = 2$ ∴ $\text{س} = 1$

(٢) إذا كان : $\text{ع} = \text{حا}\,\frac{1}{9}\pi + \text{ت}\,\text{حتا}\,\frac{1}{9}\pi$ أوجد $(\overline{\text{ع}})$ على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{\text{ع}})^9$

الحل

∵ $\text{ع} = \text{حا}\,\frac{1}{9}\pi + \text{ت}\,\text{حتا}\,\frac{1}{9}\pi$

∴ $\overline{\text{ع}} = \text{حا}\,\frac{1}{9}\pi - \text{ت}\,\text{حتا}\,\frac{1}{9}\pi = \text{حتا}\,(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\pi) + \text{ت}\,\text{حا}\,(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\pi)$

$= \text{حتا}\,(-\frac{7}{18}\pi) + \text{ت}\,\text{حا}\,(-\frac{7}{18}\pi)$

∴ $(\overline{\text{ع}})^9 = \left(\text{حتا}\,(-\frac{7}{18}\pi) + \text{ت}\,\text{حا}\,(-\frac{7}{18}\pi)\right)^9$

$= \text{حتا}\,(-\frac{7}{2}\pi) + \text{ت}\,\text{حا}\,(-\frac{7}{2}\pi) = (\text{حتا}\,\frac{1}{2}\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{1}{2}\pi)$

الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{\text{ع}})^9$ هى :

$\text{حتا}\,\frac{\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi}{3} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi}{3}$ حيث : $\text{ر} = 0 ، 1 ، -1$

عندما : $\text{ر} = 0$ فإن : $\text{ع}_1^{\frac{1}{3}} = \text{حتا}\,\frac{1}{6}\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{1}{6}\pi$

عندما : $\text{ر} = 1$ فإن : $\text{ع}_2^{\frac{1}{3}} = \text{حتا}\,\frac{5}{6}\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{5}{6}\pi$

عندما : $\text{ر} = -1$ فإن : $\text{ع}_3^{\frac{1}{3}} = \text{حتا}\,(-\frac{1}{2}\pi) + \text{ت}\,\text{حا}\,(-\frac{1}{2}\pi)$

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{٢ن-١}ل_{ن-١} = ٩ \; ^{٢ن}ل_{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

الحل

∵ $٣٦ \; ^{٢ن-١}ل_{ن-١} = ٩ \; ^{٢ن}ل_{ن}$ ∴ $\frac{٤ \, |\underline{٢ن-١}}{|\underline{ن-١}} = \frac{|\underline{٢ن}}{|\underline{ن}}$

∴ $٤ \, |\underline{٢ن-١} = |\underline{٢ن} = ٢ن \, |\underline{٢ن-١}$ و منها : ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

(٢) إذا كان للمعادلتين : س + ص = ٢ ، ٢س + ك ص = ٤ أكثر من حل فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

الحل

∵ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ك \end{pmatrix}$ ، $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ك & ٤ \end{array}\right)$ ، $أ^*$ على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما أكثر من حل

، و عدد المجاهيل = ٢ ∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من $أ^*$ هى ٢ ، و قيمته = ٠ .

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ك \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ك − ٢ = ٠ ومنها : ك = ٢

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = -٣\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} + ٧\,\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$ فإن : $\|\overrightarrow{أ جـ}\| =$ ....

(أ) ١٣ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

الحل

∵ $\overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{أ ب} = -٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص} + ١٢\,\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{أ جـ}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٧ ، ٣ ، ١٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٤ ، -١ ، -٢)$

فإن : متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ ب} =$ ....

(أ) $(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$ (ب) $(\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣})$

(جـ) $(-\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$ (د) $(-\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣})$

الحل

$\overrightarrow{أ ب} = (-٤ ، -١ ، -٢) - (-٧ ، ٣ ، ١٠) = (٣ ، -٤ ، -١٢)$

∴ $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

∴ متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ ب} = \frac{\overrightarrow{أ ب}}{\|\overrightarrow{أ ب}\|} = (\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣})$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٠ ، ٢ ، ٤)$ فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

الحل

$\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١(-٨ + ٠) + ١(١٢ + ٠) + ٢(٦ + ٠) = ١٦$

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٠ ، ٢) على المستقيم $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٣}{-٢}$ يساوى ....

(أ) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

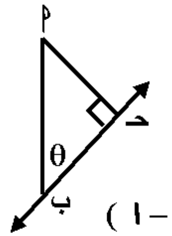
الحل

متجه اتجاه المستقيم ($\overleftrightarrow{ه}$) = (٢ ، –١ ، –٢)

النقطة ب (٢ ، –١ ، ٣) ∈ المستقيم

بفرض أن حـ مسقط أ على المستقيم

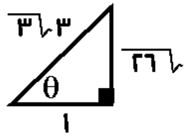
، θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{بأ}$ و المستقيم ، أ (١ ، ٠ ، ٢)



∴ $\overrightarrow{بأ}$ = (١ ، ٠ ، ٢) – (٢ ، –١ ، ٣) = (–١ ، ١ ، –١)

، ∵ حتا θ = $\frac{|\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{ه}|}{\|\overrightarrow{بأ}\|\,\|\overrightarrow{ه}\|}$ = $\frac{|(-١ ، ١ ، -١)\bullet(٢ ، -١ ، -٢)|}{\sqrt{١+١+١}\,\sqrt{٤+١+٤}}$

= $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ ∴ حا θ = $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣\sqrt{٣}}$



، ∵ $\|\overrightarrow{بأ}\|$ = $\sqrt{١+١+١}$ = $\sqrt{٣}$

∴ أحـ = $\|\overrightarrow{بأ}\|$ حا θ = $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\left(٢ + \frac{٣}{\omega}\right)\left(٢ + \frac{٣}{\omega^{٢}}\right)\left(٣ - \frac{٢}{\omega}\right)\left(٣ - \frac{٢}{\omega^{٢}}\right)$ = ...

الحل

المقدار = (٢ + ٣ $\omega^{٢}$) (٢ + ٣ ω) (٣ – ٢ $\omega^{٢}$) (٣ – ٢ ω)

= (٤ + ٦ ω + ٦ $\omega^{٢}$ + ٩) (٩ – ٦ ω – ٦ $\omega^{٢}$ + ٤)

= (١٣ + ٦ (ω + $\omega^{٢}$)) (١٣ – ٦ (ω + $\omega^{٢}$))

= (١٣ – ٦) (١٣ + ٦) = ٧ × ١٩ = ١٣٣

(٢) إذا كان : معاملا $ع_{٦}$ ، $ع_{١٦}$ فى مفكوك (أ + ب $)^{ن}$ متساويين فإن قيمة ن = ...

الحل

∵ معامل $ع_{٦}$ = معامل $ع_{١٦}$ ∴ $^{ن}ق_{٥}$ = $^{ن}ق_{١٥}$

∴ ن = ٥ + ١٥ = ٢٠

(٣) جيب تمام الزاوية المحصورة بين المستقيمين : $\frac{س}{١} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، $\frac{س}{١} = \frac{ص - ٢}{-٢} = \frac{ع}{٢}$ يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيمين هما : (١ ، –٢ ، –٢) ، (١ ، –٢ ، ٢)

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|(١ ، -٢ ، -٢)\bullet(١ ، -٢ ، ٢)|}{\sqrt{١+٤+٤}\,\sqrt{١+٤+٤}}$ = $\frac{١}{٩}$

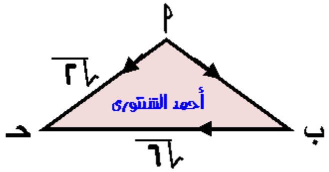
(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\|\overrightarrow{بحـ}\|$ = $\sqrt{٦}$ ،

$\|\overrightarrow{أحـ}\|$ = $\sqrt{٢}$ ،

= (–١ ، ٠ ، ١) : فإن

$\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{بحـ}$ = ...



الحل

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{١+٠+١}$ = $\sqrt{٢}$

∵ حتا ب = $\frac{٢ + ٦ - ٢}{٢\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}$ = $\frac{٣}{٤\sqrt{٣}}$ " قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{بحـ}$ = $\|\overrightarrow{بأ}\|\,\|\overrightarrow{بحـ}\|$ حتا ب = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٦}$ × $\frac{٣}{٤\sqrt{٣}}$ = ٣

(٥) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، ٤ ، –٥) و تمس المستوى ص ع

الحل

∵ الكرة تمس المستوى ص ع ∴ نق (للدائرة) = | ٣ | = ٣ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هى : (س – ٣ $)^{٢}$ + (ص – ٤ $)^{٢}$ + (ع + ٥ $)^{٢}$ = ٩

(٦) الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٤) و متجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٤ ، ٧ ، ١) هى ....

الحل

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، -١ ، ٤) + ك (٤ ، ٧ ، ١)

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $(1 + \text{س})^{18}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معاملا الحدين $\text{ح}_{2\text{ر}+4}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}-2}$ متساويين ، أوجد قيمة ر

الحل

∵ معامل $\text{ح}_{2\text{ر}+4}$ = معامل $\text{ح}_{\text{ر}-2}$ ∴ $^{18}\text{ق}_{2\text{ر}+3} = {}^{18}\text{ق}_{\text{ر}-3}$

∴ ٢ر + ٣ = ر - ٣ ∴ ر = -٦ مرفوض

أو ٢ر + ٣ + ر - ٣ = ١٨ ∴ ر = ٦

(٢) إذا كان : طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، -١ ، ٢) على المستوى $\sqrt{2}$ س + ص - ع + ك = ٠ يساوى ٢ وحدة طول أوجد قيمة ك

الحل

∵ طول العمود = $\frac{|0\times\sqrt{2} - 1\times 1 + 2\times -1 + \text{ك}|}{\sqrt{2+1+1}}$ ∴ ٢ = $\frac{|-3+\text{ك}|}{2}$

∴ |-٣ + ك| = ٤ ∴ -٣ + ك = ٤ و منها : ك = ٧

أو -٣ + ك = -٤ و منها : ك = -١

السؤال الرابع :

(١) حل المعادلات الآتية : ٢س + ص - ٢ع = ١٠ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٦ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

∴ |أ| = ٢ (٦ - ٨) - ١ (٣ - ١٠) - ٢ (٤ - ١٠) = ١٥

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ $\text{س}\sim$ = ب حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} ، \quad \text{س}\sim = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}_{11}}$ = ٦ - ٨ = -٢ ،

$\overline{\text{أ}_{12}}$ = - (٣ - ١٠) = ٧ ، $\overline{\text{أ}_{13}}$ = ٤ - ١٠ = -٦ ،

$\overline{\text{أ}_{21}}$ = - (٣ + ٨) = -١١ ، $\overline{\text{أ}_{22}}$ = ٦ + ١٠ = ١٦ ، $\overline{\text{أ}_{23}}$ = - (٨ - ٥) = -٣ ،

$\overline{\text{أ}_{31}}$ = ٢ + ٤ = ٦ ، $\overline{\text{أ}_{32}}$ = - (٤ + ٢) = -٦ ، $\overline{\text{أ}_{33}}$ = ٤ - ١ = ٣

$$\therefore \text{مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -6 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$، \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{س}\sim = \text{أ}^{-1}\text{ب}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ -45 \end{pmatrix}$$

∴ س = $\frac{1}{3}$ ، ص = $\frac{10}{3}$ ، ع = -٣ ،

مجموعة الحل = { ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{10}{3}$ ، -٣) }

(٢) إذا كان : $ع_١ = \frac{٦ + ٤ت}{١ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{٢٦}{٥ - ت}$
، $ع = ٤ (ع_١ - ع_٢)$ أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$$ع_١ = \frac{٦ + ٤ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٦ - ٦ت + ٤ - ٤ت}{٢} = \frac{١٠ - ٢ت}{٢}$$

$$= ٥ - ت \quad ، \quad ع_٢ = \frac{٢٦}{٥ - ت} \times \frac{٥ + ت}{٥ + ت} = \frac{٢٦ (٥ + ت)}{٢٦} = ٥ + ت$$

$$\therefore ع = ٤ (ع_١ - ع_٢) = ٤ (٥ - ت - ٥ - ت) = - ٨ ت$$

$$= ٨ (حتا (- \tfrac{١}{٢} \pi) + ت \; حا (- \tfrac{١}{٢} \pi))$$

$$، \; ع^{\frac{١}{٣}} = ٢ (حتا \frac{(- \frac{١}{٢} \pi) + ٢ ر \pi}{٣} + ت \; حا \frac{(- \frac{١}{٢} \pi) + ٢ ر \pi}{٣})$$

، $ر = ٠ ، ١ ، - ١$

عندما : $ر = ٠$ $\therefore ع_١^{\frac{١}{٣}} = ٢ (حتا (- \tfrac{١}{٦} \pi) + ت \; حا (- \tfrac{١}{٦} \pi)) = ٢ هـ^{- \frac{١}{٦} \pi ت}$

عندما : $ر = ١$ $\therefore ع_٢^{\frac{١}{٣}} = ٢ (حتا \tfrac{١}{٢} \pi + ت \; حا \tfrac{١}{٢} \pi) = ٢ هـ^{\frac{١}{٢} \pi ت}$

عندما : $ر = - ١$ $\therefore ع_٣^{\frac{١}{٣}} = ٢ (حتا (- \tfrac{٥}{٦} \pi) + ت \; حا (- \tfrac{٥}{٦} \pi)) = ٢ هـ^{- \frac{٥}{٦} \pi ت}$

السؤال الخامس :

(أ) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} أ^٢ + ١ & أ ب & أ حـ \\ أ ب & ب^٢ + ١ & ب حـ \\ أ حـ & ب حـ & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix} = أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢ + ١$$

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الأول)

$$الطرف \; الأيمن = \begin{vmatrix} أ^٢ & أ ب & أ حـ \\ أ ب & ب^٢ + ١ & ب حـ \\ أ حـ & حـ ب & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أ ب & أ حـ \\ ٠ & ب^٢ + ١ & ب حـ \\ ٠ & حـ ب & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix}$$

بإخذ أ مشتركاً من الصف الأول ، و العمود الأول
، و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثانى)

$$الطرف \; الأيمن = أ^٢ \begin{vmatrix} ١ & ب & حـ \\ ب & ب^٢ + ١ & ب حـ \\ حـ & حـ ب & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أ ب & أ حـ \\ ٠ & ب^٢ & ب حـ \\ ٠ & حـ ب & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & أ حـ \\ ٠ & ١ & ب حـ \\ ٠ & ٠ & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix}$$

بإجراء : ($ع_٢ - ب ع_١$) فى $ع_٢$ ، ($ع_٣ - حـ ع_١$) فى $ع_٣$ على المحدد الأول ،
بإخذ ب مشتركاً من الصف الثانى ، و العمود الثانى بالمحدد الثانى
المحدد الثالث على الصورة المثلثية $\therefore$ قيمته $= حـ^٢ + ١$

$$الطرف \; الأيمن = أ^٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ب & ١ & ٠ \\ حـ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & أ حـ \\ ٠ & ١ & حـ \\ ٠ & حـ & حـ^٢ + ١ \end{vmatrix} + حـ^٢ + ١$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية $\therefore$ قيمته $= ١$ ،
و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

$$الطرف \; الأيمن = أ^٢ \times ١ + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & حـ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & أ حـ \\ ٠ & ١ & حـ \\ ٠ & حـ & حـ^٢ \end{vmatrix} + حـ^٢ + ١$$

بتبديل عناصر ($ع_٢ - ع_٣$) ثم عناصر ($ص_٣ - ص_٢$) على المحدد الأول
، بإجراء ($حـ ع_٢ - ع_٣$) فى $ع_٣$ على المحدد الثانى

$$الطرف \; الأيمن = أ^٢ + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & أ \\ ٠ & ١ & حـ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & حـ & ٠ \end{vmatrix} + حـ^٢ + ١$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية $\therefore$ قيمته $= ١$ ،

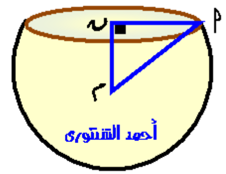
عناصر ع٣ المحدد الثانى كلها أصفار ∴ قيمته = ٠

الطرف الأيمن = $أ^{٢} + ب^{٢} + ب^{٢} \times ٠ + حـ^{٢} + ١ = أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} + ١$ = الطرف الأيسر

(٢) إذا قطع المستوى : ٢ س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة :

$(س + ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل



المستوى يقطع الكرة التى مركزها م فى دائرة مركزها ن حيث : م (−٣ ، −٢ ، ١)

و يكون : أ ن = طول نصف قطر الدائرة

، متجه الاتجاه العمودى على المستوى (٢ ، −١ ، −٢)

∴ م ن = طول العمود المرسوم من م على المستوى

$= \frac{|٢ \times (-٣) - ١ \times (-٢) - ٢ \times ١ + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \frac{|-٦ + ٢ - ٢ + ١٢|}{\sqrt{٩}}$

$= \frac{٦}{٣} = ٢$ وحدة طول

، م أ = طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{١٥}$ وحدة طول

من هندسة الشكل :

$(أن)^{٢} = (أم)^{٢} - (من)^{٢} = ١٥ - ٤ = ١١$

∴ أ ن = $\sqrt{١١}$ وحدة طول ، مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١١ π وحدة مربعة

الاختبار السادس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{ن}ق_{٣} : {}^{ن-١}ق_{٤} = ٨ : ٥$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (حـ) ٨ (د) ٩

الحل

∵ $\frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن-١}ق_{٤}} = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\frac{ن|}{٣| \; ن-٣|} \times \frac{ن-٥| \; ٤|}{ن-١|} = \frac{٨}{٥}$

∴ $\frac{ن \; ن-١|}{(ن-٣)(ن-٤) \; ن-٥| \; ٣|} \times \frac{٤ \; ن-٥| \; ٣|}{ن-١|} = \frac{٨}{٥}$

و منها : ٢ (ن − ٣) (ن − ٤) = ٥ ن

∴ $٢ن^{٢} - ١٤ن + ٢٤ = ٥ن$ أى : $٢ن^{٢} - ١٩ن + ٢٤ = ٠$

∴ (٢ن − ٣) (ن − ٨) = ٠ و منها : ن = $\frac{٣}{٢}$ مرفوض ، ن = ٨

(٢) معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(٣ س - \frac{١}{٣})^{١٠}$ يساوى ....

(أ) $-\frac{٦٣}{٨}$ (ب) $-\frac{٦٧}{٨}$ (حـ) $\frac{٦٣}{٨}$ (د) $\frac{٦٧}{٨}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل ح٦ = $^{١٠}ق_{٥} \times (-\frac{١}{٣})^{٥} \times (٣)^{٥} = -\frac{٦٣}{٨}$

(٣) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + ص − ١ = ٠ ، ص + ع − ١ = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (د) ٧٥°

الحل

∵ متجه الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما : (١ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ١) ، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا $\theta = \frac{|(١،١،٠) \bullet (٠،١،١)|}{\sqrt{١+١+٠} \; \sqrt{٠+١+١}} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = ٦٠°$

(٤) إذا كان : أ = (٢ ، ١ ، −٢) ، أ + ب = أ × ب

فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، −١ ، −٢)   (ب) (٢ ، ١ ، −٢)

(جـ) (−٢ ، −١ ، ٢)   (د) (−٢ ، −١ ، −٣)

الحل

بفرض أن : ب = (ك ، ل ، م)

∴ (٢ ، ١ ، −٢) + (ك ، ل ، م) = (٢ ، ١ ، −٢) × (ك ، ل ، م)

∴ (٢ + ك) س + (١ + ل) ص + (−٢ + م) ع = | س ص ع ؛ ٢ ١ −٢ ؛ ك ل م |

= (م + ٢ل) س − (٢م + ٢ك) ص + (٢ل − ك) ع

∴ ٢ + ك = م + ٢ل (١) ، ١ + ل = −٢م − ٢ك (٢)

، −٢ + م = ٢ل − ك (٣) بطرح (٣) من (١) ينتج :

٤ + ك − م = م + ك و منها : م = ٢

بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ٥ + ل − ٢م = −٢م − ٤ل

و منها : ل = −١ بالتعويض فى (١) ينتج : ك = −٢

∴ ب = (−٢ ، −١ ، ٢)

(٥) إذا كان : أ(−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ٢ ، −٥) فإن :

|| أب || = ... وحدة طول

(أ) √١٢   (ب) √٤٠   (جـ) √٤٤   (د) √١٠٤

الحل

أب = (٤ ، ٢ ، −٥) − (−٢ ، ٠ ، ٣) = (٦ ، ٢ ، −٨)

∴ || أب || = √(٣٦ + ٤ + ٦٤) = √١٠٤

(٦) إذا كان : أ ⊥ ب ، أ ⊥ جـ و كان : ب = (٢ ، ٣ ، ١) ، جـ = (١ ، ٢ ، ١) ، || أ || = ٤√٢ فإن : أ = ...

(أ) (٢ ، ٣ ، ١)   (ب) ± (−٤ ، ٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤ ، ٠)   (د) (٠ ، −٤ ، ٤)

الحل

بفرض أن : أ = (ك ، ل ، م)

∵ || أ || = ٤√٢   ∴ ك² + ل² + م² = ٣٢   (١)

، ∵ أ ⊥ ب   ∴ (ك ، ل ، م) • (٢ ، ٣ ، ١) = ٠

∴ ٢ك + ٣ل + م = ٠   (٢)

، ∵ أ ⊥ جـ   ∴ (ك ، ل ، م) • (١ ، ٢ ، ١) = ٠

∴ ك + ٢ل + م = ٠   (٣)

بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ل = ٠

بالتعويض فى (٢) ينتج : ك = −م   بالتعويض فى (١) ينتج :

ك² + ٠ + ك² = ٣٢   ∴ ٢ك² = ٣٢   ∴ ك² = ١٦   ∴ ك = ± ٤

∴ م = ∓ ٤   ∴ أ = ± (−٤ ، ٠ ، ٤)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) $(1-\frac{1}{\omega})(1-\frac{1}{\omega^2})(1-\frac{1}{\omega^4})(1-\frac{1}{\omega^8})$ ..... إلى ١٠ عوامل = ...

الحل

المقدار = $((1-\omega^2)(1-\omega))((1-\omega^2)(1-\omega))$ .... إلى ١٠ عوامل

= $(1-\omega-\omega^2+1)(1-\omega-\omega^2+1)$ .... إلى ٥ عوامل

= $(2-(\omega+\omega^2))(2-(\omega+\omega^2))$ .... إلى ٥ عوامل

= $(2-(-1))(2-(-1))$ .... إلى ٥ عوامل

= ٣ × ٣ .... إلى ٥ عوامل = ٢٤٣

(٢) رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ -١ & -١ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ محدد المصفوفة يكون على الصورة المثلثية

و تكون قيمته = ١ ≠ ٠ ∴ رتبة المصفوفة = ٣

(٣) متجه اتجاه المستقيم : $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$ يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، ٠ ، ٢)

(٤) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{١}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{-١}$ يساوى ٦٠° فإن : قيمة أ = ... يساوى = ...

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمين هما : (أ ، ٢ ، ١) ، (٢ ، ١ ، −١)

، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ ∴ حتا θ = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{|(أ ، ٢ ، ١) \bullet (٢ ، ١ ، -١)|}{\sqrt{أ^٢ + ٤ + ١}\ \sqrt{٤ + ١ + ١}}$ و منها بالتربيع ينتج :

٤ (٢ أ + ١)^٢ = ٦ (أ^٢ + ٥) ∴ ١٦ أ^٢ + ١٦ أ + ٤ = ٦ أ^٢ + ٣٠

∴ ١٠ أ^٢ + ١٦ أ − ٢٦ = ٠ ∴ ٥ أ^٢ + ٨ أ − ١٣ = ٠

∴ (أ − ١) (٥ أ + ١٣) = ٠ ∴ أ = ١ أو أ = $-\frac{١٣}{٥}$

(٥) إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى ل س + ص + م ع + ٢ = ٠ . فإن : ل + م = ...

الحل

∵ أ تنتمى للمستقيم ∴ بالتعويض ينتج : ل + ٢ = ٠ ∴ ل = − ٢

، ∵ ب تنتمى للمستقيم ∴ بالتعويض ينتج : ١ + م + ٢ = ٠ ∴ م = − ٣

∴ ل + م = − ٥

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −١ ، −٢)

فإن : ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • ($\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$) = ...

الحل

($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • ($\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$) = ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • (− ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$))

= − ($\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|$)^٢

، ∵ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{vmatrix}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$

∴ المقدار = − ($\|$ (٢ ، ٦ ، −١) $\|$)^٢ = − ٤١

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كانت معاملات الحدود الرابع و الخامس و السادس فى مفكوك (٢ س + ص)^ن حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

الحل

∵ معامل ح$_٤$ ، معامل ح$_٥$ ، معامل ح$_٦$ فى تتابع حابى

∴ معامل ح$_٤$ + معامل ح$_٦$ = ٢ معامل ح$_٥$ بالقسمة ÷ معامل ح$_٥$ ينتج :

∴ $\frac{معامل\ ح_٤}{معامل\ ح_٥} + \frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} = ٢$ ∴ $\frac{٤}{ن - ٤ + ١} \times \frac{٢}{١} + \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{٢} = ٢$

∴ $\frac{٨}{ن - ٣} + \frac{ن - ٤}{١٠} = ٢$ بالضرب × ١٠ (ن − ٣) ينتج :

٨٠ + (ن − ٣) (ن − ٤) = ٢٠ (ن − ٣)

∴ ٨٠ + ن^٢ − ٧ ن + ١٢ = ٢٠ ن − ٦٠

∴ $ن^{٢} - ٢٧ ن + ١٥٢ = ٠$ ∴ $(ن - ١٩) (ن - ٨) = ٠$

∴ $ن = ١٩$ أو $ن = ٨$

(٢) كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى $س + ص + ع = ١$ أوجد معادلة الكرة

الحل

∵ الكرة تمس المستوى

∴ نق (طول نصف قطر الكرة) = طول العمود المرسوم من مركز الكرة على المستوى

∴ $نق = \frac{| ١ \times ١ + ٢ \times ١ + ١ \times ١ - ١ |}{\sqrt{١ + ١ + ١}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٣$

السؤال الرابع :

(١) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية : $٤ س + ٣ ص - ٥ ع = ٦$ ، $٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢$ ، $٥ س - ٢ ص - ٧ ع = ١$

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix} \quad |أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{vmatrix}$$

∴ $|أ| = ٤ (-١٤ + ٨) - ٣ (-٢١ - ٢٠) - ٥ (-٦ - ١٠) = ١٧٩$

∴ $|أ| \neq ٠$ ∴ $ر (أ) = ٣$ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : $أ س = ب$ حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix} ، \quad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، \quad ب = \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١} = -١٤ + ٨ = -٦$ ،

$أ_{٢١} = - (-٢١ - ٢٠) = ٤١$ ، $أ_{٣١} = -٦ - ١٠ = -١٦$ ،

$أ_{١٢} = - (-٢١ - ١٠) = ٣١$ ، $أ_{٢٢} = -٢٨ + ٢٥ = -٣$ ، $أ_{٣٢} = - (-٨ - ١٥) = ٢٣$ ،

$أ_{١٣} = ١٢ + ١٠ = ٢٢$ ، $أ_{٢٣} = - (١٦ + ١٥) = -٣١$ ، $أ_{٣٣} = ٨ - ٩ = -١$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -٦ & ٤١ & -١٦ \\ ٣١ & -٣ & ٢٣ \\ ٢٢ & -٣١ & -١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ $س = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٣٥٨ \\ ١٧٩ \\ ١٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ $س = ٢$ ، $ص = ١$ ، $ع = ١$ ، مجموعة الحل = { (٢ ، ١ ، ١) }

(٢) إذا كان : $ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢} \right)^{٤}$ ، $ع_{٢} = حا \frac{١}{٣} \pi + ت حتا \frac{١}{٣} \pi$ ، $ت^{٢} = -١$ ، و كان : $ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

∴ $ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \right)^{٤} = \left(حتا \frac{١}{٦} \pi + ت حا \frac{١}{٦} \pi \right)^{٤}$

$= حتا \frac{٢}{٣} \pi + ت حا \frac{٢}{٣} \pi$

، $ع_{٢} = حا \frac{١}{٣} \pi + ت حتا \frac{١}{٣} \pi = حتا (-\frac{١}{٣} \pi + \frac{١}{٢} \pi) + ت حا (-\frac{١}{٣} \pi + \frac{١}{٢} \pi)$

$= حتا \frac{١}{٦} \pi + ت حا \frac{١}{٦} \pi$

$\therefore$ ع $= \dfrac{\text{حتا } \frac{٢}{٣}\pi + \text{ت حا } \frac{٢}{٣}\pi}{\text{حتا } \frac{١}{٣}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٣}\pi} =$ حتا $\frac{١}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٣}\pi$

، ع$^{\frac{١}{٢}}$ = (حتا $\frac{١}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٣}\pi$)$^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = حتا $\dfrac{\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi}{٢}$ + ت حا $\dfrac{\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi}{٢}$ ، ر = ٠ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : ع$_{١}^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٤}\pi$) ،

عندما : ر = −١ فإن : ع$_{٢}^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا ($-\frac{٣}{٤}\pi$) + ت حا ($-\frac{٣}{٤}\pi$))

السؤال الخامس :

(١) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{أ} + \text{ب})(\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب})$$

الحل

بإجراء : ع$_١$ + ع$_٢$ + ع$_٣$ فى ع$_١$

$\therefore$ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س+أ+ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{س+أ+ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{س+أ+ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$ بإخراج (س + أ + ب) مشترك من ع$_١$

$\therefore$ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & \text{س} & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

بإجراء : ص$_٢$ − ص$_١$ فى ص$_٢$ ، ص$_٣$ − ص$_١$ فى ص$_٣$

$\therefore$ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{س} - \text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} - \text{ب} \end{vmatrix}$

= (س + أ + ب) (س − أ) (س − ب) = الطرف الأيسر

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣) و يوازى المستقيم $\dfrac{\text{س} - ١}{٥} = \dfrac{\text{ص} + ٣}{٢} = \dfrac{١ - \text{ع}}{٣}$

الحل

معادلة المستقيم المعطى هى : $\dfrac{\text{س} - ١}{٥} = \dfrac{\text{ص} + ٣}{٢} = \dfrac{\text{ع} - ١}{-٣}$

$\because$ المستقيم المطلوب // المستقيم المعطى

$\therefore$ ميل المستقيم المطلوب = ميل المستقيم المعطى = (٥ ، ٢ ، −٣)

، $\because$ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣)

$\therefore$ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى :

$\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (٥ ، ٢ ، −٣)

و المعادلات البارامترية هى : س = ٢ + ٥ ك ، ص = ١ + ٢ ك

، ع = −٣ − ٣ ك

و المعادلة الإحداثية هى : $\dfrac{\text{س} - ٢}{٥} = \dfrac{\text{ص} - ١}{٢} = \dfrac{\text{ع} + ٣}{-٣}$

الاختبار السابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{٣٠}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٣٠}\text{ق}_{\text{ر}+١٠}$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{٧} = ٩٠\ {}^{\text{ن}-٢}\text{ل}_{٥}$

فإن : $\lfloor \text{ن} - \text{ر}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ١٠ (ء) $\lfloor ٢٠$

الحل

$\because$ $^{٣٠}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٣٠}\text{ق}_{\text{ر}+١٠}$ $\therefore$ ر + ر + ١٠ = ٣٠ و منها : ر = ١٠

، $\because$ $^{\text{ن}}\text{ل}_{٧} = ٩٠\ {}^{\text{ن}-٢}\text{ل}_{٥}$ $\therefore$ $\dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن} - ٧} = \dfrac{٩٠ \lfloor \text{ن} - ٢}{\lfloor \text{ن} - ٧}$ و منها :

ن (ن − ١) $\lfloor \text{ن} - ٢$ = ٩٠ $\lfloor \text{ن} - ٢$ $\therefore$ ن (ن − ١) = ٩٠

$\therefore$ $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {}^{١٠}\text{ل}_{٢}$ $\therefore$ ن = ١٠ $\therefore$ $\lfloor \text{ن} - \text{ر}$ = $\lfloor ٠$ = ١

(٢) إذا كان للمعادلات : ٣ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س − ٥ ص + ٢ ع = ٠ ، ٩ س − ٦ ص + ك ع = ٠ حلول غير الحل الصفرى فإن : ك = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٣　(د) ٤

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٥ & ٢ \\ ٩ & -٦ & ك \end{pmatrix} \quad ، \quad |أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٥ & ٢ \\ ٩ & -٦ & ك \end{vmatrix}$$

∵ المعادلات متجانسة و لها حلول غير الحل الصفرى ، عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) < ٣　∴ |أ| = ٠

∴ ٣ (−٥ ك + ١٢) + ٢ (٦ ك − ١٨) + ١ (−٣٦ + ٤٥) = ٠

∴ −١٥ ك + ٣٦ + ١٢ ك − ٣٦ − ٣٦ + ٤٥ = ٠

∴ ٣ ك = ٩　　∴ ك = ٣

(٣) طول العمود المرسوم بين المستويين ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = ٩ ، ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = −١٧ يساوى ....

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

الحل

بفرض نقطة تنتمى للمستوى الأول بوضع : ص = ٠ ، ع = ٠

∴ س = ٣　∴ النقطة أ (٣ ، ٠ ، ٠) تنتمى للمستوى الأول

و يكون طول العمود المرسوم بين المستويين = طول العمود من أ على المستوى الثانى $= \frac{|٣ \times ٣ + ١٢ \times ٠ - ٤ \times ٠ + ١٧|}{\sqrt{٩ + ١٤٤ + ١٦}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ وحدة طول

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −ك ، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، م) و كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٣　(ب) −٢　(جـ) −١　(د) صفر

الحل

∵ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$　∴ $\frac{٤}{٢} = \frac{-ك}{٢} = \frac{٦}{م}$ و منها : ك = −٤ ، م = ٣

∴ ك + م = −٤ + ٣ = −١

(٥) إذا كان : المستقيم س = ٣ ص = أ ع يوازى المستوى س + ٣ ص + ٢ ع + ٤ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ٣　(ب) ٢　(جـ) ١　(د) −١

الحل

معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{٣ أ} = \frac{ص}{أ} = \frac{ع}{٣}$

∴ متجه اتجاه المستقيم = (٣ أ ، أ ، ٣) ،

متجه اتجاه العمودى على المستوى = (١ ، ٣ ، ٢)

، ∵ المستقيم // المستوى

∴ متجه اتجاه المستقيم ⊥ متجه اتجاه العمودى على المستوى

∴ (٣ أ ، أ ، ٣) • (١ ، ٣ ، ٢) = ٠

∴ ٣ أ + ٣ أ + ٦ = ٠　∴ ٦ أ = −٦　و منها : أ = −١

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ١ ، ٢) فإن : متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) ($\frac{٤}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، $-\frac{٤}{٩}$)　(ب) ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

(جـ) ($-\frac{٤}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٩}$)　(د) ($\frac{٤}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، $-\frac{٤}{٩}$)

الحل

متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$)

$$= \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}\left(\frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}\right) = \frac{(١ ، -٢ ، ١) \bullet (-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}}\left(\frac{(-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}}\right)$$

$= -\frac{٢}{٩}$ (−٢ ، ١ ، ٢) = ($\frac{٤}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، $-\frac{٤}{٩}$)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\left(\frac{٣ + ٥\omega}{٥ + ٣\omega^{٢}} + \frac{٥ + ٣\omega^{٢}}{٣ + ٥\omega}\right)^{٨} = ...$

الحل

المقدار $= \left(\frac{\omega(٣\omega^{٢} + ٥)}{٣\omega^{٢} + ٥} + \frac{\omega^{٢}(٥\omega + ٣)}{٥\omega + ٣}\right)^{٨} = (\omega + \omega^{٢})^{٨} = (-١)^{٨} = ١$

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١(٤ - ٣) - ١(٤ + ١) + ٣(-٣ - ١) = -١٦ \neq ٠$

$\therefore$ ر (أ) = ٣

(٣) إذا كان : المستوى س~ : $س - ع + ١ = ٠$ و المستوى ص~ : $٢س - ٢ص - ع = ٠$ فإن : قياس الزاوية بين المستويين = ...°

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(١ ، ٠ ، -١) ، (٢ ، -٢ ، -١)$

$\because$ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{|(١ ، ٠ ، -١) \bullet (٢ ، -٢ ، -١)|}{\sqrt{١ + ٠ + ١}\ \sqrt{٤ + ٤ + ١}} = \frac{٣}{٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \theta = ٤٥^{\circ}$

(٤) طول نصف قطر الكرة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٦٤$ يساوى ....

الحل

نق = $\sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، -٥ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، -ل ، -٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = (-٤ ، ٤ ، م - ٢)$ و كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ج}}$ فإن : ل + م = ...

الحل

$\overrightarrow{\text{أب}} = (٢ ، -ل ، -٢) - (٤ ، -٥ ، ١) = (-٢ ، -ل + ٥ ، -٣)$

$\because \overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ج}} \quad \therefore \frac{-٢}{-٤} = \frac{-ل + ٥}{٤} = \frac{-٣}{م - ٢}$

$\therefore -ل + ٥ = ٢$ و منها : ل = ٣

، م − ٢ = −٦ و منها : م = −٤ $\therefore$ ل + م = −١

(٦) إذا كان : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٢$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٣$ ، $\|\overrightarrow{\text{ج}}\| = ١٢$ و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} ، \overrightarrow{\text{ب}} ، \overrightarrow{\text{ج}}$ متعامدة مثنى مثنى فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}\| = ...$

الحل

$(\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}\|)^{٢} = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}) \bullet (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}})$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢} + \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ج}} + \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢} + \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{ج}} + \overrightarrow{\text{ج}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ج}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} + \|\overrightarrow{\text{ج}}\|^{٢}$

$\because$ المتجهات متعامدة مثنى مثنى ،

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٤ ، \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٩ ، \|\overrightarrow{\text{ج}}\| = ١٤٤$ ،

$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$.

$\therefore (\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}\|)^{٢} = ٤ + ٩ + ١٤٤ = ١٥٧$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}\| = \sqrt{١٥٧}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(٢) إذا كان : $\text{ع}_{١} = \left(\text{حا } \frac{١}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{١}{٩}\pi\right)^{٥}$ ، $\text{ع}_{٢} = \left(\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi\right)^{٤}$ ، و كان : $\text{ع} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$\text{ع}_{١} = \left(\text{حا } \frac{١}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{١}{٩}\pi\right)^{٥} = \text{حا } \frac{٥}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{٥}{٩}\pi$

$= \text{حتا}\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi\right) + \text{ت حا}\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi\right)$

$\text{ع}_{١} = \text{حتا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right)$

، $\text{ع}_{٢} = \left(\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi\right)^{٤} = \text{حتا } ٢\pi + \text{ت حا } ٢\pi = \text{حتا } ٠ + \text{ت حا } ٠$

$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{حتا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right)}{\text{حتا } ٠ + \text{ت حا } ٠}$

$= \text{حتا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi - ٠\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi - ٠\right)$

$= \text{حتا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right)$

، $\text{ع}^{\frac{١}{٢}} = \left(\text{حتا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right)\right)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ع}^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } \frac{-\frac{١}{١٨}\pi + ٢\text{م}\pi}{٢} + \text{ت حا } \frac{-\frac{١}{١٨}\pi + ٢\text{م}\pi}{٢}$ ، م = ٠ ، ١

عندما : م = ٠ فإن : $\text{ع}_{١}^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا}\left(-\frac{١}{٣٦}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{٣٦}\pi\right)$

$= \text{هـ}^{-\frac{١}{٣٦}\pi\text{ ت}}$

عندما : م = ١ فإن : $\text{ع}_{٢}^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } \frac{٣٥}{٣٦}\pi + \text{ت حا } \frac{٣٥}{٣٦}\pi = \text{هـ}^{\frac{٣٥}{٣٦}\pi\text{ ت}}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ \text{ حتا } \theta ، \text{لو}_{٣} \text{ س} ، \text{حا } \theta)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{حتا } \theta ، \text{لو}_{٥} ٢٧ ، ٢ \text{ حا } \theta)$ و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ١١$

أوجد قيمة س

الحل

$(٢ \text{ حتا } \theta ، \text{لو}_{٣} \text{ س} ، \text{حا } \theta) \bullet (\text{حتا } \theta ، \text{لو}_{٥} ٢٧ ، ٢ \text{ حا } \theta) = ١١$

$\therefore ٢ \text{ حتا}^{٢}\theta + \text{لو}_{٣} \text{ س} \times \text{لو}_{٥} ٢٧ + ٢ \text{ حا}^{٢}\theta = ١١$

$\therefore ٢ (\text{حتا}^{٢}\theta + \text{حا}^{٢}\theta) + \frac{\text{لوهـ س}}{\text{لوهـ } ٣} \times \frac{\text{لوهـ } ٢٧}{\text{لوهـ } ٥} = ١١$

$\therefore ٢ \times ١ + \frac{\text{لوهـ س}}{\text{لوهـ } ٣} \times \frac{٣ \text{ لوهـ } ٣}{\text{لوهـ } ٥} = ١١$

$\therefore ٢ + \frac{\text{لوهـ س}}{١} \times \frac{٣}{\text{لوهـ } ٥} = ١١$ $\therefore \frac{٣ \text{ لوهـ س}}{\text{لوهـ } ٥} = ٩$

$\therefore \frac{\text{لوهـ س}}{\text{لوهـ } ٥} = ٣$ $\therefore \text{لو}_{٥} \text{ س} = ٣$ $\therefore \text{س} = (٥)^{٣} = ١٢٥$

السؤال الرابع :

(١) فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

$\text{ح}_{٣} = ١٧$ ، $٣ \text{ ح}_{٢} \times \text{ح}_{٤} = ٥٤٤$ أوجد قيمة كل من : ن ، س

الحل

$\because \text{ح}_{٣} = ١٧$ $\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} \text{ س}^{٢} = ١٧$ (١)

، $\because ٣ \text{ ح}_{٢} \times \text{ح}_{٤} = ٥٤٤$ بالقسمة ÷ $(\text{ح}_{٣})^{٢}$

$\therefore ٣ \times \frac{\text{ح}_{٢}}{\text{ح}_{٣}} \times \frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٣}} = \frac{٥٤٤}{١٧ \times ١٧}$

$\therefore ٣ \times \frac{٢}{\text{ن} - ٢ + ١} \times \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{ن} - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\text{س}}{١} = \frac{٣٢}{١٧}$

$\therefore \frac{\text{ن} - ٢}{\text{ن} - ١} = \frac{١٦}{١٧}$ $\therefore ١٦ \text{ن} - ١٦ = ١٧ \text{ن} - ٣٤$

∴ $ن = 18$ بالتعويض (1) ينتج : $^{18}ق_2 \; س^2 = 17$

∴ $153 \; س^2 = 17$ ∴ $س^2 = \frac{1}{9}$ ∴ $س = \pm \frac{1}{3}$

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} أ+ب+2 & أ & ب \\ 1 & 2أ+ب+1 & ب \\ 1 & أ & أ+2ب+1 \end{vmatrix} = 2(أ+ب+1)^3$$

الحل

بإجراء : $ع_1 + ع_2 + ع_3$ فى $ع_1$

∴ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 2(أ+ب+1) & أ & ب \\ 2(أ+ب+1) & 2أ+ب+1 & ب \\ 2(أ+ب+1) & أ & أ+2ب+1 \end{vmatrix}$

بإخراج : $2(أ+ب+1)$ مشترك من $ع_1$

∴ الطرف الأيمن $= 2(أ+ب+1) \begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 1 & 2أ+ب+1 & ب \\ 1 & أ & أ+2ب+1 \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_2 - ص_1$ فى $ص_2$ ، $ص_3 - ص_1$ فى $ص_3$

∴ الطرف الأيمن $= 2(أ+ب+1) \begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 0 & أ+ب+1 & 0 \\ 0 & 0 & أ+ب+1 \end{vmatrix}$

المحدد على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن $= 2(أ+ب+1)(أ+ب+1)(أ+ب+1)$

$= 2(أ+ب+1)^3 =$ الطرف الأيسر

السؤال الخامس :

(١) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} 0 & 2ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$ و كان : $أ^{مد} = أ^{-1}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع

الحل

∵ $أ = \begin{pmatrix} 0 & 2ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$ ∴ $أ^{مد} = \begin{pmatrix} 0 & س & س \\ 2ص & ص & -ص \\ ع & -ع & ع \end{pmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} 0 & 2ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{vmatrix} = 0 - 2ص(س ع + س ع) + ع(- س ص - س ص)$

∴ $|أ| = - 4 س ص ع - 2 س ص ع = - 6 س ص ع$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{11}} = ص ع - ص ع = 0$ ،

$\overline{أ_{21}} = -(س ع + س ع) = - 2 س ع$ ،

$\overline{أ_{31}} = - س ص - س ص = - 2 س ص$ ،

$\overline{أ_{12}} = -(2 ص ع - ص ع) = - 3 ص ع$ ، $\overline{أ_{22}} = 0 - س ع = - س ع$ ،

$\overline{أ_{32}} = -(0 - 2 ص ع) = 2 ص ع$ ،

$\overline{أ_{13}} = - 2 ص ع - ص ع = - 3 ص ع$ ، $\overline{أ_{23}} = -(0 - س ع) = س ع$ ،

$\overline{أ_{31}} = 0 - 2 س ص = - 2 س ص$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ $= \begin{pmatrix} 0 & -2س ع & -2س ص \\ -3ص ع & - س ع & 2ص ع \\ -3ص ع & س ع & -2س ص \end{pmatrix}$

$$\therefore\ \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{-6\,\text{س ص ع}} \begin{pmatrix} 0 & -3\text{ص ع} & -3\text{ص ع} \\ -2\text{س ع} & -\text{س ع} & \text{س ع} \\ -2\text{س ص} & 2\text{ص ع} & -2\text{س ص} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\text{س}} & \frac{1}{2\text{س}} \\ \frac{1}{3\text{ص}} & \frac{1}{6\text{ص}} & \frac{-1}{6\text{ص}} \\ \frac{1}{3\text{ع}} & \frac{-1}{3\text{ع}} & \frac{1}{3\text{ع}} \end{pmatrix} \quad ، \quad \because\ \text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & \text{س} & \text{س} \\ 2\text{ص} & \text{ص} & -\text{ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\text{س}} & \frac{1}{2\text{س}} \\ \frac{1}{3\text{ص}} & \frac{1}{6\text{ص}} & \frac{-1}{6\text{ص}} \\ \frac{1}{3\text{ع}} & \frac{-1}{3\text{ع}} & \frac{1}{3\text{ع}} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س $= \frac{1}{2\text{س}}$ 　　 $\therefore$ س$^2 = \frac{1}{2}$ 　　 $\therefore$ س $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ص $= \frac{1}{6\text{ص}}$ 　　 $\therefore$ ص$^2 = \frac{1}{6}$ 　　 $\therefore$ س $= \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\therefore$ ع $= \frac{1}{3\text{ع}}$ 　　 $\therefore$ ع$^2 = \frac{1}{3}$ 　　 $\therefore$ س $= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى
س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢

الحل

∵ س = ص = ع 　 بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ س + ٢س + ٣س = ١٢ 　 ∴ ٦س = ١٢ 　 ∴ س = ٢

∴ ص = ٢ ، ع = ٢ 　 ∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢ ، ٢)

الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(أ) إذا كان : $\sqrt{1 + \text{لو س}} = 1$ فإن : س = ...

الحل

١ + لو س = ١ 　 ∴ لو س = ٠ 　 ∴ س = ١

أو : ١ + لو س = ٠ 　 ∴ لو س = − ١ 　 ∴ س = $(10)^{-1} = \frac{1}{10}$

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix} = 5$ فإن قيمة $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ}+5 & \text{ب}+5 & \text{جـ}+5 \end{vmatrix} = ...$

الحل

كتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

، ∵ قيمة المحدد الأول = ٥ ، قيمة المحدد = ٠ " عناصر الصف الأول أصفار "

∴ الطرف الأيمن = ٥ + ٠ = ٥

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين :

$\overleftarrow{ر}_1 = (-2 ، 5 ، -7) + ك\,(-6 ، 6 ، 8)$ ،

$\overleftarrow{ر}_2 = (1 ، -2 ، 3) + ك\,(4 ، 12 ، -6)$ يساوى ....

الحل

متجها اتجاه المستقيمين هما : (− ٦ ، ٦ ، ٨) ، (٤ ، ١٢ ، − ٦)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore\ \text{حتا}\,\theta = \frac{|(-6 ، 6 ، 8) \bullet (4 ، 12 ، -6)|}{\sqrt{36 + 36 + 64}\ \sqrt{16 + 144 + 36}} = \frac{\text{صفر}}{\sqrt{136}\ \sqrt{196}} = \text{صفر}$

∴ θ = ٩٠°

(٤) إذا كان : || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = ٤ ، || $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = ٦ و كان : قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يساوى ٦٠° فإن : (٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) • ($\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ...

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ ، ∵ θ = ٦٠°

∴ $\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{٤} \times \text{٦}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ • $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ١٢

، المقدار = ٢ (|| $\overrightarrow{\text{أ}}$ ||)² − ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ • $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ • $\overrightarrow{\text{أ}}$ − (|| $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||)²

= ٢ × ١٦ − ٢ × ١٢ + ١٢ − ٣٦

= ٣٢ − ٢٤ + ١٢ − ٣٦ = − ١٦

(٥) معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٧ ، ١ ، − ٤) ، ب (٣ ، − ١ ، ٢) هى ....

الحل

مركز الكرة = ($\frac{\text{٧ + ٣}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{١ − ١}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{− ٤ + ٢}}{\text{٢}}$) = (٥ ، ٠ ، − ١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، − ١ ، ٢) − (٧ ، ١ ، − ٤) = (− ٤ ، − ٢ ، ٦)

∴ || $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ || = $\sqrt{\text{١٦ + ٤ + ٣٦}}$ = $\sqrt{\text{٥٦}}$ = ٢ $\sqrt{\text{١٤}}$

∴ طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{\text{١٤}}$

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٥)² + ص² + (ع + ١)² = ١٤

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٢ ، − ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ١ ، ك − ١) و كان || $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = ٧ وحدة طولية فإن : ك = ...

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٢ ، − ٤) + (١ ، ١ ، ك − ١) = (٢ ، ٣ ، ك − ٥)

، ∵ || $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = ٧ ∴ (|| $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||)² = ٤٩

∴ ٤ + ٩ + (ك − ٥)² = ٤٩ ∴ (ك − ٥)² = ٣٦

∴ ك − ٥ = ٦ و منها : ك = ١١

أو : ك − ٥ = − ٦ و منها : ك = − ١

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{أ + ب ت}}$ = ٢ + ٣ ت فإن : أ × ب = ...

حيث : أ × ب ∈ ح*

(أ) − ٦ (ب) − ٥ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

أ² + ب² = (أ + ب ت) (٢ + ٣ ت) = (٢ أ − ٣ ب) + (٣ أ + ٢ ب) ت

∴ أ² + ب² = ٢ أ − ٣ ب (١) ، ٣ أ + ٢ ب = ٠ ∴ ب = − $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ أ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) ينتج : $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ ب² + ب² = − $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ب − ٣ ب بالضرب × ٩

∴ ٤ ب² + ٩ ب² = − ١٢ ب − ٢٧ ب ∴ ١٣ ب² + ٣٩ ب = ٠

∴ ب (ب + ٣ ب) = ٠ ∴ ب = ٠ مرفوض " ب ∈ ح* "

أو ب = − ٣ بالتعويض فى (٢) ينتج : أ = ٢ ∴ أ × ب = − ٦

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{٠} & \text{−٢} & \text{٣} \\ \text{−٢} & \text{٤} & \text{−٦} \\ \text{٣} & \text{−٦} & \text{٩} \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (حـ) ١ (ء) صفر

الحل

∵ |أ| = $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{−٢} & \text{٣} \\ \text{−٢} & \text{٤} & \text{−٦} \\ \text{٣} & \text{−٦} & \text{٩} \end{vmatrix}$ = ٠ لأن : ص٣ = ص٢ × (− ١,٥)

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

(٣) أ ب حـ ء متوازى أضلاع و كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ٢ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ = (−١ ، ٢ ، −٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ... سم٢

(أ) ٦ (ب) ٧ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ $\sqrt{١١}$ (ء) $\sqrt{١٠١}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أء}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٤ \overrightarrow{\text{س}} + ٧ \overrightarrow{\text{ص}} + ٦ \overrightarrow{\text{ع}}$

مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = $\| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أء}} \|$

$= \sqrt{١٦ + ٤٩ + ٣٦} = \sqrt{١٠١}$

(٤) فى الشكل المقابل :

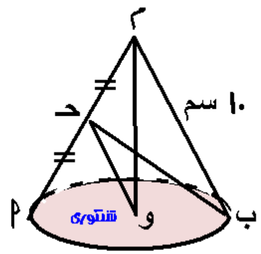
مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم

، حـ منتصف $\overline{\text{م أ}}$ فإن :

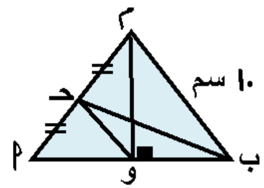
$\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}$ = ...

(أ) −٤٣ (ب) −٤٠

(جـ) −٣٧ (ء) −٣٣



الحل



∵ محيط قاعدة المخروط = ١٢ π سم

∴ ٢ π نق = ١٢ π ∴ نق = ب و = ٦ سم

∴ حتا ∠ م ب و = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

، ∵ م حـ = حـ أ ، ب و = و أ ∴ $\overline{\text{م ب}}$ // $\overline{\text{و حـ}}$

∴ ق (∠ حـ و ب) + ق (∠ م ب و) = ١٨٠°

∴ حتا ∠ حـ و ب = − حتا ∠ م ب و = $-\frac{٣}{٥}$

من △ م و أ : ∵ ق (∠ م و أ) = ٩٠° ، م حـ = حـ أ

∴ حـ و = $\frac{١}{٢}$ م أ = ٥ سم

من △ حـ ب و : (ب حـ)^{٢} = ٣٦ + ٢٥ − ٢ × ٦ × ٥ × ($-\frac{٣}{٥}$) = ٩٩

∴ ب حـ = ٣ $\sqrt{١١}$ سم " قانون جيب التمام "

، حتا ∠ ب حـ و = $\frac{٢٥ + ٩٩ - ٣٦}{٢ \times ٥ \times ٣\sqrt{١١}} = \frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}$ " قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = - (\overrightarrow{\text{حـ ب}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}) = - \| \overrightarrow{\text{حـ ب}} \| \, \| \overrightarrow{\text{حـ و}} \|$ حتا ∠ ب حـ و

$= - (٣\sqrt{١١} \times ٥ \times \frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}) = -٤٣$

حل آخر

من ب و حـ : $\overrightarrow{\text{ب و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = (\overrightarrow{\text{ب و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}}) \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = \overrightarrow{\text{ب و}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}$

$= \overrightarrow{\text{ب و}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} - \overrightarrow{\text{و حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{و حـ}}$

$= \| \overrightarrow{\text{ب و}} \| \, \| \overrightarrow{\text{حـ و}} \|$ حتا ∠ حـ و ب − ($\| \overrightarrow{\text{و حـ}} \|$)^{٢}

= ٦ × ٥ × ($-\frac{٣}{٥}$) − ٢٥ = −٤٣

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٢ \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}})$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) $-٣ \overrightarrow{\text{ص}} + ٣ \overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) $-٣ \overrightarrow{\text{س}} - ٣ \overrightarrow{\text{ص}}$ (ء) $٣ \overrightarrow{\text{س}} - ٣ \overrightarrow{\text{ص}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = - \overrightarrow{\text{س}} + ٢ \overrightarrow{\text{ص}} + ٢ \overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٣ \overrightarrow{\text{ص}} + ٣ \overrightarrow{\text{ع}}$

(٦) إذا كان ل_1 : $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = \text{ع}$ ، ل_2 : $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \text{ع}$
مستقيمان فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ فإن : $\theta = ...$

(أ) 60° (ب) 120° (حـ) 150° (ء) 165°

الحل

متجها اتجاه المستقمين هما : $(0 ، 1 ، 1)$ ، $(1 ، 0 ، 1)$

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين $= \theta$

$$\therefore \text{حتا}\,\theta = \frac{|(0 ، 1 ، 1)\bullet(1 ، 0 ، 1)|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60^\circ$$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

$2\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = -1$ ، $\text{س} - \text{ع} = 2$ ، $\text{س} + \text{ص} = 3$

الحل

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0+1) + 1(0+1) + 1(1-0) = 4$$

$\therefore |\text{أ}| \neq 0$ ∴ ر (أ) $= 3$ ، ∵ عدد المجاهيل $= 3$

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ سَ $=$ ب حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ، \quad \text{سَ} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}_{11}} = 0 + 1 = 1$ ،

$\overline{\text{أ}_{21}} = -(0 + 1) = -1$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = 1 - 0 = 1$ ،

$\overline{\text{أ}_{12}} = -(0 - 1) = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{22}} = 0 - 1 = -1$ ، $\overline{\text{أ}_{32}} = -(2 + 1) = -3$ ،

$\overline{\text{أ}_{13}} = 1 - 0 = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{23}} = -(-2 - 1) = 3$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = 0 + 1 = 1$

$$\therefore \text{مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$، \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{سَ} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \text{س} = 1$ ، $\text{ص} = 2$ ، $\text{ع} = -1$ ، مجموعة الحل $= \{(1 ، 2 ، -1)\}$

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات : $2\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = -5$ ،
$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = 2$ ، $3\text{س} - \text{ص} - \text{ع} = 6$

الحل

راجع الأختبار الأول .. السؤال الخامس (٢)

السؤال الرابع :

(١) إذا كان : $\text{ع}_1 = 1 - \sqrt{3}\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = \text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta$
، $\text{ع}_3 = \left(\text{حتا}\,\frac{1}{2}\theta - \text{ت حا}\,\frac{1}{2}\theta\right)^2$ و كان : $\text{ع} = \dfrac{\text{ع}_1\,\text{ع}_2}{\text{ع}_3}$

أوجد المقياس و السعة للعدد ع ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية عند : $\theta = \frac{1}{6}\pi$

الحل

$\because$ $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ $\therefore$ $س = 1$ ، $ص = -\sqrt{3}$

$\therefore$ $ل^2 = (1)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$ $\therefore$ $ل = 2$

$\therefore$ $\text{ط}\,\theta = -\sqrt{3}$ ، $\because$ $س > 0$ ، $ص < 0$

$\therefore$ ع يقع فى الربع الرابع ، $\therefore$ $\theta = \text{ط}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$

$\therefore$ $ع_1 = 2\,(\text{حتا}(-\frac{1}{3}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{3}\pi))$

، $ع_2 = \text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta$

، $ع_3 = (\text{حتا}\,\frac{1}{2}\theta - \text{ت حا}\,\frac{1}{2}\theta)^2 = \text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta$

$= \text{حتا}(-\theta) + \text{ت حا}(-\theta)$

$\therefore$ $ع = 2\,(\text{حتا}(-\frac{1}{3}\pi + \theta - (-\theta)) + \text{ت حا}(-\frac{1}{3}\pi + \theta - (-\theta)))$

$\therefore$ $ع = 2\,(\text{حتا}(-\frac{1}{3}\pi + 2\theta) + \text{ت حا}(-\frac{1}{3}\pi + 2\theta))$

$\therefore$ $|ع| = 2$ ، سعة $ع = (-\frac{1}{3}\pi + 2\theta)$

، عندما : $\theta = \frac{1}{6}\pi$ $\therefore$ $ع = 2\,(\text{حتا}\,0 + \text{ت حا}\,0)$

$= \text{حتا}\,(-\frac{1}{18}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{18}\pi)$

، $ع^{\frac{1}{2}} = (2\,(\text{حتا}\,0 + \text{ت حا}\,0))^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,(\text{حتا}\,\frac{0 + 2ر\pi}{2} + \text{ت حا}\,\frac{0 + 2ر\pi}{2})$ ، $ر = 0 ، 1$

عندما : $ر = 0$ فإن : الجذر الأول $= \sqrt{2}\,(\text{حتا}\,0 + \text{ت حا}\,0)$

عندما : $ر = 1$ فإن : الجذر الأول $= \sqrt{2}\,(\text{حتا}\,\pi + \text{ت حا}\,\pi)$

(٢) إبحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية : $س + 3ص - 2ع = 0$ ،

$س - 8ص + 8ع = 0$ ، $3س - 2ص + 4ع = 0$

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |أ| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ $|أ| = 1(-32 + 16) - 3(4 - 24) - 2(-2 + 24) = 0$

$\therefore$ $ر(أ) < 3$

، $\because$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ $\therefore$ $ر(أ) = 2$ ، $\because$ عدد المجاهيل $= 3$

$\therefore$ $ر(أ) <$ عدد المجاهيل ، $\because$ المعادلات متجانسة

$\therefore$ يوجد حل خلاف الحل الصفرى

السؤال الخامس :

(١) فى مفكوك $(س^2 + \frac{1}{2س})^{3ن}$ حسب قوى س التنازلية

أولاً : أثبت أن الحد الخالى من س رتبته $(2ن + 1)$

ثانياً : أوجد النسبة بين الحد الخالى من س و الحد الأوسط عندما $ن = 4$ ، $س = 1$

الحل

أولاً : نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

$\therefore$ $ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \,(\frac{1}{2س})^{ر}\,(س^2)^{3ن-ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر \times (2)^{-ر} \times س^{-ر} \times س^{6ن-2ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر \times (2)^{-ر} \times س^{6ن-3ر}$

نضع : ٦ ن − ٣ ر = ٠ ∴ ٦ ن = ٣ ر ∴ ر = ٢ ن

∴ رتبة الحد الخالى من س = ٢ ن + ١

ثانياً : عندما : ن = ٤ ∴ عدد الحدود = ١٢

، رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

، رتبة الحد الخالى من س = ٢ × ٤ + ١ = ٩

∴ $\frac{ع_٩}{ع_٧} = \frac{ع_٩}{ع_٨} \times \frac{ع_٨}{ع_٧} = \frac{١٢ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١} \times \frac{١٢ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١} = \frac{١٥}{١١٢}$

(٢) إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$ ، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$ متماستان فأوجد قيمة ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : $م_١ = (٣ ، ٠ ، ٣)$ ، $نق_١ = ٤$ ،

بالنسبة للكرة الثانية : $م_٢ = (-١ ، ٤ ، ك)$ ، $نق_٢ = ٥$

∵ الكرتان متماستان ∴ أولاً : إذا كانت متماستان من الخارج فإن :

$م_١م_٢ = نق_١ + نق_٢ = ٩$ ∴ $(م_١م_٢)^٢ = ٨١$

∴ $(٣ + ١)^٢ + (٠ - ٤)^٢ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = ٤٩$

∴ ٣ − ك = ٧ و منها : ك = −٤ أو

٣ − ك = −٧ و منها : ك = ١٠

ثانياً : إذا كانت متماستان من الداخل فإن :

$م_١م_٢ = نق_٢ - نق_١ = ٩$ ∴ $(م_١م_٢)^٢ = ١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = -٣١$ مرفوض

الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) إذا كان : $^{س+ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$ فإن : $^{ص}ق_{٢س} = ...$

الحل

∵ $^{س+ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ∴ $^{س+ص}ل_٤ = {}^{٦}ل_٤$ ∴ س + ص = ٦ (١)

، ∵ $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$ ∴ $\underline{|٢س + ص} = \underline{|٧}$ ∴ ٢ س + ص = ٧ (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : س = ١ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ص = ٥

∴ $^{ص}ق_{٢س} = {}^{٥}ق_٢ = ١٠$

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & أ+١ \\ ٥ & أ-١ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٢١$ هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ٧ (أ + ١) (أ − ١)

و تكون المعادلة هى : ٧ (أ + ١) (أ − ١) = ٢١

∴ $أ^٢ - ١ = ٣$ ∴ $أ^٢ = ٤$ ∴ أ = ± ٢ ∴ مجموعة الحل = { ٢ ، − ٢ }

(٣) جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٣ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٠ ، ١)$ يساوى ....

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ

∴ حتا θ = $\frac{(١ ، -٣ ، ٠) \bullet (٢ ، ٠ ، ١)}{\sqrt{١ + ٩ + ١}\ \sqrt{٤ + ٠ + ١}} = \frac{٢}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

(٤) طول نصف قطر الكرة :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + ٢\text{س} - ٢\text{ص} - ٤\text{ع} - ٣ = ٠$$

يساوى = ...

الحل

مركز الكرة : $\text{م} = (-١ ، ١ ، ٢)$ ، $\text{ح} = -٣$

∴ طول نصف قطر الكرة : $\text{نق} = \sqrt{١ + ١ + ٤ + ٣} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \left(-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، \text{ك}\right)$ متجه وحدة فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه وحدة ∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١$

∴ $\frac{١}{٤} + \frac{٩}{١٦} + \text{ك}^2 = ١$ ∴ $\text{ك}^2 = \frac{٣}{١٦}$ ∴ $\text{ك} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك} ، -٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٣ ، -\text{ك})$ متعامدان فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ المتجهان متعامدان ∴ $(\text{ك} ، -٣ ، ١) \bullet (٢ ، ٣ ، -\text{ك}) = ٠$

∴ $٢\text{ك} - ٩ - \text{ك} = ٠$ ∴ $\text{ك} = ٩$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $(١ + \omega)^4 + (١ + \omega^2)^4 + (\omega + \omega^2)^4 = ...$

الحل

المقدار $= (\omega^2)^4 + (\omega)^4 + (-١)^4 = \omega^8 + \omega^4 + ١$

$= \omega^6 \times \omega^2 + \omega^3 \times \omega + ١ = \omega^2 + \omega + ١ =$ صفر

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix} = ...$

الحل

∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢(٤ - ١) - ١(-٢ - ٣) + ٣(-٢ - ٦) = -١٣$

∴ $|\text{أ}| \neq ٠$ ∴ $\text{ر}(\text{أ}) = ٣$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٢ ، \text{ك})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، \text{م} ، ٢)$

و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ... ، م = ...

الحل

∵ المتجهان متوازيان ∴ $\frac{٣}{١} = \frac{-٢}{\text{م}} = \frac{\text{ك}}{٢}$ ∴ $\text{ك} = ٦$ ، $\text{م} = -\frac{٢}{٣}$

(٤) إذا كان : قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٤ ، \text{ك})$ مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى ٤٥° فإن : ك = ...

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور الصادات = $(٠ ، ١ ، ٠)$

، ∵ قياس الزاوية = ٤٥°

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{(٢ ، ٤ ، \text{ك}) \bullet (٠ ، ١ ، ٠)}{\sqrt{٤ + ١٦ + \text{ك}^2}\,\sqrt{٠ + ١ + ٠}}$ و منها و بالتربيع ينتج :

$٢٠ + \text{ك}^2 = ٣٢$ ∴ $\text{ك}^2 = ١٢$ ∴ $\text{ك} = \pm ٢\sqrt{٣}$

(٥) إذا كان المستويان : $\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ك}\text{ع} = ٢$ ،

$٣\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع} + ٤ = ٠$ متعامدان فإن : ك = ...

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(١ ، ٢ ، \text{ك})$ ، $(٣ ، -١ ، ٢)$ ∵ المستويان متعامدان

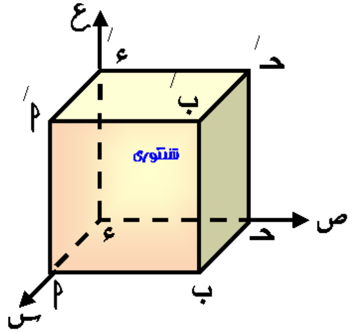
∴ $(١ ، ٢ ، \text{ك}) \bullet (٣ ، -١ ، ٢) = ٠$

∴ $٣ - ٢ + ٢\text{ك} = ٠$ ومنها : $\text{ك} = -\frac{١}{٢}$

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء' مكعب طول ضلعه الوحدة فإن :

$\overrightarrow{أب'} \bullet \overrightarrow{ب ء} = ...$



الحل

نعتبر ء نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ أ(١ ، ٠ ، ١) ، ب'(١ ، ١ ، ١) ،

ء(٠ ، ٠ ، ١) ، ب(١ ، ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، ٠ ، ١) − (١ ، ١ ، ٠) = (−١ ، −١ ، ١)

، $\overrightarrow{أب'}$ = (١ ، ١ ، ١) − (١ ، ٠ ، ١) = (٠ ، ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{أب'} \bullet \overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، ١ ، ٠) • (−١ ، −١ ، ١) = −١

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) إذا كان : $ع_١ = ٢(\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi)$ ،

$ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٤}\pi - ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٤}\pi)$ ، $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_١^{٣} \times ع_٢^{٤}}{ع_٣^{٥}}$ على الصورة الأسية ثم الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

∵ $ع_١ = ٢(\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi)$

∴ $ع_١ = ٢(\text{حتا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi))$

$= ٢(\text{حتا}\,\frac{١}{٦}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٦}\pi)$

∴ $(ع_١)^{٣} = (٢(\text{حتا}\,\frac{١}{٦}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٦}\pi))^{٣}$

$= ٨(\text{حتا}\,\frac{١}{٢}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٢}\pi)$

، ∵ $ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حا}\,\frac{١}{٤}\pi - ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٤}\pi)$

∴ $ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi))$

$= \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi))$

∴ $(ع_٢)^{٤} = (\sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi)))^{٤}$

$= ٤(\text{حتا}\,(-\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\pi))$

∵ $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$ ∴ س = ١ ، ص = $\sqrt{٣}$

∴ $ل^{٢} = (١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢} = ١ + ٣ = ٤$ ∴ ل = ٢

∴ ظا θ = $\sqrt{٣}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ $ع_٣$ يقع فى الربع الأول ، ∴ θ = $\text{ظا}^{-١}(\sqrt{٣}) = \frac{١}{٣}\pi$

∴ $ع_٣ = ٢(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi)$

∴ $(ع_٣)^{٥} = (٢(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi))^{٥} = ٣٢(\text{حتا}\,\frac{٥}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{٥}{٣}\pi)$

$= ٣٢(\text{حتا}\,(\frac{٥}{٣}\pi - ٢\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{٥}{٣}\pi - ٢\pi))$

$= ٣٢(\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi))$

∴ $ع = \frac{٨ \times ٤}{٣٢}\,(\text{حتا}\,\frac{\frac{١}{٢}\pi - \pi}{-\frac{١}{٣}\pi} + ت\,\text{حا}\,\frac{\frac{١}{٢}\pi - \pi}{-\frac{١}{٣}\pi})$

∴ $ع = (\text{حتا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \pi + \frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \pi + \frac{١}{٣}\pi))$

$= \text{حتا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) = = هـ^{-\frac{١}{٦}\pi ت}$

، $ع^{\frac{١}{٢}} = (\text{حتا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٦}\pi))^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore\ \text{ع}^{\frac{١}{٢}} = \left(\text{حتا}\ \frac{-\frac{١}{٢}\pi + ٢\text{ر}\pi}{٢} + \text{ت حا}\ \frac{-\frac{١}{٢}\pi + ٢\text{ر}\pi}{٢}\right)$ ، $\text{ر} = ٠ ، ١$

عندما : $\text{ر} = ٠$ فإن : الجذر الأول $= \left(\text{حتا} -\frac{١}{١٢}\pi + \text{ت حا} -\frac{١}{١٢}\pi\right)$

عندما : $\text{ر} = ١$ فإن : الجذر الأول $= \left(\text{حتا}\ \frac{١١}{١٢}\pi + \text{ت حا}\ \frac{١١}{١٢}\pi\right)$

(٢) إذا مر المستوى : $٢\text{أ}\text{س} - ٣\text{أ}\text{ص} + ٤\text{أ}\text{ع} + ٦ = ٠$ بمنتصف القطعة المستقيمة المارة بين مركزى الكرتين :

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٦\text{س} - ٨\text{ص} - ٢\text{ع} = ١٣$ ،

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ - ١٠\text{س} + ٤\text{ص} - ٢\text{ع} = ٨$ فما قيمة أ

الحل

مركز الكرة الأولى : $\text{م}_١ = (-٣ ، ٤ ، ١)$

مركز الكرة الثانية : $\text{م}_٢ = (٥ ، -٢ ، ١)$

إحداثيات منتصف $\overline{\text{م}_١\text{م}_٢} = \left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{٤-٢}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right) = (١ ، ١ ، ١)$

و هى تنتمى للمستوى أى تحقق معادلته ، و بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

$٢\text{أ} \times ١ - ٣\text{أ} \times ١ + ٤\text{أ} \times ١ + ٦ = ٠$

$\therefore ٢\text{أ} - ٣\text{أ} + ٤\text{أ} + ٦ = ٠ \qquad \therefore ٣\text{أ} + ٦ = ٠ \qquad \therefore \text{أ} = -٢$

السؤال الرابع :

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

$\text{س} - ٢\text{ص} + ٢\text{ع} = ٢$ ، $٣\text{س} + ٤\text{ع} = ١٠$

، $٦\text{ع} - \text{ص} = ٥$

الحل

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix} \qquad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{vmatrix}$

$\therefore |\text{أ}| = ١(٠ + ٤) + ٢(١٨ - ٠) + ٢(-٣ - ٠) = ٣٤ \neq ٠$

و تكون المعادلة المصفوفية هى : $\text{أ}\,\underset{\sim}{\text{س}} = \text{ب}$ حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{\text{س}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}_{١١}} = ٠ + ٤ = ٤$ ،

$\overline{\text{أ}_{٢١}} = -(١٨ - ٠) = -١٨$ ، $\overline{\text{أ}_{٣١}} = -٣ - ٠ = -٣$ ،

$\overline{\text{أ}_{١٢}} = -(-١٢ + ٢) = ١٠$ ، $\overline{\text{أ}_{٢٢}} = ٦ - ٠ = ٦$ ، $\overline{\text{أ}_{٣٢}} = -(-١ - ٠) = ١$ ،

$\overline{\text{أ}_{١٣}} = -٨ - ٠ = -٨$ ، $\overline{\text{أ}_{٢٣}} = -(٤ - ٦) = ٢$ ، $\overline{\text{أ}_{٣٣}} = ٠ + ٦ = ٦$

$\therefore$ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & -١٨ & -٣ \\ ١٠ & ٦ & ١ \\ -٨ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مد}} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix} \qquad \therefore \underset{\sim}{\text{س}} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} ٦٨ \\ ٣٤ \\ ٣٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ١$ ، $\text{ع} = ١$ ، مجموعة الحل $= \{(٢ ، ١ ، ١)\}$

(٢) أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٣}\right)^{٥\text{ن}}$

حيث $\text{ن} \in \text{ص}_+$ يساوى $\dfrac{\lfloor ٥\text{ن}}{\lfloor ٢\text{ن}\ \lfloor ٣\text{ن}}$

الحل

نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

∴ $ع_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٢})^{٥ن - ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر} \times س^{-٣ر} \times س^{١٠ن - ٢ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر} \times س^{١٠ن - ٥ر}$

نضع : $١٠ن - ٥ر = ٠$ ∴ $٥ر = ١٠ن$ ∴ $ر = ٢ن$

∴ الحد الخالى من س $= {}^{٥ن}ق_{٢ن} = \frac{\underline{|٥ن}}{\underline{|٢ن}\ \underline{|٣ن}}$

السؤال الخامس :

(أ) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات : ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١ عدد غير منتهى من الحلول

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{vmatrix}$ ، $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ك & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ك & ١ \end{array}\right)$

$|أ| = ك(ك^{٢} - ١) - ١(ك - ١) + ١(١ - ك)$

$= ك(ك - ١)(ك + ١) - (ك - ١) - (ك - ١)$

$= (ك - ١)\left(ك(ك + ١) - ١ - ١\right)$

$= (ك - ١)(ك^{٢} + ك - ٢) = (ك - ١)(ك - ١)(ك + ٢)$

∴ ك = ١ أو ك = −٢

عندما : ك = ١ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ لأن : $ص_{١} = ص_{٢}$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

، $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٣ ، و قيمته = ٠

و أى رتبة محدد تالى يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٢ قيمته = ٠

∴ ر (أ) = ر ($أ^{*}$) = ١ ، ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) = ر ($أ^{*}$) < عدد المجاهيل ، ∵ و المعادلات متجانسة

∴ عندما : ك = ١ يوجد عدد غير منتهى من الحلول

، عندما : ك = −٢ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

، $|أ| = -٢(٤ - ١) - ١(-٢ - ١) + ١(١ + ٢) = ٠$ ∴ ر (أ) < ٣

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من أ هى ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢ - ١ = -٥$ ∴ ر (أ) = ٢

، ∵ $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} -٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٣ حيث :

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ١(١ + ٢) - ١(-٢ - ١) + ١(٤ - ١) = ٩$

∴ ر ($أ^{*}$) = ٣ ∴ ر (أ) ≠ ر ($أ^{*}$)

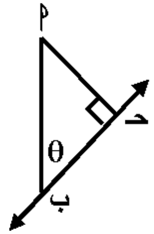
، ∵ المعادلات متجانسة ∴ عندما : ك = ١ لا يوجد حل على الاطلاق

أحمد الشنتورى

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤ ، ١ ، ١) على المستقيم

$$\frac{س + ٣}{١} = \frac{ص - ١}{\sqrt{٥}} = \frac{ع + ٢}{٢}$$

(أ) (ب) (حـ) (ء)



الحل

متجه اتجاه المستقيم ($\overrightarrow{هـ}$) = (١ ، $\sqrt{٥}$ ، ٢)

النقطة ب (−٣ ، ١ ، −٢) ∋ المستقيم

بفرض أن حـ مسقط أ على المستقيم

، θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{بأ}$ و المستقيم ، أ (−٤ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{بأ}$ = (−٤ ، ١ ، ١) − (−٣ ، ١ ، −٢) = (−١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ حتا θ = $\frac{|\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{هـ}|}{\|\overrightarrow{بأ}\| \, \|\overrightarrow{هـ}\|}$ = $\frac{(−١ ، ٠ ، ٣) \bullet (١ ، \sqrt{٥} ، ٢)}{\sqrt{١ + ٠ + ٩} \, \sqrt{١ + ٥ + ٤}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (θ) = ٦٠°

، ∵ $\|\overrightarrow{بأ}\|$ = $\sqrt{١ + ٠ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ أ حـ = $\|\overrightarrow{بأ}\|$ حا θ = $\sqrt{١٠} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : س = $\frac{−١ − \sqrt{٣} ت}{٢}$ حيث : ت^٢ = −١ فإن :

القيمة العددية للمقدار : س^٨ + س^٤ + ٥ = ...

الحل

س = − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ω

∴ س^٨ + س^٤ + ٥ = $\omega^٨$ + $\omega^٤$ + ٥ = $\omega^٢$ + ω + ٥ = −١ + ٥ = ٤

أو : س = $\omega^٢$

∴ س^٨ + س^٤ + ٥ = $\omega^{١٦}$ + $\omega^٨$ + ٥ = ω + $\omega^٢$ + ٥ = −١ + ٥ = ٤

(٢) إذا كان : |ن ، |ن − ٢ ، ن |٢ − ن هى أطوال أضلاع مثلث

فإن : القيمة العددية لمحيط المثلث = ...

الحل

∵ طول الضلع الأول للمثلث = |ن ∴ ن ≥ صفر

∴ ن = { ٠ ، ١ ، ٢ ، .... } (١)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = |ن − ٢ ∴ ن − ٢ ≥ ٠

∴ ن ≥ ٢ ∴ ن = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... } (٢)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = ن |٢ − ن ∴ ٢ − ن ≥ ٠

∴ ن ≤ ٢ ∴ ن = { ٠ ، ١ ، ٢ } (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ن = ٢

∴ طول الضلع الأول = |٢ = ٢

، طول الضلع الثانى = |٠ = ١ ، طول الضلع الثانى = ٢ |٠ = ٢

∴ محيط المثلث = ٢ + ١ + ٢ = ٥ وحدة طول

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ل ، −٣) يوازى المستقيم

$$\frac{س + ٣}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع - ١}{٦}$$ فإن : ل = ...

الحل

∵ متجه اتجاه المستقيم = (٤ ، ٨ ، ٦) ، المتجه $\overrightarrow{أ}$ // المستقيم

∴ $\frac{−٢}{٤} = \frac{ل}{٨}$ ∴ ل = −٤

(٤) قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤ ، $\sqrt{١١}$)

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى ....

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور السينات = (١ ، ٠ ، ٠)

، بفرض أن : قياس الزاوية المطلوبة = θ

∴ حتا $\theta = \dfrac{(3 , 4 , \sqrt{11}) \bullet (1 , 0 , 0)}{\sqrt{9 + 16 + 11}\ \sqrt{1 + 0 + 0}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ ∴ $\theta = 60^\circ$

(٥) **إذا كان : المستوى $\text{س} - 3\text{ص} + \text{م}\,\text{ع} = 5$ ، المستوى $3\text{س} + \text{ل}\,\text{ص} + 6\text{ع} = 10$ متوازيان فإن : $\text{ل} \times \text{م} = \ldots\ldots$**

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(1 , -3 , \text{م})$ ، $(3 , \text{ل} , 6)$ ∵ المستويان متوازيان

∴ $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-3}{\text{ل}} = \dfrac{\text{م}}{6}$ ∴ $\text{ل} = -9$ ، $\text{م} = 2$ ∴ $\text{ل} \times \text{م} = -18$

(٦) **طول العمود المحصور بين المستويين المتوازيين**

$4\text{س} + 6\text{ص} + 12\text{ع} + 18 = 0$ ،

$4\text{س} + 6\text{ص} + 12\text{ع} - 10 = 0$ يساوى ....

الحل

نفرض نقطة تقع على المستوى الأول بوضع : $\text{س} = 0$ ، $\text{ع} = 0$

∴ $\text{ص} = -3$ ، $\text{أ}(0 , -3 , 0)$ تقع على المستوى الأول

∴ طول العمود المحصور بين المستويين = طول العمود المرسوم من أ على المستوى الثانى $= \dfrac{|4 \times 0 - 6 \times 3 + 12 \times 0 - 10|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \dfrac{28}{14} = 2$ وحدة طول

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) **$1 - 6\text{س} + \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1}\text{س}^2 + \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}\text{س}^3 + \ldots\ldots + \text{س}^6 = 64$**

فإن : $\text{س} = \ldots\ldots$

(أ) -1 (ب) 3 (حـ) $\{-1 , 3\}$ (ء) 2

الحل

الطرف الأيمن $= (1 - \text{س})^6$ ∴ $(1 - \text{س})^6 = 64 = (2)^6$

∴ $1 - \text{س} = 2$ و منها : $\text{س} = -1$

أو : $1 - \text{س} = -2$ و منها : $\text{س} = 3$

(٢) **$\left(\dfrac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} + \dfrac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7} \right)^2 = \ldots\ldots$**

(أ) 3 (ب) -3 (حـ) 3ت (ء) -3ت

الحل

المقدار $= \left(\dfrac{\omega^2(5\omega - 3)}{5\omega - 3} + \dfrac{\omega(2\omega^2 - 7)}{2\omega^2 - 5} \right)^2 = (\omega^2 - \omega)^2$

$= (-\sqrt{3}\,\text{ت})^2 = -3$

(٣) **إذا كان المستقيمان : $\dfrac{\text{س} + 1}{2} = \dfrac{\text{ص} - 2}{3} = \dfrac{\text{ع} - 3}{4}$ ،**

$\dfrac{\text{س}}{3} = \dfrac{\text{ص} + 1}{4} = \dfrac{\text{ع} - 1}{\text{ل}}$ متعامدان فإن : $\text{ل} = \ldots\ldots$

(أ) 4 (ب) -4 (حـ) $\frac{9}{2}$ (ء) $-\frac{9}{2}$

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : $(2 , 3 , 4)$ ، $(3 , 4 , \text{ل})$

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ $(2 , 3 , 4) \bullet (3 , 4 , \text{ل}) = 0$

∴ $6 + 12 + 4\text{م} = 0$ ∴ $\text{ل} = -\frac{9}{2}$

(٤) **الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها $(3 , -2 , 1)$**

و طول نصف قطرها = ٥ سم هى ....

(أ) $(\text{س} + 3)^2 + (\text{ص} - 2)^2 + (\text{ع} + 1)^2 = 5$

(ب) $(\text{س} + 3)^2 + (\text{ص} - 2)^2 + (\text{ع} + 1)^2 = 25$

(حـ) $(\text{س} - 3)^2 + (\text{ص} + 2)^2 + (\text{ع} - 1)^2 = 25$

(٤) $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = \sqrt{٥}$

الحل

$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = ٢٥$

(٥) قياس الزاوية بين المستويين : $\text{س} + \sqrt{٢}\,\text{ص} - \text{ع} = ٥$ ، $\text{س} - \sqrt{٢}\,\text{ص} + \text{ع} = ١$ يساوى ....

(أ) ٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٥°

الحل

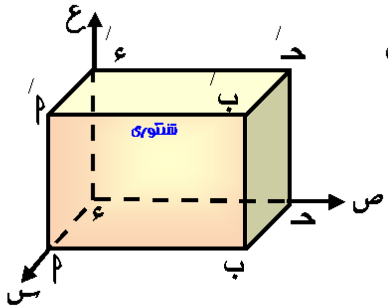
متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(١ ، \sqrt{٢} ، -١) ، (١ ، -\sqrt{٢} ، ١)$

نفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore$ حتا $\theta = \dfrac{|(١ ، \sqrt{٢} ، -١)\bullet(١ ، -\sqrt{٢} ، ١)|}{\sqrt{١+٢+١}\,\sqrt{١+٢+١}} = \dfrac{٠}{٤} =$ صفر $\therefore \theta = ٩٠^{\circ}$

(٦) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازى مستطيلات

و كان : أ (٤ ، ٠ ، ٠) ،

جـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، ء/ (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أجـ/}}\| =$ ....

الحل

(أ) $\sqrt{١٤٦}$ (ب) $\sqrt{١١٤}$ (جـ) ٥ (د) $\sqrt{٢٠}$

الحل

من الشكل : جـ/ (٠ ، ٩ ، ٧)

$\overrightarrow{\text{أجـ/}} = (٠ ، ٩ ، ٧) - (٤ ، ٠ ، ٠) = (-٤ ، ٩ ، ٧)$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أجـ/}}\| = \sqrt{١٦ + ٨١ + ٤٩} = \sqrt{١٤٦}$ وحدة طول

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $(٢\,\text{س} - ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل : $١٣\,\text{ح}_{٣} + ١٠\,\text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٥} =$ صفر

الحل

$\because ١٣\,\text{ح}_{٣} + ١٠\,\text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٥} =$ صفر   بالقسمة $\div \text{ح}_{٤}$ ينتج :

$١٣ \times \dfrac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٤}} + ١٠ + \dfrac{\text{ح}_{٥}}{\text{ح}_{٤}} = ٠$

$\therefore ١٣ \times \dfrac{٣}{١٥-٣+١} \times \dfrac{-٣}{٢\text{س}} + ١٠ + \dfrac{١٥-٤+١}{٤} \times \dfrac{٢\text{س}}{-٣} = ٠$

$\therefore ١٣ \times \dfrac{٣}{١٣} \times \dfrac{-٣}{٢\text{س}} + ١٠ + \dfrac{١٢}{٤} \times \dfrac{٢\text{س}}{-٣} = ٠$

$\therefore \dfrac{-٩}{٢\text{س}} + ١٠ - ٢\,\text{س} = ٠$ بالضرب $\times -٢\,\text{س}$ ينتج :

$٤\,\text{س}^{٢} - ٢٠\,\text{س} + ٩ = ٠$ $\therefore (٢\,\text{س} - ٩)(٢\,\text{س} - ١) = ٠$

$\therefore \text{س} = \dfrac{٩}{٢}$ أو $\text{س} = \dfrac{١}{٢}$

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ص}+\text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ع} & ٠ & \text{س} \\ \text{ص} & \text{س} & ٠ \end{vmatrix}$$

الحل

بإجراء : $\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{٣}$ (فى $\text{ص}_{١}$)

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ٢\text{ع} & ٠ & ٢\,\text{س} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$ بإخراج (٢) مشترك من $\text{ص}_{١}$

∴ الطرف الأيمن = ٢ $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$ (فى $\text{ص}_٣$)

∴ الطرف الأيمن = ٢ $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \end{vmatrix}$ بإجراء : $\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢$ (فى $\text{ص}_٢$)

∴ الطرف الأيمن = ٢ $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & \text{ع} \\ ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \end{vmatrix}$ بتبديل : $\text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣$ ثم تبديل : $\text{ص}_٢$ ، $\text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = ٢ $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س} & ٠ & \text{ع} \\ ٠ & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر

السؤال الرابع :

(١) أثبت أن : $\left(\frac{١ + \text{حا ى} + \text{ت حتا ى}}{١ + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}}\right)^{\text{ن}}$ =

حتا ن (½ π − ى) + ت حا ن (½ π − ى)

الحل

∵ ١ = حا²ى + حتا²ى = حا²ى − ت² حتا²ى

= (حا ى + ت حتا ى) (حا ى − ت حتا ى)

∴ $\frac{١ + \text{حا ى} + \text{ت حتا ى}}{١ + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}} = \frac{(\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})(\text{حا ى} - \text{ت حتا ى}) + (\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})}{١ + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}}$

$= \frac{(\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})((\text{حا ى} - \text{ت حتا ى}) + ١)}{١ + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}}$

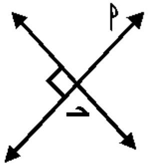
= حا ى + ت حتا ى = حتا (½ π − ى) + ت حا (½ π − ى)

∴ الطرف الأيمن = (حتا ن (½ π − ى) + ت حا ن (½ π − ى))

= الطرف الأيسر

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١ ، ٠) و يقطع المستقيم $\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، ١ ، ١) + ك (١ ، ٢ ، −١) على التعامد

الحل



نفرض أن : المستقيمين يتقاطعين فى نقطة حـ

∴ من معادلة المستقيم المعطى تكون إحداثيات نقطة حـ هى :

(٢ + ك ، ١ + ٢ك ، ١ − ك)

، ∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة أ (٣ ، −١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ = (٣ ، −١ ، ٠) − (٢ + ك ، ١ + ٢ك ، ١ − ك)

= (١ − ك ، −٢ − ٢ك ، −١ + ك)

، ∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى = (١ ، ٢ ، −١) ، المستقيمان متعامدان

∴ (١ − ك ، −٢ − ٢ك ، −١ + ك) • (١ ، ٢ ، −١) = ٠

∴ ١ − ك − ٤ − ٤ك + ١ − ك = ٠ ∴ ٦ك = −٢ ∴ ك = $-\frac{١}{٣}$

∴ $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ = ($\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٤}{٣}$) = (١ ، −١ ، −١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\vec{\text{ر}}$ = (٣ ، −١ ، ٠) + ك (١ ، −١ ، −١)

السؤال الخامس :

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل مجموعة المعادلات الآتية :

$\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ع}} = ١$ ، $\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{ص}} + \frac{٢}{\text{ع}} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{ص}} - \frac{٤}{\text{ع}} = \frac{٤}{٣}$ حيث : س ، ص ، ع لا تساوى صفر

الحل

نفرض أن : $\frac{١}{\text{س}}$ = ل ، $\frac{١}{\text{ص}}$ = م ، $\frac{١}{\text{ع}}$ = ن (١)

∴ المعادلات هى : ل + م + ن = ١ ،

ل − م + ٢ن = $\frac{١}{٢}$ بالضرب × ٢ يكون : ٢ل − ٢م + ٤ن = ٢ ،

٢ل + ٣م − ٤ن = $\frac{٤}{٣}$ بالضرب × ٣ يكون : ٦ل + ٩م − ١٢ن = ٤

∴ $أ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$ ، $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{vmatrix}$ ،

$|أ| = 1(24 - 36) - 1(-24 - 24) + 1(18 + 12) = 66 \neq 0$

∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$أ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{11} = 24 - 36 = -12$ ،

$أ_{21} = -(-24 - 24) = 48$ ، $أ_{31} = 18 + 12 = 30$ ،

$أ_{12} = -(-12 - 9) = 21$ ، $أ_{22} = -12 - 6 = -18$ ، $أ_{32} = -(9 - 6) = -3$ ،

$أ_{13} = 4 + 2 = 6$ ، $أ_{23} = -(4 - 2) = -2$ ، $أ_{33} = -2 - 2 = -4$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -12 & 48 & 30 \\ 21 & -18 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ ∴ $س = أ^{-1} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 33 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix}$

∴ $ل = \frac{1}{2}$ ، $م = \frac{1}{3}$ ، $ن = \frac{1}{6}$ بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٦ ، مجموعة الحل = { (٢ ، ٣ ، ٦) }

(٢) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث : أ (٢ ، ١ ، ٠)

، ب (٣ ، ١ ، $\sqrt{3}$) فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث

$\overrightarrow{م} = (3 ، 2 ، 2\sqrt{3})$

الحل

$\overrightarrow{أب} = (3 ، 1 ، \sqrt{3}) - (2 ، 1 ، 0) = (1 ، 0 ، \sqrt{3})$

متجه الاتجاهية $\overrightarrow{أب}$ فى اتجاه $\overrightarrow{م}$ =

مركبة $\overrightarrow{أب}$ فى اتجاه $\overrightarrow{م}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{م}$) =

$= \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|}\left(\frac{\overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|}\right) = \frac{(1 ، 0 ، \sqrt{3}) \bullet (3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5}\left(\frac{(3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5}\right)$

$= \frac{9}{5}\left(\frac{(3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5}\right) = \left(\frac{27}{25} ، \frac{18}{25} ، \frac{18}{25}\sqrt{3}\right)$

تم بحمد الله وعونه