جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 10

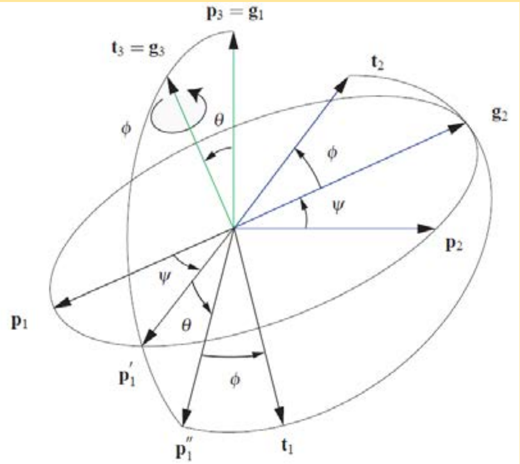
الحركة الدورانية للأجسام الصلبة

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

مقدمة عامة

- ينظر للجسم الصلب على أنه مجموعة كبيرة N من الجسيمات التي تكون جسما لا يتغير شكله.
- المسافة بين أي مكونين للجسم الصلب ثابتة لا تتغير كذلك
- لو قارنا نظاما عاما يتكون من N من الجسيمات ولكنه غير صلب فيلزما عدد 3N من الأحداثيات أي 3 أحداثيات لكل جسيم حتى يتم وصف النظام بشكل كامل.
- أما عندما يكون هذا النظام هو جسم صلب فكل ما يلزم هو 6 أحداثيات فقط، منها ثلاثة أحداثيات لوصف موقع مركز ثقله CM وثلاثة أخرى لوصف حركات الدوران للجسم حول ذلك المركز.
- من ناحية ثانية: تقسم حركة الجسم الصلب إلى قسمين رئيسيين: الحركة الانتقالية لمركز الثقل translational motion of the center of mass والدوران حول ذلك المركز rotation of the body around the CM
- في هذا الباب سوف نتوسع في مفهوم حركة الجسم الصب والتي بدأناها في الباب رقم 8 السابق



10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- نتصور جسما صلبا يتكون من N من الجسيمات نرمز لها بالرموز $\alpha = 1,\ldots, N$ كتلة كل منها هي m_α وموقعه هو $\mathbf{r}_\alpha$ بالنسبة لنقطة الأصل.

- أذن كما سبق نعرف مركز الكتلة (الثقل) كما يلي بالصيغتين الجمع والتكامل:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \qquad or \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm \qquad (1)$$

- حيث ترمز M إلى الكتلة الكلية.

- وعلى ذلك فيعبر عن الاندفاع الكلي للنظام كما يلي:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = M\dot{\mathbf{R}} \qquad (2)$$

- أي أن الاندفاع الكلي لنظام من الأجسام هو نفسه لجسم واحد من حيث الشكل باعتبار أن سرعة النظام تختزل في سرعة مركز الكتلة.

- معادلة (2) لو تم تفاضلها بالنسبة للزمن نحصل على القوة الخارجية المؤثرة:

$$\mathbf{F}^{ext} = M\ddot{\mathbf{R}} \qquad (3)$$

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- الاندفاع الزاوي الكلي للنظام ينظر إليه بنفس الطريقه. لو اعتبرنا أن مركز الكتلة عند $\mathbf{R}$ والجسيم α عند $\mathbf{r}_\alpha$ فأن ذلك الجسم بالنسبة لمركز الكتلة يوجد عند $\mathbf{r}'_\alpha$

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha \tag{4}$$

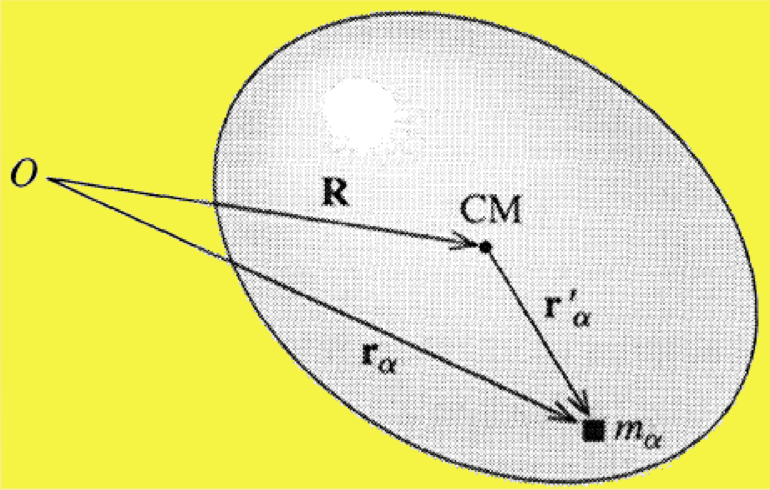
$$\therefore \ell_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \tag{5}$$

total angular momentum:

$$\mathbf{L} = \sum \ell_\alpha = \sum \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \tag{6}$$

- لو قمنا باستخدما (4) في معادلة (6) نحصل على 4 حدود كما يلي:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \tag{7}$$



- الشكل المجاور يبين موقع مركز ثقل الجسم الصلب بالنسبة لنقطة الأصل وكذلك موقع جسيم تم اختياره m_α وموقعه سواء بالنسبة لنقطة الأصل أو نسبة لمركز الكتلة

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- في المعادلة (7) نقوم بعزل الحدود التي لا تعتمد على α مع الأخذ بالاعتبار أن $\sum m_\alpha = M$:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum \mathbf{R}\times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{R}\times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \\ &= \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\sum m_\alpha + \mathbf{R}\times\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \left(\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha\right)\times\dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \\ &= \mathbf{R}\times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R}\times\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \left(\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha\right)\times\dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (8)\end{aligned}$$

- في المعادلة (8) يمكن بسهولة أثبات أن الحد الثالث = 0 (بالتعويض من معادلة 4 السابقة عن $\mathbf{r}'_\alpha$) حيث تحصل على حدين، وبالقسمة على M نحصل على حدين متساويين فيلغي بعضهما بعضا.

$$\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha = 0 \qquad (9)$$

- بنفس الطريقة واستخدام نفس التعويض عندما نفاضل الحد الثاني فنحصل على صفر أيضا. أذن يتبقى لدينا ما يلي:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\times\mathbf{P} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (10)$$

- حيث يمثل الحد الأول الاندفاع الزاوي الكلية لمركز الثقل بالنسبة لنقطة الأصل، في حيث يمثل الحد الثاني الاندفاع الزاوي الكلي للحركة بالنسبة لمركز الثقل نفسه.

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- يمكن أعادة كتابة المعادلة (10) بشكل أوضح كما يلي:

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}(\text{motion of CM})+\mathbf{L}(\text{motion relative to CM}) \qquad (11)$$

- لو طبقنا هذه العلاقة على كوكب يدور حول الشمس فنحصل على حدين هما: الحد الأول يمثل الاندفاع المرتبط بالحركة المدارية لمركز الكتلة حول الشمس، والحد الثاني الاندفاع الزاوي للكوكب بسبب دورانهحول مركز كتلته، أي أن:

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}_{orb}+\mathbf{L}_{spin} \qquad (12)$$

- بالنسبة للطاقة الحركية لنظام جسم صلب: نعبر عن الطاقة الحركية الكلية للنظام كما يلي:

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 \qquad (13)$$

$$(4)\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2=\left(\dot{\mathbf{R}}+\dot{\mathbf{r}}'_\alpha\right)^2=\dot{\mathbf{R}}^2+\dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha+2\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}'_\alpha$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{R}}^2+\frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha+\dot{\mathbf{R}}.\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (14)$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2+\frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha \qquad (15)$$

- حيث الحد الثالث في (14) يساوي صفر كما سبق

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- يمكن أعادة كتابة المعادلة (15) بشكل أوضح كما يلي:

$$T = T(\text{motion of CM}) + T(\text{motion relative to CM}) \qquad (16)$$

- الحركة الوحيدة الممكنة للجسم الصلب أن يقوم بها حول مركز الكتلة هي الدوران: أذن

$$T = T(\text{motion of CM}) + T(\text{rotation about CM}) \qquad (17)$$

- كمثال على ذلك تصور عجلة السيارة: تدور حول نفسها لتعطي الحد الثاني وتتحرك في نفس الوقت إلى الأمام لتعطي الحد الأول.

- هناك ملاحظة مهمة على المعادلة (14) للطاقة الحركية حيث أننا أثناء الاشتقاق لم نصرح بأن R هو موقع مركز الكتلة ولذا فيمكن اعتباره موقعا لأية نقطة. ولنفترض أننا اخترنا نقطة على طرق الجسم الصلب في حالة سكون لحظي (مثلا تصور عجلة سيارة تتحرك وتدور وتصور نقطة في الأطار الخارجي وكأن العجلة لحظيا تدور بكاملها حول تلك النقطة). في هذه الحالة الحد الأول والأخير في المعادلة تساوي أصفارا ولا يبقى لدينا إلا الحد الثاني ولذا تصبح الطاقة الحركية كما يلي:

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2 \qquad (18)$$

- ومعنى ذلك أنه يمكن النظر لحد الطاقة الحركة كله كحد دوراني فقط أو خطي فقط (تذكر 210 فيز)

Rotation about a fixed axis الدوران حول محور ثابت -10.2

- في هذا الجزء سوف نناقش الدوران حول محور ثابت، مثلا قطعة خشب تدور حول عمود يمر من مركز ثقلها. ونعتبر أن محور الدوران هو محور z.
- نعتبر أن السرعة الزاوية للدوران هي $\boldsymbol{\omega}$ ، ونريد حساب الاندفاع الزاوي الكلي $\mathbf{L}$. سوف نتصور أن قالب اللوح مكون من جزئيات كتلة كل جزئ منها m_α ولذا فيصبح الاندفاع الزاوي الكلي هو:

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \qquad (21)$$

$$\text{where}: \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha.$$

- حيث أن الدوران هو حول محور z فقط فنكتب مركبات السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ و المتجه $\mathbf{r}$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ -y_\alpha & x_\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(0 - x_\alpha z_\alpha) - \hat{y}(0 + z_\alpha y_\alpha) + \hat{z}(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)$$

$$= [-x_\alpha z_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2]$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha).$$

$$\text{so} \quad \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

$$\rightarrow$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)$$

$$= m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \qquad (22)$$

- انظر للصورة المرفقة لكيفية الوصول لهذه النتيجة.

Rotation about a fixed axis الدوران حول محور ثابت -10.2

- من المعادلة السابقة نحصل على المركبة الرأسية فقط للاندفاع الزاوي z كما يلي:

$$L_z = \sum m_\alpha \omega (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha \omega \rho_\alpha^2 = I_z \omega \qquad (24)$$

where: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the distance of any point from the axis

$$I_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \qquad (25)$$

- المعادلة الأخيرة تمثل عزم القصور حول محور moment of inertia about the z axis z
- علاقة الطاقة الحركية (18) ممكن أن تكتب بعد استخدام العلاقة المعروفة: $v_\alpha = \rho_\alpha \omega$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (26)$$

- وهي علاقة معروفة في الفيزياء لجسم يدور حول محوره الرأسي (راجع مقرر 210 فيز).
- نبحث الآن في المركبتين الأخريين x و y للاندفاع الزاوي:

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \quad \text{and} \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

- هاتين النتجتان للاندفاع الزاوي تعنيان أنه بالرغم من كون الدوران حول محور z الرأسي وبالتالي فاتجاه السرعة الزاوية ω يكون في نفس الاتجاه، فأن كون الحدين في (27) غير مساويين للصفر أحيانا على الأقل يدل على أن الاندفاع $\boldsymbol{L}$ ليس بالضرورة دائما في الاتجاه z وبالتالي ربما عدم دقة العلاقة $L = I\omega$

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة