الميكانيك التحليلي

باديس ايدري

معهد الفيزياء، جامعة باجي مختار، عنابة، الجزائر

خريف 2014

الفهرس

1 مبادئ التغاير و معادلات لاغرانج 3

ميكانيك جملة جسيمات نقطية 3

القيود الهولونومية و مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت 5

معادلات لاغرانج 7

حساب التغايرات 9

مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون 10

تمارين 13

الحلول 16

مبادئ التغاير و معادلات لاغرانج

ميكانيك جملة جسيمات نقطية

نعتبر جملة من الجسيمات النقطية ذات اشعةالموضع $\vec{r}_i$ و الكتل m_i. قانون نيوتن الثاني للحركة بالنسبة للجسيم رقم i يعطي ب

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (١)$$

كالعادة تعرف كمية الحركة بدلالة السرعة ب

$$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i = m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}. \quad (٢)$$

القوة الخارجية المؤثرة علي الجسيم i هي $\vec{F}_i^{(e)}$ و القوة الداخلية المؤثرة علي الجسيم i والناجمة عن الجسيم j هي $\vec{F}_{ji}$. لدينا $\vec{F}_{ii} = 0$ و $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. يمكن كتابة قانون نيوتن الثاني علي الشكل

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \quad (٣)$$

بالجمع علي كل الجسيمات نحصل علي

$$0 = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \quad (٤)$$

الكتلة الكلية M معرفة ب $M = \sum_i m_i$ و شعاع موضع مركز كتلة الجملة $\vec{R}$ يعرف ب

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i. \quad (٥)$$

اذن القوي الداخلية لانها تخضع لقانون نيوتن الثالث ليس لها اي تأثير علي جركة الجملة.القوة الخارجية الكلية تعطي بدلالة كمية الحركة الكلية ب

$$\vec{F}^{(e)} = M\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \quad (٦)$$

اذن يمكن ان نستنتج مباشرة قانون انحفاظ كمية الحركة: اذا انعدمت القوة الخارجية الكلية فان كمية الحركة الكلية تبقي منحفظة في الزمن.

لنحسب الان العمل الذي تقوم به القوي $\vec{F}_i^{(e)}$ و $\vec{F}_{ji}$ في تحريك الجملة من حالة ابتدائية 1 الي حالة نهائية 2. لدينا

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i + \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} d\vec{s}_i. \quad (٧)$$

لدينا من جهة

$$\begin{aligned} W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{s}_i &= \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt \\ &= \sum_i \int_1^2 d(\frac{1}{2} m_i v_i^2) \\ &= T_2 - T_1. \end{aligned} \quad (٨)$$

الطاقة الحركية الكلية تعرف ب

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (٩)$$

نفترض ان القوي الخارجية $\vec{F}_i^{(e)}$ محافظة اي انها مشتقة من طاقات كامنة V_i بحيث

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i. \quad (١٠)$$

اذن نحسب

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i d\vec{s}_i = -\sum_i V_i|_1^2. \quad (١١)$$

ايضا نفترض ان القوي الداخلية $\vec{F}_{ji}$ محافظة اي مشتقة من طاقات كامنة V_{ij} بحيث

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}. \quad (١٢)$$

لان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$، يجب ان نأخذ V_{ij} دالة في المسافة $|\vec{r_i} - \vec{r_j}|$ فقط، اي ان $V_{ij} = V_{ji}$. يمكننا ايضا التحقق من ان القوة $\vec{F}_{ij}$ هي تقع بمحاذاة الخط الرابط بين الجسيمان i و j. نعرف شعاع الفرق ب $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. لدينا اذن

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} V_{ij}. \quad (١٣)$$

يمكننا الان ان نحسب

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} d\vec{s}_i &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 (\vec{\nabla}_i V_{ij} d\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} d\vec{s}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} d\vec{r}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}|_1^2. \end{aligned} \quad (١٤)$$

اذن العمل المنجز يعطي ب

$$W_{12} = -V_2 + V_1. \tag{١٥}$$

الطاقة الكامنة الكلية تعطي اذن ب

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}. \tag{١٦}$$

من النتائج $W_{12} = T_2 - T_1$ و $W_{12} = -V_2 + V_1$ نستنتج ان الطاقة الكلية $T+V$ هي منحفظة.

كالعادة نعرف العزم الحركي الكلي ب

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \mathbf{x} \vec{p}_i. \tag{١٧}$$

الاشتقاق بالنسبة للزمن يعطي

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \mathbf{x} \frac{d\vec{p}_i}{dt}\\ &= \sum_i \vec{r}_i \mathbf{x} \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i\neq j} \vec{r}_i \mathbf{x} \vec{F}_{ji}\\ &= \sum_i \vec{r}_i \mathbf{x} \vec{F}_i^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \vec{r}_{ij} \mathbf{x} \vec{F}_{ji}.\end{aligned} \tag{١٨}$$

بافتراض ان القوي الداخلية بين اي جسيمين، بالاضافة الي كونها متساوية في الشدة و متعاكسة في الاتجاه، تقع بمحاذاة الخط الرابط بين الجسيمين نحصل مباشرة علي $\vec{r}_{ij}\mathbf{x}\vec{F}_{ji} = 0$ [١]. في هذه الحالة اشتقاق العزم الحركي الكلي بالنسبة للزمن يعطي عزم الدوران الخارجي الكلي اي

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = N_i^{(e)}. \tag{١٩}$$

نستنتج مباشرة قانون انحفاظ العزم الحركي: اذا انعدم عزم الدوران الخارجي الكلي فان العزم الحركي الكلي يبقي منحفظا في الزمن.

القيود الهولونومية و مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت

خلاصة الفقرة السابقة هو معادلات الحركة

$$\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \tag{٢٠}$$

الهدف الان هو حل هذه المعادلات من اجل ايجاد اشعة الموضع $\vec{r}_i$ كدوال في الزمن. هذه المهمة صعبة جدا في الواقع و تتعقد اكثر اذا كانت جملة الجسيمات

[١] يعرف هذا الشرط بالقانون القوي للفعل و رد الفعل. ايضا القوي التي تحقق هذا الشرط هي قوي مركزية.

خاضعة لقيود علي الحركة. القيود علي الحركة هي قوي لا يمكن التعبير عنها مباشرة لكن فقط نعرف تأثيرها الاجمالي علي الحركة. نعتبر هنا حالة القيود الهولونومية التي يعبر عنها بمعادلات من الشكل

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., t) = 0. \qquad (٢١)$$

اذن اشعة الموضع $\vec{r}_i$ ليست كلها مستقلة خطيا وهذا الربط الخطي يمكن ان يتغير من لحظة زمنية الي اخري. نأخذ كمثال علي القيود الهولونومية حركة الجسم الصلب. حركة الجسيمات في هذه الحالة مقيدة بحيث تبقي المسافة بين الجسيمات ثابتة في الزمن. في هذا المثال نعبر عن هذا القيد الهولونومي بالمعادلة (حيث c_{ij} هي ثوابت)

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0. \qquad (٢٢)$$

كمثال اخر علي القيود الهولونومية حركة جسيم بمحاذاة اي منحني او علي سطح حيث تعطي القيود في هذه الحالة بمعادلة المنحني او السطح.

القيود التي لا يمكن التعبير عنها بمعادلات من الشكل (21) هي قيود غير هولونومية. مثال علي ذلك حركة جزيئات غاز في وعاء: جدران الوعاء هي قيود غير هولونومية. ايضاحركة جسيم علي سطح كرة تحت تأثير حقل ثقالي يعبر عنها بالمعادلات غير الهولونومية

$$\vec{r}^2 - a^2 \geq 0. \qquad (٢٣)$$

كما ذكرنا انفا فان وجود قيود هولونومية يعني ان اشعة الموضع $\vec{r}_i$ ليست كلها مستقلة خطيا. هذا يعني بالخصوص ان معادلات الحركة (20) ليست كلها مستقلة خطيا. هذه الصعوبة سيتم حلها بادخال الاحداثيات المعممة التي تختزل درجات الحرية المستقلة خطيا للجملة. من الجهة الاخري فان وجود قيود هولونومية يعني وجود قوي مجهولة لا نعرف الا تأثيرها في تقييد حركة الجملة. من الواضح انه يجب تحديد هذه القوي بالضبط او التخلص منها نهائيا في الحل. سنتبع في الاتي الطريق الثاني عبر مبدأ دالامبارت.

نفترض ان الجملة تحتوي علي N جسيم و انها خاضعة ل k قيد هولونومي. اذن يوجد في الجملة $3N-k$ درجة حرية مستقلة خطيا نرمز لها ب q_i و نسميها بالاحداثيات المعممة. يمكن اذن ان نعبر عن اشعة الموضع $\vec{r}_i$ بدلالة الاحداثيات المعممة q_i و الزمن كالتالي

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t)\\
&.\\
&.\\
&.\\
&\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t).
\end{aligned} \qquad (٢٤)$$

سوف نعتبر الان ازاحات افتراضية متناهية في الصغر $\delta\vec{r}_i$ التي هي ازاحات متسقة مع القيود المفروضة علي الجملة في اللحظة الزمنية t. عند مقارنة الازاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ مع الازاحة الحقيقية $d\vec{r}_i$، التي تحدث خلال مجال زمني dt و التي يمكن ان تتغير خلالها قوي القيود المفروضة علي الجملة، فانه لدينا من جهة

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j. \qquad (٢٥)$$

اما من الجهة الاخري فانه خلال ازاحة افتراضية لدينا

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \quad (٢٦)$$

لاحظ اختفاء الحد الاول الناجم عن التغير في الزمن لان الازاحة الافتراضية تنشأ من تغيير مسار الحركة بمجمله بطريقة متسقة مع القيود المفروضة. انظر الي الشكل 1.

يمكن ان نكتب معادلة الحركة (20) علي الشكل $\vec{F}_i - d\vec{p}_i/dt = 0$ حيث $\vec{p}_i = m_i d\vec{r}_i/dt$. اذن الجسيم رقم i هو في حالة توازن تحت تأثير القوة الكلية $\vec{F}_{i\ \text{eff}} = \vec{F}_i - d\vec{p}_i/dt$. من الواضح ايضا ان العمل الافتراضي لهذه القوة في الازاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ ينعدم. بالجمع علي جميع الجسيمات نحصل علي

$$\sum_i (\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = 0. \quad (٢٧)$$

نفكك القوة $\vec{F}_i$ الي القوة المطبقة $\vec{F}_i^{(a)} \equiv \vec{F}_i^{(e)}$ و قوة القيود التي نرمز لها الان ب $\vec{f}_i$، اي ان $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$. اذن لدينا

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (٢٨)$$

نقتصر الان علي تلك الجمل الفيزيائية التي ينعدم فيها العمل الافتراضي المنجز من قبل قوي القيود. مثال ذلك الجسم الصلب. في هذه الحالة المسافة r_{ij} بين الجسيمات تبقي ثابتة في الزمن، وبالتالي فان التفاضل $d\vec{r}_{ij}$ لا يمكن ان يكون الا عموديا علي $\vec{r}_{ij}$، اي عموديا علي القوي الداخلية $\vec{F}_{ij}$، و منه فان عمل القوي الداخلية ينعدم. من الجهة الاخري فان التفاضل الافتراضي $\delta\vec{r}_{ij}$ هو بالتعريف شعاع مماس للمشعب الذي يمثل القيود، الذي هو هي هذه الحالة الكرة (٢٢)، اي انه هو ايضا عمودي علي $\vec{r}_{ij}$، و منه فان العمل الافتراضي للقوي الداخلية ينعدم ايضا. اذن في حالة الجسم الصلب ينعدم العمل الافتراضي الذي تنجزه قوي القيود التي تعطي في هذه الحالة بالقوي الداخلية.

نحصل اذن، من اجل الجمل الفيزيائية التي ينعدم فيها العمل الافتراضي المنجز من قبل قوي القيود، علي مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = 0. \quad (٢٩)$$

لاحظ ان قوي القيود لا تظهر صراحة في هذه المعادلة وتأثيرهايقتصر فقط علي جعل الازاحات الافتراضية ليست كلها مستقلة خطيا.

معادلات لاغرانج

لنحسب الان العمل الافتراضي بدلالة الاحداثيات المعممة. لدينا

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i^{(a)}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j. \quad (٣٠)\end{aligned}$$

ال Q_j هي مركبات القوة المعممة و هي معرفة كالتالي

$$Q_j=\sum_i\vec{F}_i^{(a)}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (٣١)$$

لاحظ انه كما ان الاحداثيات المعممة لا تحمل بالضرورة و حدة الطول فان القوة المعممة لا تحمل بالضرورة و حدة القوة.
نحسب ايضا

$$\begin{aligned}\sum_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\\ &= \sum_{i,j}m_i\bigg[\frac{d}{dt}\bigg(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\bigg)-\frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\bigg)\bigg]\delta q_j\\ &= \sum_{i,j}m_i\bigg[\frac{d}{dt}\bigg(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\bigg)-\vec{v}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\bigg]\delta q_j. \quad (٣٢)\end{aligned}$$

بالتعويض بالنتيجة $\partial\vec{v}_i/\partial\dot{q}_j=\partial\vec{r}_i/\partial q_j$ نحصل علي

$$\begin{aligned}\sum_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j}m_i\bigg[\frac{d}{dt}\bigg(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\bigg)-\vec{v}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\bigg]\delta q_j\\ &= \sum_j\bigg[\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\bigg)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\bigg]\delta q_j. \quad (٣٣)\end{aligned}$$

الطاقة الحركية الكلية تعطي ب $T=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2$. اذن مبدأ دالمبارت يصبح

$$\sum_i(\vec{F}_i^{(a)}-\frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = -\sum_j\bigg[Q_j-\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\bigg)+\frac{\partial T}{\partial q_j}\bigg]\delta q_j=0. \quad (٣٤)$$

لان الاحداثيات المعممة q_i يمكن اختيارها، من اجل القيود الهولونومية، بحيث تكون مستقلة خطيا، يمكننا ان نستخلص مباشرة من النتيجة اعلاه معادلات الحركة

$$-Q_j+\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\bigg)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=0. \quad (٣٥)$$

في المعادلة اعلاه $j=1,...,n$ حيث $n=3N-k$ هو عدد الاحداثيات المعممة المستقلة خطيا اي عدد درجات الحرية. من اجل القوي المشتقة من كمون لدينا $\vec{F}_i^{(a)}=-\vec{\nabla}_iV$ و بالتالي

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (٣٦)$$

اذن نحصل علي معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\bigg)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0. \quad (٣٧)$$

هذه هي معادلات لاغرانج للحركة حيث L هي اللاغرانجية المعرفة ب

$$L=T-V. \quad (٣٨)$$

حساب التغايرات

نعتبر دالة f في متغير y الذي هو نفسه دالة في متغير x. الدالة f يمكن ايضا ان تتعلق بالمشتقة $\dot{y} = dy/dx$ و ايضا ب x . يلعب x هنا دور الزمن و يلعب y دور الموضع. نعطي الان التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx. \quad (٣٩)$$

التكامل I هو مثال علي ما يسمي بالداليات التي هي دوال يكون فيها المتغير دالة و ليس عدد. التكامل I هو اذن دالة، ليست في متغير واحد، لكن في طريق او مسار بمجمله $y = y(x)$ الذي يربط نقطتين $(x_1, y_1 = y(x_1))$ و $(x_2, y_2 = y(x_2))$. نسمي حساب تغيرات، اي حساب تفاضل، الداليات بحساب التغايرات.

السؤال هو: ماهي القيمة المستقرة لهذا التكامل؟ اي ماهو الطريق $y_s = y_s(x)$ الذي من اجله ياخذ التكامل قيمة مستقرة اي يأخذ قيمة اصغرية او اعظمية او يكون نقطة انعطاف.

نعتبر مجموعة الطرق المجاورة و القريبة جدا من الطريق المستقرة $y_s = y_s(x)$ و التي يمكن ترقيمها بوسيط α كالتالي

$$y(x) \equiv y(x; \alpha) = y(x; 0) + \alpha \eta(x) \ , \ y_s(x) \equiv y(x; 0). \quad (٤٠)$$

لان جميع الطرق تنطلق من $(x_1, y_1 = y(x_1))$ و تلتقي في $(x_2, y_2 = y(x_2))$ لدينا

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (٤١)$$

يصبح التكامل I من اجل هذه المجموعة من الطرق دالة عادية في الوسيط α اي

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x; \alpha), \dot{y}(x; \alpha), x) dx. \quad (٤٢)$$

القيمة المستقرة للدالة I تعطي اذن بالشرط

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0} = 0. \quad (٤٣)$$

نقوم بحساب الاشتقاق بشكل عادي كالتالي

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y(x; \alpha), \dot{y}(x; \alpha), x) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{d\alpha} \right] dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d^2 y}{d\alpha dt} \right] dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{dy}{d\alpha} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{dy}{d\alpha} \right] dx. \quad (٤٤)
\end{aligned}$$

من الواضح اننا استعملنا التكامل بالتجزئة للانتقال الي الخط الاخير. ايضا ينعدم الحد الثاني بالشرط (41). نحصل اذن علي

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \frac{dy}{d\alpha} dx. \quad (٤٥)$$

القيمة المستقرة للدالة I تعطي اذن ب

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta(x)dx=0. \tag{٤٦}$$

نستخدم الان النتيجة الاساسية التالية من حساب التفاضل

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx=0 \Rightarrow M(x)=0. \tag{٤٧}$$

القيمة المستقرة للدالة I تعطي اذن بمعادلة الحركة

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0. \tag{٤٨}$$

مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون

في الفقرات السابقة قمنا باشتقاق معادلات لاغرانج انطلاقا من اعتبارات تتعلق بالازاحة الافتراضية للجملة حول حالتها اللحظية باستعمال مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت الذي هو مبدأتفاضلي. في هذه الفقرة سوف نعيد اشتقاق معادلات لاغرانج انطلاقا من اعتبارات تتعلق بالتغييرات الافتراضية للحركة الاجمالية للجملة حول الحركة الحقيقية بين لحظتين زمنيتين t_1 و t_2 باستعمال المبدأ التكاملي لهاميلتون المعروف بمبدأ الفعل الاصغري[٢].

الحالة اللحظية للجملة في لحظة زمنية t توصف ب n احداثية معممة q_1، q_2،...،q_n، و تسمي ايضا بتمثيلة الجملة في اللحظة t. هذه الحالة هي اذن نقطة في فضاء التمثيلات الذي هو فضاء ذو n بعد تعطي فيه المحاور بالضبط بالاحداثيات المعممة q_i. مع تقدم الزمن تتغير الجملة و تتحرك النقطة $(q_1,q_2,...,q_n)$ في فضاء التمثيلات مختطة منحني يسمي طريق حركة الجملة.

مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون هو مبدأ اقل عمومية من مبدأ دالمبارت لانه يطبق فقط علي الجمل التي تكون فيها كل القوي، و منها قوي القيود، مشتقة من كمون معمم U. الكمون المعمم هو كمون يمكن ان يتعلق، بالاضافة الي الاحداثيات المعممة، علي السرعات المعممة و ايضا علي الزمن اي $U=U(q_i,\dot{q}_i,t)$. القوي المعممة في هذه الحالة يمكن ان نحصل عليها من U ب

$$Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{٤٩}$$

هذه الجمل تسمي مونوجينية و تبقي من اجلها معادلات لاغرانج صالحة بلاغرانجية معطاة كالعادة ب $L=T-U$. هذه الجمل تصبح محافظة اذا كان الكمون يتعلق فقط بالاحداثيات. نعرف الفعل بين لحظتين زمنيتين t_1 و t_2 بالتكامل

$$I[q]=\int_{t_1}^{t_2} Ldt. \tag{٥٠}$$

اللاغرانجية L هي دالة في الاحداثيات و السرعات المعممة q_i و $\dot{q}_i$ و كذلك في الزمن t، اي $L=L(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n,t)$، اما الفعل فهو دالية في L .

---

[٢]اذا اردنا دقة اكثر فان مبدأ الفعل الاصغري يختلف عن مبدأ هاميلتون الذي نناقشه هنا. انظر غولدشتاين الفصل 8 الباب 6. مبدأ الفعل الاصغري يستخدم التغاير Δ عوض التغاير δ الذي يشترط فيه: (1) ابتداء كل الطرق في نفس اللحظة t_1 و انتهائها في نفس اللحظة t_2، (2) انعدام الانتقال الافتراضي $\delta q(t)$ في اللحظتين الزمنيتين t_1 و t_2. كلا الشرطين غير متحققين من اجل Δ.

من الواضح ان الفعل يبقي ثابت تحت تأثير اي تحويل للاحداثيات المعممة التي نستخدمها من اجل التعبير عن L و بالتالي فان معادلات الحركة المشتقة من I تبقي صامدة تحت تاثير اي تحويل نقطي للاحداثيات.

يتلخص مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون في الاتي: **يبلغ التكامل I قيمته المستقرة، اي يبلغ قيمته الصغري او العظمي او يبلغ نقطة انعطاف، من اجل الطريق الحقيقية للحركة**.

من الناحية التقنية فاننا نعبر عن هذا المبدأ كالتالي: ان اي تغيير من الرتبة الاولي في طريق الجملة حول طريق الحركة الحقيقية ينجم عنه تغيير من الرتبة الثانية في الفعل I، و بالتالي فان كل الطرق المجاورة و التي تختلف عن الطريق الحقيقية بازاحة متناهية في الصغر لها نفس الفعل. هذه اذن مسألة تغايرية من اجل دالية الفعل I الذي يتعلق بدالة واحدة التي هي اللاغرانجية L. نكتب مبدأ هاميلتون كالتالي

$$\frac{\delta}{\delta q_i}I[q]=\frac{\delta}{\delta q_i}\int_{t_1}^{t_2}L(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n,t)dt. \quad (٥١)$$

يمكن ان نبين، من اجل الجمل الخاضعة لقيود هولونومية، ان مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون هو شرط ضروري و كافي من اجل معادلات لاغرانج. في مايلي فاننا سنبين من اجل الجمل المونوجينية ان مبدأ هاميلتون هو شرط كافي لمعادلات لاغرانج. اذن مبدأ هاميلتون يمكن اخذه المسلمة الاساسية للميكانيك عوضا عن قوانين نيوتن من اجل الجمل المونوجينية اي لما تكون كل القوي، باستثناء قوي القيود، مشتقة من كمون معمم.

نعتبر مجموعة الطرق $q_i(t)$ في فضاء التمثيلات الرابطة بين الحالتين اللحظتين $(q_1(t_1),...,q_n(t_1))$ و $(q_1(t_2),...,q_n(t_2))$، و التي لها نفس فعل الطريق الحقيقية $q_i^{(s)}(t)$ بين هاتين الحالتين . هذه الطرق يمكن ترقيمها بوسيط متناه في الصغر α كالتالي $q_i(t)\equiv q_i(t,\alpha)=q_i(t,0)+\alpha\eta_i(t)$ حيث $\alpha=0$ يرفق بالطريق الحقيقية للحركة اي $q_i(t,0)=q_i^{(s)}(t)$، و η_i هي دوال كيفية في الزمن t تنعدم في النقاط الحدية t_1 و t_2 و مستمرة، و كذلك نفترض ان مشتقاتها الاولي و الثانية مستمرة. من اجل هذه المجموعة من الطرق فان الفعل يصبح دالة في α معطاة ب

$$I(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i(t,\alpha),\dot{q}_i(t,\alpha),t)dt. \quad (٥٢)$$

نعرف الازاحة الافتراضية δq_i ب

$$\delta q_i=\left(\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)|_{\alpha=0}d\alpha=\eta_i d\alpha. \quad (٥٣)$$

بالمقابل التغيير المتناه في الصغر للفعل يعرف ب

$$\delta I \;=\; \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)|_{\alpha=0}d\alpha. \quad (٥٤)$$

نحسب

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\alpha}\right)dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_{t_1}^{t_2}. \qquad (٥٥)
\end{aligned}
$$

الحد الاخير ينعدم لان كل الطرق المعتبرة تمر بالنقاط $(t_1, y_i(t_1, 0)$ **و** $(t_2, y_i(t_2, 0))$**. اذن نحصل علي**

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i dt. \qquad (٥٦)$$

مبدأ هاميلتون يعطي ب

$$\frac{\delta I}{d\alpha} = \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)|_{\alpha=0} = 0. \qquad (٥٧)$$

هذه تؤدي الي معادلات الحركة

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\eta_i dt = 0. \qquad (٥٨)$$

هذه العلاقة صالحة من اجل كل الدوال η_i**. اذن باستعمال النتيجة الاساسية لحساب التفاضل** (47) **نحصل علي**

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \qquad (٥٩)$$

نكتب مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون علي الشكل النهائي

$$\frac{\delta I}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \qquad (٦٠)$$

هذه هي معادلات لاغرانج.

تمارين

تمرين 1:

- بين ان $\partial\vec{v}_i/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_i/\partial q_j$.
- احسب الطاقة الحركية بدلالة الاحداثيات و السرعات المعممة.

تمرين 2: النواس المضاعف هو جملة مكونة من كتلتين m_1 و m_2 موصولتين بخيط صلب طوله l_2 و معلقة الي السقف بخيط صلب اخر طوله l_1 مربوط ايضا بالكتلة m_1. انظر الي الشكل 2. ماهي الشروظ الهولونومية التي تخضع لها هاته الجملة و ماهو عدد درجات الحرية. احسب لاغرانجية هاته الجملة و اشتق معادلات لاغرنج للحركة.

تمرين 3: نعطي اللاغرانجية

$$L^{'} = \frac{1}{2}m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(ax^2 + 2bxy + cy^2). \qquad (٦١)$$

احسب معادلات الحركة. ماهي الجملة الفيزيائية الموصوفة بهذه اللاغرانجية. استنتج اللاغرانجية $L = T - V$ المرفقة بهذه الجملة.

تمرين 4: نعطي اللاغرانجية

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x). \qquad (٦٢)$$

احسب معادلات لاغرانج للحركة. ما هو التفسير الفيزيائي لهذه المعادلات.

تمرين 5: بين ان معادلات لاغرانج صامدة تحت تأثير التحويلات النقطية

$$q_i \longrightarrow s_i : q_i = q_i(s_j, t). \qquad (٦٣)$$

تمرين 6: بين انه من اجل القوي المشتقة من كمون فان القوة المعممة تعطي ب

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \qquad (٦٤)$$

تمرين 7: اكتب لاغرانجية جسيم حر يتحرك بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم عطالي K. بين ان لاغرانجية الجسيم الحر بالنسبة لمعلم عطالي $K^{'}$ يتحرك بسرعة $\vec{V}$ بالنسبة ل K يؤدي الي نفس معادلات الحركة.

تمرين 8: طول اي قوس متناه في الصغر في المستوي يعطي ب

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{٦٥}$$

بين ان اقصر طريق بين نقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) في المستوي هو المستقيم الرابط بين هاتين النقطتين .

اعد نفس السؤال بالنسبة لسطح الكرة. طول قوس متناه في الصغر علي سطح الكرة يعطي ب

$$ds = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2}. \tag{٦٦}$$

تمرين 9: اكتب لاغرانجية هزاز توافقي و معادلات حركته. نفترض الان اننا لا نعرف كيف ان نحل معادلات الحركة و نعرف فقط ان الحركة اهتزازية بدور $T = 2\pi/\Omega$ حيث Ω هو التواتر الزاوي او النبض. موضع الهزاز كدالة في الزمن $x(t)$ يمكن اذن وصفه بسلسلة فورييه من الشكل

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\Omega t. \tag{٦٧}$$

نأخذ الطرق في فضاء التمثيلات بين اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = T$ التي تعطي بالدوال اعلاه. احسب فعل الهزاز علي هذه الطرق بدلالة الوسائط a_j. بين ان القيمة المستقرة للفعل تعطي ب

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ a_j = 0\ ,\ \forall j \neq 1. \tag{٦٨}$$

تمرين 10: النواس الكروي هو كتلة نقطية معلقة الي السقف بخيط صلب يمكنها ان تهتز في الفضاء علي سطح كرة. ماهي معادلات القيود و الاحداثيات المعممة في هذه الحالة. احسب لاغرانجية الجملة و معادلات الحركة.

تمرين 11: ينحدر قرص منزلقا علي مستوي مائل. عين الاحداثيات المعممة الضرورية لوصف حالة الجملة بالكامل. عين القيود علي الحركة في حالة انحدار القرص دائرا علي المستوي المائل بدون انزلاق.

تمرين 12: ما هي القيود علي الحركة من اجل الجمل التالية:

- جسيم يتحرك علي قطع ناقص.
- جسيم يتحرك علي كرة.
- جسم صلب مشكل من ثلاث جسيمات.
- جسم يتزحلق علي مستوي مائل بزاوية α.
- جسم يتحرك علي مستقيم يدور بسرعة زاوية ثابتة Ω.

تمرين 13: عجلة تتحرك دائرة علي مستوي بدون انزلاق. نفترض ان العجلة لا يمكنها ان تسقط. احسب معادلات القيود. هل القيود هولونومية ام لا.

تمرين 14: نعتبر جملة مشكلة من كتلتين M_1 و M_2 معلقتين الي بكرتين متراكزتين نصف قطريهما R_1 و R_2 علي التوالي. بين ان العمل الافتراضي لقوي القيود ينعدم عند حالة التوازن. استخدم مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت لتعيين حالة توازن الجملة.

تمرين 15: كتلتان m_1 و m_2 مرتبطتان بحبل وتتحركان علي مستويين مائلين بزاويتين α و β علي التوالي. الحبل طوله l و يتحرك بدون احتكاك عبر بكرة تفصلها عن الكتلتين المسافتين l_1 و l_2 علي التوالي. انظر الي الشكل 6. استعمل مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت لحساب تسارع الجملة. عين المسافة l_1 او المسافة l_2 كدالة في الزمن.

تمرين 16: النواس النابض هو كتلة m معلقة الي السقف بنابض ثابت مرونته k تحت تأثير الحقل الثقالي. ماهي الاحداثيات المعممة في هذه المسألة. احسب لاغرنجية الجملة و اشتق معادلات لاغرنج للحركة.

تمرين 17: يتحرك حجران مربوطان بخيط صلب طوله l علي مستوي مائل بزاوية α. ماهي الاحداثيات المعممة في هذه الحالة. احسب لاغرانجية الجملة. حل معادلات الحركة صراحة.

تمرين 18: جسيم كروي يتحرك داخل انبوب يدور في المستوي xy حول المحور z بسرعة زاوية ثابته Ω. اشتق معادلات لاغرنج للحركة. حل معادلات الحركة.

الحلول

تمرين 1:

- السرعة بدلالة الاحداثيات و السرعات المعممة تعطي ب

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j. \quad (٦٩)$$

بالاشتقاق الجزئي بالنسبة ل $\dot{q}_j$ نحصل علي العلاقة المرغوب فيها.

-

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \quad (٧٠)$$

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})^2 \ , \ M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ , \ M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (٧١)$$

تمرين 2: احداثيات الكتلة الاولي هي

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \ , \ y_1 = -l_1\cos\theta_1. \quad (٧٢)$$

احداثيات الكتلة الثانية هي

$$x_2 = x_1 + l_2\sin\theta_2 \ , \ y_2 = y_1 - l_2\cos\theta_2. \quad (٧٣)$$

نلاحظ ان

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2. \quad (٧٤)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2. \quad (٧٥)$$

هذه هي معادلات القيود الهولونومية في هذه الحالة. اذن عدد درجات الحرية هو $4 - 2 = 2$. الاحداثيات المعممة في هذه الحالة هي الزاويتين θ_1 و θ_2.
من اجل حساب اللاغرانجية علينا حساب الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة.
سرعة الكتلة الاولي هي

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2. \quad (٧٦)$$

سرعة الكتلة الثانية هي

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (٧٧)$$

الطاقة الحركية للجملة هي

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (٧٨) \end{aligned}$$

نحسب الان الطاقة الكامنة. قوي الثقالة المؤثرة علي الجسيمين الاول و الثاني هي $\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$ و $\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$. في هذه الحالةالطاقة الكامنة تساوي ناقص عمل قوة الثقالة. اذن

$$\begin{aligned} V &= m_1 g.y_1 + m_2 g.y_2 \\ &= -(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2 gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{٧٩}$$

اذن لاغرانجية النواس المضاعف تعطي ب

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ &+ (m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2 gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{٨٠}$$

معادلات الحركة هي

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\bigg[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\bigg] \\ &-\bigg[-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1\bigg] = 0. \end{aligned} \tag{٨١}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\bigg[m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\bigg] \\ &-\bigg[-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 gl_2\sin\theta_2\bigg] = 0. \end{aligned} \tag{٨٢}$$

تمرين 3: معادلات الحركة تعطي ب

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial L^{'}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow m(a\ddot{x}+b\ddot{y}) + K(ax+by) = 0. \tag{٨٣}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial\dot{y}}) - \frac{\partial L^{'}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow m(b\ddot{x}+c\ddot{y}) + K(bx+cy) = 0. \tag{٨٤}$$

نعرف المتغيرات

$$u_1 = ax+by\ ,\ u_2 = bx+cy. \tag{٨٥}$$

معادلات الحركة تأخذ اذن الشكل

$$m\ddot{u}_1 + Ku_1 = 0\ ,\ m\ddot{u}_2 + Ku_2 = 0. \tag{٨٦}$$

هذه معادلات حركة هزازان توافقيان u_1 و u_2 حيث ان كل هزاز هو عبارة عن نابض ذو كتلة m و ثابت K. الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة للنابض u تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2\ ,\ V = \frac{1}{2}Ku^2. \tag{٨٧}$$

اذن لاغرانجية الجملة $L = T - V$ تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2) - \frac{1}{2}K(u_1^2+u_2^2). \tag{٨٨}$$

الجملة الفيزيائية هي اذن عبارة عن هزاز توافقي في بعدين.

تمرين 5: لدينا من جهة

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial s_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i}\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial}{\partial s_i}\sum_k \left(\frac{\partial q_j}{\partial s_k}\dot{s}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t}\right)\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_{j,k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial s_i \partial s_k}\dot{s}_k + \frac{\partial^2 q_j}{\partial s_i \partial t}\right).\end{aligned} \quad (٨٩)$$

من جهة اخري لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i}\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i}.\end{aligned} \quad (٩٠)$$

اي ان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i}\right). \quad (٩١)$$

اذن اذا كان لدينا معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (٩٢)$$

فانه يترتب عليه مباشرة معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0. \quad (٩٣)$$

تمرين 7: بالنسبة للمعلم K لدينا

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2. \quad (٩٤)$$

بالنسبة للمعلم $K^{'}$ لدينا

$$\begin{aligned}L^{'} &= \frac{1}{2}m\vec{v}^{'2}\\ &= L + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 + m\vec{v}\vec{V}\\ &= L + \frac{dF}{dt}.\end{aligned} \quad (٩٥)$$

$$F = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 t + m\vec{r}.\vec{V}. \quad (٩٦)$$

نحسب الان

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{dF}{dt}). \quad (٩٧)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\frac{dF}{dt}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} + \frac{\partial F}{\partial r_i}. \end{aligned} \quad (٩٨)$$

المعادلة الاخيرة تؤدي الي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i}) &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial r_i} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i}). \end{aligned} \quad (٩٩)$$

اذن نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i}) - \frac{\partial L^{'}}{\partial r_i} &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i}) - \frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{dF}{dt}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (١٠٠)$$

هذه النتيجة تبقي صالحة من اجل كل الدوال $F = F(r_i, t)$ القابلة للاشتقاق و ليس فقط من اجل الدالة (96) .

تمرين 8: طول اي منحني رابط بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يعطي ب

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 ds \\ &= \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, \dot{y}). \end{aligned} \quad (١٠١)$$

$$f(y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (١٠٢)$$

نحسب مباشرة

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}. \quad (١٠٣)$$

معادلة الحركة هي اذن

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \Leftrightarrow \dot{y} = a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}. \quad (١٠٤)$$

a و c هي ثوابت تكامل. بالتكامل مرة اخري نحصل علي

$$y = ax + b. \quad (١٠٥)$$

هذه هي معادلة المستقيم. الثوابت a و c تعين من شرط مرور المستقيم بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2). اذن اقصر طريق رابط بين نقطتين في المستوي هو المستقيم.
بالنسبة لحالة الكرة لدينا

$$f(\phi, \dot{\phi}, \theta) = \sqrt{1 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2}\ ,\ \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}. \quad (١٠٦)$$

معادلة القيم المستقرة تعطي ب

$$\frac{\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2}} = c. \quad (١٠٧)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة علي الشكل

$$\dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}}\ ,\ \rho = a\cot\theta. \quad (١٠٨)$$

اذن الحل المستقر يعطي ب (باهمال ثابت تكامل اضافي)

$$\sin\phi = -a\cot\theta. \quad (١٠٩)$$

هذه معادلات الدوائر الكبري اي دوائر علي سطح الكرة.

تمرين 9: الفعل يعطي ب

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T Ldt \\ &= \int_0^T (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2)dt \\ &= \frac{1}{2}m\int_0^T x^2(t) - \frac{1}{2}k\int_0^T \dot{x}^2(t). \end{aligned} \quad (١١٠)$$

نحسب

$$\begin{aligned} \int_0^T x^2(t) &= \sum_{j=0}\sum_{k=0} a_j a_k \int_0^T \cos j\Omega t \cos k\Omega t dt \\ &= \sum_{j=0}\sum_{k=0} a_j a_k \frac{T}{2}\delta_{jk} \\ &= \frac{T}{2}\sum_{j=0} a_j^2. \end{aligned} \quad (١١١)$$

من جهة اخري لدينا

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\Omega t \Rightarrow \dot{x}(t) = -\Omega \sum_{j=0} j a_j \sin j\Omega t. \quad (١١٢)$$

اذن نحسب

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{x}^2(t) &= \Omega^2 \sum_{j=0} \sum_{k=0} jk a_j a_k \int_0^T \sin j\Omega t \sin k\Omega t dt \\ &= \Omega^2 \sum_{j=0} \sum_{k=0} jk a_j a_k \frac{T}{2} \delta_{jk} \\ &= \frac{T\Omega^2}{2} \sum_{j=0} j^2 a_j^2. \end{aligned} \quad (١١٣)$$

الفعل يصبح

$$I = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0} \big(m\Omega j^2 - \frac{k}{\Omega}\big) a_j^2. \quad (١١٤)$$

القيمة المستقرة تعطي بالشرط

$$\delta I = 0 \Rightarrow \pi \sum_{j=0} \big(m\Omega j^2 - \frac{k}{\Omega}\big) a_j \delta a_j = 0. \quad (١١٥)$$

الحل يعطي ب

$$\big(m\Omega j^2 - \frac{k}{\Omega}\big) a_j = 0 \ , \ \forall j. \quad (١١٦)$$

قليل من التأمل يعطي الحل النهائي

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ a_j = 0 \ , \ \forall j \neq 1. \quad (١١٧)$$

تمرين 10: شعاع الموضع لانه يقع علي سطح كرة يجب ان يحقق

$$\vec{r}^2 = L^2. \quad (١١٨)$$

هذه هي معادلة القيد. عدد درجات الحرية هو اذن 2. مرة اخري لان شعاع الموضع يقع علي سطح كرةيمكننا كتابته علي الشكل

$$\vec{r} = L\big(\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}\big). \quad (١١٩)$$

يمكن اخذ الزاويتين θ و ϕ كاحداثيات معممة.
نحسب السرعة و الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\big(\cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}\big) + L\dot{\phi}\sin\theta\big(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}\big). \quad (١٢٠)$$

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta. \quad (١٢١)$$

$$V = -mgL\cos\theta. \quad (١٢٢)$$

لاغرانجية النواس الكروي تعطي اذن ب

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + mgL\cos\theta. \quad (١٢٣)$$

معادلات الحركة تعطي ب

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{L}(g - L\dot{\phi}^2\cos\theta)\sin\theta. \quad (١٢٤)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0. \quad (١٢٥)$$

تمرين 11: حالة الجملة تعين بالكامل باعطاء المسافة l التي يقطعها القرص علي المستوي المائل و الزاوية α التي يدور بها القرص حول محور دورانه. الاحداثيات المعممة هي اذن l و α. انظر الي الشكل 3 .
عند انحدار القرص علي المستوي دائرا بدون انزلاق فان انتقال نقطة التماس dl خلال زمن dt يساوي ضرب نصف قطر القرص و الانتقال الزاوي $d\alpha$ خلال الزمن dt. اي

$$dl = Rd\alpha \Leftrightarrow v = R\dot{\alpha}. \quad (١٢٦)$$

هذا هو قيد الدوران بدون انزلاق او زحلقة. من الواضح انه قيد هولونومي.

تمرين 12:

- $$x = -l\cos\alpha\ ,\ y = -l\sin\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\alpha. \quad (١٢٧)$$

- $$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (١٢٨)$$

- $$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = c_{ij}^2. \quad (١٢٩)$$

- $$x = -l\cos\alpha\ ,\ y = -l\sin\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\alpha. \quad (١٣٠)$$

- $$x = r\cos\Omega t\ ,\ y = r\sin\Omega t \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\Omega t. \quad (١٣١)$$

تمرين 13: نحتاج لتحديد حالة الجملة الي احداثيات مركز ثقل العجلة في المستوي، x_w و y_w، الي الزاوية ψ التي تحدد اتجاه العجلة، و الي زاوية دوران العجلة ϕ. انظر الي الشكل 4.
مركبات السرعة $\vec{v}$ هي

$$\dot{x}_w = -v\sin\psi\ ,\ \dot{y}_w = v\cos\psi. \quad (١٣٢)$$

من الجهة الاخري فان شرط الدوران بدون انزلاق يعطي ب

$$v = R\dot{\phi}. \quad (١٣٣)$$

بالتعويض نحصل علي معادلات القيد

$$dx_w = -R\sin\psi d\phi\ ,\ dy_w = R\cos\psi d\phi. \quad (١٣٤)$$

هذه معادلات لا يمكن مكاملتها حتي نحل المسالة. اذن هذه القيود غير هولونومية.

تمرين 14: قوي القيود في هذه الحالة هي قوي التوتر قي الخيوط $\vec{T}_1$ و $\vec{T}_2$. انظر الي الشكل 5. دوران البكرة بزاوية $\delta\phi$ يقابل انتقال الكتل بمسافة تعطي ب

$$\delta y_1 = R_1\delta\phi_1\ ,\ \delta y_2 = -R_2\delta\phi. \quad (١٣٥)$$

العمل الافتراضي لقوي التوتر يعطي اذن ب

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{T}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{T}_2\delta\vec{r}_2\\ &= T_1\delta y_1 + T_2\delta y_2\\ &= (T_1R_1 - T_2R_2)\delta\phi.\end{aligned} \quad (١٣٦)$$

لكن عند التوازن تتساوي عزوم قوي التوتر. اذن عند التوازن ينعدم العمل الافتراضي لقوي التوتر.
مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت عند التوازن يأخذ الشكل

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)}\delta\vec{r}_i = 0. \quad (١٣٧)$$

القوي المطبقة في هذه المسألة هي قوي الثقالة. اذن المعادلة اعلاه تأخذ الشكل

$$m_1g\delta y_1 + m_2g\delta y_2 = 0. \quad (١٣٨)$$

حالة التوازن تعطي اذن ب

$$m_1R_1 = m_2R_2. \quad (١٣٩)$$

تمرين 15: مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت يأخذ الشكل

$$\sum_i(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i = 0. \quad (١٤٠)$$

نكتب هذه المعادلة علي الشكل

$$(m_1\vec{g} - m_1\ddot{\vec{l_1}})\delta\vec{l_1} + (m_2\vec{g} - m_2\ddot{\vec{l_2}})\delta\vec{l_2} = 0. \quad (١٤١)$$

بالاسقاط نحصل علي

$$(m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{l}_1)\delta l_1 + (m_2 g\sin\beta - m_2\ddot{l}_2)\delta l_2 = 0. \quad (١٤٢)$$

القيد علي الحركة في هذه الحالة هو

$$l = l_1 + l_2 \Rightarrow \delta l_1 = -\delta l_2. \quad (١٤٣)$$

نحصل اذن علي

$$\ddot{l}_1 = \frac{m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta}{m_1 + m_2}g. \quad (١٤٤)$$

تمرين 16: احداثيات الكتلة m في الشكل 7 تعطي ب

$$x = r\sin\phi\ ,\ \ y = r\cos\phi. \quad (١٤٥)$$

الاحداثيات المعممة هي r، لان طول النابض غير ثابت في هذه المسألة، و ϕ.
الطاقة الحركية تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \quad (١٤٦)$$

ليكن r_0 طول النابض في حالة التوازن. الطاقة الكامنة تعطي ب

$$\begin{aligned} V &= -m\vec{g}\vec{r} + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \\ &= -mgr\cos\phi + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2. \end{aligned} \quad (١٤٧)$$

لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + mgr\cos\phi - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2. \quad (١٤٨)$$

معادلة الحركة بالنسبة ل ϕ:

$$mr\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - 2m\dot{r}\dot{\phi}. \quad (١٤٩)$$

الحد الثاني هو قوة كوريوليس الناجمة عن تعلق طول النواس بالزمن. معادلة الحركة بالنسبة ل r:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - k(r - r_0). \quad (١٥٠)$$

الحد الاخير هو قوة هوك.

تمرين 17: الاحداثيات النسبية في الشكل 8 تعطي ب

$$x = l\cos\alpha\ ,\ y = l\sin\alpha. \tag{١٥١}$$

هناك قيد هولونومي واحد و بالتالي لدينا درجة حرية واحدة. الاحداثية المعممة هي الزاوية α. لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + m\vec{g}\vec{r} \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl\sin\alpha. \end{aligned} \tag{١٥٢}$$

معادلات لاغرانج للحركة

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\cos\alpha = 0. \tag{١٥٣}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة ب $\dot{\alpha}$ يمكن مكاملة هذه المعادلة مرة من اجل الحصول علي

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2(c - \frac{g}{l}\sin\alpha)}. \tag{١٥٤}$$

c هو ثابت تكامل. بالمكاملة مرة ثانية باستعمال فصل المتغيرات نحصل علي

$$t - t_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(c - \frac{g}{l}\sin\alpha)}}. \tag{١٥٥}$$

تمرين 18: لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \Omega^2 r^2). \tag{١٥٦}$$

معادلات لاغرانج للحركة تعطي ب

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0. \tag{١٥٧}$$

الحل يعطي ب

$$r = A\exp(\Omega t) + B\exp(-\Omega t). \tag{١٥٨}$$