3 الباب الثالث Chapter Three

المتجهات Vectors

3-1: مقدمة Introduction

المتجه vector مفهوم رياضي يشير إلى كمية ذات دلالتين: الدلالة الأولى مقدار رقمي موجب لـه وحدة قياس يسمى مقدار الكمية magnitude of the quantity، والدلالة الثانية اتجاه الكمية direction of the quantity. يستعمل المتجه لوصف بعض الكميات الفيزيائية وصفاً كاملاً. فمثلاً لوصف حركة شخص أو حركة أي جسم وصفاً كاملاً لا بد من الإشارة إلى مقدار سرعته والاتجاه الذي يسير فيه، فنقول إن ذلك الجسم يسير بسرعة مقدارها 5 m/s باتجاه الشرق أو باتجاه الغرب أو باتجاه يميل بزاوية. الكمية الفيزيائية التي تجمع دلالتي مقدار السرعة واتجاهها تسمى **السرعة المتجهة velocity**.

لوصف عملية سحب أو دفع تؤثر على جسم ما وصفاً كاملاً لا بد من الإشارة إلى مقدار السحب أو الدفع واتجاه عمل السحب أو الدفع على الجسم، فنقول مثلاً أن شخصاً سحب صندوقاً بمقدار 5 N باتجاه يميل 30° مع الخط الأفقي. الكمية الفيزيائية التي تجمع دلالتي مقدار السحب (أو الدفع) واتجاهها تسمى **القوة force**.

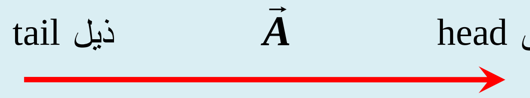
هناك العديد من الكميات الفيزيائية نحتاج لوصفها وصفاً كاملاً إلى دلالتي المقدار والاتجاه مثل، الإزاحة displacement، التسارع المتجه acceleration، الزخم momentum. فهذه الكميات تسمى كميات متجهة vector quantity

توجد أنواع من الكميات الفيزيائية نكتفي لوصفها وصفاً كاملاً أن نستعمل رقم مع وحدة قياس؛ أو رقم بدون وحدة قياس، أي إن هذه الكميات لها مقدار فقط ونسميها الكميات القياسية scalar quantity، ومثال على هذه الكميات الحجم volume، الكتلة mass، الزمن time، الشحنة الكهربائية electric charge، والسماحية الكهربائية $\in$ permittivity. فعندما نقول أن حجم مكعب ما يساوي $64\ cm^3$ فهذا الوصف كاملاً، ومن الخطأ أن نضيف كلمة الاتجاه الذي هو فيه. وكذلك الأمر بالنسبة للأمثلة التي طرحت، فالشحنة الكهربائية توصف وصفاً كاملاً بتحديد نوعها ومقدارها بوحدة الكولوم أو مشتقاته فقط، فنقول أن قيمة شحنة كهربائية سالبة أو

موجبة يساوي 4μc، ومن الخطأ أيضاً أن نضيف كلمة الاتجاه. بينما لوصف القوة المتبادلة بين شحنتين فيجب تحديد مقدار القوة واتجاهها.

للدلالة على الكمية المتجهة بالرموز يستخدم عادة حرفاً غامقاً (**بنط أسود غامق Bold**)

مثل $\boldsymbol{A}$، أو حرفاً غامقاً فوقه سهم مثل $\vec{\boldsymbol{A}}$، وهذا النوع الأخير هو الذي سيستخدم في هذا الكتاب. يرسم المتجه كخط مستقيم عند أحد طرفيه سهم يشير إلى الاتجاه ويسمى الرأس، والطرف الآخر يسمى الذيل كما في الشكل 1-3

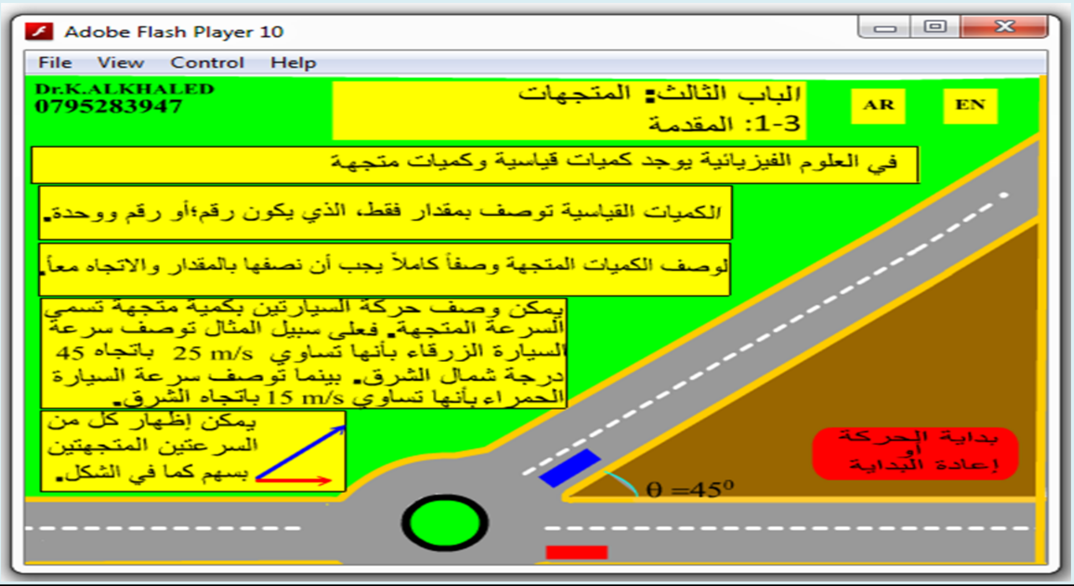


الشكل 1-3 طريقة عرض المتجه

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الأولى لهذا الباب.

البرمجية الأولى بعنوان: المقدمة Introduction .

صورة عن واجهة البرمجية الأولى للباب الثالث وهي بعنوان المقدمة **Introduction**

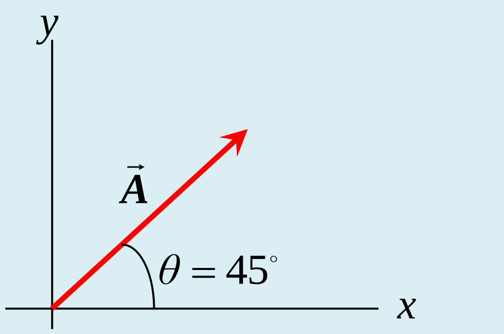


هذه صورة عن واجهة البرمجية الأولى. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر بداية الحركة أو إعادة البداية ثم مراقبة الحركة والنظر في وصف حركة السيارتين . لقراءة النص في اللغة الانجليزية أنقر عل زر EN .

2-3 : مقدار واتجاه المتجه Magnitude and Direction of a Vector

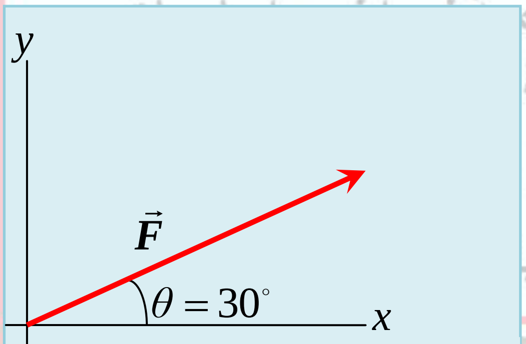
يتم بيان المعلومات المتعلقة بالمقدار والاتجاه بثلاث طريق (الطريقة الثالثة هي تسهيل للطريقة الثانية وتزيل ما يرافقها من لبس): **الطريقة الأولى** تكون باستعمال محوري المستوى القطبي (r,θ) إذا كان المتجه في بعدين فقط حيث r هو مقدار المتجه ويرسم بمقياس رسم مناسب يمثل المقدار الطول من نقطة الذيل إلى نقطة الرأس، و θ الزاوية بين محور x و $\vec{r}$ باتجاه عكس عقارب الساعة. على سبيل المثال المتجه $\vec{A}$ يكتب على النحو التالي:

$\vec{A}=(A,\theta)$ حيث الرمز A مقدار المتجه $\vec{A}$ ويكون دائماً موجب، أحياناً يكتب على الصورة $|\vec{A}|$. الشكل 2-3 يوضح ذلك **(لاحظ نوع الحرف المكتوب)**



الشكل2-3 (a) متجه $\vec{A}$ مقداره 30cm على سبيل المثال يميل 45° عن محور x الموجب. يكتب

$$\vec{A}=(30\,\text{cm},45^\circ)$$



الشكل2-3 (b) متجه $\vec{F}$ مقداره 40 N على سبيل المثال يميل 30° عن محور x الموجب. يكتب

$$\vec{F}=(40\,\text{N},30^\circ)$$

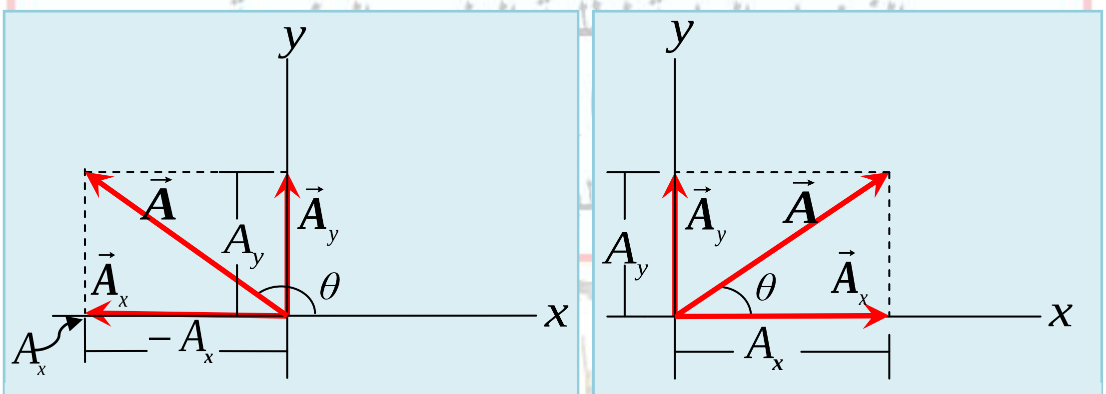
والطريقة الثانية لبيان المعلومات المتعلقة بالمقدار والاتجاه هي باستعمال مساقط المتجه على المحاور الكارتيزية في حالة كان المتجه في بعدين (x,y)؛ أو في ثلاثة أبعاد (x,y,z)، وهذه الطريقة تسمى طريقة أجزاء المتجه؛ أو مركبات المتجه Components of Vector.

إن أي متجه يقع في المستوى xy يمكن أن يكتب كمجموع متجهين، واحد موازي للمحور x وقيمته تساوي مسقط المتجه على محور x ونسميه متجه جزئي (مركبة متجه) **component vector** باتجاه المحور x، والثاني موازي للمحور y وقيمته تساوي مسقط المتجه على محور y ونسميه متجه جزئي (مركبة متجه) باتجاه المحور y. إن المتجه $\vec{A}$ في الشكل 2-3 يكتب بالرموز على الشكل التالي:

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y \quad .... \quad (3\text{-}1)$$

حيث $\vec{A}_x$ متجه جزئي (مركبة متجه) component vector للمتجه $\vec{A}$ بالاتجاه x ، و $\vec{A}_y$ متجه جزئي (مركبة متجه) للمتجه $\vec{A}$ بالاتجاه y الشكل 3-3 . **إن مقدار المتجه يكون دائما موجب**، وبالتالي فإن مقدار كل من $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ يكون دائماً موجب. عندما يكون $\vec{A}_x$ في اتجاه محور x الموجب فإننا نُعَرِفْ الرقم A_x ليكون مساوياً لمقدار $\vec{A}_x$. عندما تكون $\vec{A}_x$ في اتجاه محور x السالب فإن الرقم A_x يكون مساوياً لسالب مقدار $\vec{A}_x$. إن A_x رقم وليس متجه وهو يسمى الجزء الرقمي أو المركبة القياسية scalar component للمتجه $\vec{A}$ على المحور x ، ويمكن أن يكون موجب أو سالب، بينما مقدار $\vec{A}_x$ ($|\vec{A}_x|$) يكون دائماً موجب.

بنفس الطريقة يكون تعريف الرقم A_y.

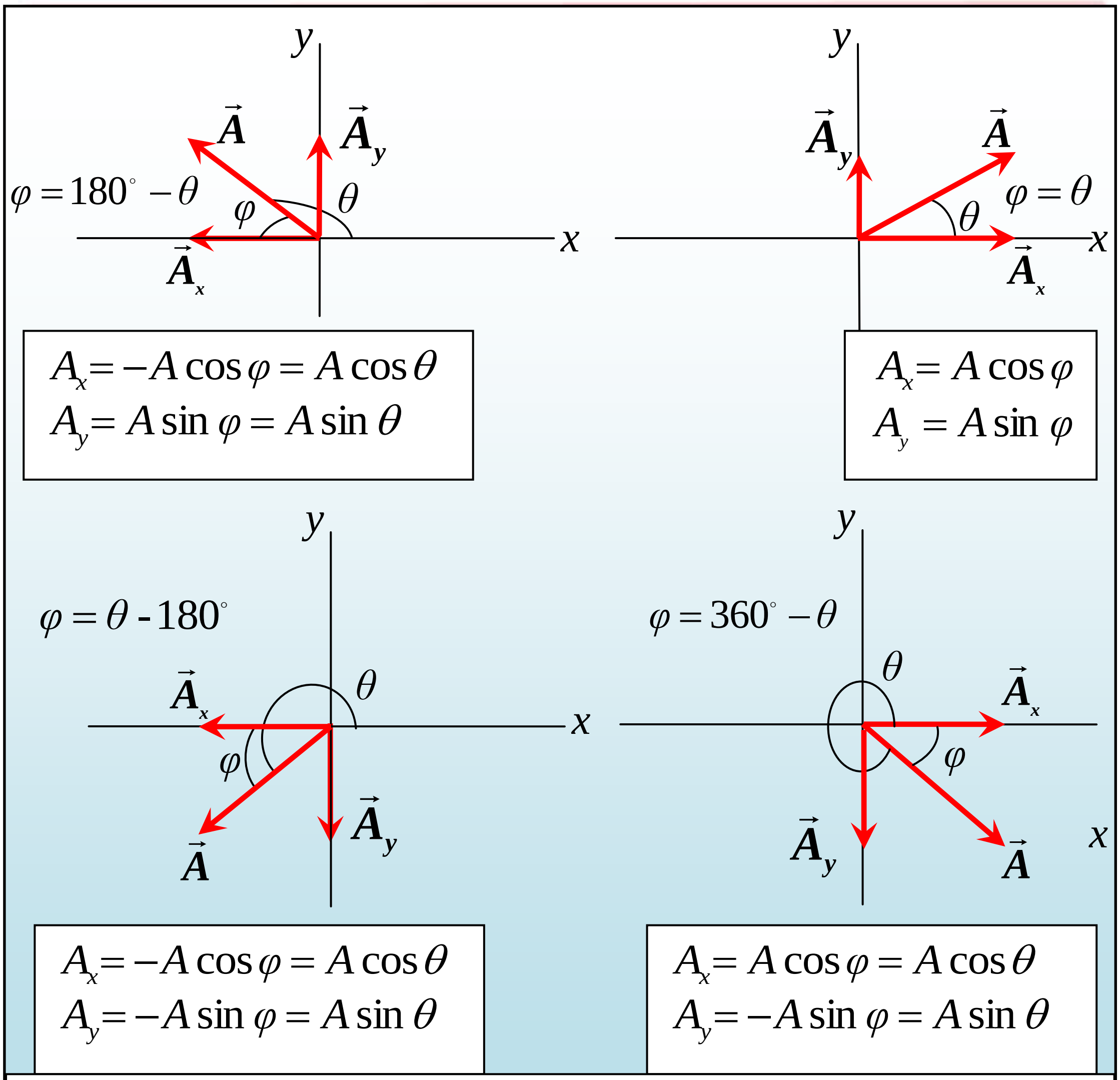


الشكل3-3 (b) المتجه $\vec{A}$ يكتب بالرموز $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$. لاحظ أن A_x سالب و A_y موجب

الشكل3-3 (a) المتجه $\vec{A}$ يكتب بالرموز $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$. لاحظ أن A_x موجب و A_y موجب

نستطيع حساب A_x و A_y من خلال معرفتنا لقوانين النسب المثلثية، ولكن هنا يجب أن نكون حذرين عندما نستعمل الآلة الحاسبة calculator فقد يحصل لُبس في الحسابات ونحصل على نتائج خاطئة بسبب أن A_x لا يمثل مقداراً موجباً دائماً، وإنما يمثل الجزء الرقمي للمتجه ويمكن أن يكون موجباً أو سالباً. ولإزالة أي لُبس دعونا نرمز للزاوية باتجاه عكس عقارب الساعة بين محور x الموجب والمتجه $\vec{A}$ بالرمز θ كما اتفقنا عليه سابقاً، بينما نرمز للزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومتجهه الجزئي $\vec{A}_x$ نرمز لها بالرمز φ. لاحظ الشكل 3-4 .

ملاحظة مهمة: يجب أن تترافق حساباتك مع رسم المتجه ورسم مركبتيه. ونعود ونذكر أن الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور x نرمز لها بالرمز θ، بينما الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومركبته المتجهة $\vec{A}_x$ نرمز لها بالرمز φ. إذا كان المتجه موجود في المربع الأول من المستوى الديكارتي فإن θ تساوي φ، أما إذا كان المتجه في المربع الثاني فإن $\theta = 180^\circ - \varphi$. وإذا كان المتجه في المربع الثالث فإن $\theta = 180^\circ + \varphi$. وأخيراً إذا كان المتجه في المربع الرابع فإن $\theta = -\varphi$، أو $\theta = 360^\circ - \varphi$.



$$A_x = A\cos\varphi \qquad A_y = A\sin\varphi$$

$$A_x = -A\cos\varphi = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\varphi = A\sin\theta$$

$$A_x = A\cos\varphi = A\cos\theta \qquad A_y = -A\sin\varphi = A\sin\theta$$

$$A_x = -A\cos\varphi = A\cos\theta \qquad A_y = -A\sin\varphi = A\sin\theta$$

الشكل 4-3 طريقة حساب الجزئين (المركبتين القياسيتين) **scalar components** A_x و A_y للمتجه $\vec{A}$. يرجى الرجوع **للملاحظة المهمة** في الصفحة السابقة عند إجراء الحساب.

ومن الشكل 3-4 أيضاً نستطيع كتابة العلاقة بين A الذي يمثل مقدار المتجه $\vec{A}$ ومقدار كل من مركبتيه السينية والصادية (جزئيه السيني والصادي).

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \quad \ldots\ldots \; (3\text{-}2)$$

ونستطيع أيضاً كتابة العلاقة بين الاتجاه المحدد بالزاوية φ ومقدار كل من المركبتين ومن ثم حساب الزاوية θ .

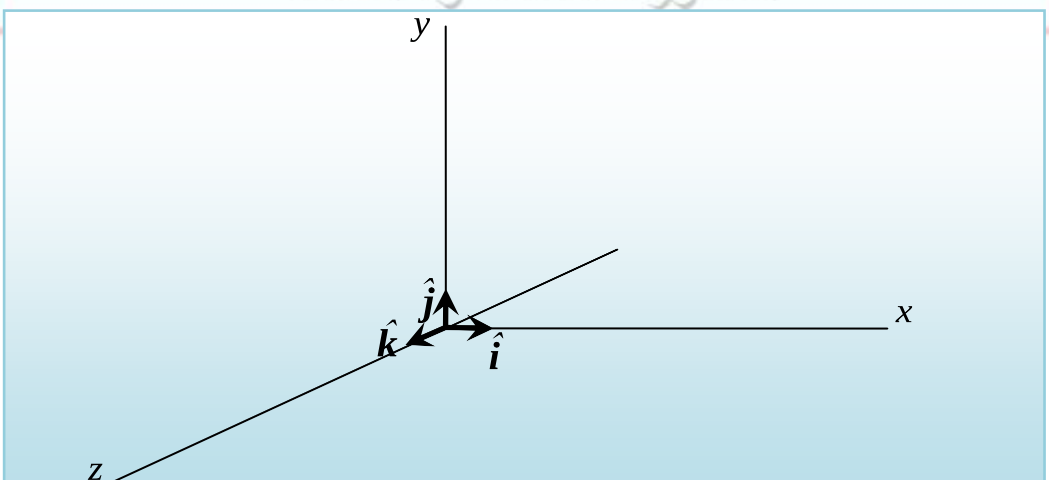
$$\tan\varphi = \frac{|A_y|}{|A_x|} \qquad \ldots\ldots\ldots \; (3\text{-}3)$$

الطريقة الثالثة وهي الطريقة الأكثر استعمالاً وهي تسهيل للطريقة الثانية وتسمى طريقة استعمال **متجهات الوحدة Unit Vector**

لتسهيل بيان المعلومات المتعلقة بالمقدار والاتجاه باستعمال طريقة مركبات المتجه Components of Vector يتم إضافة مفهوم جديد يسمى متجه الوحدة Unit Vector، مقداره يساوي واحد وبدون وحدة قياس، وأما اتجاهه فيحدد باتجاه المحور المرتبط به.

لقد اتفق على أن يكون الرمز $\hat{i}$ متجه وحده في اتجاه محور x الموجب، والرمز $\hat{j}$ متجه وحده في اتجاه محور y الموجب، والرمز $\hat{k}$ متجه وحده في اتجاه محور z الموجب بحيث إن مقادير كلٍ منهما تساوي واحد الشكل 3-5.

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1 \quad \text{أو} \quad i = j = k = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}4)$$



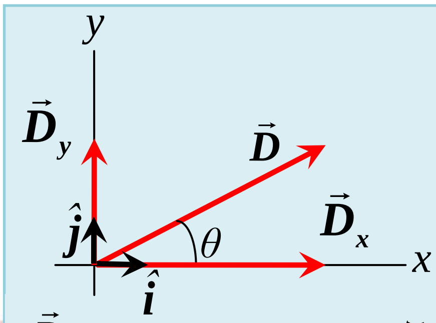
الشكل 3-5 متجهات الوحدة unit vectors كما هو متفق عليها.

وباستخدام هذا التعريف يمكن كتابة $\vec{A}_x$ على الصورة $A_x\,\hat{i}$ ، وكذلك $\vec{A}_y$ تكتب على الصورة $A_y\,\hat{j}$ ، وبالتالي فإن معادلة (3-1) يمكن أن تكتب على الصورة

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} \qquad \text{......................} \quad (3\text{-}5)$$

وزيادة في التوضيح لاحظ كتابة المتجه $\vec{D}$ المبين في الشكل 3-6 .

$$\vec{D} = D_x\,\hat{i} + D_y\,\hat{j} \qquad (3\text{-}6)$$



الشكل 3-6 طريقة كتابة المتجه $\vec{D}$ باستعمال متجهات الوحدة

$$\vec{D} = D_x\,\hat{i} + D_y\,\hat{j}$$

$$\vec{D}_x = D_x\,\hat{i} \quad \text{and} \quad \vec{D}_y = D_y\,\hat{j}$$

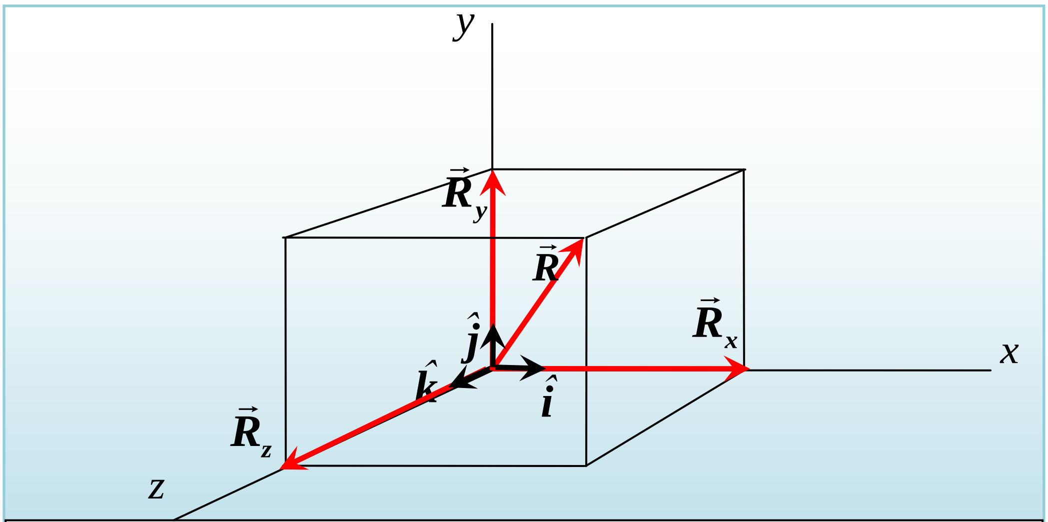
حيث D_x و D_y المركبتين القياسيتين ، و $\vec{D}_x$ و $\vec{D}_y$ المركبتين المتجهتين.

وبشكل عام فإن أي متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد مثل $\vec{R}$ الشكل 3-7 يمكن أن يكتب على الصورة

$$\vec{R} = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} + R_z\,\hat{k} \qquad (3\text{-}10)$$

ومقدار هذا المتجه يُحسب بالطريقة

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} \qquad (3\text{-}11)$$



الشكل 3-7 المتجه $\vec{R}$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد باستعمال متجهات الوحدة.

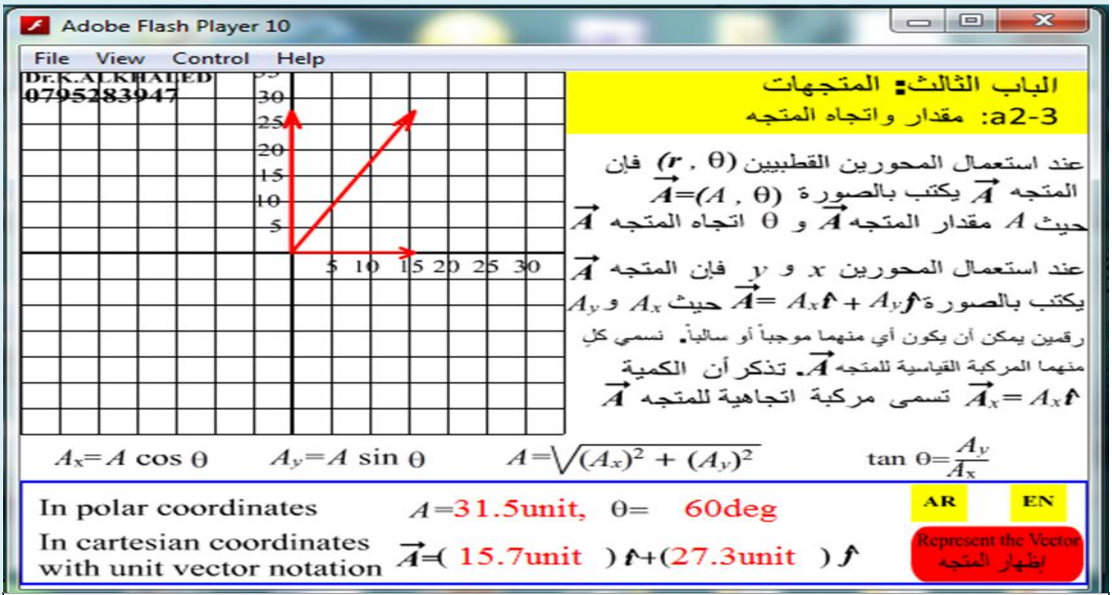
$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} + R_z\,\hat{k}$$

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الثانية والبرمجية الثالثة لهذا الباب .

البرمجية الثانية بعنوان: بعنوان مقدار واتجاه المتجه **magnitude and direction of a vector.**

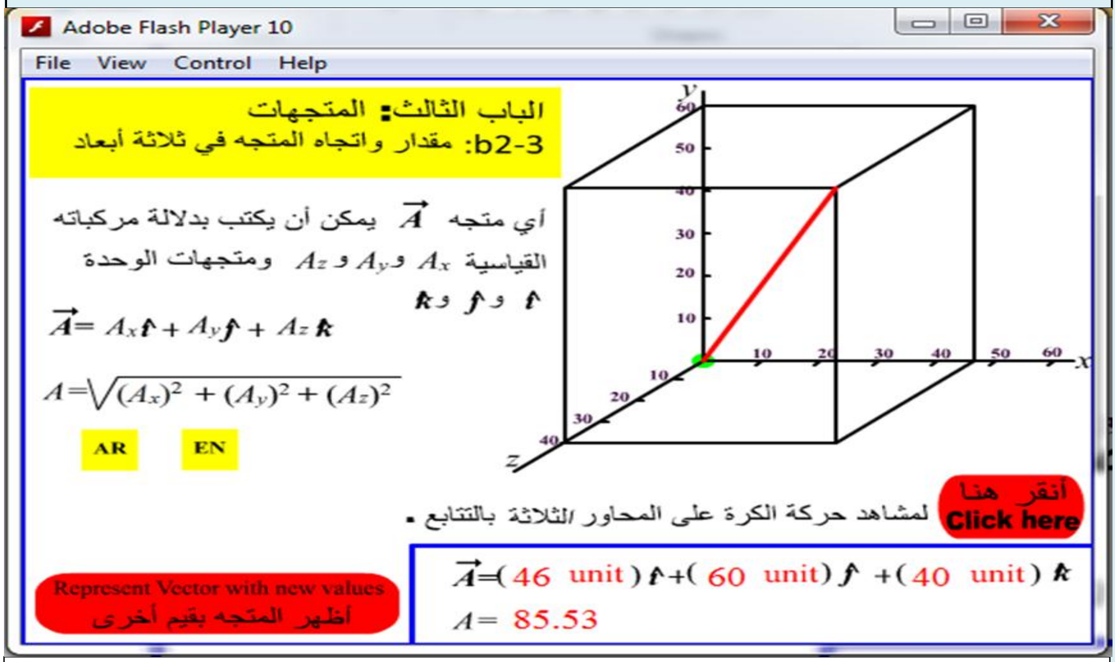
البرمجية الثالثة بعنوان: بعنوان مقدار واتجاه المتجه في ثلاثة أبعاد **magnitude and direction of a vector in three dimensions.**

صورة عن واجهة البرمجية الثانية للباب الثالث وهي بعنوان مقدار واتجاه المتجه **magnitude and direction of a vector**



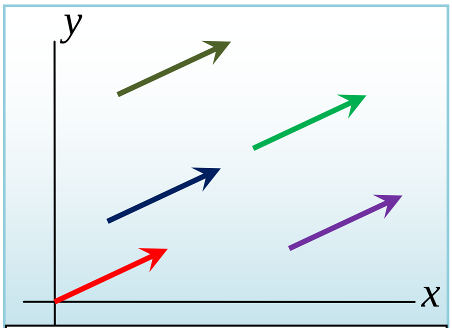
هذه صورة عن واجهة البرمجية الثانية للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر إظهار المتجه ثم النظر في المتجه (مقداره واتجاهه) وكل من مرطبتيه.

صورة عن واجهة البرمجية الثالثة للباب الثالث وهي بعنوان مقدار واتجاه المتجه في ثلاثة أبعاد
magnitude and direction of a vector in three dimensions



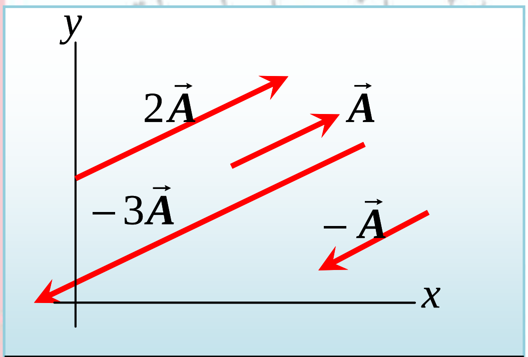
هذه صورة عن واجهة البرمجية الثالثة للباب الثالث . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر أظهر المتجه بقيم أخرى ثم أنقر زر أنقر هنا ثم مراقبة كرة في ثلاثة أبعاد .

3-3: خصائص المتجهات والعمليات الرياضية عليها



الشكل (3-8) خمسة إظهارات لنفس المتجه.

1- إذا كان المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لهما نفس المقدار ولهما نفس الاتجاه فإنه يمكن القول أن $\vec{A}=\vec{B}$ حتى وإن لم يكن لهما نفس نقطة البداية. ويبين الشكل (6) متجهات متساويات.



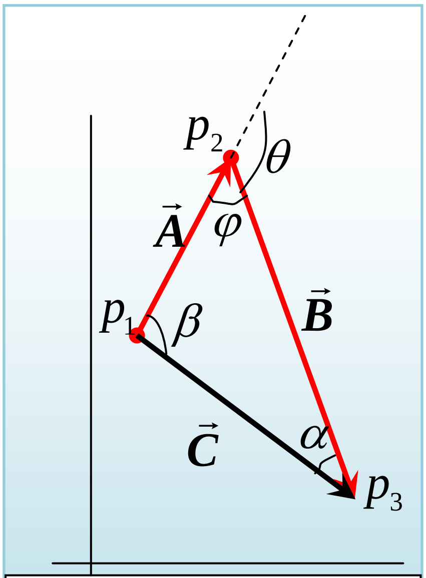
الشكل (3-9) عملية ضرب المتجه برقم.

2- عند ضرب متجه $\vec{A}$ بعدد موجب n فإن الناتج متجه له نفس اتجاه $\vec{A}$ ولكن المقدار يتغير من A إلى nA. أما إذا كان n سالب فإن الاتجاه ينعكس 180° والمقدار يتغير من A إلى $|nA|$. ويمكن الاستنتاج أن معكوس المتجه هو متجه مضروب بسالب واحد. والشكل (7) يوضح المقصود.

3- جمع المتجهات Vector Addition:

عملية جمع المتجهات هي عملية رياضية تتم فقط على المتجهات التي لها نفس الوحدة، ويطلق على نتيجة جمع متجهين أو أكثر محصلة المتجهين أو محصلة المتجهات **Resultant**.

وكمثال على ذلك ، تخيل متجه إزاحة $\vec{A}$ لشخص ينتقل مسافة $2\,\text{m}$ من النقطة p_1 إلى النقطة p_2 ، ثم متجه إزاحة $\vec{B}$ لنفس الشخص مسافة 3m من النقطة p_2 إلى النقطة p_3 كما في الشكل3-10. إن حاصل إزاحة الشخص هي مباشرةً خط مستقيم من النقطة p_1 إلى النقطة p_3 وتحدد بمتجه الإزاحة $\vec{C}$، وهذا المتجه هو محصلة جمع المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما في المعادلة (12). ومقدار هذا المتجه لا يحسب بالطريقة القياسية $2+3=5$ ، وإنما تحسب بطريقة رياضية هندسية (Law of cosines) نتيجتها كما في المعادلة (13) أو المعدلة (14). والزاوية التي تشير إلى اتجاهها تحسب بقانون رياضي آخر (Law of sines) كما في المعادلة (15).



الشكل 3-10 جسيم تحرك من النقطة p_1 ثم إلى النقطة p_2 ثم إلى النقطة p_3 . إزاحة الجسيم يمثلها مقدار المتجه $\vec{C}$.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \text{.......... (12)}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + AB\cos\theta \qquad \text{............ (13)}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - AB\cos\varphi \qquad \text{............(14)}$$

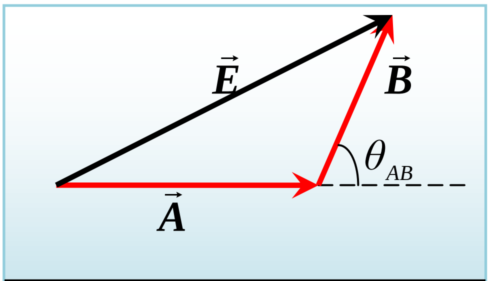
$$\frac{C}{\sin\varphi} = \frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} \qquad \text{........(15)}$$

إن ما ينطبق على متجهي الإزاحة ينطبق على أي متجهين، ويجب الانتباه إلى أن المعادلات (13) و(14) و(15) تطبق لحساب مقدار واتجاه جمع متجهين فقط.

تتم عملية جمع المتجهات بطريقتين: الطريقة الأولى هي طريقة الرسم، أو الطريقة الهندسية (Geometric method)، أو(Graphical method). والثانية هي الجمع بطريقة الأجزاء؛ أو المركبات (Components method).

ولتوضيح عملية الجمع بطريقة الرسم، دعنا نأخذ مثال جمع المتجهين $\vec{A}$ مع $\vec{B}$ ونرمز لناتج الجمع بالرمز $\vec{E}$ ،

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B}$$



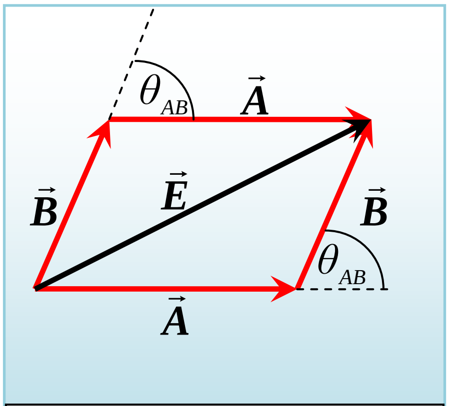
الشكل (3-11) عملية جمع متجهين بطريقة الرسم.

نرسم المتجه $\vec{A}$ بطول يكافئ المقدار حسب مقياس الرسم المناسب، ثم نرسم المتجه $\vec{B}$ من رأس المتجه $\vec{A}$ وبطول يكافئ مقداره حسب مقياس الرسم، ويجب أن نراعي الزاوية بين اتجاه $\vec{A}$ واتجاه $\vec{B}$ θ_{AB} فتكون محصلة الجمع $\vec{E}$ برسم متجه من ذيل $\vec{A}$ إلى رأس $\vec{B}$،الشكل 3-11.

إن عملية الجمع هذه تسمى الجمع بطريقة المثلث، وهي لا تعتمد على ترتيب المتجهين المطلوب جمعهما حيث إن الناتج يكون نفسه في حالة كان $\vec{B}$ أولاً، مثل

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{..........(16)}$$

وهذا يسمى قانون التبادل في الجمع (Commutative Law of Addition)،



الشكل 3-12 قانون التبادل في جمع متجهين.

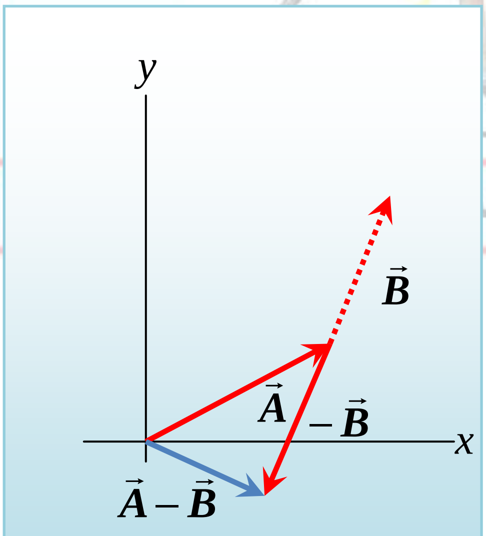
ويمكن أن نستنتج ذلك عند رسم المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من نفس النقطة، أي إن ذيل كل منهما يبدأ من نفس النقطة، ومع مراعاة الزاوية بينهما θ_{AB} نكمل متوازي الأضلاع ونرسم قطراً من التقاء ذيليهما إلى النقطة المقابلة، فتكون محصلة الجمع هي هذا القطر الشكل3-12. إن عملية الجمع هذه تسمى الجمع بطريقة متوازي الأضلاع (Parallelogram Method of Addition)

4- طرح المتجهات Vector Subtraction

تُجرى عملية طرح متجه مثل $\vec{B}$ من متجه آخر مثل $\vec{A}$ اعتماداً على عملية جمع المتجهات، وعلى مفهوم معكوس المتجه، أي إن $\vec{A} - \vec{B}$ هي جمع $\vec{A}$ مع معكوس $\vec{B}$ وتكتب كما يلي:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad \text{..........(17)}$$

ويبين الشكل (3-13) كيف تتم عملية الطرح بطريقة الرسم.

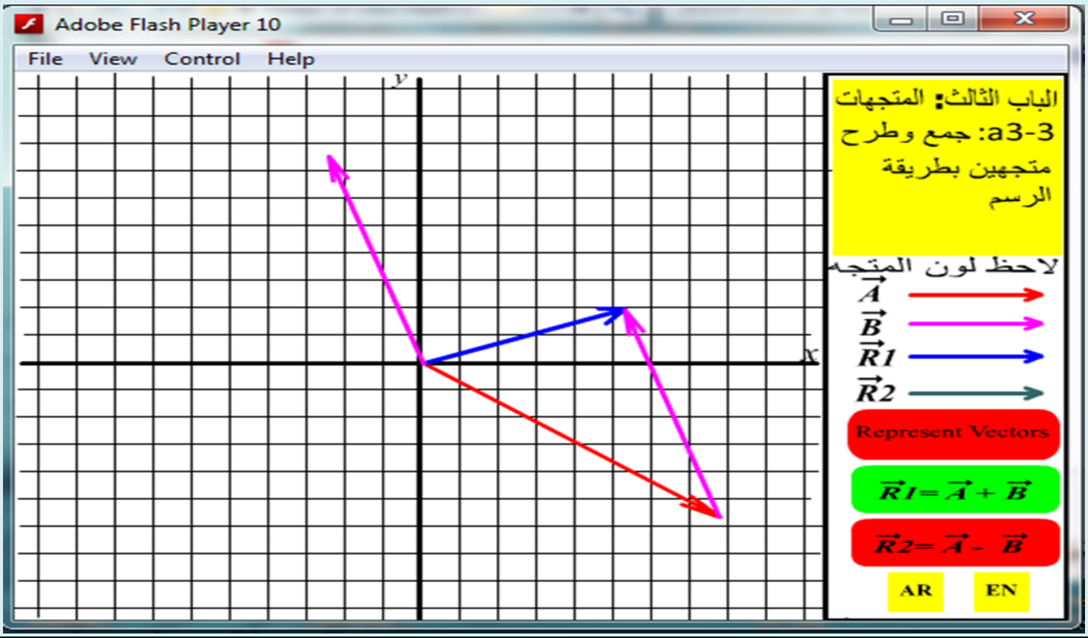


الشكل3-13 عملية طرح متجه مثل $\vec{B}$ من متجه آخر مثل $\vec{A}$

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الرابعة لهذا الباب .

البرمجية الرابعة بعنوان: جمع وطرح متجهين بطريقة الرسم Addition and subtraction of two vectors by graphical method.

صورة عن واجهة البرمجية الرابعة للباب الثالث وهي بعنوان جمع وطرح متجهين بطريقة الرسم
Addition and subtraction of two vectors by graphical method.



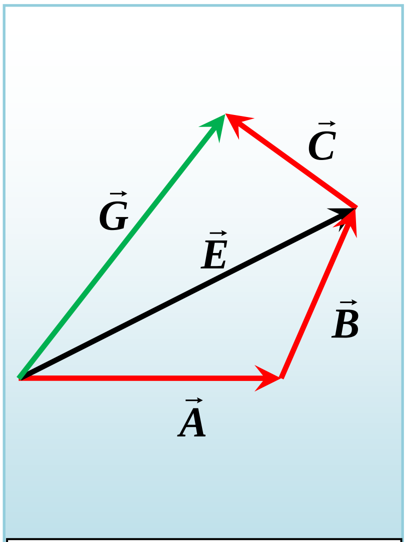
هذه صورة عن واجهة البرمجية الرابعة للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر Represent the vectors ثم النظر في عملية جمع أو طرح المتجهين بطريقة الرسم. على الطالب دائماً ملاحظة لون المتجه.

ولتوضيح توضيح عملية جمع أو طرح أكثر من متجهين بتطبيق طريقة المثلث، نجد حاصل جمع أي متجهين متجاورين ونجمع الناتج مع متجه مجاور آخر، وهكذا إلى أن نصل إلى حاصل الجمع النهائي. فإذا كان المطلوب إيجاد حاصل جمع المتجهات $\vec{A}$ مع $\vec{B}$ مع $\vec{C}$ الشكل (14-3):

$$\vec{G} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

فإذا أخذنا المتجهين المتجاورين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فتكون النتيجة:

$$\vec{G} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{E} + \vec{C}$$



الشكل (14-3) عملية جمع ثلاث متجهات بطريقة الرسم.

أما إذا أخذنا المتجهين المتجاورين $\vec{B}$ و $\vec{C}$ فإن، النتيجة:

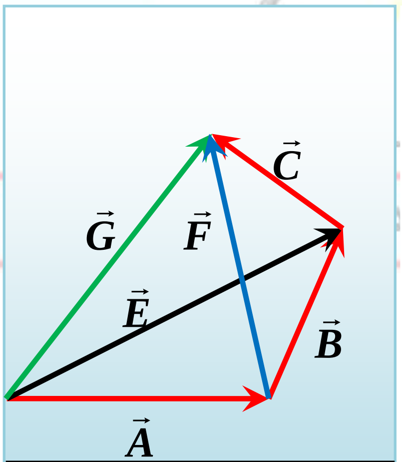
$$\vec{G} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{F}$$

أنظر الشكل (11)، أي إن

$$\vec{G} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \quad ..(18)$$

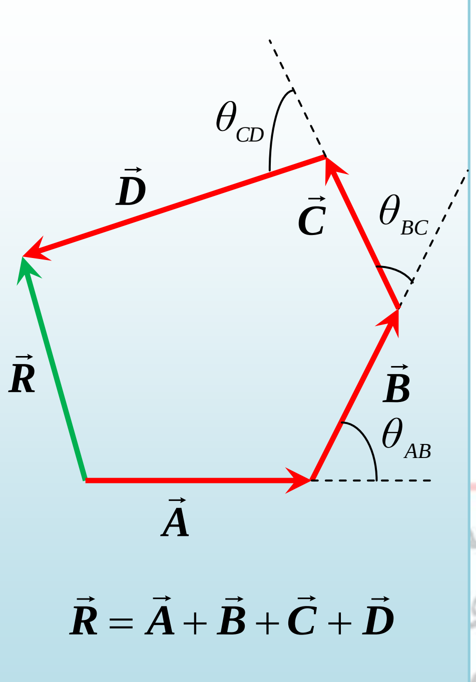
إن هذه النتيجة تسمى قانون التجميع في الجمع

(Associative Law of Addition)



الشكل (15-3) قانون التجميع في عملية جمع المتجهات.

إن خطوات عملية الجمع تبدأ برسم المتجه الأول بمقياس رسم مناسب، ثم رسم المتجه الثاني بحيث نضع ذيله عند رأس الأول، ويجب أن نراعي هنا الزاوية بين اتجاه الأول واتجاه الثاني، ثم نرسم المتجه الثالث بحيث نضع ذيله عند رأس الثاني، ويجب أن نراعي كذلك الزاوية بين اتجاه الثاني واتجاه الثالث، وهكذا إذا كان المطلوب جمع أكثر من ثلاث متجهات. وتكون محصلة الجمع متجه يبدأ ذيله من ذيل المتجه الأول ويكون رأسه عند رأس المتجه الأخير. أي إن محصلة الجمع هذه تكون المتجه الذي يغلق الشكل المضلع ابتداءً من نقطة البداية وانتهاءً بنقطة النهاية، وهي رأس المتجه الأخير. أنظر الشكل (3-16).

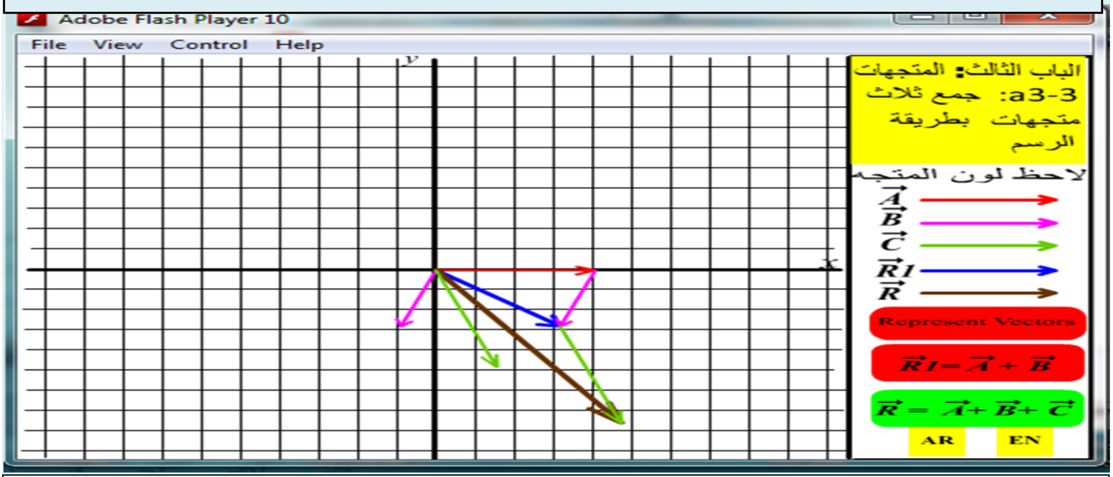


الشكل (3-16). عملية جمع أربع متجهات بطريقة الرسم.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الخامسة لهذا الباب .

البرمجية الخامسة بعنوان: جمع ثلاث متجهات بطريقة الرسم Addition and of three vectors by graphical method.

صورة عن واجهة البرمجية الخامسة للباب الثالث وهي بعنوان جمع وطرح ثلاث متجهات بطريقة الرسم Addition and subtraction of three vectors by graphical method.



هذه صورة عن واجهة البرمجية الخامسة للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر Represent the vectors ثم النظر في عملية جمع متجهين R_1 أو ثلاث متجهات R_2 بطريقة الرسم. على الطالب دائماً ملاحظة لون المتجه.

4-3 : جمع المتجهات بطريقة جمع أجزاء (مركبات المتجهات)

Vector Addition by Components Method

إن عملية جمع المتجهات بطريقة الرسم لا يوصى بها إذا كان المطلوب إيجاد الحسابات بدقة عالية؛ أو في حالة أن تكون المتجهات في ثلاثة أبعاد. ويستعاض عنها بالجمع بطريقة المركبات. وتتم عملية الجمع هذه بأن نجمع مركبات المتجهات المطلوب جمعهم المشتركة بالاتجاه نفسه، ولتوضيح ذلك نأخذ جمع المتجهين $\vec{A}$ مع $\vec{B}$ حيث يُكتب كل منهما بطريقة المركبات على الصورة:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

فإذا رمزنا لناتج الجمع بالرمز $\vec{R}$ فيكون

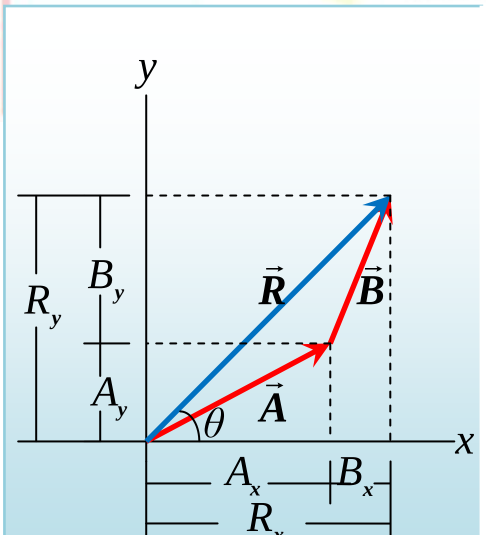
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \qquad \text{........(19)}$$

أي إن

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} \qquad \text{..........(20)}$$

حيث المركبتين المتجهتين $\vec{R}_x$ و $\vec{R}_y$ هما

$$\vec{R}_y = R_y\,\hat{j} = (A_y + B_y)\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{R}_x = R_x\,\hat{i} = (A_x + B_x)\hat{i} \qquad \text{......(21)}$$



الشكل(3-17). جمع متجهين بطريقة جمع المركبات القياسية.

ويكون مقدار المتجه $\vec{R}$ ، والزاوية التي يعملها مع المحور x كما في المعادلتين.

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} \qquad \text{......(22)}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \qquad \text{......(23)}$$

ويمكن التأكد من تطابق طريقة الرسم مع طريقة المركبات من خلال دراسة الشكل(3-17).

وبنفس الأسلوب يمكن أن تتم عملية الجمع لأكثر من متجهين. فإذا كان المتجه $\vec{R}$ هو نـاتج جمع المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ ،

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D} \qquad \text{..........(24)}$$

فإن مركبتي $\vec{R}$ هما:

$$R_x=A_x+B_x+C_x+D_x \qquad \text{..........(25)}$$

$$R_y=A_y+B_y+C_y+D_y \qquad \text{..........(26)}$$

وبشكل عام، إذا كانت المتجهات لها ثلاثة أبعاد، فإن حاصل الجمع يكون له مركبة ثالثة هي R_z بحيث أن :

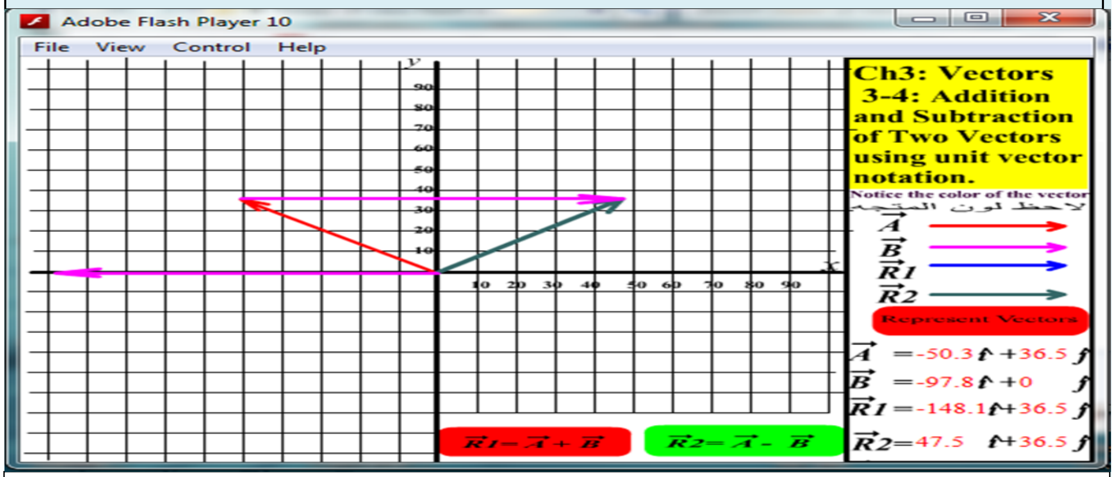
$$R_z=A_z+B_z+C_z+D_z \qquad \text{..........(27)}$$

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية السادسة لهذا الباب .

البرمجية السادسة بعنوان: جمع وطرح متجهين بطريقة استعمال متجهات الوحدة Addition and subtraction of two vectors by unit vector notation.

ولا بد عزيزي الطالب من التحقق من الأرقام الظاهرة .

صورة عن واجهة البرمجية السادسة للباب الثالث و هي بعنوان جمع وطرح متجهين بطريقة استعمال متجهات الوحدة Addition and subtraction of two vectors by graphical method.



هذه صورة عن واجهة البرمجية السادسة للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر Represent the vectors ثم النظر في عملية جمع متجهين R_1 أو طرح متجهين R_2 . على الطالب دائماً ملاحظة لون المتجه.

D.K.ALKHALED

5-3: عملية ضرب متجه بمتجه أخر Multiplying Vector by a Vector

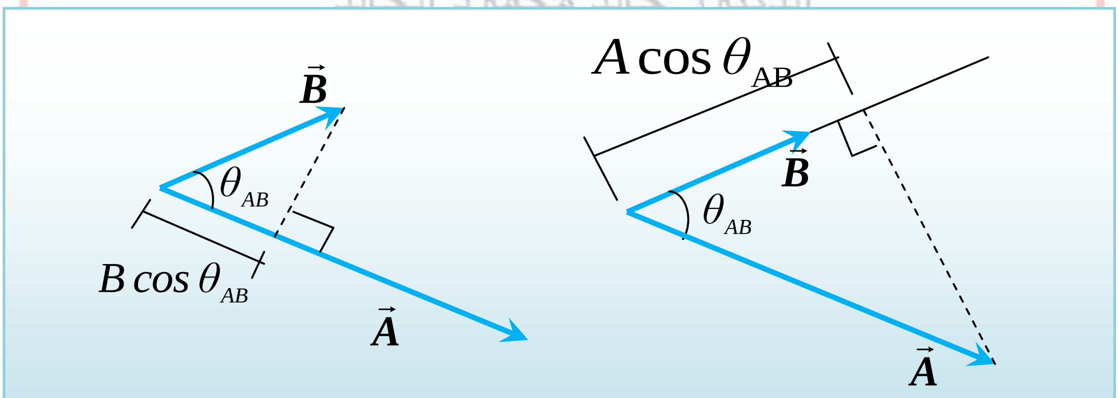
تتيح لنا عملية ضرب متجه بمتجه آخر من التعبير باختصار عن علاقات فيزيائية أو قوانين فيزيائية . فكما علمنا أن المتجهات ليست أرقاماً عادية، وبالتالي فإن عملية الضرب العادية ليست قابلة للتطبيق بشكل مباشر على المتجهات، ولذالك تم تعريف نوعين من الضرب على المتجهات. النوع الأول يسمى، **الضرب القياسي Scalar Product**، وينتج عن عملية الضرب هذه كمية قياسية. النوع الثاني يسمى، **الضرب المتجهي أو الاتجاهي Vector Product**، وينتج عن عملية الضرب هذه كمية متجه.

الضرب القياسي Scalar Product

تُعرف عملية ضرب متجه مثل $\vec{A}$ بمتجه آخر مثل $\vec{B}$ بأنها عملية ضرب قياسي إذا عُبر هنها كما في المعادلة ( ) :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\cos\theta_{AB} \qquad ....(28)$$

وكما تلاحظ فإن ناتج عملية الضرب هو كمية قياسية تساوي مقدار المتجه $\vec{A}$ أي (A) ضرب مقدار المتجه $\vec{B}$ أي (B) ضرب جتا الزاوية المحصورة بينهما θ_{AB}. أو أن ناتج عملية الضرب هو كمية قياسية تساوي مقدار المتجه $\vec{A}$ أي (A) ضرب المركبة القياسية scalar component للمتجه $\vec{B}$ على اتجاه $\vec{A}$ أي $B\cos\theta_{AB}$ كما يبين الشكل 3-18. أو إنها أيضاً تساوي مقدار المتجه $\vec{B}$ أي (B) ضرب المركبة القياسية للمتجه $\vec{A}$ على اتجاه $\vec{B}$ أي $A\cos\theta_{AB}$ كما في الشكل 3-18.



الشكل 3-18 عملية الضرب القياسي، ويمكن تفسير ناتج عملية الضرب بأنه مقدار المتجه $\vec{B}$ أي (B) ضرب المركبة القياسية للمتجه $\vec{A}$ على اتجاه $\vec{B}$ أي $A\cos\theta_{AB}$.

ويمكن أن نستنتج من ذلك أن الضرب القياسي يحقق قانون التبادل،

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \qquad ....(29)$$

ويحقق الضرب القياسي قانون التوزيع، لذلك يمكن القول إن

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \qquad ....(30)$$

أحياناً تسمى عملية الضرب هذه **بالضرب النقطي Dot Product** بسبب وجود النقطة بين المتجهين. وتجدر الإشارة إلى أنه ليس بالضرورة أن يكون المتجهان لهما نفس وحدة القياس.

إن ناتج الضرب النقطي هو كمية قياسية وليس كمية متجه، ويمكن أن تكون قيمته موجبة، أو سالبة، أو صفر. عندما تكون الزاوية θ_{AB} بين 0° و 90° فإن ناتج الضرب يكون موجباً. وعندما تكون الزاوية θ_{AB} بين 90° و 180° فإن ناتج الضرب يكون سالباً. ويمكن أن نستنتج أنه إذا كان $\vec{A}$ عمودي على $\vec{B}$ أي إن $(\theta_{AB}=90^\circ)$ فإن $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$. وبتطبيق ذلك على متجهات الوحدة نحصل على

$$\begin{aligned}\hat{i}\cdot\hat{i}&=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=(1)(1)\cos 0=1\\ \hat{i}\cdot\hat{j}&=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=(1)(1)\cos 90=0\end{aligned} \qquad ....(31)$$

ولذلك يمكننا إيجاد الضرب النقطي مباشرة إذا كان المتجهين مكتوبين بطريقة المركبات ومتجهات الوحدة، فإذا كان

$$\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k} \qquad ....(32)$$

$$\vec{B}=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k} \qquad ....(31)$$

فإن

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad ....(33)$$

وبدمج المعادلتين(28) و(31) نستطيع إيجاد مقدار الزاوية بين المتجهين

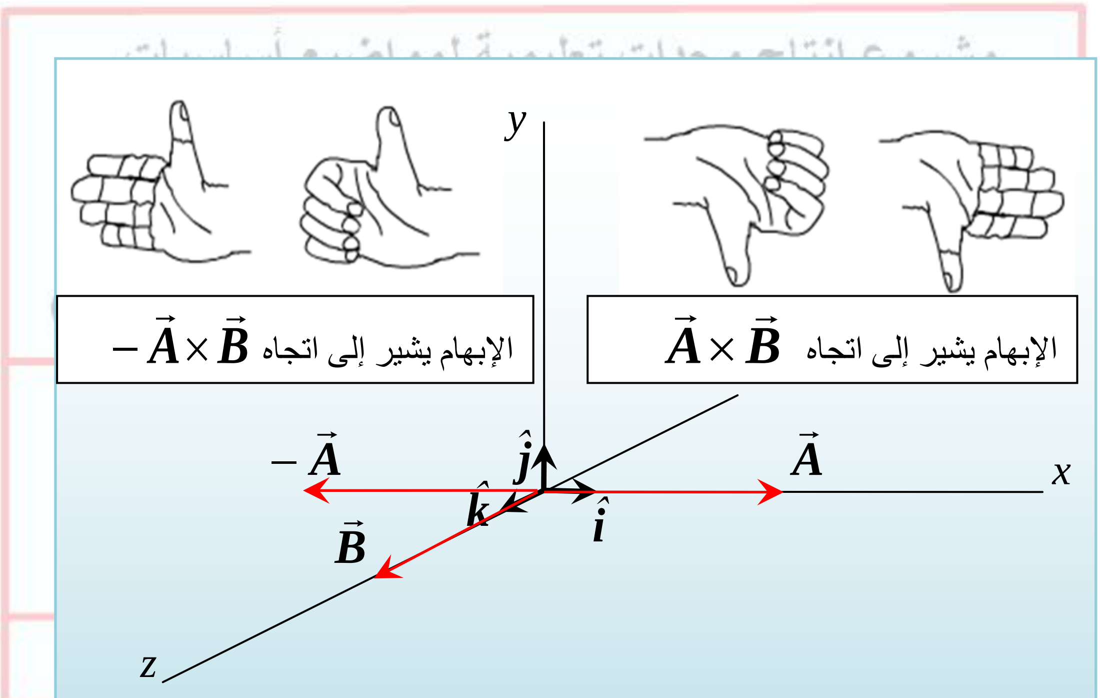
$$\cos\theta_{AB}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\,B}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{A\,B} \qquad ....(33)$$

الضرب المتجهي أو الاتجاهي Vector Product

يكتب الضرب المتجهي بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على الصورة $\vec{A}\times\vec{B}$ ، وبسبب وجود إشارة $\times$، يسمى أحياناً هذا الضرب بالضرب التقاطعي، ونتيجة حاصل الضرب هذا هو متجه $\vec{C}$

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \qquad \text{........(34)}$$

اتجاهه عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ، أي إن اتجاهه يكون دائماً عمودياً على المستوى الذي يقع فيه المتجهين. ولكن تحديد إن كان عمودياً خارجاً من المستوى إلى الأعلى أم خارجاً من المستوى إلى الأسفل يتم بتطبيق قاعدة اليد اليمنى، أو قاعدة البرغي، كما في الشكل 3-19.

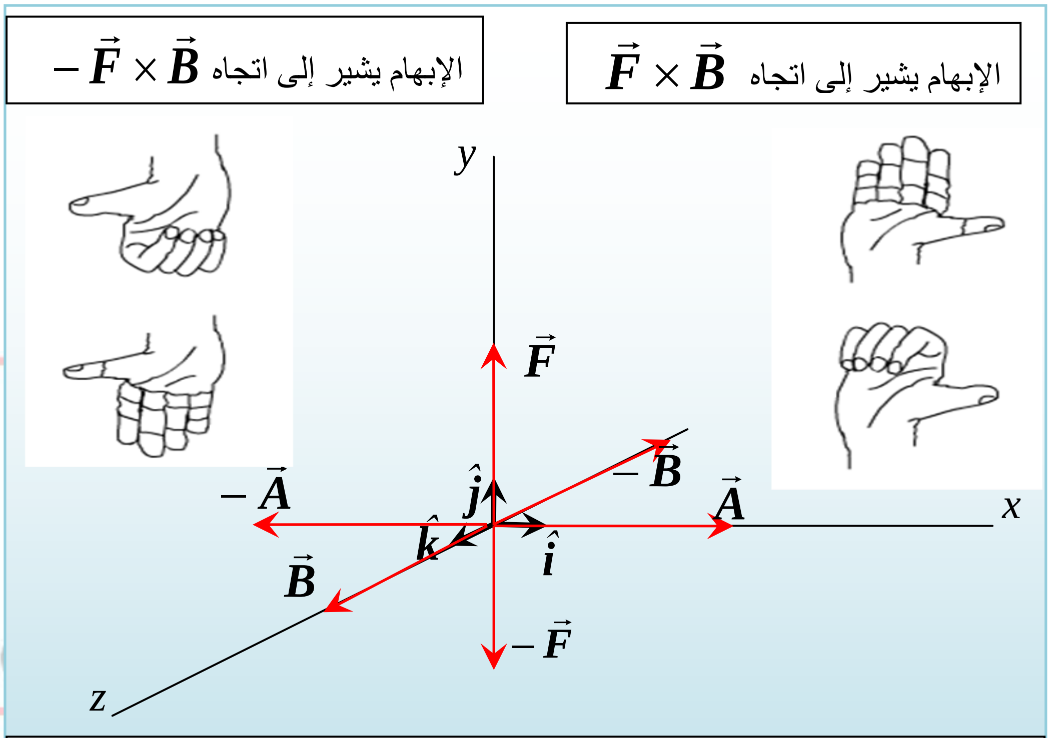


الشكل 3-19a مثالين لتطبيق قاعدة اليد اليمنى. المثال الأول $\vec{A}\times\vec{B}$ وهنا المتجه الأول هو $\vec{A}$ والمتجه الثاني هو $\vec{B}$ وحاصل الضرب هو متجه يتجه باتجاه محور y السالب. المثال الثاني هو $-\vec{A}\times\vec{B}$ وهنا المتجه الأول هو $-\vec{A}$ والمتجه الثاني هو $\vec{B}$ وحاصل الضرب هو متجه يتجه باتجاه محور y الموجب.

فإذا تم رسم المتجهين من نفس النقطة، أي إن ذيليهما يلتقيان بنقطة واحدة، فإن تطبيق قاعدة اليد اليمنى يتم بجعل الأصابع الأربعة باتجاه المتجه المكتوب أولاً، وهو في هذه الحالة $\vec{A}$ ، ثم تدوير

الأصابع باتجاه المتجه المكتوب ثانياً، وهو في هذه الحالة $\vec{B}$ عبر الزاوية الأصغر بين المتجهين، فيكون اتجاه $\vec{C}$ هو اتجاه الابهام. ولذلك يكون

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \qquad \text{........(35)}$$



الشكل 3- 19b مثالين لتطبيق قاعدة اليد اليمنى. المثال الأول $\vec{F}\times\vec{B}$ وهنا المتجه الأول هو $\vec{F}$ والمتجه الثاني هو $\vec{B}$ وحاصل الضرب هو متجه يتجه باتجاه محور x الموجب. المثال الثاني هو $-\vec{F}\times\vec{B}$ وهنا المتجه الأول هو $-\vec{F}$ والمتجه الثاني هو $\vec{B}$ وحاصل الضرب هو متجه يتجه باتجاه محور x السالب.

أي إن الضرب التقاطعي لا يحقق قانون التبادل. لأن اتجاه $\vec{A}\times\vec{B}$ هو عكس اتجاه $\vec{B}\times\vec{A}$، مع أن مقدار حاصل الضرب لكل منهما متساوي.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن الضرب التقاطعي يحقق قانون التوزيع،

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{D})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{D} \qquad \text{........(36)}$$

أما طريقة البرغي فهي شبيهة بطريقة اليد اليمنى. فعند وضع رأس البرغي المدبب عند التقاء ذيلي المتجهين وتدويره باتجاه من $\vec{A}$ إلى $\vec{B}$ فإن اتجاه حركة البرغي هو اتجاه $\vec{C}$

أما المقدار فيساوي $A\,B\sin\,\theta_{AB}$.

$$C = A\,B\sin\,\theta_{AB} \qquad \ldots\ldots.(37)$$

وحيث إن θ_{AB} تكون بين [0° و 180°]، فإن مقدار المتجه $\vec{C}$ يكون إما صفر، أو مقدار موجب. فحاصل الضرب التقاطعي لأي متجهين متوازيين، أو متعاكسين يساوي صفر.

إذا استخدمنا كتابة المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بطريقة المركبات، ومتجهات الوحدة، فأننا نستطيع إيجاد مركبات المتجه $\vec{C}$ الناتج من حاصل ضربهما. فباستخدام المعادلتين (34) و (37) نجد أن،

$$\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = -\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{و} \quad \hat{\boldsymbol{i}}\times-\hat{\boldsymbol{j}} = -\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = -\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{i}} \quad \text{و} \quad \hat{\boldsymbol{j}}\times-\hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}} = -\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{j}} \quad \text{و} \quad \hat{\boldsymbol{k}}\times-\hat{\boldsymbol{i}} = -\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{j}}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\,\hat{\boldsymbol{k}})\times(B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\,\hat{\boldsymbol{k}})\\
&= A_x\,\hat{\boldsymbol{i}}\times B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_x\,\hat{\boldsymbol{i}}\times B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_x\,\hat{\boldsymbol{i}}\times B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\\
&+ A_y\,\hat{\boldsymbol{j}}\times B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}}\times B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}}\times B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\\
&+ A_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\times B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\times B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\times B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

وبإجراء الحسابات، وترتيب الحدود نحصل على

$$\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

فتكون مركبات المتجه $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$ هي:

$$C_x = (A_yB_z - A_zB_y)\text{، } C_y = (A_zB_x - A_xB_z)\text{، } C_z = (A_xB_y - A_yB_x)$$

توجد طريقة أسهل للتذكر تسمى طريقة المحددات determinants ، والضرب التقاطعي يكون على صورة محددات3×3 ، ثم يُفك إلى عدد 3 من محددات2×2 . وطريقة الفك تكون بأخذ أول حد وهو $\hat{\boldsymbol{i}}$ ثم نغطي على بقية عناصر صفه، وكذلك نغطي على بقية عناصر عموده،

فنحصل على 2×2 محددة وهي $\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}$. ثم نكتب إشارة سالب ونأخذ الحد الثاني $\hat{\boldsymbol{j}}$ ثم نغطي على بقية عناصر صفه، وكذلك نغطي على بقية عناصر عموده، فنحصل على 2×2 محددة وهي $\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}$. ثم نكتب إشارة زائد ونأخذ الحد الثالث $\hat{\boldsymbol{k}}$ ثم نغطي على بقية عناصر صفه، وكذلك نغطي على بقية عناصر عموده، فنحصل على 2×2 محددة وهي $\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$. فتكتب عملية الضرب على الصورة

$$\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}=\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{i}}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}-\hat{\boldsymbol{j}}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}+\hat{\boldsymbol{k}}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

وكل 2×2 محددة تُفك على صورة إيجاد حاصل ضرب عادي للحدين الأول والرابع، أي ضرب قطري، ونطرح منه حاصل الضرب العادي للحدين الثاني والثالث ، ضرب قطري أيضاً، فالمحددة الأولى $\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}$ تُفك على الصورة $(A_yB_z-A_zB_y)$، وبنفس الأسلوب تُفك المحددتين الأخريين. وفي النهاية نحصل على النتيجة كما هي في المعادلة ( ).

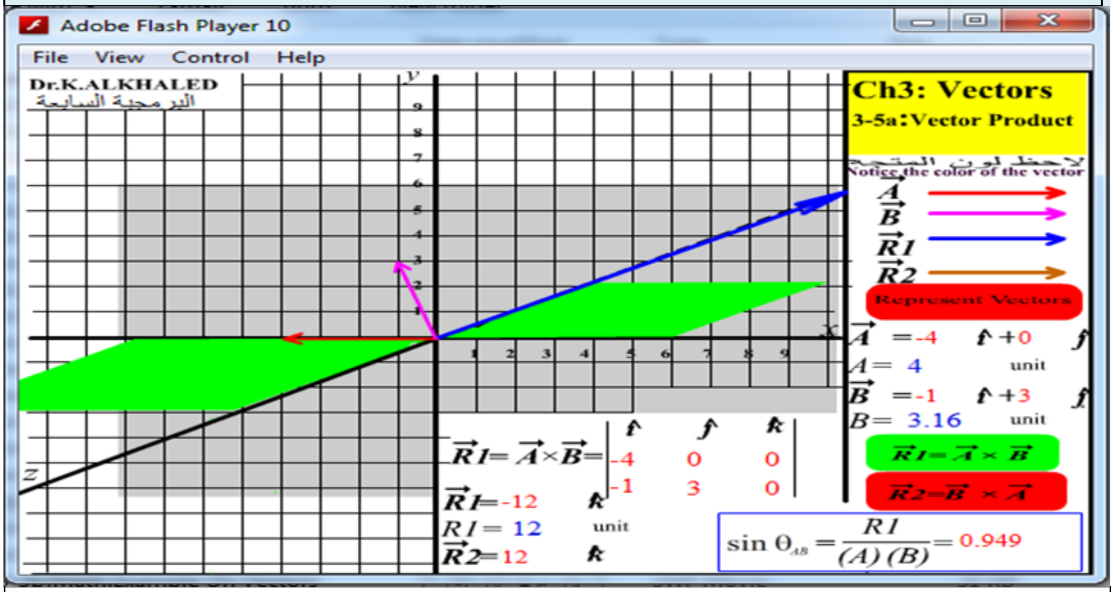
$$\vec{\boldsymbol{C}}=\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\boldsymbol{i}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\boldsymbol{j}}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية السابعة والبرمجية الثامنة لهذا الباب .

البرمجية السابعة بعنوان: الضرب الاتجاهي لمتجهين .Across Product of two vectors وهي تقدم عدد لا نهائي من الأمثلة. ولا بد عزيزي الطالب من التحقق من الأرقام الظاهرة .

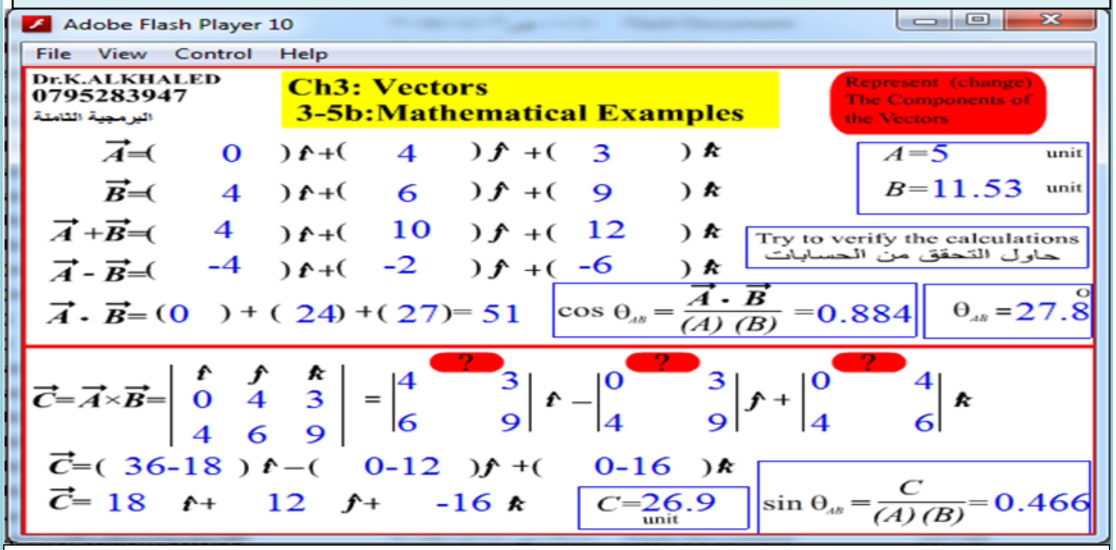
البرمجية الثامنة بعنوان: أمثلة حسابية Mathematical Examples. وهذه البرمجية تعد مراجعة شاملة لجميع العمليات الحسابية على المتجهات وهي تقدم عدد لا نهائي من الأمثلة.

صورة عن واجهة البرمجية السابعة للباب الثالث وهي بعنوان الضرب الاتجاهي لمتجهين
Cross Product of two vectors.



هذه صورة عن واجهة البرمجية السابعة للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر Represent the vectors ثم النظر في عملية ضرب المتجهين والنتيجة الظاهرة R_1 أو R_2 .
على الطالب دائماً ملاحظة لون المتجه، وعليه أيضاً التحقق من الأرقام والعمليات الحسابية.

صورة عن واجهة البرمجية الثامنة للباب الثالث وهي بعنوان **أمثلة حسابية Mathematical Examples.** وهذه البرمجية تعد مراجعة شاملة لجميع العمليات الحسابية على المتجهات وهي تقدم عدد لا نهائي من الأمثلة.



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثامنة للباب الثالث. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر Represent (change) the components of the vectors ثم النظر في العمليات الحسابية على المتجهين والنتيجة الظاهرة.
على الطالب التحقق من الأرقام والعمليات الحسابية.