Vectors: Solved Problems مسائل محلولة عن المتجهات

Chapter · January 2019

1 author:

Emil Shoukralla
Minoufiya University

Vectors Algebra: Solved Problems

مسائل محلولة عن المتجهات

(1) إذا أعطيت المتجهات

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

أوجد مقدار المتجهين $\vec{a} + 3\vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$. (b) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $3\vec{a} + \vec{b}$. (c) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$. (d) هل الثلاث متجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تقع في مستوى واحد؟ (e) وهل العلاقة $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$ صحيحة؟

Solution - الحل

نفرض أن

$$\vec{B} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = \left(6\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(-2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}\right) = 4\hat{i} + 16\hat{j} + 9\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{16 + 256 + 81} = \sqrt{353}$$

أيضاً نفرض أن

$$\vec{A} = \vec{a} + 3\vec{b} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}\right) + \left(3\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k}\right) = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{25 + 4 + 64} = \sqrt{93}$$

(b) نفرض أن

$$\vec{C} = 3\vec{a} + \vec{b} = \left(6\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 7\hat{i} + 10\hat{j}$$

1) وبالتالي فإن

$$\hat{C} = \frac{7\hat{i} + 10\hat{j}}{\sqrt{49 + 100}} = \frac{7}{\sqrt{149}}\hat{i} + \frac{10}{\sqrt{149}}\hat{j}$$

(c) نفرض أن الزاوية بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ هي θ، حيث نجد أن

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{2-8-3}{\sqrt{21}\sqrt{14}}=\frac{-9}{7\sqrt{6}}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-9}{7\sqrt{6}}\right)$$

(d) بما أن

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&-2&-3\\-1&1&3\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

إذن فإن المتجهات الثلاثة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ لا تقع في مستوى أفقي واحد.

(e) بما أن

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&4&1\\1&-2&-3\end{vmatrix}=-10\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-10&7&-8\\-1&1&3\end{vmatrix}=29\hat{i}+38\hat{j}-3\hat{k}$$

أيضاً لدينا

$$\vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&-2&-3\\-1&1&3\end{vmatrix}=-3\hat{i}-\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&4&1\\-3&0&-1\end{vmatrix}=-4\hat{i}-\hat{j}+12\hat{k}$$

وهكذا نجد أن

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c}$$

*****

(2) أوجد قيمه m الموجبة التي تجعل الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=m\hat{i}-\hat{k}$ تساوي $\frac{\pi}{3}$.

Solution - الحل

نفرض أن الزاوية بين المتجهين $\vec{a},\vec{b}$ هي $\theta=\frac{\pi}{3}$، إذن

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(m\hat{i}-\hat{k}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}}$$

أو

$$\frac{1}{2}=\frac{m-1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{m^2-2m+1}{3\left(m^2+1\right)}\Rightarrow m^2-8m+1=0$$

إذن

$$m_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4}}{2}=4\pm\sqrt{15}$$

وتكون m المطلوبة هي $m=4+\sqrt{15}$.

*****

(3) اثبت أن $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$ عندما يكون $a=b$، ثم استخدم هذه النتيجة في إثبات أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة.

Solution - الحل

بما أن

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-b^2$$

وبما أن

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

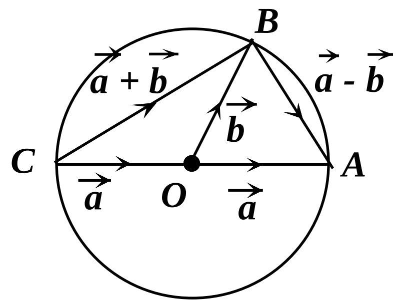
إذن، عندما $a=b$ فإن

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a^2-b^2=0$$

وهذا يعني أن المتجهين

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\ and\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

متعامدان. انظر الشكل.



(5) اثبت أن $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a^2-b^2$ ، ثم استنتج أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين إلى منتصف القاعدة عمودي على هذه القاعدة.

Solution - الحل

نفرض أن

$$\vec{a}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right),\ \vec{b}=\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)$$

إذن فإن

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x\right)\hat{i}+\left(a_y-b_y\right)\hat{j}+\left(a_z-b_z\right)\hat{k}$$

وأيضاً

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x\right)\hat{i}+\left(a_y+b_y\right)\hat{j}+\left(a_z+b_z\right)\hat{k}$$

وبالتالي فإن

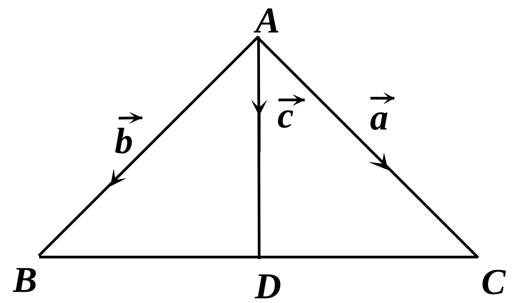
$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a_x^{\,2}-b_x^{\,2}+a_y^{\,2}-b_y^{\,2}+a_z^{\,2}$$

$$-b_z^{\,2} = \left(a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{2}\right) - \left(b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}\right)$$

وهكذا نجد أن

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = a^2 - b^2$$

انظر الشكل.



أيضاً، بما أن
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{c} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}$$

إذن فإن

$$\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

ويكون شرط تعامد المتجهين $\vec{d}\,,\vec{c}$ هو أن $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$. بما أن المثلث متساوي الساقين أي أن $a = b$، إذن

$$\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}0 = 0$$

*****

(7) إذا كان $\vec{a} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$. فأوجد المتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}$ ويساوي ضعفه في المقدار، ثم أوجد المتجه الذي له عكس اتجاه $\vec{a}$، ومقداره $\frac{1}{3}$ مقدار المتجه $\vec{a}$.

Solution - الحل

لنرمز ـ أولاً ـ للمتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}$ ويساوي ضعفه في المقدار بالرمز $\vec{A}$. كما نرمز للمتجه الذي له عكس اتجاه $\vec{a}$، ومقداره $\frac{1}{3}$ مقدار المتجه $\vec{a}$ بالرمز $\vec{B}$. إذن فإن

$$\vec{A} = (2a)\hat{a},\ \vec{B} = \left(\frac{1}{3}a\right)(-\hat{a})$$

نوجد مقدار المتجه $\vec{a}$، ومن ثم متجه الوحدة $\hat{a}$، فنجد أن

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{16+25+9}} = \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{A} = (2a)\hat{a} = \left(2\cdot 5\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}\right) = 8\hat{i} - 10\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{3}a\right)(-\hat{a}) = \frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} - \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}\right) = -\frac{4}{3}\hat{i} + \frac{5}{3}\hat{j} - \hat{k}$$

*****

(9) أوجد المتجه الذي مركباته موجبة، ومقداره 2، وزوايا الاتجاه كلها متساوية.

Solution - الحل

نفرض أن المتجه المطلوب هو

$$\vec{a} = 2(\cos(\alpha))\hat{i} + (\cos(\beta))\hat{j} + (\cos(\gamma))\hat{k}$$

بما أن زوايا الاتجاه كلها متساوية، إذن فإن

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$$

عندئذٍ نجد أن

$$3\cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبما أنه، من المفترض أن تكون كل مركبات المتجه المطلوب موجبة، إذن فإن

$$\vec{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

*****

(9) أوجد المعادلات المتجهة والبارامترية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(5,-6,2)$ ويوازي المتجه $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},2,-\frac{4}{3}\right)$.

الحل - Solution

المعادلة المتجهة هي

$$\vec{a}=t\,\vec{v}+\vec{a}_0=t\left(\frac{1}{2},2,-\frac{4}{3}\right)+(5,-6,2)$$

إذن المعادلة البارامترية هي

$$x=\frac{1}{2}t+5,\ y=2t-6,\ z=-\frac{4}{3}t+2$$

والمعادلة القياسية هي

$$2x-10=\frac{y+6}{2}=\frac{-3z+6}{4}$$

******

(11) أوجد المسافة بين النقطة $P(-5,3,7)$ والمستوى، الذي معادلته $6x-5y+8z-9=0$.

الحل - Solution

لنرمزلهذه المسافة بالرمز h، فنجد أن

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{(6\times-5)+(-5\times3)+(8\times7)-9}{\sqrt{(6)^2+(-5)^2+(8)^2}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

*****

(13) أوجد المعادلة المتجهة للخط، الذي يمر بالنقطة $(-1,3,4)$ ويوازي الخط $x=t,\ y=-1,\ z=3+t$.

الحل - Solution

لنرمز للخط المطلوب بالرمز l_1، ولنرمز للخط الذي معادلته: $x=t,\ y=-1,\ z=3+t$ بالرمز l_2. نفرض أن المعادلة المتجهة (المطلوبة) للخط l_1 الذي يمر بالنقطة $(-1,3,4)$، و يوازي الخط l_2

هي $\vec{a}=t_1\vec{v}_1+\vec{a}_0$. أيضاً، بما أن المعادلة المتجهة للخط l_2 يمكن وضعها في الصورة الاتجاهية $\vec{b}=t_2\vec{v}_2+\vec{b}_0$، أي في الصورة

$$\vec{b}=t_2(1,0,1)+(0,-1,3)$$

حيث نجد هنا أن $\vec{v}_2=(1,0,1)$. لكننا نجد أن $\vec{l_1}\ //\ \vec{l_2}$ إذا كان $\vec{v_1}\ //\ \vec{v}_2$ أي إذا كان $\vec{v}_1=c\vec{v}_2$، حيث c أي عدد حقيقي. إذن فإن المعادلة الاتجاهية للخط l_1، والذي يمر بالنقطة $(-1,3,4)$ تصبح

$$\vec{a}=t\,(1,0,1)+(-1,3,4)$$

حيث $t=ct_1$ هو أي عدد حقيقي.

*****

(15) ادرس تقاطع الخطين $l_1,\ l_2$، حيث

$$l_1:\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{-1};$$

$$l_2:\ x=-2+t\ ,y=-2-t\ ,z=2+t$$

الحل - Solution

نوجد أولاً المعادلتين الاتجاهيتين للخطين $l_1,\ l_2$ فنجد أنهما على الترتيب

$$\vec{a}=t_1(-2,4,-1)+(-1,3,5);\vec{b}=t_2(1,-1,1)+(-2,-2,2)\ ;$$

إذا تقاطع الخطان المستقيمان l_1,l_2 في نقطة ما فإن هذا يعني . رياضياً . أن

$$t_1(-2,4,-1)+(-1,3,5)=t_2(1,-1,1)+(-2,-2,2) \qquad \text{(i)}$$

وهذه المعادلة الاتجاهية (i) هي في واقع الأمر نظام مكون من ثلاثة معادلات في المجهولين $t_1,\ t_2$.
وهذه المعادلات الثلاث يمكن الحصول عليها بمقارنة طرفي المعادلة الاتجاهية السابقة فنحصل على

$$-2t_1-t_2=-1;\ 4t_1+t_2=-5;\ -t_1-t_2=-3 \qquad \text{(ii)}$$

بحل أي معادلتين من النظام (ii) يمكن الحصول على البارامترين $t_1,\ t_2$، ثم يتم التعويض بهما في المعادلة الثالثة المتبقية فإذا تحققت كان النظام متوافقاً، مما يعني أن هناك نقطة تقاطع للمستقيمين. وإذا لم تتحقق هذه المعادلة الثالثة فإن هذا يعني أن النظام غير متوافق، وعندئذٍ فلا توجد نقط تقاطع ويكون

الخطان متخالفين. بحل المعادلتين الأولى والثانية، أي المعادلتين $-2t_1-t_2=-1;\ 4t_1+t_2=-5$ حلاً آنياً *(Similtineously)* نجد أن

$$t_1=-3,\ t_2=7$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة الثالثة المتبقية $-t_1-t_2=-3$ نجد أنها لا تتحقق. وبالتالي فلا توجد نقطة تقاطع للخطين $l_1,\ l_2$. الآن ندرس متجهي الاتجاه للخطين المستقيمين المعطيين $l_1,\ l_2$ فإذا كانا غير متوازيين فإن الخطين $l_1,\ l_2$ يكونان متخالفين. بما أن

$$\vec{v}_1=(-2,4,-1),\ \vec{v}_2=(1,-1,1)$$

وهما غير متعامدين، لأنه، بفرض أن الزاوية بينهما هي θ، فإننا نجد أن

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{v_1v_2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{21}\sqrt{3}}\right)\neq 0$$

وغيرمتوازيين لأن $\vec{v}_1\neq c\vec{v}_2$ لأي عدد حقيقي c، إذن فإن الخطين $l_1,\ l_2$ خطان متخالفان.

*****

(21) هل الخط المستقيم الذي معادلته الاتجاهية $\vec{r}=t\,(-1,3,2)+(2,1,1)$ عمودي على المستوى الذي معادلته القياسية $x-3y-2z=11$؟ أوجد نقطة التقاطع إن وجدت.

الحل - Solution

الخط المستقيم يكون عمودياً على المستوى إذا كان متجه الاتجاه له، أي المتجه $\vec{v}=(-1,3,2)$ يوازي المتجه العمودي للمستوى وهو $\vec{n}=(1,-3,-2)$. بما أن

$$\vec{n}\wedge\vec{v}=\left(-\hat{i},3\hat{j},2\hat{k}\right)\wedge\left(\hat{i},-3\hat{j},-2\hat{k}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&3&2\\1&-3&-2\end{vmatrix}=0$$

إذن فإن الخط المستقيم المعطى عمودي على المستوى المعطى. للحصول على نقطة تقاطعه مع هذا المستوى. نوجد . أولاً . المعادلات البرامترية للخط المستقيم وهي

$$x=-t+2,\ y=3t+1,\ z=2t+1$$

بالتعويض في معادلة المستوى نحصل على

$$(-t+2)-3(3t+1)-2(2t+1)=11 \Rightarrow t=-1$$

إذن نقطة التقاطع هي

$$(x,y,z)=(3,-2,-1)$$

****