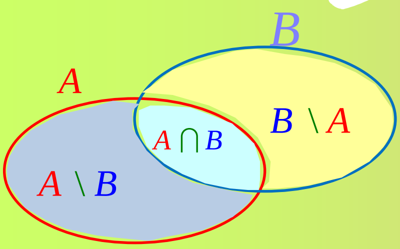
المبادئ الأولية في الاحتمالات

الأستاذ أحمد أبو نبوت

2013

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{k=n} x_k \cdot f(x_k)}$$



Probability

الحمد لله

وددت أن أدلو بدلوي في موضوع الاحتمالات ، لعلي أقدم فكرة جديدة أو توضيح لمسألة قد تكون غامضة قليلاً ، أو أضع مسألة يستفيد منها دارس أو باحث في هذا الموضوع .

وأقصد من ذلك وجه الله الكريم ، داعياً راجياً أن يقبل عملي،

وأن يعفو عني عند السؤال عن علمه ماذا عمل به.

وهذا الكتاب للمرحلة الثانوية

وأتقدم بالشكر لمن يرى عيباً ويخبرني به ،لأني لا أدعي الكمال فيما كتبت فالكمال لله وحده.

لاتنسونا من دعوة صالحة

أحمد أبو نبوت

الفهرس

الاحتمالات

تمهيد :

في جلسة لأفراد الأسرة تسمع أحياناً من أحد أفراد الأسرة يقول إن فلان (رجل قريب للأسرة) ستجري له عملية، وتسمعه يقول إن احتمال نجاح العملية 15 بالمئة (15%) ، يتأثر جميع أفراد الأسرة من هذا الخبر ، ويدعون الله له بالشفاء.

ورد في هذا النص كلمة احتمال ماذا تعني هذه الكلمة ؟ وورد قياس لهذا الاحتمال من أين جاء هذا القياس وكيف يتم حسابه؟

وتأثر أفراد الأسرة لقيمة هذا القياس لماذا ؟ نلاحظ أن خِبرَة الإنسان في الحياة بينت له أن الاحتمال هو نسبة حصول النتيجة .

كأن هذه العملية أجريت سابقاً حسب سجلات الأطباء على 100 مريض بنفس المرض نجحت العملية مع 15 شخص وفشلت مع 85 شخص فأصبح احتمال نجاح العملية $\frac{15}{100}$ واحتمال فشلها $\frac{85}{100}$ أي نسبة الفشل أكبر بكثير من نسبة النجاح وهو سبب تأثر أفراد الأسرة على هذا المريض.

في معظم ميادين الحياة العملية اليومية والنشاط العلمي ، تجارب ومشاهدات وظواهر يمكن أن تتكرر عدداً كبيراً من المرات تحت ظروف متشابهة ، وفي كل مرة نهتم بنتائج هذه التجارب والمشاهدات .

ليبنى بذلك علم هو علم الاحتمال، والذي يستفاد منه التنبؤ بنتيجة تجربة ما عندما تتكرر التجربة في نفس الظروف التي تم حساب احتمالات أحداثها.

في المثال السابق نجد الترابط الوثيق بين علم الاحتمال وعلم الإحصاء.

لكن عملياً هل عندما نلقي حجر النرد ست مرات ستظهر النواتج: $1,2,3,4,5,6$ بالتسلسل نفسه ونقول عندئذ احتمال كل نتيجة هو $\frac{1}{6}$، الجواب بالنفي.

لأنه عملياً عندما نلقي حجر النرد ست مرات قد لا يظهر أحد النواتج الستة أو تظهر النتيجة نفسها ست مرات ،كيف نقول إن احتمال ظهور أي وجه من وجوهه $\frac{1}{6}$ ، إن هذا الاحتمال التجريبي أخذناه على أساس أن التجربة تكررت عدد غير منتهي من المرات سيكون عندئذ احتمال ظهور كل وجه يساوي احتمال ظهور الوجه الآخر وهو $\frac{1}{6}$ فبني الاحتمال التجريبي على هذا الأساس

المبحث الأول :

مفاهيم ومصطلحات الاحتمالات

①الاختبار العشوائي:

إذا كان لديك مجوعة مفاتيح أبواب بيتك الذي تملكه (تختلف فقط بشكل الأسنان)، وتستخدمها يومياً، إذا أردت أن تفتح الباب الخارجي للبيت ، مباشرة تختار المفتاح المناسب وتفتح الباب، هذا الاختيار ليس عشوائياً، أما إن أعطيت هذه المفاتيح لغيرك ويستخدمها لأول مرة ،فإن اختياره للمفتاح المناسب للباب الخارجي سيكون عشوائياً ، ويكون لجميع أحداثه الابتدائية الاحتمال ذاته أي نستخدم الاختيار العشوائي في الفضاء المتساوي الاحتمال (سنرى لاحقاً تفسيراً لكلمات وعبارات وردت بالنص)

<u>التجربة العشوائية</u> هي تجربة أو عملية تحقق الشروط الآتية:

1) جميع النتائج للتجربة تكون معلومة مسبقاً قبل إجرائها

2) لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها

3) يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة

② الاختبار:

هو تجربة مصممة يمكن إجراؤها ، أو استعراض لظاهرة طبيعية أو اجتماعية

بحيث نعلم مسبقاً مجموعة نتائجها الممكنة (لكننا لا نعلم النتيجة التي سنحصل عليها)

③فضاء العينة :

نقبل بأن لكل تجربة مجموعة من الإمكانات(النتائج) نرمز لها Ω يحددها الغرض من هذه التجربة .

ندعو Ω فضاء العينة

<u>أمثلة:</u>

في هذه تعتبر القطع التي تلقى قطع متوازنة(إمكانية وقوع أي وجه تساوي إمكانية وقوع أي وجه آخر)

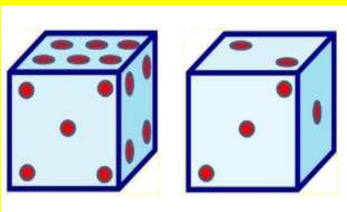
إلا إذا ذكر خلاف ذلك في السؤال

① في تجربة إلقاء حجر نرد مكعب

نعتبر النتيجة عدد النقط على الوجه العلوي

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ فضاء العينة

لاحظ $n(\Omega) = 6$

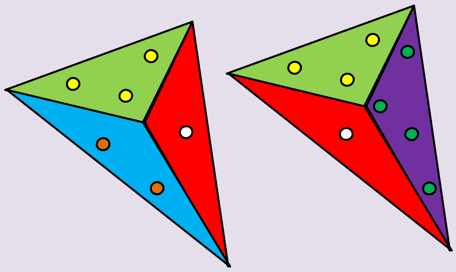


② في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي

نعتبر النتيجة عدد النقط على قاعدة رباعي الوجوه

فضاء العينة $\Omega=\{1,2,3,4\}$

لاحظ $n(\Omega)=4$



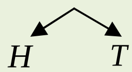
ملاحظة : إن لم نذكر حجر نرد رباعي صراحة فهو حجر نرد مكعب نظراً لشهرته في تجارب الاحتمالات

③ في تجربة إلقاء قطعة نقد $\Omega=\{H,T\}$ ،

T رمز ظهور الشعار (الصورة) ، H رمز ظهور الكتابة (النقش)

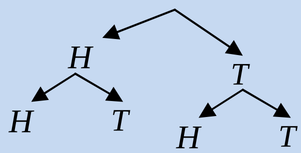
فيكون $n(\Omega)=2$

لاحظ يمكن تمثيل Ω على شكل شجرة



④ في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين أو إلقاء قطعتي نقد $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ ،

فيكون $n(\Omega)=4$ لاحظ يمكن تمثيل Ω على شكل شجرة



كما يمكن تمثيل فضاء العينة في هذه الحالة بجدول:

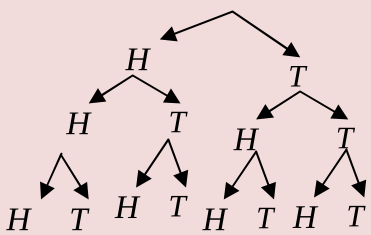
نعتبر العمود الرمية الأولى والسطر الرمية الثانية

Ω	H	T
H	(H,H)	(H,T)
T	(T,H)	(T,T)

⑤ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرّات ونُلاحظ تتابع ظهور الشّعار T والكتابة H فتكون :

$$\Omega=\{(T,T,T)\ ,\ (H,T,T)\ ,\ (T,H,T)\ ,\ (T,T,H)\ ,(H,H,T),$$
$$(H,T,H)\ ,\ (T,H,H)\ ,(H,H,H)\}$$

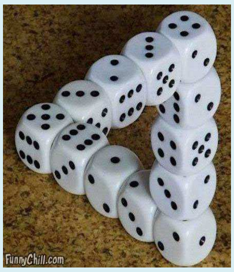
$n(\Omega)=8$ لاحظ يمكن تمثيل Ω على شكل شجرة



لاحظ في هذه الحالة عدم إمكانية تمثيل فضاء العينة في جدول

⑥ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين أو إلقاء حجري نرد: $n(\Omega)=36$

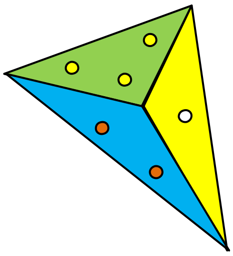
أفضل طريقة لكتابة فضاء العينة الجدول ، ويمكن كتابته مجموعة أو شجرة

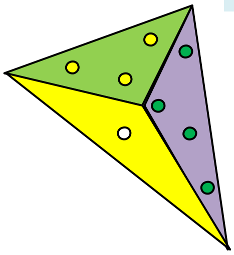


Ω	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

لاحظ أنه عند إلقاء حجري النرد معاً يمكن كتابة فضاء عينه مؤلف من 21 عنصر لكن العنصر الذي لا تتساوى فيه عدد نقط الوجهين له ضعفي إمكانية وقوع العنصر الذي تتساوى فيه نقط الوجهين لذلك الأفضل في حساب الاحتمالات أن نكتب فضاء العينه على هذا النحو لسهولة حساب الاحتمال

⑦ في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي مرتين: $n(\Omega)=16$





Ω	1	2	3	4
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$

نتيجة : إذا كان عدد النتائج في تجربة إلقاء قطعة متوازنة يساوي n

وألقيت هذه القطعة r مرة فإن عدد النتائج بعد إتمام التجربة :

$$\underbrace{r\times r\times ....\times r}_{n\text{ مرة}}=r^{n}$$

أمثلة :

❶ في تجربة إلقاء قطعة نقد خمس مرات ، سنجد عدد عناصر فضاء العينة :

$$n(\Omega)=2^{5}=32$$

❷ في تجربة إلقاء حجر نرد مكعب ثلاث مرات، سنجد عدد عناصر فضاء العينة:

$$n(\Omega)=6^{3}=216$$

❸ في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي ست مرات، سنجد عدد عناصر فضاء العينة :

$$n(\Omega)=4^{6}=4096$$

ملاحظة: عند سحب عنصرين من مجموعة عدد عناصرها صغير نسبياً ، أو سحب عنصرين من مجموعتين مختلفتين، من كل مجموعة عنصر ، يمكن كتابة فضاء العينة على شكل جدول.

مثال ❶: يحتوي مغلف أربع بطاقات متماثلة كتب عليها الحروف a,b,c,d

نسحب من المغلف بطاقتين اكتب فضاء العينة في حالات السحب المختلفة

لننظم الجدول الآتي ثم نناقش الحالات التي تم وفقها السحب:

	a	b	c	d
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(b,d)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)	(c,d)
d	(d,a)	(d,b)	(d,c)	(d,d)

1) إذا كان السحب مع إعادة :

فإن عناصر Ω هي كل عناصر الجدول ويكون:

$$n(\Omega)=16$$

2) إذا كان السحب دون إعادة :

فإن عناصر Ω هي كل عناصر الجدول عدا عناصر القطر الرئيس ويكون:

$$n(\Omega)=12$$

3) إذا كان السحب معاً

فإن عناصر Ω هي عناصر من الجدول هي الواقعة فوق القطر الرئيس (بدون عناصرالقطر) ويكون:

$$n(\Omega)=6$$

وتكتب عناصر فضاء العينة في هذه الحالة (لعدم وجود أهمية لترتيب العناصر المسحوبة)على شكل مجموعات كما يلي: $\Omega=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$

مثال ❷: يحتوي الصندوق (I) أربع كرات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4$

و يحتوي الصندوق (Π) خمس كرات كتب عليها الأرقام: $1,1,2,3,4$

نسحب من الصندوق (I)ومن الصندوق (Π)كرة اكتب فضاء عينة مناسب.

الحل :

يمكن كتابة فضاء عينة مجدول تظهر فيه كل النتائج

مع ملاحظة :

أن عدد طرق اختيار الكرة الأولى 4

وعدد طرق اختيار الكرة الثانية 5

فإن : $n(\Omega)=4\times5=20$

نكتب فضاء العينة بجدول

Ω	1	1	2	3	4
1	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
3	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
4	$(4,1)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$

كما يمكن كتابته كمجموعة لكن ليس لعناصره نفس فرصة الوقوع

$$\Omega=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),$$
$$(2,3),(3,3),(4,3),(1,4),(2,4),(3,4),(4,3)\}$$

لاحظ أن كل عنصر من العناصر $(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)$

له ضعفي إمكانية الوقوع بالنسبة لكل عنصر آخر من العناصر الأخرى في فضاء العينة

لذلك فضاء العينة المجدول أفضل لحساب الاحتمال

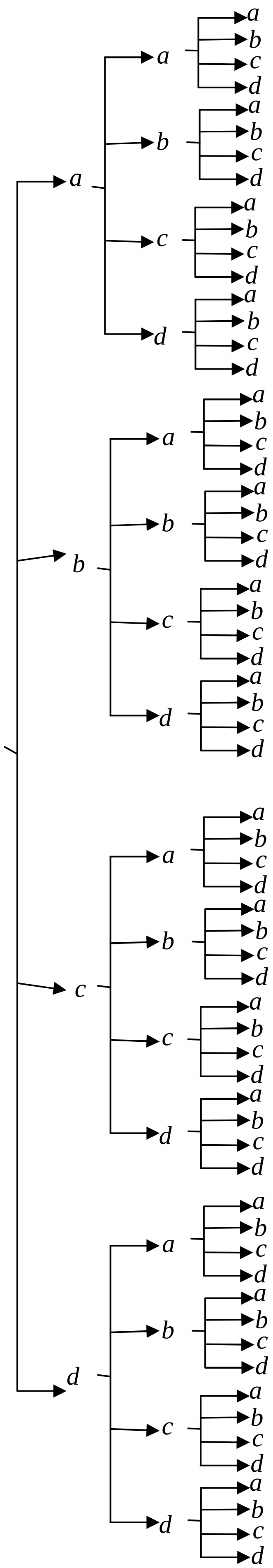
شجرة التجارب المتتالية

يمكن تشكيل شجرة لكل التجارب التي يكون فيها تتالي

مثال :يحتوي مغلف أربع بطاقات متماثلة كتب عليها الحروف

$\{a,b,c,d\}$ نسحب من هذا المغلف ثلاث بطاقات

سنجد ثلاث أنواع من السحب:



الحالة الأولى إذا كان السحب مع إعادة:

أي نسحب بطاقة نشاهد النتيجة ثم نعيد البطاقة المسحوبة للمغلف

فيكون $n(\Omega)=64$ حسب المخطط

لاحظ أن عدد النواتج في السحب الأول وفي السحب الثاني

وفي الثالث أربع نواتج

وعدد النواتج بعد إتمام التجربة وهي

سحب ثلاثة بطاقات على التتالي مع إعادة

$n(\Omega)=4\times4\times4=64$

لاحظ لو كان عدد البطاقات التي يتم منها السحب مئة بطاقة!

كيف سيكون حال هذه الشجرة ؟

ما الطريقة التي تساعدنا في الوصول إلى معرفة $n(\Omega)$ دون رسم الشجرة ؟

الجواب: في الواقع أننا قمنا باختيار البطاقة الأولى بأربع طرق

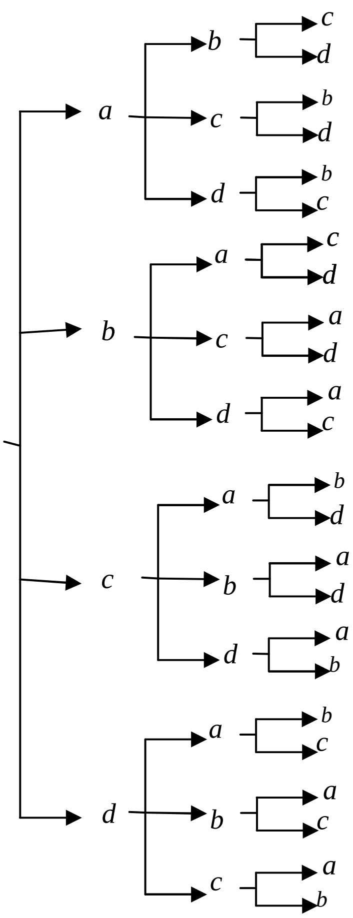
ثم قمنا باختيار البطاقة الثانية بأربع طرق

ثم قمنا باختيار البطاقة الثالثة بأربع طرق

وعدد الطرق التي تمت بها التجربة هو:

$n(\Omega)=4\times4\times4=64$

الحالة الثانية إذا كان السحب دون إعادة:



أي نسحب بطاقة نشاهد النتيجة ولا نعيد البطاقة للمغلف

(نضعها خارج المغلف) من الشجرة المجاورة $n(\Omega)=24$

والسؤال كيف نجد النتيجة دون رسم الشجرة؟

نلاحظ أن عدد نتائج السحب الأول 4

ومن أجل كل نتيجة نجد أن عدد نتائج السحب الثاني 3

ومن أجل كل نتيجة من نتائج السحب الثاني نجد عدد نتائج السحب الثالث 2

وبالتالي عدد نتائج التجربة $n(\Omega)=4\times3\times2=24$

النتيجة :

1)المبدأ الأساسي في العد:

من الأمثلة السابقة تجارب إلقاء القطع على التتالي وتجارب السحب على التتالي وبالمثل كل التجارب المتتالية:

إذا قمنا بتجربة ما وكان لها n_1 نتيجة ومن أجل كل نتيجة قمنا بتجربة ثانية وكان لها n_2 نتيجة ومن أجل كل نتيجة قمنا بتجربة ثالثة وكان لها n_3 نتيجة وهكذا حتى k تجربة متتالية فإن عدد النتائج لهذه التجارب مجتمعة هو :

$\boxed{n(\Omega)=n_1\times n_2\times......\times n_k}$ ونسمي هذه الطريقة في الحساب (المبدأ الأساسي في العد)

مثال : كم عدد فردي مؤلف من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام $1,2,5,6,7$

1) بشرط استخدام كل رقم مرةً واحدة في تشكيل العدد ؟

2) يمكن استخدام كل رقم أكثر من مرةً واحدة في تشكيل العدد ؟

الحل : 1) يكون العدد فردي عندما يكون آحاده فردي

يوجد ثلاث طرائق لاختيار رقم الآحاد وهناك أربع طرائق لاختيار رقم العشرات وثلاثة طرائق لاختيار المئات فيكون عدد الأعداد الفردية التي يمكن تشكيلها من الأرقام المفروضة هو $3\times4\times3=36$

2) يوجد ثلاث طرائق لاختيار رقم الآحاد للعدد الفردي المطلوب تشكيله وهناك خمس طرائق لاختيار رقم العشرات وخمس طرائق لاختيار المئات فيكون عدد الأعداد الفردية التي يمكن تشكيلها من الأرقام المفروضة هو $3\times5\times5=75$

2) الترتيبات :

إذا كان لدينا n متسابق ، وبحثنا عن عدد طرق اختيارالأوائل منهم ، إذا كان عدد الأوائل المطلوب ترتيبهم بحسب ترتيب فوزهم هو r من المتسابقين ($n,r \in \mathbb{N}*$ و $n \geq r \geq 1$)

يوجد n طريقة لاختيار المتسابق الأول

و $n-1$ لاختيار المتسابق الثاني وهكذا .....

سنجد $n-r+1$ لاختيار المتسابق ذو الترتيب r

وحسب المبدأ الأساسي في العد عدد طرق اختيار r متسابق بحسب ترتيب فوزهم من n متسابق يعطى بالصيغة: $P(n,r)=n(n-1)..........(n-r+1)$ ويسمى مبدأ الترتيب

والصيغة السابقة تحسب لنا عدد العيّنات المرتّبة ذات r عنصر من مجموعة ذات n عنصر

النتيجة: إذا كان n ، r عددين طبيعيين غير معدومين حيث $n \geq r$ فإن عدد ترتيبات r عنصراً من مجموعة ذات n عنصراً هو العدد الطبيعي $P(n,r)$ المعرف كما يأتي:

$$\boxed{P(n,r)=n(n-1)..........(n-r+1)}$$

مثال: يتكون مجلس إدارة شركة من 10 أشخاص، يراد تعيين لجنة مؤلفة من:

(مدير ومعاون مدير ومحاسب) بكم طريقة يتم هذا الاختيار

الحل:

إن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ، هو عدد ترتيبات 3عناصر من مجموعة ذات 10عناصر، فهو إذن يساوي $P(10,3)=10\times 9\times 8=720$ أي 720 لجنة

3) التبديلات:

إذا كانت E مجموعة ذات n عنصراً فإننا نسمي كل ترتيبة ذات n عنصراً من E تبديلة للمجموعة E ، ويكون عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصراً يساوي

$$P(n,n)=n(n-1)..........2.1$$

ونرمز: $\boxed{n!=n(n-1)..........2.1}$ ونقرأ عاملي n

فيكون عدد التبديلات مجموعة ذات n عنصراً :

$$\boxed{p_n=p(n,n)=n!}$$

مثال : تبديلات عناصر المجموعة $E=\{a,b,c\}$ عددها $3!=3\times 2\times 1=6$ والتبديلات هي :

$$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$$

الحالة الثالثة إذا كان السحب معاً (السحب بآن واحد)أو (تآنياً)

(سحب ثلاث بطاقات معاً) من البطاقات $E=\{a,b,c,d\}$

فإن $\Omega=\{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$

$n(\Omega)=4$ وهو عدد المجموعات الجزئية ذات ثلاث عناصر من عناصر المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

نلاحظ أن التبديلات

$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$

تمثل مجموعة واحدة $\{a,b,c\}$ أي أن : $n(\Omega)=\dfrac{P(4,3)}{3!}=4$

4)التوفيقات :

تعريف: إذا كان n ، r عددين طبيعيين غير معدومين حيث $(0\le r\le n)$ فإن عدد توفيقات r عنصراً من مجموعة ذات n نصراً هو العدد الطبيعي $C(n,r)$ المعرف كما يأتي:

$$\boxed{C(n,r)=\frac{p(n,r)}{r!}}$$ أو $$C(n,r)=\frac{n(n-1)..........(n-r+1)}{r!}$$

أو إذا كان n ، r عددين طبيعيين غير معدومين حيث $n\ge r$ فإن عدد طرق سحب r عنصراً متفقة بالصفة من مجموعة ذات n عنصراً هو العدد الطبيعي $C(n,r)$

المعرف كما يأتي: $$C(n,r)=\frac{n(n-1)..........(n-r+1)}{r!}$$

ويكتب بصيغة العاملي على النحو التالي: $$\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

نتائج:

1) إذا كان $r>n$ ، فإنه لا توجد أية توفيقة ذات r عنصراً من المجموعة E ومنه $C(n,r)=0$

2) إذا كان $r=0$ ، فإنه توجد مجموعة وحيدة تضم صفر عنصراً، هي المجموعة الخالية ، إذن توجد توفيقة وحيدة ذات صفر عنصراً من المجموعة E ، ومنه $C(n,0)=1$

3) $C(n,n)=\dfrac{n(n-1).....2\times 1}{n!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

4) $C(n,r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

5) $C(n,n-r)=C(n,r)$ (خاصة الاتمام)

6) من الخاصة الأخيرة نستنتج أنه إذا كان $C(n,m)=C(n,r)$ ، فإن: $m=r$ أو $m+r=n$

عدد عناصر $n(\Omega)$ في بعض الاختبارات:

الاختبار	$n(\Omega)$
ي قطعة نقود مرّة واحدة	$2^1=2$
ي قطعتي نقود مرّة واحدة أو رمي قطعة نقود مرتين	$2^2=4$
ي ثلاث قطع نقود مرّة واحدة أو رمي قطعة نقود ثلاث مرّات	$2^3=8$
ي n قطعة نقود مرّة واحدة أو رمي قطعة نقود n مرّة	2^n
ي حجر نرد مكعب مرّة واحدة	$6^1=6$
ي حجري نرد مكعب مرّة واحدة أو رمي حجر نرد مرتين	$6^2=36$
ي n حجر نرد مكعب معاً مرّة واحدة أو رمي حجر نرد n ة	6^n
ي حجر نرد رباعي مرّة واحدة	$4^1=4$
ي حجري نرد رباعي مرّة واحدة أو رمي حجر نرد مرتين	$4^2=16$
ي n حجر نرد رباعي معاً مرّة واحدة أو رمي حجر نرد n ة	4^n
ب r عنصر بالتتالي مع الإعادة ومراعاة الترتيب من n صر	n^r
ب r عنصر دون إعادة ومراعاة الترتيب من n عنصر $(1\le r\le n)$	$(n,r)=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$
ب r عنصر معاً من n عنصر $(0\le r\le n)$	$n,r)=\dfrac{n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)}{r!}$

④ الحدث

هو كل مجموعة جزئيّة من فضاء العينة Ω ويُرمز A، B ، H ، ....

وقوع الحدث: نقول إن الحدث A قد وقع (أو تحقق) إذا ظهر بعد تنفيذ الاختبار أحد عناصر A

مثال ذلك:

في اختبار إلقاء حجر النّرد مرّة واحدة، الحدث A ظهور عدد فردي $A=\{1,3,5\}$ يقع إذا ظهر بعد تنفيذ الاختبار 1 أو 3 أو 5

وقوع حدث : إذا كان A حدثاً مرتبطاً بتجربةٍ ما ،فإنه بعد إجراء التجربة لا بد من ظهور أحد الإمكانات ندعو هذا الإمكان الذي يظهر والذي هو عنصر من Ω " واقعة "

ونرمز له بالرمز (x) فإذا كان $x \in A$ قلنا إن الحدث A قد وقع

وإذا كان $x \notin A$ قلنا إن الحدث A لم يقع

أو نقول إن الحدث A قد وقع (أو تحقق) إذا ظهر بعد تنفيذ الاختبار أحد عناصر A

مثال ذلك:

في اختبار إلقاء حجر النّرد مرّة واحدة، الحدث A ظهور عدد فردي $A=\{1,3,5\}$ يقع إذا ظهر بعد تنفيذ الاختبار 1 أو 3 أو 5

مجموعة الأحداث:

إذن A حدث يكافئ $A \subseteq \Omega$

وإذا كانت $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعة جميع الأحداث المتعلقة بالتجربة يكون : $A \subseteq \Omega \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

($\mathcal{P}(\Omega)$ يدل على مجموعة أجزاء المجموعة Ω)

وإذا كان عدد عناصر Ω هو $n(\Omega)=m$ فإن عدد عناصر $\mathcal{P}(\Omega)$ هو $n(\mathcal{P}(\Omega))=2^m$

مثال : إذا كانت $\Omega=\{a,b,c\}$ فإن $\mathcal{P}(\Omega)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\Omega\}$

جبر الأحداث:

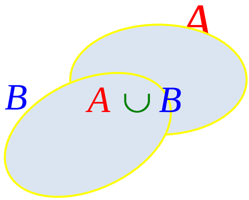
❶ **الحدث البسيط**: هو مجموعة جزئيّة من فضاء العينة ذات عنصر وحيد

❷ **الحدث الأكيد** : Ω حدث ونُسمّيه الأكيد لأن نتيجة التجربة هي أحد عناصره.

❸ **الحدث المستحيل** : ϕ بما أن $\phi \subseteq \Omega$ إذن ϕ حدث ونُسمّيه الحدث المستحيل

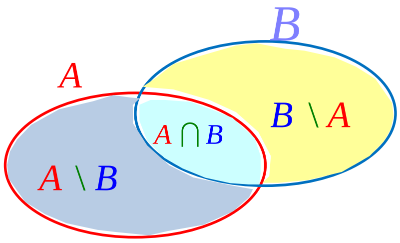
ففي تجربة إلقاء حجر النرد النظامي مرة واحدة يكون ظهور وجه عليه 7 نقط حدثاً مستحيلاً .

④ اجتماع حدثين :



اجتماع حدثين A و B هو حدث يتضمن كافة نتائج التجربة التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إليهما معاً ونرمز له بالرمز $A \cup B$.

⑤ تقاطع حدثين :



تقاطع حدثين A و B هو حدث يتضمن نتائج التجربة التي تنتمي إلى A و إلى B معاً ونرمز له بالرمز $A \cap B$.

<u>الاجتماع والتقاطع يحققان:</u>

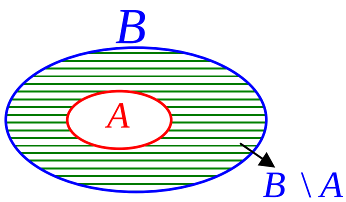
خاصة اللا نمو : $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

خاصة توزيع التقاطع على الاجتماع: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

خاصة توزيع الاجتماع على التقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

⑥ الفرق بين حدثين :

الفرق بين حدثين A و B هو حدث يتضمن كافة نتائج التجربة التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونرمز له بالرمز $A \setminus B$.



<u>ملاحظة</u> : إذا كانت $B \subseteq A$ فإن $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$

و $A \setminus B = \phi$ و $B \setminus A \subseteq B$

⑥ الحدثان المتتامان (المتضادان):

متمم حدث A هو حدث يتضمن كافة نتائج التجربة التي لا تنتمي إلى A ونرمز له بالرمز A' .

ينتج من التعريفين السابقين أن :

$A \cup A' = \Omega$ ، $A \cap A' = \phi$ ، $A = \Omega \setminus A'$ ، $A' = \Omega \setminus A$ ، $(A')' = A$

<u>**قوانين دومورغان**</u> : $A \cup B = (A \cap B)' \quad , \quad A \cap B = (A \cup B)' \quad , A \setminus B = A \cap B'$

⑦ <u>الحدثان المتنافيان (المنفصلان)</u> : هما حدثان ينفي وقوع أحدهما وقوع الآخر

إذن تقاطعهما ϕ ، فإذا كان A ، B متنافيين يكافئ $A \cap B = \phi$

<u>**لاحظ أن كل حدثين متتاميين هما حدثين متنافيين لكن العكس غير صحيح دوماً**</u>

مثال 1

في تجربة رمي حجر نرد مرّة واحدة $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $n(\Omega)=6$

الأحداث : $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$..... أحداث بسيطة

$\{3,5,6\}$, $\{1,2\}$ حدثان متنافيان (لاحظ غير متنامين)

$\{4,2,6\}$, $\{1,3,5\}$ حدثان متنامان

مثال 2

نلقي قطعة نقود ثلاث مرّات ونُلاحظ تتابع ظهور الشّعار T والكتابة H فتكون

$$\Omega=\{(T,T,T)\ ,\ (H,T,T)\ ,\ (T,H,T)\ ,(T,T,H)\ ,(H,H,T),$$
$$(H,T,H)\ ,(T,H,H)\ ,(H,H,H)\}$$

A حدث ظهور شعارين متتاليين أو أكثر

B : حدث ظهور نفس النّتائج في الرميات الثلاث

C : حدث ظهور كتابتين على الأقل

D : حدث ظهور شعارين فقط خلال الرميات الثلاث

اذكر حدثين متنافيين ، و اذكر حدث مستحيل و اكتب متممة A

أوجد $A\setminus D$ ، $D\setminus A$ ، $A\cap B$, $A\cup D$, $A\cup D$

الحل:

$$A=\{\ (T,T,T)\ ,\ (H,T,T)\ ,\ (T,T,H)\}$$

$$B=\{(H,H,H),(T,T,T)\}$$

$$C=\{(H,H,T),(H,T,H)\ ,(T,H,H)\ ,(H,H,H)\}$$

$$D=\{(H,T,T)\ ,\ (T,H,T)\ ,(T,T,H)\}$$

$A\cap C=\phi$ فإن $A\ ,C$ متنافيان

ويكون حدث ظهور الشّعار خمس مرّات في هذه التّجربة هو المجموعة الخالية

متممة A هي : $A'=\{\ (T,H,T)\ ,\ (H,H,T),(H,T,H)\ ,(T,H,H)\ ,(H,H,H)\}$

$A\setminus D=\{(T,T,T)\}$ هو الحدث البسيط المكون من ظهور الشّعار في الرميات الثلاث

$D\setminus A=\{(T,H,T)\}$ هو الحدث البسيط المكون من ظهور الكتابة فقط في الرمية الثانية

$A\cap B=\{(T,T,T)\}$ هو الحدث البسيط المكون من ظهور الشّعار في الرميات الثلاث

$$A \cup B = \{(H,H,H), (T,T,T), (H,T,T), (T,T,H)\}$$

$$A \cup D = \{(H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,H,H)\}$$
$$= \Omega \setminus \{(T,T,T)\}$$

وهو الحدث المتمم لظهور ثلاث شعارات

مثال ③ نلقي حجر نرد مكعب، إذا ظهرعدد فردي نلقي حجر نرد رباعي، وإن ظهر عدد زوجي نلقي قطعة نقود مرةً واحدة

1) اكتب فضاء العينة Ω لهذه التجربة

2) حدد نقاط العينة لكل من الأحداث التالية :

A : ظهور عدد زوجي على حجر النرد الرباعي

B : ظهور وجه H على قطعة النقود

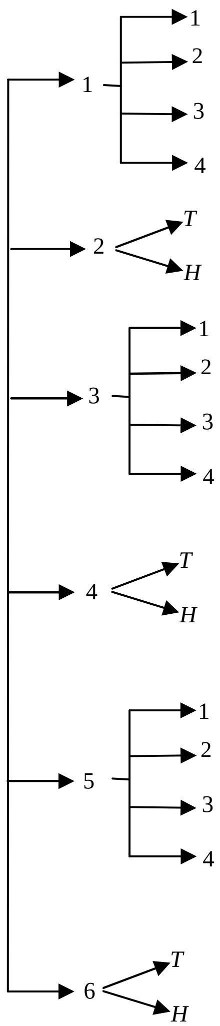
C : ظهور وجه الصورة T على قطعة النقود وعدد أقل من 5 على حجر النرد المكعب .

D : ظهور وجه الكتابة H على قطعة النقود أو عدد لا يقل تماماً عن 3 على حجر النرد المكعب

E : الحصول على A أو B

F : الحصول على A و D

3) بين أي زوجين من الأحداث السابقة هما حدثين متنافيين .



الحل:

(1

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1)(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),$$
$$(5,2),(5,3),(5,4)\ (2,H),(2,T),(4,H),(4,T),(6,H),(6,T)\}$$

(2

$$A = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

$$B = \{(2,H),(4,H),(6,H)\}$$

$$C = \{(2,T),(4,T)\}$$

$$D = \{(6,H),(4,H),\}(1,4),(3,4),(5,4)\}$$

$$E = A \cup B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4),(2,H),(4,H),(6,H)\}$$

$F = A \cap D = \{(1,4),(3,4),(5,4)\}$

3)الأحداث المتنافية : كل زوج من هذه الأزواج حدثين متنافيين

$(A$ و $B)$ ، $(A$ و $C)$ ، $(C$ و $B)$ ،

$(C$ و $D)$ ، $(F$ و $B)$ ، $(F$ و $C)$ ، $(E$ و $C)$

5 دالة الاحتمال

تعريف: إذا كان Ω فضاء العيّنة لاختبار معين، $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعة الأحداث

فإن دالة الاحتمال هي كل دالة: $P:\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ وتحقق:

1) $P(\Omega) = 1$

2) إذا كان A و B حدثين متنافيين فإنّ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ونسمّي الثّلاثية $(\Omega, \mathcal{P}(S), P)$ فضاءً احتمالياً

ملاحظة

إذا كانت $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ مجموعة من الأحداث المتنافية مثنى فإنّ

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

وإذا كانت $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة Ω

(أي أنّ كلاً من هذه المجموعات : غير خالية ومتنافية مثنى و اجتماعها يساوي Ω) فإنّ :

$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega)$

أي $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$

مثال 1

يتسابق ثلاثة عدائين A ، B ، C معاً

إذا كان احتمال فوز العداء A هو ضعفي احتمال فوز العداء B ، واحتمال فوز العداء B هو ضعفي احتمال فوز العداء C فما هو احتمال فوز كل واحد منهم ؟

الحل

نفرض $P(C) = x$ فيكون $P(B) = 2x$ و $P(A) = 4x$ و A , B , C تجزئة للمجموعة Ω

إن $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

إذن $4x + 2x + x = 1$ ومنه $x = \frac{1}{7} = P(C)$ ومنه $P(B) = \frac{2}{7}$ ، $P(A) = \frac{4}{7}$

مثال ❷

نلقي ثلاث قطع نقدية معاً نُلاحظ عدد الشّعارات T التي تظهر في هذه التّجربة إن فضاء العينة هو

$$\Omega=\{(T,T,T)\ ,\ (H,T,T),\ (T,H,T),(T,T,H),(H,H,T),$$
$$(H,T,H),(T,H,H),(H,H,H)\}$$

إن عدد مرّات ظهور الشّعار هي عناصر المجموعة $\{3,2,1,0\}$ حيث يدل الصفر على عدم ظهور الشّعار ، والعدد 1 يدل على ظهور الشّعار مرّة واحدة ... وهكذا

$n(\Omega)=8$ حيث يدل $n(\Omega)$ على عدد عناصر المجموعة Ω

$$P(3)=\frac{1}{8}\ ،\ P(2)=\frac{3}{8}\ ،\ P(1)=\frac{3}{8}\ ،\ P(0)=\frac{1}{8}$$

نُلاحظ أنّ :

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$

⑥ الفضاء المنتهي المتساوي الاحتمالات (المنتظم)

تعريف

الفضاء المتساوي الاحتمالات هو كل فضاء احتمالي منته $\Omega=\{a_1,a_2,....,a_n\}$ يكون لجميع حوادثه الابتدائية الاحتمال ذاته

فإذا كان $n(\Omega)=m$ ، فإن احتمال وقوع الحدث البسيط $\{a\}$ حيث $a\in\Omega$ هو $P(A)=\frac{1}{m}$

وإذا كان الحدث A مؤلفاً من r عنصراً فإن $P(A)=r\times\frac{1}{m}=\frac{r}{m}$

وينتج من ذلك أن احتمال وقوع الحدث A في فضاء عينة منته Ω ومتساوي الاحتمالات يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω أو بتعبيرٍ آخر

$$P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$P(A)=\frac{\text{عدد طرائق وقوع الحدث } A}{\text{عدد طرائق وقوع فضاء العينة } \Omega}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

⑦ مبرهنات الاحتمالات:

مبرهنة ①

إذا كانت ϕ هي المجموعة الخالية فإن $P(\phi)=0$

البرهان

A و ϕ حدثان متنافيان و $A\cup\phi=A$

إذن $P(A\cup\phi)=P(A)$

$P(A)+P(\phi)=P(A)$ ومنه $P(\phi)=0$

مبرهنة ②

إذا كان A' هو الحدث المتمم للحدث A ، كان $P(A')=1-P(A)$

البرهان

A و A' حدثان متنافيان و $A\cup A'=\Omega$

إذن $P(A\cup A')=P(\Omega)$

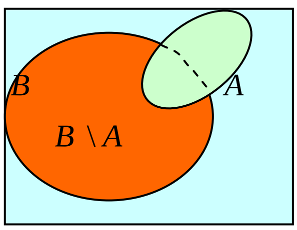
أو $P(A)+P(A')=1$ ومنه $P(A')=1-P(A)$

مبرهنة ③

إذا كان A و B حدثين وكان $A\subseteq B$ ، كان $\boxed{P(A)\le P(B)}$

البرهان

Ω



A و $B\setminus A$ حدثان متنافيان

و $B=(B\setminus A)\cup A$

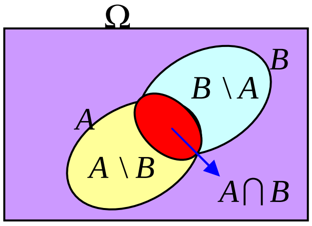
ومنه $P(B)=P(B\setminus A)+P(A)$

بما أن $P(B\setminus A)\ge 0$ إذن $P(A)\le P(B)$

مبرهنة ④

أياً كان الحدثان A و B من Ω ، كان $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

البرهان



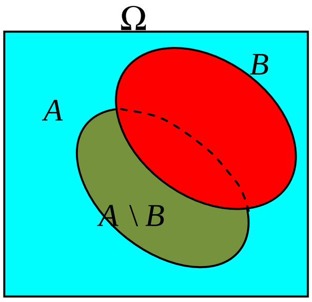
A/B و $A\cap B$ حدثان متنافيان

و $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

إذن $P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)$

ومنه $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

مبرهنة ⑤



أياً كان الحدثان A و B من Ω ، كان

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

البرهان

$A\setminus B$ و B حدثات متنافيان

إن $A\cup B=(A\setminus B)\cup B$

ومنه $P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B)$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

تعمم هذه المبرهنة إلى حالة الحدث $A\cup B\cup C$

فتكون على النحو التالي :

$$(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

البرهان :

$$P(A\cup B\cup C)$$
$$=P(A\cup(B\cup C))$$
$$=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P((A\cap B)\cup(A\cap C))$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-\left[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)\right]$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

أمثلة محلولة

① يوجد في صندوق 10 مصابيح منها 4 غير صالحة ، نختار مصباحين عشوائياً معاً ، فإذا كان الحدث A يدل على اختيار مصباحين غير صالحين الحدث B يدل على اختيار مصباحين صالحين أوجد $P(A)$ ، $P(B)$ ثم أوجد احتمال الحدث H الدال على أن أحد المصباحين على الأقل غير صالح.

الحل

عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مصباحين من 10 مصابيح هي

$C(10,2)=\dfrac{10\times 9}{2\times 1}=45$ ، أي أن عدد الحالات الممكنة هو $n(\Omega)=45$

عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مصباحين غير صالحين هي

$C(4,2)=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$ أي $n(A)=6$

عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مصباحين صالحين هي

$C(8,2)=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}=28$ أي $n(B)=28$

فيكون $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{28}{45}$$

أما الحدث H فهو الحدث المضاد لاختيار مصباحين صالحين أي أن

$$P(H)=1-P(B)=1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$$

② يحتوي صندوق على 12 كرة لها نفس الملمس ، منها 5 حمراء والباقي بيضاء، اخترنا عشوائياً ثلاثة كرات معاً احسب

1) احتمال أن تكون جميع الكرات المسحوبة بيضاء

2) احتمال أن يكون بين الكرات المسحوبة كرة واحدة فقط حمراء

3) احتمال أن يكون بين الكرات المسحوبة كرة واحدة على الأقل حمراء

الحل

توجد $\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$ $C(12,3)=$ طريقة لاختيار ثلاثة كرات من بين 12 كرة

أي $n(\Omega)=220$

1) عدد الكرات البيضاء يساوي $12-5=7$

نفرض A الحدث الدال على اختيار ثلاث كرات بيضاء

عدد طرائق اختيار ثلاث كرات بيضاء هي $C(7,3)=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ طريقة

$$P(A)=\frac{C(7,3)}{C(12,3)}=\frac{35}{220}=\frac{7}{44}$$

2) نفرض B الحدث الدال على اختيار (كرة واحدة فقط حمراء)

في هذه الحالة نختار كرتين بيضاوين وكرة حمراء

فيكون عدد طرائق اختيار ثلاث كرات واحدة فقط حمراء هي

$$C(5,1)\times C(7,2)=5\times21=105$$

ومنه $P(B)=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$

3) نفرض الحدث H الدال على (كرة واحدة على الأقل حمراء) :

إنّ الحدث H هو الحدث المضاد (المتمم) لأن تكون جميع الكرات بيضاء ،

إذن هو الحدث المضاد للحدث A فيكون : $H=A'$

$$P(H)=1-P(A)=1-\frac{7}{44}$$

$$P(H)=\frac{37}{44}$$

أو طريقة أخرى :

$$P(H)=\frac{C(5,1)\times C(7,2)+C(5,2)\times C(7,1)+C(5,3)}{455}$$

$$P(H)=\frac{105+70+10}{220}=\frac{185}{220}=\frac{37}{44}$$

3 إذا كانت نسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء في إحدى المدن هي 80% وكانت نسبة الأشخاص الذين شعرهم أسود 60% ، ونسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء وشعرهم أسود 50% .

فإذا اخترنا شخصاً عشوائياً من هذه المدينة أوجد احتمال :

1) أن يكون عيونه سوداء أو شعره أسود.

2) أن لا يكون ذو عيون سوداء .

3) أن يكون ذو شعرٍ أسود وعيون ليست سوداء.

4) أثبت أن $P(A \cup B') = 1 - P(B) + P(A \cap B)$

واحسب احتمال أن يكون الشخص الذي اخترناه ذو عيون سوداء أو شعره ليس أسوداً

الحل : نفرض A الحدث الدال على أن الشخص الذي تم اختياره ذو عيون سوداء ، B الحدث الدال على أن الشخص الذي تم اختياره ذو شعرٍ أسود فيكون:

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} \quad ، \quad P(B) = \frac{6}{10} \quad ، \quad P(A) = \frac{8}{10}$$

1) الحدث المطلوب احتماله $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

2) الحدث المطلوب احتماله A'

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

3) الحدث المطلوب احتماله $A' \cap B = B \setminus A$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \quad \text{ومنه} \quad P(A' \cap B) = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

4)

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A \setminus B)$$

$$= P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B))$$

$$P(A \cup B') = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

أن يكون الشخص الذي اخترناه ذو عيون سوداء أو شعره ليس أسوداً هو الحدث $A \cup B'$

$$P(A \cup B') = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{6}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

4 بفرض A و B حدثان من فضاء العينة Ω بحيث:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4} \quad ، \quad P(B)=\frac{5}{8} \quad ، \quad P(A)=\frac{1}{2}$$

أوجد:

$P(A\cup B)$ ، $P(A')$ ، $P(B')$ ، $P(B\cap A')$ ، $P(A\cap B')$، $P(A'\cap B')$ ، $P(A'\cup B')$

الحل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)=\frac{4}{8}+\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$$
$$P(A')=1-P(A)$$
$$P(A')=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$P(B')=1-P(B)$$
$$P(B')=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$
$$P(B\cap A')=P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(B\cap A')=\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$
$$P(A\cap B')=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B')=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$
$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$$
$$P(A'\cap B')=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$
$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$$
$$P(A'\cup B')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

5 بفرض A و B حدثان من فضاء العينة Ω بحيث:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6} \quad ، \quad P(A')=\frac{1}{3} \quad ، \quad P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

أوجد: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B')$، $P(A'\cup B')$

الحل:

$$P(A)=1-P(A')$$
$$P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+P(B)-\frac{1}{6}$$
ومنه $P(B)=\frac{1}{4}$

$$P(A\cap B')=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B')=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cup B)$$
$$P(A'\cup B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

6 في تجربة رمي حجري نرد معاً مرة واحدة (أو حجر نرد مرتين متتاليتين).

احسب احتمالات الحدثين:

A : ظهور الوجه ذي النّقطتين على واحد فقط من الوجهين الظّاهرين

B : مجموع نقط الوجهين الظّاهرين أصغر تماماً من 7

واحسب احتمالات: $A\cap B\ ,A\cup B\ ,B\cap A'\ ,A'\cap B',A'\cup B'$

الحل:

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),......,(1,6),(2,1),...,.....,....(6,6)\}$$

ويمكن كتابة عناصر Ω بجدول ونجد $n(\Omega)=6^2=36$

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

$$A=\{(2,1),(1,2),(2,3),(3,2),(4,2),(2,4),(5,2),(2,5),(6,6),(2,2)\}$$
$$=\{(1,1)(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(4,2),(3,2),(3,3),(2,2)\}$$

كما يمكن تمثيل الحدثين بجدول فإذا اعتبرنا أنّ الرّمز $\times$ يدل على ظهور نقطتين على وجه واحد فقط من الوجهين الظّاهرين، والرّمز O يدل على مجموع نقط الوجهين الظّاهرين أصغر تماماً من 7 والرّمز $\otimes$ لتقاطع الحدثين السابقين فهو الدّال على ظهور نقطتين على وجه واحد فقط من الوجهين ومجموع نقط الوجهين الظّاهرين أصغر تماماً من 7 ، فإننا نحصل على الجدول التّالي:

	1	2	3	4	5	6
1	O	$\otimes$	O	O	O	
2	$\otimes$	O	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$
3	O	$\otimes$	O			
4	O	$\otimes$				
5	O	$\times$				
6		$\times$				

ونجد مباشرةً من الجدول أنّ

$n(A)=10$

$n(B)=15$

$n(A\cap B)=6$

$n(A\cup B)=19$

فيكون :

$$P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$P(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=\frac{19}{36}$$

$$P(B\cap A')=P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(B\cap A')=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$$

$$P(A'\cap B')=\frac{17}{36}$$

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$$

$$P(A'\cup B')=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

7 في تجربة رمي حجري نرد رباعيين معاً مرة واحدة أو (حجر نرد رباعيين مرتين متتاليتين).

احسب احتمالات الحدثين:

A : أن يكون الوجه ذي النّقطتين على قاعدة رباعي وجوه واحد فقط

B : مجموع نقط قاعدتي الرباعيين أكبر تماماً من 5

واحتمالات: $(A\cap B)$, $(A\cup B)$, $(B\cap A')$, $(A'\cap B')$, $(A'\cup B')$

الحل:

يمكن كتابة فضاء العينة كما في الجدول :

	1	2	3	4
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$

الحدث $A=\{(1,2),(3,2)(4,2),(2,1),(2,3),(2,4)\}$

والحدث $B=\{(3,4),(4,2),(4,4),(3,3),(2,4),\}(4,3)$

$n(\Omega)=16\quad , n(A)=6\quad , \quad n(B)=6\ ,\ n(A\cap B)=2\ ,\ n(A\cup B)=10$

$$P(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$
$$P(B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$
$$P(A\cap B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$
$$P(A\cup B)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$
$$P(B\cap A')=P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)\ ,\quad P(B\cap A')=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$
$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)\quad ,\quad P(A'\cap B')=\frac{3}{8}$$
$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)\quad ,\quad P(A'\cup B')=\frac{7}{8}$$

التجارب المتكررة القانون الاحتمالي ثنائي الحد:

تذكرة بقانون ثنائي الحد:

$$(a+b)^n = C(n,0)\cdot a^n + C(n,1)\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + C(n,2)\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + ...+ C(n,n)\cdot b^n$$

أو $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C(n,k)\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

تمهيد : في تجربة إلقاء قطعة نقد خمس مرات $n(\Omega)=32$ إذا اعتبرناالحدث A عدد مرات ظهور الصورة في الخمس رميات :

عدد الصور	0	1	2	3	4	5
$n(A)$	1	5	10	10	5	1

احتمال ظهور الصورة خمس مرات يساوي : $\frac{1}{32}$ و $C(5,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$

احتمال ظهور الصورة أربع مرات يساوي : $\frac{5}{32}$ و $C(5,4)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$

احتمال ظهور الصورة ثلاث مرات يساوي : $\frac{10}{32}$ و $C(5,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$

احتمال ظهور الصورة مرتين : $\frac{10}{32}$ و $C(5,2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة : $\frac{5}{32}$ و $C(5,1)\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$

احتمال عدم ظهور الصورة: $\frac{1}{32}$ و $C(5,0)\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

نلاحظ أن هذه الحدود هي الحدود المتتالية في منشور ثنائي الحد $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$ ولحساب احتمالات هذه الحالات في التجارب المستقلة ذات الاحتمال الثابت نستخدم القانون الاحتمالي ثنائي الحد

القانون الاحتمالي ثنائي الحد :

بما أن عدد مرات وقوع الحدث في التجارب المتكررة التي عددها n قد تأخذ القيم $0, 1, 2, ..., n$ وهي حالات كل منها ليست خالية ومتنافية مثنى واجتماعها Ω فإن: $P(0)+P(1)+.........+P(n)=1$

ويمكننا أن نعمم : إذا كانت التجربة هي وقوع حدث بعينه أو عدم وقوعه

إذاكان احتمال وقوع الحدث هو p فإن احتمال عدم وقوعه هو $q=1-p$ عندماتكرر التجربة n مرة فإن:

احتمال وقوع هذا الحدث في r مرة حيث $n \ge r > 0$ وليكن حدث A نرمز $A=\{X=r\}$ يساوي

$\boxed{P(A)=C(n,r)\cdot p^r\cdot q^{n-r}}$ أو $\boxed{f(r)=C(n,r)\cdot p^r\cdot q^{n-r}}$

مثال 1: في عائلة سبعة أبناء احسب احتمال أن يكون هؤلاء الأبناء ثلاث ذكور وأربعة إناث

الحل: احتمال وجود الذكر في العائلة يساوي احتمال وجود الأنثى يساوي $x=\frac{1}{2}$

ولفرض الحدث A أن يكون أبناء الأسرة ثلاث ذكور وأربعة إناث

فإن $P(A)=C(n,r)\cdot x^{r}\cdot(1-x)^{n-r}$

أي : $P(A)=C(7,3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{35}{96}$

مثال 2: احتمال إصابة رامي للهدف يساوي $\frac{7}{10}$ يطلق الرامي على الهدف 10 طلقات

1) ماهو احتمال إصابة الهدف في 8 طلقات

2) احتمال إصابة الهدف بأربع طلقات

3) احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات على الأقل

الحل: احتمال إصابة رامي للهدف يساوي $x=\frac{7}{10}$ ويكون احتمال عدم إصابة الرامي للهدف $1-x=\frac{3}{10}$

ورمزنا $\{x=r\}$ حدث إصابة الهدف بـ r طلقة

1) الحدث $\{x=8\}$ أن يصاب الهدف في 8 طلقات حسب القانون الاحتمالي ثنائي الحد

فإن $P(x=r)=C(n,r)\cdot x^{r}\cdot(1-x)^{n-r}$

من أجل : $r=8 \quad , \quad n=10$

نجد : $P(x=8)=C(10,8)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{8}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2}$

$$P(x=8)=C(10,2)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{8}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2}=(45)(7)^{8}(3)^{2}(10)^{-10}$$

$$P(x=8)=0.233474405$$

2) الحدث $\{x=4\}$ أن يصاب الهدف في 4 طلقات حسب القانون الاحتمالي ثنائي الحد

$P(B)=C(n,r)\cdot x^{r}\cdot(1-x)^{n-r}$ من أجل : $r=4 \quad , \quad n=10$

نجد : $P(x=4)=C(10,4)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{4}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{6}$

$P(x=4)=(210)(2401)(729)(10)^{-10}$ أو $P(x=4)=0.0367569090$

3) الحدث A أن يصاب الهدف بثلاث طلقات على الأقل فإن:

$$A'=\{x=0\}\cup\{x=1\}\cup\{x=2\}$$

حسب القانون الاحتمالي ثنائي الحد:

$$P(A')=P(x=0)+P(x=1)+P(x=1)$$

$$=C(10,0)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{0}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{10}+C(10,1)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{1}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{9}+C(10,2)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{8}$$

$$=0.0000059049+0.0001377810+0.0014467005$$

$$P(A')=0.0015903864$$

لكن : $P(A)=1-P(A')$

ومنه : $P(A)=1-0.0015903864=0.9984096136$

مثال 3: يقوم جابي الضرائب بزيارة تجار المدينة احتمال أن يجد التاجر في متجره $\frac{9}{10}$

ما احتمال أن يجد 7 تجار موجودين في متاجرهم خلال 10زيارات

الحل : الحدث A أن يجد جابي الضرائب التاجر في متجره $P(A)=\frac{9}{10}$ يكون $P(A')=\frac{1}{10}$

الحدث B أن يجد جابي الضرائب 7 تجار في متاجرهم في 10

$$P(B)=C(10,7)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{3}$$

$$=\frac{(120)(9)^{7}}{(10)^{10}}=0.057395628$$

مثال 4:في أحد المصانع لصنع العبوات الفارغة احتمال أن تكون العلبة غير صاحة هو $\frac{1}{100}$

فماهو احتمال أن تكون العلبة الخامسة أول علبة غير صالحة

الحل:

حسب توزيع ثنائي الحد :احتمال أن تكون العلبة صالحة $x=\frac{1}{100}$ واحتمال أن تكون العلبة غير صالحة $1-x=\frac{99}{100}$

والسؤال يدل عل أن تكون العلب الأربعة الأولى صالحة والخامسة غير صالحة ولنفرض أنه حدث A

$$P(A)=\left[C(4,0)\left(\frac{1}{100}\right)^{0}\left(\frac{99}{100}\right)^{4}\right]\times\left[C(1,1)\left(\frac{1}{100}\right)^{1}\left(\frac{99}{100}\right)^{0}\right]$$

$$P(A)=9.6\times10^{-3}$$

المبحث الثاني : الاحتمال الشرطي

من المسائل المهمة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتمالية ما بين الأحداث، فإذا كان A و B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر على وقوع الحدث الآخر.

ولتوضيح ذلك نتأمل المثال التّالي:

مثال:

في اختبار رمي حجر نرد مرة واحدة

1)أوجد احتمال ظهور عدد أولي

2)إذا حصلنا على عدد فردي احسب احتمال أن يكون هذا العدد عدد أولي

الحل :

1) فضاء العينة $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $A=\{2,3,5\}$ حدث ظهور عدد أولي يكون $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

2) فضاء العينة الجديد لهذه التجربة هو $B=\{1,3,5\}$ والحدث الذي وقع وهو جزء من فضاء العينة فهو $X=\{3,5\}$

فيكون: احتمال وقوع X علماً أن B قد وقع ونرمز له $P_1(X)=\frac{2}{3}$

إن $P_1(X)=\frac{2}{3}$ هو احتمال وقوع A علماً بأن B قد وقع ونرمز له

$P_B(A)=\frac{2}{3}$ أو $P(A\mid B)=\frac{2}{3}$

السؤال هل يمكن حساب الاحتمال P_1 بدلالة الاحتمال P ؟

إذا لاحظنا أن $X=A\cap B$ يكون

$$P_1(X)=P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ :\ P(B)\neq 0$$

لنبرهن أن P_1 دالة احتمال:

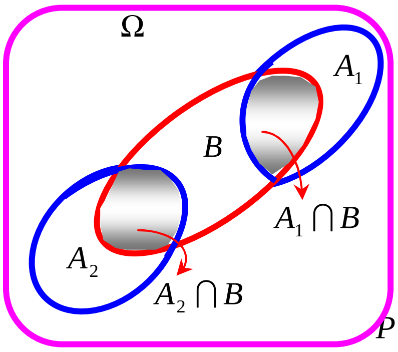
ليكن $(\Omega,\mathcal{P}(S),P)$ فضاءً احتمالياً، وليكن $B\in\mathcal{P}(S)$ حيث $P(B)\neq 0$

عندئذٍ الدالة المعرفة وفق: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ أو $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ دالة احتمال

الإثبات: $A\cap B\subseteq B$ **فيكون** $0\le P(A\cap B)\le P(B)$ **بالتقسيم على** $P(B)>0$ **نجد**

$$0\le\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le 1$$

أي $P(A\,|\,B)\in[0,1]$.......................(1)



$$P(\Omega\,|\,B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1 \quad \text{.....................(2)}$$

إذا كان A_2 , A_1 حدثين متنافيين فإنّ:

$$P((A_1\cup A_2)\,|\,B)=\frac{P[(A_1\cup A_2)\cap B]}{P(B)}$$

$$=\frac{P[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)]}{P(B)}$$

وبما أنّ الحدثين A_1 , A_2 متنافيان فإنّ الحدثين $A_1\cap B$, $A_2\cap B$ متنافيان أيضاً وبالتّالي:

$$P((A_1\cup A_2)\,|\,B)=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

$$P((A_1\cup A_2)\,|\,B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

ومنه $P((A_1\cup A_2)\,|\,B)=P(A_1\,|\,B)+P(A_2\,|\,B)$.....................(3)

من (1) , (2) , (3) نستنتج أن P_1 دالة احتمال لأنها حققت شروط دالة الاحتمال

تعريف: دالة الاحتمال الشرطي

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ نسمّي الدالة:

$$P_1:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]:P_1(A)=P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)\neq 0$$

دالة الاحتمال الشرطي بالنسبة إلى الحدث B.

نتائج:

① بما أنّ P_1 الة احتمال فإن جميع خواص دالة الاحتمال محققة ومنها:

1) $P(A'\,|\,B)=1-P(A\,|\,B)$

2) $P((A_1\cup A_2)\,|\,B)=P(A_1\,|\,B)+P(A_2\,|\,B)-P((A_1\cap A_2)\,|\,B)$

② إذا كان A , B حدثين من فضاء احتمالي $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$، وكان $P(B) \neq 0$

عندئذٍ:

➢ إذا كان $A \cap B = \varnothing$ فإنّ:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\varnothing)}{P(B)} = 0$$

➢ إذا كان $B \subseteq A$ فإنّ:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

مثال ①: في معهد للغات متعددة 75% من الطلبة يدرسون اللغة الإنكليزية و 40% يدرسون اللغة الفرنسية و 35% يدرسون اللغتين معاً. اخترنا عشوائياً طالباً واحداً من طلاب المعهد.

1) ما احتمال أنّ الطالب يدرس اللغة الإنكليزية علماً بأنه يدرس اللغة الفرنسية.

2) إذا علمت أن الطالب يدرس اللغة الإنكليزية ما احتمال أنّ الطالب يدرس اللغة الفرنسية.

3) ما احتمال أنّ الطالب يدرس اللغة الإنكليزية علماً بأنه لا يدرس اللغة الفرنسية.

الحل:

نفرض الحدث A: الطالب يدرس الإنكليزية

والحدث B: الطالب يدرس الفرنسية

فيكون: $P(A \cap B) = \frac{35}{100}$, $P(B) = \frac{40}{100}$, $P(A) = \frac{75}{100}$

1) الاحتمال المطلوب هو $P(A \mid B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{35}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$$

2) الاحتمال المطلوب هو: $P(B \mid A)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{35}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{7}{15}$$

3) الاحتمال المطلوب: $P(A|B')$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')} \quad ....(1)$$

$$P(A\cap B')=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$

إن:

$$=\frac{75}{100}-\frac{35}{100}=\frac{40}{100}$$

$$P(B')=1-\frac{40}{100}=\frac{60}{100}$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$P(A|B')=\frac{\frac{40}{100}}{\frac{60}{100}}$$

$$P(A|B')=\frac{2}{3}$$

مثال (2): عند إجراء فحص الزمرة الدموية لطلاب مدرستين (I) و (Π) كانت لدينا النتائج التّالية:

الزمرة الدموية	O	A	B	$A\ B$	المجموع
المدرسة I	8 0	1 3 8	1 4 2	9 7	4 5 7
المدرسة Π	1 3 0	1 8 0	1 7 2	1 0 0	5 8 2
المجموع	2 1 0	3 1 8	3 1 4	1 9 7	1 0 3 9

اخترنا طالباً عشوائياً والمطلوب:

1) ما احتمال أنّ تكون زمرة دمه AB علماً بأنه من المدرسة I ؟

2) ما احتمال أنّ يكون من المدرسة II علماً بأن زمرة دمه O ؟

3) ما احتمال أنّ يكون من المدرسة I أو زمرة دمه A ؟

الحل:

1)
$$P(AB|\mathrm{I})=\frac{P(\mathrm{I}\cap AB)}{P(\mathrm{I})}=\frac{97}{457}$$

2)
$$P(\Pi|O)=\frac{P(O\cap \mathrm{II})}{P(O)}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

3)
$$P(A\cup \mathrm{I})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{I})-P(A\cap \mathrm{I})$$

$$P(A\cup \mathrm{I})=\frac{318}{1039}+\frac{457}{1039}-\frac{138}{1039}=\frac{637}{1039}$$

مثال (3):

يحوي مغلف 9 بطاقات مرقمة بالأرقام 9 , 8 , 7, 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1

نسحب عشوائياً من المغلف بطاقتين معاً.

1)فإذا علمت أنّ رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين زوجياً

فما احتمال أنّ يكون مجموع رقمي البطاقتين عدداً زوجياً ؟.

2) احسب احتمال أن تكون إحدى البطاقات فقط من قواسم العدد 8إذا كان مجموع رقمي البطاقتين عدد فردي؟.

الحل:

1) نفرض الحدث A : مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين عدداً زوجياً.

B : رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين زوجياً.

فيكون المطلوب: $P(A|B)$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \quad ....(*)$$

لنحسب العددين: $n(A\cap B)$, $n(B)$

يقع الحدث B إذا كان (رقما البطاقتين زوجيين)

أو (رقم إحداهما زوجياً ورقم الأخرى فردياً) وبالتّالي:

$$n(B)=C(4,2)+C(4,1).C(5,1)$$
$$=6+4\times 5=26$$

يقع الحدث $A\cap B$ إذا كان رقما البطاقتين المسحوبتين عددين زوجيين، وبالتّالي:

$$n(A\cap B)=C(4,2)=6$$

بالتعويض في $(*)$ نجد:

$$P(A|B)=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$$

2) نفرض الحدث C إحدى البطاقات المسحوبة فقط من قواسم العدد 8 فيكون $C=\{1 , 2 , 4 ,8\}$

نفرض الحدث D مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين فردي

والمطلوب : $P(C|D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{n(C\cap D)}{n(D)} \quad ....(**)$

يقع الحدث D إذا سحبنا بطاقة ذات رقم فردي وأخرى ذات رقم زوجي

$$n(D)=C(5,1).C(4,1)=20$$

يقع الحدث $D\cap C$ إذا (سحبنا البطاقة ذات الرقم 1 مع البطاقة ذات الرقم 6)

أو (بطاقة من المجموعة $\{2,4,8\}$ مع بطاقة من المجموعة $\{3,5,7,9\}$)

$$n(D\cap C)=C(1,1)\cdot C(1,1)+C(3,1)\cdot C(4,1)=13$$

بالتعويض في $(**)$ نجد: $P(C\,|\,D)=\dfrac{13}{20}$

مثال (4):

ليكن $A\ ,\ B$ حدثين من فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ بحيث:

$$P(A\setminus B)=\frac{1}{8}\ \ ,\ \ P(A\cup B)=\frac{7}{8}\ \ ,\ \ P(B\,|\,A)=\frac{1}{2}$$

والمطلوب حساب:

$$P(B)\ ,\ P(A\cap B)\ ,\ P(A)\ ,\ P(A\,|\,B)\ ,\ P(A'|\,B)\ ,\ P(A\,|\,B')$$
$$P(A'\cap B')\ ,\ P(A\,|\,(A\cup B))$$

الحل:

$$P(A\setminus B)=\frac{1}{8}$$

$$P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{8}\ ....(1)$$

$$P(A\cup B)=\frac{7}{8}$$

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{8}..................(2)$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$$

أو $P(A)=2P(A\cap B)..................(3)$

يطرح (1) من (2) نجد :

$$P(B)=\frac{3}{4}$$

نعوض (3) في (1) نجد :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

وبالتعويض في (2) نجد :

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \mid B) - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$$

$$P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

$$P(A' \mid B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A \mid B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')}$$

$$= \frac{P(A \setminus B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \mid (A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \qquad : A \subseteq A \cup B$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

$$P(A \mid (A \cup B)) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}$$

قانون الاحتمال المركب:

❶ $P(B)\neq 0\ ,\ P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ نستنتج:

$P(B)\neq 0\ ,\ P(A\cap B)=P(B).P(A|B)$ احتمال وقوع الحدثين (A و B)

ويدل على وقوع Bثم وقوع A

❷ $P(B)\neq 0\ ,\ P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ نستنتج:

$P(A)\neq 0\ ,\ P(A\cap B)=P(A).\ P(B|A)$ احتمال وقوع الحدثين (A و B)

ويدل على وقوع Aثم وقوع B

ويمكن تعميم الخاصة الأخيرة على عدد منتهٍ من الأحداث، فإذا كانت

$A\ ,B\ ,C\in\mathcal{P}(\Omega)$ ، وكان $P(A)\neq 0$ و $P(A\cap B)\neq 0$ فإنّ:

$$P(A\cap B\cap C)=P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B).P(C|(A\cap B))$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A).P(C|(A\cap B))$$

وهو احتمال وقوع الأحداث(A و C و B) ويدل على وقوع A ثم وقوع B ثم وقوع C

(نسمي الصيغة الأخيرة قانون الاحتمال المركب أو قانون ضرب الاحتمالات)

مثال (1):

يحوي صندوق 10 كرة متماثلة (5 حمراء ، 3 بيضاء ، 2 سوداء) نسحب من الصّندوق عشوائياً ثلاث كرات بالتتالي دون إعادة. المطلوب:

1)ما احتمال أنّ تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء؟.

2)ما احتمال أنّ تكون الكرات الثّلاث من ألوانّ مختلفة ؟ (كرة من كل لون).

الحل:

1) نفرض الحدث A: الكرة المسحوبة الأولى حمراء.

B: الكرة المسحوبة الثانية بيضاء.

C: الكرة المسحوبة الثالثة سوداء.

فيكون المطلوب: $P(A\cap B\cap C)$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B\mid A).P\left(C\mid (A\cap B)\right)$$

$$=\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{24}$$

2) نفرض الحدث D: الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة فيكون:

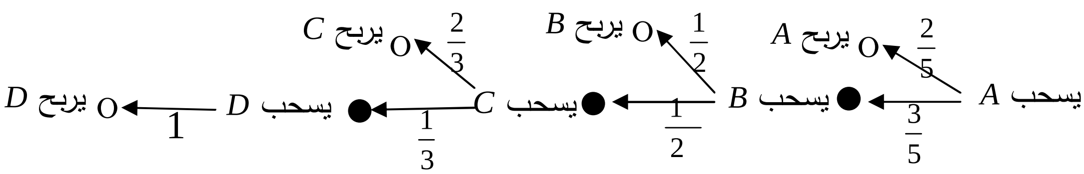
$$P(D)=P(A\cap B\cap C)\times 3!$$

$$=\frac{1}{24}\times 3!=\frac{1}{4}$$

مثال (2):

يحوي صندوق كرتين بيضاوين وثلاث كرات سود . يسحب كل من الأشخاص D , C, B, A على التتابع (وبهذا الترتيب) كرة ولا يعيدها إلى الصندوق . ويعد رابحاً أول شخص يسحب كرة بيضاء .
احسب احتمال ربح كل من الأشخاص الأربعة .

الحل : يساعدنا في فهم التجربة رسم شجرة بيانية :



فتكون احتمالات ربح كل منهم :

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P(A')\cdot P(B\mid A')$$

$$P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

$$P(C)=P(A')\cdot P(B\mid A')\cdot P\left(C\mid (A'\cap B')\right)$$

$$P(C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{10}$$

$$P(D)=P(A')\cdot P(B\mid A')\cdot P\left(C\mid (A'\cap B')\right)\cdot P\left(D\mid (A'\cap B'\cap C')\right)$$

$$P(D)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{10}$$

مثال (3):

يحوي جهاز كهربائي (5) كتل اثنتان منها معيبتان ، يقوم عامل إصلاح بسحب هذه الكتل واحدة تلو الأخرى وفحصها على جهاز خاص لمعرفة الكتلتين المعيبتين .

1) ما احتمال معرفة الكتلتين المعيبتين بعد انتهاء الفحص الثالث ؟

2) إذا علمنا أن الكتلتين المعيبتين عرفتا بعد انتهاء الفحص الثالث فما احتمال أن تكون الكتلة المفحوصة أولاً صالحة ؟

الحل:

1) يمكن معرفة الكتلتين المعيبتين بعد انتهاء الفحص الثالث إذا تم السحب بالترتيب الآتي:

(صالحة ، صالحة ، صالحة) أو (معيبة ، صالحة ، معيبة)، (صالحة ، معيبة ، معيبة)

نسمية حدث A يكون:

$$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$$

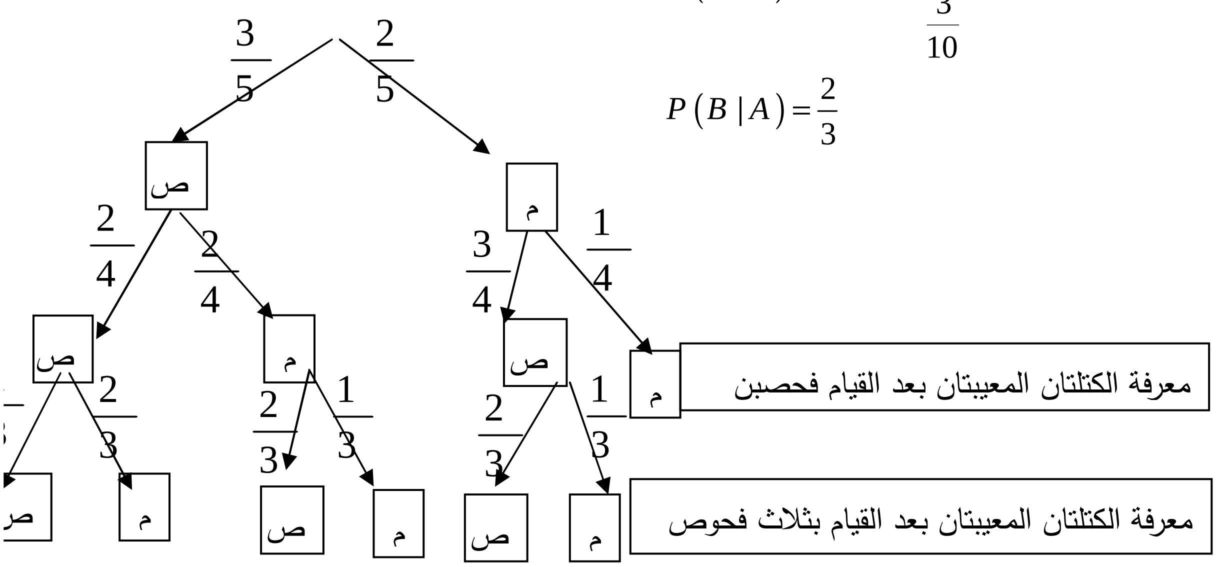
$$P(A)=\frac{3}{10}$$

2) بفرض B الكتلة المفحوصة أولاً صالحة

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A)=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}}$$

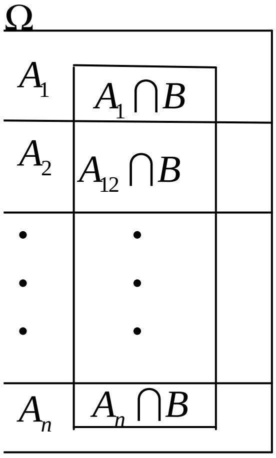
$$P(B|A)=\frac{2}{3}$$



مبدأ الاحتمالات الكلية: وقاعدة بايز

إذا كانت $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة Ω

(أي أنّ كلاً من هذه المجموعات: غير خالية و متنافية مثنى و اجتماعها يساوي Ω)



وكان $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ فإنّ : $B=\Omega \cap B=(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \cap B$

بتوزيع التقاطع على الاجتماع :

$$B=(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

وبما أن $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ أحداث متنافية مثنى فإن :

$(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, $(B \cap A_3),\dots,(B \cap A_n)$ أحداث متنافية مثنى

$$P(B)=P\left((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)\right)$$
$$=P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)+\dots+P(A_n \cap B)$$

أي $\boxed{P(B)=P(A_1)\cdot P\left(B \mid A_1\right)+P(A_2)\cdot P\left(B \mid A_2\right)+\dots\dots\dots+P(A_n)\cdot P\left(B \mid A_n\right)}$

تسمى قاعدة الاحتمالات الكلية

وتكتب : $\boxed{P(B)=\sum_{k=1}^{k=n} P(A_k)\cdot P(B \mid A_k)}$

بما أن : $P(A_h \cap B)=P(A_h)\cdot P\left(B \mid A_h\right)$ و $P(A_h \mid B)=\dfrac{P(A_h \cap B)}{P(B)}$

نستنتج أن :

$$P(A_h \mid B)=\frac{P(A_h)\cdot P(B \mid A_h)}{P(B)}$$

$$P(A_h \mid B)=\frac{P(A_h)\cdot P(B \mid A_h)}{P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)+\dots+P(A_n \cap B)}$$

أو $\boxed{P(A_h \mid B)=\dfrac{P(A_h)\cdot P(B \mid A_h)}{\sum_{k=1}^{k=n} P(A_k)\cdot P(B \mid A_k)} \quad : \quad h \in \{1,2,\dots\dots,n\}}$ والتي تسمى قاعدة بايز

ملاحظة : يمكن تلخيص مبدأ الاحتمالات الكلية وفق شجرة بيانية:

من أجل A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة للمجموعة Ω

$$\xrightarrow{P(A_1)} A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)} B|A_1 \Rightarrow P(A_1)\cdot P(B|A_1)$$

$$\xrightarrow{P(A_2)} A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)} B|A_2 \Rightarrow P(A_2)\cdot P(B|A_2)$$

$$\xrightarrow{P(A_3)} A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)} B|A_3 \Rightarrow P(A_3)\cdot P(B|A_3)$$

بعملية الجمع $\boxed{P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)}$

مثال ①:

في إحدى المدارس ، كانت نسبة مدرسو المواد الأدبية 40% منهم 10% يملكون سيارات ، و نسبة مدرسو المواد العلمية 60% منهم 30% يملكون سيارات اخترنا عشوائياً أحد مدرسي المدرسة.

a) أوجد احتمال أن يكون المدرس يملك سيارة؟

b) إذا كان المدرس الذي اخترناه يملك سيارة فما احتمال أن يكون مدرس مادة أدبية؟

الحل: نفرض: A الحدث الدال على أن المدرس الذي اخترناه يدرس مادة أدبية

B الحدث الدال على أن المدرس الذي اخترناه يدرس مادة علمية

D الحدث الدال على أن المدرس يملك سيارة خاصة

a) $D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$

$$P(D) = P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B)$$

ومنه :

$$P(D) = \frac{4}{10}\times\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\times\frac{3}{10} = \frac{11}{50}$$

b) المطلوب $P(A|D)$:

$$P(A\cap D) = \frac{4}{10}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{25}$$

فيكون $$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{2}{11}$$

مثال②: ثلاث صناديق متشابهة يحتوي الأول 10كرات منها 7كرات بيضاء والباقي سوداء ويحتوي الثاني 15كرة منها 8كرات بيضاء والباقي سوداء، ويحتوي الثالث 20كرة منها 13كرة بيضاء والباقي سوداء ، اختير أحد الصناديق عشوائياً أوجد:

a) احتمال سحب كرة بيضاء

b) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثالث؟

الحل:

a) نفرض A_1,A_2,A_3 أحداث سحب الصناديق الثلاثة وهي تجزئة للفضاء Ω

و نفرض B حدث سحب الكرة البيضاء

حسب مبتدأ الاحتمالات الكلية

$P(A_1)=\frac{1}{3}$ $\longrightarrow A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)=\frac{7}{10}} B|A_1 \Rightarrow P(A_1)\cdot P(B|A_1)=\frac{7}{30}$

$P(A_2)=\frac{1}{3}$ $\longrightarrow A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)=\frac{8}{15}} B|A_2 \Rightarrow P(A_2)\cdot P(B|A_2)=\frac{8}{45}$

$P(A_3)=\frac{1}{3}$ $\longrightarrow A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)=\frac{13}{20}} B|A_3 \Rightarrow P(A_3)\cdot P(B|A_3)=\frac{13}{60}$

بعملية الجمع : $\boxed{P(B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)+P(A_3)\cdot P(B\mid A_3)}$

$$P(B)=\frac{7}{30}+\frac{8}{45}+\frac{13}{60}$$

$$=\frac{42+32+39}{180}=\frac{113}{180}$$

(b

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(B)}$$

$$P(A_3|B)=\frac{\frac{13}{60}}{\frac{113}{180}}=\frac{39}{113}$$

مثال ③

يتم إنتاج الحاسوب في أحد شركات تجميع الحواسيب بواسطة ثلاث مجموعات تنتج المجموعة الأولى 20% من الإنتاج الكلي للشركة و تنتج المجموعة الثانية 30% من الإنتاج الكلي للشركة و تنتج المجموعة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للشركة ومعلوم من خلال عمليات فحص هذه الحواسيب المجمعة أن نسبة الإنتاج التالف للمجموعة الأولى 3% ونسبة الإنتاج التالف للمجموعة الثانية 4% ونسبة الإنتاج التالف للمجموعة الثالثة 7%

اخترنا عشوائياً حاسوب واحد من إنتاج الشركة قبل أن يعرض للفحص

$a)$ احسب احتمال أن يكون الحاسوب الذي اخترناه تالف

$b)$ إذا كان الحاسوب الذي اخترناه تالف احسب احتمال أن يكون من تجميع المجموعة الأولى؟

الحل :

a) نفرض A_1, A_2, A_3 أحداث تمثل المجموعات الثلاث وهي تجزئة للفضاء Ω

و نفرض B حدث اختيار حاسوب تالف

حسب مبدأ الاحتمالات الكلية

$P(A_1)=\frac{20}{100}$ $A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)=\frac{3}{100}} B|A_1 \Rightarrow P(A_1)\cdot P(B|A_2)=\frac{6}{1000}$

$P(A_2)=\frac{30}{100}$ $A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)=\frac{4}{100}} B|A_2 \Rightarrow P(A_2)\cdot P(B|A_2)=\frac{12}{1000}$

$P(A_3)=\frac{50}{100}$ $A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)=\frac{7}{100}} B|A_3 \Rightarrow P(A_3)\cdot P(B|A_3)=\frac{35}{1000}$

بعملية الجمع : $P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

$$P(B)=\frac{6}{1000}+\frac{12}{1000}+\frac{35}{1000}=\frac{53}{1000}$$

b)

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{6}{1000}}{\frac{53}{1000}}=\frac{6}{53}$$

مثال④:

صندوقان (II) و (I). يحوي الصّندوق (I) (6 برتقالات و 5 تفاحات)

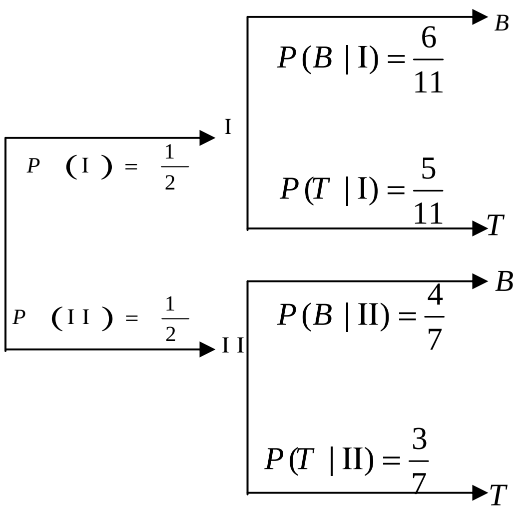
يحوي الصّندوق (II) (8 برتقالات و 6 تفاحات) يسحب طفل عشوائياً من أحد الصّندوقين حبة واحدة

1- ما احتمال أنّ تكون الحبة المسحوبة برتقالة ؟

2- إذا كانت الحبة المسحوبة تفاحة ما احتمال أنّ تكون من الصّندوق (II)

<u>الحل:</u>

نفرض الحدث B: الحبة المسحوبة برتقالة و الحدث T: الحبة المسحوبة تفاحة :



(1 $P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{6}{11} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{7} = \frac{43}{77}$

(2 T حدث أن تكون الحبة المسحوبة تفاحة المطلوب حسب قاعدة بايز

$$P(\Pi|T) = \frac{P(T \cap \mathrm{II})}{P(T)} = \frac{P(\mathrm{II})\cdot P(T \mid \mathrm{II})}{P(\mathrm{I})\cdot P(T \mid \mathrm{I}) + P(\mathrm{II})\cdot P(T \mid \mathrm{II})}$$

$$P(\Pi|T) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}$$

$$P(\Pi|T) = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+\frac{4}{11}} = \frac{33}{61}$$

تجارب السحب وحالاته:

يحتار بعض الطلبة في اختيار طريقة الحل المناسبة لتجربة السحب لتسهيل ذلك

أولاً: عند سحب عنصر واحد فقط:

فإن احتماله = $\dfrac{\text{عدد العناصر من نفس نوع العنصر المسحوب}}{\textbf{العدد الكلي للعناصر التي سحب منها}}$

مثال : اخترنا عشوائياً ورقة من أوراق رزنامة (تقويم سنوي) عدد أوراقه 365 ورقة كتب عليها اليوم والشهر احسب احتمال أن تكون هذه الورقة من أوراق شهر كانون الأول

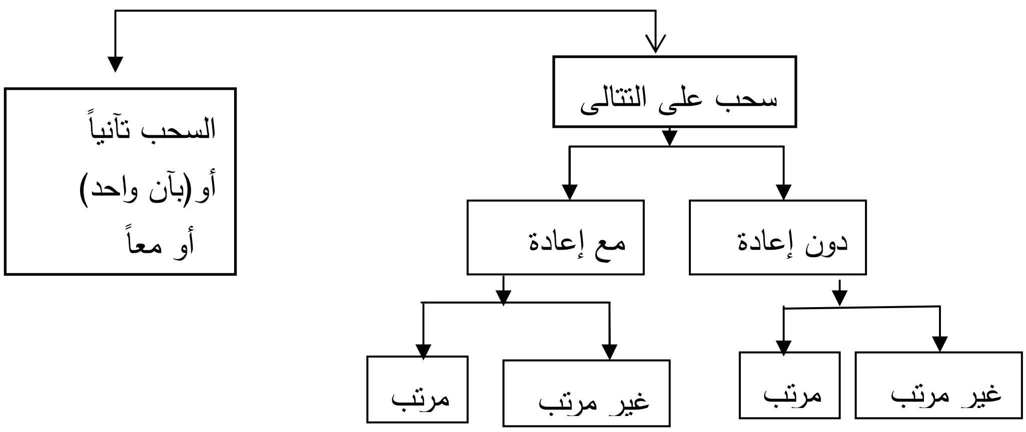
الحل : نعلم أن عدد أيام شهر كانون الأول 31 يوم فالاحتمال المطلوب $\frac{31}{365}$

مثال آخر : يحتوي مغلف سبع بطاقات مرقمة كتب عليها الأرقام 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 3, 4

احتمال سحب بطاقة كتب عليها رقم فردي هو $\frac{4}{7}$ و احتمال سحب بطاقة كتب عليها رقم 1 هو $\frac{3}{7}$

و احتمال سحب بطاقة كتب عليها رقم 3 هو $\frac{1}{7}$ و احتمال سحب بطاقة كتب عليها رقم أكبر تماماً من 2 هو $\frac{2}{7}$

ثانياً: عند سحب عنصرين فأكثر:



1) نستدل على السحب المرتب بأن التجربة تحدد صفة لكل عنصر مسحوب (بقولنا الأول كذا الثاني كذا وهكذا.....)

2) في حالة السحب معاً يحسب احتمال الحدث A بالصيغة : $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

ونحسب $n(\Omega)$, $n(A)$ حسب مبدأ التوافيق

3) في كل حالات السحب على التتالي نحسب احتمال الحدث حسب مبدأ ضرب الاحتمالات (الاحتمال المركب)

❶ سحب A ثم سحب B (تجربة A تليها تجربة B) هو حدث مركب مرتب نرمز له (A,B) أو $A\cap B$ واحتماله :

$P(A)\neq 0$, $\boxed{P(A\cap B)=P(A).\ P(B|A)}$

❷ سحب A و B (تجربتين A و B) هو حدث مركب غير مرتب نرمز له D مؤلف من تبادل A مع B أو $D=\{(A,B),(B,A)\}$ واحتماله : $P(A)\neq 0$: $\boxed{P(D)=2P(A).\ P(B|A)}$

أو : $P(B)\neq 0$: $\boxed{P(D)=2P(B).\ P(A|B)}$

❸ سحب A ثم سحب B ثم سحب C (تجربة A تليها تجربة B تليها تجربة C)

هو حدث مركب مرتب نرمز له (A,B,C) أو $A\cap B\cap C$ واحتماله :

$P(B|A)\neq 0$, $P(A)\neq 0$: $\boxed{P(A\cap B\cap C)=P(A).\ P(B|A)\cdot P(C|(A\cap B))}$

❹ سحب A و B و C (تجربة مركبة من ثلاث تجارب A و B و C)

هو حدث مركب غير مرتب نرمز له H مؤلف من تبادل A مع B مع C إذا كان عدد هذه التبادل h

فإن احتماله :

$P(B|B)\neq 0$, $P(A)\neq 0$: $\boxed{P(H)=h\cdot P(A).\ P(B|A)\cdot P(C|(A\cap B))}$

لاحظ : $h=3!=6$ إذا كانت A و B و C مختلفة: والتبادل هي :

(A,B,C)، (A,C,B) ، (C,B,A) ، (C,A,B) ، (B,C,A) ، (B,A,C)

$h=3$ إذا كانت A و B و C أثنين من نفس النوع $A=C$ والثالثة مختلفة

والتبادل هي: (A,B,A) ، (A,A,B)، (B,A,A)

مثال❶: لدينا 9 بطاقات متماثلة مرقمة من 1إلى 9 ، نسحب ورقتين عشوائياً ، أوجد احتمال أن يكون مجموع أرقام البطاقتين عدداً فردياً إذا :

1) تم سحب البطاقتين معاً

2) تم سحب البطاقتين على التتالي بدون إعادة

3) تم سحب البطاقتين على التتالي مع الإعادة

الحل

نفرض A الحدث الدال على (مجموع رقمي البطاقتين عدد فردي)

يكون المجموع فردياً ، إذا تم سحب بطاقة ذات رقم فردي مع بطاقة ذات رقم زوجي

$\{1,3,7,5,9\}$ مجموعة الأرقام الفرديّة وعددها 5 و $\{2,4,6,8\}$ مجموعة الأرقام الزوجيّة وعددها 4

1) السحب معاً

إن $n(\Omega)=C(9,2)=36$

$$P(A)=\frac{C(5,1)\times C(4,1)}{C(9,2)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

2) السحب على التتالي دون إعادة:

إن $P(A)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$

{ يدل الحساب هنا أنه تم سحب(بطاقة ذات رقم فردي ثم سحب بطاقة ذات رقم زوجي)

أو تم سحب (بطاقة ذات رقم زوجي ثم سحب بطاقة ذات رقم فردي) }

$P(A)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times 2=\frac{5}{9}$ (حسبنا أحد الحالتين ثم ضربنا بـ 2 عدد تبادل الفردي مع الزوجي)

3) السحب على التتالي مع إعادة

إن $n(\Omega)=9^2=81$

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{40}{81}$$

يدل الحساب هنا أنه تم (سحب بطاقة ذات رقم فردي ثم سحب بطاقة ذات رقم زوجي) أو تم (سحب بطاقة ذات رقم زوجي ثم سحب بطاقة ذات رقم فردي)

ويمكن أن نكتب $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\times 2=\frac{40}{81}$

مثال 2: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يلي: 0 , 0 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4

نسحب من الصّندوق عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة. المطلوب:

1) احسب احتمال أن نكون البطاقة الأولى تحمل الرقم 0 والثانية تحمل الرقم 3

2) احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 3

3) إذا علمنا أنّ مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5

فما احتمال أن يكون مجموعهما فردياً؟

4) إذا علمنا أنّ البطاقتين تحملان الرقم نفسه فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟.

5) احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين فردياً إذا علمنا أنّ البطاقتين تحملان رقمين مختلفين .

الحل:

1) نفرض A سحب البطاقة الأولى تحمل الرقم 0 ونفرض الحدث B سحب البطاقة الثانية تحمل الرقم 3

المطلوب حساب احتمال الحدث $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$$

2) نفرض الحدث C مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 3 فهو مؤلف من تباديل A مع B وعددها 2

$$P(C) = 2P(A) \,.\, P(B \mid A) = \frac{3}{14}$$

3) نفرض الحدث D: مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5

H: مجموع رقمي البطاقتين فردي

فيكون المطلوب: $P(H \mid D)$

$$P(H \mid D) = \frac{P(D \cap H)}{P(D)} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

يقع الحدث D إذا كانت نتيجة السحب:

(كل من البطاقتين تحمل الرقم 3) أو (إحداهما تحمل الرقم 4 والأخرى تحمل أحد الرقمين $\{2,3\}$)

فيكون: $$P(D) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \times \frac{5}{7} \times 2 = \frac{16}{56}$$

يقع الحدث $D \cap H$ إذا كانت نتيجة السحب (إحداهما تحمل الرقم 4 والأخرى الرقم 3)

فيكون: $$P(D \cap H) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{56}$$

بالتعويض في (1) نجد: $P(H|D)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

4)نفرض الحدث F : البطاقتان تحملان الرقم نفسه. G: ظهور الرقم 3.

فيكون المطلوب: $P(G|F)$

$$P(G|F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}............... (2)$$

يقع الحدث F إذا كانت نتيجة السحب (البطاقتان تحملان الرقم 0) أو (البطاقتان تحملان الرقم 2)
أو (البطاقتان تحملان الرقم 3) فيكون:

$$P(F)=\left(\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\right) \quad \text{ومنه} \quad P(F)=\frac{5}{28}$$

يقع الحدث $G\cap F$ إذا كانت نتيجة السحب (البطاقتان تحملان الرقم 3) فيكون

$$P(G\cap F)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} \quad \text{ومنه} \quad P(G\cap F)=\frac{3}{28}$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$P(G|F)=\frac{3}{5}$$

5)نفرض الحدث E : البطاقتان تحملان رقمين مختلفين.

Z : مجموع رقمي البطاقتين فردي.

فيكون المطلوب $P(Z|E)$

$$P(Z|E)=\frac{P(Z\cap E)}{P(E)} ....(3)$$

إن الحدثين E , F متضادان وبالتّالي:

$$P(E)=1-\mathrm{P}(F) \quad \text{ومنه} \quad P(E)=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$$

يقع الحدث $Z\cap E$ إذا كانت نتيجة السحب(إحدى البطاقتين تحمل الرقم 3والأخرى من باقي الأرقام)

فيكون $P(Z\cap E)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times 2=\frac{15}{28}$

بالتعويض في (3) نجد: $P(Z|E)=\frac{\frac{15}{28}}{\frac{23}{28}}=\frac{15}{23}$

البحث الثالث : الاستقلال الاحتمالي

وجدنا أن $P(A\cap B)=P(B)\,.\,P(A|B)\ \ ,\ P(B)\neq 0$

و $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B|A)\ \ ,\ P(A)\neq 0$

إذا كان $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ أي أن $P(A|B)=P(A)$ وكذلك $P(B|A)=P(B)$ أي أن

وقوع أحد الحدثين $A\ ,\ B$ لا يؤثر على وقوع الآخر ومنه التعريف

الاستقلال الاحتمالي لحدثين:

تعريف: في فضاء احتمالي $(\Omega\,,\mathcal{P}(\Omega)\,,P)$ نقول عن الحدثين $A\ ,\ B$ إنهما مستقلان احتمالياً

أو مستقلان إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

مثال 1 : في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، لتكن الأحداث:

$A=\{2,4,6\}\ ,\ B=\{3,6\}\ ,\ C=\{3,2,4\}$ ادرس استقلال كل حدثين من هذه الأحداث

الحل : $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ \ ,\ P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ \ ,\ P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{6\}$ ، $A\cap C=\{2,4\}$ ، $C\cap B=\{3\}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ ، $P(A\cap C)=\frac{1}{3}$ ، $P(C\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{6}$ الحدثين $A\ ,\ B$ مستقلان

$P(A).P(B)=\frac{1}{4}\ \ ,\ \ P(A\cap C)=\frac{1}{2}$ الحدثين $A\ ,C$ غير مستقلين

$P(C\cap B)=P(C).P(B)=\frac{1}{6}$ الحدثين $C\ ,\ B$ مستقلان

مثال 2 :

في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات ليكن

الحدث A: ظهور شعار وكتابة، والحدث B: ظهور شعار واحد على الأكثر. برهن أنّ الحدثين

$A\ ,\ B$ مستقلان.

الحل:

$$\Omega=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),$$
$$(T,H,T),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$n(\Omega)=8 \quad , n(A)=6 \quad , n(B)=4 \quad , n(A\cap B)=3$$

$$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \quad , \quad P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{3}{8}$$

بالمقارنة نجد أنّ $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

فالحدثان $A\ ,\ B$ مستقلان.

مبرهنة:

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$، إذا كان الحدثان $B\ ,\ A$ مستقلين

فإن الحدثين A,B' مستقلان.

الإثبات: $P(A\cap B')=P(A\setminus B)$

$$=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)-P(A).P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)] \quad \text{(لأنّ } A,B \text{ مستقلان)}$$
$$=P(A).P(B')$$

إذن الحدثان $A\ ,\ B'$ مستقلان.

نتائج:

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$

① إذا كان الحدثان A,B مستقلين احتمالياً فإن الحدثين A',B مستقلان.

②إذا كان الحدثان A,B مستقلين احتمالياً فإن الحدثين A',B' مستقلان

ملاحظات:

❶أنّ المساواة $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ صحيحة إذا كان الحدثان A,B مستقلين وبالتّالي يمكن استخدامها إذا كان الحدثان A,B مستقلين.

هناك أحداث نقبل بأنها مستقلة (ما لم يرد خلاف ذلك)

أمثلة:

●الأحداث في الرمي على هدف: A,B حدثا إصابة راميان على هدف حدث إصابة أحدهما لا تؤثر على حدث إصابة الآخر،

● إلقاء قطعة نقود مرتين A حدث إلقاء القطعة الأولى Bحدث إلقاء القطعة الثانية أو أكثر من مرتين

● إلقاء حجر نرد مرتين أو أكثر،.....لا تتأثر النتيجة الثانية بالنتيجة الأولى

●الأحداث الناتجة عن تجربة يتم فيها السحب بالتتالي مع الإعادة، A حدث سحب القطعة الأولى B حدث سحب القطعة الثانية......لا يتأثر السحب الثاني بالسحب الأول

●الولادات المتتالية (ذكر أو أنثى) ،

● (دواليب الحظ(اليانصيب) نتيجة كل دولاب لا تؤثر على نتيجة الآخر)

❷هناك أحداث لا يمكن الحكم مباشرة على استقلاليتها إلا من خلال المعيار $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ وهذا يطلب صراحة في نص السؤال

مثال(1):

يصوب راميان $(Y),(X)$ على هدف. احتمال أنّ يصيب الرامي (X) الهدف يساوي $\frac{7}{10}$، واحتمال أنّ يصيب الرامي (Y) الهدف يساوي $\frac{9}{10}$. أطلق كل منهما طلقة واحدة

1) ما احتمال إصابة الهدف بطلقتين ؟.

2) ما احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل ؟.

3) إذا علمت أنّ الهدف قد أصيب فما احتمال أنّ يكون الرامي (X) فقط هو الذي أصاب الهدف.

الحل:

نفرض الحدث A: إصابة الهدف من قبل الرامي (X)

B: إصابة الهدف من قبل الرامي (Y)

في تجربة الراميان A و B مستقلين ومنه A و B'مستقلين

1) احتمال إصابة الهدف بطلقتين هو: $P(A\cap B)$ وبالتّالي:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$=\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{63}{100}$$

2) احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل هو $P(A \cup B)$ ومنه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{7}{10} + \frac{9}{10} - \frac{63}{100} = \frac{97}{100}$$

3) نفرض الحدث A_1: إصابة الرامي X فقط للهدف فيكون $A_1 = A \cap B'$، لاحظ أنّ $A_1 \subseteq A \cup B$، يكون $(A \cup B) \cap A_1 = A_1 = A \cap B'$ إذن الاحتمال المطلوب هو $P(A_1 | (A \cup B))$

$$P(A_1 | (A \cup B)) = \frac{P[(A \cup B) \cap A_1]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B')}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A).P(B')}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{97}{100}} = \frac{7}{97}$$ حيث $P(B') = \frac{1}{10}$

مثال(2):

تقدم طالبان إلى امتحان اللغة الإنكليزية. احتمال نجاح الأول $\frac{72}{100}$

واحتمال نجاح الثاني $\frac{80}{100}$ والمطلوب:

1) ما احتمال نجاحهما معاً ؟.

2) ما احتمال نجاح أحدهما على الأقل ؟.

الحل:

نفرض الحدث A: نجاح الأول في الامتحان

B: نجاح الثاني في الامتحان.

1) إنّ احتمال نجاح الطالبين معاً هو $P(A \cap B)$ وبما أنّ الحدثين A, B مستقلان احتمالياً (لأن نجاح أحدهما لا يؤثر على نجاح الآخر) فإنّ:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$
$$= \frac{72}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{576}{1000}$$

2) أنّ احتمال نجاح أحدهما على الأقل هو $P(A \cup B)$ ومنه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{72}{100} + \frac{80}{100} - \frac{576}{1000} = \frac{944}{1000}$$

الاستقلال الاحتمالي لثلاثة أحداث معاً

تعريف(1): لتكن الأحداث $A\ ,B\ ,C$ من فضاء احتمالي $\left(\Omega,\mathcal{P}(S),P\right)$

نقول عن الأحداث $A\ ,B\ ,C$ إنها مستقلة مثنى مثنى إذا كان أي حدثين منها مستقلين

تعريف(2): لتكن $A\ ,B\ ,C$ ثلاثة أحداث من فضاء احتمالي $\left(\Omega,\mathcal{P}(S),P\right)$ عندئذٍ:

A,B,C مستقلة احتمالياً معاً إذا وفقط إذا:

$$\begin{cases} A,B,C \text{ مستقلة مثنى} \ldots\ldots\ldots (1) \\ P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

مثال(1):

في مغلف (8)بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة واحدة ولتكن الأحداث:

A: رقم البطاقة المسحوبة أصغر أو يساوي 4.

B: رقم البطاقة المسحوبة أولي.

C: رقم البطاقة المسحوبة أكبرتماماً من 2 وأصغر تماماً 7.

أثبت أنّ الأحداث $A\ ,B\ ,C$ مستقلة معاً.

الحل:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \quad , \ n(\Omega)=8$$

$$A=\{1,2,3,4\} \quad , \ n(A)=4 \quad , \ P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$B=\{2,3,5,7\} \quad , \ n(B)=4 \quad , \ P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$C=\{3,4,5,6\} \quad , \ n(C)=4 \quad , \ P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$A\cap B=\{2,3\} \quad , \ P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$A\cap C=\{3,4\} \quad , \ P(A\cap C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$B\cap C=\{3,5\} \quad , \ P(B\cap C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$A\cap B\cap C=\{3\} \quad , \ P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{8}$$

بالمقارنة نجد أن:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A).P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B).P(C)$$

فالأحداث A,B,C مستقلة مثنى

كما أنّ $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

فالأحداث A,B,C مستقلة معاً.

مثال(2):

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(S),P)$، إذا كانت الأحداث A,B,C مستقلة معاً

برهن أنّ الحدثين: $A\cup B\ ,\ C$ مستقلان.

الحل:

يجب أنّ نبرهن أنّ $P[(A\cup B)\cap C]=P(A\cup B).P(C)$

$$\begin{aligned}
\ell_1=P[(A\cup B)\cap C]&=P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\\
&=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap C\cap B\cap C)\\
&=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\\
&=P(A).P(C)+P(B).P(C)-P(A).P(B).P(C)\\
&=[P(A)+P(B)-P(A).P(B)].P(C)\\
&=[P(A)+P(B)-P(A\cap B)].P(C)\\
&=P(A\cup B)P(C)\\
&=\ell_2
\end{aligned}$$

البحث الرابع :

المتغيّر العشوائي والتوزيع الاحتمالي والتوقع الرياضي

أولاً: المتغيّر العشوائي:

إن التجربة الإحصائية تزودنا بمجموعة بيانات (كيفية أو كمية)

إن رد هذه البيانات الكيفية إلى بيانات كمية (عددية) قد يساعد الإحصائي على تسهيل الدراسة واستقراء النتائج.

تعريف المتغيّر العشوائي :في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$. نعرّف المتغيّر العشوائي بأنه دالة منطلقها فضاء العيّنة Ω ومستقرها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ونرمز له X أي $X:\Omega\to\mathbb{R}$
ونسمّي المجموعة $X(\Omega)$ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X.

سندرس فقط المتغيّرات العشوائية التي مجموعة قيمها مجموعة منتهية

تكون $X(\Omega)=\{x_1,x_2,......,x_n\}:n\in\mathbb{N}^*$

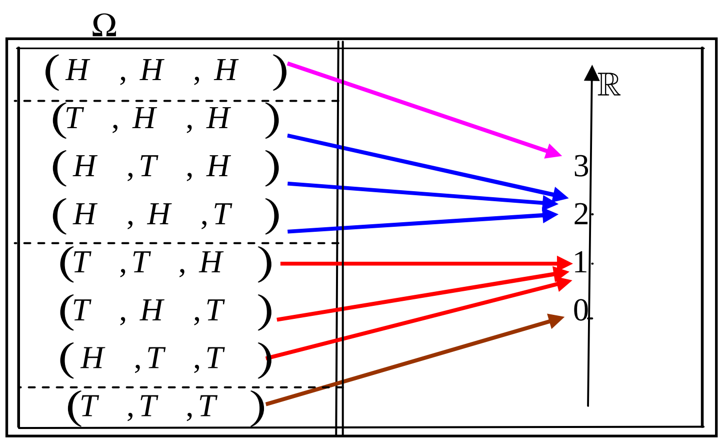
ونعطي تلميحاً للمتغيّرات العشوائية التي مجموعة قيمها مجموعة غير منتهية

مثال ❶ : في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات إن:

$$\Omega=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),$$
$$(T,H,T),(T,T,H),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

وعرفنا المتغير العشوائي X : صورة كل عنصر من المجموعة Ω بعدد مرات ظهور الكتابة (H) في كل رمية

فإننا نحصل على المجموعة: $\{3,2,1,0\}$ التي نسميها مجموعة قيم المتغير العشوائي X



$X(\Omega)=\{3,2,1,0\}$

ونلاحظ أن الصور العكسية لقيم المتغير العشوائي هي أحداث وتشكل تجزئة لفضاء العينة Ω

فالقيمة 3 صورتها العكسية هي الحدث: $X^{-1}(3)=\{(H,H,H)\}$

والقيمة 2 صورتها العكسية هي الحدث: $X^{-1}(2)=\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}$

والقيمة 1 صورتها العكسية هي الحدث: $X^{-1}(1)=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$

والقيمة 0 صورتها العكسية هي الحدث: $X^{-1}(0)=\{(T,T,T)\}$

ملاحظة : سنرمز للحدث $X^{-1}(x_k)$ بالرمز $\{X=x_k\}$

ونرمز اختصاراً لـ $P(\{X=x_k\})$ بالرمز $P(X=x_k)$

مثال ❷: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة. ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد نقط الوجه إن كان فردي وعلى نصف عدد نقط الوجه إن كان زوجي ليكن Y متغيراً عشوائياً آخريدل على القيمة 3 إذا كان عدد نقط الوجه أولي وعلى القيمة 2 إن كان زوجي غير أولي وعلى القيمة 1 إذا ظهر نقطة واحدة

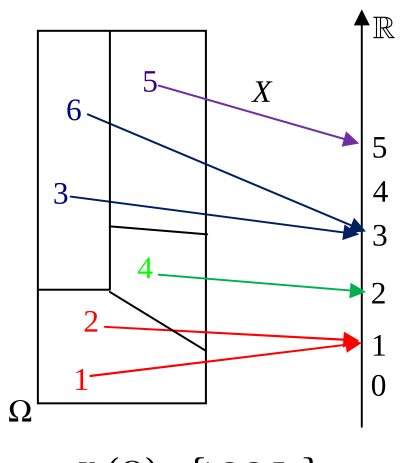
1) اكتب مجموعة القيم لكلٍ من المتغيّرين العشوائيين

2) اكتب الأحداث التي تشكل تجزئة فضاء العينة Ωلكل من المتغيرين .

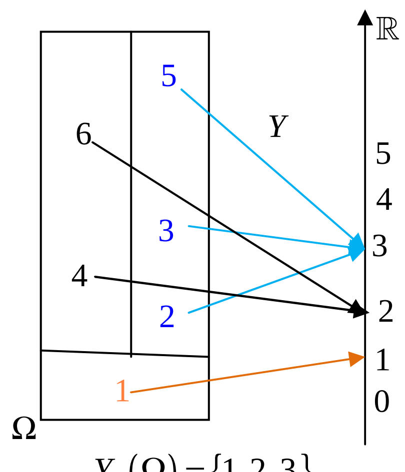
3) أثبت أن الحدثين $\{Y=3\}$, $\{X=1\}$ مستقلان احتمالياً؟

الحل:

(1



$X(\Omega)=\{1,2,3,5\}$



$Y(\Omega)=\{1,2,3\}$

2) تجزئة Ωوفق المتغير العشوائي X:

$\{X=1\}=\{1,2\}$, $\{X=2\}=\{4\}$, $\{X=3\}=\{3,6\}$, $\{X=5\}=\{5\}$

تجزئة Ωوفق المتغير العشوائي Y:

$\{Y=1\}=\{1\}$, $\{Y=2\}=\{4,6\}$, $\{Y=3\}=\{2,3,5\}$

3) $\{X=1\}=\{1,2\}$ ، $\{Y=3\}=\{2,3,5\}$ ، $\{X=1\}\cap\{Y=3\}=\{2\}$

$P(X=1)=\frac{1}{3}$ و $P(Y=3)=\frac{1}{2}$

و $P(\{X=1\}\cap\{Y=3\})=\frac{1}{6}$ و $P(X=1)\cdot P(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

أي $P(\{X=1\}\cap\{Y=3\})=P(X=1)\cdot P(Y=3)$

فالحدثين $\{Y=3\}$, $\{X=1\}$ مستقلان احتمالياً

ملاحظة: المتغير العشوائي ليس وحيداً يمكن تعريف أكثر من متغير عشوائي على الفضاء نفسه

كما لاحظت في المثال السابق

نتائج: في الفضاء الاحتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ إذا كان X متغيراً عشوائياً

ومجموعة القيم $X(\Omega)=\{x_1,x_2,.....,x_n\}$

1) الصور العكسية لكل عناصر مجموعة قيم المتغير العشوائي تشكل تجزئة لـ Ω

أي الأحداث : $\{X=x_n\}$, ...,$\{X=x_2\}$, $\{X=x_1\}$ تشكل تجزئة لـ Ω

2) مجموع احتمالات جميع الصور العكسية لعناصر $X(\Omega)$ يساوي احتمال Ω ويساوي 1

أي $P(X=x_1)+P(X=x_2)+............+P(X=x_n)=1$

أو : $\sum_{k=1}^{k=n}P(X=x_k)=1$

مثال ①:

في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة. ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع نقط الوجهين الظّاهرين

والمطلوب:

1) اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي

2) ما هو الحدث الذي تعينه القيمة 3 وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

3) ما هو الحدث الذي تعينه القيمة 7 وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

الحل:

1) يمكن معرفة مجموعة قيم المتغير العشوائي من خلال الجدول

X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$X(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

2) يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 3 عندما يظهر وجهان مجموع نقاطهما يساوي 3

وهو الحدث: $\{X=3\}=\{(1,2),(2,1)\}$

ويكون احتمال وقوع هذا الحدث هو: $P(X=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

3) يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 7 عندما يكون مجموع نقاط الوجهين الظّاهرين مساوياً 7.

$$\{X=7\}=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$$

ويكون احتمال وقوع هذا الحدث هو: $P(X=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

مثال 2:

في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة. ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على أكبر عدد لنقط الوجهين الظّاهرين اختلفا وأحدهما إن تساويا والمطلوب:

1) اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي

2) ما هو الحدث الذي تعينه القيمة 1 وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

3) ما هو الحدث الذي تعينه القيمة 4 وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

الحل:

1) يمكن معرفة مجموعة قيم المتغير العشوائي من خلال الجدول

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$$X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$$

2) يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 1 وهو الحدث البسيط $\{X=1\}=\{(1,1)\}$

و $P(X=1)=\dfrac{1}{36}$

3) يأخذ المتغيّر العشوائي X القيمة 4 وهو الحدث

$$\{X=4\}=\{(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

$$P(X=4)=\frac{7}{36}$$

ثانياً: القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي(دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي)

تعريف: إذا كان X متغيراً عشوائياً في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ ومجموعة القيم لهذا المتغير $X(\Omega)=\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ فإننا نسمّي الدالة:

$$f: X(\Omega)\to[0,1] \quad ; \quad f(x_k)=P(X=x_k)\,;k\in\{1,2,...,n\}$$

القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X أو دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي

مثال : في تجربة رمي ثلاث قطع نقدية والتي فضاء العيّنة لها:

$$\Omega=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),$$
$$(T,H,T),(T,T,H),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الكتابة (H) في كل رمية، عندئذٍ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي: $X(\Omega)=\{3,2,1,0\}$

إن الصّور العكسية وفق X لكل قيمة من هذه القيم هي حدث مبيّن كما يلي:

$\{X=3\}=\{(H,H,H)\}$ ، $f(3)=P(x=3)=\frac{1}{8}$

$\{X=2\}=\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}$ ، $f(2)=P(X=2)=\frac{3}{8}$

$\{X=1\}=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$ ، $f(1)=P(X=1)=\frac{3}{8}$

$\{X=0\}=\{(T,T,T)\}$ ، $f(0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$

ملاحظة: ينظم لدالة القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي جدول يسمى جدول القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X

نضع في سطره الأوّل قيم المتغير العشوائي $x_1,x_2,......,x_n$.

وفي سطره الثّاني الاحتمالات المقابلة لها وهي $f(x_r)$,......, $f(x_2)$, $f(x_1)$ على التّرتيب

كما في الشّكل:

x_k	x_1	x_2	....	x_n
$f(x_k)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	....	$f(x_n)$

في المثال السابق يكون جدول التوزيع :

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نتائج : دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X تحقق:

① $f(x_k) \geq 0$ وذلك أياً كان $x_k \in X(\Omega)$

② بما أن $\sum_{k=1}^{k=n} P(\{X = x_k\}) = 1$

فإن $\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) = 1$

③ إذا اعتبرنا $x_1, x_2, ..., x_n$ بيانات إحصائية حجمها N

فإذا كانت تكرارات البيانات $x_1, x_2, ..., x_n$ هي على الترتيب $N_1, N_2, ..., N_n$ فإن:

$$N = n(\Omega) = N_1 + N_2 + ... + N_n$$

فتكون التكرارات النسبية لهذه البيانات هي:

$$\frac{N_1}{N} ، \frac{N_2}{N} ،......... ، \frac{N_n}{N}$$

وهي احتمالات للأحداث $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}, ... ,$ $\{X = x_n\}$

أي $f(x_1) = \frac{N_1}{N}, f(x_2) = \frac{N_2}{N}, ..., f(x_n) = \frac{N_n}{N}$

إذاً جدول القانوت الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو جدول التكرار النسبي لعناصر

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

وبما أن المتوسط الحسابي لهذه البيانات الإحصائية :

$$\bar{x} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_n N_n}{N} = x_1 \frac{N_1}{N} + x_2 \frac{N_2}{N} .... + x_n \frac{N_n}{N}$$

$$\bar{x} = x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) .... + x_n \times f(x_n)$$

وبالتالي المتوسط الحسابي لمجموعة قيم المتغير العشوائي : $\bar{x} = \sum_{k=1}^{k=n} x_k \times f(x_k)$

سنسميها التوقع الرياضي

ثالثاً : التّوقع الرّياضي (الأمل الرّياضي) للمتغير العشوائي:

نسمّي العدد $\sum_{k=1}^{k=n} x_k \times f(x_k)$ التّوقع الرّياضي للمتغير العشوائي X ونرمز له $E(X)$

أي: $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{k=n} x_k \cdot f(x_k)}$ أو $\boxed{\mu=\sum_{k=1}^{k=n} x_k \cdot f(x_k)}$

وقد وجدنا أنفاً أنه يعبر عن المتوسط الحسابي للبيانات الإحصائية التي تمثل مجموعة قيم المتغير العشوائي X مع الأخذ بعين الاعتبار التكرارات لهذه البيانات

الأمثلة على التوقع الرياضي:

مثال 1: في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة. ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على أكبر عدد لنقط الوجهين الظّاهرين اختلفا وأحدهما إن تساويا والمطلوب:

1) اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X.
2) اكتب جدول القانون الاحتمالي للمتغير X.
3) احسب التّوقع الرّياضي للمتغير X.

الحل:

(1

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$

(2 $f(1)=P(X=1)=\frac{1}{36}$: لأن $\{X=1\}=\{(1,1)\}$

$f(2)=P(X=2)=\frac{3}{36}$: لأن $\{X=1\}=\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$ وهكذا نجد

$f(3)=P(X=3)=\frac{5}{36}$ ، $f(4)=P(X=4)=\frac{7}{36}$ ، $f(5)=P(X=5)=\frac{9}{36}$

$f(6)=P(X=6)=\frac{11}{36}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

(3 $E(X)=\sum_{k=1}^{k=6} x_k\, f(x_k)$

$$E(X)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}$$

$$E(X)=\frac{161}{36}$$

مثال 2 يحوي صندوق 5 كرات متماثلة (3 بيضاء و 2 حمراء) نسحب من الصّندوق عشوائياً ثلاث كرات معاً.و ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب توقعه الرّياضي.

الحل: $X(\Omega)=\{0\,,1\,,2\}$

الحدث : $\{X=0\}$ سحب ثلاث كرات بيضاء ، فيكون $f(0)=P(X=0)=\frac{C(3,3)}{C(5,3)}=\frac{1}{10}$

الحدث : $\{X=1\}$ سحب كرتين بيضاوين وكرة حمراء ، فيكون

$$f(1)=P(X=1)=\frac{C(3,2).C(2,1)}{C(5,3)}=\frac{6}{10}$$

الحدث : $\{X=2\}$ سحب كرتين حمراوين وكرة بيضاء ، فيكون

$$f(2)=P(X=2)=\frac{C(3,1).C(2,2)}{C(5,3)}=\frac{3}{10}$$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

ومنه: $E(X)=\sum_{k=1}^{3} x_k\, f(x_k)$

$$E(X)=0+\frac{6}{10}+\frac{6}{10}=\frac{12}{10}$$

$$E(X)=\frac{6}{5}$$

مثال 3: يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $0,0,0,0,0,1,1,1,1$

نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً. وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة. اكتب قيم المتغيّر العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب توقعه الرّياضي.

الحل:

$$X(S)=\{0,1,2,3\}$$

الحدث : $\{X=0\}$ سحب ثلاث بطاقات كل منها تحمل 0

فيكون : $$f(0)=\frac{C(5,3)}{C(9,3)}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

الحدث : $\{X=1\}$ سحب ثلاث بطاقات بطاقتين منها تحمل 0 وأخرى تحمل الرقم 1

فيكون : $$f(1)=\frac{C(5,2).C(4,1)}{C(9,3)}=\frac{40}{84}=\frac{20}{42}$$

الحدث : $\{X=2\}$ سحب ثلاث بطاقات بطاقتين منها تحمل 1 وأخرى تحمل الرقم 0

فيكون : $$f(2)=\frac{C(5,1).C(4,2)}{C(9,3)}=\frac{30}{84}=\frac{15}{42}$$

الحدث : $\{X=3\}$ سحب ثلاث بطاقات كل منها تحمل 1

فيكون : $$f(3)=\frac{C(4,3)}{C(9,3)}=\frac{4}{84}=\frac{2}{42}$$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$

ومنه: $$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k\ f(x_k)=0+\frac{20}{42}+\frac{30}{42}+\frac{6}{42}$$

$$E(X)=\frac{4}{3}$$

مثال ④:

يطلق رامٍ طلقتين على هدف الطلقة الأولى بمسدس والثانية بالبارودة.

احتمال إصابتة للهدف بمسدس $\frac{6}{10}$ ، واحتمال إصابته للهدف ببارودة $\frac{8}{10}$.

يربح الرامي 5 نقط إذا أصاب الهدف بالمسدس ويربح 3 نقط إذا أصاب الهدف بالبارودة.

يخسر الرامي 4 نقط إذا لم يصب الهدف بالمسدس ويخسر 5 نقط إذا لم يصب الهدف بالبارودة.

بفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد النقط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة، اكتب قيم المتغيّر العشوائي X واكتب وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي Xواحسب توقعه الرّياضي

الحل:

إذا فرضنا A حدث إصابة الرامي الهدف بالمسدس و B حدث إصابة الرامي الهدف بالبارودة فإن:

$$\Omega=\{A\cap B \ ,A\cap B' \ , \ A'\cap B \ , \ A'\cap B' \ \}$$

إذا أصاب في الرميتين فهو الحدث $\{X=8\}=A\cap B$ والرامي ينال: $5+3=8$ نقطة

إذا لم يصب في الرمية الأولى وأصاب في الرمية الثانية فهو الحدث $\{X=-1\}=A'\cap B$ والرامي ينال:

$-4+3=-1$ نقطه

إن أصاب في الرمية الأولى ولم يصب في الرمية الثانية فهو الحدث $\{X=0\}=A\cap B'$ والرامي ينال:

$5-5=0$ نقطه

إن لم يصب الرامي بالطلقتين فهو الحدث $\{X=-9\}=A'\cap B'$ والرامي ينال: $-4-5=-9$

وبالتّالي مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X(\Omega)=\{-9 \ , -1 \ , 0 \ , 8\}$

في هذه التجربة: كل زوج من الأحداث $(A,B) \ , (A,B') \ ,(A',B) \ , (A',B')$ مستقلين احتمالياً

$$\begin{aligned} f(-9)&=P(A'\cap B') \\ &=P(A').P(B') \\ &=\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{100} \end{aligned}$$

$$f(-1)=P(A'\cap B)=P(A').P(B)=\frac{4}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{32}{100}$$

$$\begin{aligned} f(0)&=P(A\cap B') \\ &=P(A).P(B')=\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{12}{100} \end{aligned}$$

$$f(8) = P(A \cap B)$$
$$= P(A).P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{48}{100}$$

وبذلك نحصل على جدول القانون الاحتمالي:

x_k	-9	-1	0	8
$f(x_k)$	$\frac{8}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{48}{100}$

والتّوقع الرّياضي:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} x_k . f(x_k)$$
$$= \frac{-72}{100} + \frac{-32}{100} + 0 + \frac{384}{100}$$

عدد النقط المتوقع أن يربحها الرامي $E(X) = \frac{280}{100} = 2,8$

مثال 5: يرمي شخص قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فيربح 12 نقطة إذا ظهرت ثلاث شعارات متتالية ويربح m نقط إذا ظهر شعاران فقط ويخسر 6 نقط فيما عدا ذلك. بفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد النقط التي ينالها الشخص. اكتب مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثم احسب توقعه الرّياضي بدلالة m واحسب قيمة m إذا كان التوقع الرياضي $E(X) = 0$ (لايربح ولا يخسر).

الحل: $X(\Omega) = \{12, m, -6\}$

$\{X = 12\} = \{(T,T,T)\}$ ، $f(12) = P(X = 12) = \frac{1}{8}$

$\{X = m\} = \{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$ ، $f(m) = P(X = m) = \frac{3}{8}$

$\{X = -6\} = \{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(H,H,H)\}$ ،

$$f(-6) = P(X = -6) = \frac{4}{8}$$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	12	m	-6
$f(x_k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} x_k \ f(x_k) = \frac{12}{8} + \frac{3m}{8} + \frac{-24}{8} = \frac{3m-12}{8}$$

عندما يكون $E(X) = 0$ فإن $m = 4$

خواص التوقع الرياضي:

أولاً: إذا كان X متغير عشوائي في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ وتوقعه الرياضي $E(X)$

ومن أجل a,b ثوابت من $\mathbb{R}$ فإن :

❶ $\boxed{E(aX)=aE(X)}$ ❷ $\boxed{E(a)=a}$ ❸ $\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b}$

❹ $\boxed{E(E(X))=E(X)}$ ❺ $\boxed{E(X-E(X))=0}$

❶ $\boxed{E(aX)=aE(X)}$

البرهان :

$$\begin{aligned}E(aX)&=\sum_{k=1}^{n}(a\cdot x_k)\,f(x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}a\cdot(x_k\,f(x_k))\\&=a\sum_{k=1}^{n}x_k\,f(x_k)\\&=aE(X)\end{aligned}$$

❷ $\boxed{E(a)=a}$

البرهان :

$$E(a)=\sum_{k=1}^{n}a\,f(x_k)=a\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=a(1)=a$$

❸ $\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b}$

البرهان :

$$\begin{aligned}E(aX+b)&=\sum_{k=1}^{n}(a\cdot x_k+b)\,f(x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}((a\cdot x_k)\,f(x_k)+bf(x_k))\\&=\sum_{k=1}^{n}(a\cdot x_k)\,f(x_k)+\sum_{k=1}^{n}b\,f(x_k)\\&=a\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot f(x_k))+b\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\\&=aE(X)+b(1)\\&=aE(X)+b\end{aligned}$$

❹ $\boxed{E(E(X)) = E(X)}$

البرهان :

بما أن $E(X) = a$ ثابت حسب الخاصة 2 فإن $E(E(X)) = E(a)$ أو $E(E(X)) = E(X)$

❺ $\boxed{E(X - E(X)) = 0)}$

البرهان :

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X))$$
$$= E(X) - E(X) = 0$$

ثانياً: إذا كان Y, X متغيران عشوائيان مستقلان في فضاء احتمالي $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ وتوقعهما الرياضي $E(Y)$, $E(X)$ فإن $\boxed{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$ و $\boxed{E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)}$

مثال ① : يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $0,0,1,1,1,2,2,2,2$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات بآن واحد. وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة. احسب التوقع الرّياضي.

الحل :

نعتبر المتغير العشوائي X_1 يدل على رقم البطاقة المسحوبة الأولى و المتغير العشوائي X_2 يدل على رقم البطاقة المسحوبة الثانية و المتغير العشوائي X_2 يدل على رقم البطاقة المسحوبة الثالثة

$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$ وجدول القانون الاحتمالي لكل منها

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} x_k \ f(x_k) = \frac{0}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9}$$
$$= \frac{11}{9}$$

وبما أن $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

$E(X) = \frac{11}{9} + \frac{11}{9} + \frac{11}{9} = \frac{11}{3}$ أو $E(X) = 3E(X_1) = \frac{11}{3}$

حل آخر: $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$

بما أن $\{X=1\}=\{(0,0,1)\}$

فإن : $f(1)=P(X=1)=\dfrac{C(2,2)\cdot C(3,1)}{C(9,3)}=\dfrac{3}{84}$

بما أن $\{X=2\}=\{(0,0,2),(1,1,0)\}$ فإن :

$$f(2)=P(X=2)=\frac{C(2,2)\cdot C(4,1)+C(2,1)\cdot C(3,2)}{C(9,3)}=\frac{10}{84}$$

بما أن $\{X=3\}=\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ فإن :

$$f(3)=P(X=3)=\frac{C(3,3)+C(2,1)\cdot C(3,1)C(4,1)}{C(9,3)}=\frac{25}{84}$$

بما أن $\{X=4\}=\{(1,1,2),(0,2,2)\}$ فإن :

$$f(4)=P(X=4)=\frac{C(3,2)C(4,1)+C(2,1)\cdot C(4,2)}{C(9,3)}=\frac{24}{84}$$

بما أن $\{X=5\}=\{(2,2,1)\}$ فإن : $f(5)=P(X=5)=\dfrac{C(3,1)\cdot C(4,2)}{C(9,3)}=\dfrac{18}{84}$

بما أن $\{X=6\}=\{(2,2,2)\}$ فإن : $f(6)=P(X=6)=\dfrac{C(4,3)}{C(9,3)}=\dfrac{4}{84}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	$\frac{3}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{k=6}x_k\,f(x_k)$$

$$=1\times\frac{3}{84}+2\times\frac{10}{84}+3\times\frac{25}{84}+4\times\frac{24}{84}+5\times\frac{18}{84}+6\times\frac{4}{84}$$

$$E(X)=\frac{308}{84}=\frac{11}{3}$$

مثال ②: في تجربة إلقاء حجر نرد متوازن إذا كان x هو عدد النقط التي تظهر على وجهه العلوي وليكن X متغيراً عشوائياً معرف وفق $X : \Omega \to \mathbb{R} \ , x \to -3x+1$ احسب التوقع الرياضي

الحل :

لنفرض متغيراً عشوائياً T يدل على عدد نقط الوجه يكون توقعه الرياضي: $E(T)=\sum_{k=1}^{k=6} x_k \ f(x_k)$

$$E(T)=(1)\left(\frac{1}{6}\right)+(2)\left(\frac{1}{6}\right)+(3)\left(\frac{1}{6}\right)+(4)\left(\frac{1}{6}\right)+(5)\left(\frac{1}{6}\right)+(6)\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

يكون :

$$E(X)=E(-3x+1)$$
$$=-3E(T)+1$$
$$=-3\left(\frac{7}{2}\right)+1$$
$$E(X)=-\frac{19}{2}$$

حل آخر:

$$X(\Omega)=\{-2,-5,-8,-11,-14,-17\}$$

$$E(T)=\sum_{k=1}^{k=6} x_k \ f(x_k)$$
$$=(-2)\left(\frac{1}{6}\right)+(-5)\left(\frac{1}{6}\right)+(-8)\left(\frac{1}{6}\right)+(-11)\left(\frac{1}{6}\right)+(-14)\left(\frac{1}{6}\right)+(-17)\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)(-2-5-8-11-14-17)=-\frac{57}{6}=-\frac{19}{2}$$

توقع التوزيع ثنائي الحد

مبرهنة: إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار$(p+q=1)$
فإن عدد مرات النجاح المتوقعة من n اختبار يساوي np

البرهان: حسب تعريف التوقع: $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k \; f(x_k)$

نعلم من القانون الاحتمالي لثنائي الحد أن : $f(r)=C(n,r)\cdot p^r\cdot q^{n-r}$ و $x_k=r$

$$E(X)=\sum_{r=1}^{n} r\cdot C(n,r)\cdot p^r\cdot q^{n-r}$$
$$=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\frac{r!}{r!(n-r)!}\cdot p^r\cdot q^{n-r} \qquad : r!=r(r-1)!$$
$$=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}\cdot p^r\cdot q^{(n-1)-(r-1)}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}\cdot p\cdot p^{r-1}\cdot q^{(n-1)-(r-1)}$$
$$=n\cdot p\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}\cdot p^{r-1}\cdot q^{(n-1)-(r-1)}$$
$$=n\cdot p\sum_{k=1}^{n}\cdot C(n-1,r-1)\cdot p^{r-1}\cdot q^{(n-1)-(r-1)}$$
$$=n\cdot p(p+q)^{n-1} \qquad : \quad p+q=1$$
$$E(X)=n\cdot p$$

مثال 1 : إذا ألقيت قطعة نقدية 50 مرة فما هو عدد المرات المتوقعة لظهور الصورة

الحل :

إذا كانت X تمثل دالة المتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الوجه صورة فإن X لها توزيع ثنائي الحد و $p=\frac{1}{2}$ و $n=50$ والتوقع الرياضي $E(X)=n\cdot p$ ومنه

$$E(X)=(50)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=25$$

مثال 2 : قطعة نقدية مزوره احتمال ظهور الصورة ضعفي ظهور الكتابة إذا ألقيت 50 مرة

فما هو عدد المرات المتوقعة لظهور الصورة وعدد المرات المتوقعة لظهور الكتابة

الحل : إذا كانت X تمثل دالة المتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الوجه صورة فإن X لها توزيع ثنائي الحد :

إذا كان p احتمال ظهور الوجه صورة و q احتمال ظهور الوجه كتابة، فإن $p = 2q$ لكن $p + q = 1$

فيكون $p = \frac{2}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$

$$n = 50$$

التوقع الرياضي لظهور الصورة : $E(X) = n \cdot p$

ومنه $E(X) = (50) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{100}{3}$

التوقع الرياضي لظهور الصورة : $E(X) = n \cdot q$

ومنه $E(X) = (50) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{50}{3}$

مثال 3 إذا ألقي حجر نرد 30 مرة احسب :

1) عدد المرات المتوقعة للحصول على الوجه ذو النقطتين

2) عدد المرات المتوقعة للحصول على وجه عدد نقاطه عدد مضاعف للعدد 3

الحل :

1) إذا كانت X تمثل دالة المتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الوجه ذي النقطتين فإن X لها توزيع ثنائي الحد

احتمال ظهور الوجه ذو النقطتين هو $p = \frac{1}{6}$ و احتمال ظهور الوجوه الأخرى $q = \frac{5}{6}$ و $n = 30$

التوقع الرياضي لظهور الوجه ذو النقطتين : $E(X) = n \cdot p$

ومنه $E(X) = (30) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = 5$

لاحظ التوقع الرياضي لظهور الوجوه الأخرى: $E(X) = n \cdot q$

ومنه $E(X) = (30) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 25$

2) إذا كانت X تمثل دالة المتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الوجه الذي عدد نقاطه عدد مضاعف للعدد 3 ، فإن X لها توزيع ثنائي الحد

احتمال ظهور الوجه الذي عدد نقاطه عدد مضاعف للعدد 3 أي $\{3,6\}$ هو $p=\frac{1}{3}$

لاحظ احتمال ظهور الوجوه الأخرى أي $\{1,2,4,5\}$ هو $q=\frac{2}{3}$

$n=30$ والتوقع الرياضي لظهور الوجه الذي عدد نقاطه مضاعف للعدد 3

$E(X)=n\cdot p$ فيكون : $E(X)=(30)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=10$

لاحظ التوقع الرياضي لظهورالوجه الذي عدد نقاطه ليس مضاعف للعدد 3

هو $E(X)=(30)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=20$

رابعاً : دالة التوزيع الاحتمالي المتجمعة للمتغير العشوائي

تعريف :إذا كان X متغيراً عشوائياً في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ ومجموعة القيم لهذا المتغير $X(\Omega)=\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ فإننا نسمّي الدالة:

$$F:X(\Omega)\to[0,1]\quad;\quad F(x_k\le x_r)=\sum_{k=1}^{r}f(x_k)$$

دالة التوزيع الاحتمالي المتجمعة للمتغير العشوائي X

لاحظ : $F(x_k)=P(x_k\le r)$ أي هو مجموع احتمالات :

$$\{X=x_1\},\{X=x_2\}.....................\{X=x_r\}$$

$$F(x_k\le x_r)=P(X=x_1)+P(X=x_r)+....................+P(X=x_r)$$

مثال : في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة. ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على القيمة المطلقة للفرق بين عدد لنقط الوجهين الظّاهرين $X(x,y)=|x-y|$

اكتب قيم المتغيّر العشوائي X واكتب وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب توقعه الرّياضي واكتب جدولاً يتضمن التوزيع الاحتمالي المتجمع للمتغير العشوائي X

واحسب $F(2\le x_k\le 4)$

الحل:

X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

(2

$$f(0)=P(X=0)=\frac{6}{36} \quad ، \quad f(1)=P(X=1)=\frac{10}{36}$$

$$f(2)=P(X=2)=\frac{8}{36} \quad ، \quad f(3)=P(X=3)=\frac{6}{36}$$

$$f(4)=P(X=4)=\frac{4}{36} \quad ، \quad f(5)=P(X=5)=\frac{2}{36}$$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2	3	4	5
$f(x_k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{k=6} x_k\, f(x_k)$$

$$=0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}$$

$$E(X)=\frac{70}{36}=\frac{35}{18}$$

وجدول دالة التوزيع الاحتمالي المتجمعة للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	≤ 0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5
$F(x_k \le x_r)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{34}{36}$	1

$$F(2\le x_k \le 4)=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}$$

$$F(2\le x_k \le 4)=\frac{3}{6}$$

خامساً : التباين والانحراف المعياري:

نعلم أن التباين والانحراف المعياري مقاييس للتشتت في البيانات الإحصائية ويمكن اعتبار مجموعة قيم X

وهي: $X(\Omega)=\{x_1,x_2,......,x_r\}$ بيان إحصائي

سنعرف التباين والانحراف المعياري كمقاييس للتشتت للتوزيع الاحتمالي

إن القيمة المتوقعة لتوزيع احتمالي $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{r} x_k\ f(x_k)}$ أو $\boxed{\mu=\sum_{k=1}^{r} x_k\ f(x_k)}$

وهي المتوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X أي مركز التوزيع

❶ التباين variance :

هو المتوسط الحسابي لمربعات انحرافات قيم X عن متوسطها الحسابي (التوقع) نرمز له $V(X)$

يكون $\boxed{V(X)=\sum_{k=1}^{r}(x_k-E(X))^2 f(x_k)}$

نستنتج أن التباين هو التوقع لمربعاتانحرافات قيم X عن متوسطها الحسابي μ أي :

$$V(X)=E(x_k-\mu)^2$$

❷ الانحراف المعياري: Standard Deviation

هو الجذر التربيعي الموجب للتباين يرمز له σ_x

$\boxed{\sigma_x=\sqrt{V(X)}}$ أو $\boxed{\sigma_x=\sqrt{\sum_{k=1}^{r}(x_k-E(X))^2 f(x_k)}}$ أو $\sigma_x=\sqrt{E(x_k-\mu)^2}$

وهو يعبر عن المتوسط الحسابي لانحرافات البيانات عن متوسطها(التوقع)

مثال: في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية وجدنا أن جدول قانون احتمال المتغير العشوائي

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري

الحل:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4} x_k\ f(x_k)$$

$$=\frac{0}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$

$$E(X)=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{3}{2}$$

لحساب التباين يمكن تشكيل الجدول:

x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k - E(X))^2$	$(x_k - E(X))^2 \cdot f(x_k)$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{32}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{32}$
$\sum_{k=1}^{r}$	1	$E(X)$		$V(X)$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{4} (x_k - E(X))^2 f(x_k)$$

أي $$V(X) = \frac{9+3+3+9}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي $$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

③تباين التوزيع ثنائي الحد:

مبرهنة: إذا كان p هو احتمال النجاح للحدث A و q هو احتمال الفشل في كل اختبار

فإن تباين التوزيع الاحتمالي لـ n اختبار هو $\sigma_x^2 = V(X) = n \cdot p \cdot q$

البرهان : نعلم من القانون الاحتمالي لثنائي الحد أن :

$$x_k = r \quad \text{و} \quad f(r) = C(n,r) \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

و $$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r \cdot C(n,r) \cdot p^r \cdot q^{n-r} = n \cdot p$$

يكون : $$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2 C(n,r) p^r q^{n-r}$$

إذاُ : $:r = r(r-1) + r$ $$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} \frac{r^2 n! p^r q^{n-r}}{r!(n-r)!}$$

$$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} \frac{[r(r-1)+r]n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{r(r-1)n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} \frac{r \cdot n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} \frac{r(r-1)n(n-1)(n-2)!}{r(r-1)(r-2)!(n-r)!} p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} r \cdot C(n,r) p^r q^{n-r}$$

$$E(X^2)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(r-2)![(n-2)-(r-2)]!}p^2\cdot p^{r-2}\cdot q^{n-r}+E(X)$$

$$E(X^2)=n(n-1)p^2\sum_{r=0}^{n}\frac{(n-2)!}{(r-2)![(n-2)-(r-2)]!}p^{x-2}q^{(n-2)-(r-2)}+n\cdot p$$

$$E(X^2)=n(n-1)p^2\sum_{r=0}^{n}C(n-2,r-2)p^{r-2}q^{(n-2)-(r-2)}+n\cdot p$$

$$E(X^2)=n(n-1)p^2\sum_{r=0}^{n}C(n-2,r-2)p^{r-2}q^{(n-2)-(r-2)}+n\cdot p$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+n\cdot p \qquad : \; p+q=1$$

$$=n^2\cdot p^2-n\cdot p^2+n\cdot p$$

نعلم أن قانون التباين:

$$\sigma_x^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$\sigma_x^2=n^2\cdot p^2-n\cdot p^2+n\cdot p-n^2\cdot p^2$$

$$=n\cdot p-n\cdot p^2 \; =n\cdot p(1-p)$$

$$\sigma_x^2=n\cdot p\cdot q$$

مثال: في توزيع ثنائي الحد أوجد p , n إذا كان توقعه 5 وتباينه $\frac{10}{3}$

الحل:

نعلم أنه في توزيع ثنائي الحد $V(X)=n\cdot p\cdot q$, $E(X)=n\cdot p$ بالتعويض

نجد

$$5=n\cdot p..........(1)$$

$$\frac{10}{3}=n\cdot p\cdot q....(2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد $q=\frac{2}{3}$

لكن $p=1-q$ تكون $p=\frac{1}{3}$

بالتعويض في (1) نجد $n=15$

❸القيمة المعيارية : في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$

إذا اعتبرنا $X(\Omega)=\{x_1,x_2,......,x_n\}$ بيان إحصائي

فالتوقع الرياضي $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k\, f(x_k)=\mu}$

والانحراف المعياري $\boxed{\sigma_x=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 f(x_k)}}$

تعريف :

القيمة المعيارية للمفردة x_k هي نسبة انحرافها عن التوقع إلى الانحراف المعياري

أي $\boxed{z=\dfrac{x_k-\mu}{\sigma_x}}$

تستخدم للمقارنة بين المشاهدات المختلفة للبيانات

مثال : احتار مستثمر لديه 5 مليون دولار يريد استثمار أمواله في إحدى شركتين لاحظ:

أن توقع الأرباح للشركة الأولى 3مليون دولار والانحراف المعياري لقيم الاستثمارات 10 مليون دولار

وكان توقع الأرباح للشركة الثانية 2مليون دولار والانحراف المعياري لقيم الاستثمارات 7 مليون دولار

بأي الشركتين تنصح هذا المستثمرأن يستثمر أمواله ؟

الحل :

نحسب القيمة المعيارية لأموال المستثمر في كلٍ من الشركتين

$\boxed{z=\dfrac{x_k-\mu}{\sigma_x}}$

القيمة المعيارية لأ موال المستثمر في الشركة الأولى حسب القانون

$$z_1=\frac{x_k-\mu}{\sigma_x}=\frac{5-3}{10}=0.2$$

القيمة المعيارية لأموال المستثمر في الشركة الثانية:

$$z_2=\frac{x_k-\mu}{\sigma_x}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}=0.43$$

بما أن $z_1<z_2$ ننصح المستثمر أن يستثمر أمواله في الشركة الثانية

توزيع بواسن :

عندما يكون عدد التجارب كبير واحتمال النجاح في توزيع ثنائي الحد صغير بحيث يكون المعدل $E(X)=np$ قيمة ثابتة نرمز لها λ

وجد بواسن دالة توزيع للتجارب التي تكون فيها نتيجة وقوع الحدث خلال وحدة قياس محددة مثل: واحدة الطول أو المساحة أو الزمن وغيرها من الواحدات .

ومن الأمثلة على تطبيق توزيع بواسن:

---

(1) عدد السيارات التي تعبر احد الجسور في الدقيقة

(2) عدد السيارات أو القطارات التي تنطلق من محطة انطلاقها في الساعة

(3) عدد المرجعين لدائرة خلال الأسبوع

(4) عدد الحفر على طريق في الكيلو متر الواحد

(5) عدد العيوب في المتر المربع في صناعة سجاده

(6) عدد الكيو واتات التي يستهلكها منزل في الشهر

(7) عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب قبل تصحيحها

وغير ذلك من الأمثلة التي تستخدم واحده من واحدات القياس المختلفة

دالة التوزيع لبواسون:

لاحظ بواسون حسب منشور ثنائي الحد أن :

$e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=\frac{1}{0!}+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+.......$ بضرب الطرفين بـ $e^{-\lambda}$ نجد أن:

$1=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$ وتكتب $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=1$ حيث $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\in[0,1]$ أياً $n\in\mathbb{N}$

تعريف : إذا كان X متغير بواسون العشوائي والقيم الممكنة له هي $0,1,2,3,4$..........

فإن دالة التوزيع الاحتمالي تعطى بالصيغة $f(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

حيث: $x=0,1,2$.......... ، $e=2,7183$ العدد النيبيري

$\lambda=np$ متوسط عدد مرات النجاح في الفتره أو الحيز المحدد للدراسة

وتسمى معلمة التوزيع (واحدة التوزيع)

ملاحظة:

متغير بواسون متغير متقطع يأخذ القيم $0,1,2,3,4$......... في فترة زمنيه متصلة أو في مجال أو منطقة متصلة ويجب أن يحقق الشروط :

(1)عدد مرات النجاح تكون مستقلة في فترتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز

(2)احتمال النجاح خلال فترة قصيرة من الزمن أومنطقة صغية من الحيز يتناسب مع طول الفترة او منطقة هذا الحيز

(3)احتمال نجاحين أو أكثر خلال فترة زمنية قصيرة أو منطقة صغيرة من الحيز يكون صغير جداً بحيث يمكن اهماله

أمثلة

مثال ❶ إذا كان متوسط عدد حوادث السير في أحد المدن خلال الاسبوع 5حوادث

1) احسب احتمال أن لايقع أي حادث في اسبوع معين من أسابيع السنة

2)احسب احتمال أن يقع حادثين على الأكثر في اسبوع معين من أسابيع السنة

الحل:

نفرض المتغر العشوائي X يدل على عدد الحوادث في الأسبوع المعين فيكون لها توزيع بواسون الذي معلمته 5 وتوزيع بواسون $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

1)احتمال أن لايقع أي حادث هو $f(0)=\frac{e^{-5}5^{0}}{0!}=0.006737$

2) احتمال أن تقع ثلاثة حوادث على الأقل

$$f(x\le 2)=f(0)+f(1)+f(2)$$

$$f(x\le 2)=\frac{e^{-5}5^{0}}{0!}+\frac{e^{-5}5^{1}}{1!}+\frac{e^{-5}5^{2}}{2!}$$

$$f(x\le 2)=0.006737+0.016844+0.028074$$

$$f(x\le 2)=0.0516548$$

مثال ❷ وجد أن معدل عيوب صناعة السجاد في احد المصانع عيب واحد لكل $4m^2$

تم شراء سجادة من المصنع أبعادها $4m \times 6m$

1) احسب احتمال أن تكون السجادة خالية من العيوب

2)احسب احتمال أن يكون في السجادة عيب واحد على الأكثر

3) احسب احتمال أن يكون في السجادة عيبين على الأقل

الحل:

نفرض المتغير العشوائي X يدل على عدد العيوب في المتر المربع الواحد فيكون

لها توزيع بواسون

الذي معلمته $\frac{1}{4} \times 4 \times 6 = 6$ وتوزيع بواسون $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

1)احتمال أن تكون السجادة خالية من العيوب هو $f(0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0.00247865$

2) احتمال أن يكون في السجادة عيب على الأكثر

$$f(x \le 1) = f(0) + f(1)$$

$$f(x \le 1) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!}$$
$$f(x \le 1) = 0.00247865 + 0.01487192$$
$$f(x \le 1) = 0.01735$$

3) احتمال أن يكون في السجادة عيبين على الأقل

$$f(x \ge 2) = 1 - f(x \le 1)$$
$$f(x \ge 2) = 1 - 0.01735$$
$$f(x \ge 2) = 0.98265$$

مثال ❸ وجد في مزارع الزيتون أن مرض حفار الساق أصاب شجرتين في كل 5 هكتار

1) احسب احتمال أن لاتوجد أي شجرة مصابة في مزرعة مساحتها 20 هكتار

2) احسب احتمال أن توجد أربع شجرات مصابة في مزرعة مساحتها 15 هكتار

الحل :

نفرض المتغير العشوائي X يدل على عدد الشجرات المصابة في الهكتارالواحد فيكون

لها توزيع بواسون وتوزيع بواسون $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

1)لحساب احتمال أن لاتوجد أي شجرة مصابة في مزرعة مساحتها 20 هكتار

تكون معلمة التوزيع $\lambda = \frac{2}{5} \times 20 = 8$

والاحتمال المطلوب: $f(0) = \frac{e^{-8}(8)^0}{0!} = 0.00035$

2)لحساب احتمال أن توجد أربع شجرات مصابة في مزرعة مساحتها 15 هكتار

تكون معلمة التوزيع $\lambda = \frac{2}{5} \times 15 = 6$

والاحتمال المطلوب: $f(4) = \frac{e^{-6}(6)^4}{4!} = 0.1309$

<u>خصائص توزيع بواسن</u>

<u>بملاحظة أن :</u>

[1] $$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + ...$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

[2] توزيع بواسون هو تقريب لتوزيع ذي الحدين وذلك عندما

$n \to \infty$ (عدد التجارب كبير جداً) $p \to 0$ (احتمال النجاح صغير جداً) بتوقع $\lambda = n \cdot p$

[3] التوقع الرياضي $E(X) = \lambda$ والتباين $V(X) = \lambda$

البرهان :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

لكن $$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + ... = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

إذاً : $$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

أي أن التوقع في توزيع بواسون : $E(X) = \mu = \lambda$

ولبرهان $V(X)=\lambda$

نعلم أن $V(X)=\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

لكن $E(X^2)=\sum_{x=0}^{\infty}x^2 f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

نعوض $x^2=x(x-1)+x$

نجد :

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{x=0}^{\infty}[x(x-1)+x]\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\\&=\sum_{x=0}^{\infty}[x(x-1)]\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\\&=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!}+E(x)\\&=e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+E(x)\\&=e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda}+E(x)\\E(X^2)&=\lambda^2+\lambda\end{aligned}$$

بالتعويض في $V(X)=\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

نجد : $V(X)=\lambda^2+\lambda-[\lambda]^2$

ومنه $V(X)=\lambda$

مدخل إلى المتغير العشوائي المستمر (المتصل) : (نترك الخوض في هذا الموضوع للمختصين)

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمه ضمن مجال معين أو (فئة معينة)

مثل مقياس الطول أو الزمن أو الوزن

أمثلة

- رواتب الموظفين في شركة أو مبيعات شركة وغيرها
- أطوال طلاب مدرسه
- أوزان طلاب الصف الأول في مدرسة
- ثمن عملة ما بالنسبة للعملة الوطنية

مثال: في استبيان لعدد ساعات الدراسة اليومية لطلاب معهد 250 طالب كانت عدد ساعات الدراسة ونسبة الطلاب الموافقة موزعة كما في الجدول الآتي:

الفئة	$]0,2]$	$]2,4]$	$]4,6]$	$]6,8]$	$]8,10]$	$]10,12]$
عدد الطلاب	10	25	60	70	80	5
نسبة الطلاب	$\frac{10}{250}$	$\frac{24}{250}$	$\frac{60}{250}$	$\frac{70}{250}$	$\frac{80}{250}$	$\frac{5}{250}$

إذا اعتبرنا أن هذه الدراسة تمثل شريحة كل الطلاب واخترنا طالب عشوائياً فما هو احتمال أن يكون عدد ساعات دراسته (5 و 20 دقيقة)

ستكون الإجابة أن هذا الطالب من الفئة $]4,6]$ والاحتمال المطلوب هو $P=\frac{60}{250}$

والواقع أن هذا الاحتمال هو قيمة تقريبية للاحتمال المطلوب

والقيمة الأكثر قرباً إلى الحقيقة هو أن نُعرّف دالة مستمرة على المجال $]0,12]$

يمر خطها البياني من النقاط التي فواصلها مراكز الفئات المذكورة وتراتيبها التكرار النسبي (نسبة الطلاب)

صورة (5 و 20 دقيقة) وفق هذه الدالة هو الاحتمال المطلوب

دالة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر

تعريف:

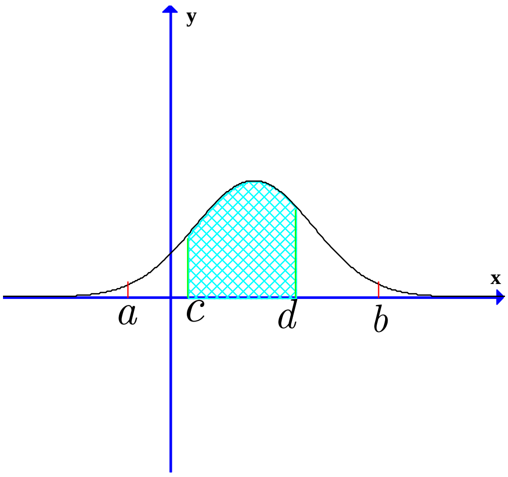
إذا كان X متغيراً عشوائياً في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ ومجموعة القيم لهذا المتغير

المجال $X(\Omega)=[a,b]$

فإننا نسمّي الدالة: $f:X(\Omega)\to[0,1]$ القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر X

إذا حققت : إذا كان : $x\in[c,d]\subseteq[a,b]$ كان $P(c\le x\le d)=\sum_{x=c}^{x=d}f(x)$

$P(\Omega)=\sum_{x=a}^{x=b}f(x)=1$



نتائج:

① أياً كان $x\in X(\Omega)=[a,b]$ كان $f(x)\ge 0$

② احتمال وقوع الحدث A حيث $x\in[c,d]$

هو $P(A)=\sum_{k=c}^{k=d}f(x)$

③ حسب المفهوم الهندسي للتكامل المحدد

$$P(A)=\int_c^d f(x)dx$$

وهو مساحة السطح المحدد بالخط البياني للدالة f والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=c\ ,\ x=d$

④ $X(\Omega)=\mathbb{R}$ فإن $P(\Omega)=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=1$

⑤ $X(\Omega)=[a,b]$ فإن $P(\Omega)=\int_a^b f(x)dx=1$

⑥ التوقع الرياضي :

عندما $X(\Omega)=[a,b]$ فإن $E(X)=\int_a^b xf(x)dx=\mu$ حيث μ ثابت لأنه تكامل محدود

وعندما $X(\Omega)=\mathbb{R}$ فإن $E(x)=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\left(\int_a^b xf(x)dx\right)=\mu$ حيث μ ثابت لأنه تكامل محدود

مثال❶: إذا كان X متغيراً عشوائياً دالته الاحتمالية $f(x)=x$ حيث $0\le x\le\sqrt{2}$ أوجد $E(X)$

الحل: $E(X)=\int_0^{\sqrt{2}} xf(x)dx$ ومنه $E(X)=\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx$ فيكون $E(X)=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

أي $E(X)=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ لاحظ: ($\int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=1$)

مثال❷: إذا كان X متغيراً عشوائياً دالته الاحتمالية $f(x)=\frac{1}{x}$ حيث $1\le x\le e$ أوجد $E(X)$

الحل: $E(X)=\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx$ ومنه $E(X)=[x]_1^e=e-1$

لاحظ: ($\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^e=1$)

⑦ التباين والانحراف المعياري:

<u>التباين</u> :

عندما $X(\Omega)=[a,b]$ فإن

$V(X)=\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx$ حيث μ ثابت : $E(X)=\mu$

وعندما $X(\Omega)=\mathbb{R}$

فإن $V(x)=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\left(\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx\right)$ حيث μ ثابت $E(X)=\mu$

⑧الانحراف المعياري $\sigma=\sqrt{V(X)}$

⑨التوزيع الطبيعي :

<u>أهمية التوزيع الطبيعي</u>

[1]جميع التوزيعات الإحتمالية مثل توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون وغيرها من التوزيعات تؤل إلى التوزيع الطبيعى عندما يكون فضاء العينة كبير جدا.

[2]يصف معظم الظواهر الطبيعية.

[3]إذا تم أخذ مجموعة من الطلاب وقمنا بقياس أطوالهم أو مستوى ذكائهم ورسمنا المنحنى التكرارى النسبى للأطوال أو مستوى الذكاء لوجدنا أنه بزيادة عدد الطلاب فى المجموعة فإن المنحنى يؤل إلى منحنى متماثل حول محور يمر بالوسط الحسابى للمجموعة المختارة، هذا المنحنى المناظر لدالة كثافة لها التوزيع الطبيعي.

تعريف التوزيع الطبيعي

نقول إن للمتغير العشوائى المتصل X له توزيع طبيعي

إذا كانت دالة كثافته لها الصيغة : $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

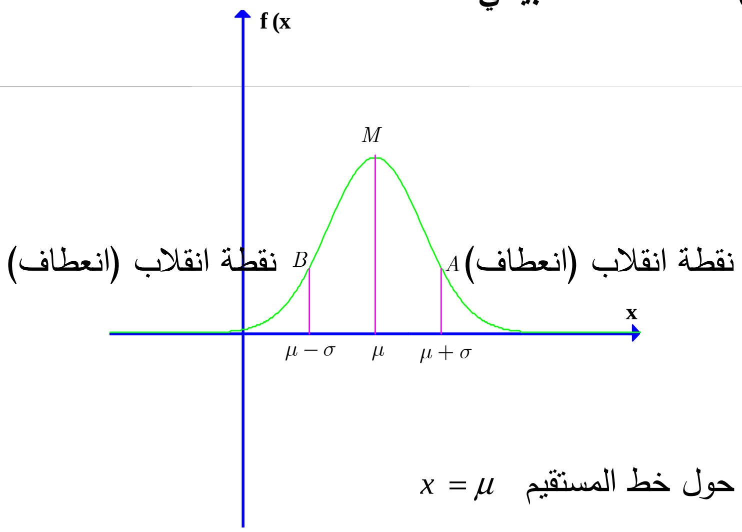
حيث الثابتان $e\approx 2.7183$, $\pi\approx 3.1416$

التوقع الرياضي هو $E(X)=\mu$ ، **والتباين** $V(X)=\sigma^2$ ، **و الانحراف المعياري** σ

ونقول إن X **له توزيع طبيعي بتوقع** μ **وانحراف معياري** σ

خصائص التوزيع الطبيعي

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ **لهذه الدالة الخط البياني**



[1]المنحنى متماثل(متناظر) حول خط المستقيم $x=\mu$

[2]المحور $x\acute{x}$ هو مستقيم مقارب لمنحنى دالة التوزيع الطبيعي

[3]المنوال والوسيط والوسط الحسابى تساوى $x=\mu$ والتباين يساوى σ^2

[4]نقط انقلاب المنحنى هى : $\left(\sigma-\mu\,,\,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ ، $\left(\sigma+\mu\,,\,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$

[5]المساحة الكلية تحت منحنى دالة التوزيع الطبيعي تساوى الواحد الصحيح

[6]نسبة المساحة بين:

$x=\mu+\sigma$, $x=\mu-\sigma$ هي 68.27%

$x=\mu+2\sigma$, $x=\mu-2\sigma$ هي 95.5%

$x=\mu+3\sigma$, $x=\mu-3\sigma$ هي 99.7%

مسائل عامة

مسألة 1 يحوي صندوق على ست كرات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين معاً نفرض رقم إحداهما x و الأخرى الرقم y نعرف متغيراً عشوائياً X الذي قيمته هي : $\frac{x+y}{2}$
إذا كان كل من الرقمين y , x زوجياً . $\frac{|x-y|}{2}$ إذا كان كل من الرقمين y , x فردياً . (0)
إذا كان أحد الرقمين فردياً والآخر زوجياً . اكتب قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب توقعه الرياضي

الحل:

X	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	2	0
2	0	2	0	3	0	4
3	1	0	0	0	1	0
4	0	3	0	4	0	5
5	2	0	1	0	0	0
6	0	4	0	5	0	6

$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو :

x_k	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{7} x_k\ f(x_k)$$

$$E(X)=0+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{6}{36}+\frac{12}{36}+\frac{10}{36}+\frac{6}{36}$$

$$E(X)=\frac{44}{36}=\frac{11}{9}$$

مسألة ②: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي (3) كرات مرقمة بالأعداد 1 , 2 , 3 الصندوق (II) يحتوي (4) كرات مرقمة بالأعداد 2 , 3 , 4 , 5

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II) والمطلوب :

1) اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

2) نفرض الحدث A :إحدى الكرتين على الأقل تحمل رقم 3

نفرض الحدث B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5

هل الحدثان A , B مستقلان احتمالياً ؟ علل .

3) نفرض رقم البطاقة المسحوبة من الصندوق (I) هي x و رقم البطاقة المسحوبة من الصندوق (II) هي y نعرف متغيراً عشوائياً X بالقاعدة :

$$X(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{2} & : \text{إذا كان } x\,,y \text{ فرديان معاً أو زوجيان معاً} \\ |x-y| & : \text{إذا كان } x\,,y \text{ أحدهما فردياً والآخر زوجياً}\end{cases}$$

اكتب قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب توقعه الرياضي

الحل:

1) $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$A=\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,4),(3,5)\}$

$B=\{(2,4),(3,4),(3,3),(1,5),(2,5)(3,5)\}$

2) $P(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ ، $P(B)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ $\quad P(A\cap B)=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

إذاً: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ فالحدثان A ، B مستقلان احتمالياً

3)

X	2	3	4	5
1	1	2	3	3
2	0	1	2	3
3	1	0	1	2

$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k\,f(x_k)$$

$$=\frac{0}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$

مسألة 3: راميان يطلق كل منهما طلقة واحدة على هدف معين ، إذا كان احتمال عدم إصابة الهدف بأية طلقة يساوي $\frac{1}{12}$ واحتمال إصابة الأول فقط للهدف يساوي $\frac{1}{6}$

واعتبرنا A حدث إصابة الأول للهدف و B حدث إصابة الأول الثاني للهدف

أولاً: احسب احتمال إصابة كل من الراميان للهدف أن يصيب الرامي

ثانياً: إذا كان احتمال أن يصيب الرامي A الهدف $P(A)=\frac{2}{3}$

و كان احتمال أن يصيب الرامي B الهدف $P(A)=\frac{3}{4}$

1) احسب احتمال أن يصاب الهدف

2) إذا أصيب الهدف احسب احتمال أن يكون الرامي الأول قد أصاب الهدف

3) إذا أصيب الهدف بطلقة واحدة فقط احسب احتمال أن يكون الرامي الأول قد أصاب الهدف

4) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على عدد الطلقات التي أصيب بها الهدف .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X

واحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري

الحل:

$$\Omega=\{A\cap B,A\cap B',A'\cap B,A'\cap B'\}$$

أولاً: الأحداث A و Bمستقلة احتمالياً يكون A و B' مستقلين و A' و B' مستقلين

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=\frac{1}{12}........(1)$$

$$P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{1}{6}...........(2)$$

بجمع (1)و (2) نجد $P(A)P(B')+P(A')\times P(B')=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$

$(P(A)+P(A'))P(B')=\frac{1}{4}$ لكن $P(A)+P(A')=1$ فيكون $P(B')=\frac{1}{4}$ ومنه $P(B)=\frac{3}{4}$

نبدل قيمة $P(B')=\frac{1}{4}$ في (2) نجد $\frac{1}{4}P(A)=\frac{1}{6}$ ومنه $P(A)=\frac{2}{3}$

ثانياً:

1) الحدث إصابة الهدف هو: $A\cup B$ أو $\{A\cap B,A\cap B',A'\cap B\}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ ومنه $P(A\cup B)=\frac{11}{12}$

2) المطلوب $P(A\mid(A\cup B))$

$$P\left(A \mid (A\cup B)\right)=\frac{P\left(A\cap(A\cup B)\right)}{P\left((A\cup B)\right)}$$

لكن $A\subseteq A\cup B$ فيكون $P\left(A \mid (A\cup B)\right)=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{8}{11}$

3) ليكن H حدث إصابة الهدف بطلقة واحدة فقط فإن: $H=\{(A\cap B'),(A'\cap B)\}$

$A\cap H=A\cap B'$: $\quad P(A\mid H)=\dfrac{P(A\cap H)}{P(H)}$

$$=\frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B')+P(A'\cap B)}$$

$$=\frac{P(A)\cdot P(B')}{P(A)\cdot P(B')+P(A')\cdot P(B)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{2}{5}$$

4) $X(\Omega)=\{0,1.2\}$

$\{X=0\}=A'\cap B'$ ومنه $f(0)=\dfrac{1}{12}$

$\{X=1\}=\{A\cap B',A'\cap B\}=H$ ومنه $f(1)=P(H)=\dfrac{5}{12}$

$\{X=2\}=A\cap B$ ومنه $f(2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{12}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k.f(x_k)$$

ومنه $E(X)=\dfrac{0+5+12}{12}=\dfrac{17}{12}$

لحساب التباين والانحراف المعياري

x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k - E(x))^2$	$(x_k - E(x))^2 \cdot f(x_k)$
0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{289}{144}$	$\frac{289}{1728}$
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{125}{1728}$
2	$\frac{6}{12}$	1	$\frac{49}{144}$	$\frac{294}{1728}$
$\sum_{k=1}^{3}$	1	$E(x) = \frac{17}{12}$		$V(X) = \frac{708}{1728} = \frac{59}{144}$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{3} (x_k - E(X))^2 f(x_k)$$

$$V(X) = \frac{59}{144}$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{59}}{12} \quad \text{ومنه} \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

مسألة ④ يحوي صندوق (10) كرات متماثلة (5 حمراء ، 3 سوداء ، 2 زرقاء) .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً بالتتالي مع الإعادة والمطلوب :

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء والثانية سوداء والثالثة زرقاء ؟

2) ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث من لونٍ واحد ؟

3) ما احتمال أن تكون واحدة فقط من الكرات المسحوبة زرقاء علماً بأن كرة سوداء على الأقل وجدت بين الكرات المسحوبة .

4) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة . اكتب قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب التوقع الرياضي له

<u>الحل</u>:

1)ليكن حدث A أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء والثانية سوداء والثالثة زرقاء

(لاحظ الترتيب بعملية السحب)

$$P(A) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{100}$$

2) ليكن الحدث B أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة من لونٍ واحد

يقع الحدث B إذا كانت الكرات الثلاث المسحوبة إما حمراء أو سوداء أو زرقاء

(لاحظ السحب مع إعادة)

$$P(B)=\left(\frac{5}{10}\right)^3+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\left(\frac{2}{10}\right)^3=\frac{4}{25}$$

3) C حدث أن تكون واحدة فقط من الكرات المسحوبة زرقاء D حدث كرة سوداء على الأقل وجدت بين الكرات المسحوبة (D'حدث عدم سحب أي كرة سوداء)

يقع الحدث : $C\cap D$ إذا (سحبنا كرة من كل لون) أو (سحبنا كرتين سوداوين وكرة زرقاء)

$$P(D)=1-P(D')=1-\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{657}{1000}$$

$$P(C\mid D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\times 6+\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{2}{10}\right)\times 3}{1-\left(\frac{7}{10}\right)^3}=\frac{234}{657}$$

4) $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

الحدث $\{X=0\}$: عدم سحب أي كرة زرقاء ومنه $f(0)=\left(\frac{8}{10}\right)^3=\frac{64}{125}$

الحدث $\{X=1\}$: سحب كرة زرقاء وكرتين من باقي الكرات ومنه $f(1)=\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{8}{10}\right)^2\times 3=\frac{48}{125}$

الحدث $\{X=2\}$: سحب كرتين زرقاء وكرة من باقي الكرات ومنه $f(2)=\left(\frac{2}{10}\right)^2\left(\frac{8}{10}\right)\times 3=\frac{12}{125}$

الحدث $\{X=3\}$: سحب ثلاث كرات زرقاء ومنه $f(3)=\left(\frac{2}{10}\right)^3=\frac{1}{125}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$E(X)=\sum_{k1}^{4}x_k\ f(x_i)$$

ومنه $E(X)=0+\frac{48}{125}+\frac{24}{125}+\frac{3}{125}=\frac{75}{125}=\frac{3}{5}$

مسألة 5: تسع بطاقات متماثلة كتب على n منها العدد 1 وكتب على باقي البطاقات الرقم 2 .

نسحب عشوائياً بطاقتين معاً . والمطلوب :

1) نفرض A حدث سحب بطاقتين تحملان الرقم ذاته

a) إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ احسب n .

b) هل يوجد قيمة للعدد n تجعل $P(A)=\frac{2}{3}$ ، ولماذا؟

c) ما قيم n التي تجعل $P(A)$ أصغر ما يمكن؟ وما قيمة n التي تجعل $P(A)$ أكبر ما يمكن؟

2) إذا كانت $(n=6)$ نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب التوقع الرياضي له .

الحل:

(1

a) A حدث سحب بطاقتين تحملان الرقم 1 أو سحب بطاقتين تحملان الرقم 2 و $P(A)=\frac{1}{2}$

لكن:

$$P(A)=\frac{C(n,2)+C(9-n,2)}{C(9,2)}$$

$$P(A)=\frac{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(9-n)(8-n)}{2}}{36}$$

$$=\frac{n^2-9n+36}{36}$$

إذن:

$n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: $\frac{n^2-9n+36}{36}=\frac{1}{2}$

بإصلاح المعادلة نجد : $n^2-9n+18=0$

تكتب : $(n-6)(n-3)=0$ لها حلان مقبولان $n=3$, $n=6$

b) $P(A)=\frac{2}{3}$ ، $\frac{n^2-9n+36}{36}=\frac{2}{3}$

بإصلاح المعادلة نجد : $n^2-9n+12=0$

لها جذران مرفوضان $n=\frac{9\mp\sqrt{33}}{2}$: $n\notin\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

c) نضع $P(A)=f(n)$

ملاحظة هامة : الدالة $f:\{n_1,n_2,\dots\dots\dots\dots,n_r\}\to\mathbb{R}\ ,\ n_k\to f(n_k)\quad :n_k\in\mathbb{Z}$

هي دالة نقطية ونقاطها تنتمي للخط البياني للدالة f المستمرة على $[n_1,n_r]$ حيث $x\to f(x)$

ولها قيمة كبرى شاملة وقيمة صغرى شاملة

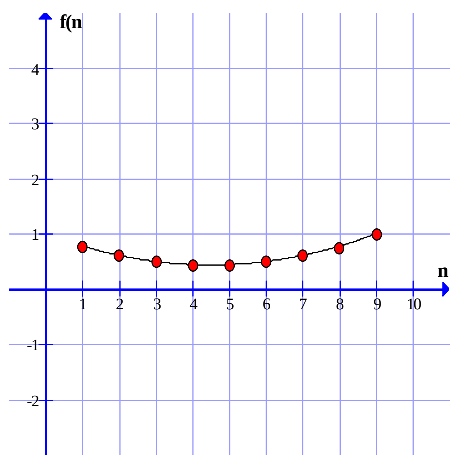
إذا كانت $a\in[n_1,n_r]\ :f(a)$ قيمة كبرى شاملة للدالة المستمرة f فإن أقرب عدد n_k إلى a يجعل الدالة النقطية f أكبر ما يمكن(وقد نجد عدد واحد أو عددين متناظرين بالنسبة إلى العدد الحقيقي a)

حيث $n_k\in\{n_1,n_2,\dots\dots\dots\dots,n_r\}$

إذا كانت $b\in[n_1,n_r]\ :f(b)$ قيمة كبرى شاملة للدالة المستمرة f فإن أقرب عدد n_k إلى b يجعل الدالة النقطية f أصغر ما يمكن (وقد نجد عدد واحد أو عددين متناظرين بالنسبة إلى العدد الحقيقي b)

حيث $n_k\in\{n_1,n_2,\dots\dots\dots\dots,n_r\}$

في المسألة الدالة النقطية $f(n)=\dfrac{n^2-9n+36}{36}$ نقاطها تقع على الخط البياني للدالة المستمرة



$$f(x)=\frac{x^2-9x+36}{36}\quad :\ x\in[1,9]$$

الدالة f اشتقاقية على $[1,9]$

$$f'(x)=\frac{2x-9}{36}\ \text{ و }\ f(1)=\frac{7}{9}\quad ,\ f(9)=1$$

ينعدم $f'(x)$ من أجل $x=\dfrac{9}{2}=4.5$ و $f(\dfrac{9}{2})=\dfrac{7}{16}$

x	1	$\frac{9}{2}$	9
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{7}{9}$ $\searrow$	$\frac{7}{16}$	$\nearrow$ 1

أكبر قيم الدالة هي القيمة 1 توافق العدد $n=9$ من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ مقبول

أكبر قيمة لـ $P(A)$ هي القيمة 1 من أجل $n=9$

أصغر قيم الدالة $\dfrac{7}{16}$توافق العدد $x=\dfrac{9}{2}$ لا ينتمي المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ وأقرب الأعداد للعدد $x=\dfrac{9}{2}$ من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ هما $n=5$, $n=4$ متناظرتين بالنسبة إلى $x=\dfrac{9}{2}$

تجعل كل منهما $P(A)$أصغر ما يمكن وهو $f(4)=f(5)=P(A)=\dfrac{4}{9}$

طريقة ثانية : بسبب كون $f(n)=\dfrac{n^2-9n+36}{36}$ و $n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

تمثل مجموعة نقاط على قوس من منحني قطع مكافئ فأكبر وأصغر القيم إما في طرفي القوس أو عند أقرب النقاط إلى ذروة القطع

تكتب $f(n)=\dfrac{(n-\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}+36}{36}$ أو $f(n)=\dfrac{(n-\frac{9}{2})^2+\frac{63}{4}}{36}$

وتكتب $(n-\frac{9}{2})^2=36\left(f(n)-\frac{63}{144}\right)$

إنها معادلة قطع مكافئ مفتوح نحو الأعلى معادلة محوره $n=\frac{9}{2}$ وتكون ذروته أدنى نقطة له

توافق $n=\frac{9}{2}\notin\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ فأقرب قيمة للعدد $n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ من القيمة $n=\frac{9}{2}$

هما $n=4$, $n=5$ فهما القيمتان اللتان تجعلان $P(A)$ أصغر ما يمكن وهي $P(A)=\frac{4}{9}$

وصورتي الطرفين للمجموعة $f(9)=1$, $f(1)=\frac{7}{9}$

و قيمة n التي تجعل $P(A)$ أكبر ما يمكن هي $n=9$ وهي $f(9)=P(A)=1$

طريقة ثالثة نحسب جميع قيم $P(A)$ الموافقة $n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ونختار قيم n التي تجعل $P(A)$ أصغر ما يمكن أو أكبر ما يمكن $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(لكن هذه الطريقة غير عملية عندما يكون n عدد كبير)

2) من أجل $(n=6)$ ، $X(\Omega)=\{2,3,4\}$

الحدث $\{X=2\}$: سحب بطاقتين كل منهما تحمل الرقم 1 : $f(2)=\dfrac{C(6,2)}{C(9,2)}=\dfrac{5}{12}$

الحدث $\{X=3\}$: سحب بطاقتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 2 :

$$f(3)=\frac{C(6,1).C(3,1)}{C(9,2)}=\frac{6}{12}$$

الحدث $\{X=4\}$: سحب بطاقتين كل منهما تحمل الرقم 2 : $f(4)=\dfrac{C(3,2)}{C(9,2)}=\dfrac{1}{12}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x_k	2	3	4
$f(x_k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$

ومنه: $E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k.f(x_k)$

$$E(x)=\frac{10+18+4}{12}=\frac{8}{3}$$

مسألة ⑥ : في دراسة لمديرية النقل في إحدى المحافظات وجد أن 30% من السيارات ذات فرامل ضعيفة ،ومن هذه السيارات 60% فيها خلل بالإنارة ،ومن بين السيارات ذات الفرامل القوية 10% فيها خلل بالإنارة ،إذا كان الحدث A السيارة ذات فرامل قوية ،والحدث B السيارة ذات إنارة جيده ، وكانت مخالفة ضعف الإنارة 100ل، ومخالفة الفرامل الضعيفة 200ل

أوقفت شرطة السير أحد سيارات المحافظة

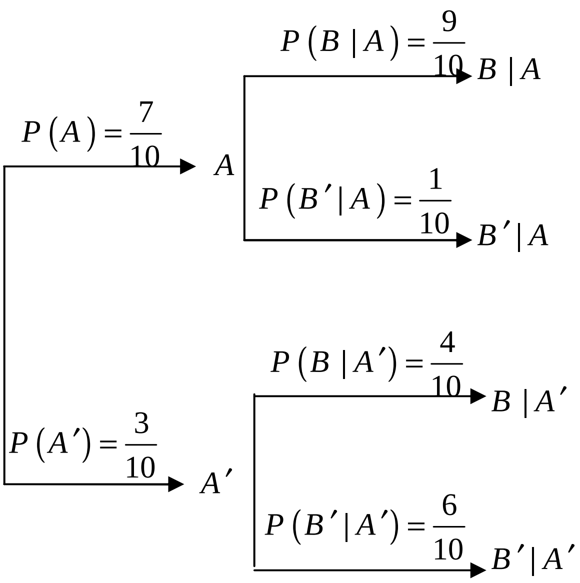
1) احسب احتمال أن تدفع السيارة مخالفة بقيمة 300 ل

2)احسب احتمال أن تكون السيارة في حالة جيدة (فرامل قوية وإنارة جيدة)

3) إذا كانت السيارة الموقوفة ذات إنارة ضعيفة احسب احتمال أن تكون ذات فرامل جيدة

4)إذا كان X يدل على مقدار المخالفة التي تدفعها السيارة الموقوفة ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول قانون احتماله ثم احسب توقعه الرياضي

الحل:



1) تدفع السيارة مخالفة بقيمة 300 ل

هو حدث $A'\cap B'$ و

$$P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B'|A')$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{50}$$

2)حدث أن تكون السيارة في حالة جيدة

هو حدث $A\cap B$ و

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

$$=\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{63}{100}$$

3)حسب قاعدة بايز : $P(A|B')=\dfrac{P(A)\cdot P(B'|A)}{P(A)\cdot P(B'|A)+P(A')\cdot P(B'|A')}$

$$P(A|B')=\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}}=\frac{7}{25}$$

(4

$$X(\Omega)=\{0,100,200,300\}$$

$$f(0)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=\frac{63}{100}$$

$$f(100)=P(A)\cdot P(B'\,|\,A)=\frac{7}{100}$$

$$f(200)=P(A')\cdot P(B\,|\,A')=\frac{12}{100}$$

$$f(300)=P(A')\cdot P(B'\,|\,A')=\frac{18}{100}$$

جدول توزيع القانون الاحتمالي

x_k	0	100	200	300
$f(x_k)$	$\frac{63}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{18}{100}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k\cdot f(x_k)$$

$$E(X)=\frac{0+7+12+18}{100}=0.37$$

مسألة 7 : نرمي حجر نرد غير متجانس الأوجه تحمل الأرقام $1,2,3,4,5,6$ احتمالات ظهورها على الترتيب ذاته P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6 وتشكل متتالية حسابية حدها الأول $\frac{1}{12}$

1) احسب P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6

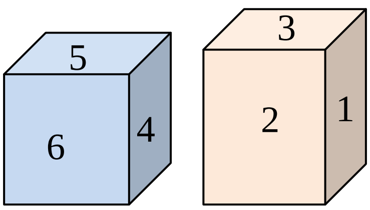
2) إذا كان A حدث الحصول على عدد أولي

وكان B حدث الحصول على فردي هل A و B مستقلان احتمالياً

3)ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على العدد نفسه إن كان فردي وعلى نصف العدد إن كان زوجي

أوجد مجموعة قيم X وجدول توزيع قانونه الاحتمالي

واحسب توقعه الرياضي الانحراف المعياري له



الحل:

تذكرة: الحد العام لمتتالية حسابية : $U_n=U_1+(n-1)r$

ومجموع n حد من حدود متتالية حسابية حدها الأول U_1 هو: $S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)$

1) لكن $n=6$, $U_1=\frac{1}{12}$ فيكون $U_n=\frac{1}{12}+5r$

$S_6 = P(\Omega) = 1$: $S_6 = \frac{6}{2}(\frac{1}{12} + U_n)$

$3(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 5r) = 1$

$\frac{1}{2} + 15r = 1$

$r = \frac{1}{30}$

فيكون : $P_3 = \frac{1}{12} + \frac{2}{30} = \frac{9}{60}$ ، $P_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}$ ، $P_1 = \frac{1}{12} = \frac{5}{60}$

$P_6 = \frac{15}{60}$ ، $P_5 = \frac{13}{60}$ ، $P_4 = \frac{1}{12} + \frac{3}{30} = \frac{11}{60}$

2) $A = \{2,3,5\}$ ، $B = \{1,3,5\}$ ، $A \cap B = \{3,5\}$

$P(A) = P_2 + P_3 + P_5 = \frac{29}{60}$ ، $P(B) = P_1 + P_3 + P_5 = \frac{9}{20}$ ،

$P(A \cap B) = P_3 + P_5 = \frac{11}{30}$ ، $P(A) \cdot P(B) = \frac{29}{60} \times \frac{9}{20} = \frac{87}{400}$ ،

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ الحدثان A, B غير مستقلين احتمالياً

3) $X(\Omega) = \{1,2,3,5\}$

الحدث $\{X = 1\} = \{1,2\}$: $f(1) = P_1 + P_2 = \frac{12}{60}$

الحدث $\{X = 2\} = \{4\}$: $f(4) = P_4 = \frac{11}{60}$

الحدث $\{X = 3\} = \{3,6\}$: $f(3) = P_3 + P_6 = \frac{24}{60}$

الحدث $\{X = 5\} = \{5\}$: $f(5) = P_5 = \frac{13}{60}$

x_k	1	2	3	5
$f(x_k)$	$\frac{12}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{24}{60}$	$\frac{13}{60}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} x_k \ f(x_k)$$

$$= \frac{12}{60} + \frac{22}{60} + \frac{72}{60} + \frac{65}{60}$$

$$E(X) = \frac{171}{60} = \frac{57}{20}$$

لحساب الانحراف المعياري نشكل الجدول التالي:

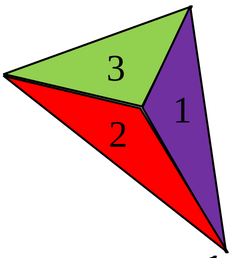
x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k - E(X))^2$	$(x_k - E(X))^2 \cdot f(x_k)$
1	$\frac{12}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{1369}{400}$	$\frac{16428}{24000}$
2	$\frac{11}{60}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{289}{400}$	$\frac{3179}{24000}$
3	$\frac{24}{60}$	$\frac{72}{60}$	$\frac{9}{400}$	$\frac{216}{24000}$
5	$\frac{13}{60}$	$\frac{65}{60}$	$\frac{1849}{400}$	$\frac{24037}{24000}$
$\sum_{k=1}^{r}$	1	$E(X)=\frac{57}{20}$		$V(X)$

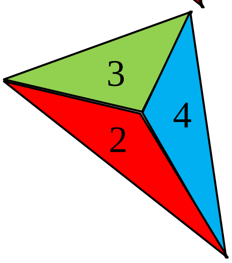
$$V(X)=\sum_{k=1}^{4}(x_k - E(X))^2 f(x_k)$$

$$V(X)=\frac{16428+3179+216+24037}{24000}=1.8275$$

$\sigma_x=\sqrt{V(X)}$ ومنه $\sigma_x \approx 1.35$

مسألة 8: نرمي حجر نرد رباي غير متجانس الأوجه تحمل الأرقام $1,2,3,4$ احتمالات ظهورها على الترتيب ذاته P_1,P_2,P_3,P_4 وتشكل متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$





1) احسب P_1,P_2,P_3,P_4

2) إذا حصلنا على عدد فردي احسب احتمال أن يكون هذا العدد أولي

3)ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على العدد نفسه إن كان فردي وعلى القيمة m إن كان العدد زوجي

أوجد مجموعة قيم وجدول توزيع قانونه الاحتمالي

واحسب توقعه الرياضي بدلالة m ثم احسب m

عندما يكون $E(X)=\frac{34}{15}$ عندئذ احسب الانحراف المعياري له

الحل:

تذكرة : الحد العام لمتتالية هندسية $V_n=V_1 \cdot q^{n-1}$

ومجموع n حداالأولى من حدودها $S_n=V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

لكن $S_n=P(\Omega)=1$

$$1=V_1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{ومنه} \quad 1=V_1\left(\frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}}\right)$$

يكون : $V_1=\frac{8}{15}$ ، $V_2=\frac{4}{15}$ ، $V_3=\frac{2}{15}$ ، $V_4=\frac{1}{15}$

نفرض الحدث A : الحصول على عدد فردي يكون $A=\{1,3\}$.

B: الحصول على عدد أولي يكون $A\cap B=\{3\}$.

فيكون المطلوب $P(B|A)$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A)=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{10}{15} \quad \text{ومنه} \quad P(B|A)=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{1}{5}$$

$$X(\Omega)=\{1,3,m\}$$

الحدث $\{X=1\}=\{1\}$: $f(1)=P_{12}=\frac{8}{15}$

الحدث $\{X=3\}=\{3\}$: $f(3)=P_3=\frac{2}{15}$

الحدث $\{X=m\}=\{2,4\}$: $f(5)=P_2+P_4=\frac{5}{15}$

x_k	1	3	m
$f(x_k)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$

ومنه: $E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k.f(x_k)$

$$E(X)=\frac{8+6+5m}{15}$$

$$E(X)=\frac{14+5m}{15}$$

عندما : $E(X)=\frac{34}{15}$

نجد $\frac{34}{15}=\frac{14+5m}{15}$ ومنه $m=4$

لحساب التباين والانحراف المعياري

x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k - E(x))^2$	$(x_k - E(x))^2 \cdot f(x_k)$
1	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{49}{225}$	$\frac{392}{3375}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1521}{225}$	$\frac{3042}{3375}$
4	$\frac{5}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{1600}{225}$	$\frac{8000}{3375}$
$\sum_{k=1}^{3}$	1	$E(x) = \frac{34}{15}$		$V(X) = \frac{11434}{3375}$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{3} (x_k - E(X))^2 f(x_k)$$

$$V(X) = \frac{11434}{3375} \approx 3,39$$

$$\sigma_x \approx 1,84 \quad \text{ومنه} \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

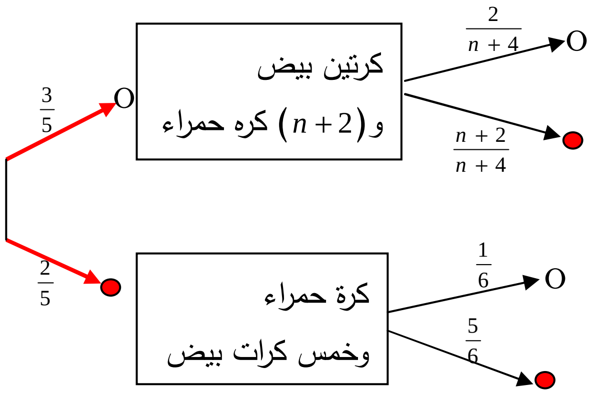
مسألة 9 صندوق يحوي كرتين حمراوين وثلاث كرات بيضاء ، ويوجد خارج الصندوق كرات من اللونين تكفي للتجربة، نسحب من الصندوق كرة عشوائياً ولا نعيدها للصندوق ، إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نضع في الصندوق كرتين بيض و إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نضع في الصندوق n كرة حمراء ثم نسحب من الصندوق كرة ثانية عشوائياً

أولاً: ليكن الحد ث A هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني، والحدث B هو الحصول على كرة حمراء في السحب الأول إذا علمت أن $P(B|A) = \frac{3}{5}$ احسب n .

ثانياً : إذا كانت n نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرتين ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X واحسب التوقع الرياضي له .

الحل: أولاً

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



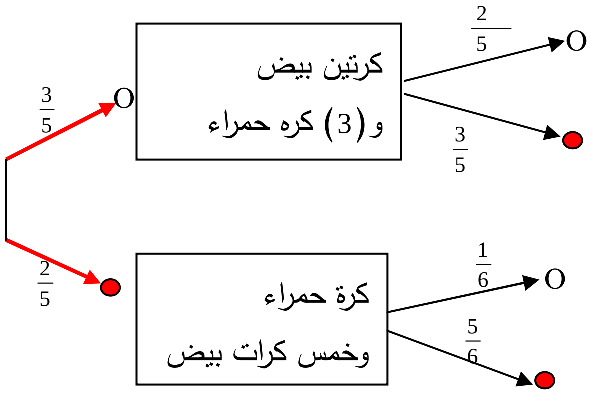
$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} \times \frac{2}{n+4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}$$

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{n+4} + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3n+12}{22+3n}$$

بما أن $P(B \mid A) = \frac{3}{5}$ يكون

$$\frac{3n+12}{22+3n} = \frac{3}{5}$$



ومنه $15n + 60 = 66 + 9n$

تكون $n = 1$

ثانياً:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$f(0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = \frac{18}{75}$$

$$f(1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{32}{75}$$

$$f(2) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} = \frac{25}{75}$$

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	$\frac{18}{75}$	$\frac{32}{75}$	$\frac{25}{75}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3} x_k \; f(x_k)$$
$$=0+\frac{32}{75}+\frac{50}{75}$$
$$E(X)=\frac{82}{75}$$

مسألة ⑩ يحوي مغلف (7) بطاقات متماثلة مرقمة بالأعداد $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات بالتتالي دون إعادة والمطلوب :

1) ما احتمال ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة ؟

2) إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ،

ما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها .

3) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على أكبر رقم بين أرقام البطاقات المسحوبة .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X

واحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري

4) أعد حل المسألة إذا كان سحب البطاقات على التتالي مع الإعادة

الحل:

1) Aحدث ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة

يقع الحدث Aإذا تم سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 وبطاقتين من المغلف لا تحمل أي منهما

الرقم 2 $P(A)=\frac{1}{7}\times\frac{6}{6}\times\frac{5}{5}\times 3=\frac{3}{7}$ أو $P(A)=\frac{C(6,2)C(1,1)}{C(7,3)}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$

2) B حدث أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي المطلوب $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

يقع الحدث Bإذا تم(سحب ثلاث بطاقات كل منها تحمل رقم فردي) أو إذا تم

(سحب ثلاث بطاقات واحدة منها تحمل رقم فردي والبطاقتان الأخريين تحمل كل منهما رقم زوجي)

$P(B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times 3=\frac{16}{35}$ أو $P(B)=\frac{C(4,3)+C(4,1)C(3,2)}{C(7,3)}=\frac{16}{35}$

ويقع الحدث $A\cap B$إذا تم سحب ثلاث بطاقات إحداها تحمل الرقم 2 وأخرى تحمل رقم زوجي لا يساوي 2 والثالثة تحمل رقم فردي

$P(B)=\frac{C(1,1)\cdot C(2,1)\cdot C(4,1)}{C(7,3)}=\frac{8}{35}$ أو $P(A\cap B)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times 6=\frac{8}{35}$

ومنه $P(A|B)=\frac{\frac{8}{35}}{\frac{16}{35}}=\frac{1}{2}$

3) $X(\Omega)=\{3,4,5,6,7\}$

الحدث : $\{X=3\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2\}$

$f(3)=\frac{C(1,1)C(2,2)}{C(7,3)}=\frac{1}{35}$ أو $f(3)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times 3=\frac{1}{35}$

الحدث : $\{X=4\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 4 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3\}$

$f(4)=\frac{C(1,1)C(3,2)}{C(7,3)}=\frac{3}{35}$ أو $f(4)=\frac{1}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times 3=\frac{3}{35}$

الحدث : $\{X=5\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 5 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4\}$

$f(5)=\frac{C(1,1)C(4,2)}{C(7,3)}=\frac{6}{35}$ أو $f(5)=\frac{1}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times 3=\frac{6}{35}$

الحدث: $\{X=6\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 6 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ ومنه

$f(6)=\frac{C(1,1)C(5,2)}{C(7,3)}=\frac{10}{35}$ أو $f(6)=\frac{1}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times 3=\frac{10}{35}$

الحدث : $\{X=7\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 7 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ ومنه

$f(7)=\frac{C(1,1)C(6,2)}{C(7,3)}=\frac{15}{35}$ أو $f(7)=\frac{1}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times 3=\frac{15}{35}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X

x_k	3	4	5	6	7
$f(x_k)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{15}{35}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}x_i.f(x_i)$$

$E(X)=\frac{3+12+30+60+105}{35}$ ومنه $E(X)=6$

حساب التباين والانحراف المعياري

x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k - E(X))^2$	$(x_k - E(X))^2 \cdot f(x_k)$
3	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	9	$\frac{9}{35}$
4	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	4	$\frac{12}{35}$
5	$\frac{6}{35}$	$\frac{30}{35}$	1	$\frac{6}{35}$
6	$\frac{10}{35}$	$\frac{60}{35}$	0	0
7	$\frac{15}{35}$	$\frac{105}{35}$	1	$\frac{15}{35}$
$\sum_{k=1}^{5}$	1	$E(X)=6$		$V(X)$

$$V(X)=\sum_{k=1}^{4}(x_k - E(X))^2 f(x_k)$$

$$V(X)=\frac{9+12+6+0+15}{35}=\frac{6}{5}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{6}{5}} \quad \text{ومنه} \quad \sigma_x=\sqrt{V(X)}$$

4) إعادة حل المسألة إذا كان سحب البطاقات على التتالي مع الإعادة:

❶ Aحدث ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة

يقع الحدث A إذا تم سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 وبطاقتين من المغلف لا تحمل أي منهما الرقم 2

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 مرتين مع بطاقة لا تحمل الرقم 2 أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم (2) ثلاث مرات :

$$P(A)=\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times 3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}\times 3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{127}{343}$$

أو A هو الحدث المضاد لعدم سحب بطاقة تحمل الرقم 2

$$P(A)=1-P(A')$$

$$P(A)=1-\left(\frac{6}{7}\right)^3=1-\frac{216}{343}=\frac{127}{343}$$

❷ B حدث أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي المطلوب $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

يقع الحدث B إذا تم سحب ثلاث بطاقات كل منها تحمل رقم فردي أو إذا تم سحب ثلاث بطاقات

واحدة منها تحمل رقم فردي والبطاقتين الأُخريين تحمل كل منهما رقم زوجي

$$P(B)=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}\times 3=\frac{172}{343}$$

ويقع الحدث $A\cap B$ إذا تم سحب ثلاث بطاقات إحداها تحمل الرقم 2 وأخرى تحمل رقم زوجي

لا يساوي 2 والثالثة تحمل رقم فردي أو بطاقتان كل منهما تحمل الرقم 2 والثالثة عدد فردي

$$P(A\cap B)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{7}\times 6+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}\times 3=\frac{60}{343}$$

و ومنه $P(A|B)=\dfrac{\frac{60}{343}}{\frac{172}{343}}=\dfrac{15}{43}$

❸ $X(\Omega)=\{1.2,3,4,5,6,7\}$

الحدث : $\{X=1\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 1 ثلاث مرات $f(1)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{343}$

الحدث : $\{X=1\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 مرة والبطاقة التي تحمل الرقم 1 مرتين

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 مرتين والبطاقة التي تحمل الرقم 1 مرة

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 2 ثلاث مرات

$$f(2)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times 3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times 3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{7}{343}$$

الحدث : $\{X=3\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 مرتين وسحب بطاقة من أرقام المجموعة $\{1,2\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 ثلاث مرات

$$f(3)=\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{19}{343}$$

الحدث : $\{X=4\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 4 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 4 مرتين وسحب بطاقة من أرقام المجموعة $\{1,2,3\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 4ثلاث مرات

$$f(4)=\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{37}{343}$$

الحدث : $\{X=5\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 5 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 5 مرتين وسحب بطاقة من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4\}$

أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 5ثلاث مرات

$$f(5)=\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{61}{343}$$

الحدث : $\{X=6\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 6 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 6 مرتين وسحب بطاقة من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 6ثلاث مرات

$$f(6)=\frac{1}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{5}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{91}{343}$$

الحدث : $\{X=7\}$ سحب البطاقة التي تحمل الرقم 7 وسحب بطاقتين من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 7 مرتين وسحب بطاقة من أرقام المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ أو سحب البطاقة التي تحمل الرقم 7ثلاث مرات

$$f(7)=\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}\times3+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{127}{343}$$

وجدول القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X

x_k	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_k)$	$\frac{1}{343}$	$\frac{7}{343}$	$\frac{19}{343}$	$\frac{37}{343}$	$\frac{61}{343}$	$\frac{91}{343}$	$\frac{127}{343}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{7} x_i . f(x_i)$$

$$E(X)=\frac{1960}{343}=\frac{40}{7} \quad \text{ومنه} \quad E(X)=\frac{1+14+57+148+305+546+889}{343}$$

حساب التباين والانحراف المعياري

x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$(x_k-E(X))^2$	$(x_k-E(X))^2 \cdot f(x_k)$
1	$\frac{1}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(1-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{1089}{49}$	$\frac{1089}{16807}$
2	$\frac{7}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(2-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{676}{49}$	$\frac{4732}{16807}$
3	$\frac{19}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(3-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{361}{49}$	$\frac{6859}{16807}$
4	$\frac{37}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(4-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{144}{49}$	$\frac{5328}{16807}$
5	$\frac{61}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(5-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$	$\frac{1225}{16807}$
6	$\frac{91}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(6-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{4}{49}$	$\frac{364}{16807}$
7	$\frac{127}{343}$	$\frac{1}{343}$	$\left(7-\frac{40}{7}\right)^2=\frac{81}{49}$	$\frac{10287}{16807}$
$\sum_{k=1}^{7}$	1	$E(X)=\frac{40}{7}$		$V(X)=\frac{29884}{16807}$

$$V(X)=\sum_{k=1}^{4}(x_k-E(X))^2 f(x_k)$$

$$V(X)=\frac{9+12+6+0+15}{35}=1.778$$

$$\sigma_x=7.9 \quad \text{ومنه} \quad \sigma_x=\sqrt{V(X)}$$

مسألة⑪ مغلف يحتوي على بذور ورد يعطي بعد زراعته $40\,\%$ورد أحمر والباقي يعطي ورد أبيض

نزرع منها 8بذرات احسب احتمال :

❶أن لا نحصل على أي وردة بيضاء

❷أن نحصل على وردة حمراء واحدة

❸أن نحصل على ثلاث وردات بيضاء على الأكثر

❹إذا كان X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الوردات الحمراء التي سنحصل عليها بعد زراعة البذور

احسب التوقع الرياضي وانحرافه المعياري

الحل : نفرض p احتمال أن تبت وردة حمراء و q احتمال أن تبت وردة بيضاء يكون :

$p=\dfrac{2}{5}$ و $q=\dfrac{3}{5}$ و $n=8$ نستخدم توزيع ثنائي الحد

❶نفرض A حدث عدم الحصول على أي وردة بيضاء :

$$P(A)=C(8,0)\left(\frac{2}{5}\right)^8\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{256}{390625}$$

❷نفرض B حدث الحصول على وردة حمراء واحدة

$$P(B)=C(8,1)\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^7=\frac{34992}{390625}$$

❸نفرض C حدث الحصول على ثلاث وردات بيضاء على الأكثر

$$\begin{aligned}P(C)&=C(8,3)\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^3+C(8,2)\left(\frac{2}{5}\right)^6\left(\frac{3}{5}\right)^2+C(8,1)\left(\frac{2}{5}\right)^7\left(\frac{3}{5}\right)^1+C(8,0)\left(\frac{2}{5}\right)^8\left(\frac{3}{5}\right)^0\\&=\frac{48384}{390625}+\frac{16128}{390625}+\frac{3072}{390625}+\frac{256}{390625}\\P(C)&=\frac{67840}{390625}=0.1736704\end{aligned}$$

❹التوقع الرياضي والانحراف المعياري

$$E(X) = n \cdot p = 8 \times \frac{2}{5} = 3.2$$
$$V(X) = n \cdot p \cdot q = \frac{48}{25}$$
$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{4}{5}\sqrt{3}$$

الأستاذ أحمد أبو نبوت

تم بعون الله وحمده

27 رمضان 1434 الموافق 5 \ 8 \ 2013

تعريف بكاتب الكتاب : المبادئ الأوليه للاحتمالات

الأستاذ أحمد محمود أبو نبوت مواليد 1951 سوريا – درعا

تخرج من جامعة دمشق كلية العلوم قسم الرياضيات عام 1975

عمل مدرساً في الثانوي حتى عام 2002

ثم عمل موجهاً لمادة الرياضيات حتى عام 2011

يعمل حالياً مدرساً في مدرسة خاصة ويكتب في مواضيع الرياضيات

هـ: 963 15 220723 ، م : 0933337384 ، 0965728199