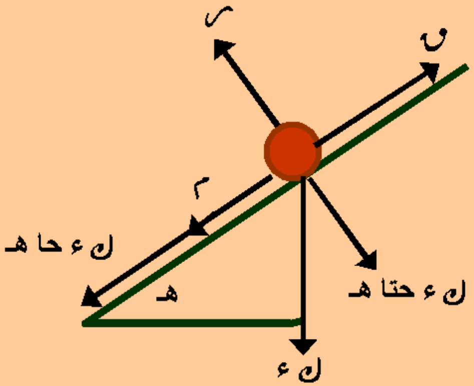
خرائط مفاهيم المميز



الرياضيات البحتة

الجبر

∞ | ⊥ | Σ | ∋

الثانوية العامة
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشنتوري

٢٠١٥

التباديل

تعريف

مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عملية بعدة طرق مختلفة عددها م ، و فى نفس الوقت أمكن إجراء عملية أخرى بعدة طرق مختلفة عددها ن فإن : عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

التباديل

هو أى ترتيب يمكن تكوينه من مجموعة من الأشياء بأخذها كلها أو بعضها

أى أن

$$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots(ن-ر+١)$$

ملاحظات

- $١ \leq ر \leq ن$ ، ر ، ن $\in$ ص$^{+}$
- عدد العوامل = ر
- آخر العوامل = (ن − ر + ١)
- كل عامل يصغر عن سابقه بمقدار ١
- أكبر العوامل = ن
- تعريف: $^{ن}ل_{٠} = ١$
- العامل الأوسط = $\frac{١}{٢}$ (٢ن − ر + ١)
- $^{ن}ل_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر مع الترتيب

مضروب العدد

هو عدد التباديل لأشياء عددها ن مأخوذة جميعاً في كل مرة

أى أن

$$^{ن}ل_{ن} = ن! = ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots\times ٣\times ٢\times ١$$

ملاحظات

- عدد العوامل = ن
- أكبر العوامل = ن
- آخر العوامل = ١
- كل عامل يصغر عن سابقه بمقدار ١
- تعريف: $٠! = ١$
- نتيجة: $ن! = ن\ (ن-١)!$

نتيجة

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

يناير ٢٠١٥

التوافيق

تعريف

هو كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيب مفردات المجموعة

العلاقة بين التباديل و التوافيق

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{ر|}}$$

ملاحظات

- $${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{ن|}}{\underline{ر|}\ \underline{ن-ر|}}$$
- أكبر العوامل فى البسط = ن ، عدد العوامل فى المقام = ر
- $١ \le ر \le ن$ ، ر ، ن $\in$ ص$^{+}$
- عدد العوامل فى البسط = عدد العوامل فى المقام = ر
- ${}^{ن}ق_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر بدون الترتيب

نتائج و ملاحظات

- $${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$$
- $${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١ \quad ، \quad {}^{ن}ق_{١} = ن$$
- إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن :
  - ن = ر + هـ
  - ر = هـ
  - حيث : $ر + هـ \le ن$
- $${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$
- $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$
  - لإيجاد النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢}$ نقسم كلاً من التوفيقتين على ${}^{ن}ق_{ر-١}$
  - إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ك}$ ، ${}^{ن}ق_{م}$ فى تتابع هندسى فإن : $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ك}} = \frac{{}^{ن}ق_{ك}}{{}^{ن}ق_{م}}$$
  - إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ك}$ ، ${}^{ن}ق_{م}$ فى تتابع حسابى فإن : $$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ك}} + \frac{{}^{ن}ق_{م}}{{}^{ن}ق_{ك}} = ٢$$

الشنتورى
يناير ٢٠١٥

نظرية ذات الحدين

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(أ+ب)^{ن} = أ^{ن} + ن\,ب\,أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\,ب^{٢}\,أ^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,ب^{٣}\,أ^{ن-٣} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\,ب^{ر}\,أ^{ن-ر} + \cdots + ب^{ن}$$

ملاحظات

عدد الحدود = ن + ١

قوى الحد الأول (أ) تكون تنازلية ، قوى الحد الثانى (ب) تكون تصاعدية
بحيث : يكون مجموع قوتى (أ) ، (ب) فى أى حد هو ن

$$(أ-ب)^{ن} = أ^{ن} - ن\,ب\,أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\,ب^{٢}\,أ^{ن-٢} - {}^{ن}ق_{٣}\,ب^{٣}\,أ^{ن-٣} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-ب)^{ر}\,أ^{ن-ر} + \cdots + (-ب)^{ن}$$

نتيجة

$$(١+س)^{ن} = ١ + ن\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\,س^{ر} + \cdots + س^{ن}$$

$$(١-س)^{ن} = ١ - ن\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-س)^{ر} + \cdots + (-س)^{ن}$$

ملاحظة

$$، (١+س)^{ن} + (١-س)^{ن} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \cdots\cdots)$$

$$، (١+س)^{ن} - (١-س)^{ن} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \cdots\cdots)$$

الحد العام

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\,ب^{ر}\,أ^{ن-ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر}\,(\text{الثانى})^{ر}\,(\text{الأول})^{ن-ر}$$ حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

تابع : نظرية ذات الحدين

الحد الأوسط و الحدين الأوسطين

(١) إذا كانت : ن زوجية يوجد حد أوسط واحد ترتيبه

هو : $\frac{\text{ن}}{٢} + ١$

(٢) إذا كانت : ن فردية يوجد حدان أوسطان ترتيبهما هما :

$\frac{\text{ن} + ١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن} + ٣}{٢}$

الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$

لإيجاد الحد المشتمل على ($\text{س}^{\text{ك}}$) فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ نتبع ما يلى :

(١) نوجد الحد العام ($\text{ح}_{\text{ر}+١}$) للمفكوك فى أبسط صورة

(٢) نضع أس س = ك فنحصل على قيمة ر بشرط ر $\in$ ط فيكون :

* رتبة الحد الذى يحتوى على ($\text{س}^{\text{ك}}$) = ر + ١
* الحد الذى يحتوى على ($\text{س}^{\text{ك}}$) هو ($\text{ح}_{\text{ر}+١}$)
* معامل ($\text{س}^{\text{ك}}$) هو معامل ($\text{ح}_{\text{ر}+١}$)

ملاحظات

إذا كانت : ر = صفر فإن : المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س

إذا كان ناتج قيمة ر قيمة كسرية أو سالبة أو أكبر من ن يكون المفكوك غير محتوياً على ($\text{س}^{\text{ك}}$)

النسبة بين حدين متتالين فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

$$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

ملاحظات

لإيجاد النسبة بين ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}-٢}$ نقسم كلاً من الحدين على ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}-١}$

إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{م}}$ فى تتابع حسابى فإن :

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}} + \frac{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{م}}}{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}} = ٢$$

إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{م}}$ فى تتابع هندسى فإن :

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ك}}}{{}^{\text{ن}}\text{ح}_{\text{م}}}$$

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

الأعداد المركبة

العدد التخيلى ت

هو العدد الذى مربعه يساوى (–١)
أى أن : ت^{٢} = –١

قوى العدد ت

القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم			
١	ت	–١	– ت

قيم العدد ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤

لإيجاد ت^{ن} في أبسط صورة حيث ن ∈ ص$_{+}$ نقسم ن على ٤ فيكون : ت^{ن} = إحدى القيم كما يلى :

باقى القسمة	٠	١	٢	٣
القيمة	١	ت	–١	– ت

لإيجاد ت$^{-ن}$ في أبسط صورة حيث ن ∈ ص$_{+}$ نضيف إلى الأس عدد يقبل القسمة على ٤ و يكون أكبر من ن مباشرة

مجموعة الأعداد التخيلية

ت = { س : س = ﻡ ت ، ﻡ ∈ ح ، ت^{٢} = –١ }

العدد المركب

هو ما كان على الصورة : ع = س + ت ص
حيث : س ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = –١

ملاحظات

يطلق على س الجزء الحقيقى ، على ص الجزء التخيلى
و إذا كان س = ٠ ، فإن العدد يكون تخيلياً صرفاً ، إذا كان ص فإن العدد يكون حقيقياً صرفاً

لكتابة العدد المركب فى أبسط صورة يضرب كلاً من البسط و المقام فى مرافق المقام

مجموعة الأعداد المركبة

ك = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = –١ }

تساوى عددين مركبين

إذا كان : س + ت ص = ﻡ + ت ب
فإن : س = ﻡ ، ص = ب

خاصية

إذا كان : س + ت ص = ٠
فإن : س = ٠ ، ص = ٠

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

تابع : الأعداد المركبة

مجموع عددين مركبين

$ع_1 + ع_2 = س_1 + س_2 + ت (ص_1 + ص_2)$

المعكوس الجمعى للعدد المركب

المعكوس الجمعى للعدد $ع = س + ت ص$
هو العدد : $-ع = - س - ت ص$

حاصل ضرب عددين مركبين

$ع_1 \cdot ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + ت (س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$

المعكوس الضربى للعدد المركب

المعكوس الضربى للعدد $ع = س + ت ص$
هو العدد : $\frac{1}{ع} = (ع)^{-1} = \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2} ت$
حيث : $س^2 + ص^2 \neq 0$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب $ع = س + ت ص$ فإن العدد المركب
$\bar{ع} = س - ت ص$ يسمى مرافق العدد $ع$

ملاحظة

العددان المركبان المترافقان مختلفان
فقط في إشارة الجزء التخيلى منهما

خواص العددان المترافقان

$\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع_1} + \bar{ع_2}$

$\overline{ع_1 \cdot ع_2} = \bar{ع_1} \cdot \bar{ع_2}$

$ع + \bar{ع} = 2 س \in ح$

$ع \cdot \bar{ع} = س^2 + ص^2 \in ح$

ملاحظة

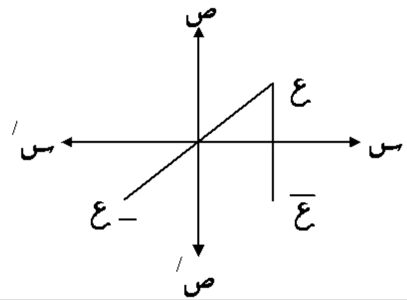
إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعداد حقيقية و كان أحد جذورها
عدد مركب فإن مرافق هذا العدد يكون أيضاً جذر لهذه المعادلة

أحمد الشنتوري يناير ٢٠١٥

تابع : الأعداد المركبة

التمثيل البيانى للأعداد المركبة " أشكال آرجاند "

الشكل التالى : يسمى شكل أرجاند يوضح تمثيل النقطة (س ، ص) تمثل العدد : ع = س + ت ص ، النقطة (– س ، – ص) تمثل معكوسه الجمعى : – ع = – س – ت ص ، النقطة (س ، – ص) تمثل مرافقه : $\overline{ع}$ = س – ت ص

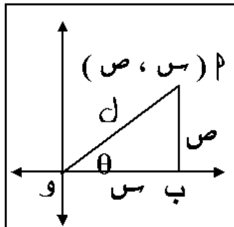


ملاحظة

* المحور الأفقى يمثل الجزء الحقيقى للعدد المركب بينما المحور الرأسى يمثل الجزء التخيلى له
* النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و معكوسه الجمعى متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل
* النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و مرافقه متماثلتين بالنسبة لمحور السينات

المقياس و السعة للعدد المركب

إذا كان : العدد المركب ع = س + ت ص تمثله النقطة ﺃ (س ، ص) فى شكل أرجاند فإن :



مقياس العدد ع هو : ‖ $\overrightarrow{و ﺃ}$ ‖

حيث : ل = | ع | = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

سعة العدد ع هى : ى (∠ ﺃ و ب)

حيث : سع (ع) = θ

ملاحظات

س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

إذا كانت : θ ∈] ٠ ، ٢ π] فإن : θ تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

موقع θ				
س	+	–	–	+
ص	+	+	–	–
موقع θ	الأول	الثانى	الثالث	الرابع

إذا كانت : θ سعة عدد مركب فإن : كل من (θ + ٢ ى π) " حيث ى ∈ ص+ يكون سعة لنفس العدد المركب

الصورة المثلثية للعدد المركب

ع = ل (حتا θ + ت حا θ) حيث :
ل = | ع | ، θ هى السعة للعدد ع

ملاحظة

الصور المثلثية لقوى العدد ت	
قوى العدد ت	الصورة المثلثية
١	(حتا ٠ + ت حا ٠)
ت	(حتا $\frac{\pi}{2}$ + ت حا $\frac{\pi}{2}$)
− ١	(حتا π + ت حا π)
− ت	(حتا $\frac{3\pi}{2}$ + ت حا $\frac{3\pi}{2}$)

المقياس و السعة لحاصل ضرب عددين مركبين

المقياس و السعة لخارج قسمة عددين مركبين

إذا كان : ع$_1$ = ل$_1$ (حتا θ_1 + ت حا θ_1) ، ع$_2$ = ل$_2$ (حتا θ_2 + ت حا θ_2) فإن :

ع$_1$ ع$_2$ = ل$_1$ ل$_2$ (حتا $[\theta_1 + \theta_2]$ + ت حا $[\theta_1 + \theta_2]$)

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}$ (حتا $[\theta_1 - \theta_2]$ + ت حا $[\theta_1 - \theta_2]$)

ملاحظات

ع^2 = ل^2 (حتا ٢θ + ت حا ٢θ) ،
ع^ن = ل^ن (حتا نθ + ت حا نθ)

الصور المثلثية لبعض الأعداد المركبة			
العدد	الصورة المثلثية	العدد	الصورة المثلثية
− ع	ل (حتا [π + θ] + ت حا [π + θ])	$\bar{ع}$	ل (حتا [− θ] + ت حا [− θ])
$\frac{1}{ع}$ (ع$^{-1}$)	$\frac{1}{ل}$ (حتا [− θ] + ت حا [− θ])	$\frac{1}{\bar{ع}}$	$\frac{1}{ل}$ (حتا θ + ت حا θ)

الشنتورى
يناير ٢٠١٥

تابع : الأعداد المركبة

ملاحظة

يجب كتابة العدد ع بالصورة المثلثية $ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)$ حيث $\theta \in [\,٠ ، ٢\pi\,[$ و ذلك حسب الربع الذى يقع فيه العدد ع

الصورة المعطاه للعدد	الربع الذى يقع فيه ع
$ل\,(\text{حا}\,\theta + ت\,\text{حتا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\frac{١}{٢}\pi - \theta] + ت\,\text{حا}\,[\frac{١}{٢}\pi - \theta])$	الأول
$ل\,(-\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\pi - \theta] + ت\,\text{حا}\,[\pi - \theta])$	الثانى
$ل\,(-\text{حا}\,\theta + ت\,\text{حتا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\frac{١}{٢}\pi + \theta] + ت\,\text{حا}\,[\frac{١}{٢}\pi + \theta])$	
$ل\,(-\text{حتا}\,\theta - ت\,\text{حا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\pi + \theta] + ت\,\text{حا}\,[\pi + \theta])$	الثالث
$ل\,(-\text{حا}\,\theta - ت\,\text{حتا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\frac{٣}{٢}\pi - \theta] + ت\,\text{حا}\,[\frac{٣}{٢}\pi - \theta])$	
$ل\,(\text{حتا}\,\theta - ت\,\text{حا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[-\theta] + ت\,\text{حا}\,[-\theta])$	الرابع
$ل\,(\text{حا}\,\theta - ت\,\text{حتا}\,\theta) = ل\,(\text{حتا}\,[\frac{٣}{٢}\pi + \theta] + ت\,\text{حا}\,[\frac{٣}{٢}\pi + \theta])$	

الصور الأسية للعدد المركب

$ع = ل\,هـ^{ت\,\theta}$ حيث : θ بالتقدير الدائرى

العمليات على الأعداد المركبة فى الصورة الأسية

(١) $ل_١\,هـ^{ت\,\theta_١} \times ل_٢\,هـ^{ت\,\theta_٢} = ل_١\,ل_٢\,هـ^{ت\,(\theta_١ + \theta_٢)}$

(٢) $\dfrac{ل_١\,هـ^{ت\,\theta_١}}{ل_٢\,هـ^{ت\,\theta_٢}} = \dfrac{ل_١}{ل_٢}\,هـ^{ت\,(\theta_١ - \theta_٢)}$

(٣) $(ل\,هـ^{ت\,\theta})^{ن} = ل^{ن}\,هـ^{ت\,ن\,\theta}$

(٤) $\sqrt[ن]{ل\,هـ^{ت\,\theta}} = \sqrt[ن]{ل}\;هـ^{\frac{\theta + ٢\,ر\,\pi}{ن} \times ت}$

حيث : $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots ، (ن - ١)$

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

نظرية ديموافر

إذا كان : ن عدداً نسبياً فإن :

$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{حتا}\,\text{ن}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\text{ن}\,\theta$

إذا كان : ن $\in$ ص

$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{حتا}\,\text{ن}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\text{ن}\,\theta$

و يكون للمقدار قيمة وحيدة

إذا كان : ن كسر حقيقى و ليكن ($\frac{1}{\text{ل}}$) فإن :

$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)^{\frac{1}{\text{ل}}} = \text{حتا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ل}} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ل}}$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، (ل − ١) ، ل $\in$ ص$^{+}$

ملاحظات

- جميع الجذور لها نفس المقياس
- السعة الأساسية للجذور تبدأ من $\frac{\theta}{\text{ل}}$ و تزداد بمقدار $\frac{2\pi}{\text{ل}}$
- عدد الجذور = ل
- المقدار يعطى الجذور من أى درجة للعدد المركب

خطوات إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب

بالصورة المثلثية

إذا كان : ع = س + ت ص فإن :

$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ل}^{\frac{1}{2}}(\text{حا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حتا}\,\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{ل}}\left(\text{حتا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$

حيث : ر = ٠ ، ١

أى الجذرين التربيعيين للعدد ع هما :

$\sqrt{\text{ل}}\,(\text{حتا}\,\frac{1}{2}\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{1}{2}\theta)$ ،

$\sqrt{\text{ل}}\,(\text{حتا}\,[\pi + \frac{1}{2}\theta] + \text{ت}\,\text{حا}\,[\pi + \frac{1}{2}\theta])$

بالصورة الجبرية

إذا كان : ع = س + ت ص

نفرض أن :

$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = (\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})^{\frac{1}{2}} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{ت}$

بالتربيع ينتج :

$\text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + 2\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ت}$

من خواص الأعداد المركبة نستنتج :

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \text{س}$ (١)

، $2\,\text{أ}\,\text{ب} = \text{ص}$ (٢)

و بحل (١) ، (٢) ينتج : أ ، ب و بالتالى نحصل على الجذرين التربيعيين للعدد ع

ملاحظة

إذا كان : ٢ أ ب موجب فإن : أ ، ب متشابهين فى الإشارة

أما إذا كان : ٢ أ ب سالب فإن : أ ، ب مختلفين فى الإشارة

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

الإميل : a_shantory2007@yahoo.com

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

الصورة المثلثية

(حتا ٠ + ت حا ٠) ، (حتا $\frac{٢}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{٢}{٣}\pi$) ، (حتا $\frac{٤}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{٤}{٣}\pi$)

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

- مربع أى جذر من الجذرين التكعيبين التخيليين للواحد الصحيح يساوى الجذر الآخر و يرمز لها بالرموز : ١ ، ω ، $\omega^٢$
- أحد الجذور حقيقى و الآخران مركبان و مترافقان
- النقاط التى تمثلها تقع فى شكل أرجاند على دائرة الوحدة و تقسمها إلى ثلاث أقواس متساوية الطول
- الجذور الثلاثة لها نفس المقياس و هو الواحد ، و قياسات زوايا سعتها هى : ٠ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{٤}{٣}\pi$
- $١ + \omega + \omega^٢ =$ صفر
  - $\omega + \omega^٢ = -١$
  - $١ + \omega^٢ = -\omega$
  - $١ + \omega = -\omega^٢$
- $\omega - \omega^٢ =$ ، $\omega^٢ - \omega =$ ، $\pm\sqrt{٣}$ ت

قوى (ω) الصحيحة

<table>
<tr><td colspan="4">قوى (ω) الصحيحة تعطى إحدى القيم</td></tr>
<tr><td colspan="2">١</td><td>ω</td><td>$\omega^٢$</td></tr>
<tr><td colspan="4">قيم العدد ω تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٣</td></tr>
<tr><td colspan="4">لإيجاد $\omega^{ن}$ في أبسط صورة حيث ن $\in$ $ص_+$ نقسم ن على ٣ فيكون : $\omega^{ن}$ = إحدى القيم كما يلى :</td></tr>
<tr><td>باقى القسمة</td><td>٠</td><td>١</td><td>٢</td></tr>
<tr><td>القيمة</td><td>١</td><td>ω</td><td>$\omega^٢$</td></tr>
<tr><td colspan="4">لإيجاد $\omega^{-ن}$ فى أبسط صورة حيث ن $\in$ $ص_+$ نضيف إلى الأس عدد يقبل القسمة على ٣ و يكون أكبر من ن مباشرة</td></tr>
</table>

الصورة الجبرية

١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

المحددات

تعريف المحدد

المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف (ص) ، ن من الأعمدة (ع) و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية حيث العنصر : $أ_{ص ع} \in ح$ ؛ ص ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

ملاحظات

العناصر $أ_{ص ع}$ من الممكن أن تكون أعداداً حقيقية أو أعداداً مركبة أو دوال حقيقية

درجة المحدد

قيمة كل من ص ، ع تحدد درجة المحدد فإذا كانت : ن = ٢ فإن : المحدد من الدرجة ٢ ، إذا كانت : ن = ٣ فإن : المحدد من الدرجة ٣ و هكذا

العوامل المرافقة لعناصر المحددات

فى محدد الدرجة الثالثة $م_٣$ إذا أخذنا العنصر $أ_{ص ع}$ الذى يقع فى الصف ص و العمود ع و حذفنا الصف ص و العمود ع فإنه ينشأ المحدد $م_٢$ ، و إذا ضربنا المحدد الناتج فى $(-١)^{ص+ع}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق

إشارة العوامل المرافق

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

قيمة المحدد

إذا كانت : ن = ٢ فإن :

$$م_٢ = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\,أ_{٢٢} - أ_{٢١}\,أ_{١٢}$$

إذا كانت : ن = ١ فإن :

$$م_١ = |أ_{١١}| = أ_{١١}$$

إذا كانت : ن = ٣ فإن :

$$م_٣ = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$= أ_{١١}\,(أ_{٢٢}\,أ_{٣٣} - أ_{٣٢}\,أ_{٢٣}) - أ_{٢١}\,(أ_{١٢}\,أ_{٣٣} - أ_{٣٢}\,أ_{١٣}) + أ_{٣١}\,(أ_{١٢}\,أ_{٣٢} - أ_{٢٢}\,أ_{١٣})$$

إذا كان (س – أ) أحد عوامل محدد فإن : س = أ تجعل قيمة المحدد = صفر

يناير ٢٠١٥

خواص المحددات

- فى أى محدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف لنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير

- إذا ضربنا عناصر صف (عمود) من محدد فى عدد ما و أضفناها إلى نظائرها من عناصر صف آخر(عمود آخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير

- فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر صف أو عمود كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع محددين

- إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف أو عمود فى محدد فيمكن أخذه خارج المحدد

- إذا بدلنا موضع صفان أو عمودان من محدد فإن قيمة المحدد الناتج تساوى المحدد الأصلى و تخالفه فى الإشارة

- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه أو عناصر أحد أعمدته

- قيمة أى محدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

  الصورة المثلثية للمحدد

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & \text{ا}_{١١} \\ ٠ & \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{١٢} \\ \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{١٣} \end{vmatrix}$$

أو

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{٣١} & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٢٢} & ٠ \\ \text{ا}_{٣٣} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

و تكون قيمة المحدد

$$= \text{ا}_{١١} \times \text{ا}_{٢٢} \times \text{ا}_{٣٣}$$

- إذا كان (س – ا) أحد عوامل محدد فإن : س = ا جعل قيمة المحدد = صفر

حالات إنعدام قيمة المحدد

- إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد فإن قيمة المحدد تساوى صفراً

- إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود فى محدد أصفار فإن قيمته تساوى صفراً

- فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة تساوى صفراً

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

تستخدم المحددات لحل مجموعة من المعادلات الخطية إذا كان : عدد المعاملات = عدد المجاهيل

الخطوات

(١) نوجد : Δ = محدد معاملات المجاهيل س ، ص ، ع

(٢) نوجد : $\Delta_{\text{س}}$ = محدد المجهول س نحصل عليه بوضع الثوابت من معاملات س

(٣) نوجد : $\Delta_{\text{ص}}$ = محدد المجهول ص نحصل عليه بوضع الثوابت بدلاً من معاملات ص

(٤) نوجد : $\Delta_{\text{ع}}$ = محدد المجهول ع نحصل عليه بوضع الثوابت بدلاً من معاملات ع

(٥) نوجد قيم المجاهيل كما يلى : س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

ملاحظات

- فى حالة حل معادلتين فى مجهولين س ، ص نوجد قيم س ، ص فقط
- إذا كان : $\Delta \neq$ صفر فإن : لمجموعة المعادلات حل وحيد
- إذا كان : $\Delta = \Delta_{\text{س}} = \Delta_{\text{ص}} = \Delta_{\text{ع}}$ = صفر فإن :لمجموعة المعادلات عدد لا نهائى من الحلول
- إذا كان : Δ = صفر ، أحد المحددات $\Delta_{\text{س}}$ ، $\Delta_{\text{ص}}$ ، $\Delta_{\text{ع}}$ فإن : لمجموعة المعادلات ليس لها حل

خارج نطاق المقرر