سلسلة كتب

# الإمتيــاز

فى

# مراجعة ليلة إمتحان

## الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوى

إعداد


الأستاذ / علىّ الدين يحيى

خبير الرياضيات ٠١١١٩٦٦٠٦١٦

## قوانين التباديل

( ١ ) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)......(ن-ر+١)$

حيث عدد العوامل = ر ≤ ن وكلاهما عدد صحيح ( ويفضل استخدام هذا القانون عندما تكون ر معلومة )

( ٢ ) $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣).....×٣×٢×١$ عدد العوامل = ن ، والعامل الأخير = ١

( ٣ ) $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-١} = ن(ن-١)\,\underline{|ن-٢}$ ( ويستخدم هذا القانون عند اختصار المضروبات )

( ٤ ) $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ ( ويفضل استخدامه عندما تكون ر مجهولة )

( ٥ ) $^{ن}ل_{٠} = \underline{|٠} = ١$

## قوانين التوافيق

( ١ ) $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)......(ن-ر+١)}{ر(ر-١)(ر-٢)......×٣×٢×١}$

حيث عدد عوامل البسط = عدد عوامل المقام = ر عدد صحيح ≤ ن

( ٢ ) $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}\;\underline{|ن-ر}}$ ويستخدم إذا كانت ر كبيرة أو مجهولة

( ٣ ) قانون التبسيط : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ ويستخدم إذا كان $ر > \frac{١}{٢}ن$

( ٤ ) إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإما $ر = هـ$ أ، $ر + هـ = ن$

( ٥ ) قانون النسبة : $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ بشرط تساوى العلمين بسطاً ومقاماً ، والفرق بين الدليلين = ١

( ٦ ) $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

## تمارين للمراجعة على التباديل والتوافيق

(١) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٢٠$ فما قيمة كل من ر ، ن ؟ [ ٣ ، ٦ ]

(٢) إذا كان $^{م+ن}ق_{٣} = ٥٦$ ، $^{م}ق_{٢} = ٣$ أوجد قيمة $\underline{|ن+م}$ [٤٠٣٢٠]

(٣) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣}\,٣٠\,ن$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{١٠}$ [ ٣٠٠٣ ]

(٤) إذا كان $^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ وكان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد : $^{ن}ق_{٧ر+٣}$ [١]

(٥) إذا كان $^{ن}ل_{٢} = ٥٦$ ، $^{١٢}ل_{ر} = ١٣٢٠$ فأوجد قيمة $^{ن}ق_{٢ر}$ [ ٢٨ ]

(٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ٢ : ٤ : ٥$ فأوجد قيمة كل من ن ، ر [٨ ، ٢]

(٧) أثبت أن : $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

(٨) إذا كان : $٤ \times {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن}ق_{ر}$ وكان $\underline{|ن-٣} = ١٢٠$ فأوجد قيمة ${}^{ن}ل_{ر}$ : ${}^{ن}ق_{ر}$ [ ٦ ]

(٩) إذا كان : ${}^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة : ${}^{ص}ق_{س}$ [ ١٠ ]

(١٠) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠ \, {}^{ن}ق_{ر}$ فأوجد قيمة ر وأقل قيمة للعدد ن تجعل العلاقة صحيحة . [ ٦ ، ٦ ]

(١١) إذا كان : ${}^{ن+١}ل_{ر+١} = ٧ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ، $٤ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٣ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ فأوجد قيمة $\underline{|ن-ر-٢}$ [ ١ ]

---

## أفكار حل التمارين

(١) من التوفيقة نعرف قيمة ر ، ثم نعوض فى التباديل ونعرف قيمة ن

(٢) من التوفيقة الثانية نعرف قيمة م ، ثم نعوض فى التوفيقة الأولى نعرف قيمة ن

(٣) نحوّل التوفيقة لتبديلة ونفكها ينتج لنا ن = ١٥

(٤) من التوفيقة الثانية نعرف قيمة ن = ١٠ ، ثم من العلاقة الأولى وباستخدام قانون التبسيط ينتج ر = ١

(٥) من التبديلة الأولى ينتج ن = ٨ ، ومن التبديلة الثانية ينتج ر = ٣

(٦) نستخدم قانون النسبة : الثانية : الأولى = ٤ : ٢ ، الثالثة : الثانية = ٥ : ٤

(٨) من المضروب ينتج قيمة ن = ٨ ، ونعوض فى العلاقة الأولى ونفكها باستخدام المضروبات ينتج ر = ٣

(٩) من العلاقة الأولى ينتج س + ص = ٦ ، ومن العلاقة الثانية ينتج ٢ س + ص = ٧ وبحلهم معاً ينتج س = ١ ، ص = ٥

(١٠) $\underline{|ر} = ٧٢٠$ ومنها ر = ٦ وأقل قيمة لـ ن = ر = ٦

(١١) من العلاقة الأولى ينتج ن = ٦ ، ومن العلاقة الثانية بقانون النسبة ينتج ر = ٤

---

# نظرية ذات الحدين

إذا كان م ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(م + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, م^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, ب^{١} م^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢} م^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{٣}\, ب^{٣} م^{ن-٣} + \ldots\ldots + {}^{ن}ق_{ن}\, ب^{ن}$$

**ملاحظة :**

إذا كانت الإشارة الوسطية بين الحدين سالبة فإن حدود المفكوك تتبادل الإشارة ( + ، - ) بحيث نبدأ بالإشارة الموجبة .

**حالة خاصة :**

إذا كانت س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س^{١} + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \ldots\ldots + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر} + \ldots\ldots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$$

$$(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\, س^{١} + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} - \ldots\ldots \pm {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر} \pm \ldots\ldots \pm {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$$

**ملاحظة :**

$(م + ب)^{ن} + (م - ب)^{ن}$ = ضعف الحدود الفردية الرتبة فى المفكوك الأول = $٢ [ ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \ldots\ldots ]$

، $(م + ب)^{ن} - (م - ب)^{ن}$ = ضعف الحدود الزوجية الرتبة = $٢ [ ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \ldots\ldots ]$

## الحد العام فى مفكوك $(ﺃ + ب)^{ن}$

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ ب^{ر}\ ﺃ^{ن-ر}$$

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{(\text{رتبة الحد} - ١)} \times ب^{(\text{رتبة الحد} - ١)} \times ﺃ^{\text{الفرق (العلم − الدليل)}}$$

## الحد الأوسط ( أو الحدين الأوسطين ) فى مفكوك ذات الحدين

( أولاً ) إذا كانت ن زوجية : عدد حدود المفكوك = ن + ١ فردياً ويكون للمفكوك حد أوسط واحد رتبته $(\frac{ن}{٢} + ١)$

( ثانياً) إذا كانت ن فردية :

عدد حدود المفكوك = ن + ١ زوجياً ويكون للمفكوك حدان أوسطان رتبتاهما هما على الترتيب $\frac{ن+١}{٢}$ ، وما يليه .

## النسبة بين حدين متتاليين فى مفكوك $(س + ﺃ)^{ن}$

إذا كان $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ حدين متتاليين فى مفكوك $(س + ﺃ)^{ن}$ فإن :

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$$

تذكر أن ( ر ) هنا هى الدليل الأصغر ، بينما فى التوافيق تكون ( ر ) هى الأكبر .

ملاحظة هامة : $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الأول}}$

---

## تمارين للمراجعة على نظرية ذات الحدين

(١) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\frac{٣س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$

(٢) فى مفكوك $\left(س^{٤} + \frac{١}{س}\right)^{٣ن}$ أثبت أن الحد الخالى من س يساوى معامل الحد الذى يحتوى $س^{٣ن}$ .

(٣) فى مفكوك $\left(س^{٣} + \frac{٥}{س}\right)^{٨}$ أوجد الحد الخالى من س وقيمة الحد الأوسط .

(٤) إذا كان الحد الرابع من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى $\frac{٢٥}{٣}$ من المرات قدر الحد الثانى ، والحد الخامس يساوى الحد السادس . أوجد قيم كل من ن ، س .

(٥) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $\left(٢س^{٢} + \frac{١}{٢}\right)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساوياً الحد السادس .

(٦) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع فى مفكوك $\left(\frac{٢}{٣} + س\right)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى $\frac{٩}{٤}$ . أوجد قيمة ن .

(٧) فى مفكوك $(١ + ٢س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين الثامن والعاشر كنسبة ١ : ٢٨ عندما س = ٣ أحسب قيمة ن .

(٨) إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع فى مفكوك $(س + ﺃ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هى ١٦ ، ١١٢ ، ٤٤٨ . أوجد قيم س ، ﺃ ، ن

(٩) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ ضعف الحد السابع فما قيمة س ؟

(١٠) إذا كان فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{ن}$ حد خالى من س فأثبت أن ن يجب أن تكون مضاعفاً للعدد ٣ . ثم أوجد الحد الخالى من س عندما ن = ١٢

(١١) أوجد كلا من الحد الأوسط والحد الذى يحتوى على $س^{-٣}$ فى مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^٢})^{١٢}$ . وإذا كانت النسبة بين هذين الحدين تساوى ٧ : ٩ فما قيمة س ؟

(١٢) أوجد الحد الرابع من البداية والحد الرابع من النهاية فى مفكوك $(س + ص)^{١٠}$

(١٣) إذا كان الحد السادس فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ يساوى الحد السابع فى المفكوك نفسه عندما $س = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة ن

(١٤) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٢})^٧$ مساوياً الحد السادس .

(١٥) إذا كان معامل الحد الرابع فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هو ٣٥ فأوجد قيمة ن .

(١٦) إذا كان ضعف معامل الحد الحادى عشر فى مفكوك $(١ - س)^{ن}$ يساوى ٣ أمثال معامل الحد العاشر فى مفكوك $(١ + ص)^{ن - ١}$ فما قيمة ن ؟

---

## أفكار حل التمارين

(١) بوضع ١٨ − ٣ر = ٠ ⇐ ر = ٦ ومنها الحد الخالى من س هو $ح_٧ = -\frac{٧}{٨١}$

(٢) بعد إيجاد الحد العام فى أبسط صورة نجد أن س مرفوعة للأُس ( ٦ن − ٣ر ) نقوم بمساواته مرة بالصفر ومرة أخرى بـ ٣ن فنجد أن النواتج متساوية .

(٣) نوجد الحد العام فى أبسط صورة ونساوى الأُس بالصفر ينتج الحد الخالى من س = ٤٣٧٥٠٠ ، الحد الأوسط هو الحد السادس وقيمته = $١٧٥٠٠٠ س^٤$

(٤) من العلاقة الأولى نصل إلى $(ن - ١)(ن - ٢) س^٢ = ٥٠$ ومن العلاقة الثانية نصل إلى س = ٥ / ( ن − ٤ )
عوض من الثانية فى الأولى ينتج ن = ١٠ أ، ن = ٣ ثم عوض فى العلاقة الثانية ينتج $س = \frac{٥}{٦}$ أ، س = − ٥

(٥) من تساوى قيمتى الحدين والاختصار نجد أن قيمة $س = ± \frac{١}{٢}$

(٦) معامل الحد السادس / معامل الحد الخامس × معامل الحد الخامس / معامل الحد الرابع = $\frac{٩}{٤}$ ومنها ن = ٨

(٧) بالتعويض فى العلاقة المعطاة ينتج ن = ١٥

(٨) $ح_٣ / ح_٢ = ١١٢ / ١٦$ ومنها ( ن − ١ ) / ٢ × أ / س = ٧ .......... (١) ، $ح_٤ / ح_٣ = ٤٤٨ / ١١٢$ ومنها ( ن − ٢ ) / ٣ × أ / س = ٤ ............ (٢) وبقسمة (١) على (٢) نحصل على ن = ٨ ، عوض فى (١) ينتج أ = ٢س ......... (٣) ومن $ح_٢ = ١٦$ نحصل على $أ س^٧ = ٢$ ............ (٤) وبالتعويض من (٣) فى (٤) ينتج س = ١ ، أ = ٢

(٩) $ح_٦ = ٢ ح_٧ ⇐ ح_٧ / ح_٦ = \frac{١}{٢}$ ومنها $س = \frac{٣}{٥}$

(١٠) نوجد الحد العام ونساوى الأُس بالصفر ينتج ر = ٢ن / ٣ وحيث أن ر عدد صحيح فلابد أن ٢ن تقبل القسمة على ٣ أى أن ن مضاعف للعدد ٣ ، الحد الخالى من س = $ح_٩ = ٤٩٥$

(١١) رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢}{٢}$ + ١ = ٧ ⇐ $ح_٧$ = ٩٢٤ $س^{-٦}$ ، الحد المحتوى على س − ٣ هو $ح_٦$ = ٣٥٢ $س^{-٣}$

ومن قانون النسبة ينتج س = $\frac{٣}{٢}$

(١٢) $ح_٤$ من البداية = $^{١٠}ق_٣$ $ص^٣$ $س^٧$ وبتبديل الحدين يكون $ح_٤$ من النهاية = $^{١٠}ق_٣$ $س^٣$ $ص^٧$

(١٣) $^نق_٥$ $س^٥$ = $^نق_٦$ $س^٦$ ⇐ $^نق_٥$ = $^نق_٦$ × $\frac{٢}{٣}$ ومنها ن = ١٤

(١٤) من العلاقة المعطاة ينتج أن س = ± $\frac{١}{٢}$

(١٥) س = ١

(١٦) ٢ × $^نق_{١٠}$ = ٣ × $^{ن-١}ق_٩$ ومنها ن = ١٥

# الأعداد المركبة

خواص العدد ت :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ت = $\sqrt{-١}$ | $ت^٢$ = −١ | $ت^٣$ = −ت | $ت^٤$ = ١ |

ولكل ن ∈ $ص^+$ فإن :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $ت^{٤ن}$ = ١ | $ت^{٤ن+١}$ = ت | $ت^{٤ن+٢}$ = −١ | $ت^{٤ن+٣}$ = −ت |

مرافق العدد المركب ع = س + ت ص هو العدد $\overline{ع}$ = س − ت ص

- حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين = مجموع مربعين
- إذا كان $(أ + ب ت)^٣$ = س + ص ت فإن $(أ − ب ت)^٣$ = س − ص ت

خواص تساوى عددين مركبين :

(١) إذا تساوى عددان مركبان فإن :

الجزء الحقيقى للعدد الأول = الجزء الحقيقى للعدد الثانى

، الجزء التخيلى للعدد الأول = الجزء التخيلى للعدد الثانى

فمثلاً : إذا كان : س + ٤ت = ٢ − ت ص فإن س = ٢ ، ص = −٤

(٢) إذا انعدم عدد مركب فإن كلاً من جزئه الحقيقى وجزئه التخيلى ينعدم على حدة .

المقياس والسعة لعدد مركب

(أولاً) مقياس العدد المركب ع = | ع | = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

(ثانياً) سعة العدد المركب ع : هو قياس الزاوية θ التى يصنعها ع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات $\overleftarrow{وس}$ ( زاوية قطبية )

ونحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية θ تبعاً لإشارتى س ، ص ويكون ظا θ = $\frac{ص}{س}$

ويقال للعدد θ الدال على سعة العدد المركب ع إنه قيمة السعة الأساسية إذا كان θ ∈ [ ٠ ، ٢ط [ .

فمثلاً : لإيجاد السعة الأساسية للعدد ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت

س = ١ > ٠ ، ص = −$\sqrt{٣}$ < ٠ ∴ θ ∈ الربع الرابع ويكون ظاهـ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠° ∴ θ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

## الصورة المثلثية والصورة الأسية للعدد المركب

الصورة المثلثية للعدد المركب ع = س + ت ص هى ع = ل ( جتا θ + ت جا θ ) = ل $\text{هـ}^{\text{ت}\,\theta}$ = الصورة الأُسية

**ملاحظات هامة :**

(١) إذا طلب منك إيجاد السعة الأساسية لعدد مركب من صورته المثلثية يجب أن تضع العدد على الصورة ل ( جتا θ + ت جا θ ) فتكون السعة الأساسية هى θ

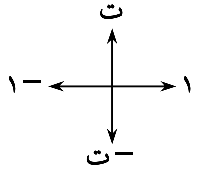
(٢) عند ضرب عددين مركبين على الصورة المثلثية نضرب مقياسيهما ونجمع سعاتهما

(٣) عند قسمة عددين مركبين على الصورة المثلثية نقسم مقياسيهما ونطرح سعاتهما

(٤) من المفيد معرفة الصورة المثلثية للأعداد المركبة الأربعة التالية :

١ = جتا ٠ + ت جا ٠ ، −١ = جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠ ،

ت = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ ، −ت = جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠ كما موضح بالشكل المقابل




(٥) $[\text{ل}(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)]^{\frac{1}{\text{ك}}} = \text{ل}^{\frac{1}{\text{ك}}}\left(\text{جتا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\text{ط}}{\text{ك}} + \text{ت جا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\text{ط}}{\text{ك}}\right)$ حيث ر = ٠، ١، ٢، إلى ك مرة

## تمارين للمراجعة على الأعداد المركبة

(١) إذا كان ل = $\frac{2 + \text{ت}}{1 + \text{ت}}$ ، م = $\frac{1 + 2\text{ت}}{1 + \text{ت}}$ برهن أن : ل ، م مترافقان ثم أوجد قيمة $\sqrt{\frac{2}{3}(13\,\text{ل} - 5\,\text{م})}$

(٢) ضع على الصورة الأسية : $\left(\frac{4}{\sqrt{3} + \text{ت}}\right)^2$

(٣) ضع المقدار ١ − $\sqrt{3}$ ت على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية .

(٤) ضع المقدار $\frac{2(5 - 3\sqrt{3}\,\text{ت})}{2\sqrt{3}\,\text{ت} + 1}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية .

(٥) إذا كانت س = ٢ ( جتا θ − ت جا θ ) ، ص = جا θ + ت جتا θ أوجد المقياس والسعة لكل من : س ص ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

(٦) حل المعادلة : $\text{س}^2 - \text{ت س} + 1 = 0$ حيث س عدد مركب .

(٧) ضع على الصورة الأسية ( جتا $\frac{\text{ط}}{6}$ − ت جا $\frac{\text{ط}}{6}$ ) ( جتا $\frac{\text{ط}}{4}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{4}$ )

(٨) إذا كان : س = $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ ، ص = $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ فأثبت أن $\text{س}^3 + \text{ص}^3 - 3\,\text{س ص} = -1$

(٩) إذا كانت س = جتا ١٠ + ت جا ١٠ ، ص = جتا ١٥ + ت جا ١٥ . أوجد على الصورة أ + ب ت العدد $\text{س}^3\,\text{ص}^2$

(١٠) أوجد قيمتى س ، ص الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة : $(\text{س} + \text{ص ت})^2 = 5 + 12\,\text{ت}$

(١١) أوجد قيمة كل من س ، ص التى تحقق المعادلة : $\frac{\text{س} + 2\text{ت ص}}{2 - \text{ت}} + \frac{3\text{س} + \text{ت ص}}{2 + \text{ت}} = \frac{21}{5}$

(١٢) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد : ٢ − ٢ $\sqrt{3}$ ت .

(١٣) ضع العدد $\sqrt{3}$ − ت على الصورة المثلثية ثم أثبت أن $(\sqrt{3} - \text{ت})^{12} = 2^{12}$

(١٤) ضع كلا من العددين : $\sqrt{2}$ ت ، ١ + ت على الصورة المثلثية ثم أوجد قيمة $\left(\frac{\sqrt{2}\,\text{ت}}{1 + \text{ت}}\right)^4$

(١٥) أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب ع = $\frac{\text{ع}_1\,\text{ع}_2}{\text{ع}_3}$ حيث $\text{ع}_1$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت ،

$ع_٢ = (جتا \frac{١}{٢} θ + ت جا \frac{١}{٢} θ)^٢$ ، $ع_٣ = (جتا θ - ت جا θ)$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة

الأسية عندما $θ = \frac{٥}{٦}$ ط

---

## أفكار حل التمارين

(١) ل = $\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}$ت ، م = $\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}$ت ⇐ ل ، م مترافقان ، بفرض المقدار = ع = $\sqrt{(٨ - ٦ ت) / ٣}$

= ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (٣ − ت)

(٢) ع = $\sqrt{٣}$ − ت وبالتربيع ع$^٢$ = ٢ − ٢$\sqrt{٣}$ ت ⇐ ع$^٢$ = ٤ هـ$^{\frac{٥}{٣} ط ت}$

(٣)

(٤) بعد التبسيط ع = ٢$\sqrt{٣}$ ت + ٢ = ٤ ( جتا ٦٠ + ت جا ٦٠ ) ،

$ع_١$ = ٢ ( جتا ٣٠ + ت جا ٣٠ ) ، $ع_٢$ = ٢ ( جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠ )

(٥) س = ٢ [ جتا ( − θ ) + ت جا ( − θ ) ] ، ص = جتا ( ٩٠ − θ ) + ت جا ( ٩٠ − θ )

س ص = ٢ [ جتا ( ٩٠ − ٢ θ ) + ت جا ( ٩٠ − ٢ θ ) ] ، $\frac{س}{ص}$ = ٢ ( جتا $\frac{٣}{٢}$ ط + ت جا $\frac{٣}{٢}$ ط )

(٦) باستخدام القانون العام : مجموعة الحل = $\frac{١}{٢}$ ( ١ ± $\sqrt{٥}$ ) ت

(٧) نضع العدد الأول فى الصورة القياسية فنجد أن θ = ٣٣٠ وعند ضرب العددين تكون السعة الأساسية = ٣٧٥ = ١٥

(٨) لاحظ أن س = ω ، ص = $ω^٢$ وبالتعويض ينتج المطلوب

(٩) س$^٣$ ص$^٢$ = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠ = $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت

(١٠) ع = $\sqrt{٩ + ١٢ ت + ٤ ت^٢}$ = $\sqrt{(٣ + ٢ ت)^٢}$ = ± ( ٣ + ٢ ت ) ومنها س = ± ٣ ، ص = ± ٢

(١١) بواسطة المقص المقفول نوحّد المقامات ونفك ونجمّع ثم نوجد معادلتين فى س ، ص وبحلهم ينتج س = ص = $\frac{٣}{٥}$

(١٢) نكمل المقدار ليكون مربع كامل = ٣ − ٢$\sqrt{٣}$ ت + ت$^٢$ ويكون الجذرين هما ± ($\sqrt{٣}$ − ت )

(١٣) ع = ٢ ( جتا $\frac{١١}{٦}$ ط + ت جا $\frac{١١}{٦}$ ط ) ⇐ ع$^{١٢}$ = ٢$^{١٢}$ ( جتا ٢٢ ط + ت جا ٢٢ ط ) = ٢$^{١٢}$ × ١ = ٢$^{١٢}$

(١٤) $ع_١$ = $\sqrt{٢}$ ( جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ ) ، $ع_٢$ = $\sqrt{٢}$ ( جتا ٤٥ + ت جا ٤٥ ) ، المطلوب = − ١

(١٥) $ع_١$ = ٢ ( جتا ٦٠ + ت جا ٦٠ ) ، $ع_٢$ = جتا θ + ت جا θ ، $ع_٣$ = جتا ( ٣٦٠ − θ ) + ت جا ( ٣٦٠ − θ )

ع = ٢ [ جتا ( ٦٠ + ٢ θ ) + ت جا ( ٦٠ + ٢ θ ) ] وفى الحالة المطلوبة ع = ٢ ( جتا ٢ ط + ت جا ٢ ط )

الجذر الأول = $\sqrt{٢}$ هـ$^{ط ت}$ ، الجذر الثانى = $\sqrt{٢}$ هـ$^{٢ ط ت}$

# الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

عند حل المعادلة $س^٣ = ١$ نجد أن الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى :

١ ، $(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$ ، $(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$ ونرمز لها بالرموز : ١ ، $ω$ ، $ω^٢$

## خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(١) $١ + ω + ω^٢ = ٠ \Rightarrow ω + ω^٢ = -١$ ، $١ + ω = -ω^٢$ ، $١ + ω^٢ = -ω$

(٢) $ω^٣ = ١ \Rightarrow \frac{١}{ω} = ω^٢$ ، $\frac{١}{ω^٢} = ω$

## القوى الصحيحة للعدد $ω$

إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن : $ω^{٣ن} = ١$ ، $ω^{٣ن+١} = ω$ ، $ω^{٣ن+٢} = ω^٢$

## تمارين للمراجعة على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(١) أثبت أن $\frac{س + ω ص}{ω^٢ س + ص} + \frac{ع ω^٢ + ل}{ع + ل ω} = -١$ حيث $ω$ هى أحد الجذرين التكعيبيين التخيليين للواحد الصحيح ، س ، ص ، ع ، ل أعداد حقيقية .

(٢) أوجد قيمة $(\frac{ω}{١ + ٢ω})^٢ + (\frac{ω^٢}{١ + ٢ω})^٢$ حيث $ω$ أحد الجذرين التكعيبيين للواحد الصحيح .

(٣) أوجد قيمة : $(\frac{٢ω^٢ + ١}{ω^٤})^٢ - (\frac{ω^٨ - ١}{ω^٥})^٢$

(٤) أثبت أن $\frac{٣}{٢}$ ت هى أحد الجذرين التربيعيين للمقدار : $\frac{١ + ١٠ω + ١٠ω^٢}{١ - ٣ω - ٣ω^٢}$

(٥) أثبت أن : $ω^٢ - ω = \pm \sqrt{٣}$ ت ثم أوجد قيمة المقدار : $(\frac{٥ - ٣ω^٢}{٥ω - ٣} - \frac{٢ - ٧ω}{٢ - ٧ω^٢})^٤$

(٦) أثبت أن : $(\frac{١}{١ + ٢ω} - \frac{١}{١ + ٢ω^٢})^٢ = -\frac{٤}{٣}$

(٧) أوجد قيمة : $(١ - \frac{٢}{ω^٢} + ω^٢)(١ + ω - \frac{٥}{ω})$

---

أفكار حل التمارين

(١) فى الكسر الأول نضرب س × $ω^٣$ وفى الكسر الثانى نضرب ل × $ω^٣$ وناخد المشترك ونختصر

(٢) ربّع وبسّط وجمّع يكون الناتج = $\frac{١}{٣}$

(٣) ربّع وبسّط وجمّع يكون الناتج = صفر

(٤) المقدار = $-\frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤} ت^٢$ ∴ جذرى المقدار هما : $\pm \frac{٣}{٢}$ ت

(٥) $(ω^٢ - ω)^٢ = ω^٤ - ٢ω^٣ + ω^٢ = ω + ω^٢ + ١ - ٣ = -٣$ ∴ $ω^٢ - ω = \pm \sqrt{٣}$ ت

نضرب العدد ٥ فى الكسر الأول × $ω^٣$ ونضرب العدد ٢ فى الكسر الثانى × $ω^٣$ نصل إلى المقدار = ٩

(٦) وحّد المقامات ثم بسّط وجمّع والناتج = $-\frac{٤}{٣}$ ( ملحوظة يمكنك الحل باستخدام القانون بالمسألة السابقة )

(٧) المقدار = $(١ - ٢ω + ω^٢)(١ + ω - ٥ω^٢) = ١٨$

# المحددات

## إستخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية ( طريقة كرامر )

(١) نوجد محدد المعاملات وهو $\Delta$

(٢) نحصل على $\Delta_{١}$ من $\Delta$ بوضع عمود الثوابت مكان عمود معاملات س

ونحصل على $\Delta_{٢}$ من $\Delta$ بوضع عمود الثوابت مكان عمود معاملات ص

ونحصل على $\Delta_{٣}$ من $\Delta$ بوضع عمود الثوابت مكان عمود معاملات ع

$$س = \frac{\Delta_{١}}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{٢}}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{٣}}{\Delta}$$

ملاحظة : إذا كان $\Delta \neq ٠$ يكون للمعادلات حل وحيد ( سنقتصر على دراسته فقط )

وإذا كان $\Delta = ٠$ يكون للمعادلات عدد غير محدود من الحلول .

## خواص المحددات

قيمة المحدد لا تتغير فى الحالات الآتية :

(١) إذا بدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير .

(٢) إذا تم فكه عن طريق عناصر أحد صفوفه أو أحد أعمدته .

(٣) إذا أضيفت لعناصر أى صف ( أو عمود ) فى محدد مضاعفات نظائرها من صف آخر ( أو عمود آخر ) فإن قيمة المحدد لا تتغير

وتستخدم هذه الخاصية للحصول على أكبر عدد من الأصفار فى أى صف أو عمود وبذلك يسهل علينا فك المحدد .

قيمة المحدد تساوى الصفر فى الحالات الآتية :

(١) إذا كانت عناصر صف ( أو عمود ) كلها أصفار .

(٢) إذا تساوى صفان ( أو عمودان ) .

(٣) إذا كان أحد صفوفه ( أو أعمدته ) مضاعفاً لصف ( أو عمود ) آخر .

متى تتغير إشارة المحدد ؟ نغير إشارة المحدد إذا بدلنا صفين ( أو عمودين )

إخراج العامل المشترك :

يمكن إخراج عامل مشترك خارج المحدد من عناصر صف ( أو عمود ) ولذلك عند ضرب عدد × محدد فأننا نضرب هذا العدد × عناصر صف واحد أو عمود واحد فقط .

تحويل محدد إلى مجموع محددين :

فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر أى صف ( أو عمود ) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع قيمتى محددين

المحدد على الصورة المثلثة :

هو المحدد الذى جميع عناصره تحت القطر الرئيسى ( أو فوقه ) أصفار

قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى .

# تمارين للمراجعة على المحددات

(١) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

أ) س + ص = ١ ، ص − ع = − ٢ ، − ٣ ص + ع = ٤

ب) ٢ س + ص + ع = − ٢ ، س + ص − ع = ٠ ، ٣ س + ٢ ص + ٥ ع = ٣

(٢) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١}+\text{ب}_{١}\text{س} & \text{أ}_{١}\text{س}+\text{ب}_{١} & \text{ج}_{١} \\ \text{أ}_{٢}+\text{ب}_{٢}\text{س} & \text{أ}_{٢}\text{س}+\text{ب}_{٢} & \text{ج}_{٢} \\ \text{أ}_{٣}+\text{ب}_{٣}\text{س} & \text{أ}_{٣}\text{س}+\text{ب}_{٣} & \text{ج}_{٣} \end{vmatrix} = (١-\text{س}^{٢}) \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{ج}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{ج}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{ج}_{٣} \end{vmatrix}$$

(٣) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{١} & \text{ص}_{١} & \text{أ س}_{١}+\text{ل ص}_{١} \\ \text{س}_{٢} & \text{ص}_{٢} & \text{أ س}_{٢}+\text{ل ص}_{٢} \\ \text{س}_{٣} & \text{ص}_{٣} & \text{أ س}_{٣}+\text{ل ص}_{٣} \end{vmatrix}$$

(٤) يدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ل} & \text{ل}^{٢} \\ ١ & \text{م} & \text{م}^{٢} \\ ١ & \text{ن} & \text{ن}^{٢} \end{vmatrix} = (\text{ل}-\text{م})(\text{م}-\text{ن})(\text{ن}-\text{ل})$$

(٥) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} (\text{أ}_{١}+\text{ب}_{١})^{٢} & \text{أ}_{١}^{٢}+\text{ب}_{١}^{٢} & \text{أ}_{١}\text{ب}_{١} \\ (\text{أ}_{٢}+\text{ب}_{٢})^{٢} & \text{أ}_{٢}^{٢}+\text{ب}_{٢}^{٢} & \text{أ}_{٢}\text{ب}_{٢} \\ (\text{أ}_{٣}+\text{ب}_{٣})^{٢} & \text{أ}_{٣}^{٢}+\text{ب}_{٣}^{٢} & \text{أ}_{٣}\text{ب}_{٣} \end{vmatrix}$$

(٦) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} \text{جا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{جتا}^{٢}\text{س} \\ \text{جا}^{٢}\text{ص} & ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ص} \\ \text{جا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix}$$

(٧) أوجد قيمة ك بحيث يكون ( س − ٢ ) أحد عوامل المحدد :

$$\begin{vmatrix} \text{س}+٣ & ٥ & ٣ \\ \text{ك}-٤ & \text{ك}-٢\text{س} & \text{ك} \\ ١ & \text{ك}+١ & ١ \end{vmatrix}$$

(٨) إذا كان :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} = ١٢$$

فأوجد قيمة :

$$\begin{vmatrix} ٥\text{س} & ٥\text{ص} & ٥\text{ع} \\ \text{س}+٣\text{ل} & \text{ص}+٣\text{م} & \text{ع}+٣\text{ن} \\ ٢\text{ء}-\text{ل} & ٢\text{هـ}-\text{م} & ٢\text{و}-\text{ن} \end{vmatrix}$$

(٩) حل المعادلة :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & ٢\text{س}+١ & ٣\text{س}+٢ \\ ٢\text{س}+١ & ٣\text{س}+٣ & ٤\text{س}+٣ \\ ٣\text{س}+٣ & ٥\text{س}+٦ & ١٠\text{س}+٩ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أفكار حل التمارين

(١) (أ) ∆ = −٢ ، ∆$_١$ = −٤ ، ∆$_٢$ = ٢ ، ∆$_٣$ = −٢ ⇐ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١

(ب) ∆ = ٥ ، ∆$_١$ = −٢٠ ، ∆$_٢$ = ٢٥ ، ∆$_٣$ = ٥ ⇐ س = −٤ ، ص = ٥ ، ع = ١

(٢) ع$_٢$ − س × ع$_١$ ثم نأخذ (١ − س$^٢$) عامل مشترك من العمود الثانى ثم ع$_١$ − س × ع$_٢$ ينتج المطلوب

(٣) ع$_٣$ − أ × ع$_١$ ثم نأخذ ل عامل مشترك من العمود الثالث فتتساوى عناصر العمودين الثانى والثالث ∴ المحدد = ٠

(٤) ص$_١$ − ص$_٢$ ، ص$_٣$ − ص$_٢$ ثم نحلل ونأخذ (ل − م) (ن − م) عامل مشترك من الصف الأول والصف الثالث ثم ص$_٣$ − ص$_١$ ونفك المحدد عن طريق العنصر الثانى فى العمود الأول ينتج المطلوب .

(٥) ع$_١$ − ع$_٢$ ينتج لنا ع$_١$ = ٢ ع$_٣$ ∴ قيمة المحدد = صفر

(٦) ع$_١$ + ع$_٣$ ينتج لنا ع$_١$ = ع$_٢$ ∴ قيمة المحدد = صفر

(٧) س = ٢ تجعل المحدد = ٠ ثم ع$_٢$ − ع$_١$ ثم نفك بواسطة العنصر الثالث فى العمود الثانى

−ك [ ٥ك − ٣ (ك − ٤) ] = ٠ ومنها ك = ٠ أ، ك = −٦

(٨) نأخذ ٥ عامل مشترك من الصف الأول ثم ص$_٢$ − ص$_١$

نأخذ ٣ عامل مشترك من الصف الثانى ثم ص$_٣$ − ص$_٢$

نأخذ ٢ عامل مشترك من الصف الثالث ثم نعوّض عن المحدد الباقى بالقيمة ١٢ ينتج لنا الجواب = ٣٦٠

(٩) ع$_٢$ − ٢ × ع$_١$ ثم ع$_٣$ − ٣ × ع$_١$ ثم ع$_٣$ − ٢ × ع$_٢$ ثم نفك المحدد بالعنصر الثالث فى العمود الثالث

∴ ٣س [ س × −س − (٢س + ١) ] = ٠ ⇐ −٣س (س + ١)$^٢$ = ٠ ومنها س = ٠ أ، س = −١

# الهندسة الفراغية

## أولاً : عبارات الإكمال : نظريات وحقائق هندسية

(١) حالات تعيين المستوى :

( ٲ ) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

(ب) مسنقيم ونقطة لا تنتمى إليه .

(جـ) مستقيمان متقاطعان .

(٢) إذا اشترك مستويان فى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان

(٣) إذا اشترك مستقيم ومستو فى نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى

(٤) الزاوية بين مستقيمين متخالفين : هى الزاوية التى يصنعها أحدهما مع أى مستقيم قاطع له ويوازى الآخر .

(٥) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازى جميع المستقيمات التى تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التى تحتوى هذا المستقيم .

(٦) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً فى المستوى فإنه يوازى ذلك المستوى .

(٧) إذا وازى مستقيم مستويا فالمستقيم الذى يمر بأى نقطة من نقط المستوى موازياً للمستقيم المعلوم يقع فى المستوى .

(٨) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين .

(٩) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

(١٠) إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستو وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازياً لهذين المستقيمين .

(١١) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه يوازى خط تقاطعهما .

(١٢) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة .

(١٣) إذا تقاطع مستقيمان فى مستو وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين فى مستو آخر كان مستوى المستقيمين الأولين موازياً لمستوى المستقيمين الآخرين .

(١٤) إذا كان مستقيم عمودياً على كل مستقيم فى المستوى قيل أن المستقيم عمودى على المستوى أو المستوى عمودى على المستقيم .

(١٥) المستقيم العمودى على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعما يكون عمودياً على مستويهما .

(١٦) المستقيم العمودى على أى مستقيمين غير متوازيين فى مستو يكون عموديً على هذا المستوى .

(١٧) إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الآخر عموديا على هذا المستوى أيضا .

(١٨) يتوازى مستويان إذا وجد مستقيم واحد عمودى على كل منهما .

(١٩) إذا قطع مستقيم مستويين متوازيين وكان عموديا على أحدهما فإنه يكون عموديا على الآخر .

(٢٠) جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة معينة عليه تقع فى مستوى واحد عمودى على هذا المستقيم

(٢١) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودى على مستقيم من نقطة عليه .

(٢٢) المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان .

(٢٣) إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان موازيين .

(٢٤) إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على الآخر .

(٢٥) مستوى محاور قطعة مستقيمة : هو المستوى العمودى على هذه القطعة من نقطة منتصفها .

(٢٦) مسقط نقطة معلومة على مستوى معلوم : هو موقع القطعة المستقيمة المرسومة من النقطة عمودية على ذلك المستوى .

(٢٧) الزاوية بين مستقيم ومستوى : هى الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى . وتسمى زاوية ميل المستقيم على المستوى .

(٢٨) إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان عمودياً على مستقيم فى المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عمودياً على هذا المستقيم .

(٢٩) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان مسقطه على المستوى عمودياً على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم .

(٣٠) الزاوية الزوجية : إذا كان لنصفى مستويين حد مشترك فإن اتحاد نصفى المستويين مع ذلك الحد يسمى زاوية زوجية .

(٣١) الزاوية المستوية لزاوية زوجية : هى الزاوية الحادثة من تقاطع هذه الزاوية الزوجية مع أى مستوى عمودى على حرفها .

(٣٢) جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية القياس

(٣٣) يقال لمستويين إنهما متعامدان إذا نشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية قوائم .

(٣٤) إذا كان مستقيم عمودياً على مستو فكل مستوى يحوى هذا المستقيم يكون عمودياً على ذلك المستوى .

(٣٥) إذا تعامد مستويان ورسم فى أحدهما مستقيم عمودى على خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودياً على المستوى الآخر .

(٣٦) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً على المستوى الثالث .

(٣٧) الهرم القائم : هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على هذه القاعدة .

(٣٨) خواص الهرم القائم :

(أ) الأحرف الجانبية للهرم القائم متساوية فى الطول .

(ب) الأوجه الجانبية للهرم القائم مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

(جـ) الأرتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية فى الطول .

(٣٩) الهرم الثلاثى المنتظم : هو هرم قائم أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع .

## ثانياً : عبارات الإكمال : عمليات حسابية

(١) قطر المكعب الذى طول حرفه ل يساوى ل $\sqrt{٣}$

(٢) مساحة سطح المكعب الذى طول حرفه ل تساوى ٦ ل$^{٢}$

(٣) حجم المكعب الذى طول حرفه ل يساوى ل$^{٣}$

(٤) قطر متوازى المستطيلات الذى أبعاده الثلاثة س ، ص ، ع يساوى $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}}$

(٥) الهرم الثلاثى المنتظم الذى طول حرفه ل يكون طول ارتفاعه ل $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ وقياس الزاوية بين أى وجهين فيه هى هـ حيث جتاهـ = $\frac{١}{٣}$

(٤) إذا كانت أبعاد متوازى مستطيلات هى ٤ ، ٣ ، ١٢ من السنتيمترات فإن طول قطره = ........... .

(٥) مجموع أطوال أقطار متوازى المستطيلات الذى أبعاده الثلاثة هى : ٤ ، ٣ ، ١٢ سم يساوى ............. .

(٦) إذا كان طول حرف المكعب ٥ سم فإن طول قطره يساوى ............. سم .

(٧) إذا كان طول قطر مكعب ٥ $\sqrt{3}$ سم فإن مساحة سطحه ............ .

(٨) إذا كانت مساحة سطح المكعب ٩٦ سم$^2$ فإن طول قطره ................ .

(٩) إذا كان حجم مكعب يساوى ٦٤ سم$^3$ فإن مجموع مساحات أوجهه تساوى ................ .

## ثالثاً : عبارات صح أم خطأ

بيّن أى من الجمل الآتية صحيحة وأى منها خاطئة مع إعادة صياغة الجملة الخاطئة بصورتها الصحيحة :

(١) مجموعة المستويات العمودية على مستو واحد تكون متوازية .

(٢) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هى التى تنشأ من قطع الزاوية الزوجية بمستو يمر بحرفها .

(٣) المائل ومسقطه على مستوى ما س يقعان فى مستوى مائل على المستوى س .

(٤) المستقيم العمودى على كل من مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على مستويهما .

(٥) المستويان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان .

(٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه يوازى خط تقاطعهما .

(٧) يتعامد المستقيمان إذا كان كل منهما عمودياً على نفس المستوى .

(٨) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا التقاطع مستقيمان متخالفان .

(٩) مقطع متوازى المستطيلات بمستو يقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح مستطيل .

(١٠) المستقيم العمودى على مستقيم فى المستوى يكون عمودياً على ذلك المستوى .

(١١) كل مستقيمين متخالفين فى الفراغ يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان .

(١٢) إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازى كل مستقيم واقع فى المستوى .

(١٣) إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين .

(١٤) تقاس الزاوية الزوجية بين مستويين برسم مستوى عمودى على خط تقاطع المستويين .

## رابعاً : عبارات على هيئة أسئلة خفيفة

(١) أ ب جـ أ/ ب/ جـ/ منشور ثلاثى ، فإن خط تقاطع المستوى أ ب جـ/ مع المستوى أ أ/ جـ/ جـ هو المستقيم ............. .

(٢) مقطع متوازى السطوح بمستوى بقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح ............. .

(٣) أقطار متوازى السطوح هى القطع المستقيمة التى تصل بين ................ .

(٤) هل دائماً أى أربع نقط تقع فى مستو ؟

(٥) هل المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث فى الفراغ متوازيان ؟

(٦) ما أقل عدد من المستويات تحدد مجسماً ؟

(٧) إذا كان مستقيم عموداً على مستو فهل يكون المستوى عموداً على المستقيم ؟

(٨) إذا كان ل$_1$ ، ل$_2$ مستقيمين ، س ، ص مستويان فإن :

(أ) إذا كان ل$_1$ // س ، ل$_2$ // س فإن ل$_1$ // ل$_2$

(ب) إذا كان س // ل$_1$ ، ص // ل$_1$ فإن س // ص

(جـ) إذا كان ل$_1$ $\subset$ س ، ل$_2$ $\subset$ ص ، س // ص فإن ل$_1$ // ل$_2$

ⓓ إذا كان ل ١ ⊂ س ، س ∩ ص = ∅ فإن ل ١ // ص

ⓗ إذا كان ل ١ ∩ ل ٢ = ∅ فإن ل ١ // ل ٢ أو ل ١ ، ل ٢ متخالفين

(٩) أذكر فى أى الحالات الآتية يكون المستقيم عمودياً على المستوى :

ⓐ المستقيم عمودياً على مستقيم فى المستوى .

ⓑ المستقيم عمودى على كل من مستقيمين متقاطعين فى المستوى ويمر بنقطة تقاطعهما .

ⓒ المستقيم عمودى على مستقيمين فى المستوى .

ⓓ المستقيم عمودى على مستقيمين متقاطعين فى المستوى ولا يمر بنقطة تقاطعهما .

(١٠) بيّن مع الرسم طريقة الحصول على كل من :

ⓐ الزاوية بين مستقيمين متخالفين ⓑ الزاوية بين مستقيم ومستوى

---

## حل عبارات الإكمال : عمليات حسابية

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (٤) | ١٣ سم | (٥) | ٥٢ سم | (٦) | ٥ $\sqrt{3}$ سم | (٧) | ١٥٠ سم٢ |
| (٨) | ٤ $\sqrt{3}$ | (٩) | ٩٦ سم٢ | | | | |

---

## حل عبارات صح أم خطأ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (١) | ✗ | (٢) | ✗ | (٣) | ✗ | (٤) | ✗ |
| (٥) | ✗ | (٦) | ✓ | (٧) | ✗ | (٨) | ✗ |
| (٩) | ✓ | (١٠) | ✗ | (١١) | ✓ | (١٢) | ✗ |
| (١٣) | ✓ | (١٤) | ✓ | | | | |

---

## حل عبارات على هيئة أسئلة خفيفة

(١) أ جـ/ (٢) متوازى أضلاع (٣) رأسين غير واقعين فى نفس المستوى

(٤) لا تقع الأربعة نقط فى مستو واحد إلا عندما تقع على خطين مستقيمين متقاطعين أو متوازيين

(٥) المستقيمان العموديان على ثالث لا يتوازيا إلا إذا كانا فى مستو واحد

(٦) أربعة مستويات وتعين هرماً (٧) المستوى يكون عمودى على المستقيم

(٨) ⓐ ✗ ⓑ ✗ ⓒ ✗ ⓓ ✓ ⓗ ✓

(٩) الحالتين ب ، ء فقط

## خامساً : النظريات المطلوب حفظها بالبرهان

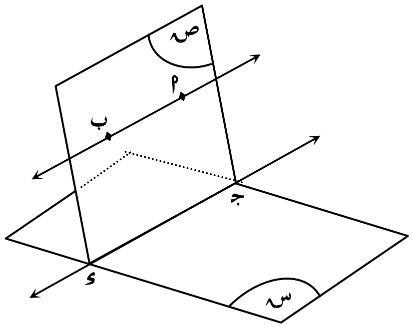
### نظرية ( ١ )

**إذا وازى مستقيم مستويا فانه يوازى جميع المستقيمات التى تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التى تحتوى ذلك المستقيم .**

**المعطيات :**

(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س

(٢) ص أى مستو يحتوى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع المستوى س فى $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$




**المطلوب :**

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

**البرهان :**

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap$ س $= \varnothing$

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \subset$ س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \varnothing$

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يقعان فى مستو واحد وهو ص

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

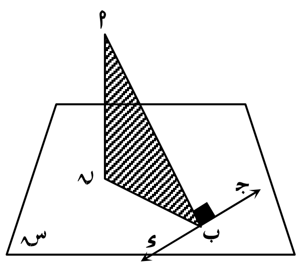
### نظرية ( ٤ )

**إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان عموديا على مستقيم فى المستوى فإنه مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديا على هذا المستقيم .**

**المعطيات :**

(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ المستوى س

(٢) المائل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ الواقع فى المستوى س




**المطلوب :**

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{ن ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

**البرهان :**

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ المستوى س

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ كل مستقيم فيه $\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ( معطى )

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

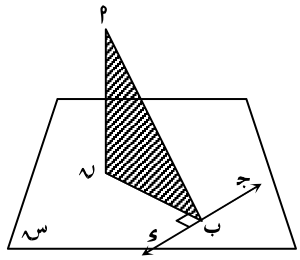
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ عمودى على مستويهما أ ن ب

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ أى مستقيم فى المستوى أ ن ب

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ن ب}}$

## عكس نظرية ( ٤ )

**إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عموديا على ذلك المستقيم .**




**المعطيات :**

(١) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مائل على المستوى س

(٢) مسقطه $\overleftrightarrow{\text{نب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جى}}$ الواقع فى المستوى س

**المطلوب :**

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جى}}$

**البرهان :**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أن}} \perp$ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ عمودى على كل مستقيم فى المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أن}} \perp \overleftrightarrow{\text{جى}}$

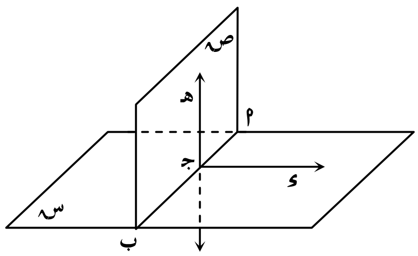
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{نب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جى}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{جى}} \perp$ كل من $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{نب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جى}} \perp$ عمودى على مستويهما أ ن ب

∴ $\overleftrightarrow{\text{جى}} \perp$ أى مستقيم فى المستوى أ ن ب ∴ $\overleftrightarrow{\text{جى}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$

## نظرية ( ٥ )

**إذا كان مستقيم عموديا على مستو فكل مستو يحوى هذا المستقيم يكون عموديا على ذلك المستوى .**




**المعطيات :**

(١) $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}} \perp$ المستوى س عند جـ

(٢) المستوى ص يحوى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}}$ ويقطع المستوى س فى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

**المطلوب :**

إثبات أن : ص $\perp$ س

**البرهان :**

نرسم $\overleftrightarrow{\text{جى}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$ فى المستوى س

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}} \perp$ المستوى س ( معطى )

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ىجـ}}$ الواقع فى س

∴ ق ( $\widehat{\text{ى جـ هـ}}$ ) = ٩٠°

، ∵ ∠ ى جـ هـ زاوية مستوية لاحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطع المستويين س ، ص

∴ المستوى ص $\perp$ المستوى س

## تمارين للمراجعة

(١) ﻫ ب جـ ء ﻫ/ ب/ جـ/ ء/ متوازى سطوح قائم قاعدته ﻫ ب جـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق ( ء ﻫ ب ) = ٦٠°
، ﻫ ﻫ/ = ١٦ سم
أولاً : أحسب طول كل من القطرين ﻫ جـ ، ب ء
ثانياً : أثبت أن المستويين ﻫ ﻫ/ جـ/ جـ ، ب ب/ ء/ ء متعامدان .

(٢) ﻫ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ﻫ ، ق( ب ) = ٣٠° . رسم ﻫ م ⊥ المستوى ﻫ ب جـ ثم رسم م ء ⊥ ب جـ حيث ء ∈ ب جـ
أثبت أن ب ء = ٣ جـ ء

(٣) م ﻫ ب جـ ء هرم رباعى قائم طول ضلع قاعدته ٦ $\sqrt{2}$ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد :
أولاً : قياس زاوية ميل حرفه الجانبى على القاعدة
ثانياً : قياس زاوية ميل وجهه الجانبى على القاعدة

(٤) ﻫ ب جـ ء ﻫ/ ب/ جـ/ ء/ مكعب طول حرفه يساوى ٦ سم أثبت أن :
أولاً : المثلث ء/ ﻫ جـ متساوى الأضلاع . وأحسب مساحة سطحه
ثانياً : ﻫ ب ⊥ ب جـ/
ثالثاً : ﻫ جـ ⊥ ء/ ب

(٥) م ﻫ ب جـ ء هرم رباعى قائم طول ضلع قاعدته ٢٤ سم وظل زاوية ميل الوجه م ﻫ ب على القاعدة يساوى $\frac{٤}{٣}$
أولاً : أوجد ارتفاع الهرم وكذلك مساحة الوجه م ﻫ ب
ثانياً : أثبت أن المستويين م ﻫ جـ ، م ب ء متعامدان .

(٦) ﻫ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ﻫ م عمود على مستوى المثلث . اثبت أن :
[١] م ب ⊥ ب جـ
[٢] إذا كان ق ( ﻫ ب م ) = ق ( ﻫ جـ ب ) = ٤٥° فأثبت أن م جـ = $\sqrt{3}$ م ﻫ

(٧) م ﻫ ب جـ هرم ثلاثى قاعدته ﻫ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٨ سم ، س ∈ م ﻫ حيث م س : س ﻫ = ٢ : ٣
ورسم مستوى يوازى القاعدة فقطع م ب فى ص ، م جـ فى ع . أثبت أن مثلث س ص ع متساوى الساقين ثم أوجد مساحة سطحه .

(٨) ﻫ ب جـ ء هرم ثلاثى فيه ﻫ ب = جـ ء ، س منتصف ب جـ . رسم مستوى سـ يمر بالنقطة س ويوازى كلا من ﻫ ب ، جـ ء
فقطع ب ء فى ص ، وقطع ﻫ ء فى ع وقطع ﻫ جـ فى ك . اثبت أن الشكل س ص ع ك معين .

(٩) ﻫ ، ب ، جـ ثلاث نقط فى المستوى سـ ليست على استقامة واحدة . رسمت القطع الثلاث ﻫ س ، ب ص ، جـ ع
عمودية على سـ . وفى جهة واحدة منه . وكان ﻫ س = ٦ سم ، ب ص = جـ ع = ٤ سم ، فإذا قطع س ص المستوى سـ فى ء
وقطع س ع المستوى س فى هـ . فأثبت أن ء هـ // ب جـ

(١٠) م ﻫ ب جـ هرم ثلاثى . س ، ص ، ع ثلاث نقط على الأحرف م ﻫ ، م ب ، م جـ على الترتيب بحيث $\frac{م س}{س ﻫ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع جـ}$
= $\frac{١}{٣}$ . أثبت أن المستوى س ص ع // المستوى ﻫ ب جـ وإذا فرضت ق ∈ ب جـ ورسم م ق ليقطع ص ع فى ل .
فأثبت أن : ﻫ ق = ٤ س ل .

(١١) ﻫ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط ليست فى مستوى واحد ، رُسم المستوى سـ قاطعاً ﻫ ب ، ﻫ جـ ، ﻫ ء فى النقط س ، ص

، ع على الترتيب بحيث كان: $\frac{أس}{أب} = \frac{أص}{أجـ} = \frac{أع}{أ ء} = \frac{1}{4}$ أثبت أن المستوى س // المستوى ب جـ ء .

وإذا كان ب جـ = ١٢ سم ، جـ ء = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم فأوجد مساحة سطح المثلث س ص ع .

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه ق( $\hat{أ}$ ) = ٣٠° ، أ ب = ٢٠ سم ، رسم $\overline{ب ء}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ بحيث ب ء = ١٠ $\sqrt{3}$ سم ، رسم $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ يقطعه فى هـ . أثبت أن $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ثم أحسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ء أ جـ ، أ ب جـ .

(١٣) أ ب جـ مثلث فيه ق ( $\hat{أ}$ ) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم . رسم $\overline{ب ن}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

ويقطعها فى ن ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ وكان ب هـ = ٦ سم .

أولاً : أثبت أن : $\overline{ن هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

ثانياً : أوجد ق ( ∠ ب − أ جـ − هـ )

(١٤) ء أ ب جـ هرم ثلاثى فيه $\overline{ء أ}$ عمودية على كل $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ . رسمت $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ حيث هـ ∈ $\overline{ب جـ}$

اثبت أن : $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى ء أ هـ .

(١٥) أ ب جـ ء هرم ثلاثى فيه $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ب جـ ء . رسم $\overline{ب هـ}$ ⊥ المستوى أ جـ ء . أثبت أن :

أولاً : $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب هـ

ثانياً : المستويان جـ ء أ ، أ ب هـ متعامدان .

(١٦) م مركز دائرة تقع فى المستوى س ، $\overline{أ ب}$ وتر فى الدائرة ، رسم $\overline{م ء}$ ⊥ المستوى س وكانت جـ منتصف $\overline{أ ب}$ .

أولاً : أثبت أن : $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ء جـ م

ثانياً : إذا رسم $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{ء جـ}$ فأثبت أن $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوى ء أ ب.

ثالثاً : إذا كانت هـ تقسم $\overline{ء جـ}$ بنسبة ٢ : ١ وكان م هـ = ٥ $\sqrt{2}$ سم فأوجد طول $\overline{ء جـ}$

(١٧) م أ ب جـ ء هرم رباعى قائم قاعدته أ ب جـ ء بحيث أ ب = ٦ $\sqrt{2}$ سم ، طول حرفه الجانبى = ١٢ سم . أوجد :

( أولاً ) طول ارتفاع الهرم .

( ثانياً ) قياس زاوية ميل $\overline{م ب}$ على مستوى القاعدة أ ب جـ ء .

( ثالثاً ) ظل الزاوية بين المستويين : م أ ب ، أ ب جـ ء .

## أفكار حل التمارين

(١) △ أ ب م قائم الزاوية فى م ( حيث م نقطة تقاطع قطرى المعين ) ∴ أ جـ = ٢ × ١٢ جا ٦٠ = ١٢ $\sqrt{3}$ ،

ب ء = ٢ × ١٢ جتا ٦٠ = ١٢ ، $\overline{ب ء}$ ⊥ المستوى أ أ/ جـ/ جـ ولكن $\overline{ب ء}$ ⊂ المستوى ب ب/ ء/ ء

(٢) ∵ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = ب ء ظا ٣٠ = جـ ء ظا ٦٠

(٣) ٨/ ٥٣° ، ٤/ ٦٢°

(٤) △ أ جـ جـ/ متساوى الأضلاع وطول ضلعه = ٦ $\sqrt{2}$ فتكون مساحته = ١٨ $\sqrt{3}$ سم² ثم تثبت أن $\overline{أ جـ}$ ⊥ ب ء ء/

(٥) نرسم $\overline{ن هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ونصل $\overline{م هـ}$ ونثبت أن ظا ( $\widehat{م هـ ن}$ ) = $\frac{4}{3}$ ومنها م ن ( ارتفاع الهرم ) = ١٦ سم ،

م ـ ( △ أ ب هـ ) = $\frac{1}{2}$ × أ ب × م هـ = ٢٤٠ سم² ، $\overline{أ جـ}$ ⊥ المستوى م ب ء وهو محتوى فى المستوى م أ جـ

(٦) $\overline{ب أ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ⇐ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، م أ = أ ب = ب جـ = ل ⇐ أ جـ = $\sqrt{2}$ ل ، م جـ = $\sqrt{3}$ ل = $\sqrt{3}$ م أ

(٧) نثبت توازى الأضلاع المتناظرة ومن التناسب ينتج أن س ص = ص ع = ع س = ٧,٢ ، مساحته = ٢٢,٤٥

(٨) $\overline{س ك}$ // $\overline{أ ب}$ ويساوى نصفه وكذلك $\overline{ص ع}$ ∴ الشكل س ص ع ك متوازى ثم نثبت س ص = س ك

(٩) $\overline{ب ص} // \overline{أ س}$ نعمل منها تناسب وكذلك $\overline{جـ ع} // \overline{أ س}$ ونعمل منها تناسب وينتج من التناسبين $\overline{ء هـ} // \overline{ب جـ}$

(١٠) التناسب ⇐ توازى ثم التوازى ⇐ توازى المستويين ثم $\overline{س ل} // \overline{أ ى}$ يؤدى للمطلوب

(١١) من التناسب $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$ ، $\overline{ص ع} // \overline{جـ د}$ ⇐ المطلوب الأول ثم مـ ( △ ب جـ د ) = ٩٦ سم$^٢$

مـ ( △ س ص ع ) = $\frac{١}{٤}$ × ٩٦ = ٢٤ سم$^٢$

(١٢) ب هـ = ٢٠ جا ٣٠ = ١٠ ، ق ( $\widehat{ء هـ ب}$ ) = ق ( ء − أ جـ − ب ) = ٦٠°

(١٣) نفس فكرة المسألة (١٢) السابقة : الطلب الأول مسقط ومائل والطلب الثانى ق ( $\widehat{ب ن هـ}$ ) = ٣٠°

(١٤) $\overline{ء أ}$ ، $\overline{أ هـ}$ عموديان على $\overline{ب جـ}$ ⇐ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى أ هـ ء

(١٥) $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب هـ}$ عموديان على $\overline{جـ ء}$ ⇐ $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب هـ ، $\overline{جـ ء}$ ⊂ المستوى جـ ء أ ينتج المطلوب

(١٦) $\overline{أ ب}$ ⊥ كل من $\overline{م ء}$ ، $\overline{م جـ}$ ثم $\overline{م هـ}$ ⊥ كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ}$ ثم ( م هـ )$^٢$ = هـ ء × هـ جـ ⇐ ع جـ = ١٥ سم

(١٧) طول قطر المربع = ١٢ سم ، نحسب طول $\overline{م ن}$ من △ م أ ن نجد م ن = ٦ $\sqrt{٣}$ سم حيث ن مركز المربع ،

زوايا ميل الأحرف الجانبية على القاعدة متساوية وكل منها = ق ( $\widehat{م ب ن}$ ) = ٦٠° ، نرسم $\overline{ن هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ونصل $\overline{م هـ}$

ونحسب ق ( $\widehat{م هـ ن}$ ) = ق ( ∠ م − أ ب − جـ ) حيث ظا ( $\widehat{م هـ ن}$ ) = $\sqrt{٦}$ ⇐ ق ( $\widehat{م هـ ن}$ ) = ٤٨′ ٦٧°

**أبنائى وبناتى / طلبة وطالبات الثانوية العامة**
**إليكم نصائح مفيدة وضرورية قبل الإجابة عن أسئلة الامتحان :**

**( ١ ) أقرأ ورقة الأسئلة بالكامل وبتمعن وروية وضع علامة على السؤال الأختيارى الذى ستتركه .**

**( ٢ ) أبدأ بحل الأسئلة متدرجاً من الأسهل إلى الأقل سهولة ولا تتقيد بترتيب الورقة الامتحانية .**

**( ٣ ) أجعل إجابة كل سؤال جديد فى بداية صفحة جديدة مع كتابة رقم السؤال باللغة العربية ( مثلاً نكتب : إجابة السؤال الأول )**

**( ٤ ) فقرات السؤال الواحد تكون متتالية على أن تفصل بينها بخط .**

**( ٥ ) يفضل كتابة ملخص للسؤال [ وليس نقله كما هو ] وتحديد كافة الطلبات فيه .**

**( ٦ ) ضع علامة صح أمام الجزئية التى انتهيت من إجابتها وعلامة خطأ أمام الجزئية التى أجلت التفكير فيها وذلك حتى تراها عند المراجعة فلا تنسى أى جزئية مطلوبة فى السؤال .**

**( ٧ ) لا تفقد وقتاً كبيراً فى التفكير بل أنتقل إلى أسئلة أخرى حتى إذا أنتهيت من الإجابة عن كافة الأسئلة فأرجع للأجزاء المتروكة وذلك بهدف عدم تسرب وقت الامتحان من بين يديك .**

**( ٨ ) بعد الانتهاء من حل كل أسئلة الامتحان ومراجعتها مراجعة كاملة يمكنك الآن أن تحل السؤال الاختيارى .**

**( ٩ ) لا تفكر فى النتيجة أثناء الامتحان فذلك ضرره أكثر من نفعه .**

**( ١٠ ) لقد أديت ما عليك والباقى على الله فتوكل عليه ولا تجعل للخوف طريقاً إلى قلبك فهو أكبر عدو لك .**

## مع خالص دعواتى للجميع بالنجاح والتفوق بإذن الله