# الفصل الرابع

## المتذبذب التوافقي الخطي Linear Harmonic Oscillator

وفقا للنظرية الكلاسيكية فان المتذبذب التوافقي عبارة عن جسيم كتلته $m$ يتحرك ذهابا وايابا حول موضع استقراره تحت تاثير القوة المعيدة Restoring Force اي ان

$$F=-kx$$

حيث ان $k$ تمثل مقدار ثابت ويطلق عليه ثابت القوة، والاشارة السالبة تعني ان القوة تكون باتجاه معاكس لاتجاه الازاحة $x$. يمكن الحصول على معادلة الحركة من خلال قانون نيوتن الثاني:

$$F=m\ddot{x}$$

$$-kx=m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

حيث ان $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ التردد الزاوي ، ان معادلة الحركة اعلاه تقبل بنوعين من الحلول هما

$$x=a\cos\omega t$$

$$x=a\sin\omega t$$

وكلا الحلين يمثل حركة اهتزازية بتردد زاوي $\omega$ وسعة $a$

ويرتبط الجهد بالقوة بالعلاقة

$$F=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}=-kx$$

وبعد اجراء عملية التكامل لهذه المعادلة نجد ان

$$V(x)=\tfrac{1}{2}k^2x^2=\tfrac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ان الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي يمكن ايجادها وكما يلي:

$$E = T + V(x)$$

$$= \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\therefore \quad E = \tfrac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

من خلال الدراسة الكلاسيكية للمتذبذب التوافقي اعلاه يمكن ان نستنتج مايلي

1. The minimum energy of H.O. is zero.
2. The energy of H.O. has a continuous spectrum of values.
3. The probability density of finding the oscillating particle has an inverse proportionality with its speed.

1. الطاقة الدنيا للمتذبذب التوافقي تساوي صفر.
2. الطاقة للمتذبذب التوافقي لها طيف مستمر من القيم .
3. كثافة الاحتمالية للمتذبذب تتناسب مع السرعة.
4. لاتوجد حدود قصوى تفرض على الطاقة التي يمكن ان يتخذها المتذبذب التوافقي .

ان مسالة المتذبذب التوافقي من المسائل المهمة في ميكانيك الكم. حيث ترتبط هذه المسألة في تطبيقات عملية عديدة مثل اهتزاز جزيئات وذرات المواد الصلبة التي تقرب عادة من اهتزازات توافقية بسيطة وكذلك المجال الكهرومغناطيسي الذي يمكن اعتباره في تطبيقات كثيرة كعدد من الاهتزازات التوافقية البسيطة.

## **Quantum Theory Of Harmonic Oscillator** النظريـة الكميـة للمتذبـذب التـوافقي

المؤثر الهاملتوني للمتذبذب التوافقي هو ( The Hamiltonian of H.O is )

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V(x)\psi_n = E_n\psi_n$$

نعوض عن $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi_n = E_n\psi_n$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left\{E_n - (\frac{1}{2} m\omega^2 x^2)\right\}\psi_n = 0$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (\frac{2mE_n}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2)\psi_n = 0$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{m\omega}{\hbar}(\frac{2E_n}{\hbar\omega} - \frac{m\omega}{\hbar} x^2)\psi_n = 0$$

نفرض ان

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

and

$$\varepsilon_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{m\omega}{\hbar}(\varepsilon_n - y^2)\psi_n = 0$$

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2}{dy^2}$$

$$=\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{dy^2}$$

$$\frac{m\omega}{\hbar}\ \frac{d^2\psi_n}{dy^2}+(\frac{m\omega}{\hbar})(\varepsilon_n-y^2)\psi_n=0 \qquad\qquad \div\ \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dy^2}+(\varepsilon_n-y^2)\psi_n=0 \qquad (2)$$

**س /** اثبت ان المتغيرات $\varepsilon_n$ ، $y$ هي متغيرات خالية من الوحدات

المعادلة (2) يمكن حلها بثلاث طرق هي :

1. طريقة شرودنكر او معالجة شرودنكر Schrödinger Treatment
2. طريقة المؤثرات Operator Treatment
3. طريقة المصفوفات Matrix Treatment

1. طريقة شرودنكر Schrödinger Treatment

في حالة $y\to\infty$ يمكن اهمال المقدار $\varepsilon_n$ فالمعادلة (2) تصبح بالصيغة التالية

$$\frac{d^2\psi_n}{dy^2}-y^2\psi_n=0 \qquad (3)$$

والان نجد الحل التقريبي للحالة التي تكون فيها $y$ كبيرة فاذا فرضنا ان

$$\psi_n(y)=e^{c\,y^2}$$

$$\frac{d\psi_n}{dy} = 2cy e^{cy^2}$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dy^2} = 2ce^{cy^2} + 2cye^{cy^2} \cdot 2cy$$

$$= 2ce^{cy^2} + 4c^2y^2e^{cy^2}$$

وبالتعويض عن $\psi_n$ ، $\frac{d^2\psi_n}{dy^2}$ في المعادلة (3) نحصل على

$$4c^2y^2e^{cy^2} + 2ce^{cy^2} - y^2e^{cy^2} = 0$$

وباهمال الحد الوسطي في المعادلة اعلاه لصغره نحصل على

$$(4c^2 - 1)y^2 e^{cy^2} = 0$$

$$\therefore \quad 4c^2 - 1 = 0$$

$$c = \pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \psi_n(y) = e^{\pm\frac{1}{2}y^2}$$

ولما كانت دالة الموجة $\psi_n(y)$ يجب ان تقترب من الصفر عندما تقترب y من اللانهاية فان الحل $e^{+\frac{1}{2}y^2}$ يجب ان يهمل ونحتفظ بحل تقريبي واحد هو

$$\therefore \quad \psi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2} \qquad (4)$$

وهو يمثل حلا تقريبا وللقيم الكبيرة للمتغير $y$ . واذا اردنا الحصول على الحل المظبوط فاننا نضرب الحل التقريبي للمعادلة (4) بدالة اعتباطية للمتغير $y$ مثلا $F(y)$

$$\therefore \quad \psi_n(y) = F(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} \qquad (5)$$

$$\frac{d\psi_n}{dy} = F'(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} + (-yF(y)e^{-\frac{1}{2}y^2})$$

$$\psi_n' = F'(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} - yF(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

$$\frac{d^2\psi_n(y)}{dy^2} = \psi_n''(y) = F''(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - yF'(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - F'(y)\,y\,e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$- F(y)\{(1)\cdot e^{-\frac{y^2}{2}} + y\,e^{-\frac{y^2}{2}}(-y)\}$$

$$\psi_n''(y) = F''(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - 2yF'(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - F(y)e^{-\frac{y^2}{2}} + y^2F(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$$

وبتعويض العلاقة الاخيرة في المعادلة (2) نحصل

$$\{F''(y) - 2y\,F'(y) - F(y) + y^2F(y) + \varepsilon_n\,F(y) - y^2F(y)\}e^{-\frac{y^2}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad F''(y) - 2y\,F'(y) + (\varepsilon_n - 1)\,F(y) = 0 \qquad (6)$$

ان معادلة هيرمت التفاضلية من الدرجة $n$ لها الصيغة الرياضية التالية:

$$H_n''(y) - 2y\,H_n'(y) + 2n\,H_n(y) = 0 \qquad (7)$$

وحل هذه المعادلة يدعى بمتعددة حدود هيرمت Hermit Polynomial الصيغة الرياضية لهذا الحل

$$H_n(y) = (-)^n e^{y^2}\,\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$$

حيث ان $n = 0,1,2,3........$

بمقارنة العلاقتين (6) ، (7) نجد ان

$$F(y) = H_n(y)$$

$$\varepsilon_n - 1 = 2n$$

$$\therefore \quad \varepsilon_n = 2n + 1$$

اذن المعادلة (5) يمكن ان تكتب بالشكل التالي

$$\psi_n(y) = H_n(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

ولاجل ان تكون دالة الموجة للمتذبذب التوافقي معيرة نضربها بثابت مثل $N_n$ اي ان

$$\psi_n(y) = N_n H_n(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} \tag{8}$$

حيث سنجد قيمة ثابت المعايرة $N_n$ لاحقا

المعادلة (8) الان يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\alpha x)\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \tag{9}$$

حيث ان $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ، $\alpha^2 x^2 = y^2$، هنا $\omega$ هو التردد الدائري الكلاسيكي و $H_n(\alpha x)$ هو كثيرة حدود هيرمت من الدرجة $n$

من معادلة (1)

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}\varepsilon_n$$

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1)$$

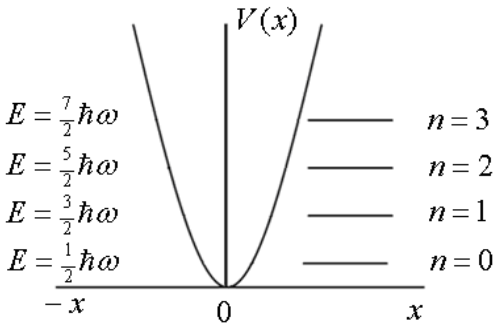
$$\therefore \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \tag{10}$$

ان المعادلة (9) تمثل الصيغة العامة لدوال الموجة الذاتية والتي تصف المتذبذب التوافقي والمعادلة (10) تمثل القيم الذاتية لطاقة المتذبذب التوافقي، حيث $n$ هو العدد الكمي وياخذ الاعداد الصحيحة $n = 0,1,2,3\cdots\cdots$

والمعادلة (10) تدلنا على ان طاقة المتذبذب التوافقي هي طاقة مكممة واقل قيمة لهذه الطاقة هي

$$E_\circ = \tfrac{1}{2}\hbar\omega \qquad \text{(Zero Point Energy)}$$

التي تتميز بالعدد الكمي $n = 0$ والتي تسمى بطاقة نقطة الصفر وهي اقل طاقة يستطيع المتذبذب امتلاكها.




الشكل يمثل مستويات الطاقة و هي
متباعدة بمقادير متساوية كل منها $\hbar\omega$

**س** / جد $H_n(y)$ ، $\varepsilon_n$ ، $E_n$ لاول اربعة حالات من $n$

**الحل:-**

باستخدام العلاقات التالية

$$H_n(y) = (-)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

$$\varepsilon_n = 2n + 1$$

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

| $n$ | $H_n(y)$ | $\varepsilon_n$ | $E_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{2}\hbar\omega$ |
| 1 | $2y$ | 3 | $\frac{3}{2}\hbar\omega$ |
| 2 | $4y^2-2$ | 5 | $\frac{5}{2}\hbar\omega$ |
| 3 | $8y^3-12y$ | 7 | $\frac{7}{2}\hbar\omega$ |

## Generating Function الدالة المولدة

الدالة الرياضية تدعى بالدالة المولدة

$$G(t,y)=e^{y^2-(t-y)}$$

$$G(t,y)=e^{-t^2+2ty} \qquad (11)$$

وهي احدى اهم النظريات التي تتعلق بكثيرة حدود هيرمت وترتبط معها بالعلاقة

$$e^{-t^2+2ty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(y)\ t^n}{n!} \qquad (12)$$

ويمكن ان نثبت ان الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر في المعادلة (12) وكما يلي

$$\text{R.H.S}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(y)\ t^n}{n!}$$

$$=H_{\circ}(y)+\frac{H_1(y)\ t}{1!}+\frac{H_2(y)\ t^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+2yt+(4y^2-2)\frac{t^2}{2}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+2yt+(2y^2-1)t^2+\cdots\cdots\cdots \qquad (a)$$

وباستخدام متسلسلة تايلر عند النقطة $(t=0)$ يمكن نشر الطرف الايسر

$$f(t)=f(0)+f'(0)\cdot t+\frac{f''(0)}{2!}\cdot t^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot t^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$L.H.S=1+2yt+(2y^2-1)t^2+\cdots\cdots\cdots \qquad (b)$$

من الملاحظ ان المعادلة (b) هي نفسها (a) اذن

L.H.S=R.H.S

## الدوال الموجية للمتذبذب التوافقي متعامدة وعيارية

## The Wave Function of H.O are Orthonormal

لقد بينا في الفصل الثاني ان الدوال الموجية التي تحقق معادلة شرودنكر هي دوال وعيارية و متعامدة وقد عبرنا عن هذه الحقيقة من خلال المعادلة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \, d\tau = \delta_{mn}$$

حيث ان

$$\delta_{mn} = 0 \qquad m \neq n$$
$$= 1 \qquad n = m$$

وواضح ان في حالة المتذبذب التوافقي $\psi_m^* = \psi_m$ وباستخدام الدوال الموجية المعطاة في المعادلة (9) نحصل على

$$N_m N_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m(\alpha x) \, H_n(\alpha) \, dx = \delta_{mn}$$

اذن في حالة $n \neq m$ تكون الدوال الموجية متعامدة

$$N_m N_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m(\alpha x) \, H_n(\alpha x) \, dx = 0$$

اذن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m(\alpha x) \, H_n(\alpha x) \, dx = 0 \qquad (13)$$

وفي حالة $n = m$ تكون الدوال الموجية عيارية

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x) \, dx = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n{}^2(\alpha x) \, dx = 1$$

**ايجاد ثابت التعيير $N_n$**

لايجاد ثابت التعيير $N_n$ نستخدم الشرط العياري

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\ dx = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n{}^2(\alpha x)\, dx = 1$$

وعند تبديل المتغير $x$ بالمتغير $y$ حسب العلاقة $y = \alpha\, x$ وان $dy = \alpha dx$

$$\frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n{}^2(y)\, dy = 1 \qquad \text{(a)}$$

ولايجاد هذا التكامل نستخدم تعريف الدالة المولدة كما يلي

$$g(t,y) = e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)\ t^n}{n!}$$

نضرب هذه الدالة في نفسها ثم بالمقدار $e^{-y^2}$ ونكامل على الفضاء سنحصل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t,y)\, g(t,y)\, e^{-y^2} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t^n}{n!}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y)\, dy$$

من الملاحظ ان التكامل في الطرف الايمن من العلاقة الاخيرة هو نفسه التكامل في المعادلة (a). الان نجد التكامل في الطرف الايسر وكما يلي

$$L.H.S = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,y)\, g(t,y)\, e^{-y^2} dy$$

$$L.H.S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2ty} \cdot e^{-t^2+2ty}\, e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2+4ty-y^2}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t^2} e^{-2t^2} e^{-2t^2+4ty-y^2}\ dy$$

$$= e^{2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2+4ty-y^2}\ dy$$

$$= e^{2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-2t)^2} \; dy$$

ولحل التكامل اعلاه نفرض ان $y - 2t = z$ ، $dy = dz$

$$L.H.S = e^{2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \; dz$$

وقيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \; dz = \sqrt{\pi}$

$$= e^{2t^2} \sqrt{\pi}$$

وباستخدام متسلسلة تايلرلنشر الدالة $e^{2t^2}$

$$e^{2t^2} = 1 + 2t^2 + \frac{(2t^2)^2}{2!} + \frac{(2t^2)^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (t^2)^n}{n!}$$

$$\therefore \quad L.H.S = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n}}{n!}$$

$$R.H.S = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t^n}{n!} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y) \, dy$$

وبالرجوع الى المعادلة (a) نجد ان

$$R.H.S = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t^n}{n!} \right)^2 \cdot \frac{\alpha}{N_n^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n}}{n!} \sqrt{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \cdot \frac{\alpha}{N_n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \cdot \frac{\alpha}{N_n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n}}{n!} \sqrt{\pi} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \left\{ \frac{\alpha}{N_n^2} - 2^n n! \sqrt{\pi} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_n = \left( \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \psi_n(x) = \left( \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$$

وفيما يلي ندرج في الجدول ادناه الدوال الذاتية العيارية والطاقة المقابلة لها لقيم $n = 0, 1, 2, 3$

| n | $\psi_n(x) = \left( \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$ | $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ |
|---|---|---|
| 0 | $(\alpha^{\frac{1}{2}} / \pi^{\frac{1}{4}})\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ | $\frac{1}{2}\hbar\omega$ |
| 1 | $(\alpha^{\frac{1}{2}} / 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}})\ 2(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ | $\frac{3}{2}\hbar\omega$ |
| 2 | $(\alpha^{\frac{1}{2}} / 8\pi^{\frac{1}{4}})\ (4\alpha^2 x^2 - 2)\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ | $\frac{5}{2}\hbar\omega$ |
| 3 | $(\alpha^{\frac{1}{2}} / 48\pi^{\frac{1}{4}})\ (8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x)\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ | $\frac{7}{2}\hbar\omega$ |

على اننا نستطيع ايجاد $H_n(y)$ او $H_n(\alpha x)$ لاي قيمة لـ $n$ من العلاقة التالية

$$H_n(y) = (-)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

بالاضافة الى ذلك فان $H_n(y)$ تخضع لعلاقات تفاضليه وتكاملية على درجة كبيرة من الفائدة منها

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) H_n(y)\ dy = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}$$

نلاحظ انه اذا كان $n \neq m$ فان التكامل يصبح صفر وكما بينا سابقا واذا كان $n = m$ فان المعادلة تصبح

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y)\ dy = 2^n n! \sqrt{\pi} \qquad (14)$$

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = H_n{}'(y) = 2nH_{n-1}(y) \qquad (15)$$

$$2yH_n(y) = H_{n+1}(y) + 2nH_{n-1}(y) \qquad (16)$$

$$H_n{}''(y) - 2yH_n{}'(y) + 2nH_n(y) = 0 \qquad (7)$$

## مقارنة النظرية الكلاسيكية مع النظرية الكمية
## Comparison of classical theory with quantum theory

تختلف النتائج التي حصلنا عليها عن نتائج النظرية الكلاسيكية فيما يلي

1. طاقة الحالة الدنيا لاتساوي صفر واقل قيمة للطاقة يمكن ان يتخذها المتذبذب هي $\frac{1}{2}\hbar\omega$ .
2. مستويات الطاقة غير متصلة بل متقطعة (Discrete).
3. في النظرية الكلاسيكية تتناسب كثافة الاحتمالية عكسيا مع الانطلاق اما النظرية الكمية فانها تعطي بالكمية $|\psi_n(x)|^2$ وبدون شك فهي تعطي تصرف مختلفا عن تصرف المتذبذب الكلاسيكي.

## واجب بيتي *H.W*

**Prove that**:

1. $\dfrac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$

2. $yH_n(y) = \frac{1}{2}H_{n+1}(y) + nH_{n-1}(y)$

3. $y\psi_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y)$

4. $\dfrac{d\psi_n(y)}{dy} = -y\psi_n(y) + \sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y)$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y + \dfrac{d}{dy})\ \psi_n(y) = \sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y - \dfrac{d}{dy})\ \psi_n(y) = \sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}(y)$

7. استخدم شرط المعايرة وتعريف الدالة المولدة اثبت ان

a) $N_n = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}$

b) $N_n = \left(\dfrac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$

8. جد $H_0$ ، $H_1$ ، $H_2$ ، $H_3$

9. برهن ان الدوال الموجية التالية هي دوال متعامده وعيارية

$$\psi_0(x) = (\alpha^{\frac{1}{2}} / \pi^{\frac{1}{4}})\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$\psi_1(x) = (\alpha^{\frac{1}{2}} / 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}})\ 2(\alpha x)\ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

10. جد $\Delta x \Delta p$ مستخدما $\psi_0(x)$ في السؤال التاسع

11.

1. **Prove that** $\dfrac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$

**Solution:**

باستخدام الدالة المولدة

$$g(t,y) = e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)\ t^n}{n!}$$

باخذ المشتقة الجزئية لطرفي المعادلة بالنسبة الى $y$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2t\ e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)\ t^n}{n!}$$

حيث ان $H_n'(y) = \dfrac{dH_n(y)}{dy}$

$$2t\ e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(y)\ t^{n+1}}{n!}$$

وعليه فان

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(y)\ t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)\ t^n}{n!}$$

وبمساواة معاملات $t^n$ في طرفي هذه العلاقة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)\ t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)\ t^n}{n!} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(y)\ t^n}{n(n-1)!} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \left\{ 2H_{n-1}(y) - \frac{H_n'(y)}{n} \right\} = 0$$

$$2H_{n-1}(y) - \frac{H_n'(y)}{n} = 0$$

$$\therefore \quad H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y)$$ وهو المطلوب

2 **Prove that** $yH_n(y)=\frac{1}{2}H_{n+1}(y)+nH_{n-1}(y)$

**Solution:**

باستخدام الدالة المولدة

$$g(t,y)=e^{-t^2+2ty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(y)\ t^n}{n!}$$

باخذ المشتقة الجزئية لطرفي المعادلة بالنسبة الى $t$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=(-2t+2y)\ e^{-t^2+2ty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nH_n(y)\ t^{n-1}}{n!}$$

$$(-2t+2y)\ e^{-t^2+2ty}=2y\ e^{-t^2+2ty}-2t\ e^{-t^2+2ty}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2yH_n(y)\ t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(y)\ t^{n+1}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2y\frac{H_n(y)\ t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(y)\ t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nH_n(y)\ t^{n-1}}{n!}$$

وبمساواة معاملات $t^n$ في طرفي العلاقة

$$\sum_{n=0}^{\infty}2y\frac{H_n(y)\ t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)H_{n+1}(y)\ t^n}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2yH_n(y)\ t^n}{n(n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)H_{n+1}(y)\ t^n}{(n+1)n(n-1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2yH_n(y)\ t^n}{n(n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_{n-1}(y)\ t^n}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(y)\ t^n}{n(n-1)!}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}\left\{\frac{2yH_n(y)}{n}-2H_{n-1}(y)-\frac{H_{n+1}(y)}{n}\right\}=0$$

$$\frac{2yH_n(y)}{n}-2H_{n-1}(y)-\frac{H_{n+1}(y)}{n}=0$$

نضرب في $\frac{n}{2}$ والترتيب نحصل على

$\therefore\quad yH_n(y)=\frac{1}{2}H_{n+1}(y)+nH_{n-1}(y)$ وهو المطلوب

3. **Prove that:** $H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0$

**Solution:**

باستخدام المعادلة

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y) \qquad \text{(a)}$$

$$H_{n+1}'(y) = 2(n+1)H_n(y)$$

$$H_{n+1}'(y) = 2nH_n(y) + 2H_n(y) \qquad \text{(b)}$$

باخذ المشتقة الجزئية لطرفي المعادلة (a) ينتج

$$H_n''(y) = 2nH_{n-1}'(y) \qquad \text{(c)}$$

وباستخدام المعادلة

$$yH_n(y) = \tfrac{1}{2}H_{n+1}(y) + nH_{n-1}(y)$$

وباخذ المشتقة لطرفي المعادلة اعلاه بالنسبة لـ $y$

$$yH_n'(y) + H_n(y) = \tfrac{1}{2}H_{n+1}'(y) + nH_{n-1}'(y)$$

وبالتعويض عن b ، c في المعادلة اعلاه ينتج

$$yH_n'(y) + H_n(y) = \tfrac{1}{2}(2nH_n(y) + 2H_n(y)) + \frac{H_n''(y)}{2}$$

$$yH_n'(y) + H_n(y) = nH_n(y) + H_n(y) + \frac{H_n''(y)}{2}$$

نضرب في 2 ونرتب نحصل على

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0$$ وهو المطلوب

4. **Prove that:** $y\psi_n = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y)$

**Solution:**

$$\psi_n(y) = N_n H_n(y)\ e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة في $y$

$$y\ \psi_n(y) = N_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2}\ y\ H_n(y)$$

باستخدام المعادلة

$$yH_n(y) = nH_{n-1}(y) + \tfrac{1}{2}H_{n+1}(y)$$

$$y\ \psi_n(y) = N_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2}\left\{nH_{n-1}(y) + \tfrac{1}{2}H_{n+1}(y)\right\}$$

وبالتعويض عن قيمة $N_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$

$$y\ \psi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}\left\{\frac{nH_{n-1}(y)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} + \frac{H_{n+1}(y)}{2\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\right\}$$

$$y\ \psi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}\left\{\frac{nH_{n-1}(y)}{\sqrt{2n}\sqrt{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} + \frac{\sqrt{n+1}H_{n+1}(y)}{\sqrt{2}\sqrt{2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}}}\right\}$$

$\therefore\quad y\psi_n = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y)$ وهو المطلوب

5. **Prove that:** $$\frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y\psi_n(y) + \sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y)$$

**Solution:**

$$\psi_n(y) = N_n e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$$

باخذ المشتقة لطرفي المعادلة اعلاه بالنسبة لـ $y$

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy} = N_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2}(-y)H_n(y) + N_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n'(y)$$

$$= -yN_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + N_n\ e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n'(y)$$

باستخدام المعادلة

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y)$$

$$= -y\ N_n e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + 2nN_n e^{-\frac{1}{2}y^2} H_{n-1}(y)$$

وبالتعويض عن قيمة $N_n$

$$= -y\ \psi_n + \frac{2n\ e^{-\frac{y^2}{2}} H_{n-1}(y)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

$$= -y\ \psi_n + \frac{2n\ e^{-\frac{1}{2}y^2}\ H_{n-1}(y)}{\sqrt{2n}\sqrt{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}}$$

$$= -y\ \psi_n + \sqrt{2n}\ \ N_{n-1}\ e^{-\frac{y^2}{2}} H_{n-1}(y)$$

$$\therefore\ \ \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y\psi_n(y) + \sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y)$$ وهو المطلوب

6. **Prove that:** $\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$

**<u>Solution:</u>**

باستخدام المعادلة

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy}=-y\psi_n(y)+\sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y)$$

$$y\psi_n(y)+\frac{d\psi_n(y)}{dy}=\sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$$

$\therefore\quad \hat{a}\ \psi_n(y)=\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$ وهو المطلوب

يسمى المؤثر $\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$ بالمؤثر الخافض Destruction Operator ويرمز له بالرمز $\hat{a}$ اي ان

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$$

ويسمى المؤثر $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})$ بالمؤثر الرافع Creation Operator ويرمز له بالرمز $\hat{a}^+$ اي ان

$$\hat{a}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})$$

7. **Prove that:** $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}(y)$

or $\hat{a}^+\ \psi_n(y)=\sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}(y)$

**Solution:**

باستخدام المعادلات

$$y\psi_n=\sqrt{\tfrac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y)+\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y) \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy}=-y\psi_n(y)+\sqrt{2n}\ \psi_{n-1}(y) \qquad \text{(b)}$$

من معادلة (a)

$$\psi_{n-1}(y)=\sqrt{\tfrac{2}{n}}\left\{y\ \psi_n(y)-\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y)\right\} \qquad \text{(c)}$$

وبالتعويض عن قيمة c اي $\psi_{n-1}(y)$ في معادلة (b) ينتج

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy}=-y\psi_n(y)+\sqrt{2n}\left\{\sqrt{\tfrac{2}{n}}(y\psi_n(y)-\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(y))\right\}$$

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy}=-y\psi_n(y)+2y\psi_n(y)-2\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(y)$$

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy}=y\psi_n(y)-\sqrt{2}\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)$$

$$y\psi_n(y)-\frac{d\psi_n(y)}{dy}=\sqrt{2}\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)$$

$\therefore \quad \hat{a}^+\psi_n(y)=\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)$ وهو المطلوب

س / برهن ان القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة للمتذبذب التوافقي لحالة ذاتية للطاقة هي

$$< V(x) >= \tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$= \tfrac{1}{2} E_n$$

**Solution:**

باستخدام المعادلة

$$y\psi_n = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y) \qquad \text{(a)}$$

بضرب في $\psi_{n+1}(y)$ في طرفي المعادلة (a) ونكامل على الفضاء ينتج

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ \psi_{n-1}(y)\ dy + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\psi_{n+1}(y)\ dy$$

وبما ان دوال الموجة للمتذبذب التوافقي هي دوال متعامدة وعيارية اي ان

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ \psi_{n+1}(y)\ dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ \psi_{n-1}(y)\ dy = 0$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = \sqrt{\tfrac{n+1}{2}} \qquad \text{(b)}$$

وبضرب في $\psi_{n-1}(y)$ في طرفي المعادلة (a) ونكامل على الفضاء ينتج

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n-1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n-1}(y)\ \psi_{n-1}(y)\ dy + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n-1}(y)\psi_{n+1}(y)\ dy \qquad \therefore$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n-1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = \sqrt{\tfrac{n}{2}} \qquad \text{(c)}$$

القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة تساوي

$$< V(x) >= \tfrac{1}{2}m\omega^2 < x^2 >$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 < \frac{y^2}{\alpha^2} >$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\alpha^2}<y^2>$$

وبضرب طرفي المعادلة (a) في $y\ \psi_n(y)$ ونكامل على الفضاء ينتج

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ y^2\psi_n(y)\ dy=\sqrt{\tfrac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n-1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy+\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{n+1}(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy$$

وبالتعويض عن (b) ، (c) في المعادلة الاخيرة ينتج

$$<y^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ y^2\psi_n(y)\ dy=\sqrt{\tfrac{n}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{n}{2}}+\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{n+1}{2}}$$

$$<y^2>=\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}=n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad <V(x)>=\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\alpha^2}<y^2>$$

$$<V(x)>=\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\alpha^2}(n+\frac{1}{2})$$

$$\because\quad \alpha^2=\frac{m\omega}{\hbar}$$

$$<V(x)>=\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{m\omega}\hbar\ \ (n+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\hbar\omega\ (n+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}E_n$$ وهو المطلوب

تكاملات مفيدة: **اولا**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2}\,dx = 0 \qquad\qquad (n \text{ odd})$$

اذا كانت $n$ فردية فقيمة التكامل يساوي صفر

**Example:** 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\; e^{-ax^2}\,dx = 0$$

**Example**: 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-ax^2}\,dx = 0$$

**ثانيا**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وباخذ المشتقة لطرفي المعادلة اعلاه بالنسبة لـ (a) نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

وباجراء نفس العمل اي باخذ المشتقة لطرفي المعادلة اعلاه بالنسبة لـ (a) نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

**س9 :** برهن ان الدوال الموجية التالية هي دوال متعامدة وعيارية

$$\psi_0 = (\alpha^{\frac{1}{2}} / \pi^{\frac{1}{4}}) \ e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$\psi_1 = (\alpha^{\frac{1}{2}} / 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}) \ 2(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

لقد بينا في الفصل الثاني ان مجموعة من الدوال التي تحقق المعادلة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n d\tau = \delta_{mn}$$

تسمى مجموعة من الدوال العيارية المتعامدة Orthonormal Set of Function

$\delta_{mn} = 1 \quad$ at $\quad m = n$ تكون عيارية اذا

$\delta_{mn} = 0 \quad$ at $\quad m \neq n$ تكون متعامدة اذا

**<u>اولا</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \ \psi_1(x) \ dx = \frac{2\alpha^2}{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \ e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0$$

من الملاحظ ان الدالة فردية فقيمة التكامل يساوي صفر اذن الدوال متعامدة

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \ \psi_1(x) \ dx = 0$$

**<u>ثانيا</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \ \psi_0(x) \ dx = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} = 1$$

اذن الدوال عيارية

**<u>اخيرا</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\ \psi_1(x)\ dx = \frac{4\alpha^3}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\ \psi_1(x)\ dx = 1$$

اذن الدوال عيارية

وهو المطلوب

س **10:** جد $\Delta x \Delta p$ مستخدما $\psi_0(x)$ في السؤال التاسع

**<u>Solution:</u>**

التفاوت (Variance) في الموضع $\Delta x$ هو

$$(\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \left(<x^2> - <x>^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

التفاوت في الزخم $\Delta p_x$ هو

$$(\Delta p_x)^2 = <p_x^2> - <p_x>^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x = \left(<p_x^2> - <p_x>^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

اذن يجب عبينا ايجاد كل من $<x>^2$ ، $<x^2>$ ، $<p_x>^2$ ، $<p_x^2>$ وبعد ذلك ايجاد $\Delta x \Delta p$

**اولا ايجاد** $<x>$

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\ \hat{x}\ \psi_0(x)\ dx$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\, x\ dx$$
$$= 0$$

لان الدالة فردية فقيمة التكامل يساوي صفر

$$<x> = 0 \quad \Rightarrow \quad <x>^2 = 0$$

**ثانيا ايجاد** $<x^2>$

$$<x^2> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\ \hat{x}^2\ \psi_0(x)\ dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Delta x = \left(<x^2> - <x>^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}-0)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\alpha}$$

**ثالثا ايجاد** $< p_x >$

$$< p >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \;\; \hat{p}_x \;\psi_0(x) \;\; dx$$

بما ان $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \;\; \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \;\; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \;\; \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \;\; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} \;\; dx$$

$$=\frac{-i\hbar\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} \; \frac{\partial}{\partial x} \; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} \;\; dx$$

$$=\frac{-i\hbar\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} (-\alpha^2 x) \;\; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} \;\; dx$$

$$=\frac{i\hbar\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \; e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

لان الدالة فردية فقيمة التكامل يساوي صفر

$$\therefore \;\; < p_x >= 0 \qquad \Rightarrow \qquad < p_x >^2 = 0$$

**رابعا ايجاد** $< p_x^2 >$

$$< p_x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \;\; \hat{p}_x^2 \;\psi_0(x) \;\; dx$$

بما ان $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \;\; \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \;\; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} (-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \;\; \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \;\; e^{\frac{-\alpha^2 x^2}{2}} \;\; dx$$

$$=\frac{-\alpha\,\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\ dx$$

ايجاد $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\alpha^2x\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\right)$$

$$=-\alpha^2\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\right)$$

$$=-\alpha^2\left(e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}-\alpha^2x^2\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\right)$$

$$=-\alpha^2\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}+\alpha^4x^2\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}$$

$$\therefore\quad =\frac{-\alpha\,\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\left(-\alpha^2\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}+\alpha^4x^2\ e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}\right)\ dx$$

$$=\frac{\alpha^3\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}dx-\frac{\alpha^5\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}dx$$

$$=\frac{\alpha^3\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}-\frac{\alpha^5\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3}$$

$$=\alpha^2\hbar^2-\frac{1}{2}\alpha^2\hbar^2$$

` $$=\frac{1}{2}\alpha^2\hbar^2$$

$$\Delta p_x=\left(<p_x^2>-<p_x>^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\alpha^2\hbar^2-0\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\ \hbar$$

$$\Delta p_x\cdot\Delta x=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\ \hbar\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$\therefore\quad \Delta p_x\Delta x=\frac{1}{2}\hbar$ وهو المطلوب

**Q )** Using the uncertainty relation $\Delta p\Delta x \ge \frac{\hbar}{2}$ estimate the energy ground state of harmonic oscillator

استخدم مبدا الادقة $\Delta p\Delta x \ge \frac{\hbar}{2}$ خمن طاقة الحالة الارضية للمتذبذب التوافقي

**Solution:**

ان هاملتوني المتذبذب التوافقي هو (The Hamiltonian of H.O is)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

القيمة المتوقعة للطاقة هي (The expectation value of energy is)

$$\langle H\rangle = E = \frac{<p^2>}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}<x^2>$$

$$\because \quad (\Delta p)^2 = <p^2> - <p>^2 \qquad , \qquad (\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2$$

ويمكن اثبات بان للمتذبذب التوافقي $<p> = <x> = 0$ وكما يلي

**اولا ايجاد** $<x>$ (القيمة المتوقعة للموضع)

باستخدام المعادلة

$$y\psi_n(y) = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\ \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\ \psi_{n+1}(y)$$

بضرب المعادلة اعلاه في $\psi_n(y)$ ونكامل على الفضاء ينتج

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ \psi_{n-1}(y)\ dy + \sqrt{\tfrac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ \psi_{n+1}(y)\ dy$$

وبما ان دوال الموجة للمتذبذب التوافقي هي دوال متعامدة اذن

$$<y> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\ y\ \psi_n(y)\ dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad <y>^2 = 0$$

$$\therefore \ <x>^2 = 0$$

**ثانيا ايجاد** $<p>$ (القيمة المتوقعة للزخم)

$$<p> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \ \hat{p} \ \psi_n(y) \ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) \ \psi_n(y) \ dy$$

باستخدام المعادلة التالية لايجاد $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$

$$\frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y\psi_n(y) + \sqrt{2n} \ \psi_{n-1}(y)$$

$$<p> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y)(-i\hbar)\{-y\psi_n(y) + \sqrt{2n} \ \psi_{n-1}(y)\} \ dy$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \ y \ \psi_n(y) \ dy - i\hbar\sqrt{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \ \psi_{n-1}(y) \ dy$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad <p>^2 = 0$$

$$(\Delta p)^2 = <p^2> - 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta p)^2 = <p^2>$$

$$(\Delta x)^2 = <x^2> - 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = <x^2>$$

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$\therefore \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$$

$$E = \frac{<p^2>}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} <x^2>$$

بتعويض عن $<x^2>$ ، $<p^2>$

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2$$

لدينا $(\Delta p)^2 = \dfrac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$ وبالتعويض بالمعادلة اعلاه ينتج

$$E = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2$$

ولايجاد اقل قيمة للطاقة نفاضل العلاقة الاخيرة وجعلها تساوي صفر

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2(\Delta x) = 0$$

$$\therefore \quad (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

وبالتعويض عن $(\Delta x)^2$ لايجاد الطاقة

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\cdot(\Delta x)^2} + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{8m\cdot\left(\dfrac{\hbar}{2m\omega}\right)} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$ وهو المطلوب

س / برهن اذا كانت $n$ زوجية فان $H_n(-y)=H_n(y)$ واذا كانت $n$ فردية فان $H_n(-y)=-H_n(y)$

**البرهان**

باستخدام المعادلة

$$H_n(y)=(-)^2 e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$$

When $n$ even =2

$$H_2(y)=(-)^2 e^{y^2}\frac{d^2}{dy^2}e^{-y^2}$$

$$=e^{y^2}\frac{d}{dy}(\frac{d}{dy}e^{-y^2})$$

$$=e^{y^2}\frac{d}{dy}(-2y\ e^{-y^2})$$

$$=e^{y^2}\{(-2y)\cdot(-2y)e^{-y^2}-2e^{-y^2})\}$$

$$=4y^2-2$$

$$H_2(-y)=4(-y)^2-2=4y^2-2=H_2(y)$$

$$\therefore H_n(-y)=H_n(y)$$

When $n$ odd=1

$$H_1(y)=(-)^1 e^{y^2}\frac{d}{dy}e^{-y^2}=-e^{y^2}(-2ye^{-y^2})=2y$$

$$H_1(-y)=2(-y)=-2y=-H_1(y)$$

$\therefore$ وهو المطلوب dod $n$ When $H_n(-y)=-H_n(y)$

**Q)** Verify the operator equation

1. $(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)=\frac{d^2}{dy^2}-y^2+1$

2. $(\frac{d}{dy}+y)(\frac{d}{dy}-y)=\frac{d^2}{dy^2}-y^2-1$ ***H.W*** واجب بيتي

**Solution:**

**1)** $$(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)\ \psi_n(y)$$

$$=(\frac{d}{dy}-y)\{(\frac{d}{dy}+y)\ \psi_n(y)\}$$

$$=(\frac{d}{dy}-y)\{\frac{d\psi_n(y)}{dy}+y\psi_n(y)\}$$

$$=\frac{d}{dy}\{\frac{d\psi_n(y)}{dy}+y\psi_n(y)\}-y\{\frac{d\psi_n(y)}{dy}+y\psi_n(y)\}$$

$$=\frac{d^2\psi_n(y)}{dy^2}+\frac{d}{dy}y\psi_n(y)-y\frac{d\psi_n(y)}{dy}-y^2\psi_n(y)$$

$$=\frac{d^2\psi_n(y)}{dy^2}+\psi_n(y)+y\frac{d\psi_n(y)}{dy}-y\frac{d\psi_n(y)}{dy}-y^2\psi_n(y)$$

$$\frac{d^2\psi_n(y)}{dy^2}-y^2\psi_n(y)+\psi_n(y)=(\frac{d^2}{dy^2}-y^2+1)\ \psi_n(y)$$

Since $\psi(y)$ is an arbitrary function of $y$, so we can write the operator equation as:

$$(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)=\frac{d^2}{dy^2}-y^2+1$$ وهو المطلوب

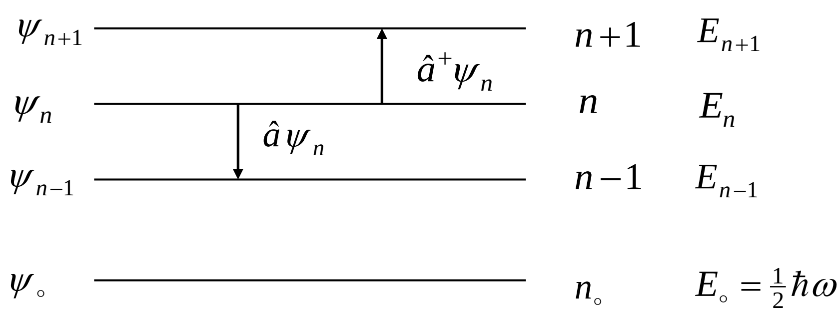
## Creation and destruction operator المؤثرات الرافعة والخافضة

From the following equation

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$ (1)

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})\ \psi_n(y)=\sqrt{n+}\ \psi_{n+1}(y)$ (2)

One can see that the effect of the operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$ on the function $\psi_n(y)$ it will turn it to the wave function that describe the first lower state on the state $(n)$ ; while the effect of the $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})$ on same function $\psi_n(y)$ is to turn it to the wave function that describe the first upper state of the state $(n)$ ; for these reasons the operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$ is called destruction operator and the operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\frac{d}{dy})$ is called creation operator and denoted by $\hat{a}$ and $\hat{a}^+$ respectively



**Prove that:**

1. $\hat{a} = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} + i\hat{p}_x)$ (3)

2. $\hat{a}^+ = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} - i\hat{p}_x)$ (4)

3. $\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = 1$ (5)

4. $\left.\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2}) \\ \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{a}\ \hat{a}^+ - \tfrac{1}{2}) \end{aligned}\right\}$ (6)

5. $\hat{x} = \left(\dfrac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$ (7)

6. $\hat{p}_x = -i\left(\dfrac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+)$ (8)

7. $\left[\hat{a}\ ,\ \hat{H}\right] = \hbar\omega\hat{a}$ (9)

8. $\left[\hat{a}^+, \hat{H}\right] = -\hbar\omega\hat{a}^+$ (10)

**1)** Prove that $\hat{a}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\hat{x}+i\hat{p}_x)$

**<u>Solution:</u>**

باستخدام المعادلة

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$$

$$\because\quad y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\quad ,\quad \frac{d}{dy}=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}$$

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}+\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx})$$

$$\hat{a}=(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx})$$

$$p_x=-i\hbar\frac{d}{dx}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{d}{dx}=\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x$$

$$=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x)$$

$$=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}+i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\ \hbar}}\hat{p}_x$$

$$=\frac{m\omega\ \hat{x}+i\hat{p}_x}{(2m\omega\hbar)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore\quad \hat{a}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x}+i\hat{p}_x)$$ وهو المطلوب

**2)** Prove that $\hat{a}^{+} = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} - i\hat{p}_x)$

**Solution:**

باستخدام المعادلة

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \frac{d}{dy})$$

$$\because \quad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad , \quad \frac{d}{dy} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}$$

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx})$$

$$\hat{a}^{+} = (\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx})$$

$$\because \quad p_x = -i\hbar\frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\ \hbar}}\hat{p}_x$$

$$= \frac{m\omega\ \hat{x} - i\hat{p}_x}{(2m\omega\ \hbar)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \hat{a} = (2m\omega\hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}_x)$$ وهو المطلوب

**Prove that:** $\hat{H} = (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega$

**Solution:**

$$\because \quad \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\hat{x}^2$$

باستخدام المعادلات

$$\hat{a} = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} + i\hat{p}_x)$$

$$\hat{a}^+ = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} - i\hat{p}_x)$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2m\omega\hbar}(m^2\omega^2\hat{x}^2 - im\omega\hat{x}\hat{p} - im\omega\hat{p}\hat{x} + p^2)$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x}^2}{2\hbar} + \frac{i\hat{x}\hat{p}}{2\hbar} - \frac{i\hat{p}\hat{x}}{2\hbar} + \frac{p^2}{2\hbar m\omega}$$

نضرب طرفي المعادلة في $\hbar\omega$

$$\hat{a}^+\hat{a}\hbar\omega = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \frac{i\omega}{2}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) + \frac{p^2}{2m}$$

وبما اثبتنا سابقا بان $[\hat{x}, \hat{p}_x] = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) = i\hbar$

$$\hat{a}^+\hat{a}\hbar\omega = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{p^2}{2m}$$

$$\hat{a}^+\hat{a}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \frac{p^2}{2m}$$

$\therefore \quad (\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega = \hat{H}$ وهو المطلوب

وبنفس الطريقة يمكن ان نبرهن على ان $(\hat{a}\ \hat{a}^+ - \frac{1}{2})\hbar\omega = \hat{H}$

**Prove that:** $\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right]=1$

**Solution:**

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right]=\hat{a}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\psi$

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right]\psi_n=(\hat{a}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a})\psi_n$$

$$=\hat{a}\hat{a}^{+}\psi_n-\hat{a}^{+}\hat{a}\psi_n$$

$$=\sqrt{n+1}\hat{a}\psi_{n+1}-\sqrt{n}\hat{a}^{+}\psi_{n-1}$$

$$=\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\ \psi_n-\sqrt{n}\sqrt{n}\ \psi_n$$

$$=(n+1-n)\ \psi_n$$

$$=\psi_n$$

$\therefore$ $\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right]=1$ وهو المطلوب

**Prove that:** $\hat{x}=\left(\dfrac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}+\hat{a}^{+})$

باستخدام المعادلات

$$\hat{a}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x}+i\hat{p}_x)$$

$$\hat{a}^{+}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x}-i\hat{p}_x)$$

بالجمع ينتج

$$\hat{a}+\hat{a}^{+}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x}+i\hat{p}_x+m\omega\ \hat{x}-i\hat{p}_x)$$

$$\hat{a}+\hat{a}^{+}=(2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(2m\omega\ \hat{x})$$

بالضرب في $(2m\omega\hbar)^{\frac{1}{2}}$

$$(\hat{a}+\hat{a}^{+})(2m\omega\ \hbar)^{\frac{1}{2}}=2m\omega\ \hat{x}$$

$$\hat{x}=\frac{(2m\omega\ \hbar)^{\frac{1}{2}}}{2m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^{+})$$

$$\therefore\quad \hat{x}=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}+\hat{a}^{+})$$ وهو المطلوب

**Prove that:** $\hat{p}_x = -i\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^+)$

باستخدام المعادلات

$$\hat{a} = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} + i\hat{p}_x)$$

$$\underline{\hat{a}^+ = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} - i\hat{p}_x)}$$

بالطرح ينتج

$$\hat{a} - \hat{a}^+ = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(m\omega\ \hat{x} + i\hat{p}_x - m\omega\ \hat{x} + i\hat{p}_x)$$

$$\hat{a} - \hat{a}^+ = (2m\omega\ \hbar)^{-\frac{1}{2}}(2i\hat{p}_x)$$

بالضرب في $(2m\omega\ \hbar)^{\frac{1}{2}}$ ينتج

$$\therefore \quad \hat{p}_x = -i\left(\frac{m\omega\ \hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^+)$$

وهو المطلوب

**Prove that:** $\left[\hat{a}\ ,\ \hat{H}\right] = \hbar\omega\ \hat{a}$

**Solution:**

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{H}\right] = (\hat{a}\hat{H} - \hat{H}\hat{a})$$

باستخدام المعادلة

$$\hat{H} = (\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{H}\right] = \hat{a}\ (\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega - (\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega\ \hat{a}$$

$$= \hat{a}\ \hat{a}^{+}\hat{a}\ \hbar\omega + \tfrac{1}{2}\hat{a}\ \hbar\omega - \hat{a}^{+}\hat{a}\ \hat{a}\ \hbar\omega - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\ \hat{a}$$

$$= \hat{a}\ \hat{a}^{+}\hat{a}\ \hbar\omega - \hat{a}^{+}\hat{a}\ \hat{a}\ \hbar\omega$$

$$= (\hat{a}\ \hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a})\hbar\omega\ \hat{a}$$

$$\because \quad (\hat{a}\ \hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}) = \left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right] = 1$$

$$\therefore \quad \left[\hat{a}\ ,\ \hat{H}\right] = \hbar\omega\ \hat{a}$$ وهو المطلوب

## 2) المعالجة بطريقة المؤثرات **Operator Treatment**

من معادلة (2)

$$\frac{d^2\psi_n}{dy^2}+(\varepsilon_n-y^2)\psi_n=0$$

$$\frac{d^2\psi_n(y)}{dy^2}-y^2\psi_n(y)=-\varepsilon_n\psi_n(y)$$

$$(\frac{d^2}{dy^2}-y^2)\ \psi_n(y)=-\varepsilon_n\psi_n(y)$$

$$\because \quad (\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)=\frac{d^2}{dy^2}-y^2+1$$

$$\frac{d^2}{dy^2}-y^2=(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)-1$$

$$\left[(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)-1\right]\ \psi_n(y)=-\varepsilon\psi_n(y)$$

$$\because \quad \varepsilon=\frac{2E_n}{\hbar\omega}$$

$$\left[(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)-1\right]\ \psi_n(y)=\frac{-2E_n}{\hbar\omega}\psi_n(y)$$

نضرب طرفي المعادلة في $\frac{\hbar\omega}{2}$

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left[(\frac{d}{dy}-y)(\frac{d}{dy}+y)-1\right]\ \psi_n(y)=-E_n\psi_n(y)$$

$$2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$\hbar\omega\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dy}-y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dy}+y)-\frac{1}{2}\right]\ \psi_n(y)=-E_n\psi_n(y)$$

$$\because \quad \hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+\frac{d}{dy})$$

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \frac{d}{dy}) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^{+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dy} - y)$$

$$\hbar\omega\ (-\hat{a}^{+}\hat{a} - \frac{1}{2})\ \psi_n(y) = -E_n\psi_n(y)$$

نضرب في -1

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2})\ \psi_n(y) = E_n\psi_n(y) \qquad (11)$$

باستخدام المتطابقة

$$[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}] = 1 \quad \Rightarrow \quad (\hat{a}\ \hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}) = 1$$

$$\hbar\omega\{(\hat{a}\ \hat{a}^{+} - 1) + \frac{1}{2}\}\ \psi_n(y) = E_n\psi_n(y)$$

نضرب المعادلة $\hat{a}^{+}$ من اليسار

$$\hbar\omega\ \hat{a}^{+}\{(\hat{a}\ \hat{a}^{+} - 1) + \frac{1}{2}\}\ \psi_n(y) = E_n\ \hat{a}^{+}\psi_n(y)$$

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a}\ \hat{a}^{+} - \frac{1}{2}\hat{a}^{+})\ \psi_n(y) = E_n\ \hat{a}^{+}\psi_n(y)$$

وباخراج $\hat{a}^{+}$ من القوس من اليمين

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a} - \frac{1}{2})\ \hat{a}^{+}\psi_n(y) = E_n\ \hat{a}^{+}\psi_n(y)$$

نضيف ونطرح 1 للقوس $(\hat{a}^{+}\hat{a} - \frac{1}{2})$ فتصبح

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a} - \frac{1}{2} + 1 - 1)\ \hat{a}^{+}\psi_n(y) = E_n\ \hat{a}^{+}\psi_n(y)$$

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2} - 1)\ \hat{a}^{+}\psi_n(y) = E_n\ \hat{a}^{+}\psi_n(y)$$

بالترتيب

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}^+\psi_n(y)-\hbar\omega\ \hat{a}^+\psi_n(y)=E_n\ \hat{a}^+\psi_n(y)$$

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}^+\psi_n(y)=E_n\ \hat{a}^+\psi_n(y)+\hbar\omega\ \hat{a}^+\psi_n(y)$$

$$\hbar\omega\ (\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}^+\psi_n(y)=(E_n+\hbar\omega)\ \hat{a}^+\psi_n(y)$$

$$\because\quad \hat{H}=\hbar\omega\ (\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})$$

$$\therefore\quad \hat{H}\ \hat{a}^+\psi_n(y)=(E_n+\hbar\omega)\ \hat{a}^+\psi_n(y) \qquad (\blacklozenge)$$

نفرض ان $\hat{a}^+\psi_n(y)=\phi_m$

$$\hat{H}\ \phi_m=(E_n+\hbar\omega)\ \phi_m \qquad n\neq m \qquad (12)$$

هذه هي معادلة شرودنكر ولكن بصيغة اخرى وهي تنص على ان دالة الموجة $\psi_n$ اذا كانت دالة ذاتية للمؤثر الهملتوني بقيمة ذاتية $E_n$ فان $\phi_m=\hat{a}^+\psi_n$ هي دالة جديدة للمؤثر $\hat{H}$ وبقيمة ذاتية مقدارها $(E_n+\hbar\omega)$ وباستخدام الرمز $E_{n+1}=E_n+\hbar\omega$ وذلك لان $\hbar\omega$ هو فرق الطاقة بين اي مستويين كميين متتالين اذا فان $E_n$ هو مقدار الطاقة في المستوى $n$، $E_n+\hbar\omega$ هو مقدار الطاقة في المستوى $n+1$

من تعريف المؤثر الرافع

$$\hat{a}^+\psi_n(y)=\sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}(y)$$

وبالتعويض بالمعادلة $(\blacklozenge)$

$$\hat{H}\ \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)=E_{n+1}\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(y)$$

$$\hat{H}\ \psi_{n+1}(y)=E_{n+1}\psi_{n+1}(y) \quad ,\quad n=0,1,2,3\cdots \qquad (13)$$

وبنفس الطريقة لو ضربنا المعادلة (11) بالمؤثر الخافض $\hat{a}$

$$\hbar\omega\ (\hat{a}\ \hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a})\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)$$

باستخدام العلاقة

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}\right]=(\hat{a}\ \hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a})=1$$

$$\hat{a}\ \hat{a}^{+}=1+\hat{a}^{+}\hat{a}$$

$$\hbar\omega\{(\hat{a}^{+}\hat{a}+1)\ \hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a}\}\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)$$

وباخراج $\hat{a}$ من يمين القوس

$$\hbar\omega\{\hat{a}^{+}\hat{a}+1+\frac{1}{2}\}\hat{a}\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)$$

$$\hbar\omega\{(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})+1\}\hat{a}\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)+\hbar\omega\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)=E_{n}\hat{a}\psi_{n}(y)-\hbar\omega\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)=(E_{n}-\hbar\omega)\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)$$

باستخدام العلاقة

$$\hat{H}=\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2})$$

$$\hat{H}\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)=(E_{n}-\hbar\omega)\ \hat{a}\ \psi_{n}(y)$$

تعريف المؤثر الخافض

$$\because \quad \hat{a}\psi_n(y) = \sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$$

بالتعويض

$$\therefore \ \hat{H}\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y) = (E_n - \hbar\omega)\sqrt{n}\ \psi_{n-1}(y)$$

$$\hat{H}\ \psi_{n-1}(y) = (E_n - \hbar\omega)\ \psi_{n-1}(y)$$

وبما ان $\hbar\omega$ هو الفرق بين اي مستويين كميين متتاليين فان

$$E_n - \hbar\omega = E_{n-1}$$

$$\therefore \quad \hat{H}\ \psi_{n-1}(y) = E_{n-1}\ \psi_{n-1}(y) \qquad (14)$$

وهي معادلة شرودنكر للحالة الكمية $(n-1)$

وبما ان $E_\circ$ هي اوطا مستوى طاقة للمتذبذب التوافقي الموصوف بدالة الموجة $\psi_\circ$

$$\hat{H}\ \hat{a}\ \psi_\circ = (E_\circ - \hbar\omega)\ \hat{a}\ \psi_\circ$$

وبما ان لاتوجد قيمة ذاتية لمؤثر الطاقة اقل من المستوي الارضي لذا وجب ان يكون $\hat{a}\ \psi_\circ = 0$

$$\hat{H}\psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^+\underbrace{\hat{a}\ \psi_\circ}_{=0} + \frac{1}{2}\psi_\circ) = E_\circ\psi_\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2}\hbar\omega\ \psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$$

$$\therefore \quad E_\circ = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$\because \quad E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$$

$$E_1 = E_\circ + \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

$$E_2 = E_1 + \hbar\omega = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

$$\therefore \quad E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

$$\hat{a}\ \psi_\circ = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(y + \frac{d}{dy})\ \psi_\circ = 0$$

$$y\psi_\circ + \frac{d}{dy}\psi_\circ = 0$$

$$\frac{d\psi_\circ}{dy} = -y\psi_\circ$$

$$\int_{\psi_\circ}^{\psi_n} \frac{d\psi_\circ}{\psi_\circ} = -\int_0^y y\ dy$$

$$\ln\frac{\psi_n}{\psi_\circ} = -\frac{y^2}{2}$$

$$\psi_n(y) = \psi_\circ(y)\ e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

يمكن ايجاد $\psi_\circ$ باستخدام شرط المعايرة

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*\psi_n\ dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\circ e^{-\frac{1}{2}y^2}\psi_\circ e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = 1$$

$$\psi_\circ^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy = 1$$

$$\psi_\circ^2\sqrt{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Q ) Consider a simple harmonic oscillator **a)** compute expectation values $<x>$ , $<x^2>$ , $<p>$ , $<p^2>$ **b)** find $\Delta p \Delta x$ **c)** find $<V(x)>$ , $<T>$ , $<E>$

**Solution:**

في هذه المسالة سوف نستخدم المؤثرات $\hat{a}$ ، $\hat{a}^+$

**اولا ايجاد** $<x>$

باستخدام المعادلة $$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$$

القيمة المتوقعة للموضع $$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \ \hat{x} \ \psi_n \ dx$$

وبما ان للمتذبذب التوافقي $\psi_n^* = \psi_n$

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \ (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \ \psi_n \ dx$$

$$<x> = (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \ \hat{a} \ \psi_n \ dx + (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \ \hat{a}^+ \psi_n \ dx$$

وباستخدام المعادلات

$$\hat{a}\psi_n(y) = \sqrt{n} \ \psi_{n-1}(y)$$

$$\hat{a}^+\psi_n(y) = \sqrt{n+1} \ \psi_{n+1}(y)$$

$$= (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n} \ \psi_{n-1} \ dx + (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n+1} \ \psi_{n+1} \ dx$$

$$= (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \ \psi_{n-1} \ dx + (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \ \psi_{n+1} \ dx$$

وبما ان دوال الموجة للمتذبذب التوافقي هي دوال متعامدة وعيارية

$$\therefore \quad <\hat{x}> = 0 \quad \Rightarrow \quad <\hat{x}>^2 = 0$$

ثانيا ايجاد $< x^2 >$

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}\ \hat{a} + \hat{a}\ \hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+)$$

$$< \hat{x}^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(\hat{a}\,\hat{a} + \hat{a}\,\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+)\psi_n dx$$

$$< \hat{x}^2 >= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\hat{a}\ \hat{a}\ \psi_n dx + \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\hat{a}\ \hat{a}^+\psi_n dx$$

$$+\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\hat{a}^+\hat{a}\ \psi_n\ dx + \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\ \hat{a}^+\hat{a}^+\psi_n dx$$

$$\hat{a}\ \hat{a}\ \psi_n = \hat{a}(\hat{a}\ \psi_n) = \hat{a}\ \sqrt{n}\ \psi_{n-1}$$

$$= \sqrt{n}\ \hat{a}\ \psi_{n-1}$$

$$= \sqrt{n}\ \sqrt{n-1}\ \psi_{n-2} \qquad \text{(i)}$$

$$\hat{a}\ \hat{a}^+\psi_n = \hat{a}(\hat{a}^+\psi_n) = \hat{a}\ \sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}$$

$$= \sqrt{n+1}\ \hat{a}\ \psi_{n+1}$$

$$= \sqrt{n+1}\ \sqrt{n+1}\ \psi_n$$

$$= (n+1)\ \psi_n \qquad \text{(ii)}$$

$$\hat{a}^+\hat{a}\ \psi_n = \hat{a}^+(\hat{a}\ \psi_n) = \hat{a}^+\sqrt{n}\ \psi_{n-1}$$

$$= \sqrt{n}\ \hat{a}^+\psi_{n-1}$$

$$= \sqrt{n}\ \sqrt{n}\ \psi_n$$

$$= n\ \psi_n \qquad \text{(iii)}$$

$$\hat{a}^+\hat{a}^+\psi_n = \hat{a}^+(\hat{a}^+\psi_n) = \hat{a}^+\sqrt{n+1}\ \psi_{n+1}$$

$$= \sqrt{n+1}\ \hat{a}^+\psi_{n+1}$$

$$= \sqrt{n+1}\ \sqrt{n+2}\ \psi_{n+2} \qquad \text{(iv)}$$

بتعويض كل من i ، ii ، iii ، iv في المعادلة اعلاه ينتج

$$< \hat{x}^2 >= (\frac{\hbar}{2m\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n}\sqrt{n-1}\ \psi_{n-2}\ dx + (\frac{\hbar}{2m\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n (n+1)\ \psi_n\ dx$$

$$+ (\frac{\hbar}{2m\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n n\ \psi_n dx + (\frac{\hbar}{2m\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\ \psi_{n+2}\ dx$$

$$< \hat{x}^2 >= (\frac{\hbar}{2m\omega})(n+1) + (\frac{\hbar}{2m\omega})\ n$$

$$< \hat{x}^2 >= (\frac{\hbar}{2m\omega})(n+1+n)$$

$$< \hat{x}^2 >= (\frac{\hbar}{2m\omega})(2n+1)$$

$$< \hat{x}^2 >= \frac{\hbar}{m\omega}\ (n+\frac{1}{2})$$

**ثالثا ايجاد** $< p >$ (القيمة المتوقعة للزخم)

باستخدام العلاقة

$$\hat{p} = -i\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$< \hat{p} >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\ (-i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}}\ (\hat{a} - \hat{a}^+))\psi_n\ dx$$

$$= -i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\ \hat{a}\,\psi_n\ dx + i(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\ \hat{a}^+\psi_n\ dx$$

$$= -i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\ dx + i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}\ dx$$

$$= -i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\,\psi_{n-1}\ dx + i\,(\frac{m\omega\hbar}{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\,\psi_{n+1}\ dx$$

$$\therefore \quad <\hat{p}>=0 \quad \Rightarrow \quad <\hat{p}>^2=0$$

رابعا ايجاد $<\hat{p}^2>$

$$\hat{p}=-i\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^+)$$

$$\hat{p}^2=-(\frac{m\omega\hbar}{2})(\hat{a}\,\hat{a}+\hat{a}\,\hat{a}^+ +\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}^+\hat{a}^+)$$

$$<\hat{p}^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\ \hat{p}^2\psi_n\ dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,(-\frac{m\omega\hbar}{2})(\hat{a}\,\hat{a}-\hat{a}\,\hat{a}^+ -\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}^+\hat{a}^+)\psi_n\,dx$$

$$<\hat{p}^2>=-\,(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\hat{a}\,\hat{a}\psi_n\,dx+(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\hat{a}\,\hat{a}^+\psi_n\,dx$$

$$+(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,\hat{a}^+\hat{a}\psi_n\,dx-(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,\hat{a}^+\hat{a}^+\psi_n\,dx$$

بتعويض كل من i ، ii ، iii ، iv في المعادلة اعلاه ينتج

$$<\hat{p}^2>=-\,(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_{n-2}\ dx+(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,(n+1)\psi_n\ dx$$

$$+(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,n\,\psi_n\,dx-(\frac{m\omega\hbar}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\,\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\psi_{n+2}\ dx$$

$$<\hat{p}^2>=(\frac{m\omega\hbar}{2})(n+1)+(\frac{m\omega\hbar}{2})n$$

$$=(\frac{m\omega\hbar}{2})(n+1+n)$$

$$=(\frac{m\omega\hbar}{2})(2n+1)$$

$$\therefore \quad <\hat{p}^2>=m\omega\hbar(n+\frac{1}{2})$$ وهو المطلوب

**b)** $\Delta p\, \Delta x$

$$(\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2$$

$$(\Delta x)^2 = <x^2> - 0$$

$$<x^2> = \frac{\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2})$$

$$\therefore \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\ (n+\frac{1}{2})}$$

$$(\Delta p)^2 = <p^2> - <p>^2$$

$$(\Delta p)^2 = <p^2> - 0$$

$$= <\hat{p}^2> = m\omega\hbar(n+\frac{1}{2})$$

$$\therefore \quad \Delta p = \sqrt{m\omega\hbar(n+\frac{1}{2})}$$

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{m\omega\hbar(n+\frac{1}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\ (n+\frac{1}{2})}$$

$$\therefore \quad \Delta p\, \Delta x = (n+\frac{1}{2})\hbar$$

c) ايجاد القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة $<V(x)>$ (راجع ص 21 )

$$<V(x)> = \frac{1}{2}m\omega^2 <x^2>$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \frac{\hbar}{m\omega}\ (n+\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\ (n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}E_n$$

ايجاد القيمة المتوقعة للطاقة الحركية

$$<T> = \frac{<p^2>}{2m} = \frac{m\omega\hbar(n+\frac{1}{2})}{2m}$$

$$=\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

$$=\frac{1}{2}E_n$$

$$<E>=<T>+<V>=\frac{1}{2}E_n+\frac{1}{2}E_n=E_n=(n+\frac{1}{2})\ \hbar\omega$$

**Q )** By using operator treatment procedure, derive the energy levels for the harmonic oscillator. **Hint**: start from the formula $\{\hbar\omega\ (\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})\ \psi_n(y)=E_n\psi_n(y)\}$.

**Solution:**

$$\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2})\ \psi_n=E_n\psi_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a}^{+})\,\psi_n=E_n\,\hat{a}^{+}\psi_n$$

$$\because\ [\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{+}]=1 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{a}^{+}\hat{a}=\hat{a}\hat{a}^{+}-1$$

$$\therefore\ \hbar\omega\,\{\hat{a}^{+}(\hat{a}\hat{a}^{+}-1)+\frac{1}{2}\hat{a}^{+}\}\psi_n=E_n\,\hat{a}^{+}\psi_n$$

$$\hbar\omega\,\{\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}+\frac{1}{2}\hat{a}^{+}\}\psi_n=E_n\,\hat{a}^{+}\psi_n$$

$$\hbar\omega\,\{\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a}^{+}\}(\hat{a}^{+}\psi_n)=(E_n+\hbar\omega)(\hat{a}^{+}\psi_n)$$

$$\hat{H}(\hat{a}^{+}\psi_n)=(E_n+\hbar\omega)(\hat{a}^{+}\psi_n)$$

$$\because\ \hat{a}^{+}\psi_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} \qquad \text{and} \qquad E_n+\hbar\omega=E_{n+1}$$

$$\therefore\ \hat{H}\psi_{n+1}=E_{n+1}\psi_{n+1}$$

By multiplying equation (a) by $\hat{a}$ instead $\hat{a}^{+}$ and using a similar procedure one may gate

$$\hat{H}\psi_{n-1}=E_{n-1}\psi_{n-1}$$

So $\hat{H}\,\hat{a}\psi_\circ = (E_\circ - \hbar\omega)\,\hat{a}\psi_\circ$

$\therefore \quad \hat{a}\psi_\circ = 0$

Then $\hat{H}\psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$

$$\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\,\psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}\,\psi_\circ = E_\circ\psi_\circ$$

$$\therefore \ \frac{\hbar\omega}{2} = E_\circ$$

$$\because \quad E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$$

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega,\ E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega,\quad E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega\ , ........$$

$$\therefore \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$