أولاً: قواعد الإحصاء

● معامل الارتباط الخطى لبيرسون

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}\ \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^2 - (\sum \text{ص})^2}}$$

● معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

$$\text{ر} = 1 - \frac{6 \sum \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

● معادلة خط الإنحدار

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}$$

$$\text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}}$$

مقدار الخطأ = | القيمة الجدوليه - القيمة التى تحقق معادله الانحدا

● الاحتمال الشرطى

★ $\text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})}$ (احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب)

★ $\text{ل}(\text{أ}'|\text{ب}) = 1 - \text{ل}(\text{أ}|\text{ب})$

★ $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) \times \text{ل}(\text{ب})$

★ $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{ب}|\text{أ}) \times \text{ل}(\text{أ})$

أ/ محمد عبد العزيز   بنها - ٠١٢٢٥٤٠٨٣٧٧

الأحداث المستقلة

★ شرط أن يكون أ، ب حدثان مستقلان هو

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

★ إذا كان أ، ب حدثين مستقلين فإن

ل(أ | ب) = ل(أ)

★ الحدثان المتنافيان أ، ب يكونان مستقلان

اذا كان ل(أ) × ل(ب) = ٠

قواعد هامة من العام السابق

★ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

★ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

★ ل(أ') = ١ − ل(أ)

★ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

★ ل(أ' ∪ ب') = ل(أ ∩ ب)' = ١ − ل(أ ∩ ب)

★ ل(أ' ∩ ب') = ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب)

★ ل(أ ∩ ب') = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

★ ل(أ ∪ ب') = ل(أ') + ل(أ ∩ ب)

★ اذا كان أ ⊂ ب فإن

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

المتغير العشوائي والتوزيعات الإحتماليه

★ التوقع (المتوسط) $\mu = \sum_{ر=1}^{ن} \text{س}_ر \times \text{د}(\text{س}_ر)$

★ التباين $\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} (\text{س}_ر)^2 \times \text{د}(\text{س}_ر) - \mu^2$

★ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

★ معامل الإختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100\ \%$

التوزيع الطبيعي

★ اذا كان س متغير طبيعي ، ص متغير معياري فإن

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

★ ويمكن حساب احتمال المتغير س في [أ ، ب] كالتالي

$$\text{ل}(\text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب}) = \text{ل}\left(\frac{\text{أ} - \mu}{\sigma} \leq \text{ص} \leq \frac{\text{ب} - \mu}{\sigma}\right)$$

ثانيا: التمارين الهامة

اذا كان $\sum \text{س} = ٤٠$ ، $\sum \text{ص} = ٣٠$ ، $\sum \text{س ص} = ٢٣٢$

$\sum \text{س}^2 = ٣٦٠$ ، $\sum \text{ص}^2 = ٢٠٠$ ، $\text{ن} = ٨$

أوجد معادلة خط الانحدار

الحل

$$\text{ب} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2} = \frac{٨ \times ٢٣٢ - ٤٠ \times ٣٠}{٨ \times ٣٦٠ - (٤٠)^2} = ٠,٥١٢٥$$

$$\text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٣٠ - ٠,٥١٢٥ \times ٤٠}{٨} = ١,١٨٨$$

معادله خط الانحدار $\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$

$\text{ص} = ١,١٨٨ + ٠,٥١٢٥ \text{ س}$

اذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٨ أوجد (١) ل(أ − ب) (٢) ل(أ ∪ ب)

الحل

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

= ٠,٣ × ٠,٨ = ٠,٢٤

(١) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٣ − ٠,٢٤ = ٠,٠٦

(٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٣ + ٠,٨ − ٠,٢٤ = ٠,٨٦

اذا كان ل(أ − ب) = ٠,٤ ، ل(ب − أ) = ٠,٣ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١ أوجد (١) ل(بَ | أ) (٢) ل(أَ | ب)

الحل

(١) ل(بَ | أ) = ل(بَ ∩ أ) / ل(أ) = ل(أ − ب) / ل(أ) = ٠,٤ / ٠,٥ = ٤/٥

(٢) ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٣ = ل(ب) − ٠,١ ∴ ل(ب) = ٠,٣ + ٠,١ = ٠,٤

ل(أَ | ب) = ل(أَ ∩ ب) / ل(ب) = ل(ب − أ) / ل(ب) = ٠,٣ / ٠,٤ = ٣/٤

اذا كان س متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ وانحرافه σ أوجد ل(μ + σ < س < μ + ٣σ)

الحل

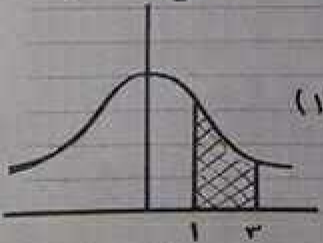
= ل((μ + σ − μ) / σ < ص < (μ + ٣σ − μ) / σ)

= ل(١ < ص < ٣)

= ل(٠ < ص < ٣) − ل(٠ < ص < ١)

= ٠,٤٩٨٧ − ٠,٣٤١٣

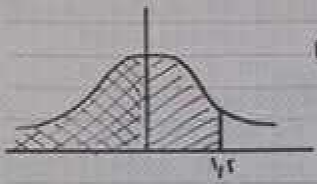
= ٠,١٥٧٤



م/ محمد عبد العزيز ٠١٢٢٥٤٠٨٣٧٧

إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونه من ٥٠٠ عامل يتبع توزيع طبيعي متوسطه ١٨٠٠ جنيه وانحرافه المعياري ١٥٠ جنيه فاوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨٠ جنيه

الحل



ل(س < ١٩٨٠)

$= ل\left(ص < \frac{١٩٨٠ - ١٨٠٠}{١٥٠} \right)$

= ل (ص < ١,٢)

= ٠,٥ + ٠,٣٨٤٩

= ٠,٨٨٤٩

∴ عدد العمال = ٠,٨٨٤٩ × ٥٠٠

≃ ٤٤٢ عامل

الجدول التالي يبين تقديرات ٦ طلاب في مادتي الاقتصاد والاحصاء . احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه

احصاء	جيد جدا	مقبول	مقبول	جيد	ممتاز	مقبول
اقتصاد	مقبول	جيد	جيد	ممتاز	ممتاز	جيد

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
جيد جداً	مقبول	٢	٦	-٤	١٦
مقبول	جيد	٥	٤	١	١
مقبول	جيد	٥	٤	١	١
جيد	ممتاز	٣	١,٥	١,٥	٢,٢٥
ممتاز	ممتاز	١	١,٥	-٠,٥	٠,٢٥
مقبول	جيد	٥	٤	١	١
					٢١,٥

$معامل\ الارتباط\ ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$

$= ١ - \frac{٦ \times ٢١,٥}{٦ \times ٣٥} = ٠,٣٩$

نوعه طردي

هام جداً

س	١٠	١٨	٢٤	٢٠	٣٠	٣٢	٣٥
ص	٢٠	١٥	١٣	١٥	١٠	١١	٩

من بيانات الجدول السابق
(١) معادلة خط الانحدار
(٢) تنبأ بقيمة ص عندما تكون س = ٢٥
(٣) إحسب مقدار الخطأ في ص اذا كانت س = ٢٠

الحل

س	ص	س٢	ص٢	س ص
١٠	٢٠	١٠٠	٤٠٠	٢٠٠
١٨	١٥	٣٢٤	٢٢٥	٢٧٠
٢٤	١٢	٥٧٦	١٤٤	٢٨٨
٢٠	١٥	٤٠٠	٢٢٥	٣٠٠
٣٠	١٠	٩٠٠	١٠٠	٣٠٠
٣٢	١١	١٠٢٤	١٢١	٣٥٢
٣٥	٩	١٢٢٥	٨١	٣١٥
Σس	Σص	Σس٢	Σص٢	Σس ص
١٦٩	٩٢	٤٥٤٩	١٢٩٦	٢٠٢٥

(١) معادلة خط الانحدار

$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}\,\Sigma\text{س ص} - \Sigma\text{س}\;\Sigma\text{ص}}{\text{ن}\,\Sigma\text{س}^2 - (\Sigma\text{س})^2}$$

$$\text{ب} = \frac{٧ \times ٢٠٢٥ - (١٦٩ \times ٩٢)}{٧ \times ٤٥٤٩ - (١٩٦)^2}$$

$\text{ب} \simeq -٫٤١٨٣$

$$\text{أ} = \frac{\Sigma\text{ص} - \text{ب}\,\Sigma\text{س}}{\text{ن}}$$

$$\text{أ} = \frac{٩٢ + (٫٤١٨٣ \times ١٩٦)}{٧} \simeq ٢٣٫٢٤$$

معادلة خط الانحدار هي $\hat{\text{ص}} = ٢٣٫٢٤ - ٫٤١٨٣\,\text{س}$

(٢) $\hat{\text{ص}} = ٢٣٫٢٤ - ٫٤١٨٣\,\text{س}$

عندما س = ٢٥

$\hat{\text{ص}} = ٢٣٫٢٤ - ٫٤١٨٣ \times ٢٥ \simeq ١٢٫٧٨٢٥$

(٣)

قيمة الخطأ عندما س = ٢٠

= | القيمة الجدولية — القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

= | ١٥ — (٢٣٫٢٤ — ٫٤١٨٣ × ٢٠) |

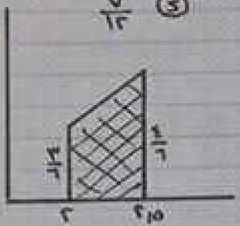
= | ١٥ — ١٤٫٧٨٤ | = ٫٢١٦

● اذا كان س متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{٦}(٢س-١) & حيث \quad ١ \leq س \leq ٣ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فإن ل(٢ ≤ س ≤ ٢٫٥) = ...

(أ) $\frac{٧}{٢٤}$ (ب) $\frac{١}{٢٤}$ (جـ) $\frac{٣٥}{٢٤}$ (د) $\frac{٧}{١٢}$



الحل

$د(٢) = \frac{٣}{٦}$ ، $د(٢٫٥) = \frac{٤}{٦}$

$ل(٢ \leq س \leq ٢٫٥) = \frac{١}{٢}(\frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٦}) \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٧}{٢٤}$

● اذا كان س متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي كالتالي

سر	-١	٠	١	٢	٤
د(سر)	٢ل	ل	٣ل	٢ل	ل

اوجد قيمة ل ثم احسب المتوسط والتباين للمتغير العشوائي س

الحل

∵ الدالة تمثل توزيع احتمالي

∴ مجموع القيم الاحتماليه = ١

∴ ٢ل + ل + ٣ل + ٢ل + ل = ١

٩ ل = ١

$ل = \frac{١}{٩}$

سر	د(سر)	سر × د(سر)	سر² × د(سر)
-١	$\frac{٢}{٩}$	$-\frac{٢}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$
٠	$\frac{١}{٩}$	٠	٠
١	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$
٢	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٨}{٩}$
٤	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{١٦}{٩}$
∑	١	١	$\frac{٢٩}{٩}$

الوسط الحسابي (التوقع)

$\mu = \sum س \times د(س)$

$= ١$

التباين $\sigma^2 = \sum س^2 \times د(س) - \mu^2$

$= \frac{٢٩}{٩} - (١)^2 = \frac{٢٠}{٩}$

● اذا كان $ل(أ) = \frac{1}{2}$ ، $ل(أ - ب) = \frac{3}{8}$ فإن $ل(\bar{ب} | أ)$ =

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{9}{12}$ (د) $\frac{3}{16}$

الحل

$ل(\bar{ب} | أ) = \frac{ل(\bar{ب} \cap أ)}{ل(أ)} = \frac{ل(أ - ب)}{ل(أ)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$

● اذا كان س متغير عشوائي متقطع متوسطه $\mu = 4$ وانحرافه المعياري $\sigma = 3$ فإن معامل الاختلاف له يساوي ....

(أ) 16٪ (ب) 75٪ (ج) 64٪ (د) 10,6٪

الحل

معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100$ ٪

$= \frac{3}{4} \times 100$ ٪ $=$ 75 ٪

● اذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن إحتمال ظهور العدد (5) علما بأن العدد الظاهر فردي يساوي

الحل

بفرض أ حدث ظهور العدد (5) = {5} ∴ $ل(أ) = \frac{1}{6}$

، ب حدث ظهور العدد فردي = {1، 3، 5}

∴ $ل(ب) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∵ $أ \cap ب$ = {5} ∴ $ل(أ \cap ب) = \frac{1}{6}$

$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

● اذا كان $ل(أ | ب) = \frac{1}{3}$ ، $ل(\bar{ب}) = \frac{13}{25}$ اوجد $ل(أ \cap ب)$

الحل

$ل(ب) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$ ∵ $ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$

∴ $ل(أ \cap ب) = ل(أ | ب) \times ل(ب) = \frac{1}{3} \times \frac{12}{25} = \frac{4}{25}$

ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر. اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة

الحل ٢ صورة ١ صورة ١ صورة ٠ صورة

ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ن(ف) = ٤

عدد مرات ظهور الصورة س = {٠، ١، ٢}

د(٠) = $\frac{١}{٤}$

د(١) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

د(٢) = $\frac{١}{٤}$

دالة التوزيع الاحتمالي هي

$س_ر$	٠	١	٢
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

لاحظ أن $\sum د(س_ر) = ١$

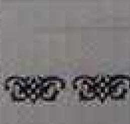
صندوق به ثلاث كرات مرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال فإذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن مجموع الرقمين المسحوبين أوجد التوزيع الاحتمالي

الحل

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)}

مدى س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ن(ف) = ٩



$س_ر$	٢	٣	٤	٥	٦
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

لاحظ أن

$\sum د(س_ر) = ١$

M

إذا س متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي كالتالي

س ر	٠	١	٢	م	٦
د(س ر)	٫١	٫١	٫٣	ب	٫٣

إحسب قيمه ب وإذا كان التوقع = ٣٫٥
أوجد قيمة م

الحل

∵ Σ د(س ر) = ١

∴ ٫١ + ٫١ + ٫٣ + ب + ٫٣ = ١

٫٨ + ب = ١ ∴ ب = ١ − ٫٨ = ٫٢

∵ μ = ٣٫٥

∴ $\sum_{ر=١}^{ن}$ س ر × د(س ر) = ٣٫٥

∴ ٠ × ٫١ + ١ × ٫١ + ٢ × ٫٣ + م × ٫٢ + ٦ × ٫٣ = ٣٫٥

∴ ٢٫٥ + ٫٢ م = ٣٫٥

٫٢ م = ٣٫٥ − ٢٫٥ = ١

∴ م = ١ / ٫٢ = ٥

● إحسب معامل ارتباط الرتب من الجدول التالى

	٦	٤٫٥	٢	١	٣	٤٫٥
س	١٢٠	١٣٠	١٥٠	١٦٠	١٤٠	١٣٠
ص	٥٠	٤٠	٦٠	٦٠	٦٠	٥٠
	٤٫٥	٦	٢	٢	٢	٤٫٥

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
١٢٠	٥٠	٦	٤٫٥	١٫٥	٢٫٢٥
١٣٠	٤٠	٤٫٥	٦	١٫٥-	٢٫٢٥
١٥٠	٦٠	٢	٢	٠	٠
١٦٠	٦٠	١	٢	١-	١
١٤٠	٦٠	٣	٢	١	١
١٣٠	٥٠	٤٫٥	٤٫٥	٠	٠
					$\sum$ ف٢ = ٦٫٥

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^٢}{\text{ن}(\text{ن}^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٦٫٥}{٦(٣٦ - ١)}$$

$$= ٠٫٨١$$

● اوجد معامل إرتباط بيرسون بين المتغيرين س/ص من الجدول التالى وحدد نوعه

س	١٠	٦	٤	٢	١	١	٧
ص	٢	٤	٦	٨	١٠	٩	١١

س	ص	س٢	ص٢	س ص
١٠	٢	١٠٠	٤	٢٠
٦	٤	٣٦	١٦	٢٤
٤	٦	١٦	٣٦	٢٤
٢	٨	٤	٦٤	١٦
١	١٠	١	١٠٠	١٠
١	٩	١	٨١	٩
٧	١١	٤٩	١٢١	٧٧
$\sum$س ٣١	$\sum$ص ٥٠	$\sum$س٢ ٢٠٧	$\sum$ص٢ ٤٢٢	$\sum$س ص ١٨٠

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^٢ - (\sum \text{س})^٢} \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^٢ - (\sum \text{ص})^٢}}$$

$$= \frac{٧ \times ١٨٠ - ٣١ \times ٥٠}{\sqrt{٧ \times ٢٠٧ - (٣١)^٢} \sqrt{٧ \times ٤٢٢ - (٥٠)^٢}} = -٠٫٦٢$$

عكسي

يونيو ٢٠١٠

اذا كان د(س) = { (س-١)/٨ حيث ١ ≤ س ≤ ٥ ، صفر فيما عدا ذلك }

(١) اثبت أن د(س) هي داله كثافه احتمال

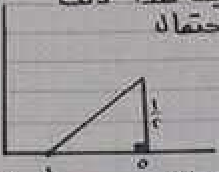
(٢) احسب ل(٢ < س < ٣)

الحل

(١) ل(١ ≤ س ≤ ٥)

= ½ × ٤ × ½ = ١

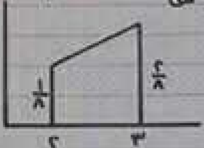
∴ د(س) هي داله كثافه احتمال للمتغير س



(٢) ل(٢ < س < ٣)

= ½ (١/٨ + ٢/٨) × ١

= ٣/١٦



يونيو ٢٠٠٩

اذا كان س متغير عشوائي متصل داله كثافه الاحتمال له هي

د(س) = { (س+١)/ك ، ١ ≤ س ≤ ٥ ، صفر فيما عدا ذلك }

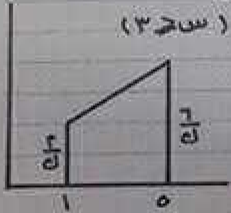
أوجد (١) قيمة ك (٢) ل(س ≤ ٣)

الحل

(١) ½ (٢/ك + ٦/ك) × ٤ = ١

٨/ك × ٢ = ١

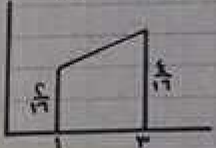
١٦/ك = ١ ∴ ك = ١٦



(٢) ل(س ≤ ٣)

= ل(١ ≤ س ≤ ٣)

= ½ (٢/١٦ + ٤/١٦) × ٢ = ٣/٨



مع أطيب تمنياتي بالتوفيق

أ/ محمد عبد العزيز

٠١٢٢٥٤٠٨٣٧٧
أ/ محمد عبد العزيز