إعداد:
م. محمود مجدى

رياضة بالعامية

هتفهم رياضة صح

التفاضل (الاشتقاق)

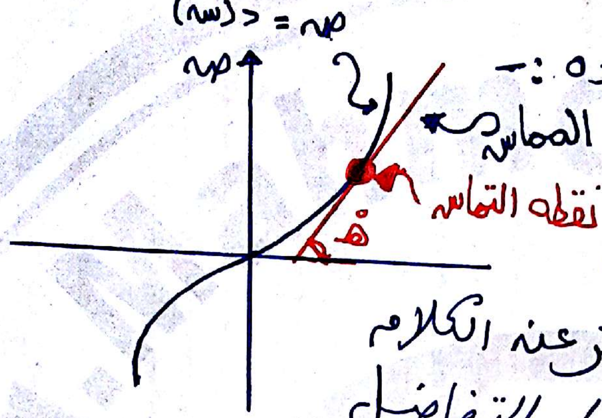
إعداد م/ محمود مجدي

TEL: 01060606658

التفاضل [الاشتقاق] :-

هو معدل التغيير في الداله وهو هو برده ميل المماس

عند نقطه يعني ايه الكلام ده :-



لو عندك داله بالشكل ده

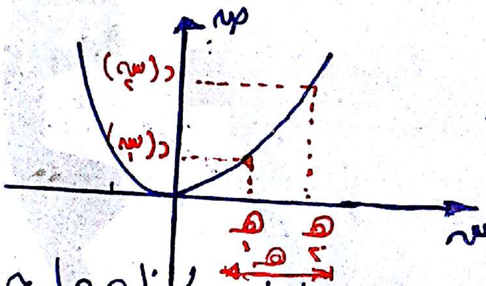
المشتقه الاولى = ميل المماس

عند نقطه التماس وهنعرفه اكتر عنه الكلام

ده في تطبيقات هندسيه على التفاضل

← ثاني حاجه عايزك تعرفها انه كل قوانين التفاضل

جت منه النهايات ...... تعالى نعرفه ازاى ؟



لو عندى داله بالمنظر ده .

جيت عند نقطه ولتكن هـ١ فبعد نقطه ما حصل تغيير هـ٢

هـ١ و بدأت احسب التغيير من عندها

طبعاً هـ١ عملتلي تغيير في الداله د(س١)

هـ٢ " " " " د(س٢)

لو تلاحظ الكلام ده

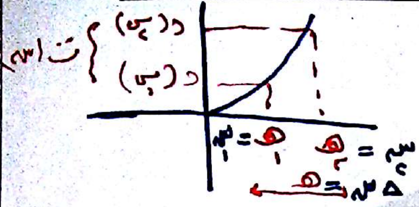
طيب لو عايز اعرفه التغيير اللي هو هـ بس ..... المهم

انه عندى نقطتين فاحنا خلناها (هـ) عشانه تشمل الكل

طيب عايز اعرفه التغيير مثلاً لو قولتلك انك معاك ١٠ جنيه

دلوقتي بعد ٣ دقايقه بقى معاك ٧ جنيه تقدر تقولي مقدار التغيير

في القيمه اللي كانت معاك كام هتقولي ١٠ - ٧ = ٣ جنيه



بالمثل برده عند هـ_1 ← $\text{د}(\text{س}_1)$

// هـ_2 ← $\text{د}(\text{س}_2)$

$\text{هـ} = \text{هـ}_2 - \text{هـ}_1$

$\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)$ هو ده التغير اللى حصل فى الداله

عشان كده لما كنت بتقول $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1}$

طيب برده الخلاصه من الهرى ده كله ايه ؟!

$\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1) = \Delta \text{ص}$ ← التغير فى الداله

وممكن يتكتب كده $\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})$

طيب لحساب متوسط التغير (متوسط) $\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

طيب لو عايز احسب معدل التغير بقى اللى هو التفاضل

هو ده ← $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{د}'(\text{س})$ (نها)

يعنى ايه ؟! لما هـ_1 ، هـ_2 بيقربوا من بعض قوى عشان تبقى نقطه واحده

لدرجه انه الاتنين قربوا من بعض قوى لدرجه الصفر

يبقى فكك من الهرى ده كله هو انت تعرفه الاتى وخلاصه:

1. نها $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{د}'(\text{س})$ ← المشتقه الاولى
2. متوسط التغير ← $\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$
3. التغير ← $\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)$

تعالى ناخد واحده تاني : د(س) = جاس

د(س) = جاس ، د(س + هـ) = جا(س + هـ) عوضه

تذكر :-

جا(م + ب)
= جام جتاب + جتام جاب

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{جا(س+هـ) - جاس}{هـ} = د'(س)$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جاس جتاهـ + جتاس جاهـ - جاس}{هـ}$$

هرتبها بس عشان اخد عامل مشترك

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جاس جتاهـ - جاس + جتاس جاهـ}{هـ}$$

قسم البسط على المقام

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جاس(جتاهـ - 1) + جتاس جاهـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \left[جاس \cdot \left(\frac{جتاهـ - 1}{هـ}\right) + جتاس * \left(\frac{جاهـ}{هـ}\right) \right]$$

$$= جاس * (صفر) + جتاس * (1) = د'(س)$$

تذكر

① $\lim_{هـ \to 0} \frac{جتاهـ - 1}{هـ} = صفر$

② $\frac{جام س}{ب س} = \frac{م}{ب}$

③ $\boxed{\begin{array}{l} \therefore ص = جاس \\ د'(س) = جتاس \end{array}}$

كل القوانين جت بنفس الطريقه

① قانون معدل التغير

+ شويه رياضه وتظبيط هتطلع القاعده

تعالى بقى اقولك جبنا قوانين التفاضل ازاى منه قانون معدل التغير

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = دَ(س)$$ ← المشتقه الاولى = ميل المماس

① $د(س) = س^{ن}$ هدفى اعرفه $دَ(س)$ ايه؟!

$د(س) = س^{ن}$ ، $د(س+هـ) = (س+هـ)^{ن}$

تذكر

$$\lim_{س \to م} \frac{س^{ن} - م^{ن}}{س - م} = \frac{ن}{م}(م)^{ن-م}$$

عوضه فى القانون تانى بقى

ده اللى هعمله هنا →

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

هجمع س واطرح س فى المقام بحيث ابقى مغيرتش حاجه

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^{ن} - س^{ن}}{(س+هـ) - (س)} = \frac{ن}{1} * س^{ن-1} = دَ(س)$$

يبقى لو عندك $ص = د(س) = س^{ن}$

يبقى $دَ(س) = ن . س^{ن-1}$

ودى القاعده الاولى فى التفاضل ← ننزل الاس ونطرح منه واحد

مثال (1): $ص = س^{3} + 3س$

$صَ = 3س^{2} + 3$

مثال (2): $ص = 3س^{2} + 5س + 3$

$صَ = 2 \times 3 س + 5 + صفر$ ← ليه ← تفاضل الثابت = صفر

$ص = م$

$صَ = صفر$

طيب مش انا قولتلك من شويه انه المشتقه الاولى ليها كذا اسم : طيب ماتيجى اعرفك بالمره الاسماء :

ص هى هى د(س)

المتغير اللى فى الداله

مثلاً : $ص = س^2 + 1$

ممكن تسميها د(س) ← بتنطق داله فى س او دالة (س)

$ص = ع^2 + 1$

$د(ع) = ع^2 + 1$ وهكذا على حسب المتغير .....

طيب الاسماء بتاعت المشتقه بقى :

① $\acute{ص}$ ③ ميل المماس

② $\acute{د}(س)$ ④ $\frac{دص}{دس}$

← كل دى اسماء معناها المشتقه الاولى

① $\acute{ص}$ [اول مسمى]

لما كنت قايلك انه $ص = س^2 + 1$ ← دى داله فى س

لو عايز اشتق ← $\acute{ص} = 2س$

الفكره كلها هل ديماً س ، ص هما اللى هيدهملى على طول اكيد لأ

ممكن يديلك اى متغيرين : مثلاً $ع = ٣ م^٤ + ٢ م$

عايز اشتق : المشتقه الاولى هى $عَ = ٢ \times ٤ م^٣ + ٢$

بنزل الاس ونطرح منه واحد

يبقى لو هى ع ← عَ

هو هو

ص ← صَ

هو هو

عفريت ← (عفريت)َ

هو هو

يبقى بميز المشتقه الاولى انى بحط على نفس الرمز شرطه وبطبق القاعده فى الطرف الايسر يبقى انى انزل الاس واطرح منه واحد #

---

② ثانى مُسمى للمشتقه الاولى:

اللى هو ميل المماس ده بس تبقى عارفه انه لوقالك ميل المماس يبقى هتشتق مره واحده بس وده اى مُسمى #

---

③ ثالث مُسمى للمشتقه الاولى: دَ(س)

$د(س) = س^٢ + ١$ ← $دَ(س) = ٢ س$

لازم يكون نفس المتغير

طيب لو عندى $ع^٢ + ١$ تفتكر هحط ايه ؟!

هتبقى $د(ع) = ع^٢ + ١$ يبقى تشتقها $دَ(ع) = ٢ ع$

④ المسمى الرابع بقى : $\frac{ءص}{ءس}$.

لما كنت مديلك $ص = س^{2} + 1$

فالمشتقه الاولى هى $\frac{ءص}{ءس} = 2س$ معناها بشتق ص بالنسبه لـ س

طيب تعالى اعرفك انه $\frac{ء(\;)}{ءس}$ معناها اشتق اللى جوه هنا بالنسبه لـ س

يعنى لما جيت تجيب المشتقه الاولى للداله $ص = س^{2} + 1$ اللى هى $\frac{ء(ص)}{ءس}$ اشتقلى الـ ص فروحت دورت على الـ ص

ليه بقولك الكلام ده ---- عشان ممكن اعملك كده :-

اشتق اللى جوه

$\frac{ء}{ءس}(س^{4} + س^{3}) = 4س^{3} + 3س^{2}$

طيب برده مش شرط على طول تبقى الرموز اللى عندك س ، ص

مثلاً :- $ن = 5م^{2} + 1$

للامانه الكلام ده ناقص حته

$ن' = \frac{ءن}{ءم} = 10م$

ايه اللى ناقصه : $ص = س^{2} + 1$

$ص' = \frac{ءص}{ءس} = 2س * \frac{ءس}{ءس}$ ← الكلام ده $= 1$ فمكتبتش بجطه

ليه بقولك كده : $ص = ع^{2} + 6$

$\frac{ءص}{ءس} = 2ع * \frac{ءع}{ءس}$ ← $\frac{ء(الرمز)}{ء \text{ اللى بشتق بالنسباله}}$ #

← المسمى رقم ④ : $\frac{د ص}{د س}$ برده ... تابع

ص = س² + ١

جيت قولتلك انه لو عندى داله ص

وعايز اجيب المشتقة الاولى بقول $\frac{د ص}{د س}$

بتقول ا د / اللى هنا على ا د ا اللى هنا

يعنى ايه برده : يعنى انا بشتق ص بالنسبه لـ س

عشانه قولتلك مش شرط س ، ص

ليه عشانه ممكن يجبلك اى متغيرين تانين

مثلاً : $م = ن^2 + 1$

يبقى المشتقة الاولى :

$م' = \text{-------}$

أو

$د'(ن) = \text{------}$

أو

$\frac{د م}{د ن} = \text{------}$

يبقى المشتقة الثانيه :

$م'' = \text{------}$

$د''(ن) = \text{------}$

$\frac{د^2 م}{د ن^2} = \frac{د\left(\frac{د م}{د ن}\right)}{د ن}$

اشتقلى

وخد بالك فوق ه التربيع على الد تحت التربيع ع الـ ن

يبقى كده ابو افس ≠

$ص = د(س)$ $\qquad ص' = د'(س) = \frac{دص}{دس}$

طيب ده لو كانت المشتقه الاولى ------
لو عايز تجيب المشتقه الثانيه يبقى ---- ← نشتق المشتقه الاولى
〃 〃 〃 〃 الثالثه 〃 ← 〃 الثانيه

$ص \xrightarrow{\text{تشتقها تديلك}} ص' = د'(س) = \frac{دص}{دس}$

تشتقها تديلك ↓

$ص'' = د''(س) = \frac{د^2ص}{دس^2}$

تشتقها تديلك →

$ص''' = د'''(س) = \frac{د^3ص}{دس^3}$

↓
⋮
وهكذا لحد

$\frac{د^نص}{دس^ن}$

ثاني: $ص = د(س)$ اشتق

ميل المماس $= ص' = د'(س) = \frac{دص}{دس} =$ المشتقه الاولى

معدل تغير ميل المماس $= ص'' = د''(س) = \frac{د^2ص}{دس^2} =$ المشتقه الثانيه

$ص''' = د'''(س) = \frac{د^3ص}{دس^3} =$ المشتقه الثالثه

لحد ------ $\frac{د^نص}{دس^ن}$

تعالى بقى اقولك انه التفاضل عباره عن شويه قوانين
بنفهمها و نطبقها وشكراً على كده اما عن المسائل
في التفاضل فهى متقسمه كالاتى :

① مسائل الاثباتات ← بيديلك داله = ✓ واثبات = ✓

طيب عايز منى ايه ؟! عايزك توصل الداله للأثبات
وهقولك خطوات ثابته تحل بيها اى اثبات ✓

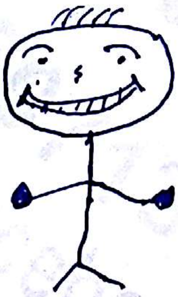
② اوجد قيمه ← مديلك داله = ✓ واثبات عايز قيمته = ✓

مطلوب منك توصل الداله للاثبات وهتلاقى فيه قيمه للاثبات هو عايزها

ركز كويس فى الدرس ده واتعلم القواعد اللى جايه دى عشان
هتستخدمها بعد كده كتير ← تطبيقات تفاضل ← سلوك داله / معدلات زمنيه / تطبيقات هندسيه
← ميكانيكا ← تفاضل الدوال المتجهه

هتلاقى نفسك بتستخدم التفاضل -----

تعالى نشوف القواعد ..



تعالى نمسك القواعد

① $ص = س^{ن}$ ⟵ $صَ = ن\ س^{ن-1}$ ننزل الاس ونطرح منه واحد

مثال: $ص = س^{٢} + ٤س$

$صَ = ٢س + ٤$

② $ص = P$ حيث P ثابت

$صَ = صفر$

مثال: $ص = س^{٢} + ٤س + ٣$

$صَ = ٢س + ٤ + صفر$ وطبعا مبنحطش الصفر

$صَ = ٢س + ٤$

③ القوس: $ص = [د(س)]^{ن}$ ⟵ $صَ = ن[د(س)]^{ن-1} *$ تفاضل مابداخل القوس

مثال: $ص = (٤س^{٢} + ٣)^{٥}$

$صَ = \underbrace{٥(٤س^{٢} + ٣)^{٤}}_{\text{ننزل الاس ونطرح منه واحد}} * ٨س$ تفاضل مابداخل القوس

④ الجذر التربيعى: $ص = \sqrt{د(س)}$ ⟵ $صَ = \frac{دَ(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$ تفاضل مابداخل الجذر

مثال $ص = \sqrt{س^{٢} + ١}$ ⟵ $صَ = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢} + ١}}$

⑤ طيب لو جذر مش تربيعي :

$$ص = \sqrt[م]{س^{ن}} = س^{\frac{ن}{م}}$$

حول الجذر لصورة اسية [الاس اللي جوه على اللي برة] - - - - بعد كده اشتق

$$صَ = \frac{ن}{م} س^{\frac{ن}{م} - 1}$$ - - - - وهكذا

هتلاقيها اتحولت لقوس

مثال

$$ص = \sqrt[3]{(س^{2} + 3س)^{2}} = (س^{2} + 3س)^{\frac{2}{3}}$$

$$صَ = \frac{2}{3} (س^{2} + 3س)^{\frac{-1}{3}} * [2س + 3]$$

متنساش تفاضل ما بداخل القوس

⑥ طيب لو عندك دالتين مضروبتين في بعض :

$$ص = د(س) * ر(س) \longrightarrow صَ = د(س) * رَ(س) + ر(س) * دَ(س)$$

الاولى الثانيه

الاولى * تفاضل الثانيه + الثانيه * تفاضل الاولى

$$ص = س^{2} (س^{2} + 1)^{5}$$

الاولى الثانيه

$$صَ = س^{2} * \underbrace{5(س^{2}+1)^{4} * 2س}_{} + (س^{2}+1)^{5} * 2س$$

الاولى تفاضل الثانيه + الثانيه * تفاضل الاولى

⑦ لو عندك دالتين مقسومتين على بعض

$$ص = \frac{د(س)}{ر(س)} \longrightarrow صَ = \frac{ر(س) * دَ(س) - د(س) * رَ(س)}{[ر(س)]^{2}}$$

$$= \frac{المقام * تفاضل البسط - البسط * تفاضل المقام}{[المقام]^{2}}$$

مثال : $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^2 + 1}{(\text{س}+1)^2}$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}+1)^2 * 2\text{س} - [(\text{س}^2+1) * 2(\text{س}+1) * 1]}{[(\text{س}+1)^2]^2}$$

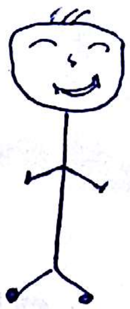
$$\text{ص}' = \frac{[\text{س}^2 + 2\text{س} + 1] \times 2\text{س} - [2\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 2\text{س} + 2]}{(\text{س}+1)^4}$$

$$\text{ص}' = \frac{\cancel{2\text{س}^3} + 4\text{س}^2 + \cancel{2\text{س}} - \cancel{2\text{س}^3} - 2\text{س}^2 - \cancel{2\text{س}} - 2}{(\text{س}+1)^4}$$

$$\text{ص}' = \frac{2\text{س}^2 - 2}{(\text{س}+1)^4}$$

كل اللى فات ده حماده واللى جاى حماده تانى خالص :D

تعالو بينا نشوفه



قاعده السلسله: ① لو في مسأله قولتلك انه $ص = د(ع)$ ، $ع = د(س)$
و قولتلك انك عايز $\frac{دص}{دس} = ----$

تعالى اعلمك حركه حلوة في قاعده السلسله تحل بيها اي حاجه :D

لما كنت بديلك $ص = د(س)$ بتجيب منها $\frac{دص}{دس}$ صح
ولما برده كنت بديلك $ع = د(ن)$ بتجيب منها $\frac{دع}{دن}$

بس كده هو ده المفتاح اوله

② بتشوف المطلوب بتاعه واللي انت تعرف تجيبه من كل واحد
ايه هو وتضربهم في بعض و تعمل اختبار للطرفين

مثلاً $ص = د(ع)$ ، $ع = د(س)$ وهو عايز $\frac{دص}{دس}$

دي اعرف اجيب منها $\frac{دص}{دع}$ دي اعرف اجيب منها $\frac{دع}{دس}$

اللي جبته من هنا اللي جبته من هنا

الاختبار

اللي هو عايزه ← $\frac{دص}{دس} = \cancel{\frac{دص}{دع}} * \cancel{\frac{دع}{دس}}$ ← دع هتروح مع دع هيتفضل $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس}$
يبقا الطرفين متساويين

③ الفكره الثانيه:

مديلك انه $ص = د(ع)$ ، $س = د(ع)$
وعايز برده $\frac{دص}{دس} = -----$

الحل

$ص = د(ع)$ $س = د(ع)$

تقدر تجيب منها $\frac{دص}{دع}$ $\frac{دس}{دع}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} * \frac{دع}{دس}$

هيجي تختبر مش هتلاقي حاجه بتروح مع حاجه لكن لو شقلبت $\frac{دس}{دع}$ ← $\frac{دع}{دس}$ هيطيروا صح

يبقى اللي هو عايزه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{دع}}} \times \frac{\cancel{\text{دع}}}{\text{دس}}$

كل اللى عملنا انى شقلبت ده

تعالى نشوفه مثال ونفهم بنعمل ايه ..

مثال: اذا كانت: $\text{ص} = \sqrt{١٤ - ٥\text{ع}}$ ، $\text{ع} = ٨\,\text{س}^٢$

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{------}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{١٤ - ٥\text{ع}}$ ، $\text{ع} = ٨\,\text{س}^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{-٥}{٢\sqrt{١٤ - ٥\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١٦\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{دع}}} \times \frac{\cancel{\text{دع}}}{\text{دس}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٥}{٢\sqrt{١٤ - ٥\text{ع}}} \times ١٦\,\text{س}$

هختصر هنا شويه هشيل (ع) واحط قيمتها وهضرب الارقام فى بعضها

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٤٠\,\text{س}}{\sqrt{١٤ - ٤٠\,\text{س}^٢}}$

* **ملحوظه**: لو ادالك مثلاً $\text{ص} = \text{د}(\text{ع})$ ، $\text{س} = \text{د}(\text{ع})$

وهو عايز المشتقه الثانيه $\left[\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}\right]$ --- اعمل ايه ؟!

مينفعش تعمل كده

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دع}^٢} \times \frac{\text{د}^٢\text{ع}}{\text{دس}^٢}$ الكلام ده غلط [لا تطبق إلا على الاولى]

اومال هتعمل ايه ؟! ----

① هات عادى $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دس}{دع}$ وشقلب

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ← هتطلع معاك دالة فى ع

عندك طريقتين :

① تشتق ضمنياً بالنسبه لـ س

يعنى $\frac{د\left(\frac{دص}{دس}\right)}{دس} = \frac{د^2ص}{دس^2} =$ هتشتق عادى وتضرب × $\frac{د(\text{الرمز اللى بشتقه})}{د\ \text{اللى بشتق بالنسباله اللى هو س}}$

② تشتق بالنسبه لـ "ع" عادى بس هتضرب فى حاجه

$\frac{د\left(\frac{دص}{دس}\right)}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ من د(اللى بشتق بالنسباله) / د(الحاجه اللى هنا)

مثال ص = ع² + ٤ ، س = ٥ع + ع³ + ٢

اوجد $\frac{د^2ص}{دس^2} = $ ----

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دس}{دع}$ وهشقلب $\frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ o.k

$\frac{دص}{دع} = ٢ع$ ، $\frac{دس}{دع} = ١٠ع^2$ ← $\frac{دع}{دس} = \frac{1}{١٠ع^2}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٢ع}{١٠ع^2} = \frac{٢}{١٠ع}$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{2}{15ع^2} \longrightarrow (1)$$

عايز بقى اجيب المشتقه الثانيه قدامى طريقتين :

(1)

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-2}{15ع^2} \times \frac{دع}{دس}$$

$$\frac{د(الرمش)}{د(اللى بشتق بالنسباله)}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-2}{15ع^2} \times \frac{1}{15ع^2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-2}{225ع^4}}$$

هنا انا اشتقيت بالنسبه لـ س و ضمنياً ...

(2)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{2}{15ع^2}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{دع}{دس} * \frac{د\left(\frac{دص}{دس}\right)}{دع}$$

$$\therefore \frac{د\left(\frac{دص}{دس}\right)}{دع} = \frac{-2}{15ع^2}$$

$$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{د\left(\frac{دص}{دس}\right)}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{-2}{15ع^2} \times \frac{1}{15ع^2}$$

وفى الاخر هى هى فخليك فى الاولى انت عارفها على طول ..

(٢) اوجد $\frac{دص}{دس}$ اذا كانت س = ٥ ن + ٣ ، ص = ١٦ ن^٢ + ٩ عند ن = ٥

الحل

س = ٥ ن + ٢ ، ص = ١٦ ن^٢ + ٩

$\frac{دس}{دن} = ٥$ ، $\frac{دص}{دن} = ٣٢ ن$

$\frac{دن}{دس} = \frac{١}{٥}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} * \left(\frac{دس}{دن}\right)$ ← لازم تشقلب ده

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} * \frac{دن}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٣٢ ن * \frac{١}{٥}$

بالتعويض عند ن = ٥

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٣٢ \times \cancel{٥} \times \frac{١}{\cancel{٥}}$

$$\boxed{\therefore \frac{دص}{دس} = ٣٢}$$

If you can dream it, you can do it ....

#حلمك - يستحق ☺

* افرحا جه في الجزء الأول من الملزمة
هما ازاى لو جالك مقياس تفاضله ....

تعالى نشوف

العصا يتين دول اسمهم مقياس

$$ص = |د(س)|$$

فاكر وانت صغير زمان كانو بيقولك المقياس بيتفك لقاعدتين

$$ص = |د(س)| = \begin{cases} \boxed{+\,د(س) \quad \geq} \\ -\,د(س) \quad < \end{cases}$$

دي اسمها قاعده

* بعد ما تفك كل قاعده لوحدها تعالى ناخد مثال نفهم منه احسن ....

مثال : $ص = |س - ٢|$ ..... اوجد $\frac{دص}{دس}$

* الحل *

$$ص = د(س) = \begin{cases} +(س - ٢) & س \geq ٢ \\ -(س - ٢) & س < ٢ \end{cases}$$

$$ص' = د'(س) = \begin{cases} +١ & س > ٢ \\ -١ & س < ٢ \end{cases}$$

تعالى اقولك انه فيه نوعين من الدوال :

داله صريحه : ودى على شكل

$\text{ص} = \text{د(س)} \ldots$

دى اللى انت متعود عليها اللى هى الـ ص فى طرفه فبنشتقها عادى ----

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{-- ----}$

داله ضمنيه

ودى على الشكل ده هتلاقى الـ ص مش فى طرفه

$\text{ص}^2 + \text{س}^2 = \text{---- }$

ازاى اشتق الداله دى ؟!

عادى طبق قواعد الاشتقاق بس بعد كل قاعده

اضرب * $\frac{\text{د(الرمز اللى بشتقه)}}{\text{د اللى بشتق بالنسباله}}$

يعنى ايه ؟! مثلاً $\text{ص}^2 + \text{س}^2 + ٥ = \text{صفر}$

هشتق عادى : $٢\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

$$\boxed{\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ص}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$$

تعالى ناخد مثال تانى

قولت مبنحفظش رياضه :D

مثال : $\text{ع}^3 + \text{ص}^2 = (٢\text{ص} + ١)^5$ اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$

الحل : $٣\text{ع}^2 + ٢\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٥(٢\text{ص}+١)^4 \times \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times ٢$

هات ده هنا

وضع عامل مشترك $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ هتطلع كده

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{٣\text{ع}^2}{٢ \times ٥(٢\text{ص}+١)^4 - ٢\text{ص}}$$

:D

زى مقولنامه شويه التفاضل بيجيلى على هيئه اثباتات لو بتستخدمه جوه دروسه زيه ... سلوك الداله وتطبيقاتها
وكمانه زى ---- تطبيقات هندسيه .
اللى عايز اقولهولك تعالى اخليك لو جتلك اى مساله اثبات اخليك تحلها ------ .

خطوات حل اى اثبات تفاضل :

$\boxed{1}$ تبصه على الاثبات ونشوف هنفاضل كام مره
وخد بالك .... $\frac{د^2ص}{دس^2} \neq \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$

دى المشتقه الثانيه

دى مربع المشتقه الاولى

$\boxed{2}$ فاضل ----- طلع الاثبات -- زى الفل .

$\boxed{3}$ مطلعش ---- روح هات الحدود بتاعت الاثبات فى طرفه يعنى $\frac{دص}{دس} = ----$ $\boxed{او}$ $\frac{د^2ص}{دس^2} = ----$

نروح نعوضه بيهم فى اى طرفه منه الاثبات --- طلع الكل قشطه --- مطلعش

$\boxed{4}$ روح بصه على الداله اللى معاك $ص = \boxed{}$
وبصه على اللى وصلتله هتلاقى نفسك بتعوضه بالداله وهيطلع معاك ---- #

تعالى نشوف مسائل ....

مثال (١) اذا كانت $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 7$ اثبت انه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$.

الحل

دى داله ضمنيه فهشتقها ضمنى

$$2\text{س} \times \underbrace{\frac{\text{دس}}{\text{دس}}}_{\text{بواحد}} + 2\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$$\therefore 2\text{س} + 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

بالقسمه على ٢ وهودى الناحيه التانيه بعكس الاشاره ....

$$-\cancel{2}\text{س} = \cancel{2}\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \quad \#$$

مثال ٢ اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فى ابسط صوره اذا كانت:

$$4\text{س}^2 + 12\,\text{س}\,\text{ص} + 9\,\text{ص}^2 = 4$$

الحل

هشتق بالنسبه لـ س :

$$4 \times 2\,\text{س} + 12\text{س} \times \text{ص}' + \text{ص} \times 12 + 2 \times 9\,\text{ص}\,\text{ص}' = 0$$

$$\therefore 8\text{س} + 12\text{س}\,\text{ص}' + 12\text{ص} + 18\text{ص}\,\text{ص}' = 0$$

$$8\text{س} + 12\text{ص} + \text{ص}'(12\text{س} + 18\text{ص}) = 0$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-8\text{س} - 12\text{ص}}{12\text{س} + 18\text{ص}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-4\cancel{(2\text{س} + 3\text{ص})}}{6\cancel{(2\text{س} + 3\text{ص})}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}}$$

حل اخر:

$$(2\text{س} + 3\text{ص})^2 = 4 \longleftarrow 2\text{س} + 3\text{ص} = \pm 2 \longleftarrow 2 + 3\text{ص}' = \text{صفر} \longleftarrow \text{ص}' = \frac{-2}{3} \quad \#$$

مثال ٣: اذا كانت: $\text{س}^3 - 2\text{س}^2\text{ص} + \text{ص}^2 = 1$ فاوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة (١، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

قبل ما اخش في الحل تعالى اعرفك شوية حاجات

1. ميل المماس $= \dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ده تعرف تجيبه

لما هشتق صح تعالى نجيبه ...

$$3\text{س}^2 - [2\text{س}^2 \cdot \text{ص}' + \text{ص} \cdot 4\text{س}] + 2\text{ص}\,\text{ص}' = 0$$

$$3\text{س}^2 - 2\text{س}^2\text{ص}' - 4\text{س}\,\text{ص} + 2\text{ص}\,\text{ص}' = 0$$

$$3\text{س}^2 - 4\text{س}\,\text{ص} = (2\text{س}^2 - 2\text{ص})\,\text{ص}'$$

$$\text{ص}' = \frac{3\text{س}^2 - 4\text{س}\,\text{ص}}{2\text{س}^2 - 2\text{ص}}$$

لإيجاد ميل المماس لابد من التعويض بنقطة التماس (١، ٢)

هعوض عند س = ١ ، ص = ٢ في المشتقة الاولى

$$\text{ميل المماس} = \boxed{\text{ص}' = \frac{5}{2}}$$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{رضر} = \text{ظا هـ}$

نجيب هـ = ...

$$\text{م} = \frac{5}{2} = \text{ظا هـ} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \text{هـ} = 68^\circ\, 11'\, 55''}$$

مثال ٤ أوجد ميل المماس للمنحنى

$س^2 + ص^2 = ص(5س + 2)$

عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات

الحل

تعالى قبل ما احلهالك اقولك على شوية حاجات

ميل المماس = ظاهـ = $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{\text{عند نقطة التماس}}$

* طيب هو قالك عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات يعني $س = 0$
* طيب لو قالك عند نقطة تقاطعه مع محور السينات يعني عند $ص = 0$

عشان تجيب النقطة معاك $س = 0$ هتعوض في الداله اللى ادهالك تجيب الـ ص تعالى نشوفه

$(0)^2 + ص^2 = ص(5 \times (0) + 2)$

$ص^2 = 2ص$

$ص^2 - 2ص = 0 \longrightarrow ص(ص - 2) = 0$

اما $ص = 0$ او $ص = 2$

يعني النقطة هي $(0 , 0)$ ، $(0 , 2)$

يعني هنحل مرتين تعالى نشتق الدالة بقى عشان اجيب المشتقة الاولى

$2س + 2ص\,ص' = ص(5) + (5س + 2) \times ص'$

$ص' = \frac{2س - 5ص}{(5س + 2) - 2ص}$

$م_1 = \left.ص'\right|_{(0,0)} = \frac{0}{2} = 0 \longrightarrow$ ميل المماس

$\therefore$ ميل المماس = صفر

عند النقطة $(0 , 2)$ بالتعويض في $ص'$

$ص' = \frac{2س - 5ص}{(5س + 2) - 2ص}$

$ص' = \left.\text{ميل المماس}\right|_{(0,2)} = \frac{2(0) - 5(2)}{5(0) + 2 - 2(2)}$

$\therefore ص' =$ ميل المماس $= 5$

مثال ٥ اذا كانت $(س - ص)^3 (س + ص) = 1$

اثبت انه : $\frac{دص}{دس} = \frac{ص + 2س}{س + 2ص}$

الحل

هفاضل بالنسبه لـ س ؛ الداله دى حاصل ضرب دالتين

$\underbrace{(س - ص)^3}_{\text{الاولى}} \underbrace{(1 + ص')}_{\text{تفاضل الثانية}} + \underbrace{3(س - ص)^2 (1 - ص')}_{\text{تفاضل الاولى}}$

$* \underbrace{(س + ص)}_{\text{الثانية}} = 0$

هختصر إني أخد عامل مشترك لـ $(س - ص)^2$ ←

$(س - ص)^2 \left[(س - ص)(1 + ص') + 3(س + ص)(1 - ص')\right] = 0$

لو عندك حاصل ضرب حاجتين = صفر

$(\underset{\text{الاول}}{\quad})(\underset{\text{الثاني}}{\quad}) = 0$

الاول = ٠ ، الثاني = ٠ هعمل كده

$(س - ص)^2 = 0$

$س - ص = 0$

$س = ص$

مرفوضه لا يحقق الاثبات

$(س - ص)(1 + ص') + (3س + 3ص)(1 - ص') = 0$

هفك الاقواس

$س - ص + س\,ص' - ص\,ص' + 3س - 3س\,ص'$
$- 3ص\,ص' + 3ص = 0$

$4س + 2ص - 4ص\,ص' - 2س\,ص' = 0$

هاخد $ص'$ عامل مشترك واودى الناحيه التانيه

$ص' = \frac{4س + 2ص}{4ص + 2س} = \frac{\cancel{2}(2س + ص)}{\cancel{2}(2ص + س)}$

مثال ٦: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كانت

$$\text{س}^٣ - \text{ص}^٣ - ٣\text{س}^٢\text{ص} + ٣\text{ص}^٢\text{س} + ٢٧ = ٠$$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ س :

$$٣\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢\text{ص}' - ٣\text{س}^٢\text{ص}' - \text{ص}(٦\text{س}) + ٣\text{ص}^٢ + \text{س}(٦\text{ص})\text{ص}' = ٠$$

هنجيب اللي فيه ص' جنب بعضه وهاخد ص' عامل مشترك

$$\text{ص}'(-٣\text{ص}^٢ - ٣\text{س}^٢ + ٦\text{س ص}) = (-٣\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢ + ٦\text{س ص})$$

$$\therefore \text{ص}' = ١$$

حل آخر:

$$\underbrace{\text{س}^٣ - \text{ص}^٣ - ٣\text{س}^٢\text{ص} + ٣\text{س ص}^٢}_{} = -٢٧$$

$$(\text{س} - \text{ص})^٣ = -٢٧$$

بأخذ $\sqrt[٣]{}$ للطرفين

$$\text{س} - \text{ص} = -٣$$

نشتق بالنسبة لـ س

$$١ - \text{ص}' = ٠$$

$$\therefore \text{ص}' = ١$$

يارب تكون فهمت حاجة

مثال ٦: أوجد ميل المماس للمنحنى

$$\sqrt{\text{س ص}} + ٣\text{س} - ٢\text{ص} = ٤$$ عند النقطة (٢، ٢)

الحل

$$\frac{\text{س ص}' + \text{ص}}{٢\sqrt{\text{س ص}}} + ٣ - ٢\text{ص}' = ٠$$

هضرب × $٢\sqrt{\text{س ص}}$ عشان أتخلص من الكسر

$$\text{س ص}' + \text{ص} + ٣\times٢\sqrt{\text{س ص}} - ٤\sqrt{\text{س ص}}\,\text{ص}' = ٠$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{ص} + ٦\sqrt{\text{س ص}}}{٤\sqrt{\text{س ص}} - \text{س}}$$

$$\text{ميل المماس} = \text{ص}'\Big|_{(٢،٢)} = \frac{٢ + ٦\sqrt{٢\times٢}}{٤\sqrt{٢\times٢} - ٢}$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{٧}{٣} \quad \#$$

مثال ٧ اذا كانت:
$$\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = م$$ حيث م ثابت
اثبت انه $$\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{س}$$

الحل

هنا دى عبارة عن قسمه دالتين
وهو هنا عايز $\frac{دص}{دس}$ يعنى هشتق بالنسبه لـ س #

$$\frac{ص\times 1 - س\, ص'}{ص^2} + \frac{س\, ص' - ص\times 1}{س^2} = صفر$$

عايز اضبط المسأله ---- !؟
الكسر الرقم ده عايز اشيله
يعنى لو ضربت الداله كلها × $س^2 ص^2$
هيشال تعالى نشوف

$$\frac{س^2 \times \cancel{ص^2} \times (ص - س\, ص')}{\cancel{ص^2}} + \frac{(س\, ص' - ص)\cancel{س^2}\, ص^2}{\cancel{س^2}} = 0$$

$$س^2 (ص - س\, ص') + ص^2 (س\, ص' - ص) = 0$$

$$س^2 ص - س^3 ص' + ص^2 س\, ص' - ص^3 = 0$$

$$(ص^2 س - س^3)\, ص' = ص^3 - س^2 ص$$

$$ص' = \frac{(ص^3 - س^2 ص)}{(ص^2 س - س^3)}$$

$$= \frac{ص\,\cancel{(ص^2 - س^2)}}{س\,\cancel{(ص^2 - س^2)}}$$

$$\frac{دص}{دس} = ص' = \frac{ص}{س} \quad . \#$$

مثال ٨ اذا كانت:
$$ص = \frac{س - 1}{س + 1}$$ اثبت انه:
$$(س+1)\, ص'' + 2 ص' = 0$$

الحل

ممكن تشتقها قسمه دالتين بس انا قولتلك شوف الى يسهلك يعنى لو ضربت المعادله فى (س+1) هشتقها ضمنى و حاصل ضرب دالتين وبالتالى اسهل

$$ص \times (س+1) = \frac{س - 1}{\cancel{(س+1)}} \times \cancel{(س+1)}$$

$$\therefore \underbrace{(س+1)}_{الاولى}\, \underbrace{ص}_{الثانيه} = س - 1$$

$$(س+1) \times ص' + ص(1) = 1$$

$$(س+1)\, ص'' + ص' + ص'(1) = 0$$

$$(س+1)\, ص'' + 2 ص' = 0 \quad \#$$

لا متنساش الخطوات الثابته لاثبات الى كنت قايلك عليها قبل كده ؟

مثال ٩

أوجد المشتقة الثانية :

$س^4 - س ص + ص^4 = 1$ عند النقطة (٠ ، ١)

الحل

هشتق بالنسبة لـ س

$4س^3 - س ص' - ص + 4ص^3 ص' = 0$

هسمي دي معادلة (١) ، بس هظبطها

$$ص' = \frac{4س^3 - ص}{س - 4ص^3}$$

هشتق تاني عشان اجيب التانيه

$$12س^2 - س ص'' - ص' - ص' + 4ص^3 ص'' + ص' \cdot 12ص^2 \cdot ص' = 0$$

$$\therefore 12س^2 - س ص'' - 2ص' + 4ص^3 ص'' + 12ص^2 (ص')^2 = 0$$

معادلة (٢)

بالتعويض منه (١) في (٢)

$$12س^2 - س ص'' - 2\left(\frac{4س^3 - ص}{س - 4ص^3}\right) + 4ص^3 ص'' + 12ص^2 \left(\frac{4س^3 - ص}{س - 4ص^3}\right)^2$$

بالتعويض عند س = ٠ ، ص = ١

$$0 - 0 - 2\left(\frac{0 - 1}{0 - 4(1)^3}\right) + 4(1) ص'' + 12(1)^2 \times \left(\frac{4(0)^3 - 1}{0 - 4(1)^3}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{-2}{4} + 4ص'' + \frac{3}{4} = 0$$

$$ص'' = \frac{-1}{16}$$

مثال ١٠

اذا كانت :

$2ص^3 = (3س + 1)(س + 2)$

اثبت انه : $ص^2 ص'' + 2ص ص'^2 = 1$

الحل

مرتبت [ص'']

هشتق بالنسبة لـ س :

$6ص^2 ص' = (3س + 1) + (س + 2) \times 3$

$6ص^2 ص' = 6س + 7$

هشتق تاني

$6ص^2 \times ص'' + ص' (12ص) ص' = 6$

$\underline{6ص^2 ص''} + 12ص \underline{ص'^2} = 6$

لحد كده على الاثبات

هو هو بس الزياده الـ ٦

هقسم المعادله كلها على ٦

تم

$ص^2 ص'' + 2ص ص'^2 = 1$ #

مثال 11

اذا كانت: $ص^2 = س^2(1-س)$

اثبت انه $ص \cdot \frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + 3س = 1$

الحل

$ص^2 = س^2 - س^3$

هبص ع الاثبات هلاقي اني هشتق مرتين $\frac{د^2ص}{دس^2} \neq \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$

المشتقه الثانيه ← مربع المشتقه الاولى

$2ص ص' = 2س - 3س^2$

$2ص ص'' + ص'(2ص') = 2 - 6س$

$\therefore 2ص ص'' + 2ص'^2 + 6س = 2$

$\therefore$ هقسم ع ÷ 2

$ص \times \frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + 3س = 1$ #

مثال 12

اذا كانت: $ص^3 = س^3 + 2$ أثبت انه $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{4س}{ص^5}$

الحل

هشتق مرتين

هشتق بالنسبه لـ س:

$\cancel{3}ص^2 ص' = \cancel{3}س^2$ ← اول مره اشتقيت هشتق مره تاني

$ص' = \frac{س^2}{ص^2}$

$3ص^2 \cdot ص'' + ص' \cdot (6ص) ص' = 6س$

$3ص^2 ص'' + 6ص (ص')^2 = 6س$

$3ص^2 ص'' + 6ص \times \left(\frac{س^2}{ص^2}\right)^2 = 6س$

عوضت بقيمه $ص'$

$3ص^2 ص'' + 6ص \frac{س^4}{ص^4} = 6س$

$3ص^2 ص'' + 6\frac{س^4}{ص^3} = 6س$

$3ص^2 ص'' = 6س - 6\frac{س^4}{ص^3}$ هضرب $\times ص^3$

الداله الاصليه

$3ص^5 ص'' = 6س ص^3 - 6س^4$

$3ص^5 ص'' = 6س(س^3+2) - 6س^4$

$3ص^5 ص'' = \cancel{6س^4} + 12س - \cancel{6س^4}$

$3ص^5 ص'' = 12س \leftarrow ص'' = \frac{12س}{3ص^5} = \frac{4س}{ص^5}$ #

مثال ١٣ اذا كان $س^2 + ص^2 = 1$

اثبت انه $ص^3\, ص'' + 1 = 0$

الحل

$س^2 + ص^2 = 1$ بالاشتقاق بالنسبه لـ س

$2س + 2ص\, ص' = 0$ ← اول اشتقاق ①

$2 + 2ص \cdot ص'' + ص' \cdot 2ص' = 0$

$\therefore\ 2 + 2ص\, ص'' + 2(ص')^2 = 0$ ← ②

من ① $ص' = \frac{-س}{ص}$ معملتش حاجه كل اللى عملته جبت الـ $ص'$ فى طرف

خد ① وعوض بيها فى ② يبقى

$2 + 2ص\, ص'' + 2\left(\frac{-س}{ص}\right)^2 = 0$

$2 + 2ص\, ص'' + 2\frac{س^2}{ص^2} = 0$ هقسم ÷ ٢

$1 + ص\, ص'' + \frac{س^2}{ص^2} = 0$ هضرب فى $ص^2$

$ص^2 + ص^3\, ص'' + س^2 = 0$

$\underline{س^2 + ص^2} + ص^3\, ص'' = 0$

← من الداله الاصليه بديلك الكلام ده بـ واحد

$1 + ص^3\, ص'' = 0$ #

مثال ١٤ اذا كان $2ص^3 = 3س^2$

اثبت انه: $ص\, ص'' + 2(ص')^2 = \frac{1}{ص}$

الحل

← بالاشتقاق بالنسبه لـ س وطبعاً هشتق مرتين

$2ص^3 = 3س^2$

$6ص^2\, ص' = 6س \quad \div 6$ قسمت على ٦

$ص^2\, ص' = س$ ← دى اول مره اشتقيت

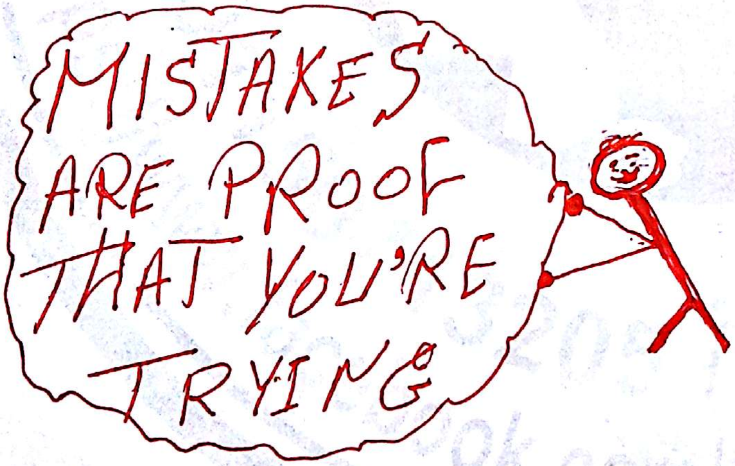
الاولى الثانيه

هشتق مره تانى بالنسبه لـ س برده

$ص^2 \cdot ص'' + ص' \cdot 2ص\, ص' = 1$

$ص^2\, ص'' + 2ص\, (ص')^2 = 1$ هقسم على ص

$ص\, ص'' + 2(ص')^2 = \frac{1}{ص}$ #



اللهم انى اعوذ بك من العجز والكسل

مثال ١٥

اذا كان: $س = (ص^{٣} - ١)^{٥}$

اثبت انه: $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٣} - ١}{١٥ س ص^{٢}}$

الحل

هشتق بالنسبة لـ ص $\frac{د(\text{اللى بشتقه})}{د(\text{اللى بشتق بالنسباله})}$

$س = (ص^{٢} - ١)^{٥} \longleftarrow ①$

$\frac{دس}{دص} = ٥ (ص^{٣} - ١)^{٤} \times ٣ ص^{٢}$

$\frac{دس}{دص} = ١٥ ص^{٢} (ص^{٢} - ١)^{٤}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{١٥ ص^{٢} (ص^{٢} - ١)^{٤}} \longleftarrow ②$

من الدالة الاصلية ①

$١ = \frac{(ص^{٢} - ١)^{٥}}{س} \longrightarrow$ هعوض بيها في ②

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{(ص^{٢} - ١)^{٥}}{س}}{١٥ ص^{٢} (ص^{٢} - ١)^{٤}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{\cancel{١٥}(ص^{٢} - ١)}{\cancel{١٥ س ص^{٢} (ص^{٣} - ١)^{٤}}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٣} - ١}{١٥ س ص^{٢}}$ #

مثال ١٦

اذا كان $د(س) = أ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٤ س + ١$ وكان $دً(١) = ٦$ فان $أ = \dots$

الحل

$د(س) = أ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٤ س + ١$

هشتقها مرتين دً شرطتين

$دَ(س) = ٣ أ س^{٢} + ٦ س + ٤$

$دً(س) = ٦ أ س + ٦$

$دً(١) = ٦ = ٦ أ + ٦$

$\therefore ٦ أ + ٦ = ٦$

$أ = صفر$

مثال ١٧

أوجد $\frac{د}{دس} (س^{٤} + ٥ س)$

الحل

$\frac{د}{دس} (س^{٤} + ٥ س) = ٤ س^{٣} + ٥$

مثال ١٨

اذا كان، $د(ن) = س^{٣}$ حيث س ثابت فان $دً(ن) = \dots$

الحل

س ثابت يعنى كانه رقم وتفاضل الرقم بكام ← بصفر

$\therefore دً(ن) = صفر$.

(١٨) اذا كانت : د ، ر ، ق
دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ س

(١٧) اذا كانت :

مثال ١٩:

اذا كانت س ص = م

حيث م عدد حقيقي موجب

د $\frac{d^2ص}{dس^2} \times \frac{d^2س}{dص^2} > \frac{dص}{dس} \times \frac{dس}{dص}$

فاوجد الفترة التي ينتمي اليها م.

الحل

س ص = م ← ص = $\frac{م}{س}$ ←(١)

س = $\frac{م}{ص}$ ←(٢)

هشتق (١) بالنسبة لـ س

ص = $\frac{م}{س}$ ← ص' = $\frac{-م}{س^2}$

ص'' = $\frac{٢م}{س^3}$ ← ∴ $\frac{d^2ص}{dس^2} = \frac{٢م}{س^3}$

هشتق (٢) بالنسبة لـ ص

س = $\frac{م}{ص}$

$\frac{dس}{dص} = \frac{-م}{ص^2}$

$\frac{d^2س}{dص^2} = \frac{٢م}{ص^3}$ هعوض بقى

$\frac{d^2ص}{dس^2} \times \frac{d^2س}{dص^2} > \frac{dص}{dس} \times \frac{dس}{dص}$

$\cancel{\frac{٢م}{س^3}} \times \cancel{\frac{٢م}{ص^3}} > \cancel{\frac{-م}{س^2}} \cdot \cancel{\frac{-م}{ص^2}}$

$\frac{٤}{س ص} > ١$ ← $\frac{٤}{م} > ١$ ← $\boxed{م < ٤}$

م ∈]٠، ٤[م = بعض المعادلة ١/٢ مليه

مثال ٢٠: اذا كانت س ص = ١

فاوجد قيمة س² $\frac{d^2ص}{dس^2}$ + ٣س $\frac{dص}{dس}$ + ص

الحل

هشتق بالنسبة لـ س :-

س ص = ١ ← س ص' + ص = ٠ ←(١)

هشتق مرة تانية

س . ص'' + ص' + ص' = ٠

س ص'' + ٢ص' = ٠ ←(٢)

بالضرب × س في معادلة (٢)

س² ص'' + ٢س ص' = ٠ ←(٣)

بجمع معادلة (١) مع (٣)

س² ص'' + ٢س ص' + س ص' + ص = ٠

س² ص'' + ٣س ص' + ص = ٠

∴ القيمة هي صفر

حل اخر

س ص = ١ ← ص' = $\frac{-١}{س^2}$

ص'' = $\frac{٢}{س^3}$ بالتعويض في الاثبات

$\cancel{س^2}\left(\frac{٢}{\cancel{س^3}}\right) + ٣\cancel{س}\left(\frac{-١}{\cancel{س^2}}\right) + ص$

= $\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س}$ + ص = $\frac{-١}{س}$ + ص

∵ س ص = ١ ← ص = $\frac{١}{س}$

= $\frac{-١}{س} + \frac{١}{س}$ = صفر ∴ القيمة = صفر

مثال (٢١) اذا كان

$$ص = \frac{ع+1}{ع-1} \quad ، \quad س = \frac{ع-1}{ع+1}$$

فأوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 2$

الحل

$$س \cdot ص = 1 \longrightarrow ص = \frac{1}{س}$$

$$س \cdot ص' + ص = صفر$$

$$ص' = \frac{-ص}{س}$$

$$\frac{دص}{دس} = ص' = \frac{-1}{س^2} = \frac{-1}{(2)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=2} = \frac{-1}{4}$$

مثال (٢٢) اذا كانت: $ص = س^3 + 2$ ، $ع = س^2 + 3$ فعين $\frac{د^2ع}{دص^2}$ عندما $س = 2$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = 3س^2 \quad ، \quad \frac{دع}{دس} = 2س$$

هشقلب

$$\frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دس} \cdot \frac{دص}{دس}$$

$$\therefore \frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دس} \cdot \frac{دس}{دص}$$

$$= \frac{1}{3س^2} \cdot 2س \longrightarrow \frac{دع}{دص} = \frac{2}{3س}$$

هشتق بالنسبه لـ ص

$$\frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{-2}{3س^2} \cdot \frac{دس}{دص} = \frac{-2}{3س^2} \cdot \frac{1}{3س^2} = \frac{-2}{9س^4}$$

$$\therefore \frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{-2}{9س^4}$$ بالتعويض عن $س = 2$

$$\therefore \frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{-2}{9(2)^4} = \frac{-1}{72}$$

مثال (٢٣) اذا كان: $\frac{دع}{دس} = 1 + 2س$ ، $\frac{دص}{دس} = س^2 + 3$ فأوجد $\frac{د^2ع}{دص^2}$ عند $س = 1$

الحل

$$\frac{دع}{دص} = \frac{دص}{دس} \cdot \frac{دع}{دس}$$

هشقلب ده

$$\therefore \frac{دع}{دص} = \frac{دس}{دص} \cdot \frac{دع}{دس}$$

$$\frac{دع}{دص} = \frac{1}{س^2+3} \cdot 1+2س = \frac{1+2س}{س^2+3}$$

هشتق بالنسبه لـ ص

$$\frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{(س^2+3) * 2\frac{دس}{دص} - (1+2س) * 2س\frac{دس}{دص}}{(س^2+3)^2}$$

$$\frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{(2س^2+6-2س-4س^2)}{(س^2+3)^2} * \frac{دس}{دص}$$

$$\frac{د^2ع}{دص^2} = \frac{-2س^2-2س+6}{(س^2+3)^2} \cdot \frac{دس}{دع}$$

$$= \frac{-2س^2-2س+6}{(س^2+3)^2} \cdot \frac{1}{(س^2+3)}$$

$$\therefore \left.\frac{د^2ع}{دص^2}\right|_{س=1} = \frac{-2-2+6}{3(3+1)} = \frac{1}{32}$$

مثال ٤٤ اذا كانت:

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \quad , \text{س} > 0$$

اثبت انه: $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{ع}^2} = \frac{4\text{س}\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+1)^3}$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \longrightarrow \text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{س}-1}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}}$$

هوحد المقامات

$$\text{ع} = \sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \longrightarrow \text{ع} = \text{س}^{\frac{1}{2}} - \text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{س}+1}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}}$$

وحد المقامات

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}}$$ هشقلبه

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{d\text{ص}}{\cancel{d\text{س}}} \times \frac{\cancel{d\text{س}}}{d\text{ع}}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{\text{س}-1}{\cancel{(2\text{س}\sqrt{\text{س}})}} \times \frac{\cancel{(2\text{س}\sqrt{\text{س}})}}{\text{س}+1}$$

$$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}$$

هشتق تاني بالنسبه لـ ع

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{ع}^2} = \frac{(\text{س}+1) \times \frac{d\text{س}}{d\text{ع}} - (\text{س}-1)\cdot\frac{d\text{س}}{d\text{ع}}}{(\text{س}+1)^2}$$

هاخد $\frac{d\text{س}}{d\text{ع}}$ عامل مشترك من البسط

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{ع}^2} = \frac{\frac{d\text{س}}{d\text{ع}}(\cancel{\text{س}}+1-\cancel{\text{س}}+1)}{(\text{س}+1)^2}$$

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{ع}^2} = \frac{2}{(\text{س}+1)^2} \times \frac{2\text{س}\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+1)}$$

$$\therefore \frac{d^2\text{ص}}{d\text{ع}^2} = \frac{4\text{س}\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+1)^3} \quad \#$$

مثال ٤٥ اوجد المشتقه العاشره والحاديه عشر للداله $د(\text{س}) = \text{س}^{10} - 14\text{س}^7 + 2\text{س}^5 + 2\text{س}^4 - \text{س}^2 - \text{س} + 2$

الحل

$$د(\text{س}) = \text{س}^{10} - 14\text{س}^7 + 2\text{س}^5 + 2\text{س}^4 - \text{س}^2 - \text{س} + 2$$

$$د'(\text{س}) = 10\text{س}^9 - 14\times7\text{س}^6 + 2\times5\text{س}^4 + 4\text{س} - 1$$

$$د''(\text{س}) = 10\times9\text{س}^8 - \underbrace{14\times7\times6\text{س}^5 + 5\times4\times2\text{س}^2 + 4}_{\text{دول هيخلصو عند المشتقه السابعه هيبقو بصفر}}$$

ده هو اللي هيكمل لحد المشتقه العاشره

$$\frac{d^{10}\text{ص}}{d\text{س}^{10}} = \underbrace{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$\frac{d^{10}\text{ص}}{d\text{س}^{10}} = \lfloor 10 \longrightarrow$$ دي المشتقه العاشره

$$\frac{d^{11}\text{ص}}{d\text{س}^{11}} =$$ صفر عشانه المضروب ده رقم وتفاضل الرقم بصفر :D

ومن يتهيب صعود الجبال يعش ابد الدهر بين الحفر

عافر# ......

مثال (٢٦)

اذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(س)

اثبت انه:

$$\frac{d^2 ص}{d س^2} = د''(ع) \cdot [ر'(س)]^2 + ر''(س) \cdot د'(ع)$$

الحل

ص = د(ع) ، ع = ر(س)

هعوض بيها

∴ ص = د(ر(س))

$$\frac{dص}{dس} = د'[ر(س)] * ر'(س)$$

$$\frac{d^2ص}{dس^2} = د'[ر(س)] \cdot ر''(س) + ر'(س) \cdot [د''[ر(س)] \cdot ر'(س)]$$

$$= د'[ر(س)] \cdot ر''(س) + ر'(س) \cdot [د''(ر(س)) \cdot ر'(س)]$$

ده الـ(ع) ده الع برده

$$= د'(ع) \cdot ر''(س) + [ر'(س)]^2 \cdot د''(ع)$$

بص كده للاثبات هو

هو ---- (سبحانه الله)

قال الامام الشافعي رحمه الله:

" أتهزأ بالدعاء ..... وما تدري بما
صنع الدعاء ..... سهام الليل
لا تخطئ ولكن ..... لها أمد
وللأمد انقضاء ... "

عشان كده ياريت ندعي ربنا
ونستعين به من العجز والكسل.

مثال (٢٧)

اذا كانت: $د(س) = \frac{ق(س)}{ر(س)}$ حيث ق(س)، ر(س)

دالتان قابلتان للاشتقاق عند س = أ

د'(أ) = ٠ فاثبت انه $د(أ) = \frac{ق'(أ)}{ر'(أ)}$

الحل

$د(س) = \frac{ق(س)}{ر(س)}$ ← عبارة عن حاصل ضرب دالتين

$$د'(س) = \frac{ر(س) \cdot ق'(س) - ق(س) \cdot ر'(س)}{[ر(س)]^2}$$

هعوض بـ س = أ في المشتقة دي

$$د'(أ) = \frac{ر(أ) \times ق'(أ) - ق(أ) \cdot ر'(أ)}{[ر(أ)]^2}$$

وهو قايلك انه د'(أ) = صفر

$$\frac{ر(أ) \times ق'(أ) - ق(أ) \cdot ر'(أ)}{[ر(أ)]^2} = \frac{0}{1}$$

المقام هيروح عشان اي حاجة في صفر بصفر

ر(أ) ∘ ق'(أ) − ق(أ) ∘ ر'(أ) = صفر

هوديه بإشارة مخالفة

∴ ر(أ) ∘ ق'(أ) = ق(أ) ∘ ر'(أ)

هخلي اللي فيهم شرط تحت بعض
عن طريق اني هقسم طبعاً

$\frac{ق(أ)}{ر(أ)} = \frac{ق'(أ)}{ر'(أ)}$ ----- بص تاني للدالة الاصلية

$د(س) = \frac{ق(س)}{ر(س)}$ ----- عوض عن س = أ هيطلعلك د(أ)

$$د(أ) = \frac{ق(أ)}{ر(أ)}$$

$$\therefore د(أ) = \frac{ق'(أ)}{ر'(أ)} \quad \#$$

مثال ٢٨ إذا كانت: $ص = د(ر(س))$ ، $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^2+1}}$ ، $ر(س) = \frac{1}{س}$. اثبت انه: $د'(س) = \begin{cases} \frac{-1}{س^2\sqrt{س^2+1}} & س > ٠ \\ \frac{1}{س^2\sqrt{س^2+1}} & س < ٠ \end{cases}$

الحل

$\because ص = د(ر(س)) \longleftarrow \frac{دص}{دس} = د'(ر(س)) \times ر'(س) \longleftarrow ①$

محتاج اجيبهم

طيب هو مديلك فى السؤال انه $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^2+1}}$ ، $ر(س) = \frac{1}{س}$

الـ س = ر(س)

$$د'(ر(س)) = \frac{\left(\frac{1}{س}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{س}\right)^2+1}} = \frac{\left(\frac{1}{س}\right)}{\sqrt{\frac{1}{س^2}+1}} = \frac{\left(\frac{1}{س}\right)}{\sqrt{\frac{1+س^2}{س^2}}}$$

هوحد المقامات

$$= \frac{\left(\frac{1}{س}\right)}{\frac{1}{\sqrt{س^2}} \cdot \sqrt{1+س^2}}$$

افتكر الاساسيات $\sqrt{\frac{ص}{س}} = \frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$\sqrt{س^2} = |س|$

$$د'(ر(س)) = \frac{\left(\frac{1}{س}\right)}{\frac{1}{|س|} \cdot \sqrt{1+س^2}} = \frac{|س|}{س\sqrt{س^2+1}} \longleftarrow ②$$

$\because ر(س) = \frac{1}{س} \longleftarrow ر'(س) = \frac{-1}{س^2} \longleftarrow ③$

من ② ، ③ هعوض بيهم فى ① يبقى

$$\frac{دص}{دس} = \frac{|س|}{س\sqrt{س^2+1}} \cdot \frac{-1}{س^2} = \frac{-|س|}{س^3\sqrt{س^2+1}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \begin{cases} \frac{-س}{س^3\sqrt{س^2+1}} = \frac{-1}{س^2\sqrt{س^2+1}} & س > ٠ \\ \frac{-(-س)}{س^3\sqrt{س^2+1}} = \frac{1}{س^2\sqrt{س^2+1}} & س < ٠ \end{cases}$$

تعالى هفك المقياس افكرك

$|س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$

السالب معاها ← اقل من

الموجب معاها ← اكبر من

مثال ٢٩) إذا كانت $ص = أ\,س^{ن+1} + ب\,س^{-ن}$ فأثبت أن: $س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = ن(ن+1)ص$

حيث أ ، ب ثوابت.

الحل

هشتق بالنسبة لـ س .

$$\frac{دص}{دس} = (ن+1)\,أ\,س^{ن} - ب.ن\,س^{-ن-1}$$

هشتق مرة تاني عشان الاثبات فيه مرتين

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = ن(ن+1)\,أ\,س^{ن-1} - ب\,ن(-ن-1)\,س^{-ن-2}$$

هضرب لا س² المعادلة كلها

$$س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = ن(ن+1)\,أ.س^2.س^{ن-1} - ب\,ن(-ن-1)\,س^2.س^{-ن-2}$$

ملاحظة: عند الضرب بنجمع الأسس $س^م . س^ن = س^{م+ن}$

$$= ن(ن+1)\,أ\,س^{ن+1} - ب\,ن(-ن-1)\,س^{-ن}$$

هضرب السالب جوه

$$= ن(ن+1)\,أ\,س^{ن+1} + ب\,ن(ن+1)\,س^{-ن}$$

هاخد ن(ن+1) عامل مشترك

$$= ن(ن+1)\left[أ\,س^{ن+1} + ب\,س^{-ن}\right]$$

بص على السؤال هتلاقيه = ص

$$س^2 \frac{د^2ص}{دس^2} = ن(ن+1)\,ص \quad \#$$

Man needs his difficulties because they are necessary to enjoy success

مثال ٣٠: اذا كانت: $\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}} = (\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}}$ فاثبت انه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

الحل

هشتق بالنسبه لـ س مره واحده

$$\text{س}^{\text{ن}} \cdot \text{م}\,\text{ص}^{\text{م}-1} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{\text{م}} \cdot \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1} = (\text{م}+\text{ن})(\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}-1} \cdot \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+1\right)$$

$$\text{م}\,\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}} \cdot \text{ص}^{-1} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{\text{م}} \cdot \text{س}^{\text{ن}} \cdot \text{ن} \cdot \text{س}^{-1} = (\text{م}+\text{ن})(\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}} \cdot (\text{س}+\text{ص})^{-1} \times \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+1\right)$$

$$\text{م}\,\frac{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}}}{\text{س}} = (\text{م}+\text{ن}) \cdot \frac{(\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}}}{(\text{س}+\text{ص})} \cdot \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+1\right)$$

بالقسمه فى الطرفين على $\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}}$

$$\frac{\text{م}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} = (\text{م}+\text{ن}) \cdot \frac{(\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}}\,(\text{س}+\text{ص})} \cdot \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+1\right)$$

من المعادله الاصليه $\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}} = (\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}}$

$$\frac{(\text{س}+\text{ص})^{\text{م}+\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ص}^{\text{م}}} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ص}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+1\right)$$

$$\frac{\text{م}}{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ص}} + \frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

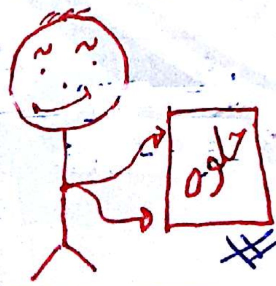
$$\therefore \frac{\text{ن}}{\text{س}} - \frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \left[\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{س}+\text{ص}} - \frac{\text{م}}{\text{ص}}\right]$$

هوحد المقامات

$$\frac{\text{ن}(\text{س}+\text{ص}) - (\text{م}+\text{ن})\text{س}}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \left[\frac{(\text{م}+\text{ن})\text{ص} - \text{م}(\text{س}+\text{ص})}{\text{ص}(\text{س}+\text{ص})}\right]$$

$$\frac{\cancel{\text{ن}\,\text{س}} + \text{ن}\,\text{ص} - \text{م}\,\text{س} - \cancel{\text{ن}\,\text{س}}}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\cancel{\text{م}\,\text{ص}} + \text{ن}\,\text{ص} - \text{م}\,\text{س} - \cancel{\text{م}\,\text{ص}}}{\text{ص}(\text{س}+\text{ص})}$$

$$\frac{\cancel{(\text{ن}\,\text{ص} - \text{م}\,\text{س})}}{\text{س}\cancel{(\text{س}+\text{ص})}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\cancel{(\text{ن}\,\text{ص} - \text{م}\,\text{س})}}{\text{ص}\cancel{(\text{س}+\text{ص})}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad \#$$



مثال ٣١ اوجد $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2}$ للداله $\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$ حيث $\text{س} \neq 1$

ثم استنتج $\frac{d^n\text{ص}}{d\text{س}^n}$

الحل

$$\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1} \longrightarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1\times(\text{س}-1) - 1\times(\text{س}+1)}{(\text{س}-1)^2}$$

هشتق قسمة دالتين

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{\cancel{\text{س}} - 1 - \cancel{\text{س}} - 1}{(\text{س}-1)^2} = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2} = -2\,(\text{س}-1)^{-2}$$

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = -2\times-2\,(\text{س}-1)^{-3} = (-1)^2\,(2)\,(1\times2)\,(\text{س}-1)^{-3}$$

مضروب ← ٢!

$$\frac{d^3\text{ص}}{d\text{س}^3} = -2\times-2\times-3\,(\text{س}-1)^{-4} = (-1)^3\,2\,(1\times2\times3)\,(\text{س}-1)^{-4}$$

مضروب ← ٣!

هو هو

٥ زياده بواحد ٤

$$\frac{d^4\text{ص}}{d\text{س}^4} = -2\times-2\times-3\times-4\,(\text{س}-1)^{-5} = (-1)^4\,2\,(1\times2\times3\times4)\,(\text{س}-1)^{-5}$$

مضروب ← ٤!

هو هو برده

* **ملحوظه**: فى اى مسائل من بتاعت استنتج دى

بنبص على حاجتين ① رقم المشتقه ← $\frac{d^{1}\text{ص}}{d\text{س}^{1}}$

② بنبص على الاس اللى فى المقدار ← $\frac{d^{2}\text{ص}}{d\text{س}^{2}}$

ونشوف علاقته ايه برقم المشتقه يعنى هنا

$$-\text{ن}-1 = -(\text{ن}+1)$$

$$\therefore \frac{d^n\text{ص}}{d\text{س}^n} = (-1)^{\text{ن}}\times2\,(\text{ن}!)\,(\text{س}-1)$$

$$\therefore \frac{d^n\text{ص}}{d\text{س}^n} = \frac{(-1)^{\text{ن}}\times2\,\text{ن}!}{(\text{س}-1)^{\text{ن}+1}} \quad \#$$

مثال ٣٢: اذا كانت: $ص = \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}$

اثبت انه $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2ص - 1}$

الحل

بص كده معايا ثواني .. المسائل بتاعت النقط ... دي بيقولك يعني كمل على نفس الشكل برده طيب ايه فكرتها

لو جالك جذر ← ربع الطرفين ← طير الجذر اللي بره وارجع عوض ....

← لو جالك لـو $س^ن$ ← عوض واشتق ... يعني ايه تعالى نشوف

$ص = \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}$ بتربيع الطرفين

$ص^2 = س + \underbrace{\sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}_{هو\ هو}$

$ص^2 = س + ص$ بس كده بقت مسأله عاديه

$2ص\,ص' = 1 + ص' \longrightarrow 2ص\,ص' - ص' = 1$

$ص'(2ص - 1) = 1 \longrightarrow ص' = \frac{1}{2ص - 1}$ #

بنفس الطريقه حاول تحل دي ← $ص = \sqrt{\frac{س}{\sqrt{\frac{س}{\sqrt{\frac{س}{\vdots}}}}}}$

اثبت انه: $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3ص^2}$

مثال ٣٣ إذا كانت : $\text{ص} = \dfrac{(\text{س}^{٢} - ٢)^{\text{ن}}}{(\text{س}^{٢} + ٢)^{\text{ن}}}$

اثبت أن $\dfrac{\text{دس}}{\text{دص}} = \dfrac{\text{س}^{٤} - ٤}{٨\,\text{ن}\,\text{س}\,\text{ص}}$.

الحل

$$\text{ص} = \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٢}\right)^{\text{ن}}$$

$$\text{ص}' = \text{ن}\left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٢}\right)^{\text{ن}-١} \times \dfrac{(\text{س}^{٢} + ٢) \times ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} - ٢) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}}$$

$$= \text{ن}\left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٢}\right)^{\text{ن}} \times \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٢}\right)^{-١} \times \dfrac{\cancel{٢\text{س}^{٣}} + ٤\text{س} - \cancel{٢\text{س}^{٣}} + ٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}}$$

$$= \text{ن} \cdot \text{ص} \times \left(\dfrac{\cancel{\text{س}^{٢} + ٢}}{\text{س}^{٢} - ٢}\right) \cdot \dfrac{٨\text{س}}{\cancel{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}}^{\,١}}$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \cdot \text{ص} \cdot \dfrac{٨\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢)}$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \cdot \text{ص} \cdot \dfrac{٨\text{س}}{\text{س}^{٤} - ٤} = \dfrac{٨\,\text{ن} \cdot \text{ص}\,\text{س}}{\text{س}^{٤} - ٤}$$

$$\dfrac{\text{دس}}{\text{دص}} = \dfrac{\text{س}^{٤} - ٤}{٨\,\text{ن}\,\text{س}\,\text{ص}}$$

مثال ٤٣ اذا كان $٥ = ٢ (\sqrt{س} + \sqrt{ص})$

فاثبت انه : $\frac{دص}{دس} = -\sqrt{\frac{ص}{س}}$

الحل

$٥ = ٢ (\sqrt{س} + \sqrt{ص}) \longrightarrow \frac{٥}{٢} = \sqrt{س} + \sqrt{ص}$

هنشتق بالنسبه لـ س

$صفر = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{دس}$

$-\frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{\frac{دص}{دس}}{٢\sqrt{ص}}$ $\times ٢\sqrt{ص}$ للطرفين

$\frac{-\cancel{٢}\sqrt{ص}}{\cancel{٢}\sqrt{س}} = \frac{دص}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = -\sqrt{\frac{ص}{س}}$ #

" نصف ما نحلم به كان من الممكن ان نحصل عليه

لـو اننا لم نضيع نصف وقتنا فى الاحلام "

مثال ٢٥ : اذا كانت : $ص = س^{ن+1} + ن\, س^{ن-1} + 1$

فاوجد $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} = \text{-------}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = (ن+1)\, س^{ن} + ن(ن-1)\, س^{ن-2}$

$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = ن(ن+1)\, س^{ن-1} + ن(ن-1)(ن-2)\, س^{ن-3}$

$\frac{د^{3} ص}{د س^{3}} = ن(ن+1)(ن-1)\, س^{ن-2} + ن(ن-1)(ن-2)$ ...

⋮

$\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} = \text{.......}$ عشان استنتج اللى هنا لاحظ

انه رتبة المشتقة هى هى مكانه الـ ن

يعنى هروح اعوض عند ن = 1 ⟵ المشتقة الاولى

ن = 2 ⟵ المشتقة الثانية

وهكذا .....

اكبر منه بواحد

مش هتتغير

عند ن = 1 : هو هو

$\frac{د ص}{د س} = 2\, س^{1} + 1(1-1)\, س^{1-1} = 2\, س^{1} = (2 \times 1)\, س^{1}$

عند ن = 2 :

$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = 2(2+1)\, س^{2-1} + 2(2-1)(2-2)\, س^{2-1} = 6\, س^{1} = (3 \times 2 \times 1)\, س^{1}$

$\frac{د^{3} ص}{د س^{3}} = 3(3+1)(3-1)\, س^{3-2} + 3(3-1)(3-2)(3-3)\, س^{3-3} = (4 \times 3 \times 2 \times 1)\, س^{1}$

ده هيفضل صفر عشان الاقواس دى

$\therefore \frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} = \underline{\lfloor ن+1}\; س^{1}$ #

مثال (٣٦) اذا كانت : د(س) + دَ(س) = ٣ س − ١

اوجد د(س) ومنه ثم اوجد قيمه دَ(٣) .

الحل

زمان كنت بديلك الداله تشتقها على طول .... بس خلاص

دلوقتى انت كبرت عايزك تجيب الداله وتقولى

القيمه دى بكام ..... فكره اى مثال من الشكل ده بتروح تبص

على المعادله اللى مدهالك وتفرض شكلها العام يعنى ايه

٣ س − ١ ← دى معادله من الدرجه الاولى شكلها العام هو ← أ س + ب

طيب لو من الدرجه الثانيه ← أ س^٢ + ب س + جـ

" " " الثالثه ← أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء ...وهكذا

∴ د(س) = أ س + ب هشتق عادى جداً

دَ(س) = أ خلاص كده هونفض قايلك انه

د(س) + دَ(س) = ٣ س − ١ هشيل د(س) = أ س + ب

واحط قيمتها ، دَ(س) = أ بردو واحط قيمتها

∴ أ س + ب + أ = ٣ س − ١

أ س + (أ + ب) = ٣ س − ١ هقارن معاملات

يعنى معامل س بمعامل س

$\boxed{أ = ٣}$ | أ + ب = −١ ، ٣ + ب = −١ ← $\boxed{ب = −٤}$ ∴ د(س) = ٣ س − ٤

∴ د(٣) = ٣ × ٣ − ٤ = ٥ $\boxed{∴ د(٣) = ٥}$

SHEET (1)

① $ص = (س^2 + 2)^7$
اثبت انه $\frac{دس}{دص} = \frac{س^2 + 2}{14 س ص}$

② اذا كانت $ص = \sqrt{د(س)}$
وكانت $د'(2) = 4$ ، $د(2) = 9$
فان $\frac{دص}{دس} = ...$ عندما $س = 2$

③ $د(س) = 3س + ر(س)$
وكانت $ر'(2) = -5$ فان ميل المماس لمنحنى الداله عند $س = 2$ هو....

④ اذا كانت:
$د(س) = 1 + س + س^2 + س^3 .... + س^{12}$
فان $د'(1) =$

⑤ $س = (1 - ص)(1 + ص)(1 + ص^2)(1 + ص^4)$
فان $\frac{دص}{دس} = ...$

⑥ اذا كانت: $د(س) = أ س^3 + 2 س^2 + 4س$
وكانت $د''(1) = 6$
فاوجد قيمة أ

⑦ اذا كانت د(س) داله كثيرة الحدود
فان $\lim_{هـ \to 0} \frac{د'(س + هـ) - د'(س)}{هـ} = ...$

⑧ اذا كانت: $ص = د(س)$ وكانت
$د(س + هـ) - د(س) = 5 س^2 هـ + هـ^2$
فاوجد $\frac{د^3ص}{دس^3} ....$

⑨ اذا كانت: $د(س) = 2س^3 + 1$
، $هـ(س) = س^2$ فاوجد $د'(هـ(3))$....

⑩ اذا كانت:
$د(س) + د'(س) + د''(س) = س^3 + 7س^2 + 9س - 2$
فاوجد د(س)

⑪ اذا كانت: $ص = أ س^3 + ب س^2$
وكانت $ص'' = 12$ ، $ص' = 6$ عند $س = 1$
فاوجد أ ، ب

⑫ اذا كانت: $ص^2 = حـ س^2 - جـ^2$
حيث جـ ثابت اثبت انه:
$ص^2 (ص')^2 - س ص ص' + ص^2 = 0$

⑬ اذا كانت: $ص = ع^2 - 7ع + 3$ ،
$ع = س^3 - 1$ فاثبت انه:
$\frac{دص}{دس} + 9 \frac{دع}{دس} - 6 س^5 = 0$

⑭ اذا كانت: $ص = \left(\frac{س^2 - 2}{س^2 + 1}\right)^5$
فاثبت انه:
$(س^2 + 1)(س^2 - 2) ص' = 30 س ص$

⑮ اذا كانت: $ص^2 + أ س^3 - ب س = جـ$
حيث أ ، ب ، جـ ثوابت
اوجد قيمة: $ص ص'' + (ص')^2 + 3 أ س$

⑯ $ص = \frac{أ س + ب}{حـ س + ء}$ حيث أ ، ب ، جـ ، ء
ثوابت فاثبت انه:
$2 \left(\frac{دص}{دس}\right) \cdot \left(\frac{د^3ص}{دس^3}\right) = 3 \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)^2$

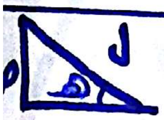
* **الدوال المثلثيه** :- قبل ما احل امثله على الدوال المثلثيه
تعالى افكرك بقوانين حساب مثلثاتك ....

① جا²س + جتا²س = ١ ② قا²س − ظا²س = ١
③ قتا²س − ظتا²س = ١

قوانين ضعف الزاويه ① جا٢س = ٢ جاس جتاس يعنى لو عملتك كده

نصها

جا٤س = ٢ جا٢س جتا٢س ، جاس = ٢ جا$\frac{\text{س}}{2}$ جتا$\frac{\text{س}}{2}$



جاهـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}}$

جتاهـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$

ظاهـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$

ظتاهـ = $\frac{1}{\text{ظاهـ}}$ ، قاهـ = $\frac{1}{\text{جتاهـ}}$

= جتاهـ/جاهـ ، قتاهـ = ١/جاهـ

② جتا٢س = جتا²س − جا²س
= ١ − ٢ جا²س
= ٢ جتا²س − ١

③ ظا٢س = $\frac{\text{٢ ظاس}}{\text{١ − ظا²س}}$

قوانين مجموع زاويتين ① جا(م ± ب) = جام جتاب ± جتام جاب

② جتا(م ± ب) = جتام جتاب ∓ جام جاب

③ ظا(م ± ب) = $\frac{\text{ظام ± ظاب}}{\text{١ ∓ ظام ظاب}}$

تعالى بقى نحل و نفهم كل حاجه ..... مبنحفظش
رياضه احنا .....
اتعلم صح ... م/ محمود مجدى

تفاضل الدوال المثلثيه:

تفاضل الزاويه

① ص = حا[د(س)] ⟵ ص َ = جتا[د(س)] * دَ(س)

مثال: ص = جا ٦ س ⟵ ص َ = جتا ٦ س * $\frac{1}{٢\sqrt{س}}$

② ص = جتا[د(س)] ⟵ ص َ = − جا[د(س)] * دَ(س)

مثال: ص = جتا جا ٦ س ⟵ ص َ = − جا[جا ٦ س] * جتا ٦ س * $\frac{1}{٢\sqrt{س}}$

③ ص = ظا[د(س)] ⟵ ص َ = قا٢[د(س)] * دَ(س)

.. تعالى اقولك جت منين بقى كده اديلك مثال #

ص = ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$ تعالى نشتق قسمه دالتين

ص َ = $\frac{جتا س * جتا س - جا س * (-جا س)}{جتا٢ س}$ = $\frac{جتا٢ س + جا٢ س}{جتا٢ س}$ = $\frac{1}{جتا٢ س}$

∴ ص َ = قا٢ س #

④ ص = ظتا[د(س)] ⟵ ص َ = − قتا٢[د(س)] * دَ(س)

مثال: ص = ٢ ظتا($\frac{1}{س}$) ⟵ ص َ = ٢ قتا٢($\frac{1}{س}$) * $\frac{-1}{س^2}$

⑤ ص = قا[د(س)]

ص َ = قا[د(س)] * ظا[د(س)] * دَ(س)

متنساش تفاضل الزاويه

⑥ ص = قتا[د(س)]

ص َ = − قتا[د(س)] × ظتا[د(س)] * دَ(س)

امثله على تفاضل الدوال المثلثيه :-

① اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ اذا كانت : جتا ٣ص = جا ٢س

الحل

بالاشتقاق بالنسبه لـ س

$-$ جا ٣ص . ٣ $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ = ٢ جتا ٢س

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{٣} \cdot \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا ٣ص}}$ #

② اوجد ميل المماس للمنحنى ظا ٢ص = جا س عند النقطه $(٠ ، \frac{\text{ط}}{٢})$

الحل

بالاشتقاق بالنسبه لـ س

٢ قا^2 ٢ص . $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتا س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{٢ قا}^2\text{ ٢ص}}$

م = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(٠ ، \frac{\text{ط}}{٢})} = \frac{\text{جتا}(٠)}{\text{٢ قا}^2\text{ ٢}(\frac{\text{ط}}{٢})}$

$\therefore$ م = $\frac{١}{٢}$ ميل المماس

③ اذا كانت : ص = س جتا س

اثبت انه : س $\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}$ + س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ٢ص = ٠

الحل

ص = س جتا س .... طبعاً هنشتق ٣ مرات

ص' = س . [$-$جا س] + جتا س (١)

$\boxed{\text{ص}' = -\text{س جا س} + \text{جتا س}}$ ← ①

ص'' = $-$س . جتا س + جا س ($-$١) + ($-$جا س)

$\boxed{\text{ص}'' = -\text{س جتا س} - \text{٢ جا س}}$ ← ②

ص''' = + س جا س + $-$ جتا س $-$ ٢ جتا س

$\boxed{\therefore \text{ص}''' = \text{س جا س} - \text{٣ جتا س}}$ ← ③

بالتعويض من ① ، ③ فى الطرف الايمن للاثبات ← س ص''' + س ص' + ٢ص

س (س جا س $-$ ٣ جتا س) + س ($-$س جا س + جتا س) + ٢ص

= $\cancel{\text{س}^2\text{ جا س}}$ $-$ ٣ س جتا س $-$ $\cancel{\text{س}^2\text{ جا س}}$ + س جتا س + ٢ص

= $-$ ٢ س جتا س + ٢ ص

من المعادله المعطاه

= $-$ ٢ س $\cancel{\text{جتا س}}$ + ٢ س $\cancel{\text{جتا س}}$ = ٠ #

④ اذا كانت : ص = طاس
اثبت انه : $ص'' = جا٢س \cdot قا^٤س$

الحل

$ص = طاس$

$ص' = قا^٢س = (جتاس)^{-٢}$

$ص'' = -٢ (جتاس)^{-٣} \cdot -جاس$

$ص'' = ٢ جاس \cdot \frac{١}{جتا^٣س}$

$ص'' = \frac{٢جاس}{جتا^٣س} \times \frac{جتاس}{جتاس}$

$\therefore ص'' = \frac{٢جاس جتاس}{جتا^٤س}$

$ص'' = \frac{جا٢س}{جتا^٤س} = جا٢س \cdot قا^٤س$

⑤ ص = جتاس اثبت انه :
$(\frac{دص}{دس})^٢ - ص (\frac{د^٢ص}{دس^٢}) = ١$

الحل

$\frac{دص}{دس} = - جاس$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = - جتاس$

بالتعويض فى الطرف الايمن للاثبات

ص المعادله الاصليه

$(\frac{دص}{دس})^٢ - ص (\frac{د^٢ص}{دس^٢}) =$

$(-جاس)^٢ - ص جتاس = جا^٢س + جتا^٢س$

$= ١ =$ الايسر

⑥ اذا كان $س \cdot ص = جاس جتاس$
فاثبت انه : $س \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \frac{دص}{دس} + ٤ س ص = ٠$

الحل

$س \cdot ص = \frac{١}{٢} \cdot ٢ جاس جتاس$

$س \cdot ص = \frac{١}{٢} جا٢س$ .... بالاشتقاق بالنسبه لـ س

$س \cdot \frac{دص}{دس} + ص = \frac{١}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢} جتا٢س$

هشتق تانى بالنسبه لـ س

$س \cdot \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} = -٢ جا٢س$

$س \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \frac{دص}{دس} = -٤ \cdot (\frac{١}{٢} جا٢س)$

$س \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \frac{دص}{دس} = -٤ س \cdot ص$

$\therefore س \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \frac{دص}{دس} + ٤ س ص = ٠$

⑦ اذا كانت : ص = س جاس فاثبت انه
$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ داله زوجيه ....

الحل

$ص' = س \cdot جتاس + جاس$

$ص'' = س \cdot (-جاس) + جتاس + جتاس$

$ص'' = - س جاس + ٢ جتاس$

$\therefore د''(س) = - س جاس + ٢ جتاس$

لاثبات اى داله فرديه ولا زوجيه نعوض عن س = -س

$د''(-س) = -(-س) جا(-س) + ٢ جتا(-س)$

$= - س جاس + ٢ جتا س = د''(س)$

∴ الداله زوجيه عشانه $د''(-س) = د''(س)$

(٨) اذا كان: ص = جا ٣ س

اثبت انه: $٩ \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)^2 = ٨١$

الحل

هشتق بالنسبة لـ س

$\frac{دص}{دس} = ٣$ جتا ٣ س هشتق مره تانى

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -٩$ جا ٣ س

بالتعويض فى الطرف الأيمن للاثبات

$٩ (٣\ جتا\ ٣\ س)^2 + (-٩\ جا\ ٣\ س)^2$

$= ٩ \times ٩\ جتا^2\ ٣\ س + ٨١\ جا^2\ ٣\ س$

$= ٨١ \underbrace{(جتا^2\ ٣\ س + جا^2\ ٣\ س)}_{=١}$

= ٨١ = الطرف الايسر

(٩) اذا كان: جا ص + جتا ٢ س = ٠

اثبت انه:

$\frac{د^2ص}{دس^2} - \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$ ظا ص − ٤ جتا ٢ س قا ص = ٠

الحل

∵ جا ص + جتا ٢ س = ٠ هشتق بالنسبة لـ س

جتا ص . $\frac{دص}{دس}$ − ٢ جا ٢ س = ٠ هشتق تانى

جتا ص . $\frac{د^2ص}{دس^2} + \frac{دص}{دس}$. (−جا ص) $\frac{دص}{دس}$ − ٤ جتا ٢ س = ٠

جتا ص $\frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$. (−جا ص) − ٤ جتا ٢ س = ٠

بالقسمه على جتا ص

$\frac{د^2ص}{دس^2} - \frac{جا\ ص}{جتا\ ص} \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - ٤ \frac{جتا\ ٢\ س}{جتا\ ص} = ٠$

$\frac{د^2ص}{دس^2} - ظا\ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - ٤ \frac{جتا\ ٢\ س}{جتا\ ص} = ٠$

$\frac{د^2ص}{دس^2} - ظا\ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - ٤$ جتا ٢ س . قا ص = ٠

وما من خير تجدوه عند الله
صدق الله العظيم ....

جيه فى امتحان فى سنه من السنين وقالهم نفس المثال بالضبط بس قالهم اوجد قيمة

$\frac{د^2ص}{دس^2} - \left(\frac{دص}{دس}\right)^2$ ظا ص .. هتمشى نفس الخطوات

$\frac{د^2ص}{دس^2} - ظا\ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - ٤ \frac{جتا\ ٢\ س}{جتا\ ص} = ٠$

جتا ص ← من المعادلة الاصلية

$\frac{د^2ص}{دس^2} - ظا\ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 = ٤ \frac{جتا\ ٢\ س}{-جتا\ ٢\ س} = -٤$

(١٠) إذا كانت:

ف = م جتا(ل ن + هـ) هي معادلة الحركة لجسم يتحرك في خط مستقيم

حيث م، ل، هـ ثوابت فأثبت أنه:

د²ف/دن² + ل² ف = ٠

الحل

ف = م جتا (ل ن + هـ)

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

دف/دن = − م ل جا (ل ن + هـ)

د²ف/دن² = − م ل² جتا (ل ن + هـ)

من المعادلة المعطاة

د²ف/دن² = − ل² ف

بالتعويض في الطرف الأيمن للإثبات

− ل² ف + ل² ف = صفر = الطرف الأيسر

- النجاح سلالم لا تستطيع أن ترتقيها ويدك في جيبك.
- لسنا كسالى ولكنه لديكم أهدافًا عاجزة ☺

(١١) إذا كانت ص = جا³س + جتا³س

فأثبت أنه: د²ص/دس² = ٣/٢ (جتاس + جاس)(٣ جا٢س − ٢)

الحل

ص = (جاس)³ + (جتاس)³ نشتق بالنسبة لـ س

دص/دس = ٣(جاس)² جتاس + ٣(جتاس)² · (− جاس)

= ٣ جاس جتاس (جاس − جتاس)

= ٣/٢ · ٢ جاس جتاس (جاس − جتاس)

= ٣/٢ جا٢س · (جاس − جتاس)

نشتق ثاني بالنسبة لـ س

د²ص/دس² = ٣/٢ جا٢س · (جتاس + جاس)
+ (جاس − جتاس) · ٣/~~٢~~ · ~~٢~~ جتا٢س

د²ص/دس² = ٣/٢ جتا٢س (جاس − جتاس) × ٢
+ ٣/٢ جا٢س (جتاس + جاس)

هفكها ضعف الزاوية

هاخد سالب عامل مشترك

د²ص/دس² = ٣/٢ [جتا²س − جا²س] (جاس − جتاس) × ٢
+ ٣/٢ جا٢س (جتاس + جاس)

د²ص/دس² = ٣/٢ · ٢ (جتاس − جاس)(جتاس + جاس) *
− (جتاس − جاس) + ٣/٢ جا٢س (جتاس + جاس)

هاخد (جتاس + جاس) × ٣/٢ عامل مشترك

= ٣/٢ (جتاس + جاس) [− ٢ (جتاس − جاس)² + جا٢س]

= ٣/٢ (جتاس + جاس) [− ٢ (١ − جا٢س) + جا٢س]

= ٣/٢ (جتاس + جاس) (٣ جا٢س − ٢) ✓✓

(١٢) اذا كانت:

$\text{س ص} = ٥ \text{ جا م س} + ٣ \text{ جتا م س}$

اثبت انه:

$\frac{d^2 \text{ص}}{d \text{س}^2} + \frac{2}{\text{س}} \cdot \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} + \text{م}^2 \text{ص} = 0$

الحل

بالاشتقاق بالنسبه لـ س

$\text{س} \cdot \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} + \text{ص}(1) = ٥\text{م جتا م س} - ٣\text{م جا م س}$

هشتق مره كمان .....

$\text{س ص}'' + \text{ص}' + \text{ص}' = -٥\text{م}^2 \text{ جا م س} - ٣\text{م}^2 \text{ جتا م س}$

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' = -٥\text{م}^2 \text{ جا م س} - ٣\text{م}^2 \text{ جتا م س}$

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' = -\text{م}^2 (\underbrace{٥ \text{ جا م س} + ٣ \text{ جتا م س}}_{})$

من المعادله الاصليه اللى مدهالنا $= \text{س} \cdot \text{ص}$

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' = -\text{م}^2 \text{ س ص}$

بالقسمه على س

$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}} \text{ص}' = -\text{م}^2 \text{ص}$

$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}} \text{ص}' + \text{م}^2 \text{ص} = ٠$ #

(١٣) اذا كانت: $\text{ص} = \text{ظا}^2 \text{س}$

فاثبت انه:

$\frac{1}{2} \text{ص}'' = (١+\text{ص})(١+٣\text{ص})$

الحل

$\text{ص} = (\text{ظا س})^2 \longrightarrow \text{ص}' = ٢(\text{ظا س})^1 \cdot \text{قا}^2 \text{س}$

$\text{ص}' = ٢ \text{ ظا س} (١ + \text{ظا}^2 \text{س})$

$\text{ص}' = ٢ \text{ ظا س} + ٢ (\text{ظا س})^3$

هشتق مره كمان بالنسبه لـ س

$\text{ص}'' = ٢ \text{ قا}^2 \text{س} + ٦ (\text{ظا س})^2 \cdot \text{قا}^2 \text{س}$

$\text{ص}'' = \underbrace{٢ \text{ قا}^2 \text{س}}_{} [٣ \text{ ظا}^2 \text{س} + ١]$

$\text{ص}'' = ٢(١+\text{ظا}^2 \text{س})(١ + ٣ \text{ ظا}^2 \text{س})$

$\text{ص}'' = ٢(١+\text{ص})(١+٣\text{ص})$ #

"فشل من حولك لا يعني بالضروره فشلك لكن لا تتوقع منهم مساعدتك على النجاح" #

"الناجحون يقدرون على النجاح لانهم يعتقدون انهم يقدرون"

عافر _ للحلمك

حاول تحل دي:

$\text{س} = \text{جتا}(\text{س ص})$ اثبت انه:-

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} + \frac{١ + \text{ص جا}(\text{س ص})}{\text{س} \cdot \text{جا}(\text{س ص})} = ٠$

(١٤)

إذا كانت :

$$س = \sqrt{ظاص + \sqrt{ظاص + ---}}$$

اثبت انه :

$$\frac{دص}{دس} = (٢س - ١) \, جتا^2 ص$$

الحل

$$س = \sqrt{ظاص + \sqrt{ظاص + ---}}$$

بتربيع الطرفين

$$س^2 = ظاص + \sqrt{ظاص + \sqrt{ظاص + ...}}$$

$$س^2 = ظاص + س$$

هنشتق بالنسبه لـ س

$$٢س = قا^2 ص \cdot صَ + ١$$

$$٢س - ١ = قا^2 ص \; صَ$$

$$\therefore صَ = \frac{(٢س - ١)}{قا^2 ص}$$

$$\therefore صَ = (٢س - ١) \cdot جتا^2 ص \;\#$$

(١٥)

إذا كانت :

س = جاص ، ٠ < س < ١

، ص زاويه حاده أثبت انه

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^2}}$$

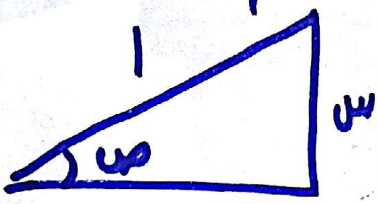
الحل

س = جاص هنشتق بالنسبه لـ س

$$١ = جتاص \cdot صَ$$

$$\therefore صَ = \frac{١}{جتاص} \longrightarrow (١)$$

$$\therefore \frac{س}{١} = جاص = \frac{مقابل}{وتر}$$



$$\sqrt{١ - س^2}$$

$$\therefore جتاص = \sqrt{١ - س^2}$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore صَ = \frac{١}{\sqrt{١ - س^2}} \;\#$$

SHEET (2)

① ص = قتا^ن س

اثبت انه: دص/دس + ن ص ظتا س = ٠

② اوجد دص/دس اذا كانت

ص = √((قاس − ١)/(قاس + ١))

③ اوجد دص/دس اذا كانت:

س = ٣ جتا ٢θ ، ص = ٤ جا ٣θ

عندما θ = π/٤

④ اثبت انه ص = (١ + طاس)/(١ − طاس)

دس/دص = جتا² (س + ٤٥°)

⑤ جاس = س َ. ص

اثبت انه: س² (ص + ص'') + ٢ قتاس = ٢ ص

⑥ اذا كانت د(جاس) = جا²س

فاوجد د''(١) .

⑦ اذا كانت: ص = √(١ + جاس)

فاثبت انه: ص + ٤ د²ص/دس² = ٠

⑧ اذا كانت: جاص = س ص + ظا(π/٤)

فاوجد قيمة ص' [جتاص − س]

⑨ اذا كانت: ص = جا⁴س + جتا⁴س

اوجد قيمة ص'' + جا٤س + ٥

⑩ اذا كانت: ص = جاس + جتاس

فاثبت انه: ص = د⁴ص/دس⁴

⑪ اذا كان: س = قاع ، ص = ظاع

اثبت انه: د²ص/دس² − ٢ = ٠

⑫ اذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق

① ق(س) = ٣د(س) − ٢ر(س)

فان ق'(١) = ...

② ق(س) = [س² + ر(س)]^(−٢)

فان ق'(١) = ...

س	١	٢
د(س)	−١	٤
ر(س)	٢	١
د'(س)	١	٥
ر'(س)	٢	−٣

⑬ قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى

ص/س² = اس − ١٢ عند س = ١ هو ...

⑭ اذا كانت: د(س) = ٢ جا(س/٢) . جتا(س/٢)

فان المشتقة رقم ١٠٠٠ لهذه الداله

هي ......

⑮ اوجد معدل تغير √(١٦ + س²)

بالنسبة لـ س/س² عند س = −٣

⑯ ا ب ج مثلث مساحته م ، النقطة ج

تتحرك على المستقيم ص = ٢س فاذا كان

ا = (ل ، ٠) ، ب = (٠ ، ك) اثبت انه دم/دس = ل + ك/٢


الزتونه

الى هذه اللحظه المباركه نقدر نلخصله كل اللى اتقال تحت عنـوانه # الزتـونه

① $\frac{د}{د س}$ ( ) ← يعني اشتقلي اللى جوه ده بالنسبه لـ س وش شرط س

② معدل التغير = ميل المماس = المشتقه الاولى = $\underset{هـ \leftarrow 0}{نها} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

③ لو مديلك داله كده $ص = ش^3 + 2ش$ ممكن تشتق ص بالنسبه لـ س او العكس يعني ايه . $\frac{د ص}{د س} = 2ش + 4س$ وممكن اقول انى هشتق س بالنسبه لـ ص كده مثلاً

$\frac{د ص}{د ص} = 3ش^2 \times \frac{د س}{د ص} + 4س \times \frac{د س}{د ص}$ ← $1 = (2ش + 4س)\frac{د س}{د ص}$

$\therefore \frac{1}{\frac{د س}{د ص}} = \frac{د ص}{د س} = 2ش + 4س$ شوفت سبحان الله هى هى #

الدالة $ص = د(س)$	تفاضلها $ص' = د'(س) = \frac{د ص}{د س}$	الدالة $ص = د(س)$	تفاضلها $ص' = د'(س) = \frac{د ص}{د س}$
أ ← ثابت	صفر	أ . جا[د(س)]	أ * جتا د(س) * د'(س) ← تفاضل الزاوية
أ $س^ن$	ن $س^{ن-1}$ ننزل الاس ونطرح منه واحد	أ جتا[د(س)]	-أ جا د(س) * د'(س)
$\sqrt{د(س)}$	$\frac{1}{2\sqrt{د(س)}} \times د'(س)$ ← تفاضل ما بداخل الجذر	أ ظا[د(س)]	أ قا² د(س) * د'(س)
$\sqrt[م]{س^ن} = س^{\frac{ن}{م}}$	$\frac{ن}{م} س^{\frac{ن}{م}-1}$	أ ظتا[د(س)]	-أ قتا² د(س) * د'(س)
لو$_هـ$ د(س)	$\frac{د'(س)}{د(س)}$ ← تفاضل ما بداخل اللوغاريتم	أ قا[د(س)]	أ * قا[د(س)] ظا[د(س)] * د'(س)
		أ قتا[د(س)]	-أ . قتا د(س) . ظتا د(س) * د'(س)

* حاصل ضرب دالتين : $ص = د(س) \times ر(س)$ (الاولى × الثانيه)

$ص' = د(س) * ر'(س) + ر(س) \times د'(س)$

الاولى × تفاضل الثانيه + الثانيه × تفاضل الاولى

* قسمه دالتين : $ص = \frac{د(س)}{ر(س)}$ (البسط / المقام)

$ص' = \frac{ر(س) \times د'(س) - د(س) * ر'(س)}{[ر(س)]^2}$

المقام × تفاضل البسط − البسط × تفاضل المقام ← المقام تربيع

قاعده السلسله :

① $ص = د(ع)$ ، $ع = د(س)$

اوجد $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

اللى عايزه = اللى تحته منزها × اللى تحته منزها

② $ص = د(ن)$ ، $س = د(ن)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$ ← شقلب

لحل اى مسأله اثبات :-

① شوفه هتشتق كام مره بعرفها منه الاثبات

② تشتق الداله طلع الاثبات OK مطلعش

③ نجيب المشتقه فى طرفه ونرجع نعوضه فى اى منه طرفى الاثبات

④ متنساش عينك تكون ع الداله #