الوحدة الأولى
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

١ - ١ مبدأ العد - التباديل - التوافيق

✸ اولا: مبدأ العد:

سبق أن درسنا مبدأ العد (قاعدة الضرب) والتى تنص على:

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $ن$ طريقة

فإن عدد طرق إجراء العمل الأول و العمل الثانى معا يساوى $(م \times ن)$ طريقة

مثال:

كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$:

اولا: مع إمكانية تكرار الأرقام. ثانيا: مع عدم تكرار الأرقام.

الحل:

اولا: مع إمكانية تكرار الأرقام.

عدد طرق شغل خانة المئات = ٥ طرق ، عدد طرق شغل خانة العشرات = ٥ طرق

، عدد طرق شغل خانة الآحاد = ٥ طرق

$\therefore$ عدد الأعداد الممكنة = $٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^{٣} = ١٢٥$ عدد

ثانيا: مع عدم تكرار الأرقام.

عدد طرق شغل خانة المئات = ٥ طرق وبعد شغل خانة المئات بأحد الأرقام الخمسة يتبقى ٤ أرقام

$\therefore$ عدد طرق شغل خانة العشرات = ٤ طريقة وبعد شغل خانة العشرات يتبقى ٣ أرقام

$\therefore$ عدد طرق شغل خانة الآحاد = ٣ طريقة

$\therefore$ عدد الأعداد الممكنة = $٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ عدد

مثال:

كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر $\{ ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ \}$

بحيث يكون رقم الآحاد ٦ .

الحل:

تسمى هذه الحالة بمبدأ العد المشروط وذلك لوجود شرط فى الأرقام المطلوبة وهو أن يكون رقم الآحاد ٦

لذلك نبدأ بالخانة المشروطة

عدد طرق شغل خانة الآحاد = ١ طريقة   وبعد شغل خانة الأحاد بالرقم ٦ يتبقى ٣ أرقام

∴ عدد طرق شغل خانة العشرات = ٣ طريقة   وبعد شغل خانة العشرات يتبقى رقمان

∴ عدد طرق شغل خانة المئات = ٢ طريقة   وبعد شغل خانة المئات يتبقى رقم واحد لخانة الألآف

∴ عدد الأعداد الممكنة = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ أعداد

✱ مبدأ العد (قاعدة الجمع):

مبدأ العد (قاعدة الجمع) تنص على:

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى م طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان ن طريقة فإن عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى يساوى (م + ن) طريقة

مثـــال:

اختير ٣ أشخاص معا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٤ نساء أوجد عدد الطرق التى يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية:

أولا: إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

ثانيا: إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم إثنان فقط من نفس الجنس؟

الحـــل:

أولا: إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

الأشخاص الثلاثة يمكن أن يكونو ٣ من الرجال أو ٣ من النساء

∵ عدد طرق اختيار ٣ من الرجال = $^{٥}\text{ق}_{٣}$ ، عدد طرق اختيار ٣ من النساء = $^{٤}\text{ق}_{٣}$

∴ عدد طرق اختيار الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس = $^{٥}\text{ق}_{٣} + {}^{٤}\text{ق}_{٣}$ = ١٠ + ٤ = ١٤ طريقة

ثانيا: إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم إثنان فقط من نفس الجنس؟

∴ الأشخاص الثلاثة يمكن أن يكونو ٢ من الرجال و ١ من النساء أو ١ من الرجال و ٢ من النساء

∵ عدد طرق اختيار ٢ من الرجال و ١ من النساء = $^{٥}\text{ق}_{٢} \times {}^{٤}\text{ق}_{١}$

، عدد طرق ١ من الرجال و ٢ من النساء = $^{٥}\text{ق}_{١} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢}$

∴ عدد طرق اختيار الأشخاص الثلاثة وفيهم إثنان فقط من نفس الجنس

= $^{٥}\text{ق}_{٢} \times {}^{٤}\text{ق}_{١} + {}^{٥}\text{ق}_{١} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢}$ = ١٠ × ٤ + ٥ × ٦ = ٧٠ طريقة

مثـــال:

يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية ، ولا يحق له الإنتقال الى السنة الثانية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل ، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية؟

الحـــل:

الطالب يمكن أن ينتقل للسنة الثانية إذا نجح فى ٨ مواد بطرق عددها $^{٨}ق_{٨} = ١$

أو إذا نجح فى ٧ مواد بطرق عددها $^{٨}ق_{٧} = ٨$ أو إذا نجح فى ٦ مواد بطرق عددها $^{٨}ق_{٦} = ٢٨$

∴ عدد طرق انتقال الطالب للسنة الثانية = ١ + ٨ + ٢٨ = ٣٧ طريقة

✷ عدد طرق اختيار العينة:

عند اختيار عينة بها ر من الأشياء من بين مجموعة بها ن من الأشياء يجب مراعاة الحالات الآتية:

١) إذا كان الإختيار مع الإحلال والترتيب فإن عدد طرق الإختيار = $ن^{ر}$

فمثلا عدد طرق تكوين عدد من رقمين من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} يساوى $٥^{٢} = ٢٥$

٢) إذا كان الإختيار مع الإحلال وبدون ترتيب فإن عدد طرق الإختيار = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

فمثلا عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق يساوى $^{٤+٣-١}ق_{٣} = {}^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

٣) إذا كان الإختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الإختيار = $^{ن}ل_{ر}$

فمثلا عدد طرق وقوف ٣ سيارات فى موقف به ٥ أماكن يساوى $^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

٤) إذا كان الإختيار بدون إحلال وبدون مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الإختيار = $^{ن}ق_{ر}$

فمثلا عدد طرق تكوين لجنة من ٣ طلاب من بين ٨ طلاب يساوى $^{٨}ق_{٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦$

ونلخص الحالات السابقة فى الجدول التالى:

	مع مراعاة الترتيب	مع عدم مراعاة الترتيب
الإختيار مع الإحلال (التكرار)	$ن^{ر}$	$^{ن+ر-١}ق_{ر}$
الإختيار بدون الإحلال (التكرار)	$^{ن}ل_{ر}$	$^{ن}ق_{ر}$

مثـــال:

حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء أوجد عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون فى كل من الحالات الآتية:

أولا: إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب.

ثانيا: إذا كان السحب بدون الإحلال مع الترتيب.

ثالثا: إذا كان السحب بدون إحلال وبدون ترتيب.

✍ الحـــــل:

الكرات الخمسة يمكن أن تكون حمراء أو بيضاء

أولا : إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب.

عدد طرق سحب ٥ كرات حمراء $= ١٢^{٥}$ ، عدد طرق سحب ٥ كرات بيضاء $= ٨^{٥}$

∴ عدد طرق عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون $= ١٢^{٥} + ٨^{٥}$ طريقة

ثانيا : إذا كان السحب بدون الإحلال مع الترتيب.

عدد طرق سحب ٥ كرات حمراء $= {}^{١٢}ل_{٥}$ ، عدد طرق سحب ٥ كرات بيضاء $= {}^{٨}ل_{٥}$

∴ عدد طرق عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون $= {}^{١٢}ل_{٥} + {}^{٨}ل_{٥}$ طريقة

ثالثا : إذا كان السحب بدون إحلال وبدون ترتيب.

عدد طرق سحب ٥ كرات حمراء $= {}^{١٢}ق_{٥}$ ، عدد طرق سحب ٥ كرات بيضاء $= {}^{٨}ق_{٥}$

∴ عدد طرق عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون $= {}^{١٢}ق_{٥} + {}^{٨}ق_{٥}$ طريقة

🕮 مثـــــال:

بكم طريقة يمكن أن يجلس ٤ أولاد ، ٣ بنات فى صف إذا كان:

أولا :الجلوس بأى شكل. ثانيا :جلوس البنات متجاورات.

ثالثا : جلوس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات.

✍ الحـــــل:

أولا :الجلوس بأى شكل.

العدد الكلى $= ٤ + ٣ = ٧$ ∴ عدد طرق الجلوس $= \underline{|٧} = ٥٠٤٠$ طريقة

ثانيا :جلوس البنات متجاورات.

∴البنات الثلاثة يمكن أن يجلسن متجاورات فى الأماكن من ١ إلى ٥ أى بطرق عددها ٥

و فى كل مرة فإن البنات الثلاثة يمكن أن تتبدل كل منها مكان الأخرى أى بطرق عددها $\underline{|٣}$

و فى كل مرة فإن الأولاد الأربعة يجلسوا على الأماكن الأربعة الباقية أى بطرق عددها $\underline{|٤}$

∴ عدد طرق جلوس البنات متجاورات $= ٥ \times \underline{|٤} \times \underline{|٣} = ٧٢٠$ طريقة

ثالثا :جلوس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات.

يجلس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات بطريقتين إما ٤ اولاد ثم ٣ بنات أو ٣ بنات ثم ٤ أولاد

و فى كل مرة فإن الأولاد الأربعة يمكن أن يتبدلوا على الأمكان الأربعة أى بطرق عددها $\underline{|٤}$

والبنات الثلاثة يمكن أن تتبدلن على الأمكان الثلاثة أى بطرق عددها $\underline{|٣}$

∴ عدد طرق جلوس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات $= ٢ \times \underline{|٤} \times \underline{|٣} = ٢٨٨$ طريقة

مثـــــال:

بكم طريقة يمكن لأربع أشخاص الجلوس على ٧ مقاعد:

أولا: إذا كانت المقاعد على شكل صف. ثانيا: إذا كانت المقاعد على شكل دائرة.

الحـــــل:

أولا: إذا كانت المقاعد على شكل صف **والأشخاص غير متجاورة**

∴ الشخص الأول يجلس بطرق عددها ٧ ، الشخص الثانى يجلس بطرق عددها ٦

، الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٥ ، الشخص الرابع يجلس بطرق عددها ٤

∴ عدد طرق جلوس الأشخاص الاربعة $= {}^{7}\text{ل}_{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ طريقة

ثانيا: إذا كانت المقاعد على شكل دائرة **والأشخاص غير متجاورة**

١) إذا كانت نقطة البداية معلومة على الدائرة: فى هذه الحالة يكون شكل المقاعد مرتب مثل الصف

∴ الشخص الأول يجلس بطرق عددها ٧ ، الشخص الثانى يجلس بطرق عددها ٦

، الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٥ ، الشخص الرابع يجلس بطرق عددها ٤

∴ عدد طرق جلوس الأشخاص الاربعة $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{7}\text{ل}_{4} = 840$ طريقة

٢) إذا كانت نقطة البداية غير معلومة على الدائرة: فى هذه الحالة يكون شكل المقاعد غير مرتب

∴ يتم أختيار البداية للشخص الأول

∴ الشخص الأول يجلس بطرق عددها ١ ، الشخص الثانى يجلس بطرق عددها ٦

، الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٥ ، الشخص الرابع يجلس بطرق عددها ٤

∴ عدد طرق جلوس الأشخاص الاربعة $= 1 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{6}\text{ل}_{3} = 120$ طريقة

مثـــــال:

أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة إنتظار بها ١٠ أماكن وقوف

أولا: إذا كان الموقف على شكل صف. ثانيا: إذا كان الموقف على شكل دائرة.

الحـــــل:

أولا: إذا كان الموقف على شكل صف **والسيارات متجاورة:**

∴ السيارات الأربعة يمكن أن تقف متجاورة فى الأماكن من ١ إلى ٧ أى بطرق عددها ٧

و فى كل مرة فإن السيارات الأربعة يمكن أن تتبدل كل منها مكان الأخرى أى بطرق عددها $\underline{|4}$

∴ عدد طرق وقوف السيارات الاربعة متجاورة $= 7\,\underline{|4} = 168$ طريقة

ثانيا: إذا كان الموقف على شكل دائرة **والسيارات متجاورة:**

١) إذا كانت نقطة البداية معلومة على الدائرة: فى هذه الحالة يكون شكل الموقف مرتب

∴ السيارات الأربعة يمكن أن تقف متجاورة فى الأماكن من ١ إلى ١٠ أى بطرق عددها ١٠

و فى كل مرة فإن السيارات الأربعة يمكن أن تتبدل كل منها مكان الأخرى أى بطرق عددها $\underline{|4}$

∴ عدد طرق وقوف السيارات الاربعة متجاورة = ١٠ $\underline{|4}$ = ٢٤٠ طريقة

٢) إذا كانت نقطة البداية غير معلومة على الدائرة: فى هذه الحالة يكون شكل الموقف غير مرتب

∴السيارات الأربعة يمكن أن تقف متجاورة فى أى مكان أى بطرق عددها ١

و فى كل مرة فإن السيارات الأربعة يمكن أن تتبدل كل منها مكان الأخرى أى بطرق عددها $\underline{|4}$

∴ عدد طرق وقوف السيارات الاربعة متجاورة = ١ × $\underline{|4}$ = ٢٤ طريقة

✸ **حالات الترتيب فى صف وفى دائرة:**

الترتيب فى صف	عدد الأشياء = ن وعدد الأماكن = ن	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (متجاورة)	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (غير متجاورة)
عدد الطرق	$\underline{|ن}$	$(ن - ر + 1)\underline{|ر}$	$^{ن}ل_{ر}$

الترتيب فى دائرة ونقطة البداية معلومة	عدد الأشياء = ن وعدد الأماكن = ن	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (متجاورة)	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (غير متجاورة)
عدد الطرق	$\underline{|ن}$	ن $\underline{|ر}$	$^{ن}ل_{ر}$

الترتيب فى دائرة ونقطة البداية غير معلومة	عدد الأشياء = ن وعدد الأماكن = ن	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (متجاورة)	عدد الأشياء = ر وعدد الأماكن = ن (غير متجاورة)
عدد الطرق	$\underline{|ن - 1}$	$\underline{|ر}$	$^{ن-1}ل_{ر-1}$

✸ثانيا :التباديل:

سبق أن درسنا موضوع التباديل وعلمنا أن التباديل هى كل ترتيب يمكن الحصول عليه من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها

قوانين التباديل

١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (ن-ر+١)$

= حاصل ضرب مجموعة من العوامل المتتالية

اولهم = ن عددهم = ر وآخرهم أكبر من الفرق بين ن ، ر بواحد صحيح

تستخدم هذه الصورة عندما تكون ر معلومة و صغيرة

٢) إذا كانت ر = ن فأن $^{ن}ل_{ن}$ يرمز لها بالرمز $\underline{|ن}$ ويقرأ مضروب ن ويكون

$\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ٣\times٢\times١$

= حاصل ضرب مجموعة من العوامل المتتالية اولهم وعددهم = ن وآخرهم الواحد الصحيح

٣) $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-١} = ن(ن-١)\,\underline{|ن-٢} = \cdot\cdot\cdot$ قانون تبسيط مابداخل المضروب

حيث يتم تبسيط مابداخل المضروب بأخراجه خارج المضروب وأنقاص واحد من داخل المضروب

فمثلا: $\underline{|١٢} = ١٢\,\underline{|١١}$ او $\underline{|١٢} = ١٢\times١١\,\underline{|١٠}$ وهكذا

٤) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ تسمى هذه العلاقة بصورة المضروب

تستخدم هذه الصورة ١ـ عندما تكون ر مجهولة او كبيرة ٢ـ فى مسائل الاثبات

تذكر أن:

١) $\underline{|٠} = \underline{|١} = ١$ ، $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

٢) $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$ ، $\underline{|ن} \in ص^{+}$

شروط هامة:

١ـ قيمة ن يجب أن تكون اكبر من او تساوى قيمة ر اى أن $ن \geq ر$

٢ـ ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب أى أن $ن \in ص^{+}$

٣ـ ر يجب أن تكون عدد طبيعى أى أن $ر \in ط$

مثـــــال:

أوجد قيمة $ر$ فى كل مما يأتى: (أ) ${}^{8}ل_{3ر-1} = 6720$ (ب) ${}^{9}ل_{ر-4} = \lfloor 9$

الحـــــل:

(أ) $\because$ ${}^{8}ل_{3ر-1} = 6720$ = حاصل ضرب عوامل متتالية اكبرهم ٨

$\therefore$ باستخدام الآلة نضرب ٨ فى ٧ فى ٦ فى ..... الى أن يصبح ناتج الضرب ٦٧٢٠ فنجد أن:

$\therefore {}^{8}ل_{3ر-1} = 6720 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{8}ل_{5}$

$\therefore 3ر - 1 = 5 \quad \Leftarrow \quad \therefore 3ر = 6 \quad \Leftarrow \quad \therefore ر = 2$

(ب) $\because {}^{9}ل_{ر-4} = \lfloor 9 \qquad \therefore \dfrac{\lfloor 9}{\lfloor 9 - ر + 4} = \lfloor 9 \qquad \therefore \lfloor 13 - ر = 1$

$\therefore 13 - ر = 0 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\therefore ر = 13}$ أو $13 - ر = 1 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\therefore ر = 12}$

مثـــــال:

اوجد قيمة $ن$ إذا كان:

(أ) ${}^{ن-4}ل_{9} = {}^{ن-4}ل_{9}$ (ب) ${}^{8}ل_{ن-3} = {}^{8}ل_{ن-3}$ (جـ) ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن-1}ل_{ن} = 3 : 5$

الحـــــل:

(أ) $\because {}^{ن-4}ل_{9} = {}^{ن-4}ل_{9} \qquad \therefore ن - 4 \geq 9 \qquad \therefore ن \geq 13$

$\therefore ن = \{13، 14، 15، \ldots\}$

(ب) $\because {}^{8}ل_{ن-3} = {}^{8}ل_{ن-3} \qquad \therefore 8 \geq ن - 3 \geq 0 \qquad \therefore 11 \geq ن \geq 3$

$\therefore ن = \{3، 4، 5، \ldots\ldots، 10، 11\}$

(جـ) $\because {}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن-1}ل_{ن} = 3 : 5 \qquad \therefore \dfrac{\lfloor 2ن+1}{\lfloor 2ن+1-ن+1} : \dfrac{\lfloor 2ن-1}{\lfloor 2ن-1-ن} = 3 : 5$

$\therefore \dfrac{\lfloor 2ن+1}{\lfloor ن+2} \times \dfrac{\lfloor ن-1}{\lfloor 2ن-1} = \dfrac{3}{5} \qquad \therefore \dfrac{(2ن+1)(2ن)\lfloor 2ن-1}{(ن+2)(ن+1)(ن)\lfloor ن-1} \times \dfrac{\lfloor ن-1}{\lfloor 2ن-1} = \dfrac{3}{5}$

$\therefore \dfrac{4ن+2}{ن^{2}+3ن+2} = \dfrac{3}{5} \qquad \therefore 3ن^{2} + 9ن + 6 = 20ن + 10$

$\therefore 3ن^{2} - 11ن - 4 = 0 \qquad \therefore (3ن+1)(ن-4) = 0 \qquad \boxed{\therefore ن = 4}$ والقيمة الثانية مرفوضة

مثـــال: اوجد قيمة ن ، ر فى كل ممايأتى:

(أ) ${}^{ن-ر}ل_{٢} = ٩٠$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٣٨٠$ (ب) ${}^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $|\underline{ر} = ٧٢٠$

الحـــل:

(أ) ${}^{ن-ر}ل_{٢} = ٩٠ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}ل_{٢}$ $\therefore$ ن − ر = ١٠ (١)

، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٣٨٠$ باستخدام الآلة نجد أن: ${}^{٢٠}ل_{٢} = ٣٨٠$ $\therefore$ ن + ر = ٢٠ (٢)

بجمع (١) ، (٢) $\therefore$ ٢ن = ٣٠ $\boxed{\therefore ن = ١٥}$ بالتعويض فى (٢) $\boxed{\therefore ر = ٥}$

(ب) $|\underline{ر} = ٧٢٠$ باستخدام الآلة نجد أن: $٧٢٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = |\underline{٦}$

$\therefore |\underline{ر} = |\underline{٦}$ $\boxed{\therefore ر = ٦}$

$\therefore {}^{ن}ل_{٦} = ٦٠٤٨٠$ باستخدام الآلة نجد أن: $٦٠٤٨٠ = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٩}ل_{٦}$

$\therefore {}^{ن}ل_{٦} = {}^{٩}ل_{٦}$ $\boxed{\therefore ن = ٩}$

مثـــال: اذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيم كل من ن ، ر الممكنة

الحـــل:

اولا: ${}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤ = {}^{١٥}ل_{٢}$ $\therefore$ ن = ١٥ عندما ر = ٢

ثانيا: ${}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ $\therefore$ ن = ٧ عندما ر = ٣

ثالثا: ${}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = {}^{٢١٠}ل_{١}$ $\therefore$ ن = ٢١٠ عندما ر = ١

ملاحظات هامة:

١) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{س}ل_{ر}$ فإن ن = س أو ر = ٠

أى أنه إذا كان الدليل = الدليل فإن العلم = العلم أو الدليل = صفر

٢) إذا كان ${}^{ن}ل_{س} = {}^{ن}ل_{ص}$ فإن س = ص

أى أنه إذا كان العلم = العلم فإن الدليل = الدليل

٣) يمكن وضع خارج قسمة مضروبين على صورة تباديل بشرط مضروب البسط > مضروب المقام

ويكون التبديل الناتج هو $\boxed{{}^{البسط}ل_{البسط - المقام}}$ فمثلا: $\frac{|\underline{٧}}{|\underline{٤}} = {}^{٧}ل_{٧-٤} = {}^{٧}ل_{٣}$

وتستخدم هذه الملاحظات فى حل المعادلات التى تحتوى على مضروب فى الطرفين

مثـــــال:

حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) |ن + ٢ |٣ن − ٤ = |ن |٣ن − ٢   (ب) ٢ |٢ن = (ن^{٢} + ٣ن + ٢)(|ن)^{٢}

(جـ) |٢ن |ن − ٣ = ٧٢ |٣ن − ٧

الحـــل:

(أ) ∵ |ن + ٢ |٣ن − ٤ = |ن |٣ن − ٢

∴ $\frac{|ن+٢}{|ن} = \frac{|٣ن-٢}{|٣ن-٤}$ ← ∴ $^{ن+٢}ل_{ن+٢-ن} = {}^{٣ن-٢}ل_{(٣ن-٢)-(٣ن-٤)}$

∴ $^{ن+٢}ل_{٢} = {}^{٣ن-٢}ل_{٢}$ ← ∴ ٣ن − ٢ = ن + ٢ ← $\boxed{∴ ن = ٢}$

(ب) ∵ ٢ |٢ن = (ن^{٢} + ٣ن + ٢)(|ن)^{٢}

∴ |٢ |٢ن = (ن + ٢)(ن + ١) |ن × |ن   ∴ |٢ |٢ن = |ن + ٢ |ن

∴ $\frac{|٢ن}{|ن} = \frac{|ن+٢}{|٢}$ ← ∴ $^{٢ن}ل_{٢ن-ن} = {}^{ن+٢}ل_{ن+٢-٢}$

∴ $^{٢ن}ل_{ن} = {}^{ن+٢}ل_{ن}$ ← ∴ ٢ن = ن + ٢ ← $\boxed{∴ ن = ٢}$

(جـ) ∵ |٢ن |ن − ٣ = ٧٢ |٣ن − ٧   نحلل ٧٢ الى ٢٤ × ٣

∴ |٢ن |ن − ٣ = ٢٤ × ٣ |٣ن − ٧   بضرب الطرفين فى (ن − ٢)

∴ |٢ن (ن − ٢) |ن − ٣ = ٢٤ × ٣(ن − ٢) |٣ن − ٧

∴ |٢ن (ن − ٢) |ن − ٣ = ٢٤ × (٣ن − ٦) |٣ن − ٧   ،   ∵ ٢٤ = |٤

∴ |٢ن |ن − ٢ = |٤ |٣ن − ٦

∴ $\frac{|ن-٢}{|٤} = \frac{|٣ن-٦}{|٢ن}$ ← ∴ $^{ن-٢}ل_{ن-٢-٤} = {}^{٣ن-٦}ل_{٣ن-٦-٢ن}$

∴ $^{ن-٢}ل_{ن-٦} = {}^{٣ن-٦}ل_{ن-٦}$

∴ اما ٣ن − ٦ = ن − ٢   ∴ ٢ن = ٤   ∴ ن = ٢ مرفوض لأن الدليل سيكون سالب

أو ن − ٦ = ٠ ← $\boxed{∴ ن = ٦}$

✸ ثالثا: التوافيق:

سبق أن درسنا موضوع التوافيق وعلمنا أن التوافيق هى كل مجموعة يمكن الحصول عليها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها

قوانين التوافيق

١) قانون العلاقة بين التوافيق والتباديل

$$ {}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \quad \Leftarrow \quad \therefore {}^{ن}ق_{ر} \times \underline{|ر} = {}^{ن}ل_{ر} $$

وتستخدم هذه الصورة عندما تكون ر معلومة و صغيرة

٢) قانون (صورة) المضروب $ {}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} $

تستخدم هذه الصورة ١ـ عندما تكون ر مجهولة او كبيرة ٢ـ فى مسائل الاثبات

٣) قانون التبسيط $ {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر} $

حيث يتم التبسيط بطرح الدليل من العلم وتستخدم هذه العلاقة اذا كان $ ر > \frac{1}{2} ن $

٤) قانون الإحتمالين اذا كان $ {}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص} $ فإن: $ س = ص $ او $ س + ص = ن $

اى أنه إذا تساوت توفيقتان بحيث كان علمهما متساوى فأن:

الدليل الأول = الدليل الثانى او مجموع الدليلين = العلم

٥) قانون النسبة

$$ \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} = \frac{ن - (ر - 1)}{ر} = \frac{ن - \text{الدليل الأصغر}}{\text{الدليل الأكبر}} $$

حيث يكون العلم متساوى فى البسط والمقام ودليل البسط اكبر من دليل المقام بواحد

٦) قانون الجمع

$$ {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر} $$

وهو عبارة عن مجموع توفيقتين متساويتان فى العلم ومتتاليتان فى الدليل والنتيجة هى زيادة واحد على العلم وأخذ الدليل الاكبر

تذكر أن:

١) ${}^{ن}ق_{0} = 1$ ، ${}^{ن}ق_{ن} = 1$

٢) ${}^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} \le {}^{ن}ل_{ر}$

شروط هامة:

١ـ قيمة ن يجب أن تكون اكبر من او تساوى قيمة ر اى أن $ن \ge ر$

٢ـ ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب أى أن $ن \in ص^{+}$

٣ـ ر يجب أن تكون عدد طبيعى أى أن $ر \in ط$

مثـــال:

أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى: (أ) ${}^{ن+1}ق_{ن-1} = 66$ (ب) ${}^{25}ق_{2ن-14} = {}^{25}ق_{ن-1}$

الحـــل:

(أ) ∵ ${}^{ن+1}ق_{ن-1} = 66$ ∴ ${}^{ن+1}ق_{ن+1-ن+1} = 66$ ∴ ${}^{ن+1}ق_{2} = 66$

∴ $\frac{{}^{ن+1}ل_{2}}{\lfloor 2} = 66$ ∴ ${}^{ن+1}ل_{2} = 132 = 12 \times 11$

∴ ${}^{ن+1}ل_{2} = {}^{12}ل_{2}$ ∴ $ن + 1 = 12$ ∴ $ن = 11$ (تحقق)

(ب) ∵ ${}^{25}ق_{2ن-14} = {}^{25}ق_{ن-1}$

∴ $2ن - 14 = ن - 1$ ∴ $2ن - ن = 14 - 1$ ∴ $ن = 13$ (تحقق)

أو ∴ $2ن - 14 + ن - 1 = 25$ ∴ $3ن = 25 + 15$ ∴ $ن = \frac{40}{3}$ (مرفوض)

مثـــال:

اوجد قيمة ر إذا كان: ${}^{7}ق_{ر} : {}^{7}ق_{ر-1} = \frac{1}{3}$

الحـــل:

∵ ${}^{7}ق_{ر} : {}^{7}ق_{ر-1} = \frac{1}{3}$ ∴ $\frac{7 - ر + 1}{ر} = \frac{1}{3}$ ∴ $\frac{8 - ر}{ر} = \frac{1}{3}$

∴ $ر = 24 - 3ر$ ∴ $ر + 3ر = 24$ ∴ $4ر = 24$ ∴ $ر = 6$

مثـــال:

اوجد ن، ر إذا كان: $^{١٣}\text{ق}_{ر} : {}^{١٣}\text{ق}_{ر+١} = \frac{٩}{٥}$ ، $^{ن}\text{ق}_{ر-٢} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = ٣٤٣٢$

الحـــل:

$\because {}^{١٣}\text{ق}_{ر} : {}^{١٣}\text{ق}_{ر+١} = \frac{٩}{٥} \quad \therefore \frac{ر+١}{١٣-ر} = \frac{٩}{٥} \quad \therefore ٥ر + ٥ = ١١٧ - ٩ر$

$\therefore ٥ر + ٩ر = ١١٧ - ٥ \quad \therefore ١٤ر = ١١٢ \quad \therefore ر = \frac{١١٢}{١٤} = ٨$

، $\because {}^{ن}\text{ق}_{ر-٢} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = ٣٤٣٢$ بالتعويض عن قيمة ر

$\therefore {}^{ن}\text{ق}_{٦} + {}^{ن}\text{ق}_{٧} = ٣٤٣٢ \quad \therefore {}^{ن+١}\text{ق}_{٧} = ٣٤٣٢ \quad \therefore {}^{ن+١}\text{ل}_{٧} = ٣٤٣٢ \times ٧!$

$\therefore {}^{ن+١}\text{ل}_{٧} = ٣٤٣٢ \times ٧! = ١٧٢٩٧٢٨٠$

$\therefore {}^{ن+١}\text{ل}_{٧} = ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore {}^{ن+١}\text{ل}_{٧} = {}^{١٤}\text{ل}_{٧} \quad \therefore ن + ١ = ١٤ \quad \therefore ن = ١٣$

مثـــال:

(أ) اوجد قيمة ن التى تحقق: $^{ن}\text{ق}_{٣} + ٢\,{}^{ن}\text{ق}_{٢} + {}^{ن}\text{ق}_{١} = ١٢٠$

(ب) اوجد قيمة: $\frac{^{١٧}\text{ق}_{٦} + {}^{١٧}\text{ق}_{٥}}{^{١٨}\text{ق}_{٥}}$

الحـــل:

(أ) $\because {}^{ن}\text{ق}_{٣} + ٢\,{}^{ن}\text{ق}_{٢} + {}^{ن}\text{ق}_{١} = ١٢٠$

$\therefore ({}^{ن}\text{ق}_{٣} + {}^{ن}\text{ق}_{٢}) + ({}^{ن}\text{ق}_{٢} + {}^{ن}\text{ق}_{١}) = ١٢٠$ بتطبيق قانون الجمع

$\therefore {}^{ن+١}\text{ق}_{٣} + {}^{ن+١}\text{ق}_{٢} = ١٢٠$ بتطبيق قانون الجمع

$\therefore {}^{ن+٢}\text{ق}_{٣} = ١٢٠ \leftarrow \therefore \frac{^{ن+٢}\text{ل}_{٣}}{٣!} = ١٢٠$

$\therefore {}^{ن+٢}\text{ل}_{٣} = ١٢٠ \times ٣! = ٧٢٠$ بالآلة $\therefore {}^{ن+٢}\text{ل}_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore {}^{ن+٢}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ل}_{٣} \leftarrow \therefore ن + ٢ = ١٠ \leftarrow \boxed{\therefore ن = ٨}$

تذكر أن قانون الجمع هو:
$^{ن}\text{ق}_{ر} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = {}^{ن+١}\text{ق}_{ر}$

ب) $\dfrac{{}^{17}\text{ق}_{6} + {}^{17}\text{ق}_{5}}{{}^{18}\text{ق}_{5}}$ بتطبيق قانون الجمع على البسط

$\therefore \dfrac{{}^{17}\text{ق}_{6} + {}^{17}\text{ق}_{5}}{{}^{18}\text{ق}_{5}} = \dfrac{{}^{18}\text{ق}_{6}}{{}^{18}\text{ق}_{5}}$ بتطبيق قانون النسبة

$\therefore \dfrac{{}^{17}\text{ق}_{6} + {}^{17}\text{ق}_{5}}{{}^{18}\text{ق}_{5}} = \dfrac{{}^{18}\text{ق}_{6}}{{}^{18}\text{ق}_{5}} = \dfrac{18-6+1}{6} = \dfrac{13}{6}$

تذكر أن قانون النسبة هو:

$\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}}$

مثـــال:

اثبت أن : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$ ومن ذلك إثبت أن $\dfrac{{}^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{{}^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}} = \dfrac{58}{9}$

الحـــل:

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \div \dfrac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ر}-1)!\,\big((\text{ن}-1)-(\text{ر}-1)\big)!}$$

$$= \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \times \dfrac{(\text{ر}-1)!\,(\text{ن}-\text{ر})!}{(\text{ن}-1)!}$$ بتبسيط المضروب الأكبر

$$= \dfrac{\text{ن}\,\cancel{(\text{ن}-1)!}}{\text{ر}\,\cancel{(\text{ر}-1)!}\,\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}} \times \dfrac{\cancel{(\text{ر}-1)!}\,\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}}{\cancel{(\text{ن}-1)!}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$$ وهو المطلوب

نلاحظ أن ماتم اثباته هو عبارة عن النسبة بين توفيقتين متتاليتين حيث علم ودليل البسط اكبر من علم ودليل المقام بواحد والنتيجة هى العلم الاكبر على الدليل الاكبر

ومن ثم لأيجاد قيمة المقدار $\dfrac{{}^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{{}^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}}$ نقسم البسط والمقام على ${}^{24}\text{ق}_{3}$

$$\therefore \dfrac{{}^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{{}^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}} = \left(\dfrac{{}^{25}\text{ق}_{4}}{{}^{24}\text{ق}_{3}} + 1\right) \div \left(1 + \dfrac{{}^{23}\text{ق}_{2}}{{}^{24}\text{ق}_{3}}\right)$$

$$= \left(\dfrac{25}{4} + 1\right) \div \left(1 + \dfrac{3}{24}\right) = \dfrac{29}{4} \times \dfrac{24}{27} = \dfrac{58}{9}$$ وهو المطلوب

مثـــال: أوجد قيم ن الممكنة اذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{٨} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} \le {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥}$

الحـــل:

$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٨} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} \le {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥}$ $\quad \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٨} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥}} \ge ١$

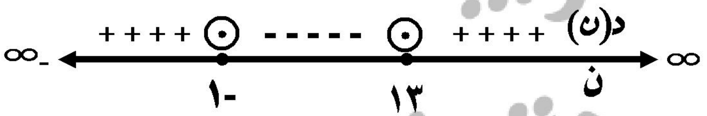
$\therefore \dfrac{\text{ن} - ٧}{٨} \times \dfrac{\text{ن} - ٥}{٦} \ge ١$ $\quad \therefore \dfrac{\text{ن}^{٢} - ١٢\text{ن} + ٣٥}{٤٨} \ge ١$

$\therefore \text{ن}^{٢} - ١٢\text{ن} + ٣٥ \ge ٤٨$ $\quad \therefore \text{ن}^{٢} - ١٢\text{ن} + ٣٥ - ٤٨ \ge ٠$

$\therefore \text{ن}^{٢} - ١٢\text{ن} - ١٣ \ge ٠$ $\quad \therefore (\text{ن} + ١)(\text{ن} - ١٣) \ge ٠$

$\therefore \text{ن} < -١$ (مرفوض) أو $\text{ن} > ١٣$

$\therefore \text{ن} = \{١٣، ١٤، ١٥، \ldots\}$



مثـــال:

اذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$ فما قيمة ن ، ر ؟

الحـــل:

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٤}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢}} = \dfrac{١٤}{١٤} = ١$ $\quad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٤} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$

$\therefore \text{ر} + ٤ = \text{ر} + ٢$ مرفوض او $\text{ر} + ٤ + \text{ر} + ٢ = \text{ن} \Leftarrow \therefore \text{ن} = ٢\text{ر} + ٦$ (١)

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{١٤}{٣} \leftarrow \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}} \times \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{١٤}{٣}$

$\therefore \dfrac{\text{ن} - (\text{ر} + ١)}{\text{ر} + ٢} \times \dfrac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + ١} = \dfrac{١٤}{٣}$ وبالتعويض من (١)

$\therefore \dfrac{٢\text{ر} + ٦ - \text{ر} - ١}{\text{ر} + ٢} \times \dfrac{٢\text{ر} + ٦ - \text{ر}}{\text{ر} + ١} = \dfrac{١٤}{٣} \Leftarrow \therefore \dfrac{\text{ر} + ٥}{\text{ر} + ٢} \times \dfrac{\text{ر} + ٦}{\text{ر} + ١} = \dfrac{١٤}{٣}$

$١١\text{ر}^{٢} + ٩\text{ر} - ٦٢ = ٠ \Leftarrow (١١\text{ر} + ٣١)(\text{ر} - ٢) = ٠$

اما $١١\text{ر} + ٣١ = ٠ \Leftarrow \therefore \text{ر} = \dfrac{-٣١}{١١}$ مرفوض لأن ر يجب أن تكون عدد طبيعى

او $ر - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{\therefore ر = ٢}$

بالتعويض فى (١) $\therefore ن = ٢ \times ٢ + ٦ \Leftarrow \boxed{\therefore ن = ١٠}$

مثال: اذا كان ${}^{ن+١}ق_{٦}$ ، ${}^{ن}ق_{٥}$ ، ${}^{ن}ق_{٤}$ فى تتابع هندسى فما قيمة ن ؟

الحل:

$\because$ ${}^{ن+١}ق_{٦}$ ، ${}^{ن}ق_{٥}$ ، ${}^{ن}ق_{٤}$ فى تتابع هندسى

$$\because \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن+١}ق_{٦}} = \frac{{}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٥}} \Leftarrow \therefore \frac{{}^{ن+١}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}} = \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}}$$

$$\therefore \frac{|ن+١}{|٦\,|ن+١-٦} \div \frac{|ن}{|٥\,|ن-٥} = \frac{ن-٤}{٥} \Leftarrow \therefore \frac{|ن+١}{|٦\,|ن-٥} \times \frac{|٥\,|ن-٥}{|ن} = \frac{ن-٤}{٥}$$

$$\therefore \frac{ن+١}{٦} = \frac{ن-٤}{٥} \Leftarrow \therefore ٦ن - ٢٤ = ٥ن + ٥ \Leftarrow \boxed{\therefore ن = ٢٩}$$

ملاحظة هامة: الترتيب مهم فى التباديل لذلك يعبر عن التباديل بأقواس الزوج المرتب (،)
لكن الترتيب غير مهم فى التوافيق لذلك يعبر عن التوافيق بأقواس المجموعة { ، }

مثال:

إذا كان $س = \{س : س \in ط ، ٤ \le س \le ٩\}$ ، $ع_{١} = \{(أ، ب) : أ، ب \in س ، أ \ne ب\}$

$ع_{٢} = \{\{أ، ب، جـ\} : أ، ب، جـ \in س\}$ كم عدد عناصر $ع_{١}$، $ع_{٢}$

الحل:

$\because س = \{٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩\}$ $\therefore$ عدد عناصر س $= ٦$

عناصر $ع_{١}$ عبارة عن أزواج مرتبة اى انها تباديل لعناصر س على مكانين

$\therefore$ عدد عناصر $ع_{١} = {}^{٦}ل_{٢} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

وعناصر $ع_{٢}$ عبارة عن مجموعة اى انها توافيق لعناصر س على ثلاثة أماكن

$\therefore$ عدد عناصر $ع_{٢} = {}^{٦}ق_{٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠$

١ - ٢ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظرية ذات الحدين هى النظرية التى تستخدم لإيجاد مفكوك مقدار جبرى مكون من حدين مرفوعا لأس صحيح موجب ومفكوك ذات الحدين هو:

إذا كان $\text{أ}، \text{س} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^+$ فإن:

$$١ - (\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} + \cdots\cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{\text{ن}}$$

$$٢ - (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} - \cdots\cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,(-\text{أ})^{\text{ن}}$$

ملاحظات على مفكوك ذات الحدين:

١) عدد حدود المفكوك $= \text{ن} + ١$ اى أن عدد الحدود يزيد عن الأس بمقدار واحد

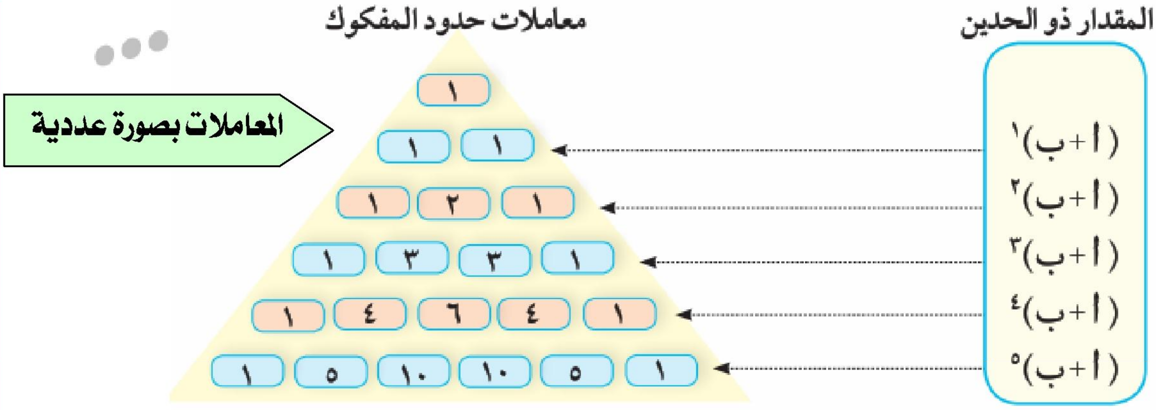
٢) المفكوك مرتب حسب قوى (س) تنازليا ومرتب حسب قوى (أ) تصاعديا

٣) مجموع قوى (س) وقوى (أ) فى أى حد يساوى ن

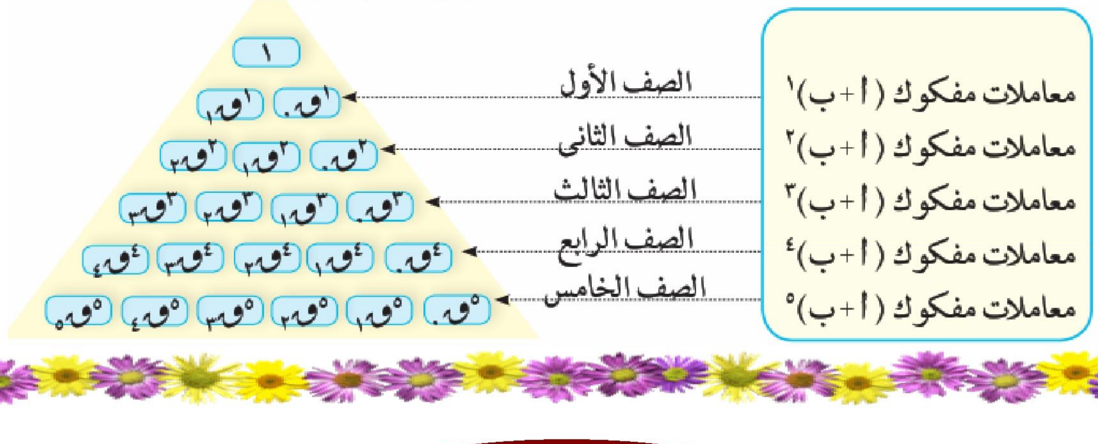
٤) دليل ق فى أى حد من الحدود يقل واحد عن رتبة الحد

٥) إذا كانت الإشارة بين الحدين سالبة فإن اشارات الحدود تتبدل بين الموجب والسالب ونبدأ بالموجب اى أن الحدود الفردية ستكون موجبة والحدود الزوجية ستكون سالبة

٦) معاملات حدود المفكوك تتبع نمطا يمثله مثلث يسمى مثلث باسكال كما هو موضح فيمايلى:



وبصورة توافقية تكون معاملات الحدود كما يلى:



مثـــال: اكتب مفكوك: (أ) $(3\text{س}+\text{ص})^{5}$ (ب) $(\text{س}^{2}-1)^{6}$

الحـــل:

(أ) $(3\text{س}+\text{ص})^{5} = (3\text{س})^{5} + {}^{5}\text{ق}_{1}(3\text{س})^{4}(\text{ص}) + {}^{5}\text{ق}_{2}(3\text{س})^{3}(\text{ص})^{2} + {}^{5}\text{ق}_{3}(3\text{س})^{2}(\text{ص})^{3} + {}^{5}\text{ق}_{4}(3\text{س})(\text{ص})^{4} + {}^{5}\text{ق}_{5}(\text{ص})^{5}$

$= 243\text{س}^{5} + 5\times 81\text{س}^{4}\times\text{ص} + 10\times 27\text{س}^{3}\times\text{ص}^{2} + 10\times 9\text{س}^{2}\times\text{ص}^{3} + 5\times 3\text{س}\times\text{ص}^{4} + \text{ص}^{5}$

$= 243\text{س}^{5} + 405\text{س}^{4}\text{ص} + 270\text{س}^{3}\text{ص}^{2} + 90\text{س}^{2}\text{ص}^{3} + 15\text{س}\text{ص}^{4} + \text{ص}^{5}$

(ب) $(\text{س}^{2}-1)^{6} = (\text{س}^{2})^{6} - {}^{6}\text{ق}_{1}(\text{س}^{2})^{5}(1) + {}^{6}\text{ق}_{2}(\text{س}^{2})^{4}(1)^{2} - {}^{6}\text{ق}_{3}(\text{س}^{2})^{3}(1)^{3} + {}^{6}\text{ق}_{4}(\text{س}^{2})^{2}(1)^{4} - {}^{6}\text{ق}_{5}(\text{س}^{2})(1)^{5} + {}^{6}\text{ق}_{6}(1)^{6}$

$= \text{س}^{12} - 6\text{س}^{10} + 15\text{س}^{8} - 20\text{س}^{6} + 15\text{س}^{4} - 6\text{س}^{2} + 1$

✱ حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين:

إذا كان الحد الأول هو الواحد الصحيح فإن مفكوك ذات الحدين يأخذ الصورة البسيطة التالية:

1 – $(1+\text{س})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\text{س}^{2} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3}\text{س}^{3} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$

2 – $(1-\text{س})^{\text{ن}} = 1 - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\text{س}^{2} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3}\text{س}^{3} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(-\text{س})^{\text{ن}}$

مثـــال: اكتب مفكوك: $(1-\text{س})^{8}$

ثم إستخدم ذلك فى إيجاد قيمة: $1 - {}^{8}\text{ق}_{1} + {}^{8}\text{ق}_{2} - {}^{8}\text{ق}_{3} + \ldots\ldots + {}^{8}\text{ق}_{8}$

الحـــل:

$(1-\text{س})^{8} = 1 - {}^{8}\text{ق}_{1}\text{س} + {}^{8}\text{ق}_{2}\text{س}^{2} - {}^{8}\text{ق}_{3}\text{س}^{3} + {}^{8}\text{ق}_{4}\text{س}^{4} - {}^{8}\text{ق}_{5}\text{س}^{5} + {}^{8}\text{ق}_{6}\text{س}^{6} - {}^{8}\text{ق}_{7}\text{س}^{7} + {}^{8}\text{ق}_{8}\text{س}^{8}$

$= 1 - 8\text{س} + 28\text{س}^{2} - 56\text{س}^{3} + 70\text{س}^{4} - 56\text{س}^{5} + 28\text{س}^{6} - 8\text{س}^{7} + \text{س}^{8}$

بوضع $\text{س} = 1$ **فى الطرفين** $\therefore (1-1)^{8} = 1 - {}^{8}\text{ق}_{1} + {}^{8}\text{ق}_{2} - {}^{8}\text{ق}_{3} + \ldots\ldots + {}^{8}\text{ق}_{8}$

$\therefore 1 - {}^{8}\text{ق}_{1} + {}^{8}\text{ق}_{2} - {}^{8}\text{ق}_{3} + \ldots\ldots + {}^{8}\text{ق}_{8} = 0$

مثال:

أوجد قيمة $(٠٫٩٨)^{١٠}$ مقربا الناتج الى ثلاثة ارقام عشرية ، مستخدما نظرية ذات الحدين

الحل:

$$(٠٫٩٨)^{١٠} = (١ - ٠٫٠٢)^{١٠}$$

$$= ١ - {}^{١٠}ق_{١} \times ٠٫٠٢ + {}^{١٠}ق_{٢}(٠٫٠٢)^{٢} - {}^{١٠}ق_{٣}(٠٫٠٢)^{٣} + {}^{١٠}ق_{٤}(٠٫٠٢)^{٤} - \cdots\cdots$$

$$= ١ - ٠٫٢ + ٠٫٠١٨ - ٠٫٠٠٠٩٦ + ٠٫٠٠٠٠٣٣٦ - \cdots\cdots$$ (تهمل باقى الحدود)

$$= ١٫٠١٨ - ٠٫٢٠٠٩٦ = ٠٫٨١٧٠٤ \simeq ٠٫٨١٧$$

✸ الحد العام فى مفكوك ذات الحدين:

الحد العام فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هو $ح_{ر+١}$ حيث $٠ \le ر \le ن$ ويكون:

$$\boxed{ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times ص^{ر} \times س^{ن-ر}}$$

يفضل حفظ القانون بهذه الصيغة اللفظية

اى أن

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

، $$\text{معامل } ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{معامل الحد الثانى})^{ر} \times (\text{معامل الحد الأول})^{ن-ر}$$

يستخدم هذا القانون لإيجاد قيمة او معامل اى حد من حدود المفكوك دون ايجاد المفكوك كله وله استخدامات اخرى كثيرة سنتعرف عليها فى حينها **ويعتبر قانون الحد العام من أهم اجزاء ذات الحدين**

مثال:

أوجد الحد الثامن فى مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{٢}{٣س})^{١٢}$

الحل:

$$\because ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore ح_{٨} = ح_{٧+١} = {}^{١٢}ق_{٧} \times \left(\frac{-٢}{٣س}\right)^{٧} \times (٣س^{٢})^{١٢-٧}$$

$$= {}^{١٢}ق_{٥} \times \frac{-١٢٨}{٣^{٧} \times س^{٧}} \times ٣^{٥} \times س^{١٠} = {}^{١٢}ق_{٥} \times \frac{-١٢٨}{٩} س^{٣} = -١١٢٦٤ س^{٣}$$

مثال: أوجد معامل $ح_٥$ فى مفكوك $\left(\frac{س^٢}{٢} - \frac{٣}{س}\right)^٧$

الحل:

∵ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{معامل الحد الثانى})^{ر} \times (\text{معامل الحد الأول})^{ن-ر}$

∴ معامل $ح_٥ = {}^{٧}ق_{٤} \times (-٣)^٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٣ = {}^{٧}ق_{٣} \times ٨١ \times \frac{١}{٨} = \frac{٢٨٣٥}{٨}$

مثال: أوجد الحد الثالث من النهاية فى مفكوك $(س - ٢ص)^٧$

الحل:

$ح_٣$ من النهاية فى مفكوك $(س - ٢ص)^٧$ هو $ح_٣$ من البداية فى مفكوك $(-٢ص + س)^٧$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

∴ $ح_٣ = ح_{٢+١} = {}^{٧}ق_{٢} \times (س)^٢ \times (-٢ص)^{٧-٢}$

$= \frac{٧\times٦}{٢\times١} \times س^٢ \times (-٣٢ص^٥) = -٦٧٢س^٢ص^٥$

حل آخر:

إذا علمت رتبة اى حد من النهاية فإنه يمكن معرفة رتبة هذا الحد من البداية كمايلى:

رتبة اى حد من البداية = عدد حدود المفكوك – رتبة هذا الحد من النهاية + ١

∵ عدد الحدود $= ن + ١ = ٧ + ١ = ٨$

∴ $ح_٣$ من النهاية فى مفكوك $(س - ٢ص)^٧$ تكون رتبته من البداية $= ٨ - ٣ + ١ = ٦$ اى $ح_٦$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

∴ $ح_٦ = ح_{٥+١} = {}^{٧}ق_{٥} \times (-٢ص)^٥ \times (س)^{٧-٥} = {}^{٧}ق_{٢} \times (-٢ص)^٥ \times (س)^٢$

$= \frac{٧\times٦}{٢\times١} \times (-٣٢ص^٥) \times س^٢ = -٦٧٢س^٢ص^٥$

قاعدة:

١ – $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$ = ضعف مجموع الحدود الفردية فى المفكوك الأول

٢ – $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$ = ضعف مجموع الحدود الزوجية فى المفكوك الأول

مثـــال: أوجد فى ابسط صورة $(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥}$

الحـــل:

$(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥} = ٢(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$ فى المفكوك الأول

$= ٢({}^{٥}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٥}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + (\sqrt{س})^{٥})$

$= ١٠\sqrt{س} + ٢٠س\sqrt{س} + ٢س^{٢}\sqrt{س}$

مثـــال:

أوجد لأقرب ثلاثة ارقام عشرية $(١,٠٣)^{٨} + (٠,٩٧)^{٨}$ مستخدما نظرية ذات الحدين

الحـــل:

$(١,٠٣)^{٨} + (٠,٩٧)^{٨} = (١ + ٠,٠٣)^{٨} + (١ - ٠,٠٣)^{٨}$

$= ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$ فى المفكوك الأول

$= ٢(١ + {}^{٨}ق_{٢}(٠,٠٣)^{٢} + {}^{٨}ق_{٤}(٠,٠٣)^{٤} + ...)$

$= ٢(١ + ٠,٠٢٥٢ + ٠,٠٠٠٠٠٥٦٧ + ...)$

$= ٢,٠٥٠٥١٣٤ \simeq ٢,٠٥١$

مثـــال:

فى مفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤س(١ - س)^{٧} + ٢٥٢س^{٢}(١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١س^{٨}$

أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما $س = ١$

الحـــل:

المفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤س(١ - س)^{٧} + ٢٥٢س^{٢}(١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١س^{٨}$

$= (١ - س)^{٨} + ٨ \times ٣س(١ - س)^{٧} + ٢٨ \times ٩س^{٢}(١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١س^{٨}$

$= (١ - س)^{٨} + {}^{٨}ق_{١} \times (٣س)(١ - س)^{٧} + {}^{٨}ق_{٢} \times (٣س)^{٢}(١ - س)^{٦} + ... + (٣س)^{٨}$

وهو يمثل مفكوك $[(١ - س) + ٣س]^{٨} = (١ + ٢س)^{٨}$ ويكون

$ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥} \times (٢س)^{٥} = ١٧٩٢س^{٥}$ وعندما $س = ١$ $\therefore ح_{٦} = ١٧٩٢$

مثــــال:

فى مفكوك $(١ + جس)^{١٠}$ إذا كان معامل $ح_{٣} = ١٨٠$ ، وكان $ح_{٥} = ٢١٠$

أوجد قيمة كل من ج، س حيث ج عدد صحيح موجب

الحــــل:

$\because ح_{٣} = {}^{١٠}ق_{٢} \times (جس)^{٢} = ٤٥ج^{٢}س^{٢}$

$\therefore$ معامل $ح_{٣} = ٤٥ج^{٢}$ $\therefore ١٨٠ = ٤٥ج^{٢}$ $\therefore ج^{٢} = \frac{١٨٠}{٤٥} = ٤$ $\boxed{\therefore ج = ٢}$

$\because ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \times (جس)^{٤}$ $\leftarrow$ $\therefore ح_{٥} = ٢١٠ \times ٢^{٢} \times س^{٢} = ٨٤٠س^{٢}$

$\therefore ٢١٠ = ٨٤٠س^{٢}$ $\leftarrow$ $\therefore س^{٢} = \frac{٢١٠}{٨٤٠} = \frac{١}{٤}$ $\leftarrow$ $\boxed{\therefore س = \pm \frac{١}{٢}}$

مثــــال: أوجد معامل $س^{٢}$ فى مفكوك $(١ + س + س^{٢})^{٥}$

الحــــل:

$\because (١ + س + س^{٢})^{٥} = [١ + س(١ + س)]^{٥}$

$\because ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times [س(١ + س)]^{ر}$ $\therefore ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \times (١ + س)^{ر}$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \times س^{م}$ حيث $م \leq ر$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \times س^{ر+م}$

لإيجاد معامل $س^{٢}$ نضع $ر + م = ٢$ فتكون قيم ر، م حيث $م \leq ر$ هى:

ر	١	٢
م	١	٠

$\therefore$ معامل $س^{٢} = {}^{٥}ق_{١} \times {}^{١}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٢}ق_{٠} = ٥ + ١٠ = ١٥$

مثــــال: برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن:

$$({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + \cdots\cdots + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢} = {}^{٢ن}ق_{ن}$$

الحــــل:

$\because (١ + س)^{٢ن} = (١ + س)^{ن} \times (١ + س)^{ن}$

مفكوك الطرف الأيمن $= {}^{٢ن}ق_{٠} + {}^{٢ن}ق_{١}س + {}^{٢ن}ق_{٢}س^{٢} + {}^{٢ن}ق_{٣}س^{٣} + \cdots\cdots + {}^{٢ن}ق_{ن}س^{ن}$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{٢ن}ق_{ن}$ (١)

ومفكوك الطرف الأيسر $= ({}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}س^{٣} + \cdots\cdots + {}^{ن}ق_{ن}س^{ن})$

$\times ({}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}س^{٣} + \cdots\cdots + {}^{ن}ق_{ن}س^{ن})$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} \times {}^{ن}ق_{ن} + {}^{ن}ق_{١} \times {}^{ن}ق_{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢} \times {}^{ن}ق_{ن-٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن} \times {}^{ن}ق_{٠}$

ومن قانون التبسيط ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠}$ ، ${}^{ن}ق_{ن-١} = {}^{ن}ق_{١}$ ، ${}^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{٢}$ ، وهكذا

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} \times {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} \times {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} \times {}^{ن}ق_{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن} \times {}^{ن}ق_{ن}$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = ({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + \cdots\cdots + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore ({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + \cdots\cdots + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢} = {}^{٢ن}ق_{ن}$ وهو المطلوب

✱ الحد الأوسط فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$:

فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ نجد أن عدد الحدود $= ن + ١$ وبالتالى نجد أن:

١) إذا كان الأس (ن) زوجى فإن عدد الحدود سيكون فردى

وبالتالى يوجد حد اوسط واحد (عدد الحدود قبله = عدد الحدود بعده) وتكون رتبته هى:

رتبة الحد الأوسط $= \frac{ن}{٢} + ١ = \frac{ن + ٢}{٢}$

٢) إذا كان الأس (ن) فردى فإن عدد الحدود سيكون زوجى

وبالتالى يوجد حدان اوسطان واحد (عدد الحدود قبلهما = عدد الحدود بعدهما) وتكون رتبتهما هى:

رتبة الحدان الأوسطان $= \frac{ن + ١}{٢}$ و $\frac{ن + ٣}{٢}$

وبعد تحديد رتبة الحد الأوسط أو الحدان الأوسطان يتم ايجاد أى منهما باستخدام قانون الحد العام

مثـــال:

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ وإذا كانت قيمة هذا الحد $= \frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س

الحـــل:

∵ ن = ١٠ زوجية ∴ رتبة الحد الأوسط $= \frac{\text{ن}}{٢} + ١ = \frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$ ∴ الحد الأوسط هو $\text{ح}_{٦}$

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times (\text{الحد الثانى})^{\text{ر}} \times (\text{الحد الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

∴ $\text{ح}_{٦} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥} \times \left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{٥} \times (\text{س}^{٢})^{١٠-٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥} \times \frac{١}{٣٢\text{س}^{٥}} \times \text{س}^{١٠} = \frac{٦٣}{٨}\,\text{س}^{٥}$

∵ قيمة الحد الأوسط $= \frac{٢٨}{٢٧}$ ← ∴ $\frac{٦٣}{٨}\,\text{س}^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$

∴ $\text{س}^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧} \times \frac{٨}{٦٣} = \frac{٣٢}{٢٤٣}$ ← ∴ $\text{س}^{٥} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$ ← $\boxed{∴\ \text{س} = \frac{٢}{٣}}$

مثـــال:

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٣\text{س} + ٢\text{ص})^{١٣}$ متساويان فاثبت أن: $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$

الحـــل:

∵ ن = ١٣ فردية ∴ رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{١٣+١}{٢} = ٧$ ∴ الحدان الأوسطان هما $\text{ح}_{٧}$ ، $\text{ح}_{٨}$

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times (\text{الحد الثانى})^{\text{ر}} \times (\text{الحد الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

∴ $\text{ح}_{٧} = {}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times (٢\text{ص})^{٦} \times (٣\text{س})^{٧} = {}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times ٢^{٦} \times ٣^{٧} \times \text{ص}^{٦}\text{س}^{٧}$

، ∴ $\text{ح}_{٨} = {}^{١٣}\text{ق}_{٧} \times (٢\text{ص})^{٧} \times (٣\text{س})^{٦} = {}^{١٣}\text{ق}_{٧} \times ٢^{٧} \times ٣^{٦} \times \text{ص}^{٧}\text{س}^{٦}$

∵ الحدان الأوسطان متساويان ← ∴ $\frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٨}} = ١$ ← ∴ $\frac{{}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times ٢^{٦} \times ٣^{٧} \times \text{ص}^{٦}\text{س}^{٧}}{{}^{١٣}\text{ق}_{٧} \times ٢^{٧} \times ٣^{٦} \times \text{ص}^{٧}\text{س}^{٦}} = ١$

∴ $\frac{{}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times ٣\text{س}}{{}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times ٢\text{ص}} = ١$ ← ∴ $٣\text{س} = ٢\text{ص}$ ← ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$

مثـــال:

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $\left(٢\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)^{١٠} + \left(٢\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)^{١٠}$

الحـــل:

$\because \left(2\sqrt{س} + \frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^{10} + \left(2\sqrt{س} - \frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^{10} = 2(ح_1 + ح_3 + ح_5 + ح_7 + ح_9 + ح_{11})$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك $= 6$ $\qquad \therefore$ يوجد حدان أوسطان هما $2ح_5 ، 2ح_7$

$$\because ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore ح_5 = {}^{10}ق_4 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^4 \times (2\sqrt{س})^{10-4} = {}^{10}ق_4 \times \frac{1}{16 س^2} \times 64 س^3 = 840 س$$

$$\therefore ح_7 = {}^{10}ق_6 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^6 \times (2\sqrt{س})^{10-6} = {}^{10}ق_4 \times \frac{1}{64 س^3} \times 16 س^2 = \frac{105}{2س}$$

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما: $2ح_5 = 1680 س$ ، $2ح_7 = \frac{105}{س}$

🕮 مثــــال:

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(س - \frac{1}{س}\right)^{15}$ هما أ ، ب فاثبت أن $أ + ب س^2 = 0$

✍ الحـــل:

$\because ن = 15$ فردية $\quad \therefore$ رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{15+1}{2} = 8 \quad \therefore$ الحدان الأوسطان هما $ح_8 ، ح_9$

$$\because ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore أ = ح_8 = {}^{15}ق_7 \times \left(\frac{-1}{س}\right)^7 \times (س)^8 = {}^{15}ق_7 \times \frac{-1}{س^7} \times س^8 = -{}^{15}ق_7\, س$$

$$، \therefore ب = ح_9 = {}^{15}ق_8 \times \left(\frac{-1}{س}\right)^8 \times (س)^7 = {}^{15}ق_7 \times \frac{1}{س^8} \times س^7 = {}^{15}ق_7 \times \frac{1}{س}$$

$$\therefore أ + ب س^2 = -{}^{15}ق_7\, س + {}^{15}ق_7 \times \frac{1}{س} \times س^2 = -{}^{15}ق_7\, س + {}^{15}ق_7\, س = 0 \quad \#$$

١ - ٣ الحد المشتمل على $س^ك$ من مفكوك ذات الحدين

لإيجاد الحد المشتمل على $س^ك$ أو الحد الخالى من س من مفكوك ذات الحدين نتبع الآتى:

١) نفرض أن هذا الحد هو الحد العام $ح_{ر+1}$ ثم نوجد الحد العام بدلالة ر

٢) نوزع الاسس على عوامل البسط والمقام

٣) نوجد مجموع قوى س فى الحد العام ونكمل كمايلى:

- أذا كان المطلوب الحد المشتمل على $س^ك$ نضع مجموع قوى س = ك ونوجد قيمة ر
- أذا كان المطلوب الحد الخالى من س نضع مجموع قوى س = صفر ونوجد قيمة ر
- أذا كان المطلوب معامل الحد المشتمل على $س^ك$ نضع مجموع قوى س = ك ونوجد ر ثم نأخذ المعاملات ونترك الرموز (او نضع كل رمز = ١)

ملاحظة هامة:

بعد حساب قيمة ر اذا كانت قيمة ر سالبة أو كسر أو اكبر من اس القوس

فهذا يعنى أن المفكوك لايحتوى على $س^ك$ أو أن المفكوك لايحتوى على حد خالى من س

مثـــال: أوجد معامل $س^{11}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^2}{2} - \frac{1}{س}\right)^{10}$

الحـــل:

نفرض أن الحد العام $ح_{ر+1}$ يشتمل على $س^{11}$

$$\therefore ح_{ر+1} = {}^نق_ر \times (\text{الحد الثانى})^ر \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \times \left(\frac{-1}{س}\right)^ر \times \left(\frac{س^2}{2}\right)^{10-ر}$$

$$= {}^{10}ق_ر \times (-1)^ر \times س^{-ر} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-ر} \times س^{20-2ر}$$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \times (-1)^ر \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-ر} \times س^{20-3ر}}$$

$ح_{ر+1}$ يشتمل على $س^{11}$ إذا كان $20 - 3ر = 11 \Leftarrow \therefore 3ر = 9 \Leftarrow \therefore ر = 3$

الحد الذى يشتمل على $س^{11}$ هو $ح_4$

∴ معامل $\text{س}^{١١}$ = معامل $\text{ح}_{٤} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \times (-١)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠-٣} = -١٢٠ \times \frac{١}{١٢٨} = \frac{-١٥}{١٦}$

مثـــال:

فى مفكوك $\left(٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد: أولا: معامل $\text{س}^{٣}$ ثانيا: الحد الخالى من س

ثالثا: أثبت أن هذا المفكوك لايحتوى على حد يشمل $\text{س}^{٢}$

الحـــل:

$∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times (\text{الحد الثانى})^{\text{ر}} \times (\text{الحد الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{-١}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}} \times (٢\text{س})^{٩-\text{ر}}$

$= {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٢\text{ر}} \times (٢)^{٩-\text{ر}} \times \text{س}^{٩-\text{ر}}$

$$\boxed{∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times (٢)^{٩-\text{ر}} \times \text{س}^{٩-٣\text{ر}}}$$

اولا: $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يشتمل على $\text{س}^{٣}$ إذا كان $٩ - ٣\text{ر} = ٣ \Leftarrow ∴ ٣\text{ر} = ٦ \Leftarrow ∴ \text{ر} = ٢$

∴ الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{٣}$ هو $\text{ح}_{٣}$

∴ معامل $\text{س}^{٣}$ = معامل $\text{ح}_{٣} = {}^{٩}\text{ق}_{٢} \times (-١)^{٢} \times (٢)^{٩-٢} = ٤٧٠٨$

ثانيا: $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يكون خالى من س إذا كان $٩ - ٣\text{ر} = ٠ \leftarrow ∴ ٣\text{ر} = ٩ \leftarrow ∴ \text{ر} = ٣$

∴الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٤}$ $∴ \text{ح}_{٤} = {}^{٩}\text{ق}_{٣} \times (-١)^{٣} \times (٢)^{٩-٣} = -٥٣٧٦$

ثالثا: $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يشتمل على $\text{س}^{٢}$ إذا كان $٩ - ٣\text{ر} = ٢ \leftarrow ∴ ٣\text{ر} = ٧$

$∴ \text{ر} = \frac{٧}{٣} \notin \text{ط}$ ∴ المفكوك لايحتوى على حد يشمل $\text{س}^{٢}$

مثـــال:

فى مفكوك $\left(\text{أس} + \frac{١}{\text{ب س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع ، أثبت أن $٦\text{أ ب} = ٥$

الحـــل:

$∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times (\text{الحد الثانى})^{\text{ر}} \times (\text{الحد الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \times \left(\frac{1}{ب س}\right)^ر \times (أ س)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_ر \times \left(\frac{1}{ب}\right)^ر \times س^{-ر} \times (أ)^{10-ر} \times س^{10-ر}$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \times \left(\frac{1}{ب}\right)^ر \times (أ)^{10-ر} \times س^{10-2ر}}$$

$ح_{ر+1}$ يكون خالى من س إذا كان $10 - 2ر = 0$ ← $\therefore 2ر = 10$ ← $\therefore ر = 5$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ح_6$

$\therefore ح_6 = {}^{10}ق_5 \times \left(\frac{1}{ب}\right)^5 \times (أ)^5$ ومعامل $ح_7 = {}^{10}ق_6 \times \left(\frac{1}{ب}\right)^6 \times (أ)^4$

$\therefore {}^{10}ق_5 \times \left(\frac{1}{ب}\right)^5 \times (أ)^5 = {}^{10}ق_6 \times \left(\frac{1}{ب}\right)^6 \times (أ)^4$ $\therefore {}^{10}ق_5 \times أ = {}^{10}ق_6 \times \frac{1}{ب}$

$\therefore أ ب = \frac{{}^{10}ق_6}{{}^{10}ق_5} = \frac{10-5}{6} = \frac{5}{6}$ ← $\therefore 6 أ ب = 5$ وهو المطلوب

مثـــال:

من مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{س}\right)^{3ن}$ أوجد:

أولا: معامل الحد الذى يحتوى على $س^{3ن}$

ثانيا: إذا كانت $ن = 6$ أوجد النسبة بين معامل الحد الذى يشتمل على $س^{3ن}$ ومعامل الحد الأوسط

الحـــل:

$\therefore ح_{ر+1} = {}^نق_ر \times (\text{الحد الثانى})^ر \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \times \left(\frac{1}{س}\right)^ر \times (س^2)^{3ن-ر} = {}^{3ن}ق_ر \times س^{-ر} \times س^{6ن-2ر}$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \times س^{6ن-3ر}}$$

اولا: $ح_{ر+1}$ يشتمل على $س^{3ن}$ إذا كان: $6ن - 3ر = 3ن$ $\therefore 3ر = 3ن$ ← $\therefore ر = ن$

الحد الذى يشتمل على $س^{3ن}$ هو $ح_{ن+1}$ ← $\therefore$ معامل $س^{3ن}$ = معامل $ح_{ن+1} = {}^{3ن}ق_ن$

ثانيا: إذا كانت $ن = 6$ الأس $= 18$ زوجى $\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{18}{2} + 1 = 10$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل $\text{ح}_{١٠} = {}^{١٨}\text{ق}_{٩} = ٤٨٦٢٠$

ومعامل $\text{س}^{٣\text{ن}} = {}^{٣\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{١٨}\text{ق}_{٦} = ١٨٥٦٤$

∴ معامل $\text{س}^{٣\text{ن}}$: معامل الحد الأوسط $= \frac{١٨٥٦٤}{٤٨٦٢٠} = \frac{٢١}{٥٥}$

مثـــال: أوجد معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + ٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣})^{٤}$

الحـــل:

$\because ١ + ٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} = ١ + {}^{٣}\text{ق}_{١}\text{س} + {}^{٣}\text{ق}_{٢}\text{س}^{٢} + {}^{٣}\text{ق}_{٣}\text{س}^{٣} = (١ + \text{س})^{٣}$

$\therefore (١ + ٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣})^{٤} = ((١ + \text{س})^{٣})^{٤} = (١ + \text{س})^{١٢}$

∴ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل $\text{ح}_{٧} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} = ٩٢٤$

مثـــال: أوجد معامل $\text{س}^{٩}$ فى مفكوك $\text{س}^{٥}\left(\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٢}$

الحـــل:

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times$ (الحـد الثـانى)$^{\text{ر}} \times$ (الحـد الأول)$^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{س}^{٥} \times {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times (\text{س}^{٣})^{١٢-\text{ر}}$

$= \text{س}^{٥} \times {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{٣٦-٣\text{ر}}$

$$\boxed{\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{٤١-٤\text{ر}}}$$

$\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يشتمل على $\text{س}^{٩}$ إذا كان $٤١ - ٤\text{ر} = ٩ \Leftarrow \therefore ٤\text{ر} = ٣٢ \Leftarrow \therefore \text{ر} = ٨$

∴ الحد المشتمل على $\text{س}^{٩}$ هو $\text{ح}_{٩}$ ∴ معامل $\text{س}^{٩}$ = معامل $\text{ح}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٤} = ٤٩٥$

مثـــال: أوجد معامل $\text{س}^{٤}$ فى مفكوك $(١ + \text{س} + \text{س}^{٢})^{٦}$

الحـــل:

$\because (١ + \text{س} + \text{س}^{٢})^{٦} = [١ + \text{س}(١ + \text{س})]^{٦}$

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{6}ق$_{ر}$ × [س (1 + س)]^{ر}

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{6}ق$_{ر}$ × س^{ر} × (1 + س)^{ر} حيث ر ≥ 6

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{6}ق$_{ر}$ × س^{ر} × ^{ر}ق$_{م}$ × س^{م} حيث م ≥ ر

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{6}ق$_{ر}$ × ^{ر}ق$_{م}$ × س$^{ر+م}$

لإيجاد معامل س^{4}

نضع ر + م = 4 حيث م ≥ ر ≥ 6 فتكون قيم ر، م هى:

ر	2	3	4
م	2	1	0

$\therefore$ معامل س^{4} = ^{6}ق$_{2}$ × ^{2}ق$_{2}$ + ^{6}ق$_{3}$ × ^{3}ق$_{1}$ + ^{6}ق$_{4}$ × ^{4}ق$_{0}$ = 15 + 60 + 15 = 90

مثـــال: أوجد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{4}$ فى مفكوك $\left(\frac{2س}{ص} + \frac{ص}{2س}\right)^{10}$

الحـــل:

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ × (الحـد الثـانى)^{ر} × (الحـد الأول)$^{ن-ر}$

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{10}ق$_{ر}$ × $\left(\frac{ص}{2س}\right)^{ر}$ × $\left(\frac{2س}{ص}\right)^{10-ر}$

= ^{10}ق$_{ر}$ × $\left(\frac{1}{2}\right)^{ر}$ × $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-ر}$ × $2^{10-ر}$ × $\left(\frac{س}{ص}\right)^{10-ر}$

$\boxed{\therefore \text{ح}_{ر+1} = {}^{10}\text{ق}_{ر} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{ر} \times 2^{10-ر} \times \left(\frac{س}{ص}\right)^{10-2ر}}$

ح$_{ر+1}$ يشتمل على $\left(\frac{س}{ص}\right)^{4}$ إذا كان 10 − 2ر = 4 ⟸ $\therefore$ 2ر = 6 ⟸ $\therefore$ ر = 3

$\therefore$ الحد المشتمل على $\left(\frac{س}{ص}\right)^{4}$ هو ح$_{4}$ $\therefore$ معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{4}$ = ^{10}ق$_{3}$ × $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ × 2^{7} = 1920

مثـــال: أوجد عدد الحدود التى قيمها أعداد صحيحة فى مفكوك $\left(\sqrt[4]{5} + \sqrt{3}\right)^{124}$

الحـــل:

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ × (الحـد الثـانى)^{ر} × (الحـد الأول)$^{ن-ر}$

$\therefore$ ح$_{ر+1}$ = ^{124}ق$_{ر}$ × $(\sqrt{3})^{ر}$ × $(\sqrt[4]{5})^{124-ر}$

ولكى يكون $ح_{ر+1}$ عدد صحيح يجب أن يكون ١٢٤ − ر مضاعفا للعدد ٤ (دليل الجذر)

اى تكون القيم هى (٠، ٤، ٨، ١٢، ٠٠٠٠٠٠٠٠٠، ١٢٤)

وهى متتابعة حسابية حدها الأول أ = ٠ وأساسها ء = ٤ وحدها الأخير ل = ١٢٤

$\because$ ل = أ + (ن − ١)ء $\Leftarrow$ $\therefore$ ١٢٤ = ٠ + (ن − ١) × ٤

$\therefore$ ١٢٤ = ٤ن − ٤ $\Leftarrow$ $\therefore$ ٤ن = ١٢٨ $\Leftarrow$ $\therefore$ ن = $\frac{١٢٨}{٤}$ = ٣٢

$\therefore$ عدد الحدود التى قيمها أعداد صحيحة فى المفكوك = ٣٢ حدا

مثـــال: أوجد الحد الخالى من س فى حاصل الضرب $(س + ١)^{٢}(س - \frac{١}{س})^{١٠}$

الحـــل:

نفرض أن الحد العام للقوس الأول هو $ح_{ر+١}$

$\therefore$ $ح_{ر+١} = {}^{٢}ق_{ر} \times س^{ر}$ حيث $ر \leq ٢$

ونفرض أن الحد العام للقوس الثانى هو $ح_{ن+١}$

$\therefore$ $ح_{ن+١} = {}^{١٠}ق_{ن} \times (\frac{-١}{س})^{ن} \times س^{١٠-ن} = {}^{١٠}ق_{ن} \times (-١)^{ن} \times س^{١٠-٢ن}$ حيث $ن \leq ١٠$

$\therefore$ $ح_{ر+١} \times ح_{ن+١} = {}^{٢}ق_{ر} \times س^{ر} \times {}^{١٠}ق_{ن} \times (-١)^{ن} \times س^{١٠-٢ن}$

$= {}^{٢}ق_{ر} \times {}^{١٠}ق_{ن} \times (-١)^{ن} \times س^{١٠-٢ن+ر}$

$\therefore$ $ح_{ر+١} \times ح_{ن+١}$ يكون خال من س إذا كان: $١٠ - ٢ن + ر = ٠$

$\therefore$ $٢ن - ر = ١٠$ ، $\because$ $ر \leq ٢$ ، $ن \leq ١٠$

$\therefore$ نعوض عن ر بالقيم ٢، ١، ٠ ونحسب قيم ن المناظرة $\therefore$ قيم ر، ن هى:

ر	٢	١	٠
ن	٤	مرفوض	٥

$\therefore$ الحد الخالى من س $= {}^{٢}ق_{٢} \times {}^{١٠}ق_{٤} \times (-١)^{٤} + {}^{٢}ق_{٠} \times {}^{١٠}ق_{٥} \times (-١)^{٥}$

$= ٢١٠ - ٢٥٢ = -٤٢$

مثـــال: أوجد معامل $س^{٦}$ فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٩}(س - \frac{١}{س})^{٩}$

الحـــل:

يمكن تحويل هذين القوسين الى قوس واحد كمايلى:

$$(س + \frac{١}{س})^{٩}(س - \frac{١}{س})^{٩} = \left((س + \frac{١}{س})(س - \frac{١}{س})\right)^{٩} = \left(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$$

نفرض أن الحد العام $ح_{ر+١}$ يشتمل على $س^{٦}$

$$\because ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \times \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{٩-ر} = {}^{٩}ق_{ر} \times س^{-٢ر} \times س^{١٨-٢ر}$$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \times س^{١٨-٤ر}}$$

$ح_{ر+١}$ يشتمل على $س^{٦}$ إذا كان $١٨ - ٤ر = ٦ \Leftarrow \therefore ٤ر = ١٢ \Leftarrow \therefore ر = ٣$

$\therefore$ الحد الذى يشتمل على $س^{٦}$ هو $ح_{٤}$ $\therefore$ معامل $س^{٦}$ = معامل $ح_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} = ٨٤$

مثـــال: فى مفكوك $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد قيم ك التى تجعل للمفكوك حدا خاليا من س

الحـــل:

$$\because ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \times (س^{ك})^{٨-ر} = {}^{٨}ق_{ر} \times س^{-ر} \times س^{٨ك-كر}$$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \times س^{٨ك-كر-ر}}$$

$ح_{ر+١}$ يكون خالى من س إذا كان :

$$٨ك - كر - ر = ٠ \Leftarrow \therefore ك(٨-ر) = ر \Leftarrow \therefore ك = \frac{ر}{٨-ر}$$

$$\because ك \in ص^{+} \quad \therefore ر \geq ٨ - ر \Leftarrow \therefore ٢ر \geq ٨ \Leftarrow \therefore ر \geq ٤$$

$$، \therefore ٨ - ر > ٠ \Leftarrow \therefore -ر > -٨ \Leftarrow \therefore ر < ٨$$

$\therefore$ قيم ر هى : $\{٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ $\therefore$ قيم ك هى : $\{١ ، ٣ ، ٧\}$

١ - ٤ النسبة بين حدين متتالين من مفكوك ذات الحدين

لأى حدين متتالين $ح_ر$ ، $ح_{ر+1}$ فى مفكوك $(س + أ)^ن$ يكون:

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{أ}{س}$$ أى أن:

$$\boxed{\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}}$$

ملاحظات هامة:

١) النسبة بين معاملى $ح_ر$ ، $ح_{ر+1}$ هى نفس القانون مع استخدام المعاملات بدلا من الحدود

أى أن

$$\boxed{\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}}$$

٢) اذا كان الحدان غير متتالين نستخدم قاعدة التسلسل

٣) عند استخدام القانون نعوض عن الحدود أومعاملاتها بنفس اشارتها

٤) لاحظ أن قيمة ر هى القيمة الأصغر بينما فى التوافيق تكون ر القيمة الأكبر

مثـــال: من مفكوك $\left(س^2 + \frac{2}{س}\right)^8$

أولا: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس ، وإذا كانت هذه النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة س

ثانيا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خال من س

الحـــل:

اولا: $\because \frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$

$\therefore \frac{ح_6}{ح_5} = \frac{8 - 5 + 1}{5} \times \frac{\frac{2}{س}}{س^2}$ ← $\therefore \frac{ح_6}{ح_5} = \frac{8}{5س^3}$ ← $\therefore \frac{ح_5}{ح_6} = \frac{5س^3}{8}$

$\therefore \frac{5س^3}{8} = \frac{8}{25} \leftarrow \therefore س^3 = \frac{64}{125} \leftarrow \therefore س = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$

ثانيا: $\because ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{8}ق_{ر} \times \left(\frac{2}{س}\right)^{ر} \times (س^2)^{8-ر}$

$= {}^{8}ق_{ر} \times 2^{ر} \times س^{-ر} \times س^{16-2ر}$

$$\boxed{\therefore ح_{ر+1} = {}^{8}ق_{ر} \times 2^{ر} \times س^{16-3ر}}$$

$ح_{ر+1}$ يكون خال من س إذا كان $16 - 3ر = 0 \Leftarrow \therefore 3ر = 16$

$\therefore ر = \frac{16}{3} \notin ط$ $\therefore$ المفكوك لايحتوى على حد خال من س

مثال:

من مفكوك $\left(\sqrt{س} + \frac{1}{س}\right)^8$ إذا كان $ح_4 ، ح_5 ، 25ح_7 ، ح_6$ متناسبة أوجد قيمة س

الحل:

$\because ح_4 ، ح_5 ، 25ح_7 ، ح_6$ متناسبة

$\therefore \frac{ح_4}{ح_5} = \frac{25ح_7}{ح_6}$ ، $\because \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$

$\therefore \frac{4}{8-4+1} \times \frac{\sqrt{س}}{\frac{1}{س}} = 25 \times \frac{8-6+1}{6} \times \frac{\frac{1}{س}}{\sqrt{س}}$

$\therefore \frac{4س\sqrt{س}}{5} = \frac{25}{2س\sqrt{س}} \leftarrow \therefore 8س^3 = 125$

$\therefore س^3 = \frac{125}{8} \leftarrow \therefore س = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} \leftarrow \boxed{\therefore س = \frac{5}{2}}$

مثال:

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(2س + 3)^{17}$ متساويان ، فماقيمة س ؟

الحل:

$\because$ ن = ١٧ فردية $\therefore$ رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{١٧+١}{٢} = ٩$

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما $ح_{٩}$ ، $ح_{١٠}$

$$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$$

$$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{١٧ - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢س}$$ ، $\because$ الحدان الأوسطان متساويان

$$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = ١ \Leftarrow \therefore ١ = \frac{٣}{٢س} \Leftarrow \boxed{\therefore س = \frac{٣}{٢}}$$

مثـــال:

إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هى ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ على الترتيب أوجد قيم كل من: س ، ص ، ن ؟

الحـــل:

$$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$$

$$\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} \leftarrow \therefore \frac{٤٤٨}{١١٢} = \frac{ن - ٢}{٣} \times \frac{ص}{س}$$

$$\therefore \frac{٤}{١} = \frac{ن - ٢}{٣} \times \frac{ص}{س} \leftarrow \therefore ١٢س = (ن - ٢)ص \quad (١)$$

$$\therefore \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{س} \leftarrow \therefore \frac{١١٢٠}{٤٤٨} = \frac{ن - ٣}{٤} \times \frac{ص}{س}$$

$$\therefore \frac{٥}{٢} = \frac{ن - ٣}{٤} \times \frac{ص}{س} \leftarrow \therefore ١٠س = (ن - ٣)ص \quad (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) $\therefore \frac{١٢}{١٠} = \frac{ن - ٢}{ن - ٣} \Leftarrow \therefore ٦ن - ١٨ = ٥ن - ١٠ \Leftarrow \boxed{\therefore ن = ٨}$

بالتعويض فى (١) او فى (٢) $\therefore ١٠س = ٥ص \Leftarrow \therefore ص = ٢س \quad (٣)$

$$\because ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$$

$\therefore ح_{٣} = {}^{٨}ق_{٢} \times ص^{٢} \times س^{٦} \Leftarrow \therefore ١١٢ = ٢٨ ص^{٢} س^{٤}$ بالتعويض من (٣) عن ص

$\therefore 112 = 28 \times 4 س^2 \times س^6 \Leftarrow \therefore س^8 = \frac{112}{112} = 1 \Leftarrow$ $\boxed{\therefore س = \pm 1}$

بالتعويض فى (٣) $\therefore ص = 2 \times (\pm 1) \Leftarrow$ $\boxed{\therefore ص = \pm 2}$

مثـــال:

إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(1 + س)^ن$ هى ١٥ ، ٢٤ ، ٢٨ حسب قوى س التصاعدية فما قيمة ن ورتب هذه الحدود؟

الحــــل:

نفرض أن الحدود هى $ح_ر ، ح_{ر+1} ، ح_{ر+2}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{1}{1}$ $\therefore \frac{24}{15} = \frac{ن - ر + 1}{ر}$

$\therefore 8ر = 5ن - 5ر + 5$ $\therefore 13ر = 5ن + 5 \quad (1)$

$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+2}}{\text{معامل } ح_{ر+1}} = \frac{ن - (ر+1) + 1}{ر + 1} \times \frac{1}{1}$ $\therefore \frac{28}{24} = \frac{ن - ر}{ر + 1}$

$\therefore 7ر + 7 = 6ن - 6ر$ $\therefore 13ر = 6ن - 7 \quad (2)$

من (١) ، (٢) $\therefore 6ن - 7 = 5ن + 5$ $\therefore 6ن - 5ن = 5 + 7$ $\boxed{\therefore ن = 12}$

بالتعويض فى (١) $\therefore 13ر = 5 \times 12 + 5$ $\therefore 13ر = 65$

$\therefore ر = \frac{65}{13} = 5$ $\therefore$ الحدود هى $ح_5 ، ح_6 ، ح_7$

مثـــال:

فى مفكوك $(1 + 2س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين $ح_8 ، ح_{10}$ هى ١ : ٢٨ عندما س = ٣ ، فماقيمة ن ؟

الحــــل:

$\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الحـد الثـانى}}{\text{الحـد الأول}}$

∵ الحدان غير متتالين ∴ نستخدم قاعدة التسلسل

∴ $\frac{\text{ع}_{١٠}}{\text{ع}_{٨}} = \frac{\text{ع}_{١٠}}{\text{ع}_{٩}} \times \frac{\text{ع}_{٩}}{\text{ع}_{٨}}$ ← ∴ $\frac{٢٨}{١} = \frac{\text{ن}-٩+١}{٩} \times \frac{٢\text{س}}{١} \times \frac{\text{ن}-٨+١}{٨} \times \frac{٢\text{س}}{١}$

∴ $\frac{٢٨}{١} = \frac{(\text{ن}-٨)(\text{ن}-٧)}{٩\times٢}\text{س}^{٢}$ وبالتعويض عن $\text{س} = ٣$

∴ $\frac{٢٨}{١} = \frac{(\text{ن}-٨)(\text{ن}-٧)}{٩\times٢}\times٩$ ← ∴ $(\text{ن}-٧)(\text{ن}-٨) = ٥٦$

∴ $(\text{ن}-٧)(\text{ن}-٨) = ٨\times٧$ ← ∴ $\text{ن}-٧ = ٨$ ← $\boxed{\therefore \text{ن} = ١٥}$

مثـــال:

إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(\text{س} + \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}})^{٢٧}$ كنسبة $١٥ : ٦ : ٢$ حيث $\text{ك} \in \text{ص}^{+}$ فأوجد رتب هذه الحدود.

الحـــل:

نفرض أن الحدود هى $\text{ع}_{\text{ر}}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}+٢}$

∵ $\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}$

∴ $\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{٢٧-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{ك}}{١}$ ∴ $\frac{٦}{١٥} = \frac{٢٨-\text{ر}}{\text{ر}} \times \text{ك}$

∴ $٥\text{ك}(٢٨-\text{ر}) = ٢\text{ر}$ (١)

∴ $\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+٢}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}} = \frac{٢٧-(\text{ر}+١)+١}{\text{ر}+١} \times \frac{\text{ك}}{١}$ ∴ $\frac{٢}{٦} = \frac{٢٧-\text{ر}}{\text{ر}+١} \times \text{ك}$

∴ $٣\text{ك}(٢٧-\text{ر}) = \text{ر}+١$ (٢)

بقسمة (١) على (٢)

∴ $\frac{٥(٢٨-\text{ر})}{٣(٢٧-\text{ر})} = \frac{٢\text{ر}}{\text{ر}+١}$ ∴ $٥(٢٨-\text{ر})(\text{ر}+١) = ٦\text{ر}(٢٧-\text{ر})$

∴ $١٤٠ + ١٣٥\text{ر} - ٥\text{ر}^{٢} - ١٦٢\text{ر} + ٦\text{ر}^{٢} = ٠$

∴ $\text{ر}^{٢} - ٢٧\text{ر} + ١٤٠ = ٠$ ∴ $(\text{ر}-٧)(\text{ر}-٢٠) = ٠$

∴ $\text{ر} = ٧$ بالتعويض فى (١) ∴ $٥\text{ك}\times٢١ = ١٤$ ∴ $\text{ك} = \frac{١٤}{١٠٥} = \frac{٢}{١٥} \notin \text{ص}^{+}$

أو $ر = ٢٠$ بالتعويض فى (١) ∴ $٥ك \times ٨ = ٤٠$ ∴ $ك = ١ \in ص^{+}$

∴ الحدود هى $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$ ، $ح_{٢٢}$

مثــــال:

فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{أس}\right)^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{١٠}$

أوجد قيمة أ

الحـــل:

∵ ن زوجية ∴ يوجد حد اوسط واحد رتبته $= \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$ ∴ الحد الأوسط هو $ح_{٥}$

∵ $\text{معامل } ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{معامل الحد الثانى})^{ر} \times (\text{معامل الحد الأول})^{ن-ر}$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل $ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} \times \left(\frac{١}{أ}\right)^{٤} \times ١^{٤} = \frac{٧٠}{أ^{٤}}$ (١)

∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى})^{ر} \times (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

∴ $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{أس}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{٨-ر} = {}^{٨}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{أ}\right)^{ر} \times س^{-ر} \times س^{١٦-٢ر}$

$$\boxed{∴ ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{أ}\right)^{ر} \times س^{١٦-٣ر}}$$

$ح_{ر+١}$ يشتمل على $س^{١٠}$ إذا كان $١٦ - ٣ر = ١٠$ ⇐ ∴ $٣ر = ٦$ ⇐ ∴ $ر = ٢$

∴ الحد الذى يشتمل على $س^{١٠}$ هو $ح_{٣}$

∴ معامل $س^{١٠}$ = معامل $ح_{٣} = {}^{٨}ق_{٢} \times \left(\frac{١}{أ}\right)^{٢} = \frac{٢٨}{أ^{٢}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{٧٠}{أ^{٤}} = \frac{٢٨}{أ^{٢}}$ ∴ $أ^{٢} = \frac{٧٠}{٢٨} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $أ = \pm\sqrt{\frac{٥}{٢}} = \pm\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

إيجاد أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين:

لإيجاد أكبر حد فى مفكوك $(\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}$:

١) نوجد $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}}$ بدلالة ر

٢) نضع $\dfrac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} \geq ١$ ونحل هذه المتباينة لإيجاد قيم ر المناسبة ثم نوجد قيم الحدود

لاحظ أنه عند حل المتباينة السابقة ستتحول الى $\leq$ وهنا توجد حالتان:

- إذا كان حل المتباينة $\leq$ عدد صحيح م (مثلا) فإن $\text{ح}_{\text{م}}$ ، $\text{ح}_{\text{م}+١}$ يكون معاملاهما متساويان وكل منهما له اكبر معامل.
- إذا كان حل المتباينة $\leq$ عدد غير صحيح فنأخذ اكبر عدد صحيح ل (مثلا) يحقق المتباينة ويكون $\text{ح}_{\text{ل}+١}$ له اكبر معامل .

حالة خاصة: فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ نجد أن:

- إذا كانت ن زوجية فإن أكبر معامل يكون هو معامل الحد الأوسط
- إذا كانت ن فردية فإن أكبر معامل يكون هو معاملا الحدين الأوسطين

ملاحظة:

إذا كانت الإشارة بين الحدين سالبة ولإيجاد اكبر معامل عدديا نتعامل مع نفس القوس بإشارة موجبة

مثـــال: أوجد أكبر معامل فى مفكوك:

① $(١ + \text{س})^{٨}$ ② $(٣\text{س} + ٢\text{ص})^{١٠}$ ③ $(١ + \dfrac{١}{\text{س}})^{٩}$

الحـــل:

① $(١ + \text{س})^{٨}$ ∵ ن زوجية ∴ يوجد حد اوسط واحد رتبته $= \dfrac{٨}{٢} + ١ = ٥$

∴ اكبر معامل هو معامل الحد الأوسط = معامل $\text{ح}_{٥} = {}^{٨}\text{ق}_{٤}$

② $(٣\text{س} + ٢\text{ص})^{١٠}$

نضع $\dfrac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} \geq ١$ ، ∵ $\dfrac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}$

∴ $\dfrac{١٠ - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \dfrac{٢}{٣} \geq ١$ ∴ $\dfrac{٢٢ - ٢\text{ر}}{٣\text{ر}} \geq ١$ ∴ $٢٢ - ٢\text{ر} \geq ٣\text{ر}$

∴ $٥\text{ر} \leq ٢٢$ ∴ $\text{ر} \leq \dfrac{٢٢}{٥}$ ∴ $\text{ر} \leq ٤,٤$ ∴ $\text{ر} = ٤$

$\therefore$ $ع_{٤+١}$ أى $ع_٥$ هو الحد الذى له اكبر معامل فى المفكوك

$\therefore$ اكبر معامل فى المفكوك $= {}^{١٠}ق_٤ \times ٢^٤ \times ٣^٦ = ٢٤٤٩٤٤٠$

③ $(١ + \frac{١}{س})^٩$

نضع $\frac{معامل\ ع_{ر+١}}{معامل\ ع_ر} \geq ١$ ، $\therefore \frac{معامل\ ع_{ر+١}}{معامل\ ع_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{معامل\ الحد\ الثانى}{معامل\ الحد\ الأول}$

$\therefore \frac{٩ - ر + ١}{ر} \times \frac{١}{١} \geq ١$ $\qquad \therefore \frac{١٠ - ر}{ر} \geq ١$ $\qquad \therefore ١٠ - ر \geq ر$

$\therefore ٢ر \leq ١٠$ $\therefore ر \leq \frac{١٠}{٢}$ $\therefore ر \leq ٥$ (عدد صحيح) $\quad \therefore ع_ر$ ، $ع_{ر+١}$ معاملهما متساويان

$\therefore$ $ع_٥$ ، $ع_٦$ هما الحدان اللذان لهما اكبر معامل ومعاملاهما متساويان

$\because ع_٥ = {}^٩ق_٤ \times (\frac{١}{س})^٤$ $\qquad \therefore$ اكبر معامل $= {}^٩ق_٤ = ١٢٦$

مثـــال: أوجد عدديا قيمة أكبر حد فى مفكوك $(٣ - ٥س)^{١٥}$ عندما $س = \frac{١}{٥}$

الحـــل:

قيمة أكبر حد عدديا فى مفكوك $(٣ - ٥س)^{١٥}$ = قيمة أكبر حد فى مفكوك $(٣ + ٥س)^{١٥}$

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{الحد\ الثانى}{الحد\ الأول}$

$\therefore \frac{ع_{ر+١}}{ع_ر} = \frac{١٥ - ر + ١}{ر} \times \frac{٥س}{٣}$ وعندما $س = \frac{١}{٥}$

$\therefore \frac{ع_{ر+١}}{ع_ر} = \frac{١٦ - ر}{٣ر}$ $\qquad \therefore \frac{١٦ - ر}{٣ر} \geq ١$ $\qquad \therefore ١٦ - ر \geq ٣ر$

$\therefore ٤ر \leq ١٦$ $\therefore ر \leq \frac{١٦}{٤}$ $\therefore ر \leq ٤$ (عدد صحيح) $\quad \therefore ع_ر$ ، $ع_{ر+١}$ معاملهما متساويان

$\therefore$ $ع_٤$ ، $ع_٥$ هما اكبر حدان ومعاملاهما متساويان

$\because ع_٤ = {}^{١٥}ق_٣ \times (٥س)^٣ \times ٣^{١٢}$ $\qquad$ وعند $س = \frac{١}{٥}$ $\qquad \therefore$ اكبر حد $= {}^{١٥}ق_٣ \times ٣^{١٢}$