الدوال الهولومرفية

د. المنجي بلال

18 جويلية 2017

المحتويات

باب 1

الدوال الهولومرفية

1.1 الخواص العامة للدوال الهولومرفية

1.1.1 الدوال الهولومرفية

تعريف 1.1.1
لتكن $f\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة معرفة على مجموعة مفتوحة Ω.

1. نقول أنّ f قابلة للإشتقاق في نقطة $z \in \Omega$ إذا وجد عدد مركب $\ell \in \mathbb{C}$ بحيث

$$\lim_{z\to a} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}^*} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \ell.$$

نكتب $\ell = f'(z)$ ويسمى مشتقة الدالة f في النقطة z.

2. نقول أنّ f هولومرفية على Ω إذا كانت f قابلة للإشتقاق في كل نقطة في Ω.
سنرمز بـ $\mathcal{H}(\Omega)$ لمجموعة الدوال الهولومرفية على Ω.

أمثلة 1.1.1

1. الدالة $f(z) = z^n$ هولومرفية على $\mathbb{C}$، لكل $n \in \mathbb{N}$.

2. الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست قابلة للإشتقاق في أي نقطة من $\mathbb{C}$ لأنّ $\dfrac{\bar{h}}{h} = \dfrac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h}$ و $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\bar{h}}{h}$ ليست موجودة.

3. إذا كانت $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية، إذاً الدالة f^* المعرفة بما يلي: $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ هولومرفية على $\overline{\Omega} = \{\bar{z};\ z \in \Omega\}$.
إذا كان $z, a \in \overline{\Omega}$،

$$\lim_{z\to a}\frac{f^*(z)-f^*(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\overline{(\frac{f(\bar z)-f(\bar a)}{\bar z-\bar a})}=\overline{f'(\bar a)}.$$

نظرية 1.1.1 (تمرين)

1. إذا كانت f و g دالتين هولومرفيتين على المفتوح Ω، فإنّ $f+g$ ،fg هولومرفية على Ω.
   الدالة $\frac{f}{g}$ هولومرفية على المجموعة المفتوحة $\{z\in\Omega;\ g(z)\neq 0\}$.
2. إذا كانت $f\colon\Omega_1\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة هولومرفية و $g\colon\Omega_2\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة هولومرفية بحيث $g(\Omega_2)\subset\Omega_1$، فإنّ $f\circ g$ دالة هولومرفية على Ω_2 و $(f\circ g)'(z)=f'(g(z))g'(z)$.

1.1.2 شروط كوشي ريمان Cauchy-Riemann's Conditions

مبرهنة 1.1.1
لتكن $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة معرفة بجوار $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in\Omega$، بحيث $f(z)=U(x,y)+\mathrm{i}V(x,y)$ ($U=\operatorname{Re}f$ و $V=\operatorname{Im}f$).
نفرض أن الدوال U و V قابلة للإشتقاق في النقطة (x_0,y_0).
إذاً الدالة f هي قابلة للإشتقاق في النقطة z_0 إذا و فقط إذا *conditions indexCauchy-Riemann*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}. \tag{1.1}$$

هذه الشروط تسمى شروط كوشي ريمان *Cauchy-Riemann conditions*.
هذه الشروط متكافئة مع الشرط التالي:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0). \tag{1.2}$$

البرهان

1. إذا كانت f قابلة للإشتقاق في النقطة $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$، إذاً $f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$.
   إذا أخذنا النهاية عندما يكون h عدد حقيقي، نجد ما يلي:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{U(x_0+h,y_0)-U(x_0,y_0)}{h} + \mathrm{i}\frac{V(x_0+h,y_0)-V(x_0,y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\mathrm{i}y_0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

إذا كان $h=\mathrm{i}t$، والعدد $t\in\mathbb{R}$ نجد ما يلي:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{U(x_0,y_0+t)-U(x_0,y_0)}{h} + \mathrm{i}\frac{V(x_0,y_0+t)-V(x_0,y_0)}{\mathrm{i}t} \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(x_0,y_0) = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

إذًا الدالة f تحقق شروط كوشي ريمان.

2. باستعمال تعريف الإشتقاق لدالة لعدة متغيرات نجد ما يلي:

$$\begin{cases} U(x_0+s,y_0+t)-U(x_0,y_0) = s\dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0) + t\dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0) + |h|\varepsilon_1(h) \\ V(x_0+s,y_0+t)-V(x_0,y_0) = s\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0) + t\dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0,y_0) + |h|\varepsilon_2(h) \end{cases},$$

مع $h=s+\mathrm{i}t$، $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0$.
إذًا

$$f(z_0+h)-f(z_0) = s\frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0)+t\frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)+\mathrm{i}(s\frac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0)+t\frac{\partial V}{\partial y}(x_0,y_0))+|h|\varepsilon(h),$$

مع $\varepsilon=\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2$. نستنتج من شروط كوشي ريمان أنّ:

$$f(z_0+h)-f(z_0) = Ah + |h|\eta(h),$$

مع $A=\dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0,y_0)$ و $\eta(h)$ نهايتها 0 عندما h ينتهي لـ 0. إذًا f قابلة للإشتقاق في النقطة z_0 و $f'(z_0)=A$.

□

ملاحظة 1.1.1
إذا كانت U و V دالتين $\mathcal{C}^2$ على مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ و إذا كانت الدالة $f = U + \mathrm{i}V$ هولومرفية على Ω، فإن U
و V دوال توافقية، أي $\Delta U = \Delta V = 0$، حيث $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$. ($\Delta$ يسمى مؤثر لابلاص *Laplace operator*).

نتيجة 1.1.2
إذا كانت f هولومرفية على Ω، فإنّ

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}(x,y),
\end{aligned}$$

حيث $z = x + \mathrm{i}y$.

أمثلة 1.1.2

1. نريد تحديد كل الدوال الهولومرفية $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Re} f(z) = U(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy$.
إذا كان V هو الجزئ التخيلي للدالة f، باستعمال شروط كوشي ريمان، $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 2x - 2y$،
إذاً $V = 2xy - y^2 + g(x)$ و $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2y + g'(x) = -(-2y - 2x) = 2x + 2y$. و
نستنتج أنّ $V = x^2 - y^2 + 2xy + C$ و $f(z) = (1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}C$.

2. نريد تحديد كل الدوال الهولومرفية $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - 2xy - 1$.
إذا كان V هو الجزئ التخيلي للدالة f، باستعمال شروط كوشي ريمان، $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 2y$، إذاً $V = 3x^2y - y^3 - y^2 + g(x)$ و $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 6xy + g'(x) = 6xy + 2x$، و نستنتج أنّ $V = 3x^2y - y^3 - y^2 + x^2 + C$.
$f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 2y + \mathrm{i}(6xy + 2x) = 3(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = 3z^2 + 2\mathrm{i}z$. إذاً $f(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 + 1 + \mathrm{i}c$، بحيث $c \in \mathbb{R}$.

نظرية 1.1.2

لتكن f دالة هولومرفية على مجموعة مفتوحة ومترابطة Ω. إذاً
$f \iff f' \equiv 0$ ثابتة على Ω.

البرهان

من البديهي و أنه إذا كانت f ثابتة فإنّ $f' \equiv 0$.
إذا كانت $f' \equiv 0$، يكفي أن نثبت أن الدالة ثابتة محليّا.
ليكن $z_0 \in \Omega$ و $r > 0$ بحيث $D(z_0, r) \subset \Omega$.
إذا كان $z_1 \in D(z_0, r)$، فإن العدد المركب $z_2 = \operatorname{Re} z_1 + \mathrm{i} \operatorname{Im} z_0 \in D(z_0, r)$ و $f(z_0) = f(z_2)$ لأنّ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $f(z_2) = f(z_1)$ لأنّ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$، إذاً $f(z_0) = f(z_1)$. □

نظرية 1.1.3

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية على مجموعة مفتوحة ومترابطة $\Omega \subset \mathbb{C}$. إذاً العبارات التالية متكافئة:

1. f ثابتة على Ω.
2. $\operatorname{Re} f$ ثابتة على Ω.
3. $\operatorname{Im} f$ ثابتة على Ω.
4. $|f|$ ثابتة على Ω.
5. $\bar{f}$ هولومرفية على Ω.

البرهان

- من البديهي و أنّ $1) \Rightarrow 2)$.
- باستعمال شروط كوشي ريمان (1.1)، $3) \iff 2)$.

بما أن $3) \iff 2)$، إذاً $4) \Rightarrow 3)$.
- إذا كان $|f| = 0$، فإنّ $\bar{f}$ هولومرفية على Ω.

إذا كان $|f| = c \neq 0$، إذاً $f\bar{f} = c$ و $\overline{f} = \frac{c^2}{f}$ هولومرفية على Ω.
- $\bar{f}$ هولومرفية على Ω. باستعمال شروط كوشي ريمان بالنسبة للدالة f و الدالة $\bar{f}$، نستنتج أنّ f ثابتة.

□

1.2 أمثلة لدوال هولومرفية

1.2.1 متسلسلات القوى Power series

مبرهنة 1.2.1
لتكن f الدالةالمعرفة بمتسلسلات القوى $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ و التي لها $R > 0$ شعاع (أو نصف قطر) التقارب، إذاً الدالة g المعرفة بمتسلسلات القوى $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ لها نفس شعاع التقارب، R.
الدالة f هي هولومرفية على القرص $D(0,R)$ و $f'(z) = g(z)$.

لأثبات هذه النتيجة سنعطي هذه المبرهنات التمهيدية

مبرهنة تمهيدية 1.2.2
لتكن $z \in \mathbb{C}$ و $h \in \mathbb{C}$ بحيث $0 < |h| \leq r$، إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$

$$|(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}| \leq \frac{|h|^2}{r^2}(|z|+r)^n \tag{1.5}$$

و

$$n|z|^{n-1} \leq \frac{1}{r}(2(|z|+r)^n + |z|^n) \tag{1.6}$$

البرهان
باستعمال المتباينة (1.5)

$$\begin{aligned}\left|(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k z^{n-k} - z^n - nhz^{n-1}\right| = \left|\sum_{k=2}^{n} C_n^k h^k z^{n-k}\right| \\ &\leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k}|h|^{k-2} \leq \frac{|h|^2}{r^2}\sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} r^k \leq \frac{|h|^2}{r^2}(|z|+r)^n.\end{aligned}$$

بما أنّ $|(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}| \geq nr|z|^{n-1} - |z|^n - (|z|+r)^n$، إذاً باستعمال المتباينة (1.5)، نستنتج أنّ

$$nr|z|^{n-1} \leq |z|^n + (|z|+r)^n + |(z+r)^n - z^n - nrz^{n-1}| \leq |z|^n + 2(|z|+r)^n.$$

□

المبرهنة البرهان 1.2.1

ليكن R' هو شعاع التقارب بالنسبة لمتسلسلة القوى $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$.

من البديهي و أنّ $R' \leq R$.

ليكن $r > 0$ بحيث $R < r + |z|$. باستعمال المبرهنة التمهيدية 1.2.2، نستنتج أنّ $|na_n z^{n-1}| \leq \frac{1}{r}(2|a_n|(|z|+r)^n + |a_n||z|^n)$ و $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ تتقارب مطلقا على القرص $D(0,R)$.

إذاً شعاع التقارب $R' \geq R \Rightarrow R = R'$.

باستعمال المعادلة (1.5),

$$|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)| \leq \frac{|h|}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|(|z|+r)^n,$$

و هذا يثبت أنّه عندما $h \to 0$, $f'(z) = g(z)$، لكل $z \in D(0,R)$.

□

نتيجة 1.2.3

إذا كان $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$، فإنّ $f \in \mathcal{C}^\infty(D(0,R))$، $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ و $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$.

(المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور للدالة f في 0.)

1.2.2 الدالة الأسية

الدالة الأسية e^z هي الدالة المعرفة بالمتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$, $(e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!})$ و تحقق الخاصيات التالية:

- $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$,
- $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$. هذه النتيجة نستنتجها من ضرب المتسلسلات.
- $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = 1$ لكل $z \in \mathbb{C}$,
- $\mathrm{e}^x > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$,
- $0 < \mathrm{e}^x < 1$ لكل $x \in \mathbb{R}_-^*$,
- $\mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$,
- $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1$ لكل $y \in \mathbb{R}$، إذاً $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{e}^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

هذه الخواص تثبت أنّ الدالة الأسية $(\mathbb{C}^*,\times) \longrightarrow (\mathbb{C},+)\ \mathrm{e}^z \longmapsto z$ هي تشاكل زمر.

نعرف

$\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ • دالة جيب التمام

$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2i}$ • دالة الجيب

$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ • دالة جيب التمام الزائدي

$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ • دالة الجيب الزائدي

إذًا $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$, $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$, y هو زاوية للعدد e^{z} (و هذا يعطي معادلة أولار (Euler Formula) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$).

1.2.1 خاصيات

$\cos z + \mathrm{i}\sin z = e^{\mathrm{i}z}$, $\cos z - \mathrm{i}\sin z = e^{-\mathrm{i}z}$، إذًا $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

$\cosh z + \sinh z = e^{z}$, $\cosh z - \sinh z = e^{-z}$، إذًا $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

$\cosh(\mathrm{i}z) = \cos z$ و $\sinh(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sin z$.

1.2.3 الدالة اللوغارتمية

مبرهنة تمهيدية 1.2.4

لكل $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$، يوجد $r > 0$ و $\theta \in [0, 2\pi[$ بحيث $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta}$.

البرهان

بما أنّ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$، فإنّ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

نفرض أنّ $r = 1$.

• إذا كان $0 \le x < 1$ و $y \ge 0$، نعرف أنّ الدالة $f(\theta) = \cos\theta$ هي تناقصية و متصلة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ و تأخذ قيمها على الفترة $[0, 1]$ و بما أنّ $x \in [0, 1[$، يوجد عدد وحيد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ بحيث $x = \cos\theta$.

من ناحية أخرى $x^2 + y^2 = 1$ و $y \ge 0$، إذًا $y = \sqrt{1 - x^2} = \sin\theta$، و $x + \mathrm{i}y = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

• إذا كان $x \ge 0$ و $y \le 0$, $x \ne 1$.

من كل ما سبق نستنتج أنّ ه يوجد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ وحيد بحيث $x - \mathrm{i}y = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$، بحيث $\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = x + \mathrm{i}y = \cos(2\pi - \theta) + \mathrm{i}\sin(2\pi - \theta)$ و $2\pi - \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$.

• إذا كان $x \le 0$, $x \ne -1$ و $y \ge 0$.

نستنتج مما سبق أنّ $\theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ بحيث $-x - \mathrm{i}y = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$، و هذا يثبت أنّ $x + \mathrm{i}y = \cos(-\pi + \theta) + \mathrm{i}\sin(-\pi + \theta)$، حيث $\theta - \pi \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$.

• إذا كان $x \le 0$, $x \ne 1$ و $y \le 0$.

مما سبق نستنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ بحيث $-x - \mathrm{i}y = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. و

نستنتج أنّ $x+\mathrm{i}y=\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)$، حيث $\theta+\pi\in]\pi,\frac{3\pi}{2}]$.

- إذا كان $x=1$ و $y=0$, إذاً $x+\mathrm{i}y=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$.
- إذا كان $x=-1$ و $y=0$، إذاً $x+\mathrm{i}y=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$.

أحادية θ في الفترة $[0,2\pi[$ تستنتج من أن 2π هي دورة الدالة $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

$\square$

سنثبت أن الدالة اللوغارتمية المعرفة كما سبق أنها دالة هولومرفية.

ملاحظة 1.2.1
لقد أثبتنا أنه لكل $\alpha\in\mathbb{R}$ و لكل $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$، يوجد عدد وحيد $r>0$ و عدد وحيد $\theta\in[\alpha,\alpha+2\pi[$ بحيث $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

نظرية 1.2.1
الدالة $A\colon\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+\longrightarrow]0,2\pi[$ المعرفة كما يلي:
$A(z)=A(r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta))=\theta$ هي دالة متصلة.

البرهان
$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=x+\mathrm{i}y$، بحيث $\theta\in]0,2\pi[$.

$x=r\cos\theta=-r\cos(\pi-\theta)=-2r\cos^2(\frac{\pi-\theta}{2})+r$.

$y=r\sin\theta=r\sin(\pi-\theta)=2r\cos(\frac{\pi-\theta}{2})\sin(\frac{\pi-\theta}{2})$.

$r-x=2r\cos^2(\frac{\pi-\theta}{2})$.

$y=2r\cos(\frac{\pi-\theta}{2})\sin(\frac{\pi-\theta}{2})$

$\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}=\tan(\frac{\pi-\theta}{2})\Rightarrow\frac{\pi-\theta}{2}=\tan^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x})$. إذاً

$$\theta=\pi-2\tan^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x}),$$

و A متصلة.

$\square$

بنفس الطريقة، الدالة $]\alpha,\alpha+2\pi[\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},t\geq 0\}$ المعرفة كما يلي:
$A_\alpha(z)=A(r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta))=\theta$ متصلة.
لإثبات أن الدالة الوغارتمية هي هولومرفية، نحتاج للنتيجة التالية:

مبرهنة 1.2.5
ليكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ و لتكن $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة هولومرفية. نفرض كذلك أنّ

لكل $z \in \Omega$، $f'(z) \neq 0$،
الدالة f هي تقابل بين Ω و $f(\Omega) = \Omega'$، مع أنّ Ω' مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$.
إذا كانت الدالة f^{-1} متصلة على Ω'، فإنّ f^{-1} دالة هولومرفية على Ω' و

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \quad \forall\, w \in \Omega'.$$

البرهان
ليكن $w_0 \in \Omega'$ و $z_0 = f^{-1}(w_0) \in \Omega$. لكل $w \in \Omega'$، يوجد عدد وحيد $z \in \Omega$، بحيث $w = f(z)$.
بما أنّ f^{-1} متصلة، إذًا إذا كان w يقترب من w_0، فإنّ z تقترب من z_0.
إذًا

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \underset{w \to w_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

$\square$

سنبرهن فيما بعد أنّ فرضية f^{-1} متصلة، غير ضرورية لأنها متصلة دائما، و كذلك فرضية $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$ و Ω' مجموعة مفتوحة $\mathbb{C}$ محققة لكل دالة هولومرفية تقابل معرف على مفتوح.

نتيجة 1.2.6
الدالة $\mathrm{e}^z \longmapsto z$ هي هولومرفية، تقبل من $A_t = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C};\ t - \pi < y < \pi + t, x \in \mathbb{R}\}$ إلى $\mathbb{C} \setminus J_t$، حيث $J_t = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, r \leq 0\}$، $t \in \mathbb{R}$. لها دالة عكسية من $\mathbb{C} \setminus J_t$ إلى A_t.
نرمز بهذه الدالة $\log_t$.

هذه النتيجة نستنتجها من المبرهنة 1.2.5 والتصال الدالة $A(z)$.

تعريف 1.2.1
الدالة اللوغرتمية الأساسية هي معكوس الدالة الأسية المعرفة على $\mathbb{C} \setminus J_0$ و تأخذ قيمها في المجموعة A_0. نرمز بهذه الدالة Log.

تمرين 1.2.1
أثبت أنّ

1. $\forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus J_0, \quad \mathrm{Log} z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 2\mathrm{i}\tan^{-1}\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.
2. $(\log_t z)' = \dfrac{1}{z}$ لكل $t \in \mathbb{R}$ و $z \in \mathbb{C} \setminus J_t$.

نتيجة 1.2.7
الدالة $f(z) = \log_t(z) - \log_{t'}(z)$ هي ثابتة على المجموعة $(\mathbb{C} \setminus J_t) \cap (\mathbb{C} \setminus J_{t'})$.

ملاحظة 1.2.2
العلاقة $\mathrm{Log}(z_1.z_2) = \mathrm{Log} z_1 + \mathrm{Log} z_2$ ليست دائما صحيحة، يكفي أن نأخذ المثال التالي:
$z_1 = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = z_2$,$z_1 z_2 = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}}$,$\mathrm{Log} z_1 z_2 = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$ و $\mathrm{Log} z_1 + \mathrm{Log} z_2 = \frac{3\mathrm{i}\pi}{2} \neq -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}$.

نظرية 1.2.2
إذا كان $|z| < 1$, $\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$, حيث $\mathrm{Log}(1-z)$ هي الدالة اللوغرتمية الأساسية.

البرهان
لتكن $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$، لكل $|z| < 1$، إذاً $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. It follows that $f(z) + \mathrm{Log}(1-z) = 0$ لأن $f(0) = \mathrm{Log}(1-0) = 0$.
□

تعريف 1.2.2
ليكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}^*$ و $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
إذا وجد على Ω دالة لوغارتمية هولومرفية $\log$، فنعرف الدالة $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$

1.3 الدوال التحليلية

1.3.1 أمثلة لدوال تحليلية

تعريف 1.3.1
نقول أنّ دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ هي تحليلية على Ω إذا كان لكل $z_0 \in \Omega$، يوجد جوار V للنقطة z_0 و متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$، بحيث $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ لكل $z \in V$.

مبرهنة 1.3.1
كل دالة تحليلية هي هولومرفية.

البرهان
هذه المبرهنة هي نتيجة 1.2.1. و عكس هذه المبرهنة سنبرهنه في الباب ؟؟؟؟ . □

مبرهنة 1.3.2
إذا كان متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ لها شعاع التقارب $R > 0$، فمجموع هذه المتساسلة $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ هي دالة تحليلية على القرص $D(0,R)$.

لبرهان هذه المبرهنة نثبت ما يلي:

مبرهنة 1.3.3

لتكن $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ متتالية ذات حدين. إذا كان $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_{n,m}| < +\infty$، إذاً

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_{n,m}| = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|a_{n,m}| = \sup_{N,M\in\mathbb{N}}[\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|a_{n,m}|],$$

و

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}a_{n,m}.$$

البرهان

هذه المبرهنة هي نتيجة مبرهنة فوبيني .Fubini's theorem

□

برهان المبرهنة 1.3.2

لتكن $z_0 \in D(0,R)$، $|z_0| = r_0 < R$. سنثبت أنّ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$، لكل $z \in D(z_0, R-r_0)$.

لتكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث $|z-z_0| < r-r_0 < R-r_0$ و لتكن

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k a_n z_0^{n-k}(z-z_0)^k \tag{1.7}$$

سنثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k a_n z_0^{n-k}(z-z_0)^k$ متقاربة مطلقا.

لتكن

$$R(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k |a_n||z_0|^{n-k}|z-z_0|^k \tag{1.8}$$

$$R(z) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k|a_n|r_0^{n-k}(r-r_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(\sum_{k=0}^{n}C_n^k r_0^{n-k}(r-r_0)^k) = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n < +\infty$$

. هذه المتسلسلة التي تعرف S متقاربة مطلقا، إذاً هي متقاربة إبدالية.

هذا يعني أنّ $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(z-z_0)^k(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k})$، و $S(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k}(z-z_0)^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z).$$

و نستنتج أنّ $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$، لكل $z \in D(z_0, R-r_0)$. □

1.3.2 قاعدة تمديد الدوال التحليلية

مبرهنة 1.3.4 (قاعدة التمديل التحليلية)
لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω في $\mathbb{C}$ و لتكن $z_0 \in \Omega$.
العبارات التالية متكافئة

1. $f \equiv 0$ على Ω.
2. يوجد جوار V للنقطة z_0 بحيث $f \equiv 0$ على V.
3. لكل $n \geq 0$، $f^{(n)}(z_0) = 0$.

البرهان
سنكتفي ببرهان $(2 \Rightarrow 1)$
ليكن $A = \{z \in \Omega;\ f \equiv 0$ على جوار $z\}$.
المجموعة A غير خالية و مفتوحة. إذًا يكفي أن نبرهن أنها مغلقة في Ω.
لتكن متتالية $(z_n)_n$ في A تتقارب نحو $a \in \Omega$.
بما أن $z_n \in A$، فإنّ $f^{(k)}(z_n) = 0$ لكل $k \in \mathbb{N}$ و باستعمال الإتصال، فإنّ $f^{(k)}(a) = 0$.
بما أنّ الدالة f تحليلية، إذًا $f \equiv 0$ بجوار النقطة a. □

نتيجة 1.3.5
لتكن f و g دالتين تحليليتين على نطاق $\Omega \subset \mathbb{C}$.
إذا كانت f و g متساوية بجوار نقطة في Ω، فإنّهما متساويتين على Ω.

1.3.3 مبدأ الأصفار المعزولة Principle of Isolated Zeros

مبرهنة 1.3.6

لتكن f دالة تحليلية على نطاق $\Omega \subset \mathbb{C}$. إذا كانت الدالة f ليست الدالة الصفرية على Ω، فإنّ مجموعة الأصفار للدالة f هي مجموعة مغلقة ومعزولة في Ω.

البرهان
لتكن $A = f^{-1}\{0\}$ مجموعة أصفار الدالة f.
المجموعة A مغلقة لأنّ الدالة f متصلة.
ليكن $z_0 \in A$، باستعمال مبرهنة 1.3.4، يوجد k بحيث $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
نختار k أصغر عدد طبيعي بحيث $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
إذاً متسلسلة القوى للدالة f في النقطة z_0 هي $f(z) = a_k(z-z_0)^k + (z-z_0)^k g(z)$، بحيث $a_k \neq 0$ و $g(z_0) = 0$، $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$.
بما أنّ $g(z_0) = 0$، يوجد جوار V للنقطة z_0 بحيث $|g(z)| < |a_k|$ لكل $z \in V$.
إذاً $|f(z)| \geq |z-z_0|^k(|a_k| - |g(z)|) > 0$ لكل $z \in V \setminus \{z_0\}$.
و نستنتج أنّ z_0 هو الصفر الوحيد للدالة f في V. □

نتيجة 1.3.7
إذا كانت f دالة تحليلية و ليست الدالة الصفرية على نطاق Ω، فإنّه كل مجموعة متراصة في Ω تحتوي على عدد منته من أصفار الدالة f.

نتيجة 1.3.8
إذا كانت f و g دالتين تحليليتين على نطاق Ω، و متساويتين على مجموعة جزئية تحتوي على نقطة تراكم في Ω، إذاً الدالتين متساويتين على Ω.

1.4 تمارين الباب الثاني

تمرين 1 :
أوجد شروط كوشي ريمان في الإحداثيات القطبية. $F\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$، حيث $f(z) = f(re^{\mathrm{i}\theta}) =$.$U(r,\theta) + V(r,\theta)$

تمرين 2 :

1. أثبت المعادلات التالية:
   أ) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ،$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
   ب) $\cosh(z+w) = \cosh z \ \cosh w + \sinh z \ \sinh w$، $\sinh(z+w) = \sinh z \ \cosh w + \sinh z \ \sinh w$، $\cos(z+w) = \cos z \ \cos w - \sin z \ \sin w$ و $\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w$.
   ج) $\frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x) = \cosh^2 y - \sin^2 x = \sinh^2 y + \cos^2 x = |\cos z|^2$، حيث $z = x + \mathrm{i}y$.
   د) $\frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) = \cosh^2 y - \cos^2 x = \sinh^2 y + \sin^2 x = |\sin z|^2$ و استنتج أن $|\sin z| \geq |\sinh y|$.
2. ليكن $z_0 = \pi/2 + \mathrm{i}\ln(4+\sqrt{15})$. أثبت أن $\sin z_0 = 4$.

تمرين 3 :
لتكن f و g دالتين تحليليتين معرفتين على مجال (مفتوح و مترابط) Ω و ليكن $a \in \Omega$.
نفترض أنه توجد متتالية $(z_n)_n$ في Ω بحيث $z_n \neq a$، $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.
أثبت أن $f \equiv g$ على Ω.

تمرين 4 :

1. أوجد كل الدوال التحليلية f المعرفة بجوار 0 بحيث $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$.
2. أوجد كل الدوال التحليلية f المعرفة بجوار 0 بحيث $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$.

تمرين 5 :
لتكن g دالة تحليلية معرفة بجوار $z_0 \in \mathbb{C}$.

أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} g^{(n)}(z_0)$ متقاربة، إذًا الدالة g يمكن تمديدها كدالة كلية (هولومرفية على $\mathbb{C}$).

تمرين 6 :

1. أثبت أنه إذا كانت الدالة f تحليلية حقيقية و $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ على $]x_0-R, x_0+R[$، إذًا يمكن تمديد الدالة f إلى دالة تحليلية على القرص $D(x_0,R)$.
2. أثبت أنه إذا كانت الدالة f تحليلية على $\mathbb{R}$ حيث $|f^{(n)}(0)|\leq M$، $\forall n\in\mathbb{N}$، إذًا يمكن تمديد الدالة f إلى دالة تحليلية على $\mathbb{C}$.

تمرين 7 :

لjكن f دالة تحليلية على القرص $D(0,R)$ بحيث $f(ze^{\frac{2i\pi}{n}})=f(z)$، $\forall z\in D(0,R)$، حيث $n\in\mathbb{N}$.
أثبت أنه توجد دالة تحليلية g على $D(0,R^n)$ بحيث $f(z)=g(z^n)$.