فضاءات المتجهات

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

فضاءات المتجهات

1.1 تعريف فضاء المتجهات

تعريف 1.1.1
نقول أن مجموعة $\mathbb{E}$ هي فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ إذا كانت تحقق ما يلي:

1. (خاصية الإغلاق لعملية الجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v \in \mathbb{E}$.
2. (الخاصية التجميعية لعملية الجمع) إذا كان $u, v, w \in \mathbb{E}$ فإن $u+(v+w) = (u+v)+w$.
3. (خاصية المحايد الجمعي) يوجد عنصر $0 \in \mathbb{E}$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث $u + 0 = 0 + u = u \forall u \in \mathbb{E}$.
4. لكل $u \in \mathbb{E}$ يوجد عنصر يرمز له بالرمز $-u$ ويسمى نظير u الجمعي و يحقق $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
5. (الخاصية الإبدالية للجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v = v + u$.
6. (خاصية الإغلاق لعملية الضرب بعدد) إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in \mathbb{E}$.
7. إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
8. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
9. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta u)$.
10. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ فإن $1.u = u$.

أمثلة 1.1.1

1. $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات.
2. المجموعة $\{(x, y, 2x + 3y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ هو فضاء متجهات.
3. مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ هو فضاء متجهات.
   كذلك مجموعة كثيرات الحدود بدرجة أقل أو يساوي n، $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[X]$ هو فضاء متجهات.

1.2 الفضاءات الجزئية

تعريف 1.2.1
ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V. نقول أن F هي فضاء جزئي من V إذا كان F هو فضاء متجهات وذلك بنفس العمليات على V.

مبرهنة 1.2.1
ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V.
F هي فضاء جزئي من V إذا تحققت الشروط التالية

1. $0 \in F$,
2. إذا كان $u, v \in F$, فإن $u + v \in F$,
3. إذا كان $u \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in F$.

أمثلة 1.2.1

1. ليكن $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\}$. F هي فضاء جزئي من $V = M_2(\mathbb{R})$.
2. لتكن $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ مصفوفة و ليكن $F = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = 0\}$. F هي فضاء جزئي من $V = \mathbb{R}^n$. (F هو مجموعة حلول النظام المتجانس $AX = 0$).
3. المجموعة $F = \{(x, x+1);\ x \in \mathbb{R}\}$ ليست فضاءا جزئيا من $\mathbb{R}^2$.

1.3 التركيبات الخطية والمجموعات المولدة

تعريف 1.3.1
ليكن V فضاء متجهات و لتكن $v_1, \ldots, v_n \in V$. نقول $w \in V$ هو تركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$ إذا وجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

مثال 1.3.1
المتجه $(4, 1, 1)$ هو تركيب خطي للمتجهات
$(1, 0, 2)$, $(2, -1, 3)$, $(0, -1, 1)$.
$(4, 1, 1) = -2(1, 0, 2) + 3(2, -1, 3) - 4(0, -1, 1)$.

مبرهنة 1.3.1
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و لتكن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ وكانت $C_1, \ldots, C_n$ أعمدة المصفوفة A فإن $AX = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n$.

نتيجة 1.3.2
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n). عندئذ يكون النظام الخطي $AX=B$ متسقا إذا وفقط إذا كان B تركيبا خطيا لأعمدة المصفوفة A.

تعريف 1.3.2
لتكن $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء متجه V. نقول أن S تولد V إذا كان كل عنصر من V هو تركيب خطي لعناصر V.

مبرهنة 1.3.3
لتكن $S=\{v_1,\dots,v_k\}\subset\mathbb{R}^n$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (n,k) و $C_1,\dots,C_k$ أعمدتها. عندئذ
S تولد $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كان النظام $AX=B$ متسقا لكل $B\in\mathbb{R}^n$.

مبرهنة 1.3.4
لتكن $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء متجه V عندئذ

1. مجموعة جميع التركيبات الخطية W لمتجهات S تشكل فضاءا جزئيا من V.
2. W هو أصغر فضاء جزئي يحتوي على S.
يسمى هذا الفضاء هو الفضاء المولد بالمجموعة S و نرمز به $\langle S\rangle$.

1.4 الإرتباط الخطي والإستقلال الخطي

تعريف 1.4.1
نقول أن متجهات $v_1,\dots,v_n$ في فضاء متجهات V هي مستقلة خطيا إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $a_1v_1+\dots,+a_nv_n=0$ هو الحل الصفري.

مثال 1.4.1
$u=(0,1,-2,1)$, $v=(1,0,2,-1)$, $w=(3,2,2,-1)$ مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

$$xu+yv+zw=(0,0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{lcl} y+3z &=& 0\\ x+2z &=& 0\\ -2x+2y+2z &=& 0\\ x-y-z &=& 0\end{array}\right.$$

هذا النظام له حل وحيد هو الحل الصفري.

تعريف 1.4.2
نقول أن متجهات $v_1,\dots,v_n$ في فضاء متجهات V هي مرتبطة خطيا إذا كانت ليست مستقلة خطيا.

مبرهنة 1.4.1
لتكن $S=\{v_1,\dots,v_k\}\subset\mathbb{R}^n$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و أعمدتها متجهات S.
عندئذ تكون S مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان النظام المتجانس $AX=0$ له حل وحيد الحل التافه.

ملاحظات 1.4.1

1. إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m,n) و $m < n$ فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول للنظام $AX = 0$.
2. إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ و $m < n$ فإن S مرتبطة خطيا.

مبرهنة 1.4.2
إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V حيث $n \geq 2$. عندئذ S مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد متجهاتها تركيبا خطيا لبقية المتجهات.

1.5 الأساس والبعد

تعريف 1.5.1
لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V. نقول أن S أساس للفضاء V إذا حققت الشرطين

1. S تولد V
2. S مستقلة خطيا.

مبرهنة 1.5.1
إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ فإننا نستطيع كتابة v بطريقة وحيدة كتركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$.

ملاحظة 1.5.1
إذا كان $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ حيث $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ فإن S أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$.

تمرين 1.5.1
أثبت أن $S = \{1, X, \ldots, X^n\}$ أساس لفضاء المتجهات $\mathcal{P}_n$.

مبرهنة 1.5.2
إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و لتكن $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$.
إذا كان $m > n$ فإن T مرتبطة خطيا.

نتيجة 1.5.3
إذا كانت كل من $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$. أساسا للفضاء V فإن $m = n$.

تعريف 1.5.2
إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد الفضاء V و نكتب $\dim V = n$.

مبرهنة 1.5.4
إذا كان V فضاء متجهات و بعده n و إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة من المتجهات في الفضاء V عندئذ

1. إذا كانت S مستقلة خطيا فإن S أساس للفضاء V.
2. إذا كانت S تولد V فإن S أساس للفضاء V.

مبرهنة 1.5.5
إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء V فإن S تحتوي على أساس للفضاء V.

ملاحظة 1.5.2
إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_m\}\subset\mathbb{R}^n$ مجموعة مولدة فإن كلا من الخوارزميتين التاليتين تزودنا بأساس للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة S.
خوارزمية 1

1. كون مصفوفة A صفوفها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. عندئذ صفوف C الغير صفرية هي أساس للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$.

خوارزمية 2

1. كون مصفوفة A أعمدتها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. لتكن C_1 هي مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C ولتكن S_1 هي مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة في A المقابلة لعناصر C_1 عندئذ S_1 هي أساس للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$.

مبرهنة 1.5.6

1. إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة مولدة لفضاء المتجهات V فإن S تحتوي على أساس للفضاء V.
2. إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في فضاء متجهات V فإنه يوجد أساس T للفضاء V يحتوي على S.

مثال 1.5.1
ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^5$ المولد بـ
$v_1=(1,0,2,-1,2)$، $v_2=(2,0,4,-2,4)$، $v_3=(1,2,-1,2,0)$،
$v_4=(1,4,-4,5,-2)$.

1. أوجد أساسا لـ W محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. أوجد أساسا لـ $\mathbb{R}^5$ يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

الحل

1. لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ والتي أعمدتها هي احداثيات المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4.
الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ إذا $\{v_1, v_3\}$ هو أساس لـ W.
2. إذا كان
$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$، $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$، $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$. إذا $\{v_1, v_3, e_1, e_2, e_3\}$ هو أساس لـ $\mathbb{R}^5$ يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

1.6 الإحداثيات وتغيير الأساس

تعريف 1.6.1
إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ حيث

$$v = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$$

فإن $(x_1, \ldots x_n)$ تسمى إحداثيات المتجه v بالنسبة للأساس S و نرمز

$$[v]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

و يسمى المتجه الإحداثي للمتجه v بالنسبة للأساس S.

مبرهنة 1.6.1
إذا كان $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ أساسين للفضاء V. و لتكن ${}_CP_B$ مصفوفة من الدرجة n أعمدتها $[v_1]_C, \ldots, [v_n]_C$ عندئذ فإن المصفوفة ${}_CP_B$ لها معكوس كما أن

$$[v]_C = {}_CP_B[v]_B$$

لكل $v \in V$.
تسمى المصفوفة ${}_CP_B$ مصفوفة الإنتقال من الأساس B إلى الأساس C.

1.7 رتبة المصفوفة

تعريف 1.7.1
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n).
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المولد بصفوف A ، الفضاء الصفي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\text{row}A$.
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^m$ المولد بأعمدة A ، الفضاء العمودي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\text{col}A$.

مبرهنة 1.7.1
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و كانت B هي المصفوفة التي نحصل عليهامن A بإجراء عملية أولية صفية فإن $\text{row}A = \text{row}B$.

مبرهنة 1.7.2
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و كانت B هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A فإن مجموعة الصفوف الغير صفرية في B مستقلة خطيا.

تعريف 1.7.2
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n).
نسمي بعد الفضاء الصفي للمصفوفة A رتبة المصفوفة و نرمز به $\text{rank}A = \text{dimrow}A$.

ملاحظة 1.7.1
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n).
رتبة المصفوفة هو عدد العناصر المتقدمة في أي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.

مبرهنة 1.7.3
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{rank}A = \text{dimrow}A = \text{dimcol}A.$$

نتيجة 1.7.4
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}A^T.$$

نتيجة 1.7.5
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) وإذا كانت P مصفوفة لها معكوس من الدرجة m وإذا كانت Q مصفوفة لها معكوس من الدرجة n فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}PAQ.$$

البرهان
نعلم أن إجراء عملية أولية على الصفوف على A يكافئ ضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة أولية. و بما أن المصفوفة P هي حاصل ضرب مصفوفات أولية فإنه يمكن الحصول على PA بمتتالية من العمليات الصفية الأولية. لذا فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}PA.$$

و باستعمال النتيجة السابقة فنستنتج

$$\text{rank}A = \text{rank}PAQ.$$

□

مبرهنة 1.7.6
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن العبارات التالية متكافئة

1. للنظام $AX = 0$ حل وحيد وهو الحل التافه.
2. أعمدة المصفوفة A مستقلة خطيا.
3. $\text{rank}A = n.$
4. للمصفوفة A^TA معكوس.

مبرهنة 1.7.7
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن العبارات التالية متكافئة

1. النظام $AX = B$ متسق لكل $B \in \mathbb{R}^m$.
2. أعمدة المصفوفة A تولد $\mathbb{R}^m$.
3. $\text{rank}A = m.$
4. للمصفوفة AA^T معكوس.

تعريف 1.7.3
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n). نعرف الفضاء الجزئي $\{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = 0\}$ الفضاء الصفري للمصفوفة A و نرمز له بالرمز $N(A)$ و نسمي بعده بصفرية المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{nullity}(A)$.
كذلك نعرف الفضاء الجزئي $\{AX;\ X \in \mathbb{R}^n\}$ صورة المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{Im}(A)$.

مبرهنة 1.7.8
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن $\text{Im}(A) = \text{col}A$.

مبرهنة 1.7.9 مبرهنة البعد للمصفوفات
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{nullity}(A) + \text{rank}(A) = n.$$

1.8 تمارين الباب االرابع

تمرين 1 :
بين من المجموعات التالية هي فضاءات جزئية

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 3x - 7y = z\}$

,$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 - z^2 = 0\}$

,$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y - z = x + y + z = 0\}$

,$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z(x^2 + y^2) = 0\}$

,$E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; x + y = 0\}$

,$E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; xy = 0\}$

,$E_7 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \; x = 0, y = z\}$

.$E_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; x = 1\}$

تمرين 2 :
ليكن المتجهات التالية $e_1 = (1,2,3,4)$ و $e_2 = (1,-2,3,-4)$ في $\mathbb{R}^4$.
هل يوجد x و y حتى يكون $(x,1,y,1)$ في الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟
و هل يوجد x و y حتى يكون $(x,1,1,y)$ في الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟

تمرين 3 :
ليكن E الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $(2,3,-1), (1,-1,-2)$ و ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $(3,7,0), (5,0,-7)$
أثبت أن $E = F$.

تمرين 4 :
هل يوجد $x, y \in \mathbb{R}$ حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 5)$ موجود في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية: $u = (1,-1,1,2)$ و $v = (-1,2,3,1)$.

تمرين 5 :
ليكن في $\mathbb{R}^4$ المتجهات التالية:
$e_1 = (0,1,-2,1)$, $e_2 = (1,0,2,-1)$, $e_3 = (3,2,2,-1)$, $e_4 = (0,0,1,0)$ و $e_5 = (0,0,0,1)$.
هل العبارات التالية صحيحة:

1. $\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$.
3. $\text{Vect}\{e_1, e_2\} + \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} = \mathbb{R}^4$.

تمرين 6 :
ليكن في $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,3,2)$, $u_3 = (1,1,0)$, $u_4 = (3,8,5)$.

وليكن $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ و $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$. أثبت أن $F = G$.

تمرين 7 :

أثبت أن المتجهات
$u_1 = (1, 0, 1)$، $u_2 = (-1, -1, 2)$ و $u_3 = (-2, 1, -2)$ تكون أساسا في $\mathbb{R}^3$، و أوجد إحداثيات المتجه $v = (x, y, z)$ في هذا الأساس.

تمرين 8 :
أوجد قيم $t \in \mathbb{R}$ بحيث $S = \{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

تمرين 9 :
أثبت أن المتجهات $S = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$. أوجد إحداثيات المتجهات التالية $e_1 = (1, 0, 0)$، $e_2 = (1, 0, 1)$، و $e_3 = (0, 0, 1)$ في هذا الأساس.

تمرين 10 :
أوجد بعد الفضاء المولد بالمتجهات التالية

$$u_1 = (3, 2, 1, 0),\ u_2 = (2, 3, 4, 5),\ u_3 = (0, 1, 2, 3),\ u_4 = (1, 2, 1, 2),\ u_5 = (0, -1, 2, 1)$$

في $\mathbb{R}^4$.

تمرين 11 :
ليكن $B = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, -2), v_3 = (1, 1, 0)\}$ أساسا في $\mathbb{R}^3$ وليكن $C = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ الأساس المعتاد (أو الطبيعي) للفضاء $\mathbb{R}^3$.

1. أوجد كلا من ${}_C P_B$ و ${}_B P_C$.
2. أوجد $[v]_B$ إذا كان $v = (2, -1, 1)$.

تمرين 12 :
ليكن V الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^5$ المولد بالمتجهات التالية $v_1 = (1, -1, 2, 0, 3)$، $v_2 = (2, -2, 4, 0, 6)$، $v_3 = (1, 2, -3, -2, 1)$، $v_4 = (0, -3, 4, 2, 2)$.
أوجد أساسا للفضاء V محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

تمرين 13 :
هل يوجد x, y حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 3)$ موجود في الفضاء الجزئي المولد بالمتهات (e_1, e_2) مع $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ و $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$؟

تمرين 14 :
أوجد قيم $t \in \mathbb{R}$ بحيث $S = \{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

تمرين 15 :
ليكن في الفضاء $\mathbb{R}^4$ المتجهات التالية
$e_1 = (1, 2, 3, 4),\ e_2 = (1, 1, 1, 3),\ e_3 = (2, 1, 1, 1),\ e_4 = (-1, 0, -1, 2),$
$e_5 = (2, 3, 0, 1)$، و ليكن $E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ و $F = \langle e_4, e_5 \rangle$.
أوجد أبعاد الفضاءات التالية F , E.

تمرين 16 :
أوجد رتبة المصفوفات التالية

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$

1.9 إصلاح تمارين الباب االرابع

حل التمرين 1:

المجموعة E_1 هي فضاء جزئي لأن $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ AX = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_2 ليست فضاء جزئي لأن $(1,0,1) \in E_2$ و $(1,0,-1) \in E_2$ ولكن $(1,0,1) + (1,0,-1) = (2,0,0) \notin E_2$.

المجموعة E_1 هي فضاء جزئي لأن $E_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ AX = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_4 هي فضاء جزئي لأن $E_4 = \{(0,0,0)\}$.

المجموعة E_5 هي فضاء جزئي لأن $E_5 = \{X \in \mathbb{R}^3 :\ AX = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_6 ليست فضاء جزئيا لأن $(1,0,0) \in E_6$ و $(0,1,0) \in E_6$ ولكن $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin E_6$.

المجموعة E_7 هي فضاء جزئي لأن $E_7 = \{X \in \mathbb{R}^4 :\ AX = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_8 ليست فضاء جزئيا لأن $(0,0,0) \notin E_8$.

حل التمرين 2:

حتى يكون $(x,1,y,1) \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ لا بد أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا حيث
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. ولكن النظام ليس متسقا لأن المعادلتين الثانية والرابعة $2a - 2b = 1,\ 4a - 4b = 1$ لا يمكن أن تكونا صائبتين.

حتى يكون $(x,1,1,y) \in \langle e_1, e_2 3\rangle$ لا بد أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا حيث
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}$.
وهذا النظام له حل وحيد. و في هذه الحالة $x = \frac{1}{3}$ و $y = 2$.

حل التمرين 3:

حتى يكن المتجه (a,b,c) في الفضاء E لا بد أن يكون النظام الخطي التالي متسقا:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - y = b \\ -x - 2y = c \end{cases}$$

و هذا النظام متكافئ مع النظام التالي

$$\begin{cases} x+2y=-c \\ -3y=a+2c \\ -7y=b+3c \end{cases}.$$

هذا النظام يكون متسقا إلا و إذا كان $7a-3b+5c=0$. و نلاحظ أن إحداثيات المتجهات $(2,3,-1)$, $(1,-1,-2)$ تحقق هذه المعادلة. إذًا $F\subset E$. وبما أن المتجهين $(2,3,-1)$, $(1,-1,-2)$ مستقلين خطيا و المتجهين $(3,7,0),(5,0,-7)$ مستقلين خطيا، إذًا $\dim E=\dim F=2$ و $E=F$.

حل التمرين 4:

حتى يكون المتجه $v=(-2,x,y,5)$ في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات $u=(1,-1,1,2)$ و $v=(-1,2,3,1)$. لا بد أن يكون النظان الخطي $AX=B$ متسقا، حيث $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\\1&3\\2&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-2\\x\\y\\5\end{pmatrix}$. و هذا النظام متسق إلا و إذا كان $\frac{y+2}{4}=x-2=3$.

إذًا $x=5$ و $y=10$.

حل التمرين 5:

1. لتكن المصفوفة A والتي صفوفها أحداثيات المتجهات e_1,e_2,e_3.
الفضاء $\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3\}$ يمثل الفضاء الصفي للمصفوفة A.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي $A_1=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
إذًا $\dim\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3\}=2$.
يكون $\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3\}=\mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ إلا و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية B هي 2, $B=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-2&1\\-1&1&-4&2\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة B هي $A_2=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
إذا
$\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3\}=\mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0)=e_1+e_2$, $2(1,1,0,0)=e_3-e_2$. إذا $(1,1,0,0)\in\mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$.
3. $(1,1,0,0)\in\mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$ و $e_2\in\mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$.
إذا $\dim\mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}=2$ و

$$\dim\text{Vect}\{e_1,e_2\}+\text{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}\leq 3$$

إذا $\text{Vect}\{e_1,e_2\}+\text{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}\neq\mathbb{R}^4$.

حل التمرين 6:

بما أن المتجهان u_1,u_2 مستقلان خطيا و كذلك المتجهان u_3,u_4 مستقلان خطيا فإن $\dim E=\dim F=2$.

$F=G$ إلا و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية 2، $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&0\\3&8&5\end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لهذه المصفوفة هي $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

إذا $F=G$.

حل التمرين 7:

المصفوفة التي أعمدتها المتجهات $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(-1,-1,2)$ و $u_3=(-2,1,-2)$ هي $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&1\\1&2&-2\end{pmatrix}$.

بما أن $|A|=-3$ فإن $u=(1,0,1)$, $v=(-1,-1,2)$ و $w=(-2,1,-2)$ تكون أساسا.

إذا كان $X=au+bv+cw$ فإن $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=A^{-1}X=\begin{pmatrix}2y+z\\\frac{-x+z}{3}\\\frac{-x+3y+z}{3}\end{pmatrix}$.

حل التمرين 8:

يمثل S أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ إلا وإذا كان

$$\begin{vmatrix}1&0&t\\1&1&t\\t&0&1\end{vmatrix}=1-t^2\neq 0$$

إذا S أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ إلا وإذا كان $t\neq\pm1$.

حل التمرين 9:

بما أن محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ يساوي -3 فإن S تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

المتجهات e_1,e_2,e_3 تمثل الأساس المعتاد C للفضاء $\mathbb{R}^3$.

معكوس المصفوفة A هي المصفوفة $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

إذًا $[e_1]_S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-11\end{pmatrix}$, $[e_2]_S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}121\end{pmatrix}$, $[e_3]_S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11-2\end{pmatrix}$.

حل التمرين 10:

الفضاء المولد بالمتجهات هو الفضاء الصفي للمصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$. إذا بعد هذا الفضاء هو 3

حل التمرين 11:

.1 ${}_CP_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ و ${}_BP_C$ هي معكوس المصفوفة ${}_CP_B$ إذا ${}_BP_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

.2 $\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}_BP_C[v]_C = [v]_B$.

حل التمرين 12:

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ إذا $\{v_1, v_3, v_4\}$ هو أساس للفضاء V.

حل التمرين 13:

$v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ متكافئ مع وجود $a, b \in \mathbb{R}$ و $v = ae_1 + be_2 \iff$

$$\begin{cases} -2 & = a - b \\ x & = -a + 2b \\ y & = a + 3b \\ 3 & = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{22}{3} \end{cases}$$

إذا $(x, y) = (\frac{13}{3}, \frac{22}{3})$.

حل التمرين 14:

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E هي الفضاء الصفي للمصفوفة A و F هي الفضاء الصفي للمصفوفة B.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفات A و B هي على التوالي $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ و المصفوفة

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

إذا $\dim E = 3$, $\dim F = 2$.

حل التمرين 15:

1. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   إذا رتبة المصفوفة هي 3.

2. مصفوفة الوحدة هي صيغة درجية صفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   إذا رتبة المصفوفة هي 4.

3. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   إذا رتبة المصفوفة هي 2.

4. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   إذا رتبة المصفوفة هي 3.

5. المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & a & -2 & b \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8-3a & 11+b-3a \end{pmatrix}$.
   إذا كان $a \neq \frac{8}{3}$ فرتبة المصفوفة هي 3.
   إذا كان $a = \frac{8}{3}$ و $b \neq -3$ فرتبة المصفوفة هي 3.
   إذا كان $a = \frac{8}{3}$ و $b = -3$ فرتبة المصفوفة هي 2.