الفهرس

الفصل الثاني

الفضاءات التبولوجية

مُقَدِّمَة

تعدّ التبولوجيا (الطبولوجيا) تحليلاً مجرداً يدرس، بصورة رئيسية، البنى الرياضية التي تدعى البنى التبولوجية، والتي تفيد بشكل فعال في دراسة التحليل الرياضي ومختلف الفروع العلمية الأخرى، والتي تسهم إلى جانب البنى الجبرية (كالزمر والحلقات وغيرها) إسهاماً كبيراً في تطوير الرياضيات.

هذا وتتم، عادة، دراسة التبولوجيا بطرق متعددة، حيث صدرت عدة كتب جامعية في الطبولوجيا (التبولوجيا) تَميَّز كل منها بطريقة عرضه للبحث. ونقدم في كتابنا الحالي طريقة لعرض البحث لم تكن مطروقة، بوجه عام، في السابق.

يتألف هذا الكتاب من ثلاثة فصول، وقد تمتْ كتابتها بشكل مناسب بحيث يستطيع القارئ أن يفهم مضمونها بسهولة. كما أُتبع الكثير من الفقرات بالأمثلة التوضيحية الضرورية، وأتبع كل فصل بتمارين محلولة وتمارين غير محلولة.

وقد تمتْ تغطية جميع فقرات منهاج مقرر الطبولوجيا (التبولوجيا) العامة (١) لطلاب السنة الثانية – فرع الرياضيات، حيث يتضمن هذا المنهاج ما يلي:

١- الفضاءات المترية: تعاريف- المتتاليات (المتواليات)- تقارب المتواليات- استمرار الدوال (التوابع)- المجموعات المغلقة والمفتوحة- الفضاءات التامة- التقليص - مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة وتطبيقاتها في حل المعادلات الجبرية والتفاضلية- مبرهنة بيكارد- الفضاءات المتراصة- فكرة عن الفضاءات المترابطة.

٢- الفضاءات الطبولوجية (التبولوجية): تعاريف ومبادئ- الفضاءات المتورة- توليد التبولوجيا- الفضاءات الجزئية.

وأخيراً، فإننا نرجو أن يؤدي هذا الكتاب الغاية المرجوة من تأليفه.

المؤلفان

الفصل الأول

الفضاءات المترية

- تعاريف وأمثلة ومبرهنات
- المتواليات
- تعريف (للتابع المستمر)
- المجموعات المغلقة والمجموعات المفتوحة
- التمام
- التقليص
- التراص
- الترابط
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

الفصل الأول

الفضاءات المترية

١-١- تعريف:

لتكن X مجموعة ما غير خالية. يُقال عن تابع مثل $d : X \times X \to R$ إنه **مترك** أو **تابع مسافة على** X إذا كان يحقق الموضوعات التالية لأجل أية عناصر مثل x, y, z من X:

(١) $d(x,y) \geq 0$ و $[x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0]$

(٢) $d(y,x) = d(x,y)$ (خاصة التناظر)

(٣) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (متراجحة المثلث)

ويُقال، حينئذ، عن الثنائية (X,d) إنها فضاء متري، ويُقال عن أيّ عنصر من عناصره إنه **نقطة** من هذا الفضاء.

ملاحظة مهمة:

يمكننا أن ننظر إلى أية مجموعة جزئية غير خالية مثل Y من فضاء متري مثل (X,d) بأنها فضاء متري بالنسبة للمسافة d، وبشكل أدق: بالنسبة لمقصور d على $Y \times Y$، حيث يمكن التأكد من تحقق كافة الشروط، ويدعى (Y,d) **فضاء جزئياً من الفضاء** (X,d) وفق ما قلناه.

١-٢- أمثلة مهمة:

١) لتكن $X = R$. من أجل كل x, y من X نعرّف $d(x,y) = |x - y|$ فيكون (X,d) فضاءً مترياً بملاحظة ما يلي:

(١) $d(x,y)=|x-y|\ge 0$ و $[d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y]$

(٢) $d(x,y)=|x-y|=|-(x-y)|=|y-x|=d(y,x)$

(٣) $$d(x,y)=|x-y|=|(x-z)+(z-y)|\le$$
$$\le |x-z|+|z-y|=d(x,z)+d(z,y)$$

ولقد استخدمنا في إثبات (٣) أنّ $|a+b|\le|a|+|b|$ من أجل كل a,b من R.

يُقال عن هذا المترك d إنه **المترك المألوف على** R.

٢) لتكن $X=C$ مجموعة الأعداد العقدية. من أجل أيّ x,y من X نعرّف $d(x,y)=|x-y|$ فيكون (X,d) فضاءً مترياً كما في المثال السابق، حيث x,y عددان عقديان.

٣) لتكن $X=R^2$. من أجل كل x,y من R^2 نعرّف:

$$d(x,y)=d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

حيث $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$، وهذه هي المسافة الإقليدية بين نقاط المستوي.

العلاقة بين R^2 و C:

لتكن $x=x_1+ix_2$ و $y=y_1+iy_2$ في C حيث x_1,x_2,y_1,y_2 من R. عندئذ:

$$d(x,y)=|x-y|=|(x_1+ix_2)-(y_1+iy_2)|=$$
$$=|(x_1-y_1)+i(x_2-y_2)|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

وهي المسافة ذاتها بين النقطتين $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ في R^2.

٤) في R^n لنضع $x=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)$ ولنكتب:

$$d(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots\ldots+(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

فتكون d تابع مسافة على R^n وتدعى **(المسافة الإقليدية)** على R^n، كما يدعى (R^n,d) الفضاء الإقليدي ذا الأبعاد $n\ge 1$.

وسنكتفي بإثبات متراجحة المثلث حيث سنحتاج إلى متراجحة كوشي – شوارتز ومتراجحة مينكوفسكي التاليتين:

(متراجحة كوشي – شوارتز): إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداداً حقيقية، فإنّ:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

(متراجحة مينكوفسكي): إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداداً حقيقية، فإنّ:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

لنثبت، الآن، متراجحة المثلث وهي:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

من أجل ذلك نضع $a_i=x_i-z_i$ و $b_i=z_i-y_i$ من أجل $1\le i\le n$ فيكون:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}=$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

٥) في R^n لنضع $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ فإنّ d_1 تابع مسافة.

٦) في R^n لنضع $d_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$ فإنّ d_∞ تابع مسافة.

٧) لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولنعرّف:

$$\delta(x,y)=\begin{cases}0 & if \quad x=y\\ 1 & if \quad x\neq y\end{cases} \qquad [\forall x,y\in X]$$

فإنّ (X,δ) فضاء متري يسمى **الفضاء المتري المتقطع**، كما تسمى δ **المسافة المتقطعة على** X.

٨) لتكن $B[a,b]$ = مجموعة كل التوابع الحقيقية المحدودة المعرفة على $[a,b]$.

من أجل x,y من $B[a,b]$ لنعرّف:

$$d(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

فيكون $d(x,y)$ معرّفاً تماماً:

بالحقيقة، إذا كانت $|x(t)|\le A$ من أجل كل t من $[a,b]$ و $|y(t)|\le B$ من أجل كل t، فإنّ:

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)|+|y(t)|\le A+B$$

ومنه فإن $\sup\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ موجود (وهو لا يتجاوز $A+B$).

كما إنّ التابع d مترك على $[a,b]$ بملاحظة الآتي:

(١) $d(x,y)\ge 0$ (وضوحاً). وأيضاً، إذا كان $x=y$ فإنّ $d(x,y)=0$ (وضوحاً). وإذا كان $d(x,y)=0$ فإنّ $\sup|x(t)-y(t)|=0$، ومنه $|x(t)-y(t)|=0$ من أجل كل t، أيْ أنّ $x(t)=y(t)$ من أجل كل t، أيْ أن x,y متساويان (على $[a,b]$)، أيْ: $x=y$.

(٢) $d(x,y)=d(y,x)$ (وضوحاً).

(٣) من أجل x,y,z من $B[a,b]$ ومن أجل كل t من $[a,b]$ لدينا:

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\le$$

$$\le\sup_{a\le s\le b}|x(s)-z(s)|+\sup_{a\le u\le b}|z(u)-y(u)|=$$

$$=d(x,z)+d(z,y)$$

ومنه (لأجل كل t من $[a,b]$) يكون:

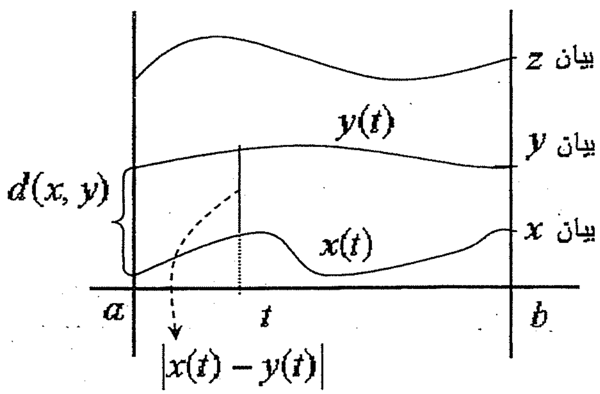
$$|x(t)-y(t)|\le d(x,z)+d(z,y)$$

إنّ الطرف الأيمن مستقل عن t، لذلك فإنه حد أعلى للمجموعة:

$$\{|x(t)-y(t)| \quad / t\in[a,b]\}$$

وبالتالي:

$$d(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\le d(x,z)+d(z,y)$$



٩) لتكن $C[a,b]$ = مجموعة كل التوابع المستمرة، المعرفة على $[a,b]$.

نعلم أن كل تابع مستمر على $[a,b]$ محدود، لذلك نستطيع وضع:

$$d(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

فإن d مترك كما في المثال السابق.

يسمى المترك في المثال السابق **المترك sup** أو **المترك المنتظم**.

هذا ويفترض أن القارئ لديه معلومات كافية نسبياً عن استمرار التوابع الحقيقية وعن الخواص الأساسية لمثل هذه التوابع.

١-٣- ملاحظات:

١) يمكن أن نعرّف أكثر من مترك على مجموعة ما.

٢) ما لم نشر إلى خلاف ذلك صراحة فإننا عندما نتحدث عن توابع مسافة معرفة على R أو R^2 أو.... أو R^n أو C فإننا نفترض أن تابع المسافة المعني هو تابع المسافة المعرف على تلك المجموعات في الأمثلة السابقة.

٣) لتكن $x,y,z_1,z_2,....,z_n$ نقاطاً في X. عندئذ، بتكرار متراجحة المثلث، نجد أنّ:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\le d(x,z_1)+d(z_1,y)\\
&\le d(x,z_1)+d(z_1,z_2)+d(z_2,y)\\
&\le d(x,z_1)+d(z_1,z_2)+d(z_2,z_3)+d(z_3,y)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\le d(x,z_1)+d(z_1,z_2)+\dots\dots+d(z_n,y)
\end{aligned}$$

١-٤- المتواليات:

١- **المتوالية** (المتتالية) في (من) فضاء متري مثل (X,d) هي تابع، منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية (المغايرة للصفر N^*) ومستقره المجموعة X.

ومن الممكن أخذ الأعداد الطبيعية N بمثابة المنطلق حينما نرغب في ذلك.

٢- **تعريف ومصطلحات:** لتكن (x_n) متوالية في فضاء متري مثل (X,d) و $x\in X$.

يُقال إنّ $x_n\to x$ في الفضاء (X,d) إذا وفقط إذا كان $d(x_n,x)\to 0$ وذلك عندما $n\to\infty$، وهذا يكافئ أنّ المتوالية العددية الحقيقية:

$$d(x_1,x),d(x_2,x),...........$$

تتقارب من 0، وهذا بدوره يكافئ الشرط المعروف:

أياً كان العدد الحقيقي الموجب ε فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل n_0 بحيث يكون:

$$[n\ge n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon]$$

وفي هذه الحالة يُقال إنّ المتوالية (x_n) **متقاربة** (تتقارب) من (إلى) x، كما يُقال أيضاً إنّ x هو **نهاية المتوالية** (x_n) **في الفضاء** X. وقد نكتب أيضاً: $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ في الفضاء (X,d).

٣- **مبرهنة:** للمتوالية في فضاء نهاية واحدة على الأكثر.

الإثبات:

لتكن $x_n\to x$ و $y_n\to y$ فإنّ:

$$\begin{aligned}
0\le d(x,y) &\le d(x,x_n)+d(x_n,y)=\\
&=d(x_n,x)+d(x_n,y)\to 0+0=0
\end{aligned}$$

ومنه $d(x,y)=0$، ومن ثم فإنّ $x=y$.

١-٥- أمثلة:

(١) في R، حيث $d(x,y)=|x-y|$، نجد أن تقارب المتوالية (x_n) من x يعني تماماً مفهوم التقارب بالمعنى المألوف، أي:

$|x_n - x| \to 0$ عندما $n\to\infty$ أي:

$$[\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in N^* : |x_n - x|<\varepsilon \quad if \quad n\geq n_0]$$

(٢) في R^2، حيث $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$، تكون القضيتان الآتيتان (أ) و(ب) متكافئتين:

(أ) $(x_1,y_1),(x_2,y_2),....\to(x,y)$ في R^2.

(ب) $[x_1,x_2,...\to x]$ و $[y_1,y_2,....\to y]$ في R.

الإثبات:

ب ← أ

نلاحظ أولاً أنه من أجل (x,y) و (x',y') في R^2 لدينا:

$$|x-x'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=d((x,y),(x',y'))$$

لنفرض أنّ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),....\to(x,y)$ في R^2. عندئذ:

$$|x_n - x|\leq d((x_n,y_n),(x,y))\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ومنه $|x_n-x|\to 0$ عندما $n\to\infty$، أي أنّ $x_n\to x$.

ومنه $x_1,x_2,...\to x$ في R.

وبالمثل $y_1,y_2,....\to y$ في R.

ب ← أ

العكس، إذا كانت $x_1,x_2,...\to x$ و $y_1,y_2,....\to y$ في R، فإنّ $|x_n-x|\to 0$ و $|y_n-y|\to 0$ عندما $n\to\infty$.

ومنه:

$$d((x_n,y_n),(x,y))=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}\to\sqrt{0^2+0^2}=0$$

ومن ثم فإنّ

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),....\to(x,y)$$

وذلك في R^2.

ملاحظة:

يمكن تعميم مضمون هذا المثال على الفضاء R^k.

(٣) لنفرض أن (x_n) متوالية في فضاء متري متقطع (X,δ). فعندها:

$x_n\to x$ إذا وفقط إذا استطعنا إيجاد N بحيث إن $x_n=x$ من أجل كل $n\geq N$.

البرهان:

لنفرض أنّ $x_n=x$ من أجل كل $n\geq N$، فإنّ $\delta(x_n,x)=0$ من أجل كل $n\geq N$. ومنه $\delta(x_n,x)\to 0$، أيْ أن $x_n\to x$.

لنفرض أن $x_n\to x$. ومنه $\delta(x_n,x)\to 0$. لذلك نستطيع إيجاد N بحيث يكون $\delta(x_n,x)<\frac{1}{2}$ عندما $n\geq N$.

ولكن δ تأخذ القيمتين $0,1$ فقط، إذاً: (من أجل $n\geq N$ يكون $\delta(x_n,x)=0$).

ومن ثم فإنه من أجل $n\geq N$ يكون $x_n=x$.

ملاحظة: تذكر أن المترك sup على $B[a,b]$ معرّف بـ:

$$d(x,y)=\sup_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

١-٦- مبرهنة:

إذا كانت $x_n\to x$ في $B[a,b]$ فإنّ $x_n(t)\to x(t)$ من أجل كل t من $[a,b]$. (لاحظ أنّ $x_n(t)$ و $x(t)$ أعداد حقيقية).

الإثبات:

من أجل كل t من $[a,b]$ يكون لدينا:

$$0 \le |x_n(t)-x(t)| \le \sup_{a\le s\le b}|x_n(s)-x(s)| = d(x_n,x) \to 0$$

ومنه $|x_n(t)-x(t)| \to 0$ وبالتالي $x_n(t)\to x(t)$.

١-٧- تعريف:

إذا كانت $x_n \to x$ في $(B[a,b],d)$ فإننا نقول إنّ المتوالية (x_n) **تتقارب بانتظام** من x على $[a,b]$. وعندها نكتب $x_n \to x$ بانتظام على $[a,b]$.

١-٨- أمثلة:

لنضع $x_n(t)=t^n$، حيث $n=0,1,2,....$، فتكون النصوص الخمسة الآتية صحيحة:

(١) لنأخذ (x_n) في $C[0,\frac{1}{2}]$، فيكون $x_n\to 0$.

الإثبات:

$$d(x_n,0)=\sup_{0\le t\le \frac{1}{2}}|t^n-0| = (\frac{1}{2})^n \to 0$$

(٢) لنأخذ (x_n) في $C[0,1]$، فيكون $x_n \not\to 0$.

الإثبات:

$$d(x_n,0)=\sup_{0\le t\le 1}|t^n-0|=1\not\to 0$$

(٣) من أجل كل t من $[0,1]$ فإن المتوالية $(x_n(t))$ متقاربة.

الإثبات:

إذا كانت $0\le t<1$ فإنّ $x_n(t)=t^n\to 0$.

أما إذا كانت $t=1$ فإنّ $x_n(t)=1\to 1$.

(٤) إن (x_n) ليست متقاربة في $C[0,1]$.

الإثبات:

لنفرض مؤقتاً أنّ $x_n\to x$ في $C[0,1]$. ومنه (وفقاً للمبرهنة (١-٦)) فإنّ $x_n(t)\to x(t)$ من أجل كل t من $[0,1]$.

ومنه، من(٣)، يكون:

$$x(t)=\begin{cases}0 & if \quad 0\le t<1\\ 1 & if \quad t=1\end{cases}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على تناقض لأنّ هذا التابع x غير مستمر، في حين أن x من المفروض أن يكون من $C[0,1]$.

(٥) لنزوّد $C[0,1]$ بالمترك $d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$

فيكون $x_n\to 0$ في $(C[0,1],d_1)$.

الإثبات:

$$d_1(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$$

$$d_1(x_n,0)=\int_0^1|x_n(t)-0|dt=\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}\to 0$$

١-٩- تعريف:

لنفرض أنّ (x_n) متوالية، وأن (n_k) متوالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة فإنّ (x_{n_k}) تسمى **متوالية جزئية من** (x_n).

ومنه (x_{n_k}) نحصل عليها من (x_n) بإغفال بعض الحدود ولكن مع المحافظة على الترتيب ذاته. ومنه يكون $n_k \ge k$ لأجل كل k من N^*.

مثال: إنّ (x_{2^n}) متوالية جزئية من (x_n)، وذلك بملاحظة أن المتوالية: $x_1, x_2, x_3, ...$ هي المتوالية الأصلية، وأن المتوالية: $x_2, x_4, x_8, ...$ تحقق شروط التعريف.

١-١٠- مبرهنة:

إذا كانت (x_{n_k}) متوالية جزئية من (x_n) في فضاء مثل (X,d)، وكانت $x_n \to x$، فإنّ $x_{n_k} \to x$.

الإثبات:

لما كانت $(d(x_{n_k},x))$ متوالية جزئية من المتوالية $(d(x_n,x))$ من الأعداد الحقيقية، فإنه يكون لدينا $d(x_{n_k},x) \to 0$ ما دامت $d(x_n,x) \to 0$، وهذه خاصة معلومة في التحليل الحقيقي حول المتواليات الجزئية من متوالية مفروضة من الأعداد الحقيقية.

١-١١- تعريف:

ليكن (X,d) و (Y,ρ) فضاءين متريين، وليكن $f : X \to Y$ تابعاً، $x_0 \in X$. يُقال إنّ f **مستمر في** x_0 (أوْ: **عند** x_0) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت المتوالية (x_n) في X بحيث $x_n \to x_0$ فإنّ $f(x_n) \to f(x_0)$.

ملاحظة: إنّ $x_n \to x_0$ تعني أن $d(x_n, x_0) \to 0$ كما أن $f(x_n) \to f(x_0)$ تعني أن $\rho(f(x_n), f(x_0)) \to 0$.

هذا ويقال إن f مستمر على X (أو باختصار: f مستمر(دون ذكر X وذلك عندما لا يكون ثمة لبس)) إذا وفقط إذا كان f مستمراً في كل نقطة من نقاط X.

١-١٢- أمثلة:

(١) ليكن $f : R \to R$، حيث R مزود بتابع المسافة المألوف. عندها يمكن القول إنّ f يكون مستمراً في نقطة ما مثل x_0 بمفهوم التعريف (١-١١) إذا وفقط إذا كان f مستمراً في x_0 بالمفهوم المعروف في التحليل الحقيقي، أيْ بمفهوم $\varepsilon - \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

(٢) في الفضاء (C,d)، حيث $d(z,w) = |z - w|$، يمكن القول إنّ $f : C \to C$ يكون مستمراً في نقطة ما مثل z وفقاً للتعريف (١-١١) إذا وفقط إذا تحقق الاقتضاء التالي:

[$(z_n \to z)$ في المنطلق C لـ f] $\Rightarrow$ [$(f(z_n) \to f(z))$ في المستقر C لـ f]

وهذا هو عين تعريف الاستمرار في نقطة بمفهوم التحليل العقدي.

(٣) إذا كان (X,δ) فضاء مترياً متقطعاً، وكان (Y,ρ) أيّ فضاء متري، وكان $f : X \to Y$ أيّ تابع معرف على الفضاء المتقطع X، فإنّ f يكون مستمراً.

الإثبات:

لتكن x أية نقطة من X. ولتكن $x_n \to x$ في (X,δ). نعلم أنه من أجل قيمة معينة مثل N يكون: $x_n = x$ عنـــدما $n \ge N$. ومـــن ثـــم $f(x_n)=f(x)$ عندما $n \ge N$. ومنه $f(x_n) \to f(x)$. وبذلك يكون f مستمراً في x. وبهذا يتم إثبات المطلوب.

(٤) لنأخذ تطبيقي الإسقاط $f_i : R^2 \to R$ المعطيـــين بـــ $f_i(x_1,x_2)=x_i$ حيث $i=1,2$. ولنفرض أن R^2 مزود بأيّ مترك، حيث هذا المتـــرك إمـــا d (المألوف) أو d_1 أو d_∞، ولنزوّد R بالمترك المألوف، فإنّ f_i مستمر. (يمكـــن العودة إلى الفقرة (١-٢) حين اللزوم).

الإثبات:

ليكن $(x,y) \in R^2$. ولنفرض أنّ $i=1$. ولنفرض أنّ:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots \to (x,y)$$

فلإثبات أن f_1 مستمر يكفي إثبات أن:

$$f_1(x_1,y_1), f_1(x_2,y_2),\ldots \to f_1(x,y)$$

وذلك كما يلي:

من نص سابق نحصل على أن: $x_1,x_2,\ldots \to x$

وبملاحظة أنّ: $f_1(x,y)=x$ وأنّ:

$$f_1(x_1,y_1)=x_1, f_1(x_2,y_2)=x_2,\ldots, f_1(x_n,y_n)=x_n,\ldots$$

نستنتج أنّ:

$$f_1(x_1,y_1), f_1(x_2,y_2),\ldots \to f_1(x,y)$$

ويبرهن على صحة هذا النص عندما $i=2$ بصورة مشابهة.

(٥) لنزود $C[a,b]$ بالمترك sup، ولنزود R بالمترك المألوف ثـــم لنعـــرف $f : C[a,b] \to R$ بالقاعدة $f(x)=\int_a^b x(t)dt$ فعندها يكون f مستمراً.

الإثبات:

لتكن $x \in C[a,b]$. ولنفرض أنّ $x_n \to x$. عندئذ:

$$\sup_{a \le t \le b} |x_n(t)-x(t)| = d(x_n,x) \to 0$$

ومنه:

$$|f(x_n)-f(x)| = \left| \int_a^b x_n(t)dt - \int_a^b x(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^b (x_n(t)-x(t))dt \right| \le \int_a^b |x_n(t)-x(t)|dt \le$$

$$\le \int_a^b d(x_n,x)dx = (b-a)d(x_n,x) \to 0$$

ومنه $f(x_n) \to f(x)$.

١-١٣- المجموعات المغلقة والمجموعات المفتوحة في فضاء متري:

١) تعريف:

يقال عن مجموعة جزئية مثل E من (X,d) إنها **مغلقة** [في الفضاء (X,d)] إذا حوت نهايات المتواليات المنتمية لهذه المجموعة، أي: إذا كانـــت (x_n) أيـــة متوالية من E وكانت $x_n \to x$ في (X,d) فإن x من E.

٢) **أمثلة مهمة:**

(١) في R تكون المجالات (الفترات) ذوات الأشكال $[a,b]$ و $[a,\infty[$ و $]-\infty,b]$ مجموعات مغلقة.

(٢) في R^2 مجموعة النقاط التي تبعد عن المبدأ مسافة تقل أو تساوي 1 هي مغلقة.

(٣) لنأخذ في (X,d) المجموعة $\{x / d(x,a)\le r\}$، حيث a من X و r عدد حقيقي غير سالب. تسمى هذه المجموعة **كرة مغلقة**، مركزها a ونصف قطرها r، وهي مجموعة مغلقة.

لإثبات صحة ذلك نحتاج التوطئة التالية:

توطئة:

(I) إذا كانت $x_n\to x$ و $y_n\to y$ في (X,d) فإنّ $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

(II) إذا كانت $x_n\to x$ في (X,d) و $y\in X$ فإنّ $d(x_n,y)\to d(x,y)$.

الإثبات:

(I) نعلم أنّ:

$$d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n)$$

ومنه:

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)\le d(x_n,x)+d(y,y_n)$$

ثم، بالطريقة ذاتها، نجد أنّ:

$$d(x,y)-d(x_n,y_n)\le d(x,x_n)+d(y_n,y)$$

إذاً:

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|\le d(x_n,x)+d(y,y_n)\to 0+0=0$$

ومنه:

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y)$$

(II) تنتج من (I) بوضع $y_n=y$ من أجل كل n. وبهذا يتم إثبات التوطئة.

ثم بالعودة إلى المثال (٣) نجد ما يلي:

إذا كانت $x_n\to x$ و $d(x_n,a)\le r$ من أجل كل n فإنه لدينا حسب التوطئة:

$$d(x_n,a)\to d(x,a)$$

ومنه $d(x,a)\le r$ وهذا يعني أن x تنتمي إلى الكرة المغلقة التي مركزها a ونصف قطرها r.

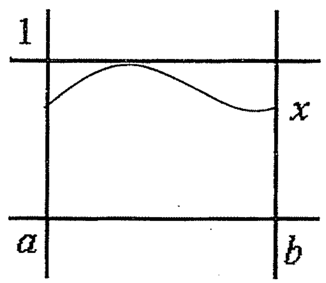
وبذلك تكون هذه الكرة مجموعة مغلقة.

(٤) في $B[a,b]$ المزودة بالمترك sup المجموعة:

$\{x / 0\le x(t)\le 1$ من أجل كل $t\}$ مغلقة.

الإثبات:

لتكن (x_n) من المجموعة، وأن $x_n\to x$. نعلم أنه إذا كانت $x_n\to x$ في $B[a,b]$ فإنّ $x_n(t)\to x(t)$ من أجل كل t من $[a,b]$ (انظر المبرهنة ١-٦).



ولكن نظراً إلى أنّ $0\le x_n(t)\le 1$ فإنّ $0\le x(t)\le 1$ من أجل كل t. ومن ثم فإنّ x من المجموعة، فهي مغلقة.

(٥) في $B[a,b]$ المزودة بـ sup فإنّ $C[a,b]$ مغلقة.

يترك البرهان للقارئ.

٣) مبرهنة:

في كل فضاء متري (X,d) يتحقق ما يلي:

(١) إذا كانت $F_1,\dots,F_n$ مجموعات مغلقة، عددها منته، فإنّ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ تكون مجموعة مغلقة.

(٢) إذا كانت $\{F_i / i\in I\}$ أية جماعة منتهية أو غير منتهية من المجموعات المغلقة F_i، $i\in I$، فإنّ تقاطعها $\bigcap_{i\in I} F_i$ يكون مجموعة مغلقة.

(٣) X,Φ مجموعتان مغلقتان.

الإثبات:

(١) يكفي إثبات صحة ذلك من أجل مجموعتين. لتكن (x_n) متوالية في $F_1\cup F_2$. ولنفرض أنّ $x_n\to x$. لما كانت $x_n\in F_1\cup F_2$ من أجل كل n، فإنه إما أن يكون $x_n\in F_1$ من أجل عدد منته من قيم n أو $x_n\in F_2$ من أجل عدد غير منته من قيم n. ومن ثم فإن F_1 أو F_2 تحوي متوالية جزئية (x_{n_k}) من (x_n)، ولتكن مثلاً $x_{n_k}\in F_1$ من أجل كل k. ومنه (x_{n_k}) متوالية جزئية من (x_n) و $x_{n_k}\to x$. لكن (x_{n_k}) متوالية من F_1 بحيث $x_{n_k}\to x$. ونظراً إلى أن F_1 مغلقة فإنّ $x\in F_1$. ومن ثم $x\in F_1\cup F_2$. إذاً $F_1\cup F_2$ مغلقة.

(٢) لتكن $x_n\in\bigcap_{i\in I}F_i$ من أجل كل n. ولنفرض أن $x_n\to x$. عندئذ:

نظراً إلى أن $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F_{i_0}$ من أجل كل i_0 من I فإنه يكون لدينا $x_n\in F_{i_0}$ من أجل كل n. ونظراً إلى أن F_{i_0} مغلقة فإن $x\in F_{i_0}$. ولكن i_0 هو أيّ عنصر من I، إذاً $x\in\bigcap F_i$. ومن ثم $\bigcap F_i$ تكون مغلقة.

(٣) لبيان أن X مغلقة يكفي ملاحظة أنه إذا كانت $x_n\in X$ من أجل كل n و $x_n\to x\in X$ فإنّ $x\in X$ وهذا واضح.

وكذلك، لبيان أن Φ مغلقة يكفي ملاحظة أنه لا توجد متواليات في المجموعة الخالية، لذلك فالشرط محقق آلياً من أجل Φ.

٤) تعاريف:

أ- لنأخذ في (X,d) نقطة ما مثل $x\in X$، ولنأخذ أيّ عدد حقيقي $\varepsilon>0$. تسمى المجموعة:

$$B(x,\varepsilon)=\{y / y\in X, d(y,x)<\varepsilon\}$$

كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها ε في الفضاء (X,d).

ب- نقول عن مجموعة مثل $U\subseteq X$ إنها **مفتوحة** [في الفضاء (X,d)] إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

إذا كانت x أية نقطة من U فإننا نستطيع إيجاد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq U$.

حـ- نقول عن مجموعة جزئية من فضاء متري إنها **محدودة** (فيه) إذا وفقط إذا كان من الممكن إيجاد كرة مفتوحة تحويها (في هذا الفضاء).

د- نقول عن متوالية مثل (x_n) في فضاء متري إنها **محدودة** إذا وفقط إذا كانت مجموعة حدودها عبارة عن مجموعة محدودة في هذا الفضاء.

٥) أمثلة مهمة:

(١) في R تكــون المجــالات ذوات الأشــكال $]a,b[$ و $]a,\infty[$ و $]-\infty,b[$ مجموعات مفتوحة.

(٢) في أيّ فضاء متري (X,d) تكــون $B(x,\varepsilon)$ مفتوحــة حيــث $x \in X$ و $\varepsilon > 0$.

الإثبات:

لتكن y من $B(x,\varepsilon)$. ولنضــع $\delta = \varepsilon - d(y,x) > 0$ لأنّ $d(x,y) < \varepsilon$.

عندئذ نجد ما يلي:

إذا كانت $z \in B(y,\delta)$ فإنه يكون لدينا:

$$d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) = \varepsilon$$

أيْ أنّ $z \in B(x,\varepsilon)$. ومنــه $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. ومــن ثــم $B(x,\varepsilon)$ مفتوحة.

(٣) في الفضاء المتقطــع (X,δ) نلاحــظ أنــه مــن أجــل أيّ x مــن X يكون $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$. لذلك، إذا كانــت U أيّ مجموعــة جزئيــة مــن X و $x \in U$ فــإنّ $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq U$. ومــن ثــم U مفتوحــة، أيْ أنّ أيّ مجموعة جزئية من فضاء متري متقطع تكون مفتوحة.

(٤)

أ- كل كرة مغلقة في فضاء متري تكون مجموعة محدودة (فيه).

ب- كل كرة مفتوحة في فضاء متري تكون مجموعة محدودة (فيه).

حـ- إذا كانــت A,B مجمــوعتين محــدودتين فــي فضــاء متــري فــإنّ المجموعة $A \cup B$ تكون محدودة في هذا الفضاء ذاته. (برهن ذلك).

(٥) تمهيدية:

إذا كانت (x_n) أية متوالية متقاربة في فضاء متري (X,d) فإنها تكون محدودة (فيه).

البرهان:

لنفترض أن $x_n \to a \in X$. عندئذ، مقابل أيّ $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد N بحيــث يكون $d(x_n,a) < \varepsilon$ لأجل $n \ge N$. ثم لنأخذ:

$$r = \varepsilon + d(x_1,a) + ... + d(n_{N-1},a) + 1$$

فيكــون $d(x_n,a) < r$ لأجــل كــل n مــن N^*، وبالتــالي فــإنّ الكــرة المفتوحة $B(a,r)$ تحوي مجموعة حــدود المتواليــة (x_n)، وهــذا يعنــي أن المتوالية (x_n) محدودة.

٦) مبرهنة:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $U \subseteq X$ و $F = X - U$. عندئذ:

تكون U مفتوحة إذا وفقط إذا كانت F مغلقة.

الإثبات:

لنفرض أنّ U مفتوحة. ولتكن (x_n) متوالية في F بحيث $x_n \to x$ فــي X.

ولنفرض مؤقتاً أنّ $x \notin F$ وبالتالي $x \in U$. لمــا كانــت U مفتوحــة فــإنّ ثمــة $\delta > 0$ بحيــث إنّ $B(x,\delta) \subseteq U$. ولمــا كانــت $x_n \to x$ فــإنّ $d(x_n,x) \to 0$، ومن ثم نستطيع إيجاد N بحيــث إن $d(x_n,x) < \delta$ مــن أجل $n \ge N$.

ومنه، من أجل $n \ge N$ فإنّ $x_n \in B(x,\delta) \subseteq U$. لكن $x_n \in F$ مــن أجــل كل n، إذاً حصلنا على تناقض وهذا التناقض يفضي إلى أن x من F. وبــذلك تكون F مغلقة.

العكس، لنفرض أن F مغلقة، ولنفرض أنّ U ليست مفتوحة.
لذلك نستطيع إيجاد نقطة x من U بحيث إن القضية المتمثلة بالعلاقة $B(x,\delta)\subseteq U$ تكون غير صحيحة من أجل جميع القيم $\delta>0$، بمعنى أنّ $B(x,\delta)\nsubseteq U$ من أجل كل δ. وعلى نحو خاص $B(x,\frac{1}{n})\nsubseteq U$، ومنه توجد نقطة من $B(x,\frac{1}{n})$ ليست من U، لندعوها x_n، من أجل كل n من N^*. ومن ثم، من جهة أولى $d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$، وبالتالي $x_n\to x$. ومن جهة أخرى فإنّ $x_n\notin U$، أيْ أن x_n من F. ونظراً إلى أن $x\in U$ فإن $x\notin F$.
ومن ثم فإن F ليست مغلقة مما يناقض الفرض الأساسي.
إذاً U تكون مفتوحة.

٧) تذكرة وتعاريف:

لنفرض أنّ $f:X\to Y$ تابع (تطبيق).
نعرّف $f^{-1}(E)=\{x/x\in X, f(x)\in E\}$ من أجل كل $E\subseteq Y$. ومن ثم فإنّ $x\in f^{-1}(E)$ تكافئ $f(x)\in E$.
كما يجب ملاحظة أنّ $f^{-1}(Y)=X$ و $f^{-1}(\Phi)=\Phi$. وأيضاً:
إذا كانت $E\subseteq F\subseteq Y$ فإنّ $f^{-1}(E)\subseteq f^{-1}(F)$. وكذلك، بفرض $F_i\subseteq Y$ لأجل كل i من I، وبفرض $F\subseteq Y$، يكون لدينا:

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I}F_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(F_i) \quad \text{و} \quad f^{-1}(\bigcap_{i\in I}F_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(F_i)$$

و $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}F)$

يعرّف **الجوار المفتوح** لمجموعة جزئية غير خالية مثل A في فضاء مثل X بأنه عبارة عن مجموعة مفتوحة(في X) تحوي A.
ويعرف **الجوار** لمجموعة جزئية غير خالية مثل A في فضاء مثل X بأنه عبارة عن مجموعة جزئية تحوي جواراً مفتوحاً لـ A في الفضاء X.
ويُقال عن مجموعة جزئية مثل U إنها **جوار لنقطة** مثل x في فضاء مثل X إذا كانت توجد كرة مفتوحة مثل $B(x,\varepsilon)$ بحيث يكون: $B(x,\varepsilon)\subseteq U$.

٨) نتائج مهمة:

(١) كل مجموعة جزئية من فضاء متقطع تكون مفتوحة ومغلقة بآن واحد فيه.
(٢) إذا كانت $U_1,\ldots,U_n$ مجموعات مفتوحة في فضاء، عددها منته، فإنّ $\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ تكون مجموعة مفتوحة.
(٣) إذا كانت $\{U_i / i\in I\}$ أية جماعة منتهية أو غير منتهية من المجموعات المفتوحة U_i، $i\in I$، فإنّ اجتماعها $\bigcup_{i\in I}U_i$ يكون مجموعة مفتوحة.
(٤) X,Φ مجموعتان مفتوحتان، حيث X هو الفضاء المتري المدروس.

٩) مبرهنة:

لنفرض أنّ $f:X\to Y$ تطبيق (تابع)، حيث X,Y فضاءان متريان. إنّ العبارات التالية متكافئة:
(١) f مستمر (أيْ أنه مستمر في كل نقطة x من X).
(٢) إذا كانت $F\subseteq Y$ مغلقة في Y فإنّ $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X.

(٣) إذا كانت $U \subseteq Y$ مفتوحة في Y فإنّ $f^{-1}(U)$ تكون مفتوحة في X.

الإثبات:

(١)⇐(٢):

لنفرض أنّ f مستمر، وأنّ F أيّ مجموعة مغلقة في Y. ولتكن (x_n) متوالية في $f^{-1}(F)$ بحيث $x_n \to x$ في X. لما كانت x_n من $f^{-1}(F)$ فإنّ هذا يكافئ أنّ $f(x_n)$ من F. وبما أن f مستمر فإنّ $f(x_n) \to f(x)$. لذلك نجد أن $(f(x_n))$ متوالية من النقاط في F ونهايتها $f(x)$. ولما كانت F مغلقة فإن هذا يقتضي $f(x)$ من F. بيد أنّ هذا يكافئ قولنا إنّ x من $f^{-1}(F)$. ومن ثم فإنّ $f^{-1}(F)$ مغلقة.

(٢) ⇐ (٣):

لنفرض أنّ $U \subseteq Y$ مفتوحة. ولنضع $F = Y - U$ فتكون F مغلقة باعتبارها متممة لمجموعة مفتوحة. ومن ثم فإن $f^{-1}(F)$ مغلقة حسب (٢).

ولكن $f^{-1}(U) = f^{-1}(Y-F) = X - f^{-1}(F)$ إذاً $f^{-1}(U)$ مفتوحة.

(٣) ⇐ (١):

لتكن x من X و $x_n \to x$. لإثبات أن f مستمر يكفي إثبات أن $f(x_n) \to f(x)$ وهذا ما سنبيّنه فيما يلي:

لنأخذ $\varepsilon > 0$. نظراً إلى أنّ $B(f(x),\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة فإنّ $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ مجموعة مفتوحة في X حسب (٣). ولما كانت $f(x)$ من $B(f(x),\varepsilon)$ فإنّ $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. ومن تعريف المجموعة المفتوحة نستطيع إيجاد كرة مفتوحة $B(x,\delta)$ بحيث إن $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$.

ولما كانت $x_n \to x$ فإننا نستطيع إيجاد N بحيث إنه من أجل $n \ge N$ يكون $d(x_n,x) < \delta$، أيْ أنّ x_n من $B(x,\delta)$. لذلك، من أجل $n \ge N$

يكون x_n من $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$، أيْ أن $f(x_n) \in B(f(x),\varepsilon)$، أيْ أن $d(f(x_n),f(x)) < \varepsilon$. ومن ثم $f(x_n) \to f(x)$.

وننوّه هنا إلى أننا استخدمنا (في الإثبات المذكور أعلاه) الرمز d نفسه للإشارة إلى المترك في كل من X و Y وهذا لا يؤثر على عمومية البرهان، كما أنه مستخدم في عدد من المؤلفات من هذا القبيل.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

١٠) أمثلة:

(١) في كل فضاء متري تكون المجموعة الجزئية المؤلفة من عنصر وحيد مغلقة، وأيّ مجموعة جزئية تتألف من عدد منته من العناصر تكون مغلقة. (تأكد من صحة كل ذلك).

ومنه، في R، المجموعة $\{a\}$ مغلقة، حيث a من R.

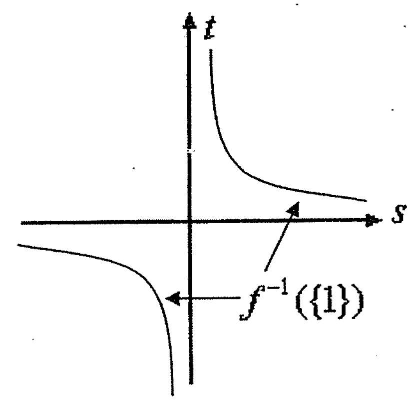
لنأخذ R^2 مع المترك المألوف والتابع $f: R^2 \to R$ المعرف بالقاعدة $f(s,t) = st$.

إنّ f مستمر، لأنه إذا كانت $(s_n,t_n) \to (s,t)$ في R^2، فإننا نعلم أن $s_n \to s$ و $t_n \to t$ في R (من مثال سابق (انظر الفقرة ١-٥))، ومن ثم فإن $s_n t_n \to st$ من التحليل الحقيقي، وهذا يعني أنّ: $f(s_n,t_n) \to f(s,t)$.

ومن المبرهنة الأخيرة نجد أنّ $f^{-1}(\{1\})$ مغلقة والتي هي:

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(s,t)/(s,t) \in R^2, f(s,t)=1\} =$$

$$= \{(s,t)/(s,t)\in R^2, st=1\}$$



(٢) لنفرض أن X فضاء متري متقطع وأن Y أيّ فضاء متري وأن $f : X \to Y$ تابع، فإن f مستمر (انظر أيضاً الفقرة ١-١٢).

البرهان:

نعلم أنّ أيّ مجموعة جزئية من الفضاء المتقطع تكون مغلقة (ومفتوحة). ومن ثم من أجل أيّ مجموعة جزئية مغلقة F من Y فإنّ $f^{-1}(F)$ مغلقة (باعتبارها مجموعة جزئية من X).

(٣) إذا كان (X,d) أيّ فضاء متري، وكانت a أية نقطة مثبّتة من X، وكان $f : X \to R$ تابعاً معرفاً بالصيغة $f(x)=d(x,a)$ لأجل كل x من X، فإنّ f يكون مستمراً.

البرهان:

لتكن $x \in X$ ولنفرض أن $x_n \to x$. عندئذ:

$d(x_n,a) \to d(x,a)$ حسب توطئة سابقة. ومنه $f(x_n) \to f(x)$.

إذن f مستمر.

(٤) في الفضاء $C[a,b]$ المزود بـ sup فإنّ المجموعة:

$\{x/-1 \le x(t) \le 1$ (من أجل كل t من $[a,b]$)$\}$ تكون مغلقة.

البرهان:

$$\{x/-1 \le x(t) \le 1(\forall t \in [a,b])\} = \{x/|x(t)-0| \le 1(\forall t \in [a,b])\}$$
$$= \{x/\sup|x(t)-0| \le 1(\forall t \in [a,b])\}$$
$$= \{x/d(x,0) \le 1\}$$

ومنه، حسب المثال (٣) السابق، $f(x)=d(x,0)$ يعرّف تابعاً مستمراً. وبما أنّ:

$$\{x/d(x,0) \le 1\} = \{x/0 \le f(x) \le 1\} = f^{-1}([0,1])$$

ونظراً إلى أن $[0,1]$ مغلقة وأن f مستمر، فإن المجموعة المعطاة تكون مغلقة.

(٥) لنأخذ Q مع المترك $d(p,q)=|p-q|$، فإنّ المجموعة:

$$E=\{p/p \in Q, p > \pi\}$$

تكون مغلقة.

البرهان:

لتكن (p_n) متوالية في E بحيث $p_n \to p \in Q$. نظراً إلى أنّ $p_n > \pi$ من أجل كل n فإن $p \ge \pi$ (من مبرهنة حول المتواليات الحقيقية). لكن $\pi \notin Q$.
ومن ثم نظراً إلى أنّ $p \in Q$ فإن $p \ne \pi$، لذلك فإنّ $p > \pi$.
أيّ أن $p \in E$. إذاً E مغلقة في (Q,d).

كذلك فإنّ E مفتوحة، لأن $Q-E=\{p/p \in Q, p < \pi\}$ مغلقة لأسباب مشابهة.

١-١٤- تتمات:

ليكن (X,d) أيّ فضاء متري. ولتكن $A \subseteq X$. ولتكن $x \in X$. عندئذ:

أ- تعريف:

يُقال عن النقطة x إنها **ملاصقة** للمجموعة A في الفضاء X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أيـاً كانت الكـرة المفتوحـة $B(x,r)$، التـي مركزهـا x، فـي X فـإنّ $A \cap B(x,r) \neq \Phi$.

ب- تعريف:

يرمز لمجموعة النقاط الملاصقة لـ A بالرمز $\overline{A}$ وتدعى **لصـاقة** (أو غلاقـة) المجموعة A في الفضاء X.

حـ- تعريف:

يُقال عن النقطة x إنها نقطة **حدية** (أو نقطة تراكم أو نقطة تجمع) للمجموعة A في الفضاء X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت الكرة المفتوحة $B(x,r)$، التي مركزها x، في X، فإنّ:

$$(A-\{x\}) \cap B(x,r) \neq \Phi$$

د- تعريف:

يرمز لمجموعة النقاط الحدية لـ A بالرمز $D(A)$ (أو بالرمز A' (إذا لم يـؤد إلى أيّ التباس)) وتدعى "**المجموعة المشتقة** لـ A" في الفضاء X.

هـ- توطئة:

الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة ملاصقة لـ A في الفضاء X هـو أن توجد متوالية، من عناصر المجموعة A، متقاربة من x.

البرهان:

لنفرض أن x ملاصقة لـ A في X. إذا كان n أيّ عنصـر مـن N^* فثمـة عنصر مثل x_n من X بحيث يكون $x_n \in A \cap B(x,\frac{1}{n})$.

ويعني هذا أنه توجد المتوالية (x_n) من عناصر المجموعة A، وسنبرهن أنهـا متقاربة من x:

ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ: يوجد $n_0 \in N^*$ بحيث يكون $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. ومنه:

$$[n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon]$$

إذاً: $x_n \to x$.

وبالعكس، لنفرض أنه توجد المتوالية (x_n)، من عناصر A، المتقاربة مـن x. عندئذ: أياً كانت الكرة المفتوحة $B(x,\varepsilon)$، التي مركزهـا x، فثمـة $n \in N^*$ بحيث يكون $x_n \in B(x,\varepsilon)$، وبالتالي $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \Phi$. أيْ أنّ $x \in \overline{A}$.

و- توطئة:

[(A مغلقة في الفضاء X) $\Leftrightarrow$ ($A' \subseteq A$ في الفضاء X)]

البرهان:

لنفرض أنّ A مغلقة. ولنفرض مؤقتاً أنّ $A' \nsubseteq A$. عندها توجد $x \in A'$ بحيث يكون $x \notin A$. ويعني هذا أنّ x نقطة حديـة لـ A و $x \in X - A$. وبمـا أن $X - A$ مفتوحة فيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon) \subseteq X - A$. ولكن:

$(A-\{x\}) \cap B(x,\varepsilon) \neq \Phi$ و $x \notin A$

إذاً: $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \Phi$، وبالتالي $A \cap (X-A) \neq \Phi$ وهذا غير ممكن.

إذاً $A' \subseteq A$.

وبالعكس، لنفرض أن $A' \subseteq A$. فإذا كانت $X - A = \Phi$ فإنها تكون مفتوحة وبالتالي فإن A تكون مغلقة. لنفرض، الآن، أنّ $X - A \neq \Phi$. وليكن $x \in X - A$. عندئذ $x \notin A$، وبالتالي $x \notin A'$ لأن $A' \subseteq A$ فرضاً. ومنه x ليست نقطة حدية لـ A، وبالتالي توجد كرة مفتوحة مثل $B(x,\varepsilon)$ بحيث يكون $(A-\{x\})\cap B(x,\varepsilon)=\Phi$، ومن ثم $A\cap B(x,\varepsilon)=\Phi$ لأنّ $x\notin A$.

إذاً، توجد الكرة المفتوحة $B(x,\varepsilon)$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq X-A$.

ولما كان x عنصراً كيفياً من $X-A$ فيمكن القول إن $X-A$ مفتوحة، وبالتالي A مغلقة.

ز- توطئة:

(١) $\overline{A}$ تساوي تقاطع جميع تلك المجموعات المغلقة التي كل منها تحوي A في الفضاء X.

(٢) $\overline{A}$ تكون أصغر مجموعة مغلقة تحوي A في الفضاء X.

(٣) $\overline{A} = A\cup A'$ (في الفضاء X) والمجموعة $A\cup A'$ تكون مغلقة.

(٤) A مغلقة في الفضاء $X \Leftrightarrow A=\overline{A}$

البرهان:

(١) لنرمز لتقاطع جميع المجموعات المغلقة التي كل منها تحوي A في الفضاء X بالرمز K. وليكن $x\in X$. وسنبرهن أنّ $\overline{A}=K$:

لنفرض أن $x\notin\overline{A}$. عندئذ: توجد كرة مفتوحة مثل $B(x,\varepsilon)$ بحيث يكون $A\cap B(x,\varepsilon)=\Phi$. ومنه، توجد المجموعة المغلقة $H = X - B(x,\varepsilon)$ بحيث يكون $A\subseteq H$ و $x\notin H$. ومنه $x\notin K$.
إذاً $K\subseteq\overline{A}$.

لنفرض، الآن، أن $x\notin K$. عندئذ: توجد مجموعة مغلقة مثل F بحيث يكون $A\subseteq F$ و $x\notin F$. ومنه، توجد المجموعة المفتوحة $X-F$ بحيث يكون $x\in X-F$ و $A\cap(X-F)=\Phi$. ومنه، توجد كرة مفتوحة مثل $B(x,r)$ بحيث يكون $B(x,r)\subseteq X-F$، وبالتالي يكون $A\cap B(x,r)=\Phi$. إذاً $x\notin\overline{A}$. ومنه $\overline{A}\subseteq K$.

(٢) إنّ $\overline{A}$ مغلقة وتحوي A حسب (١). وإذا كانت H أية مجموعة مغلقة بحيث $A\subseteq H$ فإنّ $A\subseteq\overline{A}\subseteq H$ حسب (١) أيضاً.

(٣) من الواضح أن $A'\subseteq\overline{A}$ وذلك استناداً إلى تعريفي النقطتين الحدية الملاصقة. وحيث أن $A\subseteq\overline{A}$ حسب (١) و(٢) فإننا نستنتج أنّ $A\cup A'\subseteq\overline{A}$.

وبالعكس، ليكن $x\in\overline{A}$. فإذا كان $x\in A$ فإن $x\in A\cup A'$.

لنفرض، الآن، أن $x\notin A$ وسنبرهن أنّ $x\in A'$ فيكون $x\in A\cup A'$:

بما أن $x\in\overline{A}$ فإن $A\cap B(x,\varepsilon)\neq\Phi$ لأجل أيّ $\varepsilon>0$. وبما أن $x\notin A$ فإن $A=A-\{x\}$ وبالتالي: $(A-\{x\})\cap B(x,\varepsilon)\neq\Phi$ لأجل أيّ $\varepsilon>0$.
ومن ثم $x\in A'$. ومنه نستنتج أنّ $\overline{A}\subseteq A\cup A'$. ولما كانت $\overline{A}=A\cup A'$ و $\overline{A}$ مغلقة، فإنّ $A\cup A'$ تكون مغلقة.

(٤) لنفرض أن A مغلقة. بما أن $A\subseteq A$ فإن $\overline{A}\subseteq A$ حسب (٢). ولما كانت $A\subseteq\overline{A}$ فإن $A=\overline{A}$.

وبالعكس، لنفرض أن $A=\overline{A}$. عندئذ تكون A مغلقة طالما أن $\overline{A}$ مغلقة.

ح- تعريف:

يقال عن مجموعة جزئية مثل A في فضاء متري مثل (X,d) إنها **كثيفة** في X إذا وفقط إذا كان $\overline{A}=X$.

ط- نتيجة:

$\overline{Q}=R$، حيث R فضاء بالنسبة للمترك المألوف وحيث Q هي مجموعة الأعداد العادية، أيْ أنّ Q كثيفة في R.

البرهان:

لنفرض مؤقتاً أنّ $\overline{Q}\neq R$ فيكون $\overline{Q}\subsetneqq R$، وبالتالي يوجد $x\in R$ بحيث يكون $x\notin \overline{Q}$. ومنه $x\in R-\overline{Q}$. ولكن $\overline{Q}$ مغلقة، إذاً $R-\overline{Q}$ مفتوحة، وبالتالي يوجد مجال مفتوح (فترة مفتوحة) مركزه x ونصف طوله ε بحيث يكون $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subseteq R-\overline{Q}$، وبالتالي يكون $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\bigcap Q=\Phi$ وهذا غير ممكن لأنه يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد عادي واحد على الأقل.

إذاً $\overline{Q}=R$.

١-١٥- التمام:

١) تعريف:

نقول عن متوالية (x_n) في فضاء متري (X,d) إنها **كوشية** [أو (متوالية كوشي) أو (متوالية أساسية)] في هذا الفضاء أو بالنسبة للمترك d إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كان $\varepsilon>0$ فإنه يوجد N بحيث يكون $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ من أجل كل $n,m\geq N$

أو ببساطة، إذا وفقط إذا كان $d(x_n,x_m)\to 0$ عندما $n,m\to\infty$.

٢) مبرهنة:

أيّ متوالية متقاربة تكون كوشية.

الإثبات:

لتكن $x_n\to x$ في (X,d). ومن ثم من أجل $\varepsilon>0$ (مفروض) نستطيع إيجاد N بحيث من أجل $n\geq N$ يكون $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. ومنه، إذا كانت $n,m\geq N$ يكون:

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

٣) ملاحظة:

تعني هذه المبرهنة ببساطة أنه عندما تتقارب متوالية إلى نقطة ما في الفضاء فإنّ حدودها تصبح قريبة من بعضها. بيد أن عكس هذه النتيجة ليس صحيحاً بالضرورة، أيْ أنه ليس من الضروري أن تكون كل متتالية كوشية متقاربة في الفضاء المتري. فمثلاً، لنأخذ $x_n=\frac{1}{n}$ فنجد أن المتوالية (x_n) كوشية ولكنها غير متقاربة في $X=]0,1[$ وذلك لأن النقطة 0 التي من المفروض أن تتقارب إليها المتوالية ليست نقطة من الفضاء X، أيْ أن تقارب المتوالية لا يتوقف على المتوالية فحسب، بل إنه يعتمد على ماهية الفضاء الكائنة فيه هذه المتوالية أيضاً.

٤) مبرهنة:

كل متوالية كوشية في فضاء متري تكون محدودة فيه.

الإثبات:

لتكن (x_n) متوالية كوشية في فضاء متري مثل (X,d). عندئذ:

"ثمة N بحيث يكون $d(x_m,x_n)<1$ عندما $n,m\geq N$".

ومنه $d(x_m,x_N)<1$ عندما $m\geq N$. ثم لنأخذ:

$$r = d(x_1, x_N) + ... + d(x_{N-1}, x_N) + 1$$

فيكون $x_n \in B(x_N, r)$ لأجل كل n من N^*، وبهذا يتم إثبات المطلوب.

٥) نتيجة:

كل متوالية كوشية مثل (x_n) في الفضاء R مع المترك المألوف تكون محدودة.

البرهان:

طريقة أولى: حسب المبرهنة السابقة.

طريقة ثانية: يوجد N_0 بحيث إن $|x_n - x_m| < 1$ من أجل $n, m \ge N_0$. ومنه $|x_n - x_{N_0}| < 1$ إذا كان $n \ge N_0$. لذلك فإنّ:

$$|x_n| = |x_n - x_{N_0} + x_{N_0}| \le |x_n - x_{N_0}| + |x_{N_0}| < 1 + |x_{N_0}|$$

عندما $n \ge N_0$. ثم بوضع $K = \max\{|x_1|, ..., |x_{N_0}|, 1 + |x_{N_0}|\}$ يكون $|x_n| \le K$ لأجل كل n ومن ثم فإنّ (x_n) محدودة.

٦) مثال مهم: في R مع المترك المألوف أيّ متوالية كوشية تكون متقاربة.

الحل: لتكن (x_n) متوالية كوشية. عندئذ تكون (x_n) محدودة، ومن مبرهنة (بولزانو – فايرشتراس)، التي يتضمن نصها على أنه إذا كانت (x_n) متوالية محدودة من الأعداد الحقيقية (أو العقدية) فإنها تحوي متوالية جزئية متقاربة، نستنتج أن (x_n) تحوي متوالية جزئية متقاربة. لتكن مثلاً (x_{k_n})، حيث $x_{k_n} \to a$. وسنثبت أن $x_n \to a$:

ليكن $\varepsilon > 0$ ولنأخذ N بحيث إن $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل $n, m \ge N$. ونظراً إلى أن (x_{k_n}) متوالية جزئية من (x_n)، فإننا نعلم أن $k_n \ge n$ من أجل كل n.

ومن ثم من أجل $m \ge N$، يكون لدينا $k_n \ge N$ عندما $n \ge N$، ومنه $|x_m - x_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ولكن $x_{k_n} \to a$ إذاً $|x_m - a| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ عندما $m \ge N$. ومن ثم $x_m \to a$ عندما $m \to \infty$. أي أن (x_n) متقاربة.

[لاحظ أنّ $|x_m - a| \le |x_m - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| \to 0 + 0 = 0$ من أجل قيم كبيرة لـ n, m]

٧) تعريف:

نقول عن مجموعة غير خالية مثل F من (X, d) إنها **تامة** إذا كانت كل متوالية كوشية من نقاط F متقاربة من نقطة من F.

إذا كانت $F = X$ فإننا نقول إن الفضاء المتري X **تام**.

٨) أمثلة مهمة:

(١) R المزودة بتابع المسافة المألوف تام.

(٢) R^k المزودة بتابع المسافة المألوف (أي: بالمسافة الإقليدية) تام.

الحل: لتكن $(x(n))$ متوالية كوشية في R^k، حيث:

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n))$$

عندها، من أجل كل i محقق للشرط $1 \le i \le k$، نجد أنّ:

$$|x_i(n) - x_i(m)| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j(n) - x_j(m)|^2} = d(x(n), x(m))$$

وهذا يشير إلى أنه من أجل كل i فإنّ $(x_i(n))$ متوالية كوشية في R.

ومن ثم فإنّ $(x_i(n))$ متقاربة من أجل كل i، ولتكن مثلاً $x_i(n) \to x_i$.
لنضع $x=(x_1,....,x_k)\in R^k$ فيكون $x(n)\to x$ في R^k.

(٣) Q مع المترك المألوف غير تامة.

الحل:

طريقة أولى:

لنأخذ متوالية مثل (q_n) في Q بحيث $q_n \to \sqrt{2}$ في الفضاء R، أيْ أنّ (q_n) كوشية. الآن، إذا كانت $q_n \to q$ في Q فإنّ $q_n \to q$ أيضاً في R. ولكن (q_n) لها نهاية واحدة في R، ومنه $q=\sqrt{2}$. بيد أن q عدد عادي و $\sqrt{2}$ عدد غير عادي، وهذا تناقض.

ومن ثم فإن (q_n) غير متقاربة في Q. لذلك فإن ثمة متوالية كوشية في Q غير متقاربة.

طريقة ثانية:

يكفي أخذ المتوالية (من Q):

$1,1.4,1.41,1.412,.....$ المتقاربة من $\sqrt{2}$، ومن المعلوم أن $\sqrt{2}\notin Q$.

طريقة ثالثة: يكفي أخذ المتوالية (من Q):

$1,1+1,1+1+\frac{1}{2!},.....,\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!},....$ المتقاربة من e،

ومن المعلوم أنّ $e\notin Q$.

طريقة رابعة: لنأخذ x_0 أي عدد غير عادي $(x_0\in R-Q)$. عندئذ، توجد متوالية مثل (x_n) من الأعداد العادية بحيث $x_n\to x_0$ في R (وهذا ممكن لأن $\overline{Q}=R$). ومنه فإن (x_n) متوالية كوشية في R ومن ثم في Q. بيد أنها غير متقاربة في Q من نقطة y من Q (لأنه إذا كانت $x_n\to y$ في Q فإن $x_n\to y$ في R، ومنه سيكون لدينا $y=x_0$).

(٤) الفضاء المتقطع تام، لأن المتوالية الكوشية فيه تكون ثابتة ابتداء من حد معين، أي أنها اعتباراً من ذلك الحد ستكون النقاط ذاتها، هذه النقطة المكررة هي نهاية المتوالية.

٩) تعريف:

الهوميومورفيزم أو **التصاكل** بين فضاءين متريين X و Y هو تطبيق مستمر وتقابل (متباين وغامر) $f:X\to Y$ كما أن عكسه f^{-1} مستمر أيضاً. ويقال عندئذ عن الفضاءين المتريين X,Y إنهما **متصاكلان** أو **هوميومورفيان** أو **متكافئان تبولوجياً**.

إنّ R و $]0,1[$ متصاكلان على الرغم من أن R تام و $]0,1[$ ليس تاماً (برهن كل هذا).

لذلك يقال إن "التمام" ليست خاصة تبولوجية، لأنها لم تحفظ من خلال التصاكل.

والخاصة التبولوجية هي الخاصة التي يحفظها التصاكل.

هل الطول خاصة تبولوجية أم لا؟ ولماذا؟

وأيضاً، لنأخذ $X=]0,\infty[$ و $f:X\to X$ المعرف بالقاعدة $f(x)=\frac{1}{x}$

فإن f هوميومورفيزم (تصاكل) لـ X على X.

كما أن المتوالية: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},....,a_n=\frac{1}{n},.....$ كوشية، في حين أن صورتها وفق f هي المتوالية:

$1,2,3,...,f(a_n)=n,....$ التي ليست كوشية. ومن ثم فإن خاصة كون المتوالية كوشية ليست خاصة تبولوجية.

هذا ويمكن أن تعرّف التبولوجيا على أنها **دراسة الخواص الصامدة تبولوجياً**.

١٠) **مبرهنة:**

(١) أيّ مجموعة تامة في فضاء متري تكون مغلقة.

(٢) إذا كانت E تامة و $F \subseteq E$ و F مغلقة وغير خالية، فإن F تكون تامة.

الإثبات:

(١) لنفرض أن F مجموعة تامة في (X,d). ولتكن (x_n) متوالية في F بحيث $x_n \to x$. ولما كانت (x_n) متقاربة فإنها كوشية. ومن تعريف التمام نجد أن (x_n) متقاربة من نقطة y من F. بيد أن $x_n \to x$، والنهاية وحيدة، لذلك فإن $x = y$. ونظراً إلى أن y من F فإنّ $x \in F$. ومن ثم فإنّ F مغلقة.

(٢) لتكن (x_n) متوالية كوشية في F. ونظراً إلى أنّ $F \subseteq E$ فإنّ (x_n) كوشية في E. ولما كانت E تامة فإن $x_n \to x$، حيث x من E. ونظراً إلى أن F مغلقة فإن $x \in F$. ومنه $x_n \to x$ حيث x من F. من ثم فإن F تامة.

١١) **أمثلة مهمة:**

(١) الفضاء المتري $B[a,b]$ تام.

(٢) الفضاء المتري $C[a,b]$ تام.

الحل:

(١) لنفرض أن (x_n) كوشية في $B[a,b]$. ليكن $\varepsilon > 0$، نستطيع إيجاد N بحيث إنّ $d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل $n,m \ge N$. وعلى نحو خاص فإنّ:

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

من أجل كل t من $[a,b]$ ومن أجل $n,m \ge N$.

ومنه، يمكن القول إن $(x_n(t))$ متوالية كوشية في R. ولما كان الفضاء R تاماً فإنّ هذه المتوالية متقاربة. لنضع $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$.

ومما سبق أيضاً لدينا من أجل t، $|x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$، ونستطيع أخذ النهاية فوق m لنجد أنّ:

$$[n \ge N \text{ من أجل } |x_n(t) - x(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}] \qquad (\star)$$

ونظراً إلى أن كل ذلك محقق من أجل كل t، فإنّ:

$$\sup_{a\le t\le b} |x_n(t) - x(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

وهذا سيعني أن $d(x_n,x) < \varepsilon$ من أجل $n \ge N$، أيْ أن $x_n \to x$ إذا كنا نعلم أن x عنصر من $B[a,b]$.

لذلك إذا استطعنا إثبات أن x محدود، أيْ أن x من $B[a,b]$، فإن البرهان سيكتمل:

من $(\star)$ لدينا، من أجل $n \ge N$، ومن أجل كل t من $[a,b]$، $|x(t)| \le |x_n(t)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

لنأخذ $n_0 \ge N$ ولنضع $k_0 = \sup_{a\le t\le b} |x_{n_0}(t)|$. ومنه من أجل كل t من $[a,b]$ يكون $|x(t)| \le k_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. ومن ثم فإن x محدود.

(٢) $C[a,b]$ مجموعة مغلقة في $B[a,b]$ ومن ثم، من المبرهنة الأخيرة، نجد أنها فضاء تام.

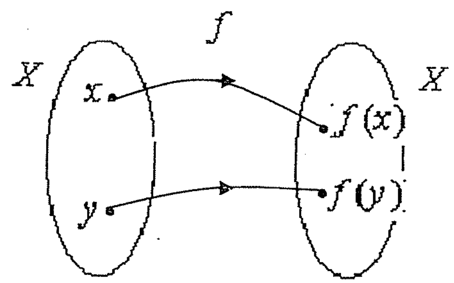
١-١٦- التقليص:

١) تعريف:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $f:X\to X$ تطبيقاً (تابعاً). نقول عن f إنه **تقليص** إذا وفقط إذا وجد ثابت مثل k يحقق الشرط $0\le k<1$ وبحيث يكون:

$d(f(x),f(y))\le kd(x,y)$ من أجل كل x,y من X.

وهذا يعني هندسياً أن لأي نقطتين x,y صورتين أقرب إحداهما إلى الأخرى من قرب النقطتين x,y من بعضهما، أو بعبارة أخرى فإن النسبة $\dfrac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$ لا تتجاوز عدداً ثابتاً k أصغر من الواحد.



٢) ملاحظة:

لتكن D مجموعة مغلقة في R^n فإنّ $S:D\to D$ تقليص على D إذا كان $d(S(x),S(y))\le cd(x,y)$ من أجل أي عنصرين x,y من D حيث $0<c<1$.

إذا كان $d(S(x),S(y))=cd(x,y)$ فإن S ينقل المجموعات إلى أخرى مشابهة هندسياً، ويسمى S عندها **تشابهاً** أو تحويل تشابه ذا النسبة c. أما إذا

كان $c=1$ فإنّ $d(S(x),S(y))=d(x,y)$ ويمكن أن يسمى S عندها **تقايساً**.

٣) تمرين: التقليص مستمر.

الحل:

ليكن $f:X\to X$ تقليصاً، ولنفرض أن $x_n\to x$. عندئذ: $d(f(x_n),f(x))\le kd(x_n,x)\to 0$ ومنه $f(x_n)\to f(x)$. وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٤) مبرهنة (مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة أو مبرهنة مبدأ تطبيق التقليص):

ليكن (X,d) فضاءً مترياً تاماً و $f:X\to X$ تقليصاً. عندئذ:
ثمة نقطة ثابتة وحيدة لـ f (أيْ توجد نقطة واحدة فقط x من X بحيث إن $f(x)=x$).

الإثبات:

لنبدأ بأيّ نقطة x_0 من X. ولنعرّف بالاستقراء $x_{n+1}=f(x_n)$ من أجل $n\ge 0$. وسنثبت أنّ (x_n) كوشية:

لنأخذ أولاً:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n)&=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\le kd(x_n,x_{n-1})=\\
&=kd(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))\le k^2d(x_{n-1},x_{n-2})\le\\
&\le k^3d(f(x_{n-2}),f(x_{n-3}))\le\ldots\ldots\le k^nd(x_1,x_0)
\end{aligned}$$

الآن، من أجل $m>n$ يكون:

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n)&\le d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots.+d(x_{n+1},x_n)\\
&\le k^{m-1}d(x_1,x_0)+k^{m-2}d(x_1,x_0)+\ldots.+k^n(x_1,x_0)=
\end{aligned}$$

$$=\frac{k^n-k^m}{1-k}d(x_1,x_0)$$

ومن ثم من أجل $m,n>N$ يكون لدينا:

$$d(x_m,x_n)\le\left|\frac{k^n-k^m}{1-k}\right|.d(x_1,x_0)$$

ونظراً إلى أن $0\le k<1$ فإن الطرف الأيمن صغير إذا كانت n,m كبيرتين، ومن ثم فإن (x_n) كوشية.

ونظراً إلى أن X تام فإن $x_n\to x$ في X. ومنه فإن $x_{n+1}\to x$ في X أيضاً. ولما كان f مستمراً فإن $f(x_n)\to f(x)$، لذلك فإنّ $f(x_n)=x_{n+1}$ تعطي، بأخذ النهايات للطرفين، $f(x)=x$، أيْ أن x نقطة ثابتة.

ولإثبات وحدانية النقطة الثابتة نفرض أن x,y نقطتان ثابتتان لـ f. ومنه:

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))\le kd(x,y)$$

ونظراً إلى أنّ $k<1$ فإن $d(x,y)=0$، ومن ثم فإن $x=y$.

٥) ملاحظة مهمة:

(١) ما تشير إليه المبرهنة في الحقيقة هو كيف نجد النقطة الثابتة حيث نبدأ بأيّ نقطة x_0 ونضع $x_1=f(x_0)$ و $x_2=f(x_1)$ و .... والبرهان يشير إلى أن النقطة الثابتة x هي نهاية (x_n).

(٢) إثبات المبرهنة حقيقة يشير إلى كيفية الأداء.

ففي البرهان لدينا $d(x_n,x_m)\le\left|\frac{k^n-k^m}{1-k}\right|.d(x_1,x_0)$

فإذا جعلنا $m\to\infty$ فإننا نجد: $d(x_n,x)\le\frac{k^n}{1-k}.d(x_1,x_0)$

وهذا يعطي تقديراً يشير إلى ما يبعده الحد x_n من النهاية.

٦) تطبيقات:

(١) بيّن أنّ للمعادلة $x^3+x^2-7x+1=0$ جذراً واحداً فقط في $[0,1]$.

الحل:

لنضع $X=[0,1]$ ولنزوده بالمترك المألوف. نظراً إلى أن $[0,1]$ مجموعة مغلقة في R فإنها تامة. لنعرّف $f(x)=\frac{1}{7}(x^3+x^2+1)$.

ومن ثم فإن $f(x)$ معرف من أجل x من X:

لأنه إذا كان x من X و $x\ge 0$، فإن $f(x)\ge 0$، وإذا كان $x\in X$ و $x\le 1$، فإنّ $f(x)\le\frac{1}{7}(1+1+1)=\frac{3}{7}<1$. ومن ثم فإن $f(x)\in X$ من أجل $x\in X$، ومنه $f:X\to X$.

لنبيّن أن f تقليص:

لنأخذ x,y من X. ومنه:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\frac{1}{7}|x^3-y^3+x^2-y^2+1-1|=\\&=\frac{1}{7}|x^2+xy+y^2+x+y|.|x-y|\\&\le\frac{1}{7}(1+1+1+1+1).|x-y|=\frac{5}{7}.|x-y|\end{aligned}$$

ونظراً إلى أن $\frac{5}{7}<1$ فإنّ f تقليص.

ومنه فإن f له نقطة ثابتة وحيدة في X، أيْ أن ثمة x وحيد من $[0,1]$ بحيث $x=f(x)=\frac{1}{7}(x^3+x^2+1)$، أيْ: ثمة x وحيد من $[0,1]$ بحيث $x^3+x^2-7x+1=0$.

(٢) ليكن $f:[1,\infty[\to[1,\infty[$ تابعاً معرفاً بالقاعدة $f(x)=\frac{25}{26}(x+\frac{1}{x})$.

أثبت أن f تقليص وأن له نقطة ثابتة وحيدة.

الحل:

أياً كان x,y من $[1,\infty[$ فإنّ:

$$|f(x)-f(y)|=\frac{25}{26}\left|x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{25}{26}\left|1-\frac{1}{xy}\right|.|x-y|\le$$
$$\le\frac{25}{26}.|x-y|$$

نظراً إلى أن $\frac{25}{26}<1$ فإن f تقليص. ولما كانت $[1,\infty[$ مغلقة في R فإنها تامة. ومن ثم فإن لـ f نقطة ثابتة وحيدة.

ملاحظة: إذا كان $x=f(x)=\frac{25}{26}(x+\frac{1}{x})$ فإنّ: $\frac{1}{x}=\frac{26}{25}x-x$، ومنه $x^2=25$، أيْ $x=\mp 5$. لكن 5 فقط من $[1,\infty[$.

(٣) لنعرف $f:[1,\infty[\to[1,\infty[$ بالقاعدة $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

بيّن أن $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ إذا كان $x\neq y$، ولكن f ليس تقليصاً.

الحل:

$$|f(x)-f(y)|=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|=\left|1-\frac{1}{xy}\right|.|x-y|<|x-y|$$

وذلك عندما $x\neq y$.

إذا كان f تقليصاً فإن له نقطة ثابتة نظراً إلى أن $[1,\infty[$ تام.

ولكن إذا كان $f(x)=x$ فإنّ: $0=f(x)-x=x+\frac{1}{x}-x=\frac{1}{x}$ وهذا غير صحيح.

(٤) أثبت أن للمعادلات الحقيقية الآتية ذات المجاهيل x_1,x_2,x_3 حلاً وحيداً:

$$x_1=\frac{1}{2}\cos x_2+1 \quad , \quad x_2=\frac{2}{3}\sin x_3 \quad , \quad x_3=\frac{3}{4}x_1$$

الحل:

لنعرّف $f:R^3\to R^3$ بالقاعدة:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{2}\cos x_2+1,\frac{2}{3}\sin x_3,\frac{3}{4}x_1)$$

عندئذ:

يكون لـ f نقطة ثابتة (x_1,x_2,x_3) إذا وفقط إذا كانت (x_1,x_2,x_3) حلاً للمعادلات المفروضة.

لذلك نحتاج إلى أن نثبت أنّ f له نقطة ثابتة وحيدة.

لنزود R^3 بالمترك الإقليدي. ومنه فإن R^3 تام.

من مبرهنة القيمة الوسطى: إذا كان $g:R\to R$ تابعاً فضولاً فإنّ: $|g(b)-b(a)|=|g'(c)|.|b-a|$ من أجل قيمة c بين a,b، وعلى نحو خاص:

$$|\cos b-\cos a|=|\sin c|.|b-a|\le|b-a|$$
$$|\sin b-\sin a|=|\cos c|.|b-a|\le|b-a|$$

ومنه:

$$[d(f(x_1,x_2,x_3),f(y_1,y_2,y_3))]^2=$$

$$=(\frac{1}{2}\cos x_2+1-\frac{1}{2}\cos y_2-1)^2+(\frac{2}{3}\sin x_3-\frac{2}{3}\sin y_3)^2+$$
$$+(\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{4}y_1)^2$$
$$=\frac{1}{4}(\cos x_2-\cos y_2)^2+\frac{4}{9}(\sin x_3-\sin y_3)^2+\frac{9}{16}(x_1-y_1)^2$$
$$\le\frac{1}{4}|x_2-y_2|^2+\frac{4}{9}|x_3-y_3|^2+\frac{9}{16}|x_1-y_1|^2$$
$$\le\frac{9}{16}\left(|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2+|x_1-y_1|^2\right)$$
$$=\frac{9}{16}[d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))]^2$$

ونظراً إلى أنّ $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}<1$ فإنّ f تقليص.

(٥) لتكن $X=C[0,\frac{1}{2}]$ المزودة بالمترك sup. نعرّف f على X بالقاعدة

$$(f(x))(t)=t.(x(t)+1) \qquad (0\le t\le\frac{1}{2})$$

ومنه إذا كانت x من X فإن $f(x)\in X$، لذلك فإن f يطبق X في X.

سنثبت أن f تقليص:

لنأخذ x,y من X. ومنه:

$$d(f(x),f(y))=\sup_{0\le t\le\frac{1}{2}}|f(x)(t)-f(y)(t)|=$$
$$=\sup_{0\le t\le\frac{1}{2}}|t.(x(t)+1)-t.(y(t)+1)|=$$

$$=\sup_{0\le t\le\frac{1}{2}}|t.x(t)-t.y(t)|=$$
$$=\sup_{0\le t\le\frac{1}{2}}|t||x(t)-y(t)|\le\frac{1}{2}\sup_{0\le t\le\frac{1}{2}}|x(t)-y(t)|=$$
$$=\frac{1}{2}d(x,y)$$

ونظراً إلى أنّ $\frac{1}{2}<1$ فإنّ f تقليص. ولما كان X تاماً فإن لـ f نقطة ثابتة وحيدة.

ملاحظة:

إذا أخذنا $x_0(t)=t$ وأخذنا بعين الاعتبار أن:

$$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

فإننا نجد أنّ:

$$x_0(t)=t,x_1(t)=t+t^2,x_2(t)=t+t^2+t^3,x_3(t)=t+t^2+t^3+t^4,..$$

يبدو وكأنه:

$$x_n(t)\to t+t^2+t^3+t^4+\ldots\ldots=\frac{t}{1-t}$$

إذا وضعنا $x(t)=\frac{t}{1-t}$ فإنّ:

$$f(x)(t)=t(\frac{t}{1-t}+1)=\frac{t(t+t-t)}{1-t}=\frac{t}{1-t}=x(t)$$

ومنه فإن $f(x)=x$، ومن ثم فإن x هي النقطة الثابتة لـ f.

(٦) أثبت أنّ المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33} \end{pmatrix}$$

عكوسة (قلوبة) بشرط أن:

$|a_{i1}|+|a_{i2}|+|a_{i3}|<1$ من أجل $1\le i\le 3$.

البرهان:

يترك للقارئ.

٧) مثال:

أثبت، دون استخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة، أن للتقليص المعرف على فضاء متقطع نقطة ثابتة وحيدة.

الحل:

لنفرض أنّ δ المترك المتقطع على X وأن $f:X\to X$ تقليص بحيث إنّ $\delta(f(x),f(y))\le K\delta(x,y)$ من أجل كل x,y من X حيث $K<1$.

ولكن δ تأخذ قيمتين فقط $0,1$ ومنه: $\delta(f(x),f(y))\le K.1<1$

إذن لا بد أن يكون $\delta(f(x),f(y))=0$. ومنه $f(x)=f(y)$.

ولكن x,y عشوائيان، ومنه بوضع $f(y)=c$، نجد أنّ $f(x)=c$ من أجل كل x، أيْ أنّ f ثابت. وعلى نحو خاص فإنّ $f(c)=c$. ومنه c نقطة ثابتة، ومن الواضح أنها وحيدة.

نستنتج أن التقليص على الفضاء المتقطع يكون ثابتاً.

٨) مبرهنة:

إذا كان (X,d) فضاءً مترياً تاماً، وكان $f:X\to X$ معرفاً بحيث أن f^n تقليص [حيث $f^n(x)=\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\ \text{مرة}}$]، فإنّ لـ f نقطة ثابتة وحيدة.

الإثبات:

من مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة نعلم أن ثمة نقطة ثابتة وحيدة y من X بحيث $f^n(y)=y$ ومنه:

$$f^n(f(y))=f^{n+1}(y)=f(f^n(y))=f(y)$$

أيْ أن $f(y)$ نقطة ثابتة لـ f^n. بيد أن y النقطة الثابتة الوحيدة لـ f^n، ومن ثم فإنّ $f(y)=y$. أيْ أنّ y نقطة ثابتة لـ f.

هذا وإذا كانت x أيّ نقطة ثابتة لـ f فإنّ:

$$x=f(x)=f^2(x)(=f(f(x)))=f^3(x)=f^4(x)=\dots=f^n(x)$$

ومن ثم فإن x نقطة ثابتة لـ f^n، ومنه $x=y$.

٩) مبرهنة:

لتكن X أية مجموعة جزئية من الفضاء R. وليكن $f:X\to X$ تابعاً فضولاً. عندئذ:

يكون f تقليصاً إذا وفقط إذا كان يوجد ثابت مثل k بحيث إن $k<1$ و $|f'(x)|\le k$ من أجل كل x من X.

الإثبات:

لنفرض أن f تقليص، ولنأخذ أيّ نقطة x من X.

ومنه، من أجل أيّ y من X، لدينا $|f(y)-f(x)|\le k.|y-x|$ حيث $k<1$

وذلك من تعريف التقليص.

ومنه، بافتراض $y \neq x$، نجد $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le k$. وبجعل $y \to x$ فـإن

هذا يعطي أنّ $|f'(x)| \le k$.

وبالعكس، لنفرض أنّ $|f'(c)| \le k$ من أجل كل c من X حيث $k < 1$. عندئذ:

من أجل x, y من X نجد من مبرهنة القيمة الوسطى أن ثمة c بين x و y بحيث:

$$|f(y)-f(x)| = |f'(c)|.|y-x|$$

ومنه: $|f(y)-f(x)| \le k.|y-x|$ ومنه فإن f تقليص.

١٠) مثال:

لنفرض أن $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ معطى بالصيغة $f(x) = \cos x$، فإنّ f ليس تقليصاً في حين أن f^2 تقليص حيث:

$$f^2(x) = f(f(x)) = \cos(\cos x)$$

الحل:

لما كان $f(x) = \cos x$ من أجل كل x فإنّ $|f'(x)| = |\sin x|$.

ونظراً لعدم وجود $k < 1$ بحيث يكون $|\sin x| \le k$ من أجل كل x من $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$، فإنّ f ليس تقليصاً.

ولكن $h'(x) = (-\sin x)(-\sin(\cos x))$، حيث $h(x) = f^2(x)$،

إذن $|h'(x)| \le |\sin(\cos x)| \le \sin 1$ لأنّ $-1 \le \cos x \le 1$

و sin متزايد في $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. ولما كان $1 < \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

ومن ثم فإنّ h تقليص.

١١) مبرهنة:

المعادلة التفاضلية مع الشرط الابتدائي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(x(t),t) \\ x(a) = h \end{cases}$$

لها حل في $[b,c]$، حيث $b < a < c$، إذا وفقط إذا كانت المعادلة التكاملية

$$x(t) = h + \int_a^t \alpha(x(u),u)du$$

لها حل في $[b,c]$.

كل ذلك بشرط أن يكون أيّ حل للمعادلة التفاضلية في $[b,c]$ فضولاً، وأن تكون حلول المعادلة التكاملية مستمرة في $[b,c]$.

الإثبات:

لنفرض أن $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x(t),t)$ من أجل $b \le t \le c$. بالمكاملة نجد:

$$x(t) - x(a) = \int_a^t x'(u)du = \int_a^t \alpha(x(u),u)du$$

إذا كان $x(a) = h$ فإننا نحصل على المعادلة التكاملية.

إذا كان $x(t) = h + \int_a^t \alpha(x(u),u)du$ و α, x مستمرين، فإنّ $\alpha(x(u),u)$ تابع لـ u مستمر، ومنه فإن التكامل قابل للمفاضلة و:

$$\frac{dx}{dt}(t) = 0 + \alpha(x(t),t)$$

بوضع $t=a$ في صيغة التكامل نجد $x(a)=h+0$.

١٢) مبرهنة:

لنفرض أنّ $\alpha : R\times[a,b]\to R$ مستمر ويحقق شرط ليبشتز

$$|\alpha(v,t)-\alpha(w,t)|\le k|v-w| \qquad (lipK)$$

من أجل كل v,w في R و t من $[a,b]$، حيث k ثابت. ولنفرض أن $k(b-a)<1$، وأن h من R مثبت. عندئذ:

يوجد للمعادلة $x(t)=h+\int_a^t \alpha(x(u),u)du$ حل وحيد مستمر x على $[a,b]$.

الإثبات:

من أجل x من $C[a,b]$ نعرّف T_x بالقاعدة:

$$(T_x)(t)=h+\int_a^t \alpha(x(u),u)du$$

ومنه فإن T_x مستمر نظراً إلى أنه تكامل تابع مستمر. ومن ثم فإنّ $T : C[a,b]\to C[a,b]$. والأكثر من ذلك، فإن x يحقق المعادلة التكاملية في المبرهنة إذا وفقط إذا كان $T_x=x$. لذلك فإن ما نريد إثباته هو أن T له نقطة ثابتة وحيدة. ولما كان $C[a,b]$ تاماً بالنسبة للمترك sup، فإننا بحاجة فقط إلى أن نثبت أن T تقليص في المترك sup:

من أجل x,y من $C[a,b]$، ومن أجل كل t من $[a,b]$ لدينا:

$$|(T_x)(t)-(T_y)(t)|=\left|\int_a^t \alpha(x(u),u)du-\int_a^t \alpha(y(u),u)du\right|$$

$$\le \int_a^t |\alpha(x(u),u)-\alpha(y(u),u)|du$$

$$\le \int_a^t k|x(u)-y(u)|du \qquad (\text{من } lipK)$$

$$\le \int_a^t kd(x,y)du=k(t-a)d(x,y) \qquad (\bigstar)$$

وبأخذ sup فوق t في كلا الطرفين نجد أنّ:

$$d(T_x,T_y)\le k(b-a)d(x,y)$$

ونظراً إلى أنّ $k(b-a)<1$ فرضاً فإن T تقليص.

١٣) مبرهنة:

بالمحافظة على المعطيات ذاتها في المبرهنة السابقة وبإغفال أنّ $k(b-a)<1$ فإننا نحصل على النتيجة ذاتها.

الإثبات:

كما في إثبات المبرهنة السابقة نريد إثبات أنّ T له نقطة ثابتة وحيدة، وهذا ممكن بإثبات أن T^n تقليص من أجل قيمة معينة n:

سنبين أولاً، باستخدام الاستقراء، أنه من أجل كل n يكون:

$$|(T_x^n)(t)-(T_y^n)(t)|\le \frac{k^n(t-a)^n}{n!}d(x,y)$$

من أجل $n=1$ فإن هذا محقق من المتراجحة (★) في المبرهنة السابقة.

لنفرض أنها محققة من أجل $n=m$، ولنثبت صحتها من أجل $n=m+1$:

$$|(T_x^{m+1})(t)-(T_y^{m+1})(t)|=|(T(T_x^m))(t)-(T(T_y^m))(t)|$$

$$=\left|\int_a^t \alpha((T_x^m)(u),u)du - \int_a^t \alpha((T_y^m)(u),u)du\right|$$

$$\le \int_a^t \left|\alpha((T_x^m)(u),u) - \alpha((T_y^m)(u),u)\right| du$$

$$\le \int_a^t k\left|(T_x^m)(u) - (T_y^m)(u)\right| du \qquad (\text{من } lipK)$$

$$\le \int_a^t k.\frac{k^m(u-a)^m}{m!} d(x,y)du \quad (\text{من الفرضية الاستقرائية})$$

$$= k^{m+1}.\frac{1}{m!}.\frac{(t-a)^{m+1}}{m+1} d(x,y)$$

$$=\frac{k^{m+1}(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y)$$

لنأخذ الآن sup فوق t في الفرضية الاستقرائية:

$$d(T_x^n,T_y^n) \le \frac{k^n(b-a)^n}{n!} d(x,y)$$

إنّ $\frac{(k(b-a))^n}{n!} \to 0$ (بسبب أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k(b-a))^n}{n!}$ متقاربة)

ومنه من أجل n كبيرة بقدر كاف $1 > \frac{k^n(b-a)^n}{n!}$، أي أنه من أجل n معينة فإن T^n تقليص.

١٤) مبرهنة:

لنفرض أن $\alpha : R\times[a,b]\to R$ بحيث إن $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ تابع محدود. ومنه فإنّ α يحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$.

الإثبات:

نظراً إلى أن $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ محدود، فإننا نستطيع إيجاد k بحيث إن $\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,s)\right| \le k$ من أجل كل x,s. ومن مبرهنة القيمة الوسطى، إذا أعطينا u,v من R فإنّ ثمة x بين u,v بحيث إنه من أجل كل s من $[a,b]$ يكون لدينا:

$$|\alpha(u,s)-\alpha(v,s)| = \left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,s)\right||u-v| \le k|u-v|$$

١٥) مثال:

(١) أثبت أن ثمة تابعاً مستمراً واحداً فقط x على أيّ مجال $[a,b]$ يحتوي 0 بحيث إن $x(t)=\int_0^t (x(u)+u)\sin u\, du$

(٢) أثبت أن ثمة تابعاً فضولاً واحداً فقط x على أي مجال $[a,b]$ يحتوي 0 بحيث إنّ $\frac{dx}{dt}=(x+t)\sin t$ و $x(0)=0$.

الحل:

للطلبين (١) و(٢) معاً:

لنضع $\alpha(x,t)=(x+t)\sin t$ من أجل t من $[a,b]$.

ومنه $\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\sin t$، لذلك فإن $\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|\le 1$ و $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ محدود.

أيْ أن α تحقق شرط ليبشتز، ومن ثم فإن ما هو مطلوب محقق وفقاً للمبرهنتين ١٢ و١٣.

١-١٧- التراص:

١) تعريف:

نقول عن فضاء متري (X,d) إنه **متراص** إذا وفقط إذا كانت كل متوالية فيه تحوي متوالية جزئية متقاربة. ونقول عن مجموعة جزئية A من X إنها **متراصة** إذا وفقط إذا كانت A متراصة باعتبارها فضاءً جزئياً من X، أيْ إذا وفقط إذا كانت كل متوالية في A تحوي متوالية جزئية متقاربة في A (النهاية من A).

٢) أمثلة:

(١) R ليس متراصاً لأن المتوالية $1,2,3,4,....$ من R ولا تحوي أية متوالية جزئية متقاربة.

(٢) إن أيّ مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من فضاء متري تكون متراصة. كذلك فإن المجموعة الجزئية من فضاء متقطع تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت منتهية.

برهن ذلك باستخدام أن المتوالية (x_n) في الفضاء المتقطع تكون متقاربة من x إذا وفقط إذا كانت من الشكل $x_1,x_2,....,x_{n_0},x,x,x,.......$.

(٣) هل المجموعة الجزئية التالية من R متراصة أم لا؟ ولماذا؟

$$[2,2\frac{1}{2}]\cup[3,3\frac{1}{3}]\cup[4,4\frac{1}{4}]\cup......$$

٣) مبرهنة:

إنّ أيّ مجموعة جزئية متراصة من فضاء متري تكون مغلقة.

الإثبات:

لنفرض أنّ K مجموعة جزئية متراصة في X. ولنأخذ المتوالية (x_n) في هذه المجموعة بحيث تكون متقاربة من x في X. ولنثبت أن x من K وعندها تكون K مغلقة:

لما كانت K متراصة فإنّ ثمة متوالية جزئية (x_{n_k}) من (x_n) بحيث $x_{n_k}\to y\in K$. ولكن (x_{n_k}) متقاربة من x باعتبارها متوالية جزئية من (x_n). ومن ثم فإن $x=y$. لذلك فإنّ x من K.

٤) تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية E من فضاء متري (X,d) إنها **محدودة** إذا استطعنا إيجاد a من X و $k>0$ بحيث إنّ $d(a,x)\le k$ من أجل كل x من E. أو $E\subseteq B(a,k)$ [انظر البند ٤ من الفقرة ١-١٣].

٥) مبرهنة:

إنّ أيّ مجموعة جزئية متراصة مثل K في (X,d) تكون محدودة.

الإثبات:

نفرض مؤقتاً أن K مجموعة غير محدودة. ومن ثم نستطيع من أجل نقطة a من X إيجاد x_n من K بحيث يكون $d(x_n,a)\ge n$ وذلك من أجل كل n من N. وبذلك نحصل على متوالية (x_n) في K. ولما كانت K متراصة فإن هذه المتوالية تحوي متوالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة في K، أي أن: $x_{n_k}\to y\in K$. ومنه:

$$d(y,a)=\lim_{n} d(x_{n_k},a)\ge\lim_{n\to\infty} n_k=\infty$$

وهذا ~~خلف~~ ومن ثم فإن K محدودة.
تناقض

٦) **مثال مهم:**

إنّ أي مجموعة جزئية من R^p، حيث p من N^*، تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

الحل:

نعلم أن أي مجموعة جزئية متراصة من فضاء متري تكون مغلقة ومحدودة.

الآن، لنبرهن العكس، فنفرض أن K مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة من R^p.

ولنفرض أنّ:

$$x(n) = (x_1(n),....,x_p(n))\text{،}\ n = 1,2,3,......$$

متوالية في K. بما أن $(x(n))$ محدودة فإنه ينتج أن كلاً من:

$$(x_1(n)),(x_2(n)),.....,(x_p(n))$$

متوالية (من الأعداد الحقيقية) محدودة.

ومن مبرهنة بولزانو – فايرشتراس (في التحليل الحقيقي) نجد أن $(x_1(n))$ تحوي متوالية جزئية متقاربة، ولتكن مثلاً $x_1(n_k) \to y_1$.

كذلك فإنّ $(x_1(n_k))$ متوالية محدودة، لذلك فإنها تحوي متوالية جزئية متقاربة، ولتكن مثلاً $x_1(h_{n_k}) \to y_2$. وأيضاً، إنّ $(x_1(h_{n_k}))$ متوالية جزئية من المتوالية $(x_1(n_k))$، لذلك فإنّ $x_1(h_{n_k}) \to y_1$.

ونتابع بالطريقة نفسها عند كل إحداثي لنحصل على متواليات جزئية:

$$x_1(s_{r_{\ddots_{h_{n_k}}}}) \to y_1,.............,x_p(s_{r_{\ddots_{h_{n_k}}}}) \to y_p$$

ومن ثم فإنّ:

$$x_1(s_{r_{\ddots_{h_{n_k}}}}) \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in R^p$$

وهي متوالية جزئية من المتوالية $(x(n))$، أيْ أنها من المجموعة K. وبما أن K مغلقة فإن $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ من K. أيْ أنه من متوالية $(x(n))$ في K وجدنا متوالية جزئية متقاربة في K. ومنه فإن K متراصة.

٧) **مبرهنة هاين – بوريل:**

حالة خاصة من المثال المهم السابق وذلك من أجل $p = 1$، أيْ في R.

٨) **نتائج:**

(١) في R يكون المجال $[a,b]$، حيث $-\infty < a \le b < \infty$، مجموعة متراصة.

(٢) في R^p تكون المجموعة $\{x / x \in R^p, d(x,a) \le r\}$ متراصة مهما تكن a من R^p، ومن أجل أي $r \ge 0$.

(٣) المجموعة $[a,b]\times[c,d]$ متراصة في R^2، حيث

$$-\infty < a \le b < \infty \text{ و } -\infty < c \le d < \infty$$

(٤) في الفضاء $C[0,1]$ تكون المجموعة:

$$\{x / 0 \le x(t) \le 1, \forall t \in [0,1]\}$$

غير متراصة على الرغم من أنها مغلقة ومحدودة.

(٥) إذا كانت $K \subset R$ متراصة وغير خالية فإنّ $\sup K$ و $\inf K$ موجودان و $\sup K \in K$ و $\inf K \in K$.

برهان (٥):

لما كانت K محدودة فإن $\sup K$ و $\inf K$ موجودان.

لنضع $M = \sup K$. ومنه $M - \frac{1}{n}$، حيث $n \in N^*$، ليس حداً أعلى لـ K، ولذلك يوجد x_n من K بحيث $M - \frac{1}{n} < x_n \le M$.

ومنه $x_n \to M$. لكن x_n من K من أجل كل n، وأيضاً K مغلقة، لذلك فإن M من K. وبالطريقة ذاتها نبرهن أن $\inf K$ من K وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٩) مبرهنة:

أيّ مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متري متراص مثل (X,d) تكون متراصة.

الإثبات:

لنفرض أن F مجموعة جزئية مغلقة من X، وأنّ (x_n) متوالية من عناصر F. ومن ثم فإن (x_n) متوالية في X المتراص.

ومنه فإن (x_n) تحوي متوالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من نقطة x من X. وبما أن حدود (نقاط) المتوالية الجزئية هي من عناصر F المغلقة، إذن فإن نهايتها x من F.

وبذلك نجد أننا، من أية متوالية من عناصر F، استطعنا إيجاد متوالية جزئية متقاربة في F. إذن F متراصة.

١٠) مبرهنة:

كل فضاء متري متراص مثل (X,d) يكون تاماً.

الإثبات:

لنفرض أن X متراص، وأن (x_n) متوالية كوشية فيه، ولنبرهن على تقاربها:

من تراص X نجد أنّ (x_n) تحوي متوالية جزئية متقاربة (x_{n_k})، أيْ أن $x_{n_k} \to x$. ومن متراجحة المثلث نجد أن:

$$0 \le d(x_n,x) \le d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) \to 0+0=0$$

وذلك لأن $d(x_{n_k},x) \to 0$ و $d(x_n,x_{n_k}) \to 0$ عندما $n,n_k \to \infty$ نظراً لأن (x_n) متوالية كوشية.

ومن ثم فإن (x_n) متقاربة، والفضاء تام.

١١) مبرهنة:

لنفرض أن X,Y فضاءان متريان، وأن $f: X \to Y$ تطبيق (تابع) مستمر. عندئذ يكون القول الآتي صحيحاً:

إنّ صورة أيّ مجموعة جزئية متراصة A من X، وفق f، هي مجموعة متراصة في Y.

الإثبات:

لنفرض أن A مجموعة جزئية متراصة من X، وأن (y_n) متوالية في $f(A)$.

ومن ثم فإنه، من أجل كل n من N، يوجد x_n من A بحيث إن $f(x_n) = y_n$.

ومنه فإنّ (x_n) متوالية في A المتراصة. لذا فإن هذه تحوي متوالية جزئية مثل (x_{n_k}) متقاربة من نقطة مثل x في A. أيْ أن $x_{n_k} \to x$. وبما أن f مستمر فإن $f(x_{n_k}) \to f(x)$، أيْ أن $y_{n_k} \to f(x)$. وبما أن x من A

فإن $f(x)$ من $f(A)$. أي أننا استطعنا إيجاد متوالية جزئية متقاربة مثل (y_{n_k}) من المتوالية (y_n)، ومن ثم فإن $f(A)$ متراصة.

١٢) نتيجة:

إذا كان f تطبيقاً غامراً للفضاء المتري المتراص X في الفضاء المتري Y، وكان f مستمراً فإن الفضاء Y يكون متراصاً.

١٣) مبرهنة:

لنفرض أنّ $f: X \to R$ تطبيق مستمر، حيث X فضاء متري، وأن K مجموعة جزئية متراصة من X. عندئذ يكون f محدوداً على K، وثمة a,b من K بحيث إنّ:

$$f(a)=\sup\{f(x)/x\in K\} \quad \text{و} \quad f(b)=\inf\{f(x)/x\in K\}$$

الإثبات:

بما أنّ K مجموعة متراصة و f مستمر، فإنّ $f(K)$ مجموعة متراصة في R.

وحسب [النتيجة (٥) في الفقرة ٨] يكون لدينا:

$$\sup f(K)=\sup\{f(x)/x\in K\}\in f(K)$$

أيْ بشكل أوضح فإن:

$$\sup f(K)\in f(K)=\{f(x)/x\in K\}$$

ومنه فإنّ ثمة a من K بحيث يكون $\sup f(K)=f(a)$.

وبالطريقة ذاتها نبرهن الجزء الآخر.

١٤) تعريف الاستمرار المنتظم:

ليكن $f: X\to Y$ تطبيقاً (تابعاً) لفضاء متري مثل (X,d_1) في فضاء متري مثل (Y,d_2). يقال عن f إنه **مستمر بانتظام** (أو مستمر بشمول أو منتظم الاستمرار) على X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كان العدد الحقيقي $\varepsilon>0$ فإنه يوجد عدد حقيقي مثل $\delta>0$ بحيث يكون:

$$\forall x_1,x_2\in X:[d_1(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d_2(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon]$$

١٥) ملاحظات مهمة:

(١) العدد δ المذكور في تعريف الاستمرار المنتظم على X لا يتعلّق إلا بـ ε فقط، وبالتالي فهو صالح لجميع نقاط X. أما تعريف الاستمرار على X والذي يعني الاستمرار في كل نقطة مثل x_0 من نقاط X فيمكن صياغته كما يلي:

أياً كان $\varepsilon>0$ فيوجد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$\forall x\in X:[d_1(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon]$$

ونلاحظ، هنا، أنّ العدد δ يرتبط بـ ε وبالنقطة x_0 التي ندرس الاستمرار عندها.

(٢) كل تطبيق مستمر بانتظام على منطلقه يكون مستمراً على منطلقه. ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة وذلك بملاحظة المثال التالي:

لنأخذ التطبيق $f: R\to R$ المعرف بالقاعدة $f(x)=x^2$ من أجل كل x من R، فنجد أنه مستمر على R (وضوحاً). إلا أن استمراره غير منتظم على R بسبب ما يلي:

لنفرض جدلاً أن f مستمر بانتظام على R، ولنثبّت بشكل كيفي $\varepsilon>0$ فيوجد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$\forall x, y \in R : [|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon]$$

ثم لنأخذ $x_0 = \frac{\varepsilon}{\delta}$ و $y_0 = x_0 + \frac{\delta}{2}$ فيكون $|x_0 - y_0| < \delta$ وبالتالي:

$$\varepsilon > |x_0^2 - y_0^2| = |x_0 + y_0|.|x_0 - y_0| = x_0.\delta + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$$

وهذا مستحيل.

١٦) مبرهنة:

لنفرض أن $f : X \to Y$، حيث (X, d_1) و (Y, d_2) فضاءان متريان.
ولنفرض أن K مجموعة جزئية متراصة من X، وأن f مستمر على K.
عندئذ يكون f مستمراً بانتظام على K.

الإثبات:

لنفرض مؤقتاً أن f ليس مستمراً بانتظام على K. ومنه فإن ثمة $\varepsilon > 0$ بحيث إننا لا نستطيع إيجاد $\delta > 0$ والتي تحقق شروط الاستمرار بانتظام. وبشكل خاص لنأخذ $\delta = \frac{1}{n}$ حيث $n \in N^*$. لذلك من أجل كل $n \in N^*$ نستطيع إيجاد عناصر u_n, v_n من K بحيث يكون:

$d_1(u_n, v_n) < \frac{1}{n}$ ولكن $d_2(f(u_n), f(v_n)) \ge \varepsilon$.

وبما أن K متراصة فإنها تكون مغلقة وإن المتوالية (u_n) تحوي متوالية جزئية متقاربة مثل (x_{n_k})، وإن المتوالية (v_n) تحوي متوالية جزئية متقاربة مثل (y_{n_k})، ومن ثم يمكننا أن نكتب:

$x_{n_k} \to x \in K$ و $y_{n_k} \to y \in K$

ومنه، بسبب كون f مستمراً، يكون:

$f(x_{n_k}) \to f(x)$ و $f(y_{n_k}) \to f(y)$

وبذلك يكون:

$\frac{1}{n} > d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) \ge 0$ و $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \ge \varepsilon$

ومنه، بأخذ النهايات، نجد:

$0 \ge d_1(x, y) \ge 0$ و $d_2(f(x), f(y)) \ge \varepsilon$

ومن ثم $d_1(x, y) = 0$، أيْ: $x = y$، وبالتالي $f(x) = f(y)$، وبالتالي:
$0 = d_2(f(x), f(y)) \ge \varepsilon$ وهذا يناقض كون $\varepsilon > 0$.
إذن f مستمر بانتظام على K وهو المطلوب.

١-١٨- الترابط:

١) تعريف:

يقال عن فضاء متري مثل (X, d) إنه **مترابط** إذا وفقط إذا كان من غير الممكن إيجاد مجموعتين جزئيتين مفتوحتين مثل A, B في X بحيث يكون:

$$A \neq \Phi, B \neq \Phi, A \cap B = \Phi, A \cup B = X$$

٢) تعريف:

يقال عن مجموعة جزئية غير خالية مثل Y من فضاء متري مثل (X, d) إنها **مترابطة** إذا وفقط إذا كان الفضاء الجزئي (Y, d) مترابطاً.

٣) أمثلة:

(١) كل فضاء مؤلف من نقطة وحيدة يكون مترابطاً.

(٢) كل فضاء متري متقطع ومؤلف من نقطتين على الأقل يكـون غيـر مترابط.

(٣) كل مجال حقيقي [مغلق أو مفتوح أو نصف مغلق (نصـف مفتـوح)] بطرفين مختلفين مثـل a,b، حيـث $a,b\in R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$، يكـون مجموعة مترابطة [انظر المبرهنة (١١) في هذه الفقرة].

(٤) مجموعة الأعداد غير العادية $R-Q$ تكون غير مترابطة. ثـم، هـل مجموعة الأعداد العادية Q مترابطة أم لا؟ ولماذا؟

٤) مبرهنة:

يكون فضاء متري مثل (X,d) مترابطاً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
المجموعتان X,Φ هما المجموعتان الجزئيتان الوحيدتان اللتان تكون كل منهما مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء X.

الإثبات:

لنفرض أن الفضاء X مترابط. ولنفرض مؤقتاً وجود مجموعة جزئية مثـل V بحيث يكون $[\Phi \subsetneqq V \subsetneqq X]$ و $[V$ مفتوحة ومغلقة بآن واحد في $X]$. عندها تكون المجموعة $W=X-V$ محققة للشروط الآتية:

$W\neq\Phi$ و $W\neq X$ و W مفتوحة ومغلقة بآن واحد في X و $W\bigcap V=\Phi$ و $X=W\bigcup V$ مما يخالف شروط تعريف الفضاء المترابط.

وبالعكس، لنفرض أن الشرط المذكور في نص المبرهنة محقق. ولنفرض جدلاً أن الفضاء X غير مترابط. عندها توجد في X مجموعتان جزئيتان مفتوحتان مثل A,B بحيث يكون:

$$A\neq\Phi, B\neq\Phi, A\bigcap B=\Phi, A\bigcup B=X$$

ومنه، توجد المجموعة الجزئية A (أو B) التي تكون مفتوحة ومغلقة بآن واحد في X والتي لا تساوي Φ ولا تساوي X مما يناقض الشـرط المـذكور فـي النص.

٥) مبرهنة:

إذا كانت H أية مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (X,d) فإن القضايا الآتية تكون متكافئة:

(أ) المجموعة H غير مترابطة.

(ب) توجد مجموعتان مفتوحتان (أو مغلقتان) مثل A,B في X بحيث يكون:

$$A\bigcap H\neq\Phi, B\bigcap H\neq\Phi, (A\bigcap H)\bigcap(B\bigcap H)=\Phi,$$
$$(A\bigcap H)\bigcup(B\bigcap H)=H$$

(حـ) توجد مجموعتان مفتوحتان (أو مغلقتان) مثل A,B في X بحيث يكون:

$$A\bigcap H\neq\Phi, B\bigcap H\neq\Phi, A\bigcap B\bigcap H=\Phi, A\bigcup B\supseteq H$$

(د) توجـد مجموعـة A مفتوحـة مغلقـة فـي X بحيـث يكـون $\Phi\neq A\bigcap H\neq H$.

الإثبات:

يترك للقارئ بمثابة تمرين حيث يتم إنجازه بالاستفادة مـن تعريـف الفضـاء الجزئي والمبرهنة السابقة والتعريفين ١) و٢) المتعلقين بمفهوم الترابط.

٦) اصطلاح:

سوف نستخدم الرمز D للتعبير عن الفضاء المتقطع المؤلف من النقطتين $0,1$، وهذا ما سوف نستعمله في كل ما سيتبع دون الإشارة صراحة إلى ذلك.

٧) مبرهنة:

ليكن X أيّ فضاء. عندئذ:

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء X مترابطاً هو أن يكون كل تابع مستمر من الشكل $f: X \to D$ ثابتاً (على X).

الإثبات:

لنفرض أن الفضاء X مترابط، وليكن $f: X \to D$ تابعاً مستمراً من الشكل المذكور في النص. ولنفرض جدلاً أن f ليس ثابتاً. عندئذ تكون المجموعتان $B = f^{-1}(1)$ و $A = f^{-1}(0)$ مفتوحتين في X. كما يمكن استنتاج أن $A \neq \Phi$ وأن $B \neq \Phi$ وأنّ $A \cap B = \Phi$ وأنّ $A \cup B = X$ مما يناقض كون X مترابطاً. إذاً f ثابت.

وبالعكس، لنفرض أنّ كل تابع مستمر من الشكل $f: X \to D$ يكون ثابتاً. ولنفرض مؤقتاً أن X غير مترابط. عندئذ يمكن إيجاد مجموعتين جزئيتين مفتوحتين مثل A, B في X بحيث يكون:

$$A \neq \Phi, B \neq \Phi, A \cap B = \Phi, A \cup B = X$$

ومنه يمكن تعريف تابع مثل $f: X \to D$ كما يلي:

ليكن $x \in X$. فإذا كان $x \in A$ فنضع $f(x) = 0$، أما إذا كان $x \in B$ فنضع $f(x) = 1$.

هذا ومن الممكن بسهولة التحقق من أن التابع f مستمر. وبما أنّ f غير ثابت فإننا نكون قد حصلنا على تناقض مع الفرض الأساسي.

٨) مبرهنة:

ليكن $f: X \to Y$ تابعاً مستمراً. ولتكن $\Phi \neq H \subseteq X$. ولنفرض أن H مجموعة جزئية مترابطة. عندئذ تكون $f(H)$ مترابطة.

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن $f(H)$ غير مترابطة. عندئذ توجد [بحسب (حـ) من المبرهنة ٥)] مجموعتان جزئيتان مفتوحتان مثل A, B في Y بحيث يكون:

$$A \cap f(H) \neq \Phi, B \cap f(H) \neq \Phi, A \cap B \cap f(H) = \Phi,$$
$$A \cup B \supseteq f(H),$$

ولما كان f مستمراً فتوجد المجموعتان الجزئيتان المفتوحتان $f^{-1}(B)$ و $f^{-1}(A)$ في X بحيث يكون:

$$f^{-1}(A) \cap H \neq \Phi, f^{-1}(B) \cap H \neq \Phi,$$
$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \cap H = \Phi, f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \supseteq H$$

وهذا يناقض كون H مترابطة. [تحقق من كل ذلك مع ملاحظة أنّ $H \subseteq f^{-1}(f(H))$].

٩) مبرهنة:

لتكن $H \neq \Phi$ مجموعة جزئية مترابطة من فضاء مثل X. عندئذ:

(١) إذا كانت $A \subseteq H$ بحيث $H \subseteq A \subseteq \overline{H}$ فإن A تكون مترابطة.

(٢) $\overline{H}$ تكون مترابطة.

الإثبات:

(١) لنفرض أن $f: A \to D$ تابع مستمر، حيث $H \subseteq A \subseteq \overline{H}$. عندئذ: يكون مقصور f على H مستمراً، وبالتالي ثابتاً (لماذا؟). ومنه، يمكننا أنْ نكتب: $f(H) = \{\alpha\}$ حيث $\alpha \in D = \{1, 0\}$.

وبذلك يكون لدينا:

$$\{\alpha\} = f(H) \subseteq f(A) \subseteq f(A \cap \overline{H}) \subseteq f(\overline{H}) \subseteq \overline{\{\alpha\}} = \{\alpha\}$$

أيْ أنّ: $f(A)=\{\alpha\}$ ويعني هذا أن f ثابت، وبالتالي فإنّ A تكون مترابطة.
[يمكن النظر إلى التمرين المحلول (٧) في (١-١٩) حين اللزوم].

(٢) بالاستناد إلى الطلب (١) وملاحظة أن $H \subseteq \overline{H} \subseteq \overline{H}$.

١٠) مبرهنة:

لتكن $H \neq \Phi$ مجموعة جزئية من الفضاء R. عندئذ:
الشرط اللازم والكافي كي تكون H مترابطة هو الشرط الآتي: أياً كان x,y من H بحيث $x<y$، وأياً كان z من R بحيث $x<z<y$ فإنّ $z\in H$.

الإثبات:

لنفرض أن H مترابطة. ولنفرض مؤقتاً أنه يوجد في H عنصران مثل x,y بحيث يكون $x<y$، ويوجد في R عنصر مثل z بحيث يكون $x<z<y$ إلا أنّ $z\notin H$. توجد، عندئذ، في الفضاء R المجموعتان الجزئيتان المفتوحتان $B=]z,\infty[$ و $A=]-\infty,z[$ بحيث تكون العلاقات الآتية صحيحة [يطلب من القارئ التحقق من صحة هذه العلاقات]:

$$A\cap B\cap H=\Phi, A\cap H\neq\Phi, B\cap H\neq\Phi, H\subseteq A\cup B$$

وهذا يؤدي إلى أن H تكون غير مترابطة حسب المبرهنة (٥) وهذا يناقض الفرض الأساسي القائل إن H مترابطة.
إذن $z\in H$.

وبالعكس، لنفرض أنه أياً كان $x,y\in H$ بحيث $x<y$، وأياً كان $z\in R$ بحيث $x<z<y$ فإنّ $z\in H$. ولنفرض جدلاً أن H غير مترابطة. عندها توجد في R مجموعتان جزئيتان مفتوحتان مثل A,B بحيث يكون:

$$A\cap H\neq\Phi, B\cap H\neq\Phi, A\cap B\cap H=, A\cup B\supseteq H$$

وذلك حسب المبرهنة (٥). ومنه، نستطيع القول إنه يوجد في H عنصران مثل x,y بحيث يكون $x\in A, y\in B$. ونلاحظ فوراً أنّ $x\neq y$ لأنّ $A\cap B\cap H=\Phi$.

لنفرض، مثلاً، أن $x<y$ وهذا لا يمس عمومية البرهان. ولنفترض أن $C=A\cap[x,y]$ فتكون C مجموعة جزئية غير خالية من R ومحدودة من الأعلى في R، وبالتالي فإنه يوجد في R عدد حقيقي مثل $t=\sup C$. ومن الواضح أن هذا العدد يحقق العلاقة $x\le t\le y$. كما إن $t\notin B$ لأنه في الحالة المعاكسة، ولكون B مفتوحة، يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل β بحيث يكون $]t-\beta,t+\beta[\subseteq B$، ويوجد، بالتالي، $z\in C$ بحيث يكون $t-\beta<z\le t<t+\beta$، ومن ثم فإنّ $z\in A, z\in B$، وأيضاً $x\le z\le y$ وبالتالي $z\in H$ (لماذا؟)، وبذلك يكون $z\in A\cap B\cap H$ مما يناقض كون $A\cap B\cap H=\Phi$.

إذاً $t\notin B$. ومنه، باعتبار أنّ $y\in B$ و $t\le y$، يكون $t<y$.
كما إنّ $t\notin A$ للأسباب التالية:

لنفرض مؤقتاً أن $t\in A$. عندئذ، يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل r بحيث يكون $]t-r,t+r[\subseteq A$ (لماذا؟). ثم، لنفرض أنّ $\gamma=\min(r,y-t)$ فيكون γ عدداً حقيقياً موجباً تماماً ويحقق العلاقات:
$\gamma\le y-t$ و $\gamma\le r$ و $\frac{\gamma}{2}>0$ وبالتالي:

$$t-r<t<(t+\frac{\gamma}{2})<t+\gamma\le t+r$$

$$x\le t<(t+\frac{\gamma}{2})<t+\gamma\le t+(y-t)=y$$

أيْ: $t+\frac{\gamma}{2} \in A\bigcap[x,y]=C$

ومن ثم $\sup C=t<t+\frac{\gamma}{2}$ وهذا يناقض أحد الشروط التي يحققها العدد $\sup C$ تعريفاً.

إذاً $t\notin A$. ومنه، باعتبار أن $x\in A$ و $x\le t$، يكون $x<t$.

وبذلك يكون لدينا $t\notin B$ و $t\notin A$ وبالتالي $t\notin A\bigcup B$ وبالتالي $t\notin H$.

أيْ، يمكننا أن نقول بنتيجة كل ذلك ما يلي:

يوجد $x,y\in H$ بحيث $x<y$، ويوجد $t\in R$ بحيث $x<t<y$

ولكن $t\notin H$ ما يناقض الفرض الأساسي.

وبطريقة مشابهة نحصل على تناقض مع الفرض الأساسي إذا افترضنا أنّ $y<x$.

إذن H تكون مترابطة، وبذلك يتم إثبات المطلوب.

١١) مبرهنة:

لتكن $H\neq\Phi$ مجموعة جزئية من الفضاء R. عندئذ:

الشرط اللازم والكافي كي تكون H مترابطة هو أن تكون H مساوية أحد المجالات (الفترات) الآتية:

$[a,b[,\ ]a,b],\ [a,b],\ ]-\infty,b[,\ ]-\infty,b],\ ]a,\infty[,\ [a,\infty[,\ ]-\infty,\infty[$

$]a,b[$ حيث $a,b\in R$.

الإثبات:

لنفرض أن H تساوي أحد المجالات المذكورة في نص المبرهنة. عندئذ، تكون شروط المبرهنة (١٠) محققة فنستطيع القول إن H تكون مترابطة.

وبالعكس، لنفرض أن H مترابطة. توجد، عندئذ، حالتان:

الحالة الأولى: H مؤلفة من عنصر واحد فقط. عندها، تكون H مساوية أحد المجالات من الشكل $[a,b]$، حيث $a,b\in R$ و $(a=b)$.

الحالة الثانية: H مؤلفة من عنصرين اثنين على الأقل. عندها، تكون H مساوية أحد المجالات المذكورة في نص المبرهنة للأسباب الآتية:

ليكن $z\in H$. يوجد في مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\widetilde{R}$، حيث $\widetilde{R}=R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$، عنصران مثل p,q بحيث يكون $q=\sup H$ و $p=\inf H$.

وهنا نميّز الإمكانات التالية:

أ- إذا كان $p=-\infty$ فإنه، لأجل أيّ x من R محقق للمتراجحة $x<z$، يوجد $y\in H$ بحيث يكون $y<x$، وبالتالي، حسب المبرهنة (١٠)، يكون $x\in H$.

إذن: $]\inf H,z]=]-\infty,z]\subseteq H$

ب- إذا كان $p\in R$ وكان $p<z$ فإنه، لأجل أيّ $x\in R$ محقق للمتراجحة $p<x<z$، يوجد $y\in H$ بحيث يكون $p<y<x$، وبالتالي يكون $x\in H$.

إذن: $]\inf H,z]=]p,z]\subseteq H$

حـ- $[z,\sup H[\subseteq H$ (تبرهن بطريقة مشابهة).

وبذلك نستنتج أنّ $]\inf H,\sup H[\subseteq H$.

وهذا يسمح بالقول إن H تكون مساوية لأحد المجالات المذكورة في نص المبرهنة حيث يتعلق ذلك بكون $\sup H,\inf H$ محدودين أو غير محدودين أو أحدهما محدود والآخر غير محدود، وبكونهما ينتميان إلى H أو لا ينتميان إليها، أو أحدهما ينتمي إلى H والآخر لا ينتمي إليها.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

١٢) مبرهنة:

ليكن X فضاء مترابطاً. وليكن $f : X \to R$ تابعاً مستمراً. ولنفرض أنّ f يأخذ القيمتين α, β حيث $\alpha < \beta$ (مثلاً).

عندئذ يأخذ f القيم جميعها المحصورة بين α, β.

الإثبات:

بما أن f مستمر و X مترابط فإن $f(X)$ تكون مجموعة مترابطة في R، وبالتالي فهي تكون مجالاً. ومنه، يمكننا، حسب الفرض، أن نكتب $[\alpha, \beta] \subseteq f(X)$.

فإذا كانت $\alpha < \gamma < \beta$ فإن $\gamma \in f(X)$، وبالتالي فإنه يوجد $a \in X$ بحيث يكون $f(a) = \gamma$ وبهذا يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة:

(١) إذا فرضنا $\alpha > \beta$ فمن البديهي أن النص السابق يبقى صحيحاً.

(٢) تدعى المبرهنة السابقة، عادةً، مبرهنة القيم الوسطى.

١٣) مبرهنة:

لتكن $G = \{A_i / i \in I\}$ جماعة غير خالية من المجموعات المترابطة A_i في فضاء مثل X. ولنفرض أنّ $A_i \cap A_j \neq \Phi$ لأجل كل عنصرين مختلفين A_i, A_j من الجماعة G. ولنفرض أنّ $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. عندئذ:

تكون المجموعة A مترابطة.

الإثبات:

لنأخذ الفضاء الجزئي A، وليكن $f : A \to D$ تابعاً مستمراً. عندها يمكن القول إن مقصور f على A_i يكون ثابتاً مهما يكن i من I [انظر المبرهنة (٧)].

ليكن A_{i_0} أيّ عنصر من الجماعة G. عندئذ، يكون f ثابتاً على A_{i_0}، وبالتالي يمكننا أنْ نكتب: $f(x) = b$ أياً كان x من A_{i_0}.

ثم، ليكن y أيّ عنصر من A. عندئذ يوجد $j \in I$ بحيث يكون $y \in A_j$. فإذا كان $A_j = A_{i_0}$ فإن $f(y) = b$. وإذا كان $A_j \neq A_{i_0}$ فإنّ $A_j \cap A_{i_0} \neq \Phi$، ويعني هذا وجود عنصر مثل z بحيث يكون $z \in A_{i_0}$ و $z \in A_j$، وبالتالي يكون $f(z) = b$.

ولما كان f ثابتاً على A_j فإنّ $f(u) = b$ أياً كان $u \in A_j$، وبالتالي $f(y) = b$. ومن ثم فإن f يكون ثابتاً على A.

إذن A تكون مترابطة.

١٤) نتيجة:

إذا كانت $G = \{A_i / i \in I\}$ جماعة غير خالية من المجموعات المترابطة A_i في فضاء مثل X، وإذا كان $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \Phi$، فإنّ المجموعة $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ تكون مترابطة.

البرهان:

بالاستفادة من المبرهنة (١٣).

١٥) تعريف:

ليكن X أيّ فضاء. ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من X. يقال عن A إنها **مركّبة** للفضاء X إذا وإذا فقط كانت المجموعة A مترابطة ولا توجد في X أية مجموعة جزئية مترابطة مثل B بحيث يكون $B \supsetneqq A$.

١٦) مبرهنة:

ليكن X أيّ فضاء. ولتكن H أية مجموعة جزئية غير خالية من X. عندئذ:
إذا كانت المجموعة الجزئية H مترابطة فإنه توجد لهذا الفضاء X مركبة مثل C بحيث يكون $H \subseteq C$.

الإثبات:

لنفرض أن H مجموعة جزئية مترابطة في X، حيث $H \neq \Phi$.
ولنأخذ الجماعة:

$$G = \{A / \text{مجموعة جزئية مترابطة في } X \quad A \supseteq H\}$$

فنجد أن $G \neq \Phi$ لأن $H \in G$، كما نجد أيضاً أنه أياً كان $A_1, A_2 \in G$ فـإنّ $A_1 \cap A_2 \supseteq H \neq \Phi$. ومنه، بفـرض $C = \bigcup_{A \in G} A$، نسـتنتج أنّ C تكـون مترابطة استناداً إلى المبرهنة(١٢).

لنفرض الآن، جدلاً أنه توجد في X مجموعة جزئية مترابطة مثـل B بحيـث يكون $B \supsetneqq C$، ومن ثم يكون $B \supsetneqq H$، وبالتالي $B \in G$ وبالتالي $C \supseteq B$ مما يناقض كون $B \supsetneqq C$.

إذن C تكون مركبة للفضاء X وتحقق الشرط $C \supseteq H$، وبـذلك يـتم إثبـات المطلوب.

١٧) تعريف:

يُقال عن فضاء مثل X إنه **مترابط موضعياً** إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:
أياً كانت النقطة x من X وأياً كان الجوار U للنقطة x فإنه يوجد جوار مترابط مثل V للنقطة x بحيث يكون $V \subseteq U$.

مثال: أيّ فضاء متري متقطع يكون مترابطاً موضعياً. (برهن ذلك).

١-١٩- تمارين محلولة:

١) لتكن A,B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء متري مزود بمسافة مثل d. يرمز **للمسافة بين المجمـوعتين** A,B بالرمز $d(A,B)$ وتعرّف كما يلي:

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

وكحالة خاصة، يرمز **لبعد نقطة** مثل x من X **عـن المجموعـة** A بـالرمز $d(x,A)$ ويعـرّف بأنـه المسـافة بـين المجمـوعتين $\{x\}$ و A، أيْ: $d(x,A) = d(\{x\},A)$.

المطلوب:

(١) أثبت أنّ $0 \le d(A,B) < +\infty$ وأنّ $d(A,B) = d(B,A)$ وأنه: أياً كان $a \in A$ فإنّ $0 \le d(x,A) \le d(x,a)$.

(٢) أثبت أنه إذا كان $A \cap B \neq \Phi$ فإنّ $d(A,B) = 0$ ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

(٣) أثبت أنّ $d(A,B) = \inf\{d(a,B) / a \in A\}$.

(٤) أثبت انه أياً كان $x, y \in X$ فإنّ:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

الحل:

(١) ينتج من التعريف مباشرة.

(٢) إذا كان $A \cap B \neq \Phi$ فإن العدد 0 سينتمي إلى المجموعة:

$$\{d(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

وبالتالي يكون $d(A,B)=0$. أما العكس فهو غير صحيح في الحالة العامة بملاحظة المثال التالي:

بفرض $A=\{\frac{1}{n}/n\in N^*\}$ و $B=\{0\}$ في الفضاء R نجد أنّ:

$$d(A,B)=d(B,A)=d(0,A)=\inf\{\left|0-\frac{1}{n}\right|/n\in N^*\}=0$$

في حين أن $A\cap B=\Phi$.

(٣) لنفرض أن $\gamma=\inf\{d(a,B)/a\in A\}$. عندئذ، أياً كان $a\in A,b\in B$ فإنّ $\gamma\le d(a,B)\le d(a,b)$ وبالتالي $\gamma\le d(A,B)$.

لنفرض مؤقتاً أنّ $\gamma\ne d(A,B)$ فيكون $\gamma<d(A,B)$. ومنه، يوجد $a_0\in A$ بحيث يكون $d(a_0,B)<d(A,B)$، وبالتالي:

$$\inf\{d(a_0,b)/b\in B\}<\inf\{d(a,b)/a\in A,b\in B\}$$

وبالتالي يوجد $b_0\in B$ بحيث يكون:

$$d(a_0,b_0)<\inf\{d(a,b)/a\in A,b\in B\}$$

وهذا يناقض كون $\inf\{d(a,b)/a\in A,b\in B\}\le d(a_0,b_0)$.

(٤) ليكن $x,y\in X$. عندئذ، من أجل كل z من A يكون:

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

ومن ثم:

$$d(x,A)=\inf\{d(x,z)/z\in A\}\le\inf\{d(x,y)+d(y,z)/z\in A\}$$
$$=d(x,y)+\inf\{d(y,z)/z\in A\}=d(x,y)+d(y,A)$$

وبصورة مماثلة يكون $d(y,A)\le d(x,y)+d(x,A)$

ومنه $-d(x,y)\le d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)$ وهو المطلوب.

٢) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري X مزوّد بمسافة مثل d. يرمز **لقطر المجموعة** A بالرمز $\delta(A)$ ويعرّف كما يلي:

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y)/x,y\in A\}$$

ويكون $0\le\delta(A)\le+\infty$. والمطلوب إثبات صحة القضايا التالية:

(١) إذا كان $\Phi\ne A\subseteq B$ فإنّ $\delta(A)\le\delta(B)$.

(٢) $[\delta(A)=0]\Leftrightarrow[A$ مؤلفة من عنصر واحد فقط$]$

(٣) $\delta(B(x,\varepsilon))\le 2\varepsilon$

الحل:

(١) لنفرض أن $\Phi\ne A\subseteq B$ وأن $\gamma=\delta(B)$. عندئذ يكون $d(b_1,b_2)\le\gamma$ لأجل كل نقطتين b_1,b_2 من B، وبالتالي يكون $d(a_1,a_2)\le\gamma$ من أجل كل نقطتين a_1,a_2 من A، ومن ثم $\delta(A)\le\gamma$ وهو المطلوب الأول.

(٢) لنفرض أنّ $\delta(A)=0$. ولنفرض جدلاً أن A تتألف من عنصرين مختلفين، اثنين على الأقل، مثل a_1,a_2. عندئذ يكون $d(a_1,a_2)>0$ وبالتالي، من كل ذلك، يكون:

$$0=\delta(A)=\sup\{d(x,y)/x,y\in A\}\ge d(a_1,a_2)>0$$

وهذا غير ممكن.

إذن A تتألف من عنصر على الأكثر. وبما أن $A\ne\Phi$ فإنها تتألف من عنصر واحد فقط.

وبالعكس، إذا كانت $A=\{a\}$ فإنه من الواضح أن $\delta(A)=0$.

(٣) إذا كان $y,z\in B(x,\varepsilon)$ فإنّ $d(y,x)<\varepsilon, d(z,x)<\varepsilon$

وبالتالي $d(y,z)\le d(y,x)+d(x,z)<2\varepsilon$

إذن $\delta(B(x,\varepsilon))=\sup\{d(y,z)/y,z\in B(x,\varepsilon)\}\le 2\varepsilon$

٣) ليكن X أيّ فضاء. ولتكن x أيّة نقطة من X. ولتكن A أية مجموعة جزئية من X. يقال عن x إنها **داخلية** في A إذا وفقط إذا كانت A جواراً لـ x.
هذا ويرمز لمجموعة النقط الداخلية في A بالرمز A° وتدعى هذه المجموعة A° **داخل المجموعة** A.

ويقال عن x إنها **خارجية** عن A إذا وفقط إذا كانت x داخلية في $X-A$.
ويرمز لمجموعة النقط الخارجية عن A بالرمز $Ext(A)$ وتسمى **خارج المجموعة** A.

كما يقال عن x إنها **محيطية** بالنسبة إلى A إذا وفقط إذا كانت x ملاصقة لـ A وملاصقة لـ $X-A$. ويرمز لمجموعة النقط المحيطية لـ A بالرمز $Fr(A)$ وتسمى **محيط المجموعة** A.

وأخيراً، يقال عن x إنها **منعزلة** في A إذا وفقط إذا كانت $x \in A$ و $x \notin A'$، حيث $A' = D(A)$.

المطلوب هو إثبات صحة القضايا التالية:

(١) $A^\circ \subseteq A$

(٢) A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

(٣) A مفتوحة $\Leftrightarrow A = A^\circ \Leftrightarrow A$ جوار لكل عنصر من عناصرها.

(٤) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$، حيث A, B مجموعتان جزئيتان في الفضاء المدروس.

(٥) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(X-A)}$

(٦) $\overline{A} = A \cup Fr(A)$

(٧) A مغلقة $\Leftrightarrow Fr(A) \subseteq A$

(٨) مجموعة النقط المنعزلة في A هي $\overline{A} - D(A)$.

الحل:

(١) واضح من التعريف.

(٢) لنفرض أن H تساوي اجتماع جميع تلك المجموعات المفتوحة التي كل منها محتواة في A. ولنبرهن أولاً أن $H = A^\circ$ كما يلي:

لتكن $x \in H$. عندئذ، توجد مجموعة مفتوحة مثل V بحيث يكون $V \subseteq A$ و $x \in V$. ومنه، يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon) \subseteq V \subseteq A$ ويعني هذا أن A جوار لـ x وبالتالي $x \in A^\circ$.

وبالعكس، ليكن $y \in A^\circ$. عندئذ تكون A جواراً لـ y وبالتالي يوجد $r > 0$ بحيث يكون $B(y,r) \subseteq A$. ومنه، باعتبار أنّ $y \in B(y,r)$ و $B(y,r)$ مجموعة مفتوحة، ينتج أنّ $y \in H$.

إذن $A^\circ = H$. ومنه A° تكون مجموعة مفتوحة ومحتواة في A.

ثم، إذا كانت K أية مجموعة مفتوحة بحيث $K \subseteq A$ فإنّ $K \subseteq H = A^\circ$.

إذن A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

(٣) يترك للقارئ.

(٤) إنّ $\overline{A \cup B}$ مغلقة وتحوي كلاً من A, B، وبالتالي:
$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A}$ و $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{B}$ ومن ثم $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

ومن جهة أخرى، بما أنّ $\overline{A} \cup \overline{B}$ مغلقة وتحوي $A \cup B$ فإنّ $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$.

(٥) واضح من التعريف.

(٦) من الواضح أنّ $A \subseteq \overline{A}$ و $Fr(A) \subseteq \overline{A}$ وبالتالي $A \cup Fr(A) \subseteq \overline{A}$.

وبالعكس، ليكن $x \in \overline{A}$. عندها توجد حالتان:

الحالة الأولى: $x \notin A$. عندئذ يكون $x \in X - A$ وبالتالي $x \in \overline{X-A}$.
ومنه $x \in \overline{A} \cap \overline{(X-A)} = Fr(A) \subseteq A \cup Fr(A)$.

الحالة الثانية: $x \in A$. عندئذ $x \in A \bigcup Fr(A)$.

أيْ أن $\overline{A} \subseteq A \bigcup Fr(A)$.

(٧) لنفرض أن A مغلقة. عندئذ $A = \overline{A} = A \bigcup Fr(A)$ وبالتالي $Fr(A) \subseteq A$.

وبالعكس، لنفرض أن $Fr(A) \subseteq A$. عندئذ $\overline{A} = A \bigcup Fr(A) = A$ وبالتالي تكون A مغلقة.

(٨) يترك للقارئ.

٤) لتكن B مجموعة جزئية في فضاء مثل X. ولتكن A مجموعة جزئية مفتوحة في X. أثبت أنّ: $A \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcap B}$.

الحل:

لتكن $x \in A \bigcap \overline{B}$. عندها $x \in \overline{B}$ و $x \in A$. لنأخذ كرة مفتوحة مركزها x، ولتكن $B(x,r)$، فتكون $B(x,r) \bigcap A$ مجموعة مفتوحة وتحوي x. وبما أن $x \in \overline{B}$ فإنّ $(B(x,r) \bigcap A) \bigcap B \neq \Phi$ وبالتالي $B(x,r) \bigcap (A \bigcap B) \neq \Phi$ ومن ثم $x \in \overline{A \bigcap B}$.

٥) ليكن (X,d) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من X و $x \in X$. المطلوب إثبات صحة القضايا التالية:

(١) $[d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}]$

(٢) الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة تجمع لـ A هو أن تحوي كل كرة مفتوحة مركزها x مثل $B(x,r)$ عدداً غير منته من عناصر $A-\{x\}$.

(٣) إذا كانت A منتهية فإن $D(A) = \Phi$ وإن A تكون مغلقة.

(٤) إذا كانت $D(A) \neq \Phi$ فإن A تكون غير منتهية.

(٥) إذا كانت A مغلقة فإنها تساوي تقاطع متوالية متناقصة من المجموعات المفتوحة.

(٦) إذا كانت A مفتوحة فإنها تساوي اجتماع متوالية متزايدة من المجموعات المغلقة.

الحل:

(١) لنفرض أن $x \in \overline{A}$ وأن n عدد طبيعي مغاير للصفر. عندئذ: $B(x,\frac{1}{n}) \bigcap A \neq \Phi$، وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث يكون $d(x,a) < \frac{1}{n}$.

ومنه $0 \le d(x,A) < \frac{1}{n}$ لأجل كل $n \ge 1$.

إذن $d(x,A) = 0$.

وبالعكس، ليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. فبما أنّ:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) / a \in A\} = 0 < \varepsilon$$

فإنه يوجد $y \in A$ بحيث يكون $d(x,y) < \varepsilon$، وبالتالي $y \in B(x,\varepsilon)$. ومنه يمكن القول:

أياً كان $\varepsilon > 0$ فإن $B(x,\varepsilon) \bigcap A \neq \Phi$، وهذا يقتضي أن $x \in \overline{A}$.

(٢) لنفرض أن كل كرة مفتوحة مركزها x مثل $B(x,r)$ تحوي عدداً غير منته من عناصر $A-\{x\}$ فهذا يؤدي إلى أن $x \in D(A)$.

وبالعكس، لنفرض أنّ $x \in D(A)$. ولنفرض مؤقتاً أن ثمة $\varepsilon > 0$ بحيث يكون:

$$B(x,\varepsilon) \bigcap (A-\{x\}) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

ولنأخذ

$$r = \min\{d(x,x_1), ..., d(x,x_n)\}$$

فيكون $r > 0$ و $B(x,r) \bigcap (A - \{x\}) = \Phi$ وهذا يناقض كون $x \in D(A)$. إذن فالفرض المؤقت خاطئ ونفيه صحيح وهو المطلوب.

(٣) لنفرض أنّ A منتهية. ولنفرض جدلاً أن $D(A)\neq\Phi$. عندها توجد $x\in X$ بحيث $x\in D(A)$. ومنه، حسب (٢)، تكون A غير منتهية مما يناقض الفرض الأساسي.

لنفرض أن A غير مغلقة. عندئذ $D(A)\not\subseteq A$ وبالتالي يوجد $x\in D(A)$ بحيث $x\notin A$. ومنه تكون A غير منتهية مما يناقض كون A منتهية.

إذن A مغلقة.

(٤) ينتج من (٣).

(٥) لنفرض أن A مغلقة. عندئذ $A=\overline{A}$. ولنأخذ، لأجل كل عدد حقيقي موجب تماماً مثل r، المجموعة: $V_r(A)=\{y / y\in X, d(y,A)<r\}$

فتكون $V_r(A)$ مفتوحة بملاحظة ما يلي:

ليكن $y\in V_r(A)$. عندئذ $d(y,A)<r$. ومنه يوجد $\varepsilon\in R$ بحيث يكون:

$0<\varepsilon<r-d(y,A)$ و $B(y,\varepsilon)\subseteq V_r(A)$

لأنه إذا كان $z\in B(y,\varepsilon)$ فإنّ $d(z,y)<\varepsilon<r-d(y,A)$

وبالتالي $d(y,A)<r-d(z,y)$، وبالتالي يوجد $a_0\in A$ بحيث يكون $d(y,a_0)<r-d(z,y)$، وبالتالي يكون:

$$d(z,a_0)\le d(z,y)+d(y,a_0)<r$$

وبالتالي يكون $d(z,A)\le d(z,a_0)<r$

ومن ثم $z\in V_r(A)$.

نلاحظ أن $V_1(A)\supseteq V_{\frac{1}{2}}(A)\supseteq ......\supseteq V_{\frac{1}{n}}(A)\supseteq ......$

كما إن $A=\overline{A}=\bigcap_{n\ge1}V_{\frac{1}{n}}(A)$ بملاحظة ما يلي:

$$x\in\overline{A}\Rightarrow d(x,A)=0<\frac{1}{n},(\forall n\ge1)\Rightarrow x\in V_{\frac{1}{n}}(A),(\forall n\ge1)$$

$$\Rightarrow x\in\bigcap_{n\ge1}V_{\frac{1}{n}}(A)$$

وبالعكس، فإنّنا نجد:

$$x\in\bigcap_{n\ge1}V_{\frac{1}{n}}(A)\Rightarrow d(x,A)<\frac{1}{n},(\forall n\ge1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x,A)=0\Rightarrow x\in\overline{A}$$

(٦) يترك للقارئ.

٦) ليكن $f:X\to Y$ تابعاً، حيث $(X,d),(Y,\rho)$ فضاءان متريان و $x_0\in X$. أثبت أن القضايا الآتية متكافئة:

(١) f مستمر في x_0.

(٢) أياً كان الجوار U للنقطة $y_0=f(x_0)$ فإنه يمكن إيجاد جوار للنقطة x_0 مثل V بحيث يكون $f(V)\subseteq U$.

(٣) أياً كان الجوار V للنقطة $f(x_0)$ في Y فإن المجموعة $f^{-1}(V)$ تكون جواراً لـ x_0 في X.

(٤) أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً ε فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل δ بحيث يكون الاقتضاء الآتي صحيحاً:

$$x\in X, d(x_0,x)<\delta\Rightarrow\rho(f(x_0),f(x))<\varepsilon$$

(٥) أياً كانت الكرة المفتوحة $B(f(x_0),\varepsilon)$ التي مركزها $f(x_0)$ فإنه توجد كرة مفتوحة، مركزها x_0، مثل $B(x_0,\delta)$ بحيث يكون $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$.

الحل:

(١)⇐(٢):

لنفرض أن القضية (١) صحيحة. عندئذ، يمكننا أن نقول:

أياً كانت المتوالية (x_n) في X بحيث $x_n \to x_0$ فإن $f(x_n) \to f(x_0)$.

ثم لنفرض مؤقتاً أن القضية (٢) غير صحيحة. عندئذ، يمكننا أن نقول:

يوجد جوار للنقطة $f(x_0)$ مثل U بحيث يكون $f(V) \nsubseteq U$ لأجل كل جوار V للنقطة x_0.

ومنه، أياً كان n عدداً طبيعياً مغايراً للصفر فإن $f(B(x_0,\frac{1}{n})) \nsubseteq U$ وبالتالي ثمة $x_n \in B(x_0,\frac{1}{n})$ بحيث يكون $f(x_n) \notin U$، وهذا يعني أن $x_n \to x_0$ في حين أن المتوالية $(f(x_n))$ لا تتقارب من $f(x_0)$ بملاحظة أن جميع حدود المتوالية $(f(x_n))$ لا تنتمي إلى U.

وبذلك نكون قد حصلنا على تناقض مع (١). وبهذا تكون القضية (٢) صحيحة.

(٢) ⇐ (١):

لنفرض أن القضية (٢) صحيحة. ولنفرض أن (x_n) أية متوالية في X بحيث $x_n \to x_0$. ولتكن $U = B(f(x_0),\varepsilon)$ أية كرة مفتوحة مركزها $f(x_0)$ ونصف قطرها ε. عندها تكون هذه الكرة المفتوحة جواراً للنقطة $f(x_0)$، ومن ثم يوجد، حسب (٢)، جوار للنقطة x_0 مثل V بحيث يكون $f(V) \subseteq U$.

ومنه، بحسب تعريف الجوار، توجد كرة مفتوحة مثل $B(x_0,\delta)$ بحيث يكون $B(x_0,\delta) \subseteq V$ وبالتالي يكون $f(B(x_0,\delta)) \subseteq f(V) \subseteq U$.

ولكن $x_n \to x_0$ إذن يمكن إيجاد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N بحيث يكون $x_n \in B(x_0,\delta)$ عندما $n \ge N$، وبالتالي يكون $f(x_n) \in U$ عندما $n \ge N$. ومنه يمكن القول:

أياً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N بحيث يكون:

$$[n \ge N \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon]$$

وهذا يعني أن $f(x_n) \to f(x_0)$.

إذن f مستمر في x_0. وبذلك تكون القضية (١) صحيحة.

(٢) ⇐ (٣):

لنفرض أن القضية (٢) صحيحة. وليكن V أيّ جوار للنقطة $f(x_0)$ في Y. عندها يوجد جوار مثل U للنقطة x_0 في X بحيث يكون $f(U) \subseteq V$.

ومنه: $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$ وبالتالي يكون $f^{-1}(V)$ جواراً للنقطة x_0 في X.

وبذلك تكون القضية (٣) صحيحة.

(٣) ⇐ (٢):

لنفرض أن القضية (٣) صحيحة. وليكن V أيّ جوار للنقطة $f(x_0)$. عندئذ، يوجد الجوار $U = f^{-1}(V)$ للنقطة x_0 بحيث يكون:

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$$

وبذلك تكون القضية (٢) صحيحة.

(٢) ⇐ (٤):

لنفرض أن (٢) صحيحة. وليكن $\varepsilon > 0$. ولنأخذ الكرة المفتوحة $B(f(x_0),\varepsilon)$ التي مركزها $f(x_0)$ فتكون جواراً للنقطة $f(x_0)$. ومنه، حسب (٢)، يوجد جوار مثل V للنقطة x_0 بحيث يكون $f(V) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$.

ولما كان V جواراً لـ x_0 فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $B(x_0,\delta) \subseteq V$.

ومنه:

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

إذن، لأجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون الاقتضاء الآتي صحيحاً:

$$x \in X, d(x_0,x) < \delta \Rightarrow x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

(٤) ⇐ (٥):

لنفرض أن (٤) صحيحة. ولنأخذ الكرة المفتوحة الكيفية $B(f(x_0),\varepsilon)$ التي مركزها $f(x_0)$. عندئذ يوجد، من أجل العدد $\varepsilon > 0$، عدد مثل $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$x \in X, d(x_0,x) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_0),f(x)) < \varepsilon$$

ومنه توجد الكرة المفتوحة $B(x_0,\delta)$ بحيث يكون:

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

(٥) ⇐ (٢):

لنفرض أن(٥) صحيحة. وليكن V أيّ جوار للنقطة $f(x_0)$. عندها يوجد $r > 0$ بحيث يكون $B(f(x_0),r) \subseteq V$.

ومنه، حسب (٥)، توجد $B(x_0,\delta)$ بحيث يكون:

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),r) \subseteq V$$

ومنه، باعتبار أن الكرة المفتوحة $B(x_0,\delta)$ جوار لـ x_0، يمكن القول إن القضية (٢) تكون صحيحة.

٧) ليكن $f : X \to Y$ تابعاً، حيث (X,d) و (Y,ρ) فضاءان متريان. أثبت أن القضيتين الآتيتين متكافئتان:

(١) f مستمر.

(٢) أياً كانت المجموعة الجزئية B في X فإنّ: $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.

الحل:

(١) ⇐ (٢):

لنفرض أن f مستمر، وأنّ B أية مجموعة جزئية من X وأن $x \in \overline{B}$.
وليكن U أيّ جوار لـ $f(x)$.

عندئذ، تكون المجموعة $V = f^{-1}(U)$ جواراً للنقطة x وذلك حسب (٣) من المسألة (٦) السابقة لأن f مستمر في x. ومنه $V \cap B \neq \Phi$ (لماذا؟).

وبما أن $f(V \cap B) \subseteq f(V) \cap f(B)$ وأنّ $f(V) \subseteq U$ فإنّ $U \cap f(B) \neq \Phi$ [تحقق من كل ذلك].

ومنه $f(x) \in \overline{f(B)}$.

إذن فالقضية (٢) تكون صحيحة.

(٢) ⇐ (١):

لنفرض أن القضية (٢) صحيحة. ولتكن H أية مجموعة مغلقة في Y. ولنفرض أنّ $B = f^{-1}(H)$. عندئذ، بالاستفادة من (٢)، يكون:

$$f(\overline{B}) = f(\overline{f^{-1}(H)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(H))} \subseteq \overline{H} = H$$

ومنه $\overline{B} \subseteq f^{-1}(f(\overline{B})) \subseteq f^{-1}(H) = B$. ولما كان $B \subseteq \overline{B}$ فإننا نستنتج أن $B = \overline{B}$ وهذا يعني أن B مغلقة في X. ومنه، حسب المبرهنة (٩) في (١-١٣)، يكون f مستمراً.

٨) ليكن $f : X \to Y$ تابعاً، حيث (X,d) و (Y,ρ) فضاءان متريان. ولنفرض أن x_0 نقطة منعزلة في X. أثبت أن f يكون مستمراً في x_0.

الحل:

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أنّ x_0 منعزلة في X فمن الممكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث يكون $B(x_0,\delta) = \{x_0\}$.

إذن، لأجل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$x \in X, d(x_0,x) < \delta \Rightarrow x_0 = x \Rightarrow f(x_0) = f(x)$$
$$\Rightarrow \rho(f(x_0),f(x)) = 0 < \varepsilon$$

وهذا يعني أن f مستمر في x_0.

١-٢٠- تمارين للحل:

(١) ليكن d تابع مسافة على مجموعة غير خالية مثل X. ولنضع $\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ لأجل كل x,y من X. أثبت أن ρ تابع مسافة على X.

(٢) تحقق من صحة كل ما يلي:

١- كل مجال مفتوح مثل $]a,b[$، حيث $-\infty<a<b<\infty$، يكون مجموعة مفتوحة وغير مغلقة في الفضاء R. ولكن ليست كل مجموعة مفتوحة في R مجالاً مفتوحاً.

٢- مجموعة الأعداد الطبيعية $N=\{0,1,2,3,.....\}$ مغلقة وغير مفتوحة في R.

٣- كل مجال نصف مغلق (نصف مفتوح) مثل $]a,b]$ أو $[c,d[$، حيث $-\infty<a<b<\infty$ و $-\infty<c<d<\infty$، لا يكون مجموعة مفتوحة ولا مغلقة في R.

٤- مجموعة الأعداد الصحيحة Z مغلقة وغير مفتوحة في R.

٥- مجموعة الأعداد الكسرية $Q=\{\frac{a}{b}/a,b\in Z,b\neq 0\}$ غير مفتوحة وغير مغلقة في R. كما إنّ $Fr(Q)=R$.

٦- كل مجال مغلق في الفضاء R يكون مجموعة مغلقة وغير مفتوحة في R.

٧- المجموعة المشتقة لأيّ مجال، طرفاه a,b، هي المجال المغلق الذي طرفاه a,b، حيث $-\infty<a<b<\infty$.

٨- المجموعة $R-Q$ كثيفة في R.

(٣) هل المجموعة الجزئية $A=]1,11[\bigcup\{18,29\}$ مغلقة أم مفتوحة في R أم لا هذا ولا ذاك؟ ولماذا؟

(٤) إذا كانت A,B أيّ مجموعتين جزئيتين من فضاء متري مثل (X,d) فأثبت صحة كل مما يلي:

١- إذا كان $A\subseteq B$ فإنّ $A^\circ\subseteq B^\circ$ و $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

٢- $(A\bigcap B)^\circ=A^\circ\bigcap B^\circ$

٣- $X-\overline{A}=(X-A)^\circ$

٤- $X-A^\circ=\overline{(X-A)}$

٥- $Fr(A)=\overline{A}-A^\circ$

٦- $[A$ مفتوحة $\Leftrightarrow A\bigcap Fr(A)=\Phi]$

٧- $A^\circ=A-Fr(A)$

٨- المجموعات A° و $Fr(A)$ و $(F-A)^\circ$ غير متقاطعة مثنى مثنى.

٩- $X=A^\circ\bigcup Fr(A)\bigcup(F-A)^\circ$

١٠- $Fr(\overline{A})\subseteq F(A)$ و $Fr(A^\circ)\subseteq F(A)$

١١- $A^\circ=A-D(X-A)$

(٥) هل النص التالي صحيح أم لا؟ ولماذا؟ (ناقش):

إذا كانت x نقطة منعزلة في مجموعة جزئية مثل A من الفضاء R فإنّ $x\in D(R-A)$ وإنّ $x\in Fr(A)$.

اكتب التمرين (٥)

(٦) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية مثل V في فضاء متري مثل (X,d) مفتوحة هو أن تكون V اجتماعاً لجماعة من الكرات المفتوحة في هذا الفضاء.

B (٧) لنأخذ التطبيق (التابع) $f: R \to R^2$، حيث R و R^2 هما الفضاءان المتريان المألوفان بالنسبة للمسافة الإقليدية المناسبة، وحيث $f(x)=(x,x)$ من أجل كل x من R. أثبت أن f مستمر.

B (٨) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء متري مثل (X,d)، وكانت النقطة x_0 من الفضاء X نقطة ملاصقة لـ A، وكان التابع $f: X \to Y$ مستمراً في x_0، حيث (Y,ρ) فضاء متري، فأثبت أنّ النقطة $f(x_0)$ تكون ملاصقة للمجموعة الجزئية $f(A)$ في الفضاء Y.

? (٩) أثبت صحة كل مما يلي:

١- لنأخذ التابع $f: R \to R$، حيث $f(x)=x^2$ لأجل كل x من R.
عندئذ يكون f مستمراً، ويكون $f(]-1,1[)=[0,1[$. [ماذا تستنتج؟].

? ٢- لنأخذ التابع $f: R^* \to R$، حيث $R^* = R-\{0\}$ فضاء جزئي من R، وحيث $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لأجل كل x من R^*. عندئذ يكون f مستمراً، ويكون $f([1,+\infty[)=]0,1]$. [ماذا تستنتج؟].

٣- إذا كان $g: Y \to Z$ و $f: X \to Y$ تابعين، حيث X,Y,Z فضاءات مترية، وكانت $x_0 \in X$ و $h=g\circ f$، وكان f مستمراً في x_0 وكان g مستمراً في $f(x_0)$، فإن h يكون مستمراً في x_0.

٤- كل تابع ثابت يكون مستمراً على مجموعة تعريفه (منطلقه).

A ٥- لنأخذ التابع $f: R \to R$ المعرف بالصيغة:

$$f(x)=\begin{cases}0 & if \quad x\in Q\\ 1 & if \quad x\notin Q\end{cases}$$

(١٧) هو تركيب الدوال داخل صفنا؟

وذلك لأجل كل x من R، فيكون f غير مستمر في كل نقطة من R. ثم لنأخذ $\varphi: Q \to R$ (مقصور f على Q) فيكون $\varphi(x)=0$ لأجل كل x من Q، وبالتالي يكون φ مستمراً.

B (١٠) أثبت صحة كل مما يلي:

١- لنأخذ التابع $f:[0,1]\to R$ المعرف بالصيغة $f(x)=x^2$ لأجل كل x من $[0,1]$ فيكون f مستمراً بانتظام على $[0,1]$. (أثبت صحة ذلك بطريقتين إحداهما بالاستفادة من خواص التراص والأخرى باستخدام $\varepsilon-\delta$).

B ٢- النص الآتي صحيح حسب المبرهنة (١٠-١):
إذا كانت (x_{n_k}) متوالية جزئية من (x_n) في فضاء متري مثل (X,d)، وكانت $x_n \to x$ فإن $x_{n_k} \to x$.
بيّن بمثال أنّ العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.
إرشاد: خذ في الفضاء R المتوالية التي حدها العام $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$ وبرهن أنها غير متقاربة في R بالرغم من أنّ المتوالية الجزئية منها (x_{n_k}) متقاربة، حيث $n_k=2n$.

٣- إذا كان f,g تابعين مستمرين بانتظام، كل على منطلقه (مجموعة تعريفه) وكان التابع $h=g\circ f$ موجوداً فإنّ h يكون مستمراً بانتظام على منطلقه.

هو الدفتر P.82

٤- من المعلوم أن كل متوالية متقاربة تكون كوشية. بيّن أن العكس غير صحيح بالضرورة وذلك بأخذ المتوالية $(\dfrac{1}{n})$ في الفضاء الجزئي $]0,1]$ من R.

٥- إذا كانت (x_n) متوالية كوشية في فضاء متري مثل (X,d)، وكانت (x_{n_k}) متوالية جزئية منها، متقاربة من عنصر مثل x من X، فإنّ (x_n) تكون متقاربة من x.

(١١) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (X,d). ولنأخذ التطبيق (التابع) $f: X \to R$ المعرف بالصيغة $f(x)=d(x,A)$ لأجل كل x من X. أثبت أن f يكون مستمراً بانتظام على X.

(١٢) لنأخذ التابع $\rho: Z \times Z \to R$ المعرف كما يلي:

$$\rho(i,j)=\left|\frac{1}{i}-\frac{1}{j}\right| \quad if \quad i\neq 0 \quad and \quad j\neq 0$$

$$\rho(0,0)=0$$

$$\rho(0,i)=\rho(i,0)=\frac{1}{i} \quad if \quad i\neq 0$$

هل يكون ρ تابع مسافة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z أم لا؟ ولماذا؟.

وإذا كان الجواب إيجابياً فهل تتقارب المتوالية $\{n\}$ في الفضاء (Z,ρ).

(١٣) إذا كانت A أية مجموعة جزئية من فضاء متري مثل (X,d) فأثبت أنّ:

$$D(D(A))\subseteq D(A)$$

ثم ماذا يمكنك أن تقول عن $D(A)$ فيما إذا كانت مغلقة أم لا؟ ولماذا؟.

(١٤) أثبت أنه إذا كانت H مجموعة جزئية مفتوحة في فضاء متري مثل (X,d) فإنّ المجموعة $H\cup(X-H)^{\circ}$ تكون كثيفة في الفضاء X.

(١٥) لتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (X,d). ولتكن B مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء الجزئي Y. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون B مفتوحة في X هو أن تكون Y مفتوحة في X.

(١٦) إذا كان $f: R\to R$ تابعاً مستمراً فأثبت أن المجموعة $\{x/x\in R, f(x)\neq 0\}$ تكون مفتوحة.

(١٧) ليكن $0<t<1$ ولنفرض أن $f: X\to X$ تابع مستمر، حيث (X,d) فضاء متري تام. ولنفرض أن: $d(f(x),f(y))\le t.d(x,y)$ لأجل أيّ x,y من X. أثبت أن f مستمر بانتظام على X.

(١٨) لتكن (F_n) متوالية من المجموعات المغلقة وغير الخالية F_n في فضاء متري تام مثل (X,d) بحيث $F_n\supseteq F_{n+1}$ لأجل $n=1,2,3,....$. ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty}\delta(F_n)=0$، حيث $\delta(F_n)$ هو قطر F_n. أثبت أن المجموعة $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ تكون مؤلفة من عنصر واحد فقط.

(١٩) لتكن M مجموعة غير خالية في فضاء متري مثل (X,d). أثبت أنّ: $\delta(\overline{M})=\delta(M)$.

(٢٠) لنأخذ التابع $f: R\to R$ المعرف بالصيغة $f(x)=x^3$ لأجل كل x من R. المطلوب: هل f هوميومورفيزم (تصاكل) أم لا؟ ولماذا؟ ثم هل f منتظم الاستمرار على R أم لا؟ ولماذا؟

(٢١) ليكن لدينا التابع $f: X\to R$، حيث (X,d) فضاء متري و R هو الفضاء الحقيقي المألوف. ولنأخذ من أجل كل a من R المجموعات الآتية:

$$U_a=\{x/x\in X, f(x)<a\} \quad و \quad V_a=\{x/x\in X, f(x)>a\}$$

$$F_a=\{x/x\in X, f(x)\le a\} \quad و \quad G_a=\{x/x\in X, f(x)\ge a\}$$

أثبت أنّ القضايا الآتية متكافئة:

١- f مستمر.

٢- أياً كان a من R فإنّ كلاً من المجموعتين U_a و V_a تكون مفتوحة في X.

٣- أياً كان a من R فإنّ كلاً من المجموعتين F_a و G_a تكون مغلقة في X.

(٢٢) ليكن لدينا التابعان المستمران $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$، حيث (X,d) و (Y,ρ) فضاءان متريان. ولتكن:

$$A = \{x / x \in X, f(x) = g(x)\}$$

ولنفرض أنّ B مجموعة جزئية كثيفة في X. والمطلوب:

١- أثبت أنّ $X - A$ مفتوحة في X ثم استنتج أن A مغلقة في X.

٢- إذا كان $f(x) = g(x)$ لأجل كل x من B فأثبت أن $f = g$.

(٢٣) لتكن (x_n) و (y_n) متواليتين كوشيتين في فضاء متري مثل (X,d). أثبت أن المتوالية $(d(x_n, y_n))$ تكون متقاربة في الفضاء R.

(٢٤) ليكن (X,d) فضاء مترياً و (x_n) و (y_n) متواليتين فيه. ولنفرض أنّ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. والمطلوب:

١- إذا كانت (x_n) متقاربة من $a \in X$ فأثبت أنّ (y_n) تتقارب من a.

٢- إذا كانت (x_n) كوشية فأثبت أن (y_n) تكون كوشية أيضاً.

(٢٥) لنرمز بـ $C(X)$ لمجموعة المتواليات الكوشية في فضاء متري مثل (X,d). نقول عن عنصرين مثل (x_n) و (y_n) من $C(X)$ إنهما **متكافئان** إذا وفقط إذا كانت $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. ونستخدم الرمز $(x_n) \sim (y_n)$ للتعبير عن هذا التكافؤ. والمطلوب:

١- أثبت أن العلاقة الثنائية $\sim$ تكون علاقة تكافؤ على $C(X)$.

٢- إذا رمزنا بـ $\hat{X}$ لمجموعة جميع صفوف التكافؤ المقابلة لعلاقة التكافؤ $\sim$، ووضعنا: $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ حيث $\hat{x}$ هو صف

ex: 25,28

تكافؤ (x_n) و $\hat{y}$ هو صف تكافؤ (y_n)، فأثبت أن $\hat{d}$ تابع مسافة على $\hat{X}$، ثم هل الفضاء المتري $(\hat{X}, \hat{d})$ يكون تاماً أم لا؟ ولماذا؟

(٢٦) من المعلوم أن كل فضاء متري متراص يكون تاماً. بيّن أن العكس غير صحيح بالضرورة.

إرشاد: خذ الفضاء R.

(٢٧) أثبت صحة كل قضية من القضايا التالية:

١- كل مجموعة جزئية منتهية في فضاء متري تكون متراصة. P.101

٢- إذا كانت K, F مجموعتين جزئيتين في فضاء متري بحيث $F \subseteq K$ وكانت K متراصة وكانت F مغلقة في هذا الفضاء فإنّ F تكون متراصة. P.105

٣- إذا كانت F مغلقة في فضاء متري وكانت K متراصة (فيه) فإنّ $F \cap K$ تكون متراصة.

(٢٨) نقول عن فضاء متري مثل (X,d) إنه **متراص موضعياً** إذا وفقط إذا كان يوجد، من أجل كل نقطة x من X، جوار متراص لـ x في (X,d). والمطلوب: غير مطلوب

١- أثبت أن كل فضاء متري متقطع مثل (X,d) يكون متراصاً موضعياً، ولكنه لا يكون متراصاً إلا إذا كانت المجموعة X منتهية.

٢- أثبت أن الفضاء R يكون متراصاً موضعياً ولكنه ليس متراصاً.

٣- أثبت أن كل فضاء متري متراص يكون متراصاً موضعياً.

٤- لنفرض أن (X,d) فضاء متري متراص موضعياً. ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من X. عندئذ:

(أ) إذا كانت A مغلقة في X فأثبت أن الفضاء الجزئي A يكون متراصاً موضعياً.

(ب) إذا كانت A مفتوحة في X فأثبت أن الفضاء الجزئي A يكون متراصاً موضعياً.

(٢٩) بيّن أن للمعادلة $x+(\tan x)-1=0$ حلاً في المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(٣٠) لتكن A مجموعة جزئية متراصة وغير خالية في فضاء متري مثل (X,d). أثبت أنه من أجل كل مجموعة جزئية غير خالية مثل B من X توجد نقطة مثل $p\in A$ بحيث يكون $d(p,B)=d(A,B)$.

(٣١) لتكن A مجموعة جزئية متراصة وغير خالية في فضاء متري مثل (X,d). ولتكن B مجموعة جزئية مغلقة وغير خالية في X بحيث $A\cap B=\Phi$. أثبت أنّ $d(A,B)>0$.

(٣٢) لتكن A,B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين في فضاء متري مثل (X,d) بحيث $A\cap\overline{B}=\Phi$ و $\overline{A}\cap B=\Phi$. أثبت أن المجموعة $A\cup B$ تكون غير مترابطة.

(٣٣) أثبت أنه إذا حوى فضاء متري مثل (X,d) مجموعة جزئية مترابطة وكثيفة فيه فإن هذا الفضاء يكون مترابطاً.

(٣٤) ليكن (X,d) فضاء مترياً. نقول عن مجموعة جزئية مثل A إنها **مركبة** للفضاء X إذا كانت A مترابطة في X ولا توجد في X أية مجموعة جزئية مترابطة مثل B بحيث يكون $A\subsetneqq B$.

أثبت أن كل مركبة للفضاء X تكون مغلقة فيه.

(٣٥) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (X,d). ولتكن $x\in X$. والمطلوب إثبات صحة ما يلي:

١- $[d(x,A)>0 \Leftrightarrow x\in Ext(A)]$

٢- [A مغلقة $\Leftrightarrow d(y,A)>0$ لأجل أية نقطة y من $(X-A)$]

٣- إذا كانت x نقطة تجمع لـ A فإنّ كل كرة مفتوحة مركزها x تحوي مجموعة غير منتهية من عناصر A.

★★★★★★★★★★★

الفصل الثاني

الفضاءات التبولوجية

- تعاريف وأمثلة ومبرهنات
- إنشاء (توليد) التبولوجيا
- الفضاء المتور
- الفضاء التبولوجي الجزئي
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

الفصل الثاني

الفضاءات التبولوجية (الطبولوجية)

٢-١- تعريف:

لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولتكن τ جماعة من المجموعات الجزئية في X. تسمى τ "**تبولوجيا**" على X أو طبولوجيا على X إذا وفقط إذا حققت τ الموضوعات التالية:

(١) المجموعة الخالية Φ، والمجموعة X عنصران من τ.

(٢) اجتماع أي جماعة من عناصر τ هو عنصر من τ.

(٣) تقاطع أي جماعة منتهية من عناصر τ هو عنصر من τ.

تسمى الثنائية المؤلفة من المجموعة X ومن التبولوجيا τ **فضاء تبولوجياً** أو فضاء طبولوجياً، ويرمز له بـ (X,τ).

ونسمي عناصر الجماعة τ **بالمجموعات المفتوحة** للفضاء التبولوجي (X,τ).

ومن الشائع أن نشير للفضاء التبولوجي (X,τ) بـ X فقط وذلك إذا لم يؤد هذا العمل إلى أي التباس، فيجب التذكر دوماً أن الفضاء التبولوجي X هو X إضافة إلى التبولوجيا المزود بها.

ويتجلى هذا واضحاً لأنه من الممكن أن نعرّف أكثر من تبولوجيا على مجموعة معينة، وعندها التبولوجيات المختلفة تجعل من المجموعة ذاتها فضاءات تبولوجية مختلفة.

٢-٢- أمثلة مهمة:

١- لنفرض أن (X,d) فضاء متري، ولنأخذ جماعة كل المجموعات الجزئية المفتوحة في X (بالنسبة إلى d)، وذلك كما عرفناها في الفضاءات المترية. نجد أن هذه الجماعة تبولوجيا على X، وتسمى "**التبولوجيا المترية**"، أو "التبولوجيا المألوفة" على الفضاء المتري، أو "التبولوجيا المولدة بتابع المسافة d". وهكذا فإن كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي، غير أن العكس غير صحيح بالضرورة [انظر (٢-٢٧)]. والفضاءات المترية هي من أكثر الفضاءات أهمية في الفضاءات التبولوجية. وعندما نتحدث عن الفضاء المتري كفضاء تبولوجي، فإنه من المتفق عليه أن التبولوجيا عليه هي التبولوجيا المألوفة، ما لم يذكر خلاف ذلك صراحة.

٢- **التبولوجيا المألوفة على R**: من المعروف أن المجموعة المفتوحة في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف R هي المجموعة التي تكون كل نقطة منها مركزاً لمجال مفتوح محتوى في هذه المجموعة، على اعتبار أن الكرات المفتوحة في هذا الفضاء هي المجالات المفتوحة. ومن ذلك نستطيع القول: إنّ جماعة المجموعات التي كل منها اجتماع مجموعة من المجالات المفتوحة في R تشكل تبولوجيا على R وتسمى "التبولوجيا المألوفة" على R. برهن ذلك.

صوى الحل: لنفرض أن τ هذه الجماعة، أي أن كل عنصر من τ هو مجموعة تساوي اجتماعاً لمجموعة من المجالات المفتوحة في R. برهن أن τ تحقق شروط التعريف (٢-١).

٣- لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولنأخذ بمثابة التبولوجيا عليها جماعة كل المجموعات الجزئية للمجموعة X، أيْ 2^X. تسمى هذه "**التبولوجيا المتقطعة**" أو "التبولوجيا المنقطعة" أو "التبولوجيا الملساء"، ويسمى الفضاء عندها بالفضاء المتقطع.

إن الفضاء المتري المتقطع هو فضاء تبولوجي متقطع. بيّن ذلك.

٤- لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولنفرض أن: $\tau=\{\Phi,X\}$. إن τ تشكل تبولوجيا على X، تسمى "**التبولوجيا التافهة**"، أو "التبولوجيا الخشناء". تحقق من ذلك.

٥- لنفرض أن X مجموعة غير خالية، وأن τ تتألف من Φ ومن كل المجموعات الجزئية من X التي متمماتها منتهية، فإن τ تشكل تبولوجيا على X. ومنه يمكن القول:

إذا كانت X مجموعة منتهية، فإنه من السهل التحقق أن $\tau = 2^X$. أيْ أنّ τ عندها التبولوجيا المتقطعة.

أما إذا كانت X مجموعة غير منتهية، فإن Φ من τ تعريفاً، ومتممة X هي Φ، وهذه الأخيرة منتهية (عدد عناصرها صفر). أي أن X من τ.

لنفرض أن لدينا $\{A_i\}_{i=1}^n$ جماعة منتهية من عناصر τ، ولنأخذ تقاطعها $\bigcap_{i=1}^n A_i$، إذا كانت الجماعة خالية $(I=\Phi)$ فإن تقاطعها يساوي X. أما إذا كانت الجماعة ليست خالية وكان التقاطع خالياً، فهو من τ تعريفاً. وإذا لم يكن هذا التقاطع خالياً فإن:

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^n A_i'$$

ووفق الفرض فإن A_i' منتهية من أجل كل $1\le i\le n$، واجتماع عدد منته من المجموعات المنتهية مجموعة منتهية، ومن ثم فإن $\bigcap_{i=1}^n A_i$ من τ.

لنأخذ $\{A_i\}_{i\in I}$ أيّ جماعة من عناصر τ، ولنأخذ اجتماعها $\bigcup_{i\in I} A_i$ فنجد ما يلي:

إذا كانت الجماعة المذكورة خالية ($I=\Phi$)، فإن اجتماعها مجموعة خالية، وهي تعريفاً من τ.

وإذا كانت الجماعة ليست خالية ($I\neq\Phi$)، وجميع عناصرها مجموعات خالية، فإن اجتماعها عندها مجموعة خالية، وهي من τ.

وإذا كانت إحدى هذه المجموعات غير خالية، ولتكن A_{i_0} مثلاً، فإن:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' \subseteq A'_{i_0} \qquad (\text{لأن } A_{i_0}\subseteq \bigcup_{i\in I}A_i)$$

وبما أن A'_{i_0} منتهية فرضاً، فإن متممة الاجتماع مجموعة منتهية، أي أن الاجتماع من τ أيضاً.

٦- لنفرض أن a و b و c ثلاثة عناصر مختلفة، ولنضع: $X=\{a,b,c\}$، فإن الجماعة:

$$X=\{\Phi,\{a,b,c\},\{b\},\{a,b\},\{c,b\}\}$$

تكون تبولوجيا على X. برهن ذلك.

٧- لنفرض أن X مجموعة غير خالية، وأن a عنصر منها. ولنفرض أن الجماعة τ تتألف من كل المجموعات الجزئية A من X بحيث أن: $a\in A$ أو $A=\Phi$.

برهن على أن τ تبولوجيا على X.

٢-٣- تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء تبولوجي (X,τ) إنها **مغلقة** إذا كانت متممتها $A'=X-A$ مفتوحة في X، أي إذا كانت $X-A$ عنصراً من τ.

٢-٤- مبرهنة:

في أي فضاء تبولوجي (X,τ) يكون صحيحاً ما يلي:

(١) المجموعة الخالية Φ، والمجموعة X مغلقتان.

(٢) اجتماع أي جماعة منتهية من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(٣) تقاطع أي جماعة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

الإثبات:

يستنتج مباشرةً من (٢-١).

٢-٥- تعريف:

لصاقة أو **غلاقة** مجموعة جزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) هي تقاطع كل المجموعات المغلقة في X التي كل منها تحوي A. ويرمز لها بـ $\overline{A}$ أو ClA.

٢-٦- مبرهنة:

لنفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي، و A مجموعة جزئية من X عندئذ:

(١) إن لصاقة A هي مجموعة مغلقة تحوي A، ومحتواة في كل مجموعة مغلقة تحوي A، أي أن $\overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A في الفضاء X.

(٢) A مغلقة $\Leftrightarrow A=\overline{A}$.

برهن كل ذلك.

٢-٧- مبرهنة:

لنفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي، وأن A و B مجموعتان جزئيتان من X.
عندئذ:

(١) $\overline{\Phi}=\Phi$

(٢) $\overline{X}=X$

(٣) $A\subseteq \overline{A}$

(٤) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

(٥) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

[يترك برهانها للقارئ]

٢-٨- تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A في فضاء تبولوجي (X,τ) إنها **كثيفة** إذا كان: $\overline{A}=X$.

٢-٩- تمرين مشهور:

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً، و A مجموعة جزئية من X. برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون A كثيفة في X هو أن تتقاطع كل مجموعة مفتوحة غير خالية في X مع A.

صوى الحل: استخدم نقض الفرض وتعريف غلاقة مجموعة.

٢-١٠- تعاريف أخرى:

الجوار المفتوح لنقطة مثل x في فضاء تبولوجي مثل (X,τ) هو أيْ مجموعة مفتوحة في X تحوي x. ويعرّف جوار نقطة مثل x في فضاء تبولوجي

مثل (X,τ) بأنه أيْ مجموعة جزئية تحوي جواراً مفتوحاً للنقطة x. ويعمم ذلك بقولنا إن **جواراً مفتوحاً لمجموعة جزئية** في فضاء تبولوجي هو أي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء تحوي المجموعة المذكورة. وإنّ **جوار مجموعة جزئية** في فضاء تبولوجي هو أي مجموعة جزئية تحوي جواراً مفتوحاً للمجموعة المذكورة. كما أنّ كل جوار مفتوح لمجموعة جزئية يكون جواراً لها. ونقول عن جماعة من الجوارات المفتوحة لنقطة ما في فضاء تبولوجي إنها **قاعدة مفتوحة** لهذه النقطة [أو (قاعدة مفتوحة عند هذه النقطة) أو (أساس مفتوح لهذه النقطة)] إذا كان كل جوار لهذه النقطة يحوي عنصراً من هذه الجماعة.

٢-١١- أمثلة وتتمات:

(أ) لنفرض أن (X,d) فضاء متري، و x نقطة ما من X. عندئذ تكون الكرة المفتوحة التي مركزها x جواراً لهذه النقطة، وتكون جماعة كل هذه الكرات المفتوحة (المتمركزة في x) قاعدة مفتوحة للنقطة x.

كذلك فإنّ جماعة كل المجالات المفتوحة التي من الشكل $]a-\delta,a+\delta[$ في R (والمتمركزة في a من R) هي قاعدة مفتوحة للنقطة a.

وإذا كانت $x=(x_1,x_2)$ نقطة من R^2 فإنّ أيّ قرص مفتوح، مركزه x، مثل:

$$\{y\in R^2 : d(x,y)<\delta\neq 0\}$$

يكون جواراً للنقطة x، وتكون جماعة كل هذه الأقراص المفتوحة (المتمركزة في x) قاعدة مفتوحة للنقطة x.

(ب) **تعريف**: ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن A أية مجموعة جزئية من X، ولتكن $x\in X$. يقال عن x إنها نقطة **ملاصقة** للمجموعة A في الفضاء X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كان الجوار U للنقطة x فإن $U \cap A \neq \Phi$.

٢-١٢- مبرهنة:

لنفرض أنّ A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,τ)، عندئذ:

$\overline{A}=\{x \in X :$ كل جوار لـ x يتقاطع مع $A\}=$ مجموعة جميع النقط الملاصقة لـ A في الفضاء X

الإثبات:

لنضع $B=\{x \in X :$ كل جوار لـ x يتقاطع مع $A\}$. يكفي أنْ نبرهن أن $\overline{A}=B$ كما يلي:

لنبرهن أولاً أن $B \supseteq \overline{A}$ ولأجل هذا نفرض أنّ $x \in X$ بحيث $x \notin B$ وسنبرهن أنّ $x \notin \overline{A}$:

بما أن $x \notin B$ فثمة جوار مفتوح لـ x لا يتقاطع مع A (أيْ منفصل عن A)، ومن ثم فإنّ متممة هذا الجوار المفتوح هي مجموعة مغلقة تحوي A ولا تحوي x. ومنه، حسب تعريف غلاقة المجموعة، يكون $x \notin \overline{A}$.

لنبرهن الآن أن $\overline{A} \supseteq B$. لذلك نفرض أن $x \in X$ بحيث $x \notin \overline{A}$، ولنبرهن أنّ $x \notin B$:

من الفرض ومن تعريف غلاقة مجموعة فإن ثمة مجموعة مغلقة تحوي A ولا تحوي x. ومنه فمتممة هذه المجموعة تكون مجموعة مفتوحة ومنفصلة عن A وتحوي x، وبالتالي فهي جوار لـ x ولا تتقاطع مع A.

إذن $x \notin B$.

ملاحظة:

حل التمرين (٢-٩) بطريقة أخرى، وذلك باستخدام المبرهنة (٢-١٢).

٢-١٣- تعاريف:

لنفرض أنّ A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي مثل (X,τ).

نقول عن نقطة مثل x من A إنها **منعزلة** في A إذا كان لها جوار لا يحوي أية نقطة أخرى من نقاط A.

ونقول عن نقطة x من X إنها نقطة **حدية** لـ A أو نقطة تجمع لـ A أو نقطة تراكم لـ A إذا كان كل جوار لها يحوي نقطة من A مغايرة لـ x. ونسمي مجموعة النقاط الحدية لـ A **بالمجموعة المشتقة**، ونرمز لها بالرمز $D(A)$ [أو بالرمز A' حين لا يكون ثمة التباس].

٢-١٤- مبرهنة:

لنفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي مثل (X,τ). عندئذ:

(١) $\overline{A}=A\cup D$

(٢) [A مغلقة $\Leftrightarrow D(A)\subseteq A$]

الإثبات:

(١) لنفرض أن $x \notin \overline{A}$ فثمة جوار لـ x لا يتقاطع مع A وفق (٢-١٢). لذلك فإن x ليست من A وليست نقطة حدية لـ A. أي أن $x \notin A\cup D(A)$.

الآن، لنفرض أن $x \notin A\cup D(A)$، أي أن x ليست نقطة من A وليست نقطة حدية لـ A.

ومنه فإن ثمة جواراً لـ x منفصلاً عن A، وهذا يؤدي، وفق (٢-١٢)، إلى أنّ $x \notin \overline{A}$.

(٢) لنفرض أن A مغلقة، ومن ثم $A=\overline{A}$. وفق الجزء الأول (١) يكون $A=A\cup D(A)$، أي أن $D(A)\subseteq A$.

الآن، لنفرض أن $D(A) \subseteq A$، فيكون: $A = A \bigcup D(A)$، ومنه، وفق الجزء الأول، يكون $A = \overline{A}$، أي أن A مغلقة.

٢-١٥- مبرهنة:

أي مجموعة جزئية مغلقة مثل A، من فضاء تبولوجي، تساوي اجتماع مجموعتين منفصلتين، الأولى هي مجموعة النقاط المنعزلة في A، والثانية هي مجموعة النقاط الحدية لـ A.

الإثبات:

يكفي أن نلاحظ من (٢-١٣) أن أي نقطة في مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي إما أن تكون نقطة منعزلة للمجموعة، أو نقطة حدية للمجموعة، ولا يمكن أن تكون كلتيهما في آن واحد.

٢-١٦- تعريف:

لنفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي مثل X. إنّ **داخل** A هو اجتماع كل المجموعات الجزئية المفتوحة في A، ويرمز له بـ A°. ونقول عن أي نقطة من داخل A بأنها **نقطة داخلية** في A.

من الواضح أن داخل A هو مجموعة جزئية مفتوحة في A، وتحوي كل مجموعة جزئية مفتوحة في A، وأن [A مفتوحة $\Leftrightarrow A = A^\circ$].

كذلك فإن نقطة مثل x من A تكون داخلية في A إذا وفقط إذا كان هناك جوار لـ x محتوى في A.

[برهن كل ذلك].

٢-١٧- تعاريف أخرى:

لنفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X. إنّ **محيط** A هو $\overline{A'} \cap \overline{A}$، حيث نستخدم هنا الرمز A' للتعبير عن متممة A (أي $X - A$).

نسمي كل نقطة من محيط المجموعة A بنقطة محيطية للمجموعة A.

يستخدم، عادة، الرمز $Fr(A)$ للتعبير عن محيط A.

من الواضح أن محيط المجموعة A هو مجموعة مغلقة (تقاطع مغلقتين)، وهو يتألف من تلك النقاط x في X التي يكون كل جوار لها متقاطعاً مع A ومع A' (برّر ذلك). وأيضاً، يعرّف **خارج** A بأنه $(X - A)^\circ$ ونسمي كل نقطة من خارج المجموعة A بنقطة خارجية عن المجموعة A. ويرمز لخارج A بالرمز $Ext(A)$.

٢-١٨- مبرهنة:

إن أي مجموعة جزئية مغلقة مثل A، من فضاء تبولوجي، تساوي اجتماع مجموعتين منفصلتين، الأولى هي داخل المجموعة A، والثانية محيط A.

الإثبات:

يكفي أن نلاحظ من (٢-١٦) و(٢-١٧) أنّ أيّ نقطة في مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي إما أن تكون نقطة داخلية في المجموعة، أو نقطة محيطية للمجموعة، ولا يمكن أن تكون كلتاهما في آن واحد.

٢-١٩- مبرهنة:

لنفرض أن X مجموعة ما غير خالية، وأنه لدينا جماعة من المجموعات الجزئية من X بحيث إنها مغلقة بالنسبة لتقاطع أي عدد من عناصرها، ومغلقة

بالنسبة لاجتماع أيّ عدد منته من عناصرها. عندئذ تشكل جماعة متممات هـذه المجموعات تبولوجيا على X بحيث أنّ مجموعاتها المغلقة هي عناصر الجماعة المعطاة.

الإثبات:

يتم باستخدام $\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)' = \bigcap_{i\in I} F_i'$ ، $\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)' = \bigcup_{i\in I} F_i'$ ، وتعريف التبولوجيا، وتعريف المجموعة المغلقة في فضاء تبولوجي.

لقد لاحظنا أثناء تعريفنا للفضاء التبولوجي أن "المجموعـة المفتوحـة" كانـت "العبارة غير المعرفة" في البناء التبولوجي. حيث إنه لكل نظام رياضي لا بد من عبارات غير معرفة تصاغ به موضوعات هذا النظام. والمبرهنة السابقة بيّنـت أن "المجموعة المغلقة" يمكن أن تؤدي الغرض نفسه تماماً. هذا ومـن الجـدير بالذكر أنه من الممكن أن تقوم "الغلاقة" بالدور نفسه، وأن نأخذها كعبارة غيـر معرفة في دراستنا. وقد أولى الرياضيون هذا الجانب اهتماماً كبيراً فـي بدايـة بزوغ التبولوجيا كعلم. ووجدوا أن ثمة طرقاً عديدة ومختلفة لتعريـف الفضـاء التبولوجي، وهي طرق كلها متكافئة. بيد أن التجربة أقنعت جل الرياضيين، بعد عدة عقود، بأن لغة المجموعات المفتوحة هي أبسط تلـك الطـرق وأيسـرها وأكثرها طبيعية.

٢-٢٠- تعريف:

إذا كانت كل من τ_1, τ_2 تبولوجيا على مجموعة ما مثل X، فإننا نقـول إن τ_2 **أقوى من** τ_1 (أو أدق من τ_1) إذا كانت $\tau_1 \subseteq \tau_2$. كما يمكن التعبير عن ذلك بقولنا إن τ_1 **أضعف من** τ_2 (أو أخشن من τ_2).

إن التبولوجيا المتقطعة على مجموعة ما X هي أقوى من أيّ تبولوجيا على هذه المجموعة. والتبولوجيا التافهة أضعف من أي تبولوجيا على المجموعة نفسها. برّر كلاً من التسميتين "أدق" و"أخشن"؟.

٢-٢١- مبرهنة:

إن تقاطع أي جماعة $\{\tau_i\}_{i\in I}$ من التبولوجيات على مجموعة X هو تبولوجيـا على X.

الإثبات:

لنضع $\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$. عندها نجد ما يلي:

١- بما أن X و Φ من τ_i من أجل كل i من I، فإن X و Φ من τ.

٢- لنفرض أنّ: $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ عندئذ: $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau_i$ من أجل كل i من I. ومنه: $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau_i$ من أجل كل i من I، ومـن ثـم فإن $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$.

٣- لنفرض أنّ $\{A_j / j \in J\}$ أيـة جماعـة مـن عناصـر τ. عندئـذ $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_i$ من أجل كل i من I.

ومنه: $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$.

أي أن τ تبولوجيا على X. وهو المطلوب.

هذا ومن الواضح أن هذه التبولوجيا هي أضعف من أي تبولوجيـا τ_i معرفـة على X، مهما يكن i من I.

٢-٢٢- مثال معاكس:

ليس من الضروري أن يكون اجتماع أي جماعة من التبولوجيات على مجموعة X هو تبولوجيا على X.

لنأخذ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ المؤلفة من ثلاثة عناصر مختلفة، فنجد، وضوحاً، أن كلاً من:

$$\tau_2=\{\Phi,\{b\},X\} \text{ ، } \tau_1=\{\Phi,\{a\},X\}$$

تشكل تبولوجيا على X (تحقق من ذلك)، أما:

$$\tau_1\cup\tau_2=\{\Phi,\{a\},\{b\},X\}$$

فليست تبولوجيا على X. لماذا؟.

لاحظ من جديد أنه أمكن هنا تعريف التبولوجيتين τ_1,τ_2 على المجموعة X ذاتها وهذا يؤكد من جديد ما قلناه في (٢-١) بهذا الخصوص.

٢-٢٣- ملاحظة:

لنفرض أن X مجموعة ما غير خالية، وأن Ω جماعة من المجموعات الجزئية من X، أي أن $\Omega\subseteq 2^X$. فإن ثمة تبولوجيا "أصغرية" τ_0 على X تحوي Ω، بمعنى أنها أضعف من أي تبولوجيا على X تحوي Ω. ذلك لأن ثمة تبولوجيات على X تحوي Ω، إحداها – على الأقل– التبولوجيا المتقطعة. فإذا أخذنا تقاطع كل تلك التبولوجيات التي تحوي Ω، فإن الناتج هو تبولوجيا على X، وتحوي Ω. والأكثر من ذلك فإنها محتواة في كل تبولوجيا على X تحوي Ω. تسمى هذه **التبولوجيا الأصغرية** "التبولوجيا التي تولّدها جماعة المجموعات الجزئية Ω".

٢-٢٤- إنشاء[توليد] التبولوجيا:

سنبين الآن الخطوات الواجب اتباعها للوصول إلى التبولوجيا τ_0 المذكورة، وذلك انطلاقاً من الجماعة المعطاة Ω:

١- نأخذ الجماعة $\Omega_1=\Omega\cup\{\Phi,X\}$.

٢- نأخذ تلك الجماعة Ω_2 التي كل عنصر منها هو تقاطع عدد منته من عناصر Ω_1. أيْ:

$$[A\in\Omega_2 \Leftrightarrow \exists A_1,A_2,\dots,A_n\in\Omega_1 : A=\bigcap_{i=1}^{n} A_i]$$

وتجدر الإشارة إلى أن العدد الطبيعي n (الدال على عدد المجموعات $A_1,A_2,\dots,A_n$) يتغير، في الحالة العامة، بتغيّر المجموعة A.

ومن الواضح أن Ω_2 تكون مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي. (تحقق من ذلك).

٣- نأخذ الجماعة Ω_3، حيث إنّ كل عنصر منها هو اجتماع (منته أو غير منته) لعناصر من Ω_2. إن الجماعة Ω_3 هي التبولوجيا التي ولدتها الجماعة Ω المعطاة. ولإثبات ذلك يجب أن نبرهن على أن Ω_3 تبولوجيا على X، وتحوي Ω، ومحتواة في كل تبولوجيا على X تحوي Ω.

من الواضح أن: $\Omega\subseteq\Omega_1\subseteq\Omega_2\subseteq\Omega_3$. كذلك من الواضح أن كل تبولوجيا على X تحوي Ω ستحوي كلاً من $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ وذلك من تعريف التبولوجيا. أي أن Ω_3 محتواة في كل تبولوجيا على X تحوي Ω. فإذا أثبتنا أنّ Ω_3 تبولوجيا على X، فإنها ستكون أضعف تبولوجيا تحوي Ω،أي أنها ستكون التبولوجيا τ_0 المشار إليها آنفاً.

وببساطة فإن Ω_3 لا تحوي أي "فائض" من المجموعات المفتوحة إذا كان منطلقنا هو Ω. أو بصيغة أخرى فإنها أفضل التبولوجيات المنشودة من الناحية الاقتصادية.

وسنبرهن، الآن، أنّ Ω_3 تبولوجيا علىَ X:

١- إن X و Φ من Ω_3 إنشاء.

٢- إذا كانت A,B من Ω_3، فإنّ:

$$A=\bigcup_{i\in I} A_i , B=\bigcup_{j\in J} B_j , A_i , B_j \in \Omega_2 , \forall i\in I, \forall j\in J$$

ومنه:

$$A\bigcap B=\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}\left(A_i\bigcap B_j\right)$$

وبما أن Ω_2 مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي، فإن $A_i\bigcap B_j$ من Ω_2 (مهما يكن i من I، ومهما يكن j من J)، ومن ثم فإن $A\bigcap B$، كاجتماع لعناصر من Ω_2، ينتمي إلى Ω_3 (وفق تعريف Ω_3).

وبالتدريج نبرهن أن Ω_3 مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

٣- إن Ω_3 مغلقة بالنسبة لاجتماع أي عدد من عناصرها، وذلك لأن كل عنصر من Ω_3 هو اجتماع عناصر من Ω_2، ومن ثم فإن اجتماع عناصر من Ω_3 هو اجتماع عناصر من Ω_2، وبالتالي فالناتج من Ω_3.

أيْ أن Ω_3 تبولوجيا على X. ومن ثم فإن: $\Omega_3=\tau_0$.

٢-٢٥- أمثلة:

أ- لنفرض أن X مجموعة ما غير خالية، و Ω جماعة المجموعات وحيدة العنصر. عندئذ:

$$\Omega_1=\Omega\bigcup\{\Phi,X\} \quad , \quad \Omega_2=\Omega_1 \quad , \quad \tau_0=\Omega_3=2^X$$

أي أن التبولوجيا التي تولدها جماعة المجموعات وحيدة العنصر هي التبولوجيا المتقطعة.

ب- لتكن Ω جماعة المجالات المفتوحة الممتدة إلى اليمين أو إلى اليسار في R، أي هي جماعة المجالات التي من الشكل:

$$]\leftarrow,a[=]-\infty,a[=\{x\in R : x<a\}$$

$$]a,\rightarrow[=]a,\infty[=\{x\in R : x>a\}$$

حيث $a\in R$، عندئذ:

$\Omega_1=\Omega\bigcup\{\Phi,R\}$ و $\Omega_2=J$ (مجموعة المجالات المفتوحة)

$\tau_0=\Omega_3=R$ التبولوجيا المألوفة على

جـ- لنأخذ المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ المؤلفة من أربعة عناصر. ولنأخذ الجماعة Ω من المجموعات الجزئية من X:

$$\Omega=\{\{a,b\},\{b,c\},\{d\}\}$$

أوجد التبولوجيا التي تولدها الجماعة Ω.

٢-٢٦- تعريف:

نقول عن فضاء تبولوجي مثل (X,τ) إنه **متور** (قابل للتعبير عنه مترياً) إذا وجد تابع مسافة مثل d على X بحيث تكون التبولوجيا المولّدة بـ d هي التبولوجيا τ المفروضة نفسها. أي أن الفضاء التبولوجي المتور هو في الحقيقة فضاء متري.

٢-٢٧- أمثلة:

١- إن R فضاء متور، لأن التبولوجيا المولدة بتابع المسافة المألوف $d(x,y)=|x-y|$ تساوي التبولوجيا المألوفة على R.

٢- إن أي فضاء تبولوجي متقطع مثل (X,τ) يكون متوراً لأنـه يمكـن تعريف المسافة المتقطعة على X فنجد أن τ تساوي التبولوجيا المولدة بهذه المسافة المتقطعة.

٣- لنأخذ $X=\{1,2\}$ و $\tau=\{\Phi,\{1\},X\}$ فيكون (X,τ) فضاء تبولوجياً (تحقق من ذلك)، وهذا الفضاء يكون غير متور للأسباب التالية:

لنفرض جدلاً أن (X,τ) متور، فتوجد، عندئذ، مسافة مثل d على X بحيث تكون التبولوجيا المولدة بـ d مساوية للتبولوجيا τ.

ثم لنفرض أن $r=d(1,2)$ فيكون:

$$B(2,r)=\{x\in X / d(2,x)<r\}=\{2\}$$

ويعني هذا أن $\{2\}$ مفتوحة وبالتالي $\{2\}\in\tau$ وهذا غير صحيح.

٢-٢٨- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً، و Y مجموعة جزئية غير خالية من X.

ولنضع:

$$\tau_Y=\{Y\cap A: A\in\tau\}$$

فإن τ_Y تكون تبولوجيا على المجموعة Y.

الإثبات:

١- إن Y من τ_Y لأن: $Y=Y\cap X$ و X من τ. كذلك فإن Φ من τ_Y لأن: $\Phi=Y\cap\Phi$ و Φ من τ.

٢- لنفرض أن B_1,B_2 من τ_Y، ومن ثم فإن: $B_1=Y\cap A_1$ و $B_2=Y\cap A_2$، حيث A_1,A_2 من τ. ومنه:

$$B_1\cap B_2=(Y\cap A_1)\cap(Y\cap A_2)=Y\cap(A_1\cap A_2)\in\tau_Y$$

لأن $A_1\cap A_2$ من τ.

وبالتدريج نبرهن على أن τ_Y مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

٣- لنأخذ الجماعة $\{B_i\}_{i\in I}\subseteq\tau_Y$. من تعريف τ_Y نجد أن: $B_i=Y\cap A_i$ حيث A_i من τ، وذلك من أجل كل i من I. ومنه:

$$\bigcup_{i\in I}B_i=\bigcup_{i\in I}(Y\cap A_i)=Y\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)\in\tau_Y$$

لأن $\bigcup_{i\in I}A_i$ من τ.

٢-٢٩- تعريف:

تسمى τ_Y **التبولوجيا النسبية على** Y. وباعتبار أن (Y,τ_Y) فضاء تبولوجي فيقال عن الثنائية (Y,τ_Y) إنها فضاء تبولوجي **جزئي** من الفضاء (X,τ) ويقال عن τ_Y أيضاً إنها تبولوجيا الفضاء الجزئي على Y، أو أثر التبولوجيا τ على Y. ويسمى كل عنصر من الجماعة τ_Y مجموعة مفتوحة في Y. وأحياناً يقال إنه أثر لمفتوحة في X على Y.

٢-٣٠- مثال:

لنأخذ المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$، المؤلفة من خمسة عناصر مختلفة، والتبولوجيا:

$$\tau=\{x,\Phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

على X ثم لنأخذ المجموعة $Y=\{a,d,e\}$، فنجد أنّ:

$$X\cap Y=Y \quad,\quad \{a\}\cap Y=\{a\} \quad,\quad \{a,c,d\}\cap Y=\{a,d\}$$

$$\Phi\cap Y=\Phi \quad,\quad \{c,d\}\cap Y=\{d\} \quad,\quad \{b,c,d,e\}\cap Y=\{d,e\}$$

ومن ثم فإن:

$$\tau_Y = \{Y, \Phi, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{d,e\}\}$$

هي التبولوجيا النسبية على Y.

تحقق من محتويات هذا المثال جميعها من حيث التبولوجيا على X والتبولوجيا النسبية على Y.

٢-٣١- مثال:

لنأخذ التبولوجيا المألوفة τ على R، والتبولوجيا النسبية τ_Y على المجال المغلق $Y=[3,8]$.

نلاحظ أن المجال المغلق – المفتوح $[3,5[$ من R مفتوح في التبولوجيا النسبية τ_Y، لأن:

$]2,5[\bigcap Y=[3,5[$، حيث $]2,5[$ مجموعة جزئية مفتوحة في R (أي أنها من τ).

ماذا تستنتج من ذلك؟

٢-٣٢- ملاحظة:

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجياً متقطعاً، فإن أي فضاء جزئي منه Y هو فضاء متقطع.

ذلك لأنه إذا كانت B أي مجموعة جزئية من Y، فإن: $B=Y\bigcap B$ وبما أن B مفتوحة في X، فإن $Y\bigcap B$ مفتوحة في Y، أي أن B من τ_Y. ومن ثم فإن أي مجموعة جزئية من Y ستكون من τ_Y.

كذلك فإن كل فضاء جزئي من فضاء تبولوجي تافه هو فضاء تافه أيضاً.

٢-٣٣- تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء تبولوجي جزئي مثل Y إنها **مغلقة** في Y إذا كانت متممتها بالنسبة إلى Y، $Y-A$، مفتوحة في Y.

٢-٣٤- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً، وليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئياً منه. إنّ الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية A من Y مغلقة في Y هو أن توجد في X مجموعة مغلقة مثل F بحيث يكون $A=Y\bigcap F$، (أي أن A تكون أثراً لمغلقة في X على Y).

الإثبات:

لنفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء Y الجزئي من الفضاء X. عندئذ نجد ما يلي:

A مغلقة في Y $\Leftrightarrow$ $(Y-A)$ مفتوحة في Y $\Leftrightarrow$ $(Y-A)\in\tau_Y$

$\Leftrightarrow$ توجد $H\in\tau$ بحيث يكون $Y-A=H\bigcap Y$

$\Leftrightarrow$ توجد في X مجموعة مغلقة F بحيث يكون $A=Y\bigcap F$

يطلب من القارئ التحقق من صحة هذه التكافؤات.

٢-٣٥- نتيجة:

(١) كل مجموعة جزئية غير خالية مثل Y من فضاء تبولوجي مثل (X,τ) تكون فضاء تبولوجياً جزئياً في X بالنسبة للتبولوجيا النسبية على Y.

(٢) إذا كان Y فضاء تبولوجياً جزئياً من فضاء تبولوجي مثل (X,τ) وكان Z فضاء تبولوجياً جزئياً من Y فإن Z يكون فضاء تبولوجياً جزئياً من X.

٢-٣٦- تمارين محلولة:

(١) لتكن x نقطة من فضاء تبولوجي مثل (X,τ). أثبت صحة كل مما يلي:

(أ) إذا كان U_1,U_2 جوارين للنقطة x فإنّ تقاطعهما يكون جواراً لـ x.

(ب) إذا كان U جواراً لـ x و $U\subseteq V\subseteq X$ فإن V تكون جواراً لـ x.

(حـ) اجتماع أيّ جماعة غير خالية من جوارات النقطة x يكون جواراً لـ x.

الحل:

(أ) لنفرض أن U_1,U_2 جواران لـ x. يوجد، عندئذ، $A_1,A_2\in\tau$ بحيث يكون $\{x\}\subseteq A_1\subseteq U_1$ و $\{x\}\subseteq A_2\subseteq U_2$. ومنه، توجد $A_1\bigcap A_2\in\tau$ بحيث يكون $\{x\}\subseteq A_1\bigcap A_2\subseteq U_1\bigcap U_2$. إذن U_1,U_2 جوار لـ x.

(ب) لنفرض أن U جوار لـ x وأن $U\subseteq V\subseteq X$. عندئذ، توجد $A\in\tau$ بحيث يكون $x\in A\subseteq U$ وبالتالي يكون $A\subseteq V$ وبالتالي تكون V جواراً لـ x.

(حـ) لتكن $\{V_i / i\in I\}$ أية جماعة غير خالية من الجوارات V_i للنقطة x، حيث $i\in I$. عندئذ، يمكننا أن نكتب: $V_i\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$ لأجل كل i من I. ومنه، حسب (ب)، يكون $\bigcup_{i\in I}V_i$ جواراً لـ x.

(٢) لتكن A,B مجموعتين جزئيتين من فضاء تبولوجي مثل (X,τ). نقول إن A **كثيفة بالنسبة لـ** B إذا وفقط إذا كان $B\subseteq\overline{A}$.

وكحالة خاصة، نقول إن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت A كثيفة بالنسبة لـ X، أيْ: $\overline{A}=X$.

أثبت أنه إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات جزئية من X بحيث أن A كثيفة بالنسبة لـ B وأنّ B كثيفة بالنسبة لـ C فإن A تكون كثيفة بالنسبة لـ C.

الحل:

لنفرض أن $C\subseteq\overline{B}$ و $B\subseteq\overline{A}$. عندئذ يكون: $C\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

(٣) لتكن A,B مجموعتين جزئيتين من فضاء تبولوجي مثل (X,τ). نذكّر بأنه يقال عن نقطة مثل x من X إنها **خارجية** عن A إذا وفقط إذا كانت x داخلية في $X-A$. يرمز عادة لمجموعة النقاط الخارجية عن A بالرمز $Ext(A)$ وتسمى "خارج المجموعة A" في الفضاء المدروس.

أثبت صحة كل مما يلي:

١- $A^\circ\subseteq A$، $X=X^\circ$، $\Phi=\Phi^\circ$.

٢- $(A^\circ)^\circ=A^\circ$

٣- $[A\subseteq B\Rightarrow A^\circ\subseteq B^\circ]$

٤- $(A\bigcap B)^\circ=A^\circ\bigcap B^\circ$

٥- $A^\circ=X-\overline{(X-A)}$

٦- $X-A^\circ=\overline{X-A}$

٧- $X-\overline{A}=(X-A)^\circ$

٨- $Fr(A)=Fr(X-A)$

٩- $Fr(A)=\overline{A}-A^\circ$

١٠- $Fr(A)=X-[A^\circ\bigcup(X-A)^\circ]$

١١- $\overline{A}=A\bigcup Fr(A)$

١٢- $A^\circ=A-Fr(A)$

١٣- [$Fr(A)\subseteq A \Leftrightarrow$ مغلقة A]

١٤- [$A\bigcap Fr(A)=\Phi \Leftrightarrow$ مفتوحة A]

١٥- [$x\in Ext(A) \Leftrightarrow$ يوجد $V\in\tau$ بحيث $x\in V$ و $V\bigcap A=\Phi$]

16- $Ext(A)=(X-A)^\circ = X-\overline{A}$

17- $\overline{A}=X-Ext(A)=X-(X-A)^\circ$

18- المجموعات A° و $Ext(A)$ و $Fr(A)$ غير متقاطعة مثنى مثنى، واجتماعها يساوي X، وذلك أياً كانت المجموعة الجزئية A من X.

19- $Ext(A\bigcup B)=Ext(A)\bigcap Ext(B)$

الحل:

1- يترك للقارئ.

2- بما أن A° مفتوحة فهي تساوي داخلها.

3- لنفرض أن $A\subseteq B$. ولتكن $x\in A^\circ$. عندئذ، يوجد جوار لـ x مثل V بحيث يكون $V\subseteq A$ وبالتالي يكون $V\subseteq B$. ومنه $x\in B^\circ$.

4- بما أن $A\bigcap B$ محتواة في كل من A,B فإن $(A\bigcap B)^\circ$ تكون محتواة في كل من A°,B° وذلك حسب (3). إذاً $(A\bigcap B)^\circ\subseteq A^\circ\bigcap B^\circ$.
من جهة أخرى، فإن $A^\circ\bigcap B^\circ\subseteq A\bigcap B$ بالاستفادة من (1). ولما كانت $A^\circ\bigcap B^\circ$ مفتوحة ومحتواة في $A\bigcap B$ فإن $A^\circ\bigcap B^\circ\subseteq(A\bigcap B)^\circ$.

5- لما كان $A^\circ\subseteq A$ فإن $X-A^\circ\supseteq X-A$. ومنه، بسبب كون $X-A^\circ$ مغلقة، يكون $X-A^\circ=\overline{X-A^\circ}\supseteq\overline{X-A}$ وبالتالي يكون: $A^\circ\subseteq X-\overline{X-A}$. ولكن $X-A\subseteq\overline{X-A}$ إذاً $A\supseteq X-(\overline{X-A})$، وبالتالي $A^\circ\supseteq X-(\overline{X-A})$ لأن $X-(\overline{X-A})$ مفتوحة ومحتواة في A.

6- ينتج من (5) بأخذ متممة الطرفين.

7- استناداً إلى (5) يمكننا أن نكتب:

$$(X-A)^\circ=X-(\overline{X-(X-A)})=X-\overline{A}$$

8- $Fr(X-A)=\overline{X-A}\bigcap\overline{X-(X-A)}=\overline{X-A}\bigcap\overline{A}=Fr(A)$

9- $Fr(A)=\overline{A}\bigcap\overline{X-A}=\overline{A}\bigcap(X-A^\circ)=\overline{X}-A^\circ$

10- $Fr(A)=\overline{A}\bigcap\overline{X-A}=$

$$=[X-(X-A)^\circ]\bigcap[X-(X-(X-A))^\circ]$$

$$=X-[(X-A)^\circ\bigcup A^\circ]$$

11- وضوحاً $A\bigcup Fr(A)\subseteq\overline{A}$. وبالعكس، ليكن $x\in\overline{A}$. فإذا كان $x\in A$ فإن $x\in A\bigcup Fr(A)$. أما إذا كان $x\notin A$ فإن $x\in X-A\subseteq\overline{X-A}$ وبالتالي:

$$x\in\overline{A}\bigcap\overline{X-A}=Fr(A)\subseteq A\bigcup Fr(A)$$

ومنه $\overline{A}\subseteq A\bigcup Fr(A)$.

12- ليكن $x\in A^\circ$. عندئذ، حسب (5)، يكون $x\notin\overline{X-A}$، وبالتالي $x\notin Fr(A)$. ولكن $x\in A^\circ\subseteq A$ إذاً $x\in A-Fr(A)$.
وبالعكس، ليكن $x\in A-Fr(A)$. عندئذ، $x\in A$، $x\notin Fr(A)$ وبالتالي $x\notin\overline{X-A}$، ومن ثم $x\in A^\circ$.

13- [A مغلقة $\Leftrightarrow A=\overline{A}=A\bigcup Fr(A)\Leftrightarrow Fr(A)\subseteq A$]

14- [A مفتوحة $\Leftrightarrow A=A^\circ=A-Fr(A)\Leftrightarrow A\bigcap Fr(A)=\Phi$]

15- ينتج من تعريف النقطة الخارجية عن مجموعة ويترك البرهان للقارئ.

16- ينتج بالاستفادة من تعريف داخل وخارج مجموعة وخواصهما ويترك البرهان للقارئ.

17- ينتج بالاستفادة من تعريف داخل وخارج مجموعة وخواصهما ويترك البرهان للقارئ.

18- القسم الأول من هذا الطلب سهل ويترك للقارئ. أما القسم الثاني فيبرهن كما يلي:

ليكن $x \in X$. إذا كان $x \notin A^\circ$ وَ $x \notin Ext(A)$ فإنّ كل جـوار مثـل V للنقطة x يحقق العلاقتين $V \cap A \neq \Phi$ وَ $V \cap (X-A) \neq \Phi$، وبالتالي: $x \in \overline{A} \cap \overline{X-A} = Fr(A)$ ومنه، يمكننا أن نكتب:

$$x \in A^\circ \cup Ext(A) \cup Fr(A)$$

إذاً $X \subseteq A^\circ \cup Ext(A) \cup Fr(A)$ وبالتالي تتحقق المساواة بين هـذين الطرفين.

١٩- $Ext(A \cup B) = X - \overline{A \cup B} = X - (\overline{A} \cup \overline{B})$

$$= (X - \overline{A}) \cap (X - \overline{B}) = Ext(A) \cap Ext(B)$$

وذلك بالاستفادة من (١٦) ومن المبرهنة (٢-٧).

لم يكتب

(٤) ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً و (Y,τ_Y) فضاء تبولوجياً جزئياً فيـه و A مجموعة جزئية من Y و y نقطة من Y. أثبت صحة القضايا التالية:

(أ) [A مغلقة في (Y,τ_Y) $\Leftrightarrow$ توجد في (X,τ) مجموعة مغلقـة مثـل H بحيث يكون $A = H \cap Y$]

(ب) [$y \in D(A)$ في (Y,τ_Y) $\Leftrightarrow$ $y \in D(A)$ في (X,τ)]

(حـ) $(\overline{A})_Y = Y \cap (\overline{A})_X$، حيـث $(\overline{A})_Y$ هـي لصـاقة A فـي (Y,τ_Y) و $(\overline{A})_X$ هي لصاقة A في (X,τ).

(د) $[(B \in \tau_Y \Rightarrow B \in \tau) \Leftrightarrow Y \in \tau]$

الحل:

(أ) A مغلقة في (Y,τ_Y) $\Leftrightarrow$ $Y - A$ مفتوحة في (Y,τ_Y) $\Leftrightarrow$ $(Y - A) \in \tau_Y$ $\Leftrightarrow$ توجد $V \in \tau$ بحيث يكون $Y - A = V \cap Y$ $\Leftrightarrow$ توجد في (X,τ) مجموعة مغلقة H بحيث يكون $A = H \cap Y$

(ب) لنفرض أن $y \in D(A)$ في (Y,τ_Y). ولـيكن $V \in \tau$ بحيـث $y \in V$. عندئذ، $y \in V \cap Y \in \tau_Y$ وبالتالي $(V \cap Y) \cap (A - \{y\}) \neq \Phi$ ومن ثـم $V \cap (A - \{y\}) \neq \Phi$ وهذا يعني أن $y \in D(A)$ في (X,τ).

وبالعكس، لنفـرض أن $y \in D(A)$ فـي (X,τ). ولـيكن $W \in \tau_Y$ بحيـث $y \in W$. عندئذ، يوجد $V \in \tau$ بحيث يكون $W = V \cap Y$. ولكـن $y \in V$ إذاً $V \cap (A - \{y\}) \neq \Phi$ وبالتالي:

$$W \cap (A - \{y\}) = (V \cap Y) \cap (A - \{y\}) = V \cap (Y \cap (A - \{y\})) \neq \Phi$$

وهذا يعني أنّ $y \in D(A)$ في (Y,τ_Y).

(حـ) بالاستفادة من (ب) ويترك البرهان للقارئ.

(د) لنفرض أن $Y \in \tau$. ولنفرض أن $B \in \tau_Y$. عندئذ، يوجـد $V \in \tau$ بحيـث يكون $B = V \cap Y$. ومنه $B \in \tau$.

وبالعكس، لنفرض أن الاقتضاء الآتي صحيح: $[B \in \tau_Y \Rightarrow B \in \tau]$ بما أن $Y \in \tau_Y$ فإنّ $Y \in \tau$ حسب الفرض.

(٥) لنفترض X مجموعة ما غير خالية و τ تبولوجيا علـى X و B جماعـة غير خالية من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ). نقـول إنّ هذه الجماعة B **أساس لـ** τ أو **قاعدة** لها إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كانت النقطة x من X وأياً كان الجوار U للنقطة x فإنه يوجد في B عنصر مثل V بحيث يكون $x \in V \subseteq U$. أثبت صحة ما يلي:

١- إذا كانت B تلك الجماعة المؤلفة من جميع المجالات المفتوحة في الفضـاء التبولوجي R، بالنسبة للتبولوجيا المألوفة على R، فإنّ B تكون أساسـاً لهـذه التبولوجيا.

٢- [B أساس للتبولوجيا τ على X $\Leftrightarrow$ كل مجموعة مفتوحة في X تساوي اجتماعاً لعناصر من B]

٣- ليس من الضروري أن تكون كل جماعة، من المجموعات الجزئية في مجموعة، أساساً لتبولوجيا على هذه المجموعة.

٤- لتكن B جماعة غير خالية من المجموعات. ولنفرض أن $Y=\bigcup_{V\in B} V$. عندئذ:

B أساس لتبولوجيا معينة على Y إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كان العنصران U,V من B وأياً كان العنصر x من $U\cap V$ فإنه يوجد في B عنصر مثل W بحيث يكون $x\in W\subseteq U\cap V$.

٥- لتكن S جماعة غير خالية من المجموعات. ولنأخذ الجماعة B المؤلفة من جميع التقاطعات المنتهية لعناصر S. عندئذ: تكون B أساساً لتبولوجيا معينة على المجموعة $E=\bigcup_{A\in S} A$.

الحل:

١- واضح.

٢- لنفرض أن B أساس للتبولوجيا τ. ولنفرض أن $U\in\tau$. ولنرمز بـ V لاجتماع جميع عناصر الأساس B التي كل منها محتوى في U. وليكن $x\in U$ عندئذ، يوجد في B عنصر مثل W بحيث يكون $x\in W\subseteq U$، وبالتالي $x\in V$. ومنه $U\subseteq V$. ومنه، باعتبار أن $V\subseteq U$، يكون $U=V$.

وبالعكس، لنفرض أن كل عنصر من τ يساوي اجتماعاً لعناصر من B. وليكن $x\in X$ و U جواراً لـ x. عندئذ، يوجد $W\in\tau$ بحيث يكون $x\in W\subseteq U$. وبما أن W تساوي، حسب الفرض، اجتماعاً لعناصر من B، فإنه يوجد $V\in B$ بحيث يكون $x\in V\subseteq W\subseteq U$. ومنه يمكن القول إن B أساس للتبولوجيا τ.

٣- **مثال:** لنأخذ الجماعة $S=\{A,H,X,\Phi\}$، حيث:

$$X=\{0,1,2\} \text{ ، } A=\{0,1\} \text{ ، } H=\{1,2\}$$

فلا توجد أية تبولوجيا على X بحيث تكون الجماعة S أساساً لها وذلك للأسباب التالية:

نفرض مؤقتاً أنه توجد تبولوجيا على X، ولتكن τ، بحيث أن S تكون أساساً لها. عندئذ $S\subseteq\tau$، وكل عنصر من τ يكون اجتماعاً لعناصر من S. فإذا كان $K\in\tau$ فإن K تساوي اجتماعاً لعناصر من S، وبالتالي فإنّ $K\in S$ وذلك لأنه يمكن التحقق بسهولة من أن اجتماع أية عناصر من S ينتمي إلى S. ومنه $\tau\subseteq S$ وبالتالي، يمكننا أن نكتب $S=\tau$ وهذا يعني أن S تكون تبولوجيا على X.

ومنه $\{1\}=A\cap H\in S$ وهذا غير صحيح.

٤- لنفرض أن B أساس لتبولوجيا معينة على Y. وليكن U,V أيّ عنصرين من B وليكن x أيّ عنصر من $U\cap V$. عندئذ، باعتبار أن $U\cap V$ مفتوحة، يوجد $W\in B$ بحيث يكون $x\in W\subseteq U\cap V$.

وبالعكس، لنفرض أن الشرط المذكور في النص محقق. ولنأخذ الجماعة τ المؤلفة من جميع تلك المجموعات التي كل واحدة منها تساوي اجتماعاً لعناصر من B، فتكون τ تبولوجيا على Y بملاحظة الآتي:

(أ) بما أنّ $Y=\bigcup_{V\in B} V$ فإنّ $Y\in\tau$. وبما أن Φ تساوي اجتماعاً لجماعة جزئية خالية من B فإننا نستنتج أن $\Phi\in\tau$.

(ب) ليكن U,V أيّ عنصرين من τ. إذا كان $x \in U \cap V$ فإنه يمكن إيجاد $U',V' \in B$ بحيث يكون $x \in U' \subseteq U$ و $x \in V' \subseteq V$، وبالتالي يوجد $W \in B$ بحيث يكون:

$$x \in W \subseteq U' \cap V' \subseteq U \cap V$$

وهذا يسمح بالقول إن $U \cap V$ تساوي اجتماعاً لعناصر من B، ومن ثم $U \cap V \in \tau$.

(حـ) إذا كانت $\{V_i / i \in I\}$ أيّة جماعة جزئية من τ وكانت $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ فإن V تساوي اجتماعاً لعناصر من B طالما أن كل مجموعة V_i تساوي اجتماعاً لعناصر من B، حيث $i \in I$، وبالتالي $V \in \tau$. وبذلك كله فإنّ τ تبولوجيا على Y.

والآن، بملاحظة أن $B \subseteq \tau$ وان كل عنصر من τ يساوي اجتماعاً لعناصر من B فإننا نستنتج أن B أساس للتبولوجيا τ على Y. وبذلك يتم إثبات الطلب (٤).

٥- إذا كان $A_1, A_2 \in B$ فإن $A_1 \cap A_2 \in B$. ومنه، حسب (٤)، نستنتج أنّ B تكون أساساً لتبولوجيا معينة على E.

(٦) يقال عن جماعة جزئية مثل S من تبولوجيا مثل τ (على مجموعة غير خالية مثل X) إنها أساس جزئي للتبولوجيا τ إذا وفقط إذا كانت جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر من S تشكل أساساً للتبولوجيا τ.

أثبت صحة ما يلي:

(أ) كل جماعة غير خالية مثل S من المجموعات تكون أساساً جزئياً لتبولوجيا معينة، وهذه التبولوجيا تكون معرفة بصورة وحيدة بالجماعة S. كما تكون هذه التبولوجيا أصغر تبولوجيا تحوي S.

(ب) لكل تبولوجيا يوجد أساس واحد على الأقل، وأساس جزئي واحد على الأقل.

الحل:

(أ) ينتج بالاستفادة من الطلب (٥) في المسألة (٥).

(ب) يترك للقارئ وسنكتفي بضرب مثال يؤيد صحة القول المذكور.

مثال: إذا كانت τ التبولوجيا المألوفة على R فإنّ كلاً من الجماعتين:

$$B_1 = \{]x,y[/ x,y \in R\} \text{ و } B_2 = \{]x,y[/ x,y \in Q\}$$

تكون أساساً لهذه التبولوجيا τ.

كما نجد أن كلاً من الجماعتين:

$$S_1 = \{]a,+\infty[/ a \in R\} \cup \{]-\infty,b[/ b \in R\}$$

$$S_2 = \{]a,+\infty[/ a \in Q\} \cup \{]-\infty,b[/ b \in Q\}$$

تكون أساساً جزئياً للتبولوجيا τ ذاتها.

يطلب من القارئ التأكد من كل ذلك.

(٧) نعلم أن كل مجموعة جزئية منتهية في فضاء متري تكون مغلقة فيه. اضرب مثالاً يدل على أن هذا القول لا يبقى صحيحاً بوجه عام في الفضاءات التبولوجية.

الحل:

لنأخذ $X = \{1,2\}$ ولنأخذ $\tau = \{\Phi,\{1\},X\}$ فنجد أن τ تبولوجيا على X (برهن ذلك)، وبالتالي نحصل على الفضاء التبولوجي (X,τ). ونلاحظ في هذا الفضاء أن المجموعة $\{1\}$ ليست مغلقة لأن متممتها $\{2\}$ ليست مفتوحة.

(٨) لتكن لدينا المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ المؤلفة من خمسة عناصر.

ولنأخذ الجماعة من المجموعات الجزئية في X:

$$\tau=\{\Phi,X,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

والمطلوب:

١- أثبت أن τ تبولوجيا على X.

٢- أوجد جميع المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي (X,τ).

٣- أوجد جميع المجموعات الجزئية التي تكون مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء X.

٤- (أ) هل المجموعتان $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{a,c\}$ كثيفتان في X أم لا؟ ولماذا؟

(ب) بيّن [مع التعليل] فيما إذا كانت كل من النقطتين a,b نقطة ملاصقة للمجموعة A ونقطة تجمع لـ A في الفضاء X أم لا.

(حـ) أوجد $D(A)$ في الفضاء X.

الحل:

١- نلاحظ أن τ تحقق كل متطلبات تعريف التبولوجيا على X.

ونترك للقارئ أن يتحقق من كل ذلك.

٢- بما أن المجموعة المغلقة ليست إلا متممة للمجموعة المفتوحة فإن جميع المجموعات المغلقة في X تؤلف الجماعة الآتية:

$$F=\{\Phi,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}\}$$

٣- $$F\cap\tau=\{\Phi,X,\{a\},\{b,c,d,e\}\}$$

٤- (أ) أولاً، نلاحظ أنّ:

A تكون كثيفة في (X,τ) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت المجموعة المفتوحة V بحيث $V\neq\Phi$ في (X,τ) فإنّ $V\cap A\neq\Phi$.

وثانياً، نلاحظ أن تقاطع المجموعة $A=\{a,b,c\}$ مع أية مجموعة مفتوحة وغير خالية في X يساوي مجموعة غير خالية.

وبذلك نستنتج أن A كثيفة في X.

وبطريقة مشابهة نستنتج أن B تكون كثيفة في X أيضاً.

(ب) بما أن $a,b\in A$ فكل من a,b نقطة ملاصقة لـ A. وبما أن $\{a\}\in\tau$ و $\{a\}\cap(A-\{a\})=\Phi$ فإن a ليست نقطة تجمع لـ A.

وبما أن X و $\{b,c,d,e\}$ هما الجواران المفتوحان الوحيدان للنقطة b في الفضاء X. وبما أنّ:

$X\cap(A-\{b\})\neq\Phi$ و $\{b,c,d,e\}\cap(A-\{b\})=\{c\}\neq\Phi$، فإننا نستنتج أن b تكون نقطة تجمع لـ A.

(حـ) $D(A)=\{b,d,e\}$

(٩) كل أساس لتبولوجيا على مجموعة غير خالية يكون أساساً جزئياً لها. إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

الحل:

بملاحظة أن جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر الأساس تؤلف أساساً للتبولوجيا ذاتها المعرفة على الفضاء نفسه نستنتج صحة الطلب الأول.

أما الطلب الثاني فيوضّحه المثال التالي:

مثال: لنأخذ التبولوجيا المتقطعة τ على المجموعة $X=\{1,2,3\}$ فنجد أن الجماعة $S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ تشكل أساساً جزئياً للتبولوجيا τ وذلك

لأن جماعة كـل التقاطعـات المنتهيـة لعناصـر مـن S تحـوي الجماعـة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ التي بدورها تؤلف أساساً للتبولوجيا τ.
إلا أننا نجد أنّ S ليست أساساً للتبولوجيا τ للأسباب الآتية:
لنأخذ من S العنصرين $\{1,2\}$ وَ $\{1,3\}$ فيكون $1 \in \{1,2\}\bigcap\{1,3\}$ ولكـن لا يوجد في S أيّ عنصر مثل W بحيث يكون $1\in W \subseteq \{1,2\}\bigcap\{1,3\}$، وهذا يعني أن S ليست أساساً لـ τ على X وذلك حسب المسألة (٥).

٢-٣٧- تمارين للحل:

(١) إذا كانت A مجموعة جزئية في فضاء تبولـوجي مثـل (X,τ) فأثبت أنّ $A^\circ = A - D(X-A)$.

(٢) إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجياً وكانت $A\subseteq X$ و $x\in X$ نقطة ملاصقة لـ A و $x\notin A$ فأثبت أن $x\in D(A)$. $x\in A$

(٣) إذا كانت τ هي التبولوجيا المألوفة على R فاضرب مثالين فـي الفضـاء التبولوجي (R,τ)، أحدهما يدل على أن $A^\circ\bigcup B^\circ \neq (A\bigcup B)^\circ$ والآخر يدل على أن $\overline{A}\bigcap\overline{B}\neq\overline{A\bigcap B}$، حيث A,B مجموعتان جزئيتان مناسبتان من R (في كل مثال منهما).

(٤) ليكن S أساساً جزئياً لتبولوجيا τ على مجموعة غيـر خاليـة مثـل X، ولتكن A مجموعة جزئيـة غيـر خاليـة مـن X. هـل تكـون الجماعـة $S_A=\{A\bigcap H / H\in S\}$ أساساً جزئياً للتبولوجيا النسبية على A؟

(٥) لتكن X مجموعة غير منتهية ولنأخذ الجماعة:
$\tau = \{\Phi\}\bigcup\{A / A\subseteq X, (X-A) = \text{مجموعة منتهية}\}$ والمطلوب:
١- أثبت أن τ تبولوجيا على X.
٢- أوجد المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي (X,τ).
٣- برهن على أن تقاطع أي مجموعتين مفتوحتين وغيـر خـاليتين فـي الفضاء X يكون مجموعة غير خالية.
٤- برهن على أن كل عنصر من X يكون نقطـة تجمـع لأيّ مجموعـة جزئية غير منتهية من X.
٥- برهن على أن كل مجموعة جزئية غير منتهية من X تكون كثيفة في الفضاء X.
٦- أوجد داخل وخارج ومحيط كل مجموعة جزئية من X.
٧- إذا كانت Y مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من X وكانت $y\in Y$ فأثبت أن: $\{y\} = Y\bigcap(X-(Y-\{y\}))$
ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة $\{y\}$ مفتوحـة فـي الفضـاء التبولـوجي الجزئي Y أم لا، ثم ناقش فيما إذا كانت التبولوجيا النسبية على Y تسـاوي التبولوجيا المتقطعة على Y أم لا.

(٦) يقال عن فضاء تبولوجي مثل (X,τ) إنه **فضاء** T_0 إذا تحقق ما يلي:
أياً كانت النقطتان المختلفتان $x,y\in X$ فثمة جوار مثـل U للنقطـة x لا يحوي $\{y\}$ أو جوار مثل V لـ y لا يحوي $\{x\}$.
ويقال عن الفضاء X إنه **فضاء** T_1 إذا تحقق ما يلي:
كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر مثل $\{x\}$ مـن X تكـون مغلقـة فـي الفضاء X.
ويقال عن الفضاء X إنه **فضاء** T_2 إذا تحقق ما يلي:
أياً كانت النقطتان المختلفتان $x,y\in X$ فثمة جـوار مثـل U للنقطـة x وجوار مثل V لـ y بحيث يكون $U\bigcap V=\Phi$.
والمطلوب:
١- اضرب مثالاً على فضاء T_0 ومثالاً آخر على فضاء ليس بفضاء T_0.

٢- أثبت أن كل فضاء T_1 يكون فضاء T_0 إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

٣- أثبت أن كل فضاء T_2 يكون فضاء T_1 إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

٤- أثبت أن كل فضاء تبولوجي جزئي من فضاء T_i يكون فضاء T_i أيضاً، حيث $i = 0,1,2$.

****

الفصل الثالث

مفاهيم تبولوجية أخرى

- تعاريف ومبرهنات
- المرشحات
- المسافات المتكافئة
- جداء فضائين متريين
- جداء فضائين تبولوجيين
- الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ
- التطبيقات الخطية
- فضاء الجداء الداخلي
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

الفصل الثالث

مفاهيم تبولوجية أخرى

٣-١- تعاريف:

ليكن (X,d) أيّ فضاء متري. ولتكن K أية مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء X. ولتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ أية جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية من الفضاء X. يقال عن الجماعة G إنها **تغطية** للمجموعة K في الفضاء X عندما وفقط عندما يكون $K\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. ويقال عن الجماعة G إنها **تغطية مفتوحة** للمجموعة K في الفضاء X عندما وفقط عندما تكون G تغطية للمجموعة K وتحقق الشرط التالي:

" كل عنصر A_i من عناصر G يكون مجموعة مفتوحة في الفضاء X".

لتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء X. ولتكن $\Phi\neq J\subseteq I$. ولنأخذ الجماعة غير الخالية $\Gamma=\{A_i / i\in J\}$ التي تكون جماعة جزئية من التغطية المفتوحة G في الفضاء X. يقال عن Γ إنها **تغطية جزئية** للمجموعة K في الفضاء X عندما وفقط عندما يكون $K\subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

ونلاحظ، هنا، أن التغطية الجزئية Γ للمجموعة K في الفضاء X تكون تغطية بحد ذاتها للمجموعة K في الفضاء X، وتكون Γ في الوقت ذاته تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء X (لماذا؟).

ونلاحظ أيضاً أنه عندما تكون $K = X$ فإن التغطية المفتوحة للمجموعة K في الفضاء X تصبح تغطية للفضاء X بأكمله.

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري (X,d). وليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. يقال عن مجموعة منتهية من عناصر X مثل: $M=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ إنها **شبكية موافقة للعدد** ε من أجل المجموعة A عندما وفقط عندما يتحقق ما يلي:

أياً كان العنصر x من A فإنه يوجد في M عنصر مناسب مثل e_i بحيث يكون $d(x,e_i)<\varepsilon$.

يقال عن المجموعة الجزئية A في الفضاء X إنها **محدودة كلياً** إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً ε فإنه توجد شبكية موافقة لهذا العدد ε من أجل المجموعة A.

لتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ تغطية لمجموعة جزئية غير خالية مثل A في فضاء متري (X,d).

يقال عن العدد الحقيقي الموجب تماماً L إنه **عدد لوبيغ** لهذه التغطية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت المجموعة الجزئية غير الخالية B من A بحيث $\delta(B)<L$ فإنه يوجد في I عنصر مناسب مثل i بحيث يكون $B\subseteq A_i$.

[انظر التمرين المحلول الثاني في الفقرة (١-١٩) في الفصل الأول].

٣-٢- مبرهنة:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية في فضاء متري مثل (X,d).

ولنفرض أن A متراصة. عندئذ تكون A محدودة كلياً.

الإثبات:

لنفرض مؤقتاً أن A ليست محدودة كلياً. عندئذ، يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل ε بحيث لا توجد أية شبكية موافقة لهذا العدد ε من أجل المجموعة A.

ليكن $a_1\in A$. عندئذ: يوجد $a_2\in A$ بحيث يكون $d(a_1,a_2)\ge\varepsilon$، لأنه في الحالة المعاكسة تكون المجموعة $\{a_1\}$ شبكية موافقة للعدد ε من أجل A وهذا يخالف ما استنتجناه بناء على الفرض المؤقت.

وبصورة مشابهة، يوجد $a_3\in A$ بحيث يكون $d(a_1,a_3)\ge\varepsilon$ و $d(a_2,a_3)\ge\varepsilon$، لأنه لو لم يتحقق ذلك لكانت المجموعة $\{a_1,a_2\}$ شبكية موافقة للعدد ε من أجل A وهذا يخالف ما تم استنتاجه بناء على الفرض المؤقت.

وبمتابعة هذا العمل على هذا المنوال فإننا نحصل بالاستقراء على المتوالية: $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ من عناصر A التي تحقق العلاقة $d(a_i,a_j)\ge\varepsilon$ عندما $i\ne j$.

ومنه لا توجد في المتوالية (a_n) أية متوالية جزئية متقاربة، وهذا يعني أن A ليست متراصة مما يناقض كون A متراصة بالفرض الأساسي.

إذن فالمجموعة A تكون محدودة كلياً وهو المطلوب.

٣-٣- تعريف:

لتكن K أية مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (X,d). يقال عن K إنها **متراصة عدياً** إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

أياً كانت المجموعة الجزئية غير المنتهية B من K فإنه توجد في K نقطة حدية (أيْ نقطة تجمع) للمجموعة B.

٣-٤- مبرهنة:

لتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة لمجموعة جزئية متراصة مثل A في فضاء متري مثل (X,d). عندئذ، يوجد عدد لوبيغ مثل L لهذه التغطية المفتوحة G.

الإثبات:

لنفرض مؤقتاً أنه لا توجد للتغطية المفتوحة G أيّ عدد لوبيغ. عندئذ يتحقق الآتي:

لأجل كل عدد طبيعي مغاير للصفر مثل n توجد مجموعة جزئية غير خالية مثل B_n من A بحيث يكون $\delta(B_n)<\frac{1}{n}$ و $B_n \nsubseteq A_i$ لأجل كل i من I. ثم، من أجل كل عدد طبيعي مغاير للصفر n نأخذ نقطة مثل $b_n\in B_n$ فنحصل على المتوالية (b_n) من عناصر A. ومنه، باعتبار أن A متراصة فإنه توجد في المتوالية (b_n) متوالية جزئية مثل (b_{i_n}) بحيث تكون متقاربة من إحدى نقاط A ولتكن a. ولما كانت $A\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ فإنه يوجد في I عنصر مثل i_0 بحيث يكون $a\in A_{i_0}$. وبما أن A_{i_0} مفتوحة فإنه يوجد عدد حقيقي موجب مثل ε بحيث يكون $B(a,\varepsilon)\subseteq A_{i_0}$. وبما أن $b_{i_n}\to a$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل i_{n_0} بحيث يكون: $\delta(B_{i_{n_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$ و $b_{i_{n_0}}\in B_{i_{n_0}}$ و $d(a,b_{i_{n_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$. ومنه: $B_{i_{n_0}}\subseteq B(a,\varepsilon)\subseteq A_{i_0}$ بملاحظة ما يلي:

$$x\in B_{i_{n_0}} \Rightarrow d(x,a)\le d(x,b_{i_{n_0}})+d(b_{i_{n_0}},a)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ولكن العلاقة $B_{i_{n_0}}\subseteq A_{i_0}$ تناقض كون $B_{i_{n_0}}\nsubseteq A_i$ لأجل كل i من I.

إذن يوجد للتغطية المفتوحة G عدد لوبيغ وهو المطلوب.

٣-٥- مبرهنة:

لتكن K مجموعة جزئية غير خالية في فضاء متري مثل (X,d). عندئذ تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين:

(١) من كل تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء الجزئي (K,d) يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (K,d).

(٢) من كل تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d) يمكن اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (X,d).

الإثبات:

(١)⇐(٢): لنفرض أن القضيّة (١) محققة. ولتكن $G=\{A_i/i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d). ولنضع $B_i=K\cap A_i$ لأجل كل i من I فتكون كل مجموعة B_i مفتوحة في الفضاء الجزئي (K,d). وبما أن $K\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ فإن $K\subseteq\bigcup_{i\in I}(K\cap A_i)=\bigcup_{i\in I}B_i$ وهذا يعني أن الجماعة غير الخالية $\{B_i/i\in I\}$ تكون تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء الجزئي (K,d). ومنه، حسب القضية (١)، توجد تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (K,d)، وهذا يعني أنه توجد في I مجموعة جزئية منتهية مثل $\{i_1,i_2,....,i_n\}$ بحيث يكون $K\subseteq B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup....\cup B_{i_n}$. ولما كانت $B_i\subseteq A_i$ من أجل كل i من I فإن ذلك يسمح لنا بالقول إنه توجد في I المجموعة المنتهية $\{i_1,i_2,....,i_n\}$ بحيث يكون $K\subseteq A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup....\cup A_{i_n}$. وبذلك أمكننا اختيار التغطية الجزئية المنتهية $\{A_{i_1},A_{i_2},....,A_{i_n}\}$ للمجموعة K في (X,d) انطلاقاً من التغطية المفتوحة الكيفية G للمجموعة K في (X,d).

إذن فالقضية (٢) تكون محققة.

(٢)⇐(١): لنفرض أن القضية (٢) محققة. ولـتكن $G=\{B_i / i\in I\}$ أيـة تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء الجزئي (K,d)، عندئـذ، يمكننـا أن نكتب: $K\subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. ولكن، لأجل كل i من I، توجد في الفضاء (X,d) مجموعة مفتوحة مثل A_i بحيث يكون $B_i = K\cap A_i$. ومنه يكون $K\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$، وبالتالي فالجماعة $H=\{A_i/i\in I\}$ تكون تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d). ومنه، حسب القضية (٢)، يمكن اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (X,d) انطلاقاً من التغطية المفتوحة H، وهذا يعني أنه توجد في I مجموعة جزئية منتهية مثل $\{i_1,i_2,....,i_n\}$ بحيث يكون $K\subseteq A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup....\cup A_{i_n}$ وبالتالي يكون:

$$K\subseteq (K\cap A_{i_1})\cup(K\cap A_{i_2})\cup....\cup(K\cap A_{i_n})\subseteq$$
$$\subseteq B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup.....\cup B_{i_n}$$

وبذلك أمكننا إيجاد التغطية الجزئية المنتهية $\{B_{i_1},B_{i_2},....,B_{i_n}\}$ للمجموعة K في (K,d) انطلاقاً من التغطية المفتوحة الكيفية G للمجموعة K في (K,d).
إذن فالقضية (١) تكون محققة.

٣-٦- مبرهنة:

لتكن K مجموعة جزئية غير خالية في فضاء متري مثل (X,d). عندئذ تكون القضايا الآتية متكافئة:

(١) من كل تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d) يمكن اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (X,d).

(٢) المجموعة K متراصة عدياً.

(٣) المجموعة K متراصة.

الإثبات:

(١)⇐(٢): لنفرض أن القضية (١) محققة. ولتكن A أية مجموعة جزئية غير منتهية من K. ولنفرض مؤقتاً أنه لا توجد في K أية نقطة حدية (نقطة تجمع) للمجموعة A. عندئذ، لأجل كل نقطة y من K توجد كرة مفتوحة مثل $B(y,\varepsilon_y)$ بحيث يكون $B(y,\varepsilon_y)\cap(A-\{y\})=\Phi$ [لماذا؟].
ومنه نحصل على الجماعة $H=\{B(y,\varepsilon_y)/y\in K\}$ التي تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة K في (X,d) [تأكد من ذلك].
ومنه، حسب القضية (١)، توجد في K مجموعة جزئية منتهية مثل $\{y_1,y_2,...,y_t\}$ بحيث يكون $K\subseteq B(y_1,\varepsilon_{y_1})\cup.....\cup B(y_t,\varepsilon_{y_t})$.
ولما كانت A مجموعة جزئية غير منتهية من K فإنه يوجد في A عنصر (واحد على الأقل) مثل a بحيث يكون $a\notin\{y_1,y_2,...,y_t\}$ وبالتالي يكون $a\neq y_i$ لأجل $i=1,2,...,t$. وبذلك يمكننا أن نكتب:

$$a\in A\subseteq B(y_1,\varepsilon_{y_1})\cup.....\cup B(y_t,\varepsilon_{y_t})$$

ومنه يوجد $j\in\{1,....,t\}$ بحيث يكون $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})$.

وبذلك يكون: $a\in A$ و $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})$ و $a\neq y_j$

وبالتالي: $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})\cap(A-\{y_j\})$

ومن ثم: $B(y_j,\varepsilon_{y_j})\cap(A-\{y_j\})\neq\Phi \qquad (\star)$

وبما أن $y_j\in K$ فإن العلاقة $(\star)$ السابقة تناقض كون $B(y,\varepsilon_y)\cap(A-\{y\})=\Phi$ من أجل كل y من K. إذن توجد في K نقطة تجمع للمجموعة A، وبذلك نكون قد برهنا على صحة القضية (٢)، أيْ أن (٢) محققة.

(٢)$\Leftarrow$(١): لنفرض أن القضية (٢) محققة. ولتكن $G=\{B_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء الجزئي (K,d)، عندئذ، يمكننا أن نكتب: $K\subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. ولكن، لأجل كل i من I، توجد في الفضاء (X,d) مجموعة مفتوحة مثل A_i بحيث يكون $B_i = K\cap A_i$. ومنه يكون $K\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$، وبالتالي فالجماعة $H=\{A_i / i\in I\}$ تكون تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d). ومنه، حسب القضية (٢)، يمكن اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (X,d) انطلاقاً من التغطية المفتوحة H، وهذا يعني أنه توجد في I مجموعة جزئية منتهية مثل $\{i_1,i_2,....,i_n\}$ بحيث يكون $K\subseteq A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup....\cup A_{i_n}$ وبالتالي يكون:

$$K\subseteq (K\cap A_{i_1})\cup(K\cap A_{i_2})\cup....\cup(K\cap A_{i_n})\subseteq$$
$$\subseteq B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup.....\cup B_{i_n}$$

وبذلك أمكننا إيجاد التغطية الجزئية المنتهية $\{B_{i_1},B_{i_2},....,B_{i_n}\}$ للمجموعة K في (K,d) انطلاقاً من التغطية المفتوحة الكيفية G للمجموعة K في (K,d).
إذن فالقضية (١) تكون محققة.

٣-٦- مبرهنة:

لتكن K مجموعة جزئية غير خالية في فضاء متري مثل (X,d). عندئذ تكون القضايا الآتية متكافئة:

(١) من كل تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d) يمكن اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في (X,d).

(٢) المجموعة K متراصة عدياً.

(٣) المجموعة K متراصة.

الإثبات:

(١)$\Leftarrow$(٢): لنفرض أن القضية (١) محققة. ولتكن A أية مجموعة جزئية غير منتهية من K. ولنفرض مؤقتاً أنه لا توجد في K أية نقطة حدية (نقطة تجمع) للمجموعة A. عندئذ، لأجل كل نقطة y من K توجد كرة مفتوحة مثل $B(y,\varepsilon_y)$ بحيث يكون $B(y,\varepsilon_y)\cap(A-\{y\})=\Phi$ [لماذا؟].
ومنه نحصل على الجماعة $H=\{B(y,\varepsilon_y)/y\in K\}$ التي تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة K في (X,d) [تأكد من ذلك].
ومنه، حسب القضية (١)، توجد في K مجموعة جزئية منتهية مثل $\{y_1,y_2,...,y_t\}$ بحيث يكون $K\subseteq B(y_1,\varepsilon_{y_1})\cup.....\cup B(y_t,\varepsilon_{y_t})$.
ولما كانت A مجموعة جزئية غير منتهية من K فإنه يوجد في A عنصر (واحد على الأقل) مثل a بحيث يكون $a\notin\{y_1,y_2,...,y_t\}$ وبالتالي يكون $a\neq y_i$ لأجل $i=1,2,...,t$. وبذلك يمكننا أن نكتب:

$$a\in A\subseteq B(y_1,\varepsilon_{y_1})\cup.....\cup B(y_t,\varepsilon_{y_t})$$

ومنه يوجد $j\in\{1,....,t\}$ بحيث يكون $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})$.

وبذلك يكون: $a\in A$ و $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})$ و $a\neq y_j$

وبالتالي: $a\in B(y_j,\varepsilon_{y_j})\cap(A-\{y_j\})$

ومن ثم: $B(y_j,\varepsilon_{y_j})\cap(A-\{y_j\})\neq\Phi \qquad (\star)$

وبما أن $y_j\in K$ فإن العلاقة $(\star)$ السابقة تناقض كون $B(y,\varepsilon_y)\cap(A-\{y\})=\Phi$ من أجل كل y من K. إذن توجد في K نقطة تجمع للمجموعة A، وبذلك نكون قد برهنا على صحة القضية (٢)، أيْ أن (٢) محققة.

(٢)⇐(٣): لنفرض أن القضية (٢) محققة. ولتكن (b_n) أيـة متواليـة مـن عناصر K. فإذا كانت المجموعة $H=\{b_1,b_2,b_3,......\}$ منتهية فـإن أحـد عناصرها وليكن b_{i_0} يحقق المساواة $b_j=b_{i_0}$ من أجل كل j من مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة الأعداد الطبيعة المغايرة للصفر. ومنه فالمتوالية $b_{i_0},b_{i_0},b_{i_0},.....$ تكون متوالية جزئية من المتوالية (b_n)، وهذه المتوالية الجزئية متقاربة من b_{i_0} في K.

أما إذا كانت المجموعة H غير منتهية فإنه توجد في K نقطة تجمع مثل a للمجموعة H، وذلك استناداً إلى القضية (٢).

ومنه يمكننا أن نختار من المتوالية (b_n) متوالية جزئية مثل (b_{i_n}) متقاربة من النقطة a في K وذلك بالاستفادة من تعريف نقطة التجمع لمجموعة ومن إحدى خواصها المتضمنة أن كل جوار لهذه النقطة يحوي مجموعة غير منتهية من عناصر هذه المجموعة [انظر التمرين المحلول الخامس في فقرة التمارين المحلولة (١-١٩) في الفصل الأول]. ومنه تكون K متراصة.

(٣)⇐(١): لنفرض أن القضية (٣) محققة. ولتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة K في الفضاء (X,d). عندئذ، يوجد عدد لوبيغ مثل L لهذه التغطية حسب المبرهنة (٣-٤). كما تكون K محدودة كلياً حسب المبرهنة (٣-٢). ومنه، لأجل العدد الحقيقي الموجب تماماً $\frac{L}{3}$ توجد شبكية مثل $M=\{e_1,....,e_n\}$، موافقة للعدد $\frac{L}{3}$ من أجل المجموعة K [انظر تعريف المجموعة المحدودة كلياً]. ومنه، لأجل كل نقطة مثل x من K يوجد في M عنصر مثل e_{i_0} بحيث يكون $d(x,e_{i_0})<\frac{L}{3}$.

ومنه، بفرض $H_j=\{x/x\in K, d(x,e_j)<\frac{L}{3}\}$ لأجل كل j من المجموعة $\{1,2,....,n\}$، يمكن استنتاج أن عدد المجموعات الجزئية H_j هو n على الأكثر وأن كل واحدة من هؤلاء المجموعات الجزئية H_j تكون غير خالية [تحقق من كل ذلك].

لنفترض أن عدد هذه المجموعات الجزئية غير الخالية H_j هو t. عندئذ، يمكننا أن نكتب [بعد إعادة الترقيم إذا لزم الأمر، وما سنكتبه لا يؤثر على العمومية]:

$K=\bigcup_{j=1}^{t} H_j$ و $\delta(H_j)<L$ ، حيث $j=1,2,....,t$

وبما أن L هو عدد لوبيغ للتغطية G فإنه يوجد $i_1,i_2,....,i_t\in I$ بحيث يكون:

$$H_1\subseteq A_{i_1},....,H_t\subseteq A_{i_t}$$

وبالتالي يكون:

$$K\subseteq H_1\cup....\cup H_t\subseteq A_{i_1}\cup....\cup A_{i_t}$$

إذن، توجد في I المجموعة الجزئية المنتهية $\{i_1,i_2,....,i_t\}$ بحيث يكون $K\subseteq\bigcup_{m=1}^{t}A_{i_m}$ وهذا يعني أننا تمكنا من اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة K في الفضاء (X,d) انطلاقاً من التغطية الكيفية G للمجموعة K في الفضاء (X,d)، أيْ أن القضية (١) محققة.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-٧- نتيجة:

كل مجموعة جزئية منتهية في فضاء متري مثل (X,d) تكون متراصة.

البرهان:

لتكن $A=\{a_1,a_2,....,a_m\}$ مجموعة جزئية منتهية في فضاء متري مثل (X,d). ولتكن $G=\{B_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة A في الفضاء X. عندئذ يكون $A\subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. ومنه، لأجل كل عنصر a_j من A يوجد في G عنصر مناسب مثل B_{i_j} بحيث يكون $a_j \in B_{i_j}$. ومنه توجد في I المجموعة الجزئية المنتهية $\{i_1,i_2,....,i_m\}$ بحيث يكون $A\subseteq B_{i_1}\bigcup.....\bigcup B_{i_m}$، وبذلك يمكننا القول إن A متراصة استناداً إلى المبرهنة (٣-٦).

٣-٨- ملاحظة:

توجد بين المجموعات الجزئية غير المنتهية في فضاء متري مجموعات متراصة. فمثلاً، كل مجال مغلق من الشكل $[a,b]$ حيث $-\infty<a<b<\infty$ يكون مجموعة متراصة. [انظر البند الثامن من الفقرة (١-١٧) في الفصل الأول].

٣-٩- نتيجة:

لتكن A,F مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء متري مثل (X,d) بحيث أن $F\subseteq A$. ولنفرض أن A متراصة وأن F مغلقة في (X,d). عندئذ تكون المجموعة F متراصة.

البرهان:

لنفرض أن $F\subseteq A\subseteq X$ وأن A متراصة وأن F مغلقة في الفضاء X. ولتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة F في الفضاء X. عندئذ تكون الجماعة $\{B_j / j\in J\}=G\bigcup\{X-F\}$ تغطية مفتوحة

للمجموعة A في (X,d). ومنه، باعتبار أن A متراصة، توجد جماعة منتهية مثل $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$ بحيث يكون:

$$F\subseteq A\subseteq B_{j_1}\bigcup.....\bigcup B_{j_n}$$

ومنه توجد حالتان:

الحالة الأولى: $(X-F)\in\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$. عندها تكون الجماعة $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}-\{X-F\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية G للمجموعة F في (X,d).

الحالة الثانية: $(X-F)\notin\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$. عندها تكون الجماعة $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية G للمجموعة F في (X,d).

ومن الحالتين السابقتين نستنتج أنه أمكننا اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة F من التغطية المفتوحة الكيفية G للمجموعة F في الفضاء X.

ومنه، حسب المبرهنة (٣-٦) تكون F متراصة وهو المطلوب.

٣-١٠- نتيجة:

لتكن A,F مجموعتين جزئيتين من فضاء متري مثل (X,d). ولنفرض أن A متراصة وأن F مغلقة في (X,d) وأن $F\bigcap A\neq\Phi$. عندئذ تكون $F\bigcap A$ متراصة.

البرهان:

بما أن A متراصة فإن A تكون مغلقة، وبالتالي فإنّ $F\bigcap A$ تكون مغلقة بعد ملاحظة أن F مغلقة فرضاً. ولكن $F\bigcap A\subseteq A$ إذن $F\bigcap A$ تكون متراصة، استناداً إلى النتيجة (٣-٩).

لتكن $A=\{a_1,a_2,....,a_m\}$ مجموعة جزئية منتهية في فضاء متري مثل (X,d). ولتكن $G=\{B_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة A في الفضاء X. عندئذ يكون $A\subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. ومنه، لأجل كل عنصر a_j من A يوجد في G عنصر مناسب مثل B_{i_j} بحيث يكون $a_j \in B_{i_j}$. ومنه توجد في I المجموعة الجزئية المنتهية $\{i_1,i_2,....,i_m\}$ بحيث يكون $A\subseteq B_{i_1}\bigcup.....\bigcup B_{i_m}$، وبذلك يمكننا القول إن A متراصة استناداً إلى المبرهنة (٣-٦).

٣-٨- ملاحظة:

توجد بين المجموعات الجزئية غير المنتهية في فضاء متري مجموعات متراصة. فمثلاً، كل مجال مغلق من الشكل $[a,b]$ حيث $-\infty<a<b<\infty$ يكون مجموعة متراصة. [انظر البند الثامن من الفقرة (١-١٧) في الفصل الأول].

٣-٩- نتيجة:

لتكن A,F مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء متري مثل (X,d) بحيث أن $F\subseteq A$. ولنفرض أن A متراصة وأن F مغلقة في (X,d). عندئذ تكون المجموعة F متراصة.

البرهان:

لنفرض أن $F\subseteq A\subseteq X$ وأن A متراصة وأن F مغلقة في الفضاء X. ولتكن $G=\{A_i / i\in I\}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة F في الفضاء X. عندئذ تكون الجماعة $\{B_j / j\in J\}=G\bigcup\{X-F\}$ تغطية مفتوحة

للمجموعة A في (X,d). ومنه، باعتبار أن A متراصة، توجد جماعة منتهية مثل $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$ بحيث يكون:

$$F\subseteq A\subseteq B_{j_1}\bigcup.....\bigcup B_{j_n}$$

ومنه توجد حالتان:

<u>الحالة الأولى</u>: $(X-F)\in\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$. عندها تكون الجماعة $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}-\{X-F\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية G للمجموعة F في (X,d).

<u>الحالة الثانية</u>: $(X-F)\notin\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$. عندها تكون الجماعة $\{B_{j_1},.....,B_{j_n}\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية G للمجموعة F في (X,d).

ومن الحالتين السابقتين نستنتج أنه أمكننا اختيار تغطية جزئية منتهية للمجموعة F من التغطية المفتوحة الكيفية G للمجموعة F في الفضاء X. ومنه، حسب المبرهنة (٣-٦) تكون F متراصة وهو المطلوب.

٣-١٠- نتيجة:

لتكن A,F مجموعتين جزئيتين من فضاء متري مثل (X,d). ولنفرض أن A متراصة وأن F مغلقة في (X,d) وأن $F\bigcap A\neq\Phi$. عندئذ تكون $F\bigcap A$ متراصة.

البرهان:

بما أن A متراصة فإن A تكون مغلقة، وبالتالي فإن $F\bigcap A$ تكون مغلقة بعد ملاحظة أن F مغلقة فرضاً. ولكن $F\bigcap A\subseteq A$ إذن $F\bigcap A$ تكون متراصة، استناداً إلى النتيجة (٣-٩).

٣-١١- مبرهنة:

لتكن $G=\{K_i / i\in I\}$ أية جماعة من المجموعات الجزئية المتراصة K_i في فضاء متري مثل (X,d). ولنفرض أن تقاطع عناصر أيـة جماعـة جزئيـة منتهية من الجماعة G يساوي مجموعة غير خالية. عندئذ يكون $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \Phi$.

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن $\bigcap_{i\in I} K_i = \Phi$. ولنثبّت مجموعة مثل K_{i_0} كعنصر من عناصر الجماعة G. ولنضع $A_i=(X-K_i)$ لأجل كل i من I، فتكون كل مجموعة A_i مفتوحة في (X,d) لأن كل مجموعة K_i متراصة، وبالتالي مغلقة في (X,d). وعندئذ يكون $K_{i_0}\cap(\bigcap_{i\in I}K_i)=\Phi$، وبالتالي يكون:

$K_{i_0}\subseteq X-\bigcap_{i\in I}K_i$، وبالتالي يكون: $K_{i_0}\subseteq \bigcup_{i\in I}(X-K_i)$

أي: $K_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$، وهذا يعني أن الجماعة $\Gamma=\{A_i/i\in I\}$ تكون تغطية مفتوحة للمجموعة المتراصة K_{i_0} في (X,d)، وبالتالي توجد في Γ جماعة جزئية منتهية مثل $\{A_{i_1},....,A_{i_n}\}$ بحيث يكون $K_{i_0}\subseteq A_{i_1}\cup....\cup A_{i_n}$،

وبالتالي يكون:

$$K_{i_0}\subseteq (X-K_{i_1})\cup....\cup(X-K_{i_n})$$

وبالتالي يكون:

$$K_{i_0}\subseteq X-(K_{i_1}\cap....\cap K_{i_n})$$

وهذا يعني أن:

$$K_{i_0}\cap K_{i_1}\cap....\cap K_{i_n}=\Phi$$

مما يناقض الفرض الأساسي. وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-١٢- نتيجة:

(١) إذا كانت (K_n) متوالية من المجموعات المتراصة وغير الخالية K_n في فضاء متري مثل (X,d) بحيث أن $K_n\supseteq K_{n+1}$ لأجل $n=1,2,3,.....$، فإن المجموعة المساوية للتقاطع $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ تكون غير خالية.

(٢) إذا كانت (I_n) متوالية من المجالات المغلقة $I_n=[a_n,b_n]$ في الفضاء الحقيقي R بحيث أن $I_n\supseteq I_{n+1}$ لأجل $n=1,2,3,.....$، فإن: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\neq\Phi$

البرهان:

واضح بالاستفادة من المبرهنة (٣-١١) ويترك للقارئ بمثابة تمرين.

٣-١٣- مبرهنة:

ليكن (X,d) فضاء مترياً. إنّ القضيتين الآتيتين متكافئتان:

(١) الفضاء X متراص.

(٢) إذا كانت $\{F_i/i\in I\}$ أية جماعة من المجموعات الجزئية المغلقة F_i في (X,d) بحيث أن تقاطع عناصر أية جماعة جزئية منتهية من هذه الجماعة يساوي مجموعة غير خالية، فـإن تقـاطع هـذه الجماعـة $\{F_i/i\in I\}$ يكون غير خال.

الإثبات:

(١)$\Leftarrow$(٢): ينتج من المبرهنة (٣-١١) بعد ملاحظة أن كل مجموعة مغلقة في فضاء متراص تكون متراصة.

(٢)$\Leftarrow$(١): لنفرض أن القضية (٢) محققة. ولنبرهن أن القضـية (١) تكـون محققة، أيْ لنبرهن أن الفضاء X يكون متراصاً:

لتكن $\{V_i / i \in I\}$ أية تغطية مفتوحة للفضاء X. عندئذ: $X-\bigcup_{i\in I} V_i=\Phi$ وبالتالي يكون $\bigcap_{i\in I}(X-V_i)=\Phi$. وبما أن $X-V_i$ مغلقة في (X,d) لأجل كل i من I، فإن الجماعة $\Gamma=\{X-V_i / i\in I\}$ المؤلفة من المجموعات الجزئية $(X-V_i)$ المغلقة في (X,d) لا تحقق الشرط المذكور في نص القضية (٢). ومنه، توجد جماعة جزئية منتهية من الجماعة Γ مثل $\{X-V_{i_1},....,X-V_{i_n}\}$ بحيث يكون:

$$(X-V_{i_1})\bigcap....\bigcap(X-V_{i_n})=\Phi$$

وبالتالي يكون: $X-(V_{i_1}\bigcup....\bigcup V_{i_n})=\Phi$

وبالتالي يكون: $X=V_{i_1}\bigcup....\bigcup V_{i_n}$

وبذلك استطعنا اختيار تغطية جزئية منتهية للفضاء X من التغطية المفتوحة الكيفية للفضاء X. وهذا يعني أن X متراص بالاستفادة من المبرهنة (٣-٦). وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-١٤- المرشحات:

لتكن Y أية مجموعة غير خالية.

١) **تعريف:** يقال عن جماعة F من أجزاء Y إنها **مرشحة** على Y إذا تحقق ما يلي:

(١) $F\neq\Phi$ و $\Phi\notin F$.

(٢) أياً كان V,W من F فإن $V\bigcap W\in F$.

(٣) أياً كان V من F وأياً كانت W مجموعة جزئية من Y بحيث $W\supseteq V$ فإن $W\in F$.

٢) **تعريف:** يقال عن جماعة B من أجزاء Y إنها **أساس (قاعدة) لمرشحة** على Y إذا تحقق ما يلي:

(١) $B\neq\Phi$ و $\Phi\notin B$.

(٢) أياً كان V,W من B فإنه يوجد في B عنصر مثل H بحيث يكون $H\subseteq V\bigcap W$.

٣) **ملاحظة:**

(١) إذا كانت F مرشحة على Y فإن $Y\in F$.

(٢) تقاطع عنصرين من أساس لمرشحة على Y لا يكون بالضرورة عنصراً من هذا الأساس، إلا أنه يحوي عنصراً من هذا الأساس.

(٣) كل مرشحة على Y تكون أساساً لمرشحة على Y ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

٤) **أمثلة:**

(١) إذا كانت x_0 نقطة من فضاء تبولوجي مثل (X,τ) فإن جماعة كل جوارات هذه النقطة x_0 تؤلف مرشحة على X. وسنرمز لهذه المرشحة بالرمز $V(x_0)$.

(٢) إذا كانت x نقطة من فضاء تبولوجي مثل (X,τ) فإن جماعة كل الجوارات المفتوحة لهذه النقطة x تؤلف أساساً لمرشحة على X ولكنها لا تؤلف مرشحة على X بالضرورة.

(٣) إذا كانت x نقطة من الفضاء R وكانت B جماعة تلك المجالات المفتوحة في هذا الفضاء والتي ينتمي إليها العنصر x فإن B تكون أساساً لمرشحة على R ولكنها ليست مرشحة على R، وذلك بملاحظة ما يلي:

إن B جماعة من أجزاء R، وإن $\Phi \notin B$ (وضوحاً)، وإن $B \neq \Phi$ (وضوحاً).
وأيضاً:

$I,J \in B \Rightarrow$ مجالان مفتوحان $I,J, x\in I, x\in J \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in I\cap J$ و مجموعة مفتوحة $I\cap J \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (يوجد مجال مفتوح مثل W بحيث يكون $x\in W = I\cap J$)

$\Rightarrow$ (يوجد $W\in B$ بحيث يكون $W\subseteq I\cap J$)

إذن B أساس لمرشحة على R ولكنها ليست مرشحة على R لأنّ الشرط الأخير في تعريف المرشحة غير محقق، لأنه من المعروف أن المجموعة الجزئية من R والتي تحوي مجالاً مفتوحاً ليست بالضرورة مجالاً مفتوحاً.

(٤) لتكن Y مجموعة غير منتهية. ولنأخذ الجماعة التالية:

$$F=\{A / A\subseteq Y, (Y-A) = \text{مجموعة منتهية}\}$$

عندئذ تكون F مرشحة على Y.

ذلك بملاحظة ما يلي:

إنّ F جماعة من أجزاء Y، وإنّ $\Phi\notin F$ لأن $Y-\Phi=Y$ تكون مجموعة غير منتهية، وإنّ $Y\in F$ بملاحظة أن:

$Y-Y=\Phi=$ مجموعة منتهية و $Y\subseteq Y$ وبالتالي $F\neq\Phi$.

ثم، بفرض $V,W\in F$ نجد أن $V\subseteq Y$، $W\subseteq Y$،

$(Y-V)=$ (مجموعة منتهية) ، $(Y-W)=$ (مجموعة منتهية)

وبالتالي: $V\cap W\subseteq Y$

$Y-(V\cap W)=(Y-V)\cup(Y-W)=$ (مجموعة منتهية)

وبالتالي $V\cap W\in F$.

وأخيراً، ليكن $V\in F$ ولتكن $W\subseteq Y$ بحيث $W\supseteq V$. عندئذ:

$(Y-W)\subseteq(Y-V)=$ (مجموعة منتهية)

وبالتالي: $Y-W=$ (مجموعة منتهية)، وبالتالي $W\in F$.

(٥) لتكن $Y\neq\Phi$. ولتكن B أساساً لمرشحة على Y. عندئذ تكون المجموعة F الآتية مرشحة على Y:

$$F=\{A/A\subseteq Y, (\exists D\in B: D\subseteq A\}$$

ذلك بملاحظة ما يلي:

$$[B\neq\Phi \Rightarrow \exists D\in B\Rightarrow D\in F]$$

أيْ أن $F\neq\Phi$.

لو كان $\Phi\in F$ لكان يوجد في B عنصر مثل C بحيث يكون $C\subseteq\Phi$ وبالتالي لكان $C=\Phi$ وهذا يخالف كون B أساساً لمرشحة على Y بالفرض.

إذن $\Phi\notin F$.

ثم، بفرض $V_1,V_2\in F$ يكون: $V_1\subseteq Y$، $V_2\subseteq Y$، ويوجد $D_1\in B$ بحيث يكون $D_1\subseteq V_1$، ويوجد $D_2\in B$ بحيث يكون $D_2\subseteq V_2$. ولكن يوجد $H\in B$ بحيث يكون $H\subseteq D_1\cap D_2$ وبالتالي يكون: $H\subseteq V_1\cap V_2$. إذن، يمكننا أن نقول إنّ $V_1\cap V_2\in F$.

وأخيراً، ليكن $V\in F$ ولتكن $W\subseteq Y$ بحيث $W\supseteq V$. عندئذ يوجد $D\in B$ بحيث يكون $D\subseteq V\subseteq W$. ومنه $W\in F$.

(٦) لنأخذ $Y=N=\{0,1,2,3,\ldots\}$. ولنأخذ علاقة الترتيب المألوفة $\le$ على $Y=N$. إن المجموعة المرتبة $(N,\le)$ موجهة، أيْ أنه إذا كان $\alpha,\beta\in N$ فإنه يوجد $\gamma\in N$ بحيث يكون $\beta\le\gamma$ و $\alpha\le\gamma$.

ولنأخذ، لأجل كل n من N، المجموعة الجزئية:

$$S_n=\{n,n+1,n+2,\ldots.\}=\{k/k\in N, k\ge n\}$$

ثم لنأخذ الجماعة $B=\{S_n/n\in N\}$ فتكون أساساً لمرشحة على $Y=N$.

يقال عن هذا الأساس، عادة، إنه أساس مرشحة **فريشيه** على N.

ذلك بملاحظة ما يلي:

بما أن $N \neq \Phi$ فثمة $m \in N$، وبالتالي $S_m \in B$. إذن $B \neq \Phi$.

وبما أن $m \in S_m$ لأجل كل m من N فإن $S_m \neq \Phi$، وبالتالي $\Phi \notin B$.

ثم، بفرض أنّ S_n, S_m عنصران من B فهنالك عنصر مثل t من N بحيث يكون $n \leq t$ و $m \leq t$، وبالتالي يوجد في B العنصر S_t بحيث يكون $S_t \subseteq S_n \cap S_m$.

٥) مبرهنة: لتكن B أساساً لمرشحة على Y. ولتكن F تلك الجماعة من أجزاء Y المعرفة بالشرط التالي:

[$V \in F$ عندما وفقط عندما يوجد في B عنصر مثل W بحيث يكون $W \subseteq V$]

عندئذ تكون F أصغر مرشحة على Y تحوي B.

[يقال عن هذه المرشحة F إنها المرشحة **المولدة** بالأساس B]

الإثبات:

نلاحظ أولاً أن $F \supseteq B$ وذلك استناداً إلى الشرط المفروض في النصّ.

ومنه $F \neq \Phi$ باعتبار أن $B \neq \Phi$ لأنها أساس لمرشحة على Y بالفرض.

وأيضاً، أياً كان $V \in F$ فإن $V \neq \Phi$ استناداً إلى الشرط المفروض في النص. ومنه $\Phi \notin F$.

ثم، بفرض $V_1, V_2 \in F$ فإنه يوجد $W_1, W_2 \in B$ بحيث يكون $W_i \subseteq V_i$ لأجل $i = 1, 2$، وبالتالي يكون $W_1 \cap W_2 \subseteq V_1 \cap V_2$. ولكن B أساس لمرشحة على Y، إذن يوجد $W \in B$ بحيث يكون $W \subseteq W_1 \cap W_2$، وبالتالي يكون $W \subseteq V_1 \cap V_2$. ومنه $V_1 \cap V_2 \in F$.

وأخيراً، ليكن $V \in F$ ولتكن $W \subseteq Y$ بحيث $W \supseteq V$. عندئذ يوجد $H \in B$ بحيث يكون $H \subseteq V$ وبالتالي يكون $H \subseteq W$. ومنه $W \in F$.

إذن F مرشحة على Y، وهذه المرشحة تحوي B.

لنبرهن، الآن، أن F أصغر مرشحة على Y تحوي B. من أجل هذا نفرض أن F_1 أية مرشحة على Y تحوي B. وسنثبت أن $F \subseteq F_1$ كما يلي:

لتكن $V \in F$. عندئذ يوجد $W \in B$ بحيث يكون $W \subseteq V$. ومنه $V \in F_1$ باعتبار أن $W \in F_1$، إذْ أن $B \subseteq F_1$.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٦) مبرهنة: ليكن $\varphi : X \to Y$ أيّ تطبيق، منطلقه $X \neq \Phi$ ومستقره $Y \neq \Phi$. ولتكن F أية مرشحة على X. عندئذ تكون صورة F وفق φ عبارة عن أساس لمرشحة على Y، أيْ أن الجماعة:

$$\varphi(F) = \{\varphi(H) / H \in F\}$$

تكون أساساً لمرشحة على Y.

الإثبات:

نلاحظ أن $X \in F$ وبالتالي $\varphi(X) \in \varphi(F)$ مما يعني أن $\varphi(F) \neq \Phi$. ثم ليكن $W \in \varphi(F)$. عندئذ يوجد $V \in F$ بحيث يكون $W = \varphi(V)$. ولكن $V \neq \Phi$ إذن $\varphi(V) \neq \Phi$. ومنه $W \neq \Phi$. ومن ثم $\Phi \notin \varphi(F)$.

وأيضاً، ليكن $W_1, W_2 \in \varphi(F)$. عندئذ يوجد $V_1, V_2 \in F$ بحيث يكون $W_i = \varphi(V_i)$ لأجل $i = 1, 2$. ولكن $V_1 \cap V_2 \in F$ إذن:

$$\varphi(V_1 \cap V_2) \subseteq \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2) = W_1 \cap W_2$$

حيث $\varphi(V_1 \cap V_2) \in \varphi(F)$.

وبذلك نستنتج أن الجماعة $\varphi(F)$ من أجزاء Y تكون أساساً لمرشحة على Y.

٧) **ملاحظة مهمة:** إذا كان $\varphi : X \to Y$ أيّ تطبيق، منطلقه $X \neq \Phi$ ومستقره $Y \neq \Phi$، فإن الصورة المباشرة وفق φ لأية مرشحة على منطلقه تكون أساساً لمرشحة على مستقره ولكنها لا تكون مرشحة بالضرورة على هذا المستقر. فمثلاً، إذا كان التطبيق φ غير غامر فإن $\varphi(X) \neq Y$. وعندها إذا كانت F مرشحة على X فإن $X \in F$. فلو كانت $\varphi(F)$ مرشحة على Y فإن $Y \in \varphi(F)$ ولكن هذا غير صحيح ما دام $Y \neq \varphi(A)$ لأجل كل A، حيث $A \subseteq X$، وبالتالي لأجل كل A، حيث $A \in F$.

لنفرض، الآن، أن التطبيق φ المذكور في المبرهنة السابقة غامر. عندئذ تكون الجماعة $\varphi(F)$ مرشحة على Y. أيْ أن صورة المرشحة وفق تطبيق غامر تكون مرشحة، وذلك بملاحظة ما يلي مع المحافظة على الرموز ذاتها المستعملة في نص المبرهنة السابقة:

إن $\varphi(F)$ جماعة غير خالية من أجزاء Y وإن $\Phi \notin \varphi(F)$.

ثم، بفرض $V_1, V_2 \in \varphi(F)$ يوجد $H_1, H_2 \in F$ بحيث يكون $V_i = \varphi(H_i)$ لأجل $i = 1,2$.

ومنه:

$$V_1 \cap V_2 = \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) \supseteq \varphi(H_1 \cap H_2)$$

أيْ: $V_1 \cap V_2 \supseteq \varphi(H_1 \cap H_2)$.

ومنه:

$$\varphi^{-1}(V_1 \cap V_2) \supseteq \varphi^{-1}(\varphi(H_1 \cap H_2)) \supseteq H_1 \cap H_2$$

[حيث نعني بالرمز $\varphi^{-1}(K)$ بأنه الصورة العكسية للمجموعة الجزئية K وفق φ، حيث K مجموعة جزئية من المستقر.]

ولما كان $H_1 \cap H_2 \in F$، لأن F مرشحة على X، فإنّ $\varphi^{-1}(V_1 \cap V_2) \in F$ ومنه $V_1 \cap V_2 = \varphi(\varphi^{-1}(V_1 \cap V_2)) \in \varphi(F)$ لأن φ غامر.

وأخيراً، ليكن $V \in \varphi(F)$. ولتكن $W \subseteq Y$ بحيث $W \supseteq V$. عندئذ يوجد $H \in F$ بحيث يكون $V = \varphi(H)$. ومنه $\varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(\varphi(H)) \supseteq H$ وبالتالي $\varphi^{-1}(V) \in F$ لأن F مرشحة على X. ولكن $W \supseteq V$ إذن $\varphi^{-1}(W) \supseteq \varphi^{-1}(V)$ إذن $\varphi^{-1}(W) \in F$. ومنه (ولأن φ غامر) يكون $W = \varphi(\varphi^{-1}(W)) \in \varphi(F)$

٨) **ملاحظة أخرى:** لتكن $X \neq \Phi$. ولتكن $f = (x_n)$ متوالية من عناصر X. ولتكن $X_n = \{x_k / k \geq n\}$ و $B' = \{X_n / n \in N\}$. عندئذ تكون B' أساساً لمرشحة على X، كما إنها تكون صورة أساس مرشحة فريشيه على N وفق المتوالية $f : N \to X$ حيث $f(n) = x_n$ لأجل كل n من N.
للتأكد من صحة كل هذا يطلب من القارئ العودة إلى المثال (٦) في الفقرة (٣-١٤) والاستفادة منه ومن الأفكار الأخرى لبرهان المطلوب.

٩) **تعريف:** ليكن B, B' أساسين لمرشحتين على مجموعة غير خالية مثل Y. يستخدم الرمز $B \leq B'$ للتعبير عن أن B' **أدق من** B (أو عن أن B أخشن من B')، ويعرّف هذا المفهوم كما يلي:

$B \leq B'$ عندما وفقط عندما يتحقق الشرط الآتي:

أياً كان $H \in B$ فإنه يوجد $H' \in B'$ بحيث يكون $H' \subseteq H$.

١٠) **تعريف:** يقال عن أساسين B, B' لمرشحتين على Y إنهما **متكافئان** (أو أحدهما يكافئ الآخر) إذا وفقط إذا كان $B \leq B'$ و $B' \leq B$.

١١) نتيجة: ليكن B,B' أساسين لمرشحتين على مجموعة غير خالية مثل Y.
عندئذ:
إذا كان $B\subseteq B'$ فإن $B\le B'$.
ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

البرهان:

لنفرض أن $B\subseteq B'$. وليكن $H\in B$. عندئذ $H\in B'$ ويحقق الشرط $H\subseteq H$. إذن $B\le B'$. إلا أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.
فعلى سبيل المثال يمكن أخذ المستوي بمثابة المجموعة غير الخالية Y. ولنأخذ الجماعتين:
B هي جماعة الأقراص الدائرية التي مركز كل منها هو O في المستوي
B' هي جماعة المربعات التي مركز كل منها هو O ذاتها في المستوي نفسه.
فنجد أن B أساس لمرشحة على المستوي المفروض، وأن B' أساس لمرشحة على المستوي المذكور (برهن كل ذلك).
كما نلاحظ أنه لا يوجد أيّ عنصر مشترك بين هذين الأساسين ولكنهما متكافئان، إذْ أن كل قرص دائري يحوي مربعاً مركزه هو مركز القرص ويكون محتوى في مربع له مركز القرص أيضاً، والعكس بالعكس.

١٢) مبرهنة: لتكن F,F' مرشحتين على مجموعة غير خالية مثل Y. عندئذ:

F' أدق من $F \Leftrightarrow F\subseteq F'$

[يمكن العودة إلى التعريف ٩ مع الأخذ بعين الاعتبار أن كل مرشحة على Y تكون أساساً لمرشحة على Y].

الإثبات:

لنفرض أن $F\le F'$. وليكن $H\in F$. عندئذ يوجد $H'\in F'$ بحيث يكون $H'\subseteq H$. ولكن F' مرشحة على Y إذن $H\in F'$. وبذلك يكون $F\subseteq F'$.
وبالعكس، لنفرض أن $F\subseteq F'$. عندئذ $F\le F'$ (وضوحاً).

١٣) نتيجة: الشرط اللازم والكافي كي تكون مرشحتان مثل F,F' على مجموعة غير خالية مثل Y متكافئتين هو $F=F'$.

البرهان:

سهل ويترك للقارئ حيث أنه ينتج من المبرهنة ١٢ ومن تعريف التكافؤ (انظر التعريف ١٠).

١٤) تعريف: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً. ولنفرض أنه فضاء T_2 [انظر التمرين السادس بين التمارين غير المحلولة في نهاية الفصل الثاني].
ولتكن $x_0\in X$. ولتكن $V(x_0)$ مرشحة جوارات النقطة x_0. وليكن B أساساً لمرشحة على X. نقول إنّ B **يتقارب من** x_0 إذا وفقط إذا كان $V(x_0)\le B$.
هذا وتجدر الإشارة إلى أن الشرط $V(x_0)\le B$ يعني، كما هو معلوم، ما يلي:
[أياً كان $W\in V(x_0)$ فإنه يوجد $H\in B$ بحيث يكون $H\subseteq W$]
كما إننا نعد العبارات الآتية متكافئة:
(B يتقارب من x_0)، (B ينتهي إلى x_0)، (نهاية B هي x_0)، ($\lim B = x_0$).
ونترك للقارئ أن يبرهن على وحدانية النهاية في حالة وجودها.
كما نترك للقارئ أيضاً أن يبرهن على صحة النص التالي:

لنفرض أنّ B,B' أساسان متكافئان لمرشحتين على الفضاء T_2 الذي هو (X,τ). ولنرمز بـ $W(x_0)$ لأساس مرشحة جوارات x_0 التي هي $V(x_0)$. عندئذ:

$$W(x_0)\le B' \Leftrightarrow \lim B = x_0$$

١٥) **ملاحظة مهمة:** ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً. ولنفرض أنه فضاء T_2. ولتكن (x_n) متوالية من عناصر هذا الفضاء X. ولتكن $X_n=\{x_k / k\ge n\}$ فتكون $B=\{X_n / n\in N\}$ أساساً لمرشحة على X. وليكن $a\in X$. وليكن $W(a)$ أساساً لمرشحة جوارات النقطة a. عندئذ يكون صحيحاً ما يلي:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow W(a)\le B \Leftrightarrow \forall H\in W(a): \exists X_{n_1}\in B: X_{n_1}\subseteq H$$

وهذا يعني أنه أياً كان H من $W(a)$ فإنه يوجد n_1 بحيث يكون $x_n\in H$ عندما $n\ge n_1$، وهذا بدوره يكافئ قولنا إنّ $x_n\to a$ في الفضاء. وبذلك نكون قد فسرنا تقارب المتوالية بلغة المرشحات. هذا من جهة، ومن جهة أخرى هنالك تفسيرات للاستمرار وغيره من المفاهيم باستخدام لغة المرشحات أيضاً. ونترك للقارئ أن يتدرب على كل ذلك من هذا القبيل.

٣-١٥- المسافات المتكافئة:

١) **تعاريف:** لتكن d_1,d_2 مسافتين على مجموعة غير خالية مثل X. عندئذ نحصل على فضائين متريين مختلفين، في الحالة العامة، هما (X,d_1) و (X,d_2).

يقال عن المسافتين d_1,d_2 إنهما **متكافئتان تبولوجياً** على X إذا وفقط إذا كان كل من التطبيقين المطابقين:

$$I:(X,d_1)\to(X,d_2)\text{، } I:(X,d_2)\to(X,d_1)$$

مستمراً على منطلقه.

وبعبارة ثانية، تكون المسافتان d_1,d_2 **متكافئتين تبولوجياً** على X إذا وفقط إذا كانت جماعة المجموعات المفتوحة في (X,d_1) تساوي جماعة المجموعات المفتوحة في (X,d_2). [يمكن العودة إلى المبرهنة (٩) في الفقرة (١-١٣) وإلى التمرينين المحلولين ٦،٧ في الفقرة (١-١٩) حين اللزوم].

وبعبارة ثالثة، تكون المسافتان d_1,d_2 **متكافئتين تبولوجياً** على X إذا وفقط إذا كانت التبولوجيا المولدة بالمسافة d_1 تساوي التبولوجيا المولدة بالمسافة d_2.

ومن جهة أخرى، نقول عن المسافتين d_1,d_2 إنهما متكافئتان **(بانتظام)** على X إذا وفقط إذا كان كل من التطبيقين المطابقين:

$$I:(X,d_1)\to(X,d_2)\text{، } I:(X,d_2)\to(X,d_1)$$

مستمراً بانتظام على منطلقه.

٢) **نتيجة:** لنفرض أنه يوجد عددان حقيقيان موجبان تماماً α,β بحيث يكون:

$$\alpha d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le \beta d_1(x,y)$$

لأجل كل عنصرين x,y من X. عندئذ تكون المسافتان d_1,d_2 متكافئتين (بانتظام) على X.

البرهان:

لنأخذ التطبيق المطابق $I:(X,d_1)\to(X,d_2)$ ولنبرهن أنه مستمر بانتظام على X:

ليكن $\varepsilon>0$. عندئذ يوجد $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\beta}>0$ بحيث يكون:

$$d_1(x,y)<\delta \Rightarrow d_2(I(x),I(y)) = d_2(x,y)\le \beta d_1(x,y)<\varepsilon$$

ثم لنبرهن أن التطبيق المطابق $I:(X,d_2)\to(X,d_1)$ مستمر بانتظام على منطلقه:

ليكن $\varepsilon>0$. عندئذ يوجد $\delta=\alpha.\varepsilon>0$ بحيث يكون:

$$d_2(x,y)<\delta \Rightarrow d_1(I(x),I(y))=d_1(x,y)\le \frac{1}{\alpha}d_2(x,y)<\varepsilon$$

وبذلك يتمّ إثبات المطلوب.

٣-١٦- جداء فضائين متريين:

١) **تعاريف:** ليكن (H_1,d_1) و (H_2,d_2) فضائين متريين كيفيين. ولنفرض أنّ $Y=H_1\times H_2$. ولنضع من أجل أيّ عنصرين $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ من Y:

$$d(x,y)=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))$$
$$d'(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$
$$d''(x,y)=\sqrt{[d_1(x_1,y_1)]^2+[d_2(x_2,y_2)]^2}$$

فنحصل على ثلاث مسافات على المجموعة Y بملاحظة ما يلي:

$$d(x,y)=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))=d_i(x_i,y_i)$$

حيث i دليل مناسب. وبما أن $d_i(x_i,y_i)\ge 0$ فإن $d(x,y)\ge 0$.

وأيضاً:

$$d(x,y)=0\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0\Leftrightarrow x_1=y_1,x_2=y_2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)=(y_1,y_2)\Leftrightarrow x=y$$
$$d(x,y)=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))=$$
$$=\max(d_1(y_1,x_1),d_2(y_2,x_2))=d(y,x)$$

وأخيراً:

بما أنّ:

$$d_i(x_i,y_i)\le d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\le$$
$$\le d(x,z)+d(z,y)$$

فإنّ:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

إذن d مسافة على $Y=H_1\times H_2$.

ونترك للقارئ أن يبرهن أن كلاً من d',d'' مسافة على $Y=H_1\times H_2$.

٢) **نتيجة:** إن المسافات d,d',d'' المذكورة قبل قليل تحقق الشرط:

$$d(x,y)\le d''(x,y)\le d'(x,y)\le 2d(x,y)$$

لأجل كل عنصرين x,y من Y.

البرهان:

$$d(x,y)=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))\le$$
$$\le\sqrt{[d_1(x_1,y_1)]^2+[d_2(x_2,y_2)]^2}=d''(x,y)\le$$
$$\le d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)=d'(x,y)\le$$
$$\le 2\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))=2d(x,y)$$

وذلك أياً كان العنصران x,y من Y.

٣) **نتيجة:** إن المسافات (المذكورة قبل قليل) d,d',d'' هي مسافات متكافئة (بانتظام) على Y.

البرهان:

استناداً إلى النتيجة السابقة وإلى النتيجة (٢) في الفقرة (٣-١٥).

٤) ملاحظة مهمة:

استناداً إلى النتيجة السابقة يكفي أخذ إحدى المسافات d,d',d'' على Y ولكننا نفضل أخذ d كما سيظهر في التعريف الآتي.

٥) تعريف:

يسمى الفضاء (Y,d) بـ "**جداء الفضائين المتريين** (H_2,d_2) و (H_1,d_1)" حيث $Y=H_1\times H_2$ وحيث:

$$d(x,y)=\max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2))$$

من أجل أي عنصرين $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ من Y.

وقد يسمى (Y,d) أيضاً بـ " فضاء الجداء للفضائين H_1,H_2".

وقد يرمز له بالرمز $(H_1,d_1)\times(H_2,d_2)$ في حالات تحتاج لمثل هذا الإيضاح.

مثال: الفضاء المتري الاقليدي ذو البعدين (R^2,d) يكون فضاء الجداء للفضاء المتري الاقليدي المألوف ذي البعد الواحد R في نفسه. (تحقق من ذلك).

٦) مبرهنة:

ليكن $(H_1,d_1),(H_2,d_2)$ فضائين متريين، وليكن $Y=H_1\times H_2$. وليكن (Y,d) فضاء الجداء للفضائين H_1,H_2. ولتكن $y=(y_1,y_2)$ نقطة كيفية من Y. وليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. ولنستخدم الرمز $B_d(y,\varepsilon)$ للتعبير عن الكرة المفتوحة التي مركزها y ونصف قطرها ε في الفضاء Y. ولنستخدم الرمز $B_{d_i}(y_i,\varepsilon)$ للتعبير عن الكرة المفتوحة التي مركزها y_i ونصف قطرها ε في الفضاء H_i، حيث $i=1,2$. عندئذ:

$$B_d(y,\varepsilon)=B_{d_1}(y_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$$

الإثبات:

ليكن $h=(h_1,h_2)$ أيّ عنصر من $B_d(y,\varepsilon)$. عندئذ يكون $d(y,h)<\varepsilon$ وبالتالي يكون $\max(d_1(y_1,h_1),d_2(y_2,h_2))<\varepsilon$. ومنه $d_1(y_1,h_1)<\varepsilon$ و $d_2(y_2,h_2)<\varepsilon$ وبالتالي $h_1\in B_{d_1}(y_1,\varepsilon)$ و $h_2\in B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$. وبذلك يكون:

$$h=(h_1,h_2)\in B_{d_1}(y_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$$

إذن:

$$B_d(y,\varepsilon)\subseteq B_{d_1}(y_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$$

وبالعكس، ليكن $h=(h_1,h_2)$ أيّ عنصر من $B_{d_1}(y_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$.

عندئذ يكون: $h_1\in B_{d_1}(y_1,\varepsilon)$ و $h_2\in B_{d_2}(y_2,\varepsilon)$

وبالتالي يكون: $d_1(y_1,h_1)<\varepsilon$ و $d_2(y_2,h_2)<\varepsilon$

ومن ثم: $\max(d_1(y_1,h_1),d_2(y_2,h_2))<\varepsilon$

أيْ $d(y,h)<\varepsilon$، وبالتالي $h=(h_1,h_2)\in B_d(y,\varepsilon)$.

إذن: $B_{d_1}(y_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(y_2,\varepsilon)\subseteq B_d(y,\varepsilon)$

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٧) ملاحظة:

(١) يمكن التعبير عن مضمون المبرهنة (٦) السابقة بقولنا إن جداء كرتين مفتوحتين لهما نصف قطر ثابت هو كرة مفتوحة لها نصف القطر ذاته.

(٢) بطريقة مشابهة يمكن القول إن جداء كرتين مغلقتين لهما نصف قطر ثابت هو كرة مغلقة لها نصف القطر ذاته.

(برهن ذلك).

٨) مبرهنة:

لتكن A_i مجموعة جزئية مفتوحة في فضاء متري مثل (H_i,d_i)، حيث $i=1,2$. عندئذ تكون المجموعة $A=A_1\times A_2$ مفتوحة في فضاء الجداء (Y,d) حيث $Y=H_1\times H_2$.

الإثبات:

لتكن $a=(a_1,a_2)\in A=A_1\times A_2$. عندها يوجد $\varepsilon_i>0$، حيث $i=1,2$، بحيث يكون $B(a_1,\varepsilon_1)\subseteq A_1$ و $B(a_2,\varepsilon_2)\subseteq A_2$. ومنه، بفرض $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$، نستنتج، حسب المبرهنة (٦)، أن:

$$B(a,\varepsilon)=B(a_1,\varepsilon)\times B(a_2,\varepsilon)\subseteq B(a_1,\varepsilon_1)\times B(a_2,\varepsilon_2)\subseteq A_1\times A_2$$

وبالتالي فالمجموعة $A_1\times A_2$ تكون مفتوحة في الفضاء Y.

٩) نتيجة: لتكن A_i مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري مثل (H_i,d_i) حيث $i=1,2$. ولتكن $A=A_1\times A_2$ عندئذ:

(١) $A^\circ=A_1^\circ\times A_2^\circ$

(٢) [A مفتوحة في $(H_1\times H_2,d)$] $\Leftrightarrow$ [A_i مفتوحة في (H_i,d_i) حيث $i=1,2$]

يطلب من القارئ التحقق من صحة كل ذلك.

١٠) مبرهنة:

لتكن A_i مجموعة جزئية من فضاء متري مثل (H_i,d_i)، حيث $i=1,2$. ولنفرض أن $A=A_1\times A_2$. عندئذ يكون $\overline{A}=\overline{A_1}\times\overline{A_2}$ في فضاء الجداء (Y,d) حيث $Y=H_1\times H_2$.

الإثبات:

ليكن $a=(a_1,a_2)\in\overline{A_1}\times\overline{A_2}$. وليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. عندها يوجد في A_1 عنصر مثل x_1 وفي A_2 عنصر مثل x_2 بحيث يكون $d_1(a_1,x_1)<\varepsilon$ و $d_2(a_2,x_2)<\varepsilon$.

ومنه يوجد في A العنصر $x=(x_1,x_2)$ بحيث يكون $d(a,x)<\varepsilon$، وبالتالي يكون $B(a,\varepsilon)\cap A\neq\Phi$. ومنه $\overline{A_1}\times\overline{A_2}\subseteq\overline{A}$.

وبالعكس، لنفرض أنّ $b=(b_1,b_2)\notin\overline{A_1}\times\overline{A_2}$. عندئذ توجد حالتان هما:

إما $b_1\notin\overline{A_1}$ أو $b_2\notin\overline{A_2}$.

فإذا كان $b_1\notin\overline{A_1}$ فإن المجموعة $(H_1-\overline{A_1})\times H_2$ تكون مفتوحة في الفضاء Y حسب المبرهنة (٨)، كما إنها تحوي $\{b\}$ وتقاطعها مع المجموعة $A_1\times A_2$ يساوي المجموعة الخالية، ومن ثم $b\notin\overline{A_1\times A_2}=\overline{A}$.

وإذا كان $b_2\notin\overline{A_2}$ فإننا نستنتج أيضاً أن $b\notin\overline{A}$.

وبذلك ينتج أن: $\overline{A}\subseteq\overline{A_1}\times\overline{A_2}$

إذن $\overline{A}=\overline{A_1\times A_2}=\overline{A_1}\times\overline{A_2}$ وهو المطلوب.

١١) مبرهنة:

لتكن A_i مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري (H_i,d_i) حيث $i=1,2$.

عندئذ:

[$A_1\times A_2$ مغلقة في فضاء الجداء $(H_1\times H_2,d)$] $\Leftrightarrow$ [A_i مغلقة في (H_i,d_i) حيث $i=1,2$]

الإثبات:

لنفرض أن A_i مغلقة في (H_i,d_i)، حيث $i=1,2$. عندئذ $A_1=\overline{A_1}$ و $A_2=\overline{A_2}$. ومنه، حسب المبرهنة السابقة، نجد:

$$(\star) \qquad \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} = A_1 \times A_2$$

وهذا يعني أن $A_1 \times A_2$ مغلقة في الفضاء $H_1 \times H_2$.

وبالعكس، لنفرض أن $A_1 \times A_2$ مغلقة في الفضاء $(H_1 \times H_2, d)$. عندئذ يكون $A_1 \times A_2 = \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ و $A_1 \subseteq \overline{A_1}$ و $A_2 \subseteq \overline{A_2}$.

لنفرض مؤقتاً أن $A_1 \neq \overline{A_1}$. عندها $A_1 \subsetneqq \overline{A_1}$. ومنه يوجد في $\overline{A_1}$ عنصر مثل x بحيث $x \notin A_1$. وبما أن $A_2 \neq \Phi$ فإنه يوجد y بحيث يكون $y \in A_2 \subseteq \overline{A_2}$.
ومنه $(x, y) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ و $(x, y) \notin A_1 \times A_2$ وهذا يؤدي إلى أن: $\overline{A_1} \times \overline{A_2} \neq A_1 \times A_2$ مما يناقض $(\star)$. إذن $A_1 = \overline{A_1}$، وبالتالي A_1 تكون مغلقة.

وبطريقة مماثلة نبرهن أن A_2 تكون مغلقة. وبذلك يتم إثبات المطلوب.

١٢) مبرهنة:

ليكن (H_i, d_i) فضاء مترياً، حيث $i = 1,2$. ولنأخذ فضاء الجداء $(H_1 \times H_2, d)$ للفضائين المفروضين. عندئذ يكون كل من تطبيقي الإسقاط (الأول والثاني) مستمراً بانتظام على منطلقه $H_1 \times H_2$، وبالتالي يكون كل منهما مستمراً على منطلقه.

الإثبات:

لنأخذ تطبيقي الإسقاط:

$$pr_1 : H_1 \times H_2 \to H_1$$
$$pr_2 : H_1 \times H_2 \to H_2$$

حيث $pr_1(x_1, x_2) = x_1$ و $pr_2(x_1, x_2) = x_2$

لأجل كل $x = (x_1, x_2)$ من $H_1 \times H_2$.

ليكن $\varepsilon > 0$. ولنبحث عن $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(pr_1(x), pr_1(y)) < \varepsilon$$

أيْ بحيث يكون:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x_1, y_1) < \varepsilon$$

ولكن $d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$

إذن $d_1(x_1, y_1) \le d(x, y)$.

ومنه يَكفي أخذ δ محققاً للشرط $0 < \delta < \varepsilon$ حتى يتحقق المطلوب.

إذن pr_1 مستمر بانتظام على منطلقه، وبالتالي مستمر على منطلقه.

وبطريقة مشابهة يتم إثبات أن pr_2 مستمر بانتظام على منطلقه.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة: يمكن برهان أن كلاً من pr_1 و pr_2 مستمر على منطلقه بطريقة أخرى مفيدة. فعلى سبيل المثال، إنّ برهان أن pr_2 مستمر على منطلقه يمكن أن يتم كما يلي (وبطريقة مماثلة يثبت أن pr_1 مستمر على منطلقه):
لتكن V مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء H_2. عندئذ يكون $pr_2^{-1}(V) = H_1 \times V$، وبالتالي تكون المجموعة $pr_2^{-1}(V)$ مفتوحة في فضاء الجداء $H_1 \times H_2$. إذن pr_2 مستمر على منطلقه.

١٣) تمرين مشهور:

ليكن $(H_1 \times H_2, d)$ فضاء الجداء لفضائين متريين $(H_1, d_1), (H_2, d_2)$.
لأجل كل عنصر a_1 من H_1 نأخذ التطبيق $f : H_2 \to \{a_1\} \times H_2$، ولأجل كل عنصر a_2 من H_2 نأخذ التطبيق $\varphi : H_1 \to H_1 \times \{a_2\}$، حيث:

$$f(x_2) = (a_1, x_2) \text{ و } \varphi(x_1) = (x_1, a_2)$$

أياً كان $x_1 \in H_1$ وأياً كان $x_2 \in H_2$. عندئذ يكون كل من f, φ تقابلاً ويحافظ على المسافة، وهذا ما يقال عنه إنه تطبيق إيزومتري (متقايس).

الحل:

$$[f(x_2)=f(y_2)\Rightarrow (a_1,x_2)=(a_1,y_2)\Rightarrow x_2=y_2]$$

إذن f متباين.

$$[(a_1,h_2)\in\{a_1\}\times H_2 \Rightarrow \exists h_2\in H_2 : f(h_2)=(a_1,h_2)]$$

إذن f غامر

إذن f تطبيق متباين وغامر، وبالتالي فهو تقابل.

وبطريقة مشابهة نبرهن أن φ تقابل.

$$\begin{aligned} d(f(x_2),f(y_2)) &= d((a_1,x_2),(a_1,y_2)) = \\ &= \max(d_1(a_1,a_1),d_2(x_2,y_2)) = \\ &= d_2(x_2,y_2) \end{aligned}$$

وذلك لأجل أي عنصرين x_2,y_2 من H_2.

وبطريقة مشابهة نبرهن أن φ يحافظ على المسافة.

ملحوظة: إن مستقر f في نص التمرين السابق هو الفضاء المتري الجزئي المغلق $\{a_1\}\times H_2$ من فضاء الجداء $H_1\times H_2$. وإن مستقر φ هو الفضاء المتري الجزئي المغلق $H_1\times\{a_2\}$ من فضاء الجداء $H_1\times H_2$.

١٤) مبرهنة:

ليكن (H_i,d_i) فضائين متريين، حيث $i=1,2$. ولنأخذ فضاء الجداء $(H_1\times H_2,d)$. وليكن $a_1\in H_1$ ولتكن $A\subseteq H_1\times H_2$. ولنأخذ المجموعة:

$$A(a_1)=pr_2(A\bigcap(\{a_1\}\times H_2))$$

عندئذ:

(١) $A(a_1)=\{a_2/a_2\in H_2,(a_1,a_2)\in A\}$

(٢) إذا كانت A مفتوحة في الفضاء $H_1\times H_2$ فإن المجموعة $A(a_1)$ تكون مفتوحة في الفضاء H_2.

(٣) إذا كانت A مفتوحة في $(H_1\times H_2,d)$ فإن $pr_2(A)$ تكون مفتوحة في H_2.

(٤) إذا كانت A مغلقة في الفضاء $H_1\times H_2$ فإن المجموعة $A(a_1)$ تكون مغلقة في الفضاء H_2.

الإثبات:

(١) ليكن $y\in A(a_1)$. عندئذ، يوجد $(h_1,h_2)\in H_1\times H_2$ بحيث يكون $(h_1,h_2)\in A,(h_1,h_2)\in\{a_1\}\times H_2$ و $y=pr_2(h_1,h_2)$، وبالتالي يكون: $h_1=a_1,h_2=y$. ومنه $y\in\{a_2/a_2\in H_2,(a_1,a_2)\in A\}$.

وبالعكس، ليكن $y\in\{a_2/a_2\in H_2,(a_1,a_2)\in A\}$.

عندئذ $a_2=y\in H_2$ و $(a_1,y)\in A$. ومنه $(a_1,y)\in A\bigcap(\{a_1\}\times H_2)$

وبالتالي $y\in pr_2(A\bigcap(\{a_1\}\times H_2))$ أيّ: $y\in A(a_1)$.

(٢) لنفرض أن A مفتوحة، وليكن a_2 أيّ عنصر من $A(a_1)$. عندئذ تكون $a=(a_1,a_2)\in A$. ومنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون:

$$B_d(a,\varepsilon)=B_{d_1}(a_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(a_2,\varepsilon)\subseteq A$$

وبالتالي يكون $B_{d_2}(a_2,\varepsilon)\subseteq A(a_1)$ بملاحظة الآتي:

ليكن $x_2\in B_{d_2}(a_2,\varepsilon)$. عندئذ $d_2(a_2,x_2)<\varepsilon$. وبما أنّ:

$$(a_1,x_2)\in B_{d_1}(a_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(a_2,\varepsilon)=B_d(a,\varepsilon)\subseteq A$$

فإنّ $x_2\in A(a_1)$.

إذن $A(a_1)$ مفتوحة في الفضاء H_2.

(٣) لنفرض أن A مفتوحة في $H_1 \times H_2$. عندئذ يكون $pr_2(A)=\bigcup_{x\in H_1} A(x)$

بملاحظة ما يلي:

ليكن $y \in \bigcup_{x\in H_1} A(x)$. عندئذ، يوجد $x_1 \in H_1$ بحيث يكون $y\in A(x_1)$.

وبما أن: $A(x_1)=pr_2(A\cap(\{x_1\}\times H_2))\subseteq pr_2(A)$

فإننا نجد أن $y \in pr_2(A)$.

وبالعكس، ليكن $y\in pr_2(A)$. عندئذ، يوجد $(x,y)\in A$ بحيث يكون $y=pr_2(x,y)$. ولما كانت $x\in H_1$ و $y\in H_2$ يمكن القول بوجود $(x,y)\in(A\cap(\{x\}\times H_2))$ بحيث يكون $y\in pr_2(x,y)$ وبالتالي $y\in A(x)$، ومن ثم $y\in\bigcup_{x\in H_1}A(x)$.

إذن $pr_2(A)=\bigcup_{x\in H_1}A(x)$ وهذا يؤدي إلى القول إن $pr_2(A)$ مفتوحة وذلك بالاستفادة من الطلب (٢).

(٤) يترك للقارئ.

١٥) **مبرهنة:**

ليكن (H_i,d_i) فضائين متريين، حيث $i=1,2$. ولنأخذ فضاء الجداء $(H_1\times H_2,d)$. وليكن $a_2\in H_2$ ولتكن $A\subseteq H_1\times H_2$. ولنأخذ المجموعة:

$$A(a_2)=pr_1(A\cap(H_1\times\{a_2\}))$$

عندئذ:

$$A(a_2)=\{a_1/a_1\in H_1,(a_1,a_2)\in A\} \quad (١)$$

(٢) إذا كانت A مفتوحة في الفضاء $H_1\times H_2$ فإنّ المجموعة $A(a_2)$ تكون مفتوحة في الفضاء H_1.

(٣) إذا كانت A مفتوحة في $H_1\times H_2$ فإن $pr_1(A)$ تكون مفتوحة في H_1.

(٤) إذا كانت A مغلقة في $H_1\times H_2$ فإن $A(a_2)$ تكون مغلقة في H_1.

الإثبات:

بطريقة مماثلة لإثبات المبرهنة السابقة (١٤).

١٦) **تعاريف:** يقال عن تطبيق مثل $f:(X,d)\to(Y,d')$ إنه **مفتوح** إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كانت المجموعة الجزئية المفتوحة A في المنطلق X فإن صورتها $f(A)$ وفق f تكون مفتوحة في المستقر Y.

ويقال عن f إنه **مغلق** إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

أياً كانت المجموعة الجزئية المغلقة B في المنطلق X فإن صورتها $f(B)$ وفق f تكون مغلقة في المستقر Y.

١٧) **نتيجة:**

ليكن $(H_1\times H_2,d)$ فضاء الجداء لفضائين متريين $(H_1,d_1),(H_2,d_2)$.

عندئذ:

(١) كل من التطبيقين:

$pr_1:H_1\times H_2\to H_1$ و $pr_2:H_1\times H_2\to H_2$ مفتوح.

(٢) ليس من الضروري أن يكون كل من التطبيقين pr_1,pr_2 مغلقاً.

البرهان:

(١) حسب المبرهنتين (١٤) و(١٥).

(٢) مثال: لنأخذ فضاء الجداء $R^2 = R \times R$ للفضاء المتري الحقيقي المألوف R في نفسه. ولنأخذ في هذا الفضاء المجموعة الجزئية المغلقة $A = \{(x,y)/(x,y) \in R^2, x.y = 1\}$. عندئذ نجد أنّ:

$pr_1(A) = pr_2(A) = R - \{0\} =$ (مجموعة جزئية غير مغلقة في الفضاء R)

١٨) مبرهنة:

ليكن $f:(X,\rho) \to (H_1 \times H_2, d)$ تطبيقاً لفضاء متري مثل (X,ρ) في فضاء الجداء $(H_1 \times H_2, d)$ لفضائين متريين $(H_1,d_1),(H_2,d_2)$.

عندئذ تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين:

(١) f مستمر (على X).

(٢) كل من التطبيقين $pr_1 \circ f = f_1, pr_2 \circ f = f_2$ مستمر (على X).

الإثبات:

(١)$\Leftarrow$(٢): لنفرض أن f مستمر. بما أنّ pr_i، حيث $i = 1,2$، مستمر فإنّ التركيب $pr_i \circ f$ يكون مستمراً (لأن تركيب تطبيقين مستمرين يكون تطبيقاً مستمراً).

(٢)$\Leftarrow$(١): لنفرض أن كلاً من التطبيقين $pr_i \circ f = f_i$، حيث $i = 1,2$، مستمر. ولنبرهن أن f مستمر:

ليكن $x \in X$. ولتكن (x_n) متوالية من عناصر X متقاربة من x في الفضاء X، أيْ $x_n \to x$.

ولكن $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n))$ ، $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$،

وأيضاً: $f_1(x_n) \to f_1(x)$ و $f_2(x_n) \to f_2(x)$، لأنّ f_1, f_2 مستمران، إذن $f(x_n) \to f(x)$. وهذا يعني أن f مستمر في x. ولما كانت x نقطة كيفية من X فإن f مستمر في كل نقطة من X، أيْ أن f مستمر على X.

١٩) نتيجة: ليكن $f: V \to H = H_1 \times H_2$ تطبيقاً لفضاء متري (V,ρ) في فضاء الجداء (H,d) للفضائين المتريين $(H_1,d_1),(H_2,d_2)$. ولنفرض أن $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ لأجل كل x من V، حيث $f_1: V \to H_1$، $f_2: V \to H_2$ عبارة عن تطبيقين. وليكن x_0 أيّ عنصر من V. عندئذ:

[f مستمر في x_0 $\Leftrightarrow$ كل من التطبيقين f_1, f_2 مستمر في x_0]

البرهان: يترك للقارئ.

٢٠) مثال: لنأخذ التطبيق (التابع) $f: R \to R^2$ المعرف بالصيغة $f(x) = (x + \sin x, 1 + e^x)$ لأجل كل x من R، حيث R الفضاء الحقيقي المألوف و R^2 هو فضاء الجداء للفضاء R في نفسه. عندئذ يكون f مستمراً.

الحل:

نلاحظ أن التطبيقين $f_1 = pr_1 \circ f$ و $f_2 = pr_2 \circ f$ مستمران لأنّ:

$f_1(x) = x + \sin x$ و $f_2(x) = 1 + e^x$

لأجل كل x من R حيث $f_i: R \to R$ $(i = 1,2)$.

٢١) مثال آخر: لتكن $\{z_n\}$ متوالية من نقاط فضاء الجداء $H = H_1 \times H_2$ لفضائين متريين مثل $(H_1,d_1),(H_2,d_2)$، حيث $z_n = (x_n, y_n)$ لأجل كل n. ولتكن $z = (a,b)$ نقطة من H. عندئذ تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين:

(١) $z_n \to z$ في فضاء الجداء H.

(٢) $pr_i(z_n) \to pr_i(z)$ في الفضاء H_i حيث $i=1,2$.

الحل:

(١)⇐(٢): ينتج من ملاحظة أن كلاً من التطبيقين pr_1, pr_2 مستمر.

(٢)⇐(١): لنفرض أنّ $pr_i(z_n) \to pr_i(z)$ حيث $i=1,2$. ولتكن $B(z,\varepsilon)$ أية كرة مفتوحة، مركزها $z=(a,b)$ ونصف قطرها ε في الفضاء H. عندها يكون:

$$B(z,\varepsilon) = pr_1^{-1}(B(a,\varepsilon)) \bigcap pr_2^{-1}(B(b,\varepsilon))$$

ولكن $pr_1(z_n) \to a$ و $pr_2(z_n) \to b$، إذن يوجد عددان طبيعيان مثل N_1, N_2 بحيث يكون:

$$n \geq N_1 \Rightarrow pr_1(z_n) \in B(a,\varepsilon) \Rightarrow z_n \in pr_1^{-1}(B(a,\varepsilon))$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow pr_2(z_n) \in B(b,\varepsilon) \Rightarrow z_n \in pr_2^{-1}(B(b,\varepsilon))$$

ومنه يوجد $N = \max(N_1, N_2)$ بحيث يكون:

$$n \geq N \Rightarrow z_n \in pr_1^{-1}(B(a,\varepsilon)) \bigcap pr_2^{-1}(B(b,\varepsilon)) = B(z,\varepsilon)$$

إذن $z_n \to z$.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة: يمكن إيجاد مناقشة مماثلة في الفصل الأول دون الحديث عن فضاء الجداء.

٢٢) توطئة: لتكن A جماعة من المجموعات الجزئية في مجموعة مثل X بحيث يتحقق الشرط التالي:

" تقاطع عناصر أية جماعة جزئية منتهية من الجماعة A يساوي مجموعة غير خالية".

ولتكن P جماعة جميع تلك الجماعات التي كل منها تحوي A في X وتحقق كل منها شرطاً مماثلاً للشرط الذي تحققه A.

عندئذ تكون P غير خالية، وتكون P مرتبة وفق علاقة الاحتواء، ويوجد في P عنصر أعظمي.

البرهان:

لتكن $T=\{B_i / i \in I\}$ جماعة جزئية مرتبة كلياً وغير خالية من الجماعة P.

ولتكن $B=\bigcup_{i\in I} B_i$. عندئذ يكون $A \subseteq B$ لأنّ كل واحدة من الجماعات B_i تحوي A.

لنفرض $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ أية جماعة جزئية منتهية من الجماعة B. عندئذ، توجد في T العناصر $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ بحيث يكون:

$$A_1 \in B_{i_1}, A_2 \in B_{i_2}, \ldots, A_m \in B_{i_m}$$

ولما كانت T مرتبة كلياً فإنّ واحدة من هذه الجماعات، ولتكن B_{i_t}، تحوي الجماعة $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$، وبالتالي، ولأن الجماعة B_{i_t} تحقق شرطاً مماثلاً للشرط الذي تحققه A في نص التوطئة، يكون $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_m \neq \Phi$.

ومنه يمكن القول إن الجماعة B تحقق شرطاً مماثلاً للشرط الذي تحققه A في نص التوطئة. وهذا يعني أن $B \in P$.

وبعد ملاحظة أن B يكون حداً أعلى للجماعة T نستنتج، حسب تمهيدية زورن، أنه يوجد في P عنصر أعظمي وهو المطلوب.

ملاحظة: يمكن العودة إلى أحد كتب الجبر للتعرّف على تمهيدية زورن. فمثلاً، كتاب: الجبر المجرد – تأليف الدكتور عبد الواحد أبو حمدة.

٢٣) **توطئة:** إذا حافظنا على رموز وشروط التوطئة السابقة، ورمزنا بـــ M للعنصر الأعظمي الموجود في P، فإنّ هذا العنصـــر M يتمتـــع بالخاصـــتين الآتيتين:

(١) تقاطع أيّ عدد محدود من عناصر الجماعة M يكون عنصراً من M.

(٢) إذا كان $K \cap M_t \neq \Phi$ من أجل كل عنصر M_t مـــن الجماعـــة M فإن $K \in M$.

البرهان:

(١) يكفي برهان أن تقاطع أيّ عنصرين B, H من عناصـــر الجماعـــة M يكون عنصراً من M:

لنفرض أن $D = H \cap B$. ولتكن $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ أية جماعة جزئية منتهية من الجماعة $M \cup \{D\}$. عندئذ توجد حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان $D \notin \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ فإنّ $\{A_1, A_2, ..., A_m\} \subseteq M$ وبالتالي يكون $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m \neq \Phi$.

الحالة الثانية: إذا كان $D \in \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ فإنه يمكن افتـــراض $D = A_1$، وهذا لا يمس عمومية المناقشة، فيكون:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m = D \cap A_2 \cap ... \cap A_m = H \cap B \cap A_2 \cap ... \cap A_m \neq \Phi$$

ذلك لأنّ: $H, B, A_2, ..., A_m \in M$.

إذن $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m \neq \Phi$ في الحالات جميعها. ومنه $M \cup \{D\} \in P$ حيث P هي الجماعة المذكورة في التوطئة الســـابقة. ومنـــه، باعتبـــار أن M عنصر أعظمي في P و $M \subseteq M \cup \{D\}$، ينتج أن $M = M \cup \{D\}$ ومن ثم $D \in M$.

(٢) لنفرض أن $K \cap M_t \neq \Phi$ لأجل كل عنصر M_t من الجماعة M. عندها يكون $K \neq \Phi$.

وأيضـــاً، لـــتكن $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ أيـــة جماعـــة جزئيـــة منتهيـــة مـــن الجماعة $M \cup \{K\}$.

عندئذ توجد حالتان:

الحالة الأولى: إذا كانت $K \notin \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ فإنّ $\{A_1, A_2, ..., A_m\} \subseteq M$ وبالتالي يكون $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m \neq \Phi$.

الحالة الثانية: إذا كانت $K \in \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ فيمكن افتـــراض أن $K = A_1$، وبالتالي يكون $\{A_2, ..., A_m\} \subseteq M$، ومن ثم:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m = K_1 \cap (A_2 \cap ... \cap A_m) \neq \Phi$$

لأنّ: $(A_2 \cap ... \cap A_m) \in M$ استناداً إلى الخاصة (١) السابقة.

إذن: $M \cup \{K\} \in P$.

ولكن $M \subseteq M \cup \{K\}$ إذن $M = M \cup \{K\}$ لأن M عنصـــر أعظمـــي في P. ومنه $K \in M$ وهو المطلوب.

٢٤) **مبرهنة تيخونوف:** فضاء الجداء لفضـــائين متـــربين متراصـــين يكـــون متراصاً.

الإثبات:

لنفرض أن الفضاء المتري (H_i, d_i)، حيث $i = 1, 2$، هو فضـــاء متـــراص. ولنفـــرض أنّ $(H = H_1 \times H_2, d)$ هـــو فضـــاء الجـــداء للفضـــائين المتراصين H_1, H_2. ولتكن $A = \{F_j / j \in J\}$ أية جماعة من المجموعـــات الجزئية المغلقة F_j في الفضاء H بحيث يتحقق الشرط (★) التالي:

" تقاطع عناصر أية جماعة جزئية منتهية من هذه الجماعة يساوي مجموعة غير خالية".

ولنبرهن أن تقاطع هذه الجماعة A غير خال، أيْ $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \Phi$ وذلك كما يلي:

حسب التوطئة (٢٢) يوجد عنصر أعظمي مثل $M=\{M_t / t\in\Omega\}$ في جماعة جميع الجماعات التي كل منها تحوي A والتي كل منها تحقق شرطاً مماثلاً للشرط (★) المذكور قبل قليل.

ثم لنضع $L=\{\overline{M_t}/t\in\Omega\}$، حيث $\overline{M_t}$ هي لصاقة M_t في الفضاء H، فيكون $A\subseteq L$ بملاحظة ما يلي:

$$F_j\in A \Rightarrow F_j=\overline{F_j}, F_j\in M \Rightarrow F_j\in L$$

ولما كانت الجماعة $M=\{M_t/t\in\Omega\}$ تحقق شرطاً مماثلاً للشرط (★) فإن الجماعة $\{pr_i(M_t)/t\in\Omega\}$ من المجموعات الجزئية في الفضاء H_i، حيث $i=1,2$، تكون جماعة محققه لشرط مماثل للشرط (★).

ومنه فالجماعة $\{\overline{pr_i(M_t)}/t\in\Omega\}$ تكون جماعة من المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاء H_i، حيث $\overline{pr_i(M_t)}$ هي لصاقة $pr_i(M_t)$ في الفضاء H_i، $i=1,2$، كما أنها جماعة محققة لشرط مماثل للشرط (★).

وبما أن الفضاء H_i متراص، حيث $i=1,2$، فإنّ $\bigcap_{t\in\Omega}\overline{pr_i(M_t)}\neq\Phi$، وهذا يعني أنه يوجد $h_i\in H_i$ بحيث يكون $h_i\in\overline{pr_i(M_t)}$ لأجل كل t من Ω، وهذا بدوره يكافئ وجود $h_i\in H_i$ بحيث يكون $B(h_i,\varepsilon)\cap pr_i(M_t)\neq\Phi$ لأجل كل t من Ω، حيث $B(h_i,\varepsilon)$ هي كرة مفتوحة في الفضاء (H_i,d_i)، مركزها h_i ونصف قطرها ε، $i=1,2$.

لنضع $h=(h_1,h_2)$ ولنأخذ الكرة المفتوحة الكيفية $B(h,\varepsilon)$ التي مركزها h ونصف قطرها ε في فضاء الجداء H فنجد أنّ:

$$B(h,\varepsilon)=pr_1^{-1}(B(h_1,\varepsilon))\cap pr_2^{-1}(B(h_2,\varepsilon))$$

ولكن:

$$pr_1^{-1}(B(h_1,\varepsilon))\cap M_t=(B(h_1,\varepsilon)\times H_2)\cap M_t\neq\Phi$$
$$pr_2^{-1}(B(h_2,\varepsilon))\cap M_t=(H_1\times B(h_2,\varepsilon))\cap M_t\neq\Phi$$

لأجل كل t من Ω، وذلك لأنّ $B(h_i,\varepsilon)\cap pr_i(M_t)\neq\Phi$ لأجل كل t من Ω.

إذن، استناداً إلى (٢) من التوطئة (٢٣)، يمكننا أن نكتب:
$pr_i^{-1}(B(h_i,\varepsilon))\in M$ حيث $i=1,2$. ومنه، بسبب الشرط المماثل للشرط (★) والذي تحققه الجماعة M، يكون لدينا:

$$B(h,\varepsilon)\cap M_t = pr_1^{-1}(B(h_1,\varepsilon))\cap pr_2^{-1}(B(h_2,\varepsilon))\cap M_t\neq\Phi$$

وذلك أياً كان t من Ω. ومنه $h\in\overline{M_t}$ لأجل كل t من Ω. إذن، يوجد $h\in H$ بحيث يكون $h\in\bigcap_{t\in\Omega}\overline{M_t}$ وبالتالي يكون $\bigcap_{t\in\Omega}\overline{M_t}\neq\Phi$. ومنه، باعتبار أن $A\subseteq L$، يكون $\bigcap_{j\in J}F_j\neq\Phi$.

ومنه فالفضاء H يكون متراصاً حسب المبرهنة (٣-١٣). وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-١٧- جداء فضائين تبولوجيين:

١) **تعريف:** ليكن $(H_1,\tau_1),(H_2,\tau_2)$ فضائين تبولوجيين. إن التبولوجيا الجداء τ على المجموعة $H=H_1\times H_2$ هي أخشن تبولوجيا على H تجعل تطبيقي الإسقاط $pr_i:H_1\times H_2\to H_i$ $(i=1,2)$ مستمرين. هذا ونلاحظ أنه إذا كانت A_i مفتوحة في H_i، حيث $i=1,2$، فإنّ:

$$pr_1^{-1}(A_1)=A_1\times H_2\in\tau \quad (١)$$
$$pr_2^{-1}(A_2)=H_1\times A_2\in\tau \quad (٢)$$
$$(H_1\times A_2)\cap(A_1\times H_2)=A_1\times A_2\in\tau \quad (٣)$$

ومنه يمكن استنتاج أنّ τ هي تلك التبولوجيا التي تولّدها الجماعة:

$$\Omega=\{A_1\times A_2 / A_1\in\tau_1, A_2\in\tau_2\}$$

حيث Ω تتمتع بالخواص الآتية:

(١) $H\in\Omega$ لأن $H=H_1\times H_2$ و $H_1\in\tau_1$ و $H_2\in\tau_2$.

(٢) $\Phi\in\Omega$ لأن $\Phi=\Phi\times\Phi$ و $\Phi\in\tau_i$ و $i=1,2$.

(٣) إذا كان $A=A_1\times A_2\in\Omega$ و $B=B_1\times B_2\in\Omega$ فإنّ $A\cap B\in\Omega$.

ذلك لأنّ:

$$A\cap B=(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=$$
$$=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)\in\Omega$$

بعد ملاحظة أنّ $A_i\cap B_i\in\tau_i$ حيث $i=1,2$.

ومنه فالتبولوجيا τ هي جماعة الاجتماعات الممكنة لمجموعات من الشكل $A_1\times A_2$ حيث $A_i\in\tau_i$ $(i=1,2)$.

هذا ويقال أحياناً عن τ إنها جداء التبولوجيتين τ_1,τ_2، أيْ إنها $\tau_1\times\tau_2$.

ويقال عن (H,τ) إنه فضاء الجداء أو **جداء الفضائين التبولوجيين** (H_i,d_i) حيث $i=1,2$.

٢) **مبرهنة:** ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً. إن الشرط اللازم والكافي كي يكون X مترابطاً هو أن يكون كل تطبيق مستمر مثل $f:X\to\{0,1\}$ ثابتاً.

[يتم البرهان بطريقة مشابهة للبرهان الذي تمّ لمثل هذه المبرهنة للفضاءات المترية، حيث $\{0,1\}$ فضاء بالنسبة للتبولوجيا المتقطعة].

٣) **مبرهنة:** ليكن (H_1,τ_1) و (H_2,τ_2) فضائين تبولوجيين. ولنأخذ فضاء الجداء (H,τ)، أيْ: $H=H_1\times H_2$ و τ هي تبولوجيا الجداء. عندئذ:

H_1,H_2 مترابطان $\Leftrightarrow$ H مترابط

الإثبات:

($\Leftarrow$) لنفرض أن H_1,H_2 مترابطان. وليكن $f:H\to\{0,1\}$ أيّ تطبيق مستمر، منطلقه H ومستقره $\{0,1\}$. ولنثبّت بشكل كيفي عنصرين، أحدهما $y_1\in H_1$ والآخر $x_2\in H_2$.

ثم لنأخذ التطبيقين $\varphi_{x_2}:H_1\to\{0,1\}$ و $\varphi_{y_1}:H_2\to\{0,1\}$ المعرفين كما يلي:

$$\varphi_{x_2}(h_1)=f(h_1,x_2) \text{ و } \varphi_{y_1}(h_2)=f(y_1,h_2)$$

حيث h_1 عنصر كيفي من H_1 وحيث h_2 عنصر كيفي من H_2. عندها نجد أن كلاً من φ_{x_2} و φ_{y_1} مستمر على منطلقه بملاحظة الآتي:

$$H_1\xrightarrow{\lambda_1}H_1\times\{x_2\}\subset H_1\times H_2\xrightarrow{f}\{0,1\}$$
$$H_2\xrightarrow{\lambda_2}\{y_1\}\times H_2\subset H_1\times H_2\xrightarrow{f}\{0,1\}$$

حيث $\lambda_1(h_1)=(h_1,x_2)$ لأجل كل h_1 من H_1،

$\lambda_2(h_2)=(y_1,h_2)$ لأجل كل h_2 من H_2،

$$\varphi_{x_2}=f\circ\lambda_1 \text{ و } \varphi_{y_1}=f\circ\lambda_2$$

λ_i تقابل مستمر لأجل $i=1,2$ (تحقق من كل ذلك).

ولما كان H_1 مترابطاً فإن التطبيق φ_{x_2} يكون ثابتاً، وبالتالي:

$\varphi_{x_2}(h_1)=\varphi_{x_2}(y_1)$ أيْ: $f(h_1,x_2)=f(y_1,x_2)$ لأجل كل h_1 وكل y_1 من H_1.

ولما كان H_2 مترابطاً فإنّ التطبيق φ_{y_1} يكون ثابتاً أيضاً، وبالتالي:

$\varphi_{y_1}(h_2)=\varphi_{y_1}(y_2)$ أيْ: $f(y_1,h_2)=f(y_1,y_2)$ لأجل كل h_2 وكل y_2 من H_2.

ومنه ينتج أنه إذا كان $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ أيّ عنصرين من H فإنّ: $f(x)=f(x_1,x_2)=f(y_1,x_2)=f(y_1,y_2)=f(y)$

وهذا يعني أن f ثابت.

إذن H مترابط.

($\Rightarrow$) لنفرض أن H مترابط. ومنه، باعتبار أنّ $pr_i : H \to H_i$ $(i=1,2)$ مستمر، ينتج أنّ H_i مترابط حيث $i=1,2$. (برهن ذلك).

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-١٨- الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ:

ليكن K حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد العقدية. وليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K.

١) **تعريف: النظيم** على V هو تطبيق مثل $f:V\to R$، حيث $f(x)=\|x\|$ لأجل كل x من V، وهذا التطبيق يتمتع بالخواص التالية:

(١) $\|x\|\geq 0$ لأجل كل x من V.

(٢) $[\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_V]$

(**ملاحظة:** عندما لا نكتب الدليل V للشعاع الصفري فإنه يجب أن نكون قادرين على التمييز بين الشعاع الصفري والعدد صفر)

(٣) $\|\lambda x\|=|\lambda|.\|x\|$ لأجل كل x من V وكل λ من K.

(٤) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ لأجل كل x,y من V.

٢) **توطئة:** إذا كان $f:V\to R$ أيّ نظيم على V سنفترضه معيناً بـ $f(x)=\|x\|$ لأجل كل x من V فإنّ التطبيق $d:V\times V\to R$ المعرّف

بالصيغة $d(x,y)=\|x-y\|$ لأجل أي عنصرين x,y من V، يكون مسافة على V، محققة للشرطين التاليين:

(١) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ لأجل أية عناصر x,y,z من V.

(٢) $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|.d(x,y)$ لأجل أيّ عنصرين x,y من V وأيّ عنصر λ من K.

البرهان:

إن التطبيق d مسافة على V بسبب ما يلي [يفرض x,y,z أية عناصر من V]:

$$[d(x,y)=\|x-y\|\geq 0]$$
$$[d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0_V \Leftrightarrow x=y]$$
$$[d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1).(y-x)\|=$$
$$=|-1|.\|y-x\|=\|y-x\|=d(y,x)]$$
$$[d(x,z)=\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|=$$
$$=d(x,y)+d(y,z)]$$

كما إن d تحقق الشرطين (١) و(٢) المذكورين في النص بملاحظة ما يلي [يفرض x,y,z أية عناصر من V و λ أيّ عنصر من الحقل K]:

$$[d(x+z,y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|=d(x,y)]$$
$$[d(\lambda x,\lambda y)=\|\lambda x-\lambda y\|=\|\lambda.(x-y)\|=$$
$$=|\lambda|.\|x-y\|=|\lambda|.d(x,y)]$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣) **تعريف:** يقال عن المسافة d، المذكورة في نص التوطئة السابقة، إنها المسافة **المشتقة** (أو المسافة المولدة) من النظيم المعرف في التوطئة ذاتها.

٤) الفضاء المنظم:

تعريف (١): الفضاء المنظم هو فضاء شعاعي مزود بنظيم معرف عليه.

تعريف (٢): لنفرض أن V فضاء منظم بالنسبة للنظيم $f: V \to R$ المعيّن بـ $f(x)=\|x\|$ لأجل كل x من V. يقال عن العدد الحقيقي $\|x\|$ إنه **نظيم الشعاع** x.

٥) **نتيجة:** إذا كان V فضاء شعاعياً منظماً بالنسبة للنظيم $\|x\|$، فإن V يكون فضاء مترياً بالنسبة للمسافة $d(x,y)=\|x-y\|$، وبالتالي يكون فضاء تبولوجياً. زد على ذلك فإنّ:

[$d(x,0_V)=\|x-0_V\|=\|x\|$ لأجل كل x من V]

و[$d(x,y)=d(x-y,y-y)=d(x-y,0_V)$ لأجل كل عنصرين x,y من V]

البرهان:

يترك للقارئ وهو نتيجة مباشرة للتعاريف وللتوطئة السابقة.

٦) **نتيجة:** ليكن V فضاء شعاعياً. ولتكن $f: V^2 \to R$ مسافة على V بحيث تحقق الشرطين الآتيين [يفرض x,y,z أية عناصر من V و λ أيّ عنصر من الحقل K]:

(١) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$

(٢) $d(\lambda x,0)=|\lambda|.d(x,0)$

عندئذ:

$d(x,y)=d(x-y,0_V)$ لأجل كل عنصرين x,y من V ويكون التطبيق $f: V \to R$، المعرف بـ $f(x)=d(x,0_V)=\|x\|$ لأجل كل x من V، نظيماً على V مولداً للمسافة d.

البرهان:

إنّ $d(x,y)=d(x-y,y-y)=d(x-y,0_V)$

لأجل كل عنصرين x,y من V.

وإنّ:

(١) $\|x\|=d(x,0_V)\ge 0$ لأجل كل x من V

(٢) $[\|x\|=0 \Leftrightarrow d(x,0_V)=0 \Leftrightarrow x=0_V]$

(٣) $\|\lambda.x\|=d(\lambda x,0_V)=|\lambda|.d(x,0_V)=|\lambda|.\|x\|$ لأجل كل x من V، وكل λ من الحقل K.

(٤)
$$\begin{aligned}\|x+y\| &= d(x+y,0_V)=d(x-(-y),0_V)\\ &= d(x,-y)\le d(x,0_V)+d(0_V,-y)\\ &= d(x,0_V)+d(-y,0_V)=d(x,0_V)+|-1|d(y,0_V)\\ &= d(x,0_V)+d(y,0_V)=\|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

وذلك لأجل أي عنصرين x,y من V.

إذن f نظيم على V.

وأيضاً $d(x,y)=d(x-y,0_V)=\|x-y\|$، لأجل كل عنصرين x,y من V وهذا يعني أن d مولدة من النظيم f.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٧) **ملاحظة:** لقد ظهرت بعض الخواص خلال عرض البرهان السابق وغيره وسنعرضها بشكل صريح في النتيجة الآتية:

نتيجة:

ليكن V فضاء منظماً بالنسبة للنظيم $\|x\|$ حيث x عنصر كيفي من V. عندئذ:

(١) $\|x_1+x_2+....+x_n\| \le \|x_1\|+\|x_2\|+....+\|x_n\|$ من أجل أيّ عدد محدود من العناصر $x_1,x_2,....,x_n$ من V.

(٢) $\|-x\|=\|x\|$ لأجل كل x من V.

(٣) $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\| \le \|x\|+\|y\|$ لأجل أيّ عنصرين x,y من V.

(٤) $\|\lambda x+\mu y\| \le |\lambda|.\|x\|+|\mu|.\|y\|$ لأجل أيّ عنصرين x,y من V وأيّ عنصرين λ,μ من الحقل K.

البرهان:

(١) تبرهن العلاقة بالاستقراء الرياضي.

(٢) $\|-x\|=\|(-1).x\|=|-1|.\|x\|=\|x\|$

(٣) $\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|$

ومنه:

$$\|x-y\|\ge\|x\|-\|y\|$$

وكذلك:

$$\|y-x\|\ge\|y\|-\|x\|$$

ولكن $\|y-x\|=\|x-y\|$ إذن:

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|\le\|x\|+\|y\|$$

(٤) $\|\lambda x+\mu y\|\le\|\lambda x\|+\|\mu y\|=|\lambda|.\|x\|+|\mu|.\|y\|$

٨) **تعريف فضاء باناخ:** فضاء باناخ هو فضاء منظم وتام.

٩) أمثلة:

(١) R يكون فضاء باناخ، بالنسبة لنظيم القيمة المطلقة بملاحظة ما يلي:

$|x|\ge 0$ لأجل كل عدد حقيقي x.

$[|x|=0 \Leftrightarrow x=0]$

$|\lambda.x|=|\lambda|.|x|$ لأجل كل عدد حقيقي x ولأجل كل λ من R

$|x+y|\le|x|+|y|$ لأجل أيّ عنصرين x,y من R

إذن R فضاء شعاعي منظم.

ومنه، باعتبار أن هذا الفضاء R تام، نستنتج أنه يكون فضاء باناخ.

(٢) لنأخذ المجموعة $C[0,1]$ التي هي مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة على المجال المغلق $I=[0,1]$. عندئذ نجد أن $C[0,1]$ فضاء شعاعي على الحقل R بالنسبة لجمع التوابع، وللضرب بعنصر من الحقل:

$$(f+\psi)(x)=f(x)+\psi(x)$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda[f(x)]$$

وذلك من أجل كل x من I وكل λ من R وكل f,ψ من $C[0,1]$.

ومنه، بسبب كون التابع الحقيقي المستمر على مجال مغلق محدوداً، فيمكن وضع: $\|f\|=\sup\{|f(x)|/x\in I\}$

فيصبح لدينا التطبيق: $\varphi: C[0,1]\to R$، المعرف بـ: $\varphi(f)=\|f\|$، والذي يتمتع بالخواص التالية:

أياً كان f من الفضاء الشعاعي فإنّ $|f(x)|\ge 0$ لأجل أي x من I، وبالتالي فإن $\|f\|\ge 0$.

وأيضاً:

$$\|f\|=0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)|/x\in I\}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad |f(x)|=0 \text{ لأجل كل } x \text{ من } [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=0 \text{ لأجل كل } x \text{ من } [0,1] \Leftrightarrow f=0$$

وأيضاً [يفرض f من الفضاء الشعاعي المدروس وبفرض λ من الحقل R]:

$$\|\lambda f\| = \sup\{|(\lambda f)(x)| / x\in I\}$$
$$= \sup\{|\lambda[f(x)]| / x\in I\} = \sup\{|\lambda|.|f(x)| / x \in I\}$$
$$= |\lambda| \sup\{|f(x)|/x\in I\} = |\lambda|.\|f\|$$

وأخيراً:

ليكن f_1, f_2 أيّ عنصرين من الفضاء الشعاعي $C[0,1]$ المدروس. ولـيكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. عندها يوجد في I عنصر مثل x_0 بحيث يكون:

$$\|f_1+f_2\| = \sup\{|(f_1+f_2)(x)| / x\in I\}$$
$$= \sup\{|f_1(x)+f_2(x)| / x\in I\}$$
$$\le |f_1(x_0)+f_2(x_0)|+\varepsilon \le |f_1(x_0)|+|f_2(x_0)|+\varepsilon$$
$$\le \sup\{|f_1(x)| / x\in I\}+\sup\{|f_2(x)| / x\in I\}+\varepsilon$$
$$= \|f_1\|+\|f_2\|+\varepsilon$$

ومن هذا ينتج أن:

$$\|f_1+f_2\| \le \|f_1\|+\|f_2\|+\varepsilon \qquad (\star)$$

وذلك لأجل كل عدد حقيقي موجب تماماً ε.

ومنه $\|f_1+f_2\| \le \|f_1\|+\|f_2\|$ بملاحظة الآتي:

لنفترض مؤقتاً أنّ $\|f_1+f_2\| > \|f_1\|+\|f_2\|$. عندئذ يكون:

$$h = \|f_1+f_2\|-\|f_1\|-\|f_2\| > 0$$

ومنه، بوضع $\varepsilon = \frac{h}{2}$، يكون:

$$\|f_1+f_2\| > \|f_1\|+\|f_2\|+\frac{h}{2}$$

أيْ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون:

$$\|f_1+f_2\| > \|f_1\|+\|f_2\|+\varepsilon$$

وهذا يناقض $(\star)$.

(٣) لنأخذ الفضاء الشعاعي $V=R^n$، حيث $n\ge 1$، بالنسبة للجمع وللضـرب بعدد حقيقي:

$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \text{ و } \lambda.x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

وذلك أياً كان $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ من V وأياً كان λ من الحقل R. عندئذ يكون كل من التطبيقات الثلاثة الآتية نظيماً على V:

$$f_1 : V\to R, \qquad f_1(x)=\|x\|=|x_1|+\dots+|x_n|$$
$$f_2 : V\to R, \qquad f_2(x)=\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}$$
$$f_{31} : V\to R, \qquad f_3(x)=\|x\|=\sup(|x_1|,\dots,|x_n|)$$

أما التطبيق $\psi : V\to R$، حيث $\psi(x)=|x_1|$ وحيث $n\ge 2$، فليس نظيماً.

أثبت صحة كل ما ذكر قبل قليل.

(٤) لنأخذ الفضاء الشعاعي $V=C[0,1]$ المذكور في المثال (٢). إن كلاً من التطبيقين الآتيين يكون نظيماً على V:

$$f\mapsto \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$
$$f\mapsto \|f\| = \sup\{|f(t)| / t\in I\}$$

وذلك بملاحظة ما يلي:

لنفرض أن f,ψ أيّ عنصرين من V وأن λ أيّ عنصر من الحقل R.

عندها:

$$|f(t)| \geq 0 (\forall t \in I) \Rightarrow \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt \geq 0$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(t)|\,dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$$

$$\begin{aligned}\|\lambda.f\| &= \int_0^1 |(\lambda f)(t)|\,dt = \int_0^1 |\lambda|.|f(t)|\,dt \\ &= |\lambda|.\int_0^1 |f(t)|\,dt = |\lambda|.\|f\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f+\psi\| &= \int_0^1 |(f+\psi)(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)+\psi(t)|\,dt \\ &\leq \int_0^1 (|f(t)|+|\psi(t)|)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |\psi(t)|\,dt \\ &= \|f\|+\|\psi\|\end{aligned}$$

وبذلك يكون $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ نظيماً على V.

ومن أجل برهان أن التطبيق الثاني نظيم على V نفرض أن $f,\psi \in V$ و $\lambda \in R$ فيكون لدينا:

$$|f(t)| \geq 0 (\forall t \in I) \Rightarrow \|f\| = \sup\{|f(t)| / t \in I\} \geq 0$$

$$\begin{aligned}\|f\| = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(t)| / t \in I\} = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = 0 (\forall t \in I) \\ &\Leftrightarrow f(t) = 0 (\forall t \in I) \Leftrightarrow f = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \sup\{|(\lambda f)(t)| / t \in I\} = \sup\{|\lambda[f(t)]| / t \in I\} \\ &= \sup\{|\lambda|.|f(t)| / t \in I\} = |\lambda| \sup\{|f(t)| / t \in I\} \\ &= |\lambda|.\|f\|\end{aligned}$$

$$|(f+\psi)(t)| = |f(t)+\psi(t)| \leq |f(t)| + |\psi(t)| \leq \|f\| + \|\psi\|$$

وذلك أياً كان t من I.

ومنه:

$$\|f+\psi\| = \sup\{|(f+\psi)(t)| / t \in I\} \leq \|f\| + \|\psi\|$$

وبذلك يتم برهان المطلوب.

١٠) **نتيجة:** ليكن V فضاء شعاعياً غير صفري. ولنفترض أنّ V منظم بالنسبة لنظيم مثل $\|x\| \mapsto x$. ولتكن d المسافة المولدة من هذا النظيم. ولتكن y أيــة نقطة من V وليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. ولنأخذ الكرة المفتوحة التي مركزها y ونصف قطرها ε:

$$B(y,\varepsilon) = \{x / x \in V, d(x,y) < \varepsilon\} = \{x / x \in V, \|x-y\| < \varepsilon\}$$

ثم لنأخذ الكرة المغلقة التي مركزها y ونصف قطرها ε والتـي سـنرمز لهـا بالرمز $H(y,\varepsilon)$:

$$H(y,\varepsilon) = \{x / x \in V, d(x,y) \leq \varepsilon\} = \{x / x \in V, \|x-y\| \leq \varepsilon\}$$

ثم لنأخذ القشرة الكروية (السطح الكروي) التي مركزها y ونصف قطرهـا ε والتي سنرمز لها بالرمز $S(y,\varepsilon)$:

$$S(y,\varepsilon) = \{x / x \in V, d(x,y) = \varepsilon\} = \{x / x \in V, \|x-y\| = \varepsilon\}$$

عندئذ يكون لدينا:

$$\overline{B(y,\varepsilon)} = H(y,\varepsilon)$$

أيْ: لصاقة الكرة المفتوحة التي مركزها y ونصف قطرها ε هي الكرة المغلقة التي مركزها y ونصف قطرها ε.

$$B(y,\varepsilon) = [H(y,\varepsilon) \text{ داخل}]$$

أيْ: داخل الكرة المغلقة التي مركزها y ونصف قطرها ε هي الكرة المفتوحة التي مركزها y ونصف قطرها ε.

$$Fr(B(y,\varepsilon)) = Fr(H(y,\varepsilon)) = S(y,\varepsilon)$$

أيْ: محيط الكرة المغلقة (المفتوحة) التي مركزها y ونصف قطرها ε هو القشرة الكروية التي مركزها y ونصف قطرها ε.

$$\delta(B(y,\varepsilon)) = \delta(H(y,\varepsilon)) = 2\varepsilon$$

أيْ: قطر الكرة المغلقة (المفتوحة) يساوي 2ε أيْ ضعفي نصف قطرها.

البرهان:

سنكتفي بإثبات أن $H(y,\varepsilon) \subseteq \overline{B(y,\varepsilon)}$ ونترك برهان كل طلب آخر في نص هذه النتيجة كتمرين للقارئ.

ولإثبات الاحتواء المطلوب نلاحظ أنه يكفي برهان أن كل نقطة x من $S(y,\varepsilon)$ تكون ملاصقة للكرة المفتوحة $B(y,\varepsilon)$:

لتكن $x \in S(y,\varepsilon)$. عندها $d(x,y)=\|x-y\|=\varepsilon$. ولنأخذ المتوالية (x_n)، حيث $x_n = \frac{1}{n}y + (1-\frac{1}{n})x$ [لا تنس أن y تعدّ الآن نقطة ثابتة في الفضاء المدروس]، فنجد أن هذه المتوالية تحقق الشروط الآتية:

$$d(x_n,y)=\|x_n-y\| = \left\|(1-\frac{1}{n})(x-y)\right\|$$
$$= \left|1-\frac{1}{n}\right|.\|x-y\| = (1-\frac{1}{n}).\varepsilon < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x_n \in B(y,\varepsilon)$ لأجل كل $n \ge 1$. كما إن $x_n \to x$ لأنّ:

$$d(x_n,x) = \|x_n-x\| = \left\|\frac{1}{n}(y-x)\right\| = \frac{1}{n}\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{n} \to 0$$

إذن $S(y,\varepsilon) \subseteq \overline{B(y,\varepsilon)}$ وبهذا يتم إثبات ما أردناه.

٣-١٩- التطبيقات الخطية:

١) **تعريف:** ليكن V,W فضائين شعاعيين على الحقل R.

يقال عن تطبيق مثل $f:V \to W$ إنه **خطي** إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$
$$f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$$

وذلك لأجل أي عنصرين x,y من V وأيّ λ من الحقل R.

٢) **مبرهنة:** ليكن V,W فضائين شعاعيين على الحقل R نفسه. ولنفرض أن هذين الفضائين منظمان بالنسبة لنظيمين معينين (وسنرمز لهما بالرمز ذاته وهذا لا يمس عمومية المناقشة).

وليكن $f:V \to W$ أيّ تطبيق خطي، منطلقه V ومستقره W. عندئذ تكون القضايا الآتية متكافئة:

(١) f مستمر بانتظام على V.

(٢) f مستمر على V.

(٣) f مستمر عند 0_V.

(٤) يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل r بحيث يكون $\|f(x)\| \le r.\|x\|$ من أجل كل x من V.

الإثبات:

(١) $\Rightarrow$ (٢): وضوحاً.

(٢) $\Rightarrow$ (٣): وضوحاً.

(٣)⇐(٤): لنفرض أنّ القضية (٣) صحيحة. أيْ لنفرض أنّ f مستمر عند 0_V. بما أن $f(0_V)=0_W$ فلأجل العدد الحقيقي الموجب تماماً $\varepsilon=1$ يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل t بحيث يكون الاقتضاء الآتي صحيحاً:

$$\forall x\in V:[\|x-0_V\|\le t\Rightarrow$$
$$\|f(x)-f(0_V)\|=\|f(x)-0_W\|=\|f(x)\|\le 1=\varepsilon]$$

ليكن، الآن، x أيّ عنصر من V. إذا كان $x=0_V$ فإن $f(x)=0_W$ وبالتالي $\|x\|=0$، $\|f(x)\|=0$ وبالتالي $\|f(x)\|\le r.\|x\|$ لأجل أيّ $r>0$.

وإذا كان $x\ne 0_V$ فإنه يكون لدينا ما يلي:

إنّ $\|x\|\ne 0$. لنأخذ $y=\frac{tx}{\|x\|}$ فيكون $\|y\|=\left\|\frac{tx}{\|x\|}\right\|=t$ وبالتالي، حسب الاقتضاء السابق، يكون: $\|f(y)\|\le 1$

وهذا يعني أن:

$$1\ge\|f(y)\|=\left\|\frac{t}{\|x\|}.f(x)\right\|=\left|\frac{t}{\|x\|}\right|\|f(x)\|=\frac{t}{\|x\|}.\|f(x)\|$$

وبالتالي:

$$\|f(x)\|\le\frac{1}{t}.\|x\|$$

ومنه يوجد $r=\frac{1}{t}>0$ بحيث يكون $\|f(x)\|\le r.\|x\|$ لأجل كل $x\ne 0_V$ من V.

وبذلك تكون القضية (٤) صحيحة.

(٤)⇐(١): لنفرض أن القضية (٤) صحيحة. وليكن $\varepsilon>0$. عندئذ يوجد $\delta=\frac{\varepsilon}{r}>0$ بحيث يكون الاقتضاء الآتي صحيحاً:

$$\forall x,y\in V:[\|x-y\|\le\delta\Rightarrow$$
$$\|f(x)-f(y)\|=\|f(x-y)\|\le r.\|x-y\|\le r.\delta=\varepsilon]$$

إذن f مستمر بانتظام على V، أيْ أن القضية (١) صحيحة.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣-٢٠- فضاء الجداء الداخلي:

١) **تعريف:** ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K، حيث K هو حقل الأعداد الحقيقية R أو حقل الأعداد العقدية C. يقال عن تطبيق مثل $f:V^2\to K$، حيث نرمز لقاعدة ربطه بالرمز $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ لأجل كل عنصرين x,y من V، إنه **جداء داخلي** على الفضاء V إذا وفقط إذا كان يحقق الشروط التالية:

(١) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ لأجل أيّ عنصرين x,y من V [$\overline{\langle y,x\rangle}$ يعني، كالعادة، مرافق العدد $\langle y,x\rangle$]

(٢) $\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y\rangle=\alpha_1\langle x_1,y\rangle+\alpha_2\langle x_2,y\rangle$ لأجل أية عناصر x_1,x_2,y من الفضاء V وأيّ عنصرين α_1,α_2 من الحقل K.

(٣) $\langle x,x\rangle\ge 0$ أياً كان x من V

(٤) $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0_V$

٢) **تعريف:**

يقال عن فضاء شعاعي مزوّد بجداء داخلي معرف عليه إنه **فضاء ذو جداء داخلي**.

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا كان الفضاء V ذا عدد منته من الأبعاد وكان $K=R$ فإن هذا الفضاء ذا الجداء الداخلي يسمى **فضاءً إقليدياً**.

كما يسمى الفضاء العقدي ذو الجداء الداخلي (أيْ عندما $K = C$) **فضاء واحدياً** أو **فضاء هرميتياً**.

٣) نتيجة:

(١) الجداء الداخلي عدد حقيقي إذا كان $K = R$، وعدد عقدي إذا كان $K = C$.

(٢) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ لأجل أية عناصر x, y, z من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي.

(٣) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ لأجل أيّ عنصرين x, y من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي، وأيّ α من الحقل K.

(٤) $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \overline{\beta_1}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle x, y_2\rangle$ لأجل أية عناصر x, y_1, y_2 من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي، وأيّ عنصرين β_1, β_2 من الحقل K. [$\overline{\beta_i}$ يعني، كالعادة، مرافق العدد β_i $(i = 1,2)$].

(٥) $[\langle x, y\rangle = 0$ لأجل كل x من الفضاء المدروس$] \Rightarrow y = 0_V$.

(٦) $[\langle x, y\rangle = 0$ لأجل كل y من الفضاء المدروس$] \Rightarrow x = 0_V$.

(٧) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ لأجل أية عناصر x, y, z من الفضاء المدروس.

(٨) $\langle x, \beta y\rangle = \overline{\beta}\langle x, y\rangle$ لأجل أي عنصرين x, y من الفضاء وأي β من الحقل K.

البرهان:

سنثبت صحة الخاصة (٤) ونترك للقارئ إثبات صحة الخواص الأخرى بمثابة تمرين:

$$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x\rangle}$$

$$= \overline{\beta_1\langle y_1, x\rangle + \beta_2\langle y_2, x\rangle}$$
$$= \overline{\beta_1}\,\overline{\langle y_1, x\rangle} + \overline{\beta_2}\,\overline{\langle y_2, x\rangle}$$
$$= \overline{\beta_1}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle x, y_2\rangle$$

٤) نتيجة: إن الفضاء ذا الجداء الداخلي يكون منظماً بالنسبة للنظيم المعرّف عليه بـ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ لأجل كل x من هذا الفضاء.

البرهان:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$ لأجل كل x من الفضاء المدروس.

$$[\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda.\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle}$$
$$= |\lambda|.\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|.\|x\|$$

وذلك لأجل أيّ عنصر x من الفضاء المدروس وأيّ λ من الحقل K.

بقي إثبات أن: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ لأجل أيّ عنصرين u, v من الفضاء المدروس.

ولإنجاز هذا الإثبات سنبرهن صحة متراجحة شوارتز:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

وذلك كما يلي:

إذا كان أحد العنصرين u, v يساوي الصفر فالمتراجحة السابقة تكون صحيحة.

لذا سنفترض أن $u \neq 0, v \neq 0$. ثم لنأخذ العنصر (الشعاع):

$$w = \langle u, u\rangle.v - \langle v, u\rangle.u$$

فنجد أنّ:

$$\langle w, u\rangle = \langle \langle u, u\rangle.v - \langle v, u\rangle.u, u\rangle$$

كما يسمى الفضاء العقدي ذو الجداء الداخلي (أيْ عندما $K = C$) **فضاء واحدياً** أو **فضاء هرميتياً**.

٣) نتيجة:

(١) الجداء الداخلي عدد حقيقي إذا كان $K = R$، وعدد عقدي إذا كان $K = C$.

(٢) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ لأجل أية عناصر x, y, z من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي.

(٣) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ لأجل أيّ عنصرين x, y من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي، وأيّ α من الحقل K.

(٤) $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \overline{\beta_1}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle x, y_2\rangle$ لأجل أية عناصر x, y_1, y_2 من الفضاء المدروس ذي الجداء الداخلي، وأيّ عنصرين β_1, β_2 من الحقل K. [$\overline{\beta_i}$ يعني، كالعادة، مرافق العدد β_i $(i = 1,2)$].

(٥) $[\langle x, y\rangle = 0$ لأجل كل x من الفضاء المدروس$] \Rightarrow y = 0_V$.

(٦) $[\langle x, y\rangle = 0$ لأجل كل y من الفضاء المدروس$] \Rightarrow x = 0_V$.

(٧) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ لأجل أية عناصر x, y, z من الفضاء المدروس.

(٨) $\langle x, \beta y\rangle = \overline{\beta}\langle x, y\rangle$ لأجل أي عنصرين x, y من الفضاء وأي β من الحقل K.

البرهان:

سنثبت صحة الخاصة (٤) ونترك للقارئ إثبات صحة الخواص الأخرى بمثابة تمرين:

$$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x\rangle}$$

$$= \overline{\beta_1\langle y_1, x\rangle + \beta_2\langle y_2, x\rangle}$$
$$= \overline{\beta_1}\,\overline{\langle y_1, x\rangle} + \overline{\beta_2}\,\overline{\langle y_2, x\rangle}$$
$$= \overline{\beta_1}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle x, y_2\rangle$$

٤) نتيجة: إن الفضاء ذا الجداء الداخلي يكون منظماً بالنسبة للنظيم المعرّف عليه بـ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ لأجل كل x من هذا الفضاء.

البرهان:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ge 0$ لأجل كل x من الفضاء المدروس.

$$[\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda.\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle}$$
$$= |\lambda|.\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|.\|x\|$$

وذلك لأجل أيّ عنصر x من الفضاء المدروس وأيّ λ من الحقل K.

بقي إثبات أن: $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ لأجل أيّ عنصرين u, v من الفضاء المدروس.

ولإنجاز هذا الإثبات سنبرهن صحة متراجحة شوارتز:

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|.\|v\|$$

وذلك كما يلي:

إذا كان أحد العنصرين u, v يساوي الصفر فالمتراجحة السابقة تكون صحيحة. لذا سنفرض أن $u \ne 0, v \ne 0$. ثم لنأخذ العنصر (الشعاع):

$$w = \langle u, u\rangle.v - \langle v, u\rangle.u$$

فنجد أنّ:

$$\langle w, u\rangle = \langle\langle u, u\rangle.v - \langle v, u\rangle.u, u\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle.\langle v,u\rangle - \langle v,u\rangle.\langle u,u\rangle = 0$$

وأيضاً:

$$\begin{aligned} 0 \le \|w\|^2 &= \langle w,w\rangle = \langle \langle u,u\rangle.v - \langle v,u\rangle.u, \langle u,u\rangle.v - \langle v,u\rangle.u\rangle \\ &= \|u\|^2.[\|u\|^2.\|v\|^2 - \langle v,u\rangle\langle u,v\rangle] \end{aligned}$$

وبالتالي، باعتبار أن $u \neq 0$، يكون لدينا:

$$\|u\|^2.\|v\|^2 - \overline{\langle u,v\rangle}.\langle u,v\rangle \ge 0$$

أيْ:

$$\|u\|^2.\|v\|^2 \ge |\langle u,v\rangle|^2$$

ومنه يتم إثبات متراجحة شوارتز.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \\ &\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| \\ &\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &\le (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

ومنه $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

ملاحظة: $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle$ هو القسم الحقيقي للعدد العقدي $\langle u,v\rangle$. أما إذا كان $\langle u,v\rangle$ حقيقياً فإنّ $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle$.

وبذلك يكون $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ نظيماً على الفضاء ذي الجداء الداخلي وهذا يعني أن هذا الفضاء يكون منظماً بالنسبة لهذا النظيم.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٥) **نتيجة:** كل فضاء ذي جداء داخلي على الحقل K يكون فضاء مترياً بالنسبة للمسافة d المعرفة بـ:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

لأجل أيّ عنصرين x, y من هذا الفضاء.

البرهان:

يترك للقارئ حيث d هي المسافة المشتقة من النظيم المعرف في النتيجة (٤). وقد يقال عنها إنها المسافة المشتقة من الجداء الداخلي.

٦) **تعريف فضاء هيلبرت:** فضاء هيلبرت هو فضاء ذو جداء داخلي بحيث يكون فضاء تاماً كفضاء متري بالنسبة للمسافة المشتقة من النظيم المولد من الجداء الداخلي المزوّد به [انظر النتيجتين (٤) و(٥)].

٧) **نتيجة:** كل فضاء هيلبرت يكون فضاء باناخ.

البرهان:

بما أن فضاء هيلبرت يكون فضاء منظماً وتاماً إلى جانب كونه ذا جداء داخلي فإنه يكون فضاء باناخ.

٨) **أمثلة:**

(١) لنأخذ الفضاء الشعاعي R^∞ على الحقل R حيث:

$$R^\infty = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) / x_i \in R, i \in N^*, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

[أيْ أن R^∞ تتألف من جميع المتتاليات العددية الحقيقية غير المنتهية $(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ بحيث تكون المتسلسلة العددية الحقيقية غير المنتهية $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2+\dots$ متقاربة]، وحيث:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)+(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)=$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n,\dots)$$
$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n,\dots)$$

ثم لنعرّف الجداء الداخلي لعنصرين كيفيين مثل $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$، $y=(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)$ من R^∞ كما يلي:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n.y_n$$

وهذا معيّن وله معنى لأن المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن تكون متقاربة بملاحظة أن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2,\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2$ متقاربتان بالفرض وأن $|x_ny_n|\le\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)$ لأجل كل n.

زد على ذلك سنبيّن أيضاً أن الجمع، والضرب بعدد لهما معنى في R^∞:

يكفي ملاحظة أن العلاقتين:

$$\sum_{k=n}^{n+m}(x_k+y_k)^2=\sum_{k=n}^{n+m}x_k^2+2\sum_{k=n}^{n+m}x_ky_k+\sum_{k=n}^{n+m}y_k^2$$
$$\sum_{k=n}^{n+m}(\lambda x_k)^2=\lambda^2\sum_{k=n}^{n+m}x_k^2$$

تبينان أنه إذا كان x,y من R^∞ فإن المتسلسلتين $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)^2$ و $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda x_k)^2$ تكونان متقاربتين.

وإلى جانب ذلك نلاحظ أيضاً ما يلي:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n.y_n=\sum_{n=1}^{\infty}y_n.x_n=\langle y,x\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$$
$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n).z_n$$
$$=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}x_n.z_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}y_n.z_n=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$$

وذلك لأجل أية عناصر x,y,z من R^∞ وأيّ عنصرين α,β من R.

$$0\neq x\in R^\infty\Rightarrow\exists n_0:x_{n_0}\neq0\Rightarrow\langle x,x\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\ge n_{n_0}^2>0$$
$$0=x\in R^\infty\Rightarrow\langle0,0\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}0^2=0$$

ومنه يمكن استنتاج أنّ $\langle x,x\rangle\ge0$ لأجل أيّ x من R^∞، وأنّ:

$$[\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0]$$

إذن R^∞ هو فضاء ذو جداء داخلي. ويقال إنه فضاء l_2.

هذا ويمكن ملاحظة أن نظيم أيّ عنصر (شعاع) مثل x من الفضاء R^∞ هو $\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}$ (تأكد بمثابة تدريب، من تحقق الشروط جميعها).

(٢) لنأخذ الفضاء الشعاعي:

$$R^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)/x_i\in R,i=1,2,\dots,n\}$$

ولنعرف الجداء الداخلي لعنصرين كيفيين مثل $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ من R^n كما يلي: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

عندها نجد الآتي:

$$\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge0$$
$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i=\langle y,x\rangle$$

$$\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i+\beta y_i)z_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$
$$= \alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$$

وذلك لأجل أية عناصر x,y,z من R^n وأيّ عنصرين α,β من R.

وأيضاً:

$$[\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2=0 \Leftrightarrow x_i=0(i=1,2,...,n)\Leftrightarrow x=0]$$

وكذلك:

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=(x_1^2+...+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\langle x-y,x-y\rangle^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$$

ويعني هذا أن d ليست إلا المسافة الاقليدية على R^n. وقد برهنا سابقاً أن هذا الفضاء تام.

إذن فهذا الفضاء المدروس يكون فضاء هيلبرت.

٣-٢١- تمارين محلولة:

١) ليكن V فضاء ذا جداء داخلي على الحقل $K=R$، حيث $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ لأجل أيّ x من V. وليكن x,y أي عنصرين من V وليكن λ أيّ عنصر من R.

يقال عن عنصرين (شعاعين) مثل u,v من V إنهما **متعامدان** إذا وفقط إذا كان $\langle u,v\rangle=0$.

أثبت صحة القضايا التالية:

(١) العنصر $u=0$ هو العنصر (الشعاع) الوحيد العمود على ذاته في الفضاء ذي الجداء الداخلي.

(٢) إذا كان $u,v\in V$ عنصرين (شعاعين) متعامدين فإن مبرهنة فيثاغورث تتحقق، أيْ فإنّ:

$$\|u-v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$$

(٣) $\langle \lambda x+y,\lambda x+y\rangle = \lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$

(٤) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$

(٥) $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle$

(٦) $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|.\|y\|$

(٧) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

ملاحظة: يعبّر الطلب الرابع عن مضمون قانون متوازي الأضلاع الذي ينص على أن مجموع مربعي القطرين في متوازي الأضلاع يساوي مجموع مربعات الأضلاع.

الحل:

(١) نعلم أن $\langle 0,0\rangle=0$. وإذا كان $\langle x,x\rangle=0$ فإن $x=0$.

(٢) لنفرض أن u,v عنصران متعامدان. عندئذ $\langle u,v\rangle=0$. ومنه:

$$\|u-v\|^2=\langle u-v,u-v\rangle$$
$$=\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=\|u\|^2+\|v\|^2$$

(٣)

$$\langle \lambda x+y,\lambda x+y\rangle=\langle \lambda x,\lambda x+y\rangle+\langle y,\lambda x+y\rangle$$
$$=\lambda\langle x,\lambda x+y\rangle+\langle y,\lambda x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\lambda[\langle x,\lambda x\rangle+\langle x,y\rangle]+\lambda\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\lambda[\lambda\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle]+\lambda\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$

$$\begin{aligned}&=\lambda^2\langle x,x\rangle+\lambda\langle x,y\rangle+\lambda\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

(٤) من الطلب (٣) يمكننا أن نكتب:

$$\|\lambda x+y\|^2=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \qquad (\star)$$

ومنه يمكننا أن نكتب أيضاً:

$$\|x+\lambda y\|^2=\|\lambda y+x\|^2=\lambda^2\|y\|^2+2\lambda\langle y,x\rangle+\|x\|^2$$

وبالتالي:

$$\|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle+\lambda^2\|y\|^2 \qquad (\star\star)$$

ثم لنضع في $(\star)$ $\lambda=1$ وفي $(\star\star)$ $\lambda=-1$ فنجد أنّ:

$$\left.\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\\|x-y\|^2&=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\end{aligned}\right\} \qquad (\star\star\star)$$

ومنه بجمع العلاقتين في $(\star\star\star)$ نجد:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

(٥) بطرح العلاقتين في $(\star\star\star)$ في الطلب (٤) نجد:

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle$$

(٦) مما ورد في الطلب (٤) لدينا:

$$\begin{aligned}\lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle&=\|\lambda x+y\|^2\\&=\langle\lambda x+y,\lambda x+y\rangle\ge 0\end{aligned}$$

فإذا كان $\|x\|^2\neq 0$ ووضعنا $\lambda=\dfrac{-\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ في المتراجحة السابقة فإننا نجد، بعد الاختزالات اللازمة، أن:

$$\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2}-\frac{2\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2}+\|y\|^2\ge 0$$

وبالتالي، بعد الإصلاحات اللازمة، يكون لدينا:

$$\langle x,y\rangle^2\le(\|x\|.\|y\|)^2$$

ومنه، بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، نجد:

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|.\|y\|$$

وذلك بشرط $\|x\|\neq 0$. وبما أن هذه المتراجحة الأخيرة صحيحة عندما $\|x\|=0$ فإننا نكون قد أثبتنا صحة الطلب السادس الذي يتضمن متراجحة كوشي – شوارتز [قارن مع برهان النتيجة (٤) واستنتج ما يخص هذا الطلب السادس].

(٧) من الطلب السادس يمكننا أن نكتب:

$$\langle x,y\rangle\le|\langle x,y\rangle|\le\|x\|.\|y\|$$

ومنه، استناداً إلى $(\star\star\star)$ في الطلب الرابع، يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\le\\&\le\|x\|^2+2\|x\|.\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

٢) ليكن n أيّ عدد طبيعي مغاير للصفر، ولنأخذ الفضاء الاقليدي R^n ذا الأبعاد n.

ولتكن $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ و $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ و $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ أيّة عناصر من R^n. والمطلوب:

(١) نعرّف على R^n العلاقة الثنائية $\trianglelefteq$ كما يلي:

$$a \trianglelefteq b \Leftrightarrow a_i \le b_i \text{ لأجل كل } i=1,2,....,n$$

أثبت أن $\trianglelefteq$ علاقة ترتيب على R^n.

(٢) نسمي المجموعة:

$$I=\{x/x=(x_1,....,x_n)\in R^n, a_i\le x_i\le b_i, i=1,2,...,n\}$$

خلية ذات n بعداً، معينة بالعنصرين a,b من الفضاء R^n حيث $a\trianglelefteq b$.
اضرب مثالاً على كل من: الخلية ذات البعد الواحد- الخلية ذات البعدين- الخلية ذات الثلاثة أبعاد.

(٣) إذا كانت I خلية ذات n بعداً، معينة بالعنصرين a,b في R^n حيث $a\trianglelefteq b$ فتحقق من صحة ما يلي:

(أ) إذا كان $a=b$ فإنّ $I=\{a\}=\{b\}$ وبالتالي $I\ne\Phi$.

(ب) إذا كان $(a\ne b, a\trianglelefteq b)$، وهذا ما يرمز له بالرمز $a \triangleleft b$، فإن I تكون غير منتهية.

(حـ) $I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times....\times[a_n,b_n]$ حيث $[a_i,b_i]$ المجال المغلق في R، $a_i\le b_i$، ($i=1,2,....,n$).

(٤) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية غير خالية مثل H محدودة في R^n هو أن يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل ε بحيث يكون: $H\subseteq B(0,\varepsilon)$ حيث $0=(0,....,0)\in R^n$ هو صفر الفضاء الشعاعي.

(٥) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية غير خالية مثل H محدودة في R^n هو أن توجد خلية ذات n بعداً مثل I بحيث يكون $H\subseteq I$.

(٦) إذا كانت (I_k) متوالية من الخلايا I_k ذات الـ n بعداً في R^n بحيث $I_k \supseteq I_{k+1}$ لأجل كل k، فإن $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \ne \Phi$.

(٧) إذا كانت I_n خلية ذات n بعداً في R^n فإنها تكون مجموعة متراصة.

(٨) تحقق من أنّ كل مجال مغلق في الفضاء R $(n=1)$ يكون مجموعة متراصة. وأن كل مستطيل مغلق (أيْ يحوي محيطه) في الفضاء R^2 $(n=2)$ يكون مجموعة متراصة.

الحل:

(١) إن العلاقة الثنائية $\trianglelefteq$ تتمتع بالخواص التالية:

$\trianglelefteq$ انعكاسية لأن $a_i \le a_i$ لأجل $i=1,2,...,n$ وبالتالي $a\trianglelefteq a$.

$\trianglelefteq$ متعدية لأنه إذا كان $a\trianglelefteq b, b\trianglelefteq c$ فإن $b_i\le c_i$، $a_i\le b_i$ لأجل $i=1,2,...,n$ وبالتالي $a_i\le c_i$ لأجل $i=1,2,...,n$، وبالتالي $a\trianglelefteq c$.

$\trianglelefteq$ تخالفية لأنه إذا كان $a\trianglelefteq b, b\trianglelefteq a$ فإن $b_i\le a_i$، $a_i\le b_i$ لأجل $i=1,2,...,n$ وبالتالي $a_i=b_i$ لأجل $i=1,2,...,n$، وبالتالي $a=b$.

إذن $\trianglelefteq$ علاقة ترتيب على R^n.

(٢) الخلية ذات البعد الواحد I في R $(n=1)$ والمعينة بالعنصرين a,b من R حيث $a\le b$ هي المجال المغلق $I=[a,b]$.

الخلية ذات البعدين I في R^2 $(n=2)$ والمعينة بالعنصرين: $a=(a_1,a_2)$ و $b=(b_1,b_2)$ حيث $a\trianglelefteq b$ في R^2 هي المستطيل المغلق (أيْ المستطيل الذي يحوي محيطه):

$$I=\{x/x=(x_1,x_2)\in R^2, a_i\le x_i\le b_i, i=1,2\}$$

الخلية ذات الثلاثة أبعاد هي متوازي مستطيلات ونترك التفاصيل كلها للقارئ.

(٣) يترك برهان هذا الطلب للقارئ.

(٤) لنفرض أن المجموعة غير الخالية H محدودة في R^n. عندئذ، يوجد $x \in R^n$ ويوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل r بحيث يكون $H \subseteq B(x,r)$.

ومنه يوجد العدد الحقيقي الموجب تماماً $\varepsilon = r + d(0,x) + 1$ بحيث يكون $H \subseteq B(0,\varepsilon)$ وذلك بملاحظة ما يلي:

$$h \in H \Rightarrow h \in B(x,r) \Rightarrow d(x,h) < r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(0,h) \leq d(0,x) + d(x,h) < d(0,x) + r < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h \in B(0,\varepsilon)$$

وبالعكس، لنفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $H \subseteq B(0,\varepsilon)$ حيث $0 \in R^n$. عندئذ تكون H محدودة في R^n.

(٥) لنفرض أن المجموعة غير الخالية H محدودة في R^n. عندئذ، استناداً إلى الطلب الرابع السابق، يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $H \subseteq B(0,\varepsilon)$.

ومنه توجد الخلية I ذات الـ n بعداً، المعينة بالعنصرين: $(\varepsilon,\varepsilon,\dots,\varepsilon)$، $(-\varepsilon,-\varepsilon,\dots,-\varepsilon)$ من R^n، حيث $(-\varepsilon,-\varepsilon,\dots,-\varepsilon) \lhd (\varepsilon,\varepsilon,\dots,\varepsilon)$، بحيث يكون $H \subseteq I$ بسبب ما يلي:

$$h \in H \Rightarrow d(0,h) < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} < \varepsilon \Rightarrow |h_i| < \varepsilon, i = 1,2,\dots,n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < h_i < \varepsilon, i = 1,2,\dots,n \Rightarrow h \in I$$

وبالعكس، لنفرض أنه توجد خلية مثل I ذات n بعداً، معينة بالعنصرين a,b من R^n، حيث $a \lhd b$، بحيث يكون $H \subseteq I$. ولنفرض أن $\varepsilon = d(a,b) + 1$ فيكون $H \subseteq B(a,\varepsilon)$ للأسباب التالية:

$$h \in H \Rightarrow h \in I \Rightarrow a_i \leq h_i \leq b_i, i = 1,2,\dots,n$$
$$\Rightarrow d(a,h) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - h_i)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} = d(a,b)$$
$$< d(a,b) + 1 = \varepsilon \Rightarrow h \in B(a,\varepsilon)$$

ولكن وجود الكرة المفتوحة $B(a,\varepsilon)$ بحيث يكون $H \subseteq B(a,\varepsilon)$ يسمح لنا بالقول إن H محدودة في R^n.

(٦) لنفرض أن (I_k) متوالية من الخلايا I_k ذات الـ n بعداً في R^n بحيث $I_k \supseteq I_{k+1}$ لأجل كل k. ولنفرض أن الخلية I_k معينة بالعنصرين a_k, b_k من R^n، حيث $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ و $b_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn})$ و $a_k \lhd b_k$ وذلك لأجل كل عدد طبيعي مغاير للصفر k، أيْ أنه أياً كان k من N^* فإنّ:

$$I_k = \{x / x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, a_{ki} \leq x_i \leq b_{ki}, i = 1,2,\dots,n\}$$

ثم لنفرض أن $I_{ki} = [a_{ki}, b_{ki}]$ لأجل كل k من N^* وكل i من المجموعة $\{1,2,\dots,n\}$. عندئذ من أجل كل i من $\{1,2,\dots,n\}$ نحصل على المتوالية (I_{ki}) من المجالات المغلقة في الفضاء R والتي تحقق الشرط $I_{ki} \supseteq I_{k+1,i}$ بملاحظة ما يلي:

$$x_i \in I_{k+1,i} \Rightarrow a_{k+1,i} \leq x_i \leq b_{k+1,i}$$
$$\Rightarrow \exists x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in R^n : x \in I_{k+1}$$
$$\Rightarrow x \in I_k \Rightarrow a_{ki} \leq x_i \leq b_{ki} \Rightarrow x_i \in I_{ki}$$

ومنه يكون $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{ki} \neq \Phi$ لأجل $i = 1,2,\dots,n$. [هذه مبرهنة مشهورة في التحليل الحقيقي]. ومنه، لأجل $i = 1,2,\dots,n$ يوجد عدد حقيقي مثل x_i^* بحيث يكون $x_i^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{ki}$ أيْ بحيث يكون $a_{ki} \leq x_i^* \leq b_{ki}$ لأجل كل k من N^*. ومنه يوجد في R^n العنصر $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ الذي ينتمي إلى $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.

إذن $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \Phi$.

(٧) لنفرض أن I_n خلية ذات n بعداً في R^n، معينة بالعنصرين a,b، حيث $a \trianglelefteq b$. عندئذ يكون:

$$I = \{x / x=(x_1,....,x_n)\in R^n , a_i \le x_i \le b_i , i=1,2,...,n\}$$

ولنفرض أن $\delta = d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i)^2}$ فيكون $d(x,y)\le\delta$ لأجل كل عنصرين x,y من I.

لنفرض مؤقتاً أن I ليست متراصة. عندئذ توجد تغطية مفتوحة مثل $L=\{G_\alpha/\alpha\in\Omega\}$ للمجموعة I بحيث أن كل جماعة جزئية منتهية من L لا تصلح أن تكون تغطية للمجموعة I.

لنضع $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ من أجل كل i من المجموعة $\{1,2,...,n\}$. عندها تعرّف لنا المجالات المغلقة $[a_i,c_i],[c_i,b_i]$ خلايا Q_i ذات n بعداً، عددها 2^n خلية، واجتماعها يساوي I. ونلاحظ أنه توجد، بين الخلايا Q_i، خلية واحدة على الأقل سنرمز لها بالرمز I_1 بحيث أن كل جماعة جزئية منتهية من الجماعة $\{G_\alpha/\alpha\in\Omega\}$ لا تصلح أن تكون تغطية لـ I_1، لأنه في الحالة المعاكسة يمكن إيجاد جماعة جزئية منتهية من الجماعة $\{G_\alpha/\alpha\in\Omega\}$ بحيث تصلح أن تكون تغطية لـ I مما يناقض ما تتصف به الجماعة L.

ثم، إذا قسمنا I_1 على النحو المذكور قبل قليل وتابعنا مثل هذا العمل على هذا المنوال فإننا نحصل على المتوالية $\{I_k\}$ التي حدودها خلايا ذات n بعداً والتي تتمتع بالخواص التالية:

(أ) $I=I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq .... \supseteq I_k \supseteq .....$

(ب) أياً كان العدد الطبيعي k فإن كل جماعة جزئية منتهية من الجماعة L لا تصلح أن تكون تغطية لـ I_k.

(ج) أياً كان العدد الطبيعي k وأياً كان العنصران x,y من I_k فإنّ:

$$d(x,y)\le \frac{\delta}{2^k}$$

ومنه، حسب الخاصة (أ) السابقة والطلب (٦) السابق، ينتج أنّ $\bigcap_{k=0}^{\infty} I_k \neq \Phi$، وبالتالي يوجد x^* بحيث يكون $x^*\in I_k$ لأجل $k=0,1,2,....$.

ولما كان $I\subseteq \bigcup_{\alpha\in\Omega} G_\alpha$ و $x^*\in I$ فإنّه يوجد في Ω عنصر مثل γ بحيث يكون $x^*\in G_\gamma$. وبما أن G_γ مفتوحة فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل r بحيث يكون $B(x^*,r)\subseteq G_\gamma$.

زد على ذلك، من أجل العدد r يوجد عدد طبيعي مثل m بحيث يكون $\frac{\delta}{2^m}<r$، لأنه لو كان مثل هذا العدد m غير موجود بحيث يحقق الشرط المذكور لكان $2^m \le \frac{\delta}{r}$ لأجل جميع الأعداد الطبيعية m وهذا غير ممكن.

إذن $I_m\subseteq G_\gamma$ بملاحظة ما يلي [بالاستفادة من الخاصة (ج)]:

$$z\in I_m \Rightarrow z,x^*\in I_m \Rightarrow d(z,x^*)\le\frac{\delta}{2^m}<r$$
$$\Rightarrow z\in B(x^*,r)\Rightarrow z\in G_\gamma$$

ولكن العلاقة $I_m\subseteq G_\gamma$ تناقض الخاصة (ب). إذن I متراصة.

(٨) بما أن كل مجال مغلق في R يكون خلية ذات بعد واحد فإنه يكون مجموعة متراصة. ولما كان كل مستطيل مغلق في R^2 يكون خلية ذات بعدين فإنه يكون مجموعة متراصة وبذلك يتم إثبات المطلوب.

٣) ليكن (X,d) أيّ فضاء متري. ولتكن C مجموعة المتواليــات الكوشــية في X.

نعرّف على C العلاقة الثنائية ~ كما يلي [يفــرض $x=(x_n), y=(y_n)$ أيّ عنصرين من C]:

$$x\sim y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$$

والمطلوب:

(١) أثبت أن ~ علاقة تكافؤ على C.

(٢) أثبت أنه إذا كانت $x,y\in\Omega$ فإن $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\in R$.

(٣) أثبت أنه إذا كانت $x,x',y,y'\in\Omega$ وكان $x\sim x', y\sim y'$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)$$

(٤) برهن أنه يوجد فضاء متري تام مثل (Y,d') وتطبيق متبــاين مثــل: $\varphi:X\to Y$ بحيث يتحقق الشرطان التاليان:

$d'(\varphi(x_1),\varphi(x_2))=d(x_1,x_2)$ لأجل أيّ عنصرين x_1,x_2 من X

$$\overline{\varphi(X)}=Y$$

الحل:

(١) أياً كان $x=(x_n)$ من C فــإن $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n)=0$ وبالتــالي $x\sim x$.

إذن ~ انعكاسية.

لتكن $x=(x_n)$ و $y=(y_n)$ و $z=(z_n)$ أية عناصر من C. عندئذ نجد:

$$x\sim y, y\sim z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0, \lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n)\le \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)=0+0=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n)=0 \Rightarrow x\sim z$$

إذن ~ متعدية. وأيضاً:

$$x\sim y \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(y_n,x_n)=0 \Rightarrow y\sim x$$

إذن ~ تناظرية.

ومنه ~ علاقة تكافؤ على C.

(٢) ليكن $x,y\in\Omega$. عندئذ:

$$d(x_n,y_n)\le d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)$$
$$d(x_m,y_m)\le d(x_m,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y_m)$$

ومنه، من المتراجحة الأولى، نجد:

$$d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\le d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)$$

ومن المتراجحة الثانية نجد:

$$-d(x_m,x_n)-d(y_n,y_m)\le d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)$$

ومن المتراجحتين الأخيرتين وبسبب كون $x,y\in\Omega$ نجد ما يلي:

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\le d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)$$

فإذا كان $\varepsilon>0$ فإن $\frac{\varepsilon}{2}>0$ ويوجد عددان طبيعيان مثل N_1,N_2 بحيث يكون:

$$n,m\ge N_1 \Rightarrow d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$n,m\ge N_2 \Rightarrow d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي يوجد $N=\max(N_1,N_2)$ بحيث يكون:

$$n,m\ge N \Rightarrow d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}, d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|<\varepsilon$$

وهذا يعني أن المتوالية الحقيقية $((d(x_n, y_n))$ كوشية (في R). ولما كان الفضاء R تاماً فإن هذه المتوالية تتقارب من عنصر من عناصر R أيْ أن:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \in R$$

(٣) لنفرض أن $x,x',y,y' \in \Omega$ وأن $x \sim x', y \sim y'$.

يمكننا أن نكتب المتراجحة الآتية التي تشبه المتراجحة التي أثبتناها في الطلب السابق (٢) [تحقق من ذلك]:

$$|d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)| \le d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)$$

ولكن $x \sim x', y \sim y'$، إذن $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x'_n)=0$ و $\lim_{n\to\infty} d(y_n,y'_n)=0$.

ومنه، حسب المتراجحة السابقة، نجد:

$$0 \le |d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)| \le d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n) \to 0+0=0$$

وبالتالي:

$$d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n) \to 0$$

أيْ:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)$$

(٤) بما أن $\sim$ علاقة تكافؤ على Ω فإنّ Ω تتجزأ إلى صفوف تكافؤ، سنرمز بـ Y لمجموعة صفوف التكافؤ المذكورة، وبالتالي يوجد التطبيق $\psi:\Omega \to Y$ الذي قاعدة ربطه هي $\psi(x)=[x]$، حيث $[x]$ هو صف التكافؤ الذي يمثله x.

ليكن $[a],[b]$ أيّ عنصرين من Y. ولنضع:

$$d'([a],[b])=\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$$

حيث $a=(a_n)$ ممثل لـ$[a]$ و $b=(b_n)$ ممثل لـ$[b]$.

ولكي يكون $d':Y \to R$ تطبيقاً يجب أن يكون معرفاً جيداً، أيْ يجب أن يكون مستقلاً عن اختيار الممثلين في صفوف التكافؤ المدروسة. ولإثبات هذا نفرض $[a]=[a']$ و $[b]=[b']$ ولنبرهن $d'([a],[b])=d'([a'],[b'])$:

$$[a]=[a'],[b]=[b'] \Rightarrow a \sim a', b \sim b'$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=\lim_{n\to\infty} d(a'_n,b'_n)$$
$$\Rightarrow d'([a],[b])=d'([a'],[b'])$$

وذلك بالاستفادة من الطلب (٣).

إنّ d' مسافة على Y (برهن ذلك).

إذا كان x أيّ عنصر من X فسنرمز بـ x' للمتوالية الثابتة $x,x,\ldots,x,\ldots$ ثم سنعرف التطبيق $\varphi: X \to Y$ بالعلاقة $\varphi[x]=[x']$، فنجد أن φ متباين وأن $d'(\varphi(x_1),\varphi(x_2))=d(x_1,x_2)$ (تأكد من كل هذا).

كما إن $\overline{\varphi(X)}=Y$ للأسباب التالية:

ليكن $[x]$ أيّ عنصر من Y، حيث $x=(x_n)$. وليكن ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. عندئذ، يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث يكون:

$$n,m \ge N \Rightarrow d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك لأن (x_n) كوشية. ومنه، نجد أنّ:

$$d'([x],[x'_N])=\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_N)<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى صحة المطلوب في هذه الخطوة.

الخطوة الأخيرة التي بقيت هي إثبات أن (Y,d') تام:

لتكن $([a_n])$ أية متوالية كوشية في Y. عندئذ، أياً كان العدد الطبيعي المغاير للصفر n فإنه يمكن إيجاد $x_n \in X$ بحيث يكون: $d'([a_n],[x'_n])<\frac{1}{n}$

كما يمكن التحقق من أن $(\varphi(x_n)=[x'_n])$ كوشية في Y وأنّ (x_n) كوشية في X.

لنفرض، الآن، أنّ ε أيّ عدد حقيقي موجب تماماً. وليكن N_1 عدداً طبيعياً محققاً للشرط $N_1 \geq \frac{2}{\varepsilon}$، فعندئذ نجد:

$$n,m \geq N_1 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه، بأخذ $n \geq N_1$، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} d'([a_n],[x]) &\leq d'([a_n],\varphi(x_n)) + d'(\varphi(x_n),[x]) < \\ &< \frac{1}{n} + d'(\varphi(x_n),[x]) = \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(x_n,x_m) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

ومنه، ينتج أن $([a_n])$ متقاربة من $[x]$.

إذن الفضاء (Y,d') تام. وبذلك يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة:

(١) بما أن $\varphi : X \to Y$ يتمتع بالخواص المذكورة أعلاه فيمكننا أن نطابق بين X وصورته وفق φ أي يمكننا أن نكتب: $X = \varphi(X) \subseteq Y$

$$d'|_{X^2} = d$$

$$\overline{X} = \overline{\varphi(X)} = Y$$

(٢) يدعى الفضاء المتري (Y,d') **تميم الفضاء المتري** (X,d).

(٣) **نتيجة:**

(أ) كل فضاء متري يمكن تتميمه.

(ب) كل فضاء منظم يمكن تتميمه.

(ج) كل فضاء ذي جداء داخلي يمكن تتميمه.

(د) يمكن إنشاء R بتتميم الفضاء المتري Q، حيث Q مجموعة الأعداد العادية (الأعداد المنطقة – الكسور العادية) وحيث d المسافة المعرفة على Q بالعلاقة: $d(x,y)=|x-y|$ لأجل كل عنصرين x,y من Q.

(نترك البرهان للقارئ).

٣-٢٢- تمارين للحل:

(١) برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون جداء فضائين متريين فضاء تاماً هو أن يكون هذان الفضاءان تامين.

(٢) لتكن $((H_i,d_i))$ متوالية من الفضاءات المترية. ولنفرض أن: $H = H_1 \times H_2 \times \ldots\ldots$ وأن $x=(x_1,x_2,\ldots.)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots..)$ أيّ عنصرين من H. ولنضع:

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

أثبت أن d مسافة على H.

(٣) لنفرض أن التطبيق $d : R\times R \to R$ معرف بالعلاقة:

$$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$$

لأجل كل عنصرين x,y من R. أثبت أن d مسافة على R وأن هذه المسافة لا يمكن أن تكون مشتقه من نظيم.

(٤) ليكن u,v أيّ عنصرين من فضاء ذي جداء داخلي مثل V على حقل الأعداد العقدية. أثبت أنّ:

$$2\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 - (1+i)\|v\|^2$$

(٥) ليكن V فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن العدد 2، أي:

$$V = \{f / f(x) = ax^2 + bx + c, (a,b,c \in R)\}$$

ولنضع $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)dx$. والمطلوب:

١) أثبت أن الفضاء V يكون ذا جداء داخلي بالنسبة للتعريف المذكور.

٢) إذا كان $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$ و $h(x) = 1$ فاحسب $\langle f,g\rangle, \langle g,h\rangle$ ثم أوجد $\|f\|, \|g\|, \|h\|$.

(٦) ليكن لدينا عنصران مثل x, y من فضاء ذي جداء داخلي حقيقي مثل V. نذكّر بالتعريف التالي:

يقال عن x, y إنهما متعامدان إذا وفقط إذا كان $\langle x,y\rangle = 0$.

المطلوب: أثبت صحة التكافؤ التالي:

$$(x, y \text{ متعامدان}) \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| \geq \|x\| \quad (\forall \alpha \in R)$$

(٧) هل تقاطع مرشحتين يكون مرشحة أم لا؟ ولماذا؟

(٨) ليكن $X \neq \Phi$. ولنأخذ المسافة $d : X^2 \to R$.

يقال عن d إنها مسافة **فوق مترية** إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x,y,z \in X : d(x,y) \leq \sup(d(x,z), d(z,y))$$

ويقال عن الفضاء المتري (X,d) إنه **فوق متري** إذا كانت المسافة d فوق مترية.

(أ) إذا كان $d(x,z) \neq d(z,y)$، حيث x,y,z عناصر من الفضاء فوق المتري (X,d)، فبرهن $d(x,y) = \sup(d(x,z), d(z,y))$

ثم استنتج أن كل مثلث في X يكون متساوي الساقين.

(ب) تأكد مما يلي:

أياً كان x عدداً عادياً مغايراً للصفر فإنه توجد ثلاثة أعداد صحيحة مثل α, a, b بحيث يكون $x = 7^\alpha . \frac{a}{b}$ حيث كل من العددين a, b يكون أولياً نسبياً مع العدد 7.

(ج) لنأخذ التطبيق: $f : Q \to R$ المعرف بالشكل التالي:

$$\forall x \in Q : f(x) = \|x\| = \begin{cases} \frac{1}{2^\alpha} & if \quad x \neq 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن f نظيم على Q وأن المسافة المشتقة منه: $d(x,y) = \|x - y\|$ تكون مسافة فوق مترية على Q.

(٩) إذا كان كل من الفضائين X, Y مترابطاً موضعياً فأثبت أن $X \times Y$ يكون مترابطاً موضعياً.

(١٠) لنأخذ الفضاء C^n وليكن u, v عنصرين من C^n حيث:

$$u = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad , \quad v = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

ولنضع $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. أثبت أننا نحصل بهذا على جداء داخلي على C^n.

ثم برهن بصورة خاصة أنّ: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

يكون جداء داخلياً على R^n.

(١١) ليكن V فضاء شعاعياً ذا n بعداً. ولتكن $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ قاعدة (أساساً) مرتبة في هذا الفضاء. ولنضع $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ حيث $u = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ و $v = \sum_{j=1}^{n} y_j a_j$. أثبت أننا نحصل بهذا على جداء داخلي على V.

(١٢) ليكن V الفضاء الشعاعي للتوابع العقدية المستمرة على المجال $0 \le t \le 1$. ولنضع $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t).\overline{g(t)}dt$ لأجل أي عنصرين $f; g$ من V. أثبت أننا نحصل بهذا على جداء داخلي على V.

ثم أوجد $\langle it^2, 3+it \rangle$.

(١٣) ليكن V الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود الحقيقية ذات المجهول x والتي من الدرجة أصغر أو تساوي n. ولنضع: $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ لأجل أي عنصرين $p(x), q(x)$ من V. أثبت أننا نحصل بهذا على جداء داخلي على V.

(١٤) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المتوالية (z_n)، حيث $z_n = (x_n, y_n)$، متوالية كوشية في فضاء الجداء $H = H_1 \times H_2$ للفضائين المتريين (H_i, d_i)، $i = 1, 2$ ، هو أن تكون كل من المتواليتين $(x_n), (y_n)$ متوالية كوشية.

(١٥) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء الجداء لعدد منته من الفضاءات المترية فضاء تاماً هو أن يكون كل من هذه الفضاءات المترية فضاء تاماً.

(١٦) برهن على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء الجداء $H = H_1 \times H_2$ للفضائين المتريين (H_i, d_i)، $i = 1, 2$، فضاء متراصاً هو أن يكون كل من الفضائين H_1, H_2 فضاء متراصاً.

(١٧) ليكن X فضاء منظماً بالنسبة لنظيم معين مثل $\|.\|$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون هذا الفضاء المنظم X فضاء ذا جداء داخلي هو أن يكون:

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)$$

لأجل أي عنصرين x_1, x_2 من X.

(١٨) أثبت أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء هيلبرت يكون فضاء هيلبــرت أيضاً.

(١٩) يقال عن فضاء متري مثل (X, d) إنه **انفصالي** إذا وفقط إذا كانت توجد مجموعة جزئية قابلة للعد على الأكثر، وكثيفة في الفضاء X.

المطلوب:

١) أثبت أن الفضاء الحقيقي R انفصالي وتام.

٢) أثبت أن الفضاء العقدي C انفصالي وتام.

٣) أثبت أن كل فضاء جزئي من فضاء متري انفصالي يكون فضاء انفصالياً.

٤) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتري المتقطع (Y, d) انفصالياً هو أن تكون المجموعة Y قابلة للعد على الأكثر.

(٢٠) برهن على أنه إذا كانت Y مجموعة جزئية غير خالية، ومحتواة تماماً في فضاء متري مثل (X, d)، وكانت Y كثيفة في هذا الفضاء، فإنّ الفضاء المتري الجزئي (Y, d) يكون غير تام.

(٢١) برهن على أن الشرط اللازم والكافي كي يكــون تــابع (تطبيــق) مثــل $f : X \to Y$، حيث (X, d) فضاء متري و (Y, d') فضاء متري، مستمراً بانتظام على X هو الشرط التالي:

أياً كانت المجموعتــان الجزئيتــان غيــر الخــاليتين A, B مــن X بحيــث $d(A, B) = 0$ فإنّ $d'(f(A), f(B)) = 0$.

(٢٢) لنضع $\alpha(A) = \overline{\mathring{A}}$ و $\beta(A) = \mathring{\overline{A}}$ من أجل كل مجموعة جزئية مثل A من فضاء متري مثل (X, d). والمطلوب:

١) أثبت أنه إذا كانت A مفتوحة في الفضاء X فإن $A \subseteq \alpha(A)$.

٢) أثبت أنه إذا كانت A مغلقة في الفضاء X فإن $A \supseteq \beta(A)$.

٣) أثبت أنه إذا كانت A أية مجموعة جزئية من الفضاء X فإنّ:

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A) \quad , \quad \beta(\beta(A)) = \beta(A)$$

(٢٣) نعرّف مؤثر اللصاقة C على مجموعة غير خالية مثل X بأنه قاعدة تقابل (تقرن) كل مجموعة جزئية مثل A من X بمجموعة جزئية A^c من X بحيث يتحقق الآتي:

(أ) $\Phi^c = \Phi$

(ب) أياً كانت المجموعة الجزئية A من X فإن $A \subseteq A^c$.

(ج) أياً كانت المجموعة الجزئية A من X فإن $A^{cc} = A^c$.

(د) أياً كانت المجموعتان الجزئيتان A, B فإن $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

لنفترض، الآن، أن c مؤثر لصاقة على X وأن F جماعة كل المجموعات الجزئية مثل A من X التي من أجلها يكون $A^c = A$. ولنأخذ الجماعة:

$$\tau = \{V / V \subseteq X, \exists A \in F : V = X - A\}$$

أثبت أن τ تبولوجيا على X وأن A^c هي لصاقة A في (X,τ) من أجل كل مجموعة جزئية مثل A من X.

(٢٤) لتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مثل X. ولنفرض أن τ تبولوجيا على Y. والمطلوب:

١) برهن أن الجماعة $\tau \cup \{X\}$ تشكل تبولوجيا على X.

٢) أثبت أنه إذا كانت B أساساً (قاعدة) للتبولوجيا τ على Y فإن الجماعة $B \cup \{X\}$ تكون أساساً للتبولوجيا $\tau \cup \{X\}$ على X.

٣) أثبت أنه إذا كانت B أساساً جزئياً للتبولوجيا τ على Y فإن الجماعة $B \cup \{X\}$ تكون أساساً جزئياً للتبولوجيا $\tau \cup \{X\}$ على X.

٤) استنتج من ذلك أن الجماعة $S(Y) \cup \{X\}$ تشكل تبولوجيا على X، حيث $S(Y)$ مجموعة جميع أجزاء Y.

(٢٥) لتكن $(G,.)$ زمرة، ولنفرض أنها ضربية. ولنعرف على G تبولوجيا مثل τ بحيث يتحقق ما يلي:

١) الفضاء التبولوجي (G,τ) هو فضاء T_1 [انظر التمرين (٦) في نهاية الفصل الثاني].

٢) أياً كان العنصران a,b من G وأياً كان الجوار المفتوح $W_{a.b}$ للعنصر ab في الفضاء G فإنه يوجد جواران مفتوحان، أحدهما U_a للعنصر a، والآخر V_b للعنصر b، في الفضاء G بحيث يكون $U_a.V_b \subseteq W_{ab}$، حيث:

$$U_a.V_b = \{x.y / x \in U_a, y \in V_b\}$$

٣) أياً كان العنصر a من G وأياً كان الجوار المفتوح $V_{a^{-1}}$ للعنصر a^{-1} (مقلوب a في الزمرة G) في الفضاء G فإنه يوجد جوار مفتوح مثل U_a للعنصر a في الفضاء G بحيث يكون $U_a^{-1} \subseteq V_{a^{-1}}$، حيث:

$$U_a^{-1} = \{x^{-1} / x \in U_a\}$$

عندئذ، يقال عن الثلاثية $(G,.,\tau)$ إنها زمرة تبولوجية. والمطلوب:

١- أثبت أنه إذا عرفنا التبولوجيا المتقطعة على زمرة ما فإننا نحصل على زمرة تبولوجية.

٢- إذا أخذنا زمرة دوارة من المرتبة الثانية، وعرفنا عليها التبولوجيا غير المتقطعة فهل نحصل بنتيجة ذلك على زمرة تبولوجية أم لا؟ ولماذا؟

٣- أثبت أن كلاً من الثلاثيتين $(R,+,\tau)$ و $(R^*,.,\tau)$، حيث τ هي التبولوجيا المألوفة على R، تشكل زمرة تبولوجية.

٤- لتكن A مجموعة جزئية مفتوحة في زمرة تبولوجية مثـل $(G,.,\tau)$. وليكن g أي عنصر من G. أثبت أن كلاً من المجموعـات الجزئيـة $A.g, g.A, A^{-1}$ تكون مجموعة مفتوحة في G.

٥- أثبت أنه إذا كانت V مجموعة مفتوحة و Y مجموعة جزئية اختياريـة من زمرة تبولوجية مثل G فإن كلاً من المجموعتين $U.Y, Y.U$ تكون مفتوحة في G.

٦- برهن أن كل زمرة جزئية مثل A في زمرة تبولوجية مثـل $(G,.,\tau)$ تكون زمرة تبولوجية بالنسبة للتبولوجيا النسبية على A.

٧- أثبت أنه إذا كانت A زمرة جزئية من الزمرة التبولوجية $(G,.,\tau)$ فإن اللصاقة $\overline{A}$ تكون زمرة جزئية في هذه الزمرة.

٨- لتكن A زمرة جزئية من زمرة تبولوجية مثل $(G,.,\tau)$. برهن علـى صحة كل من القضيتين التاليتين:

(أ) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G فإن $\overline{A}$ تكون زمرة جزئية ناظمية في G.

(ب) إذا كانت A زمرة جزئية تبديلية في G فإنّ $\overline{A}$ تكون زمرة جزئية تبديلية في G.

٩- أثبت أن كل زمرة جزئية مفتوحة A في زمرة تبولوجية مثل $(G,.,\tau)$ تكون مغلقة فيها.

****

أهم المصطلحات العلمية

عربي – إنكليزي

١-	أساس لتبولوجيا	Base for a topology
٢-	أساس جزئي	Sub base
٣-	تابع	Function
٤-	تابع مسافة	Distance function
٥-	تابع مستمر	Continuous function
٦-	تابع مستمر بانتظام	Uniformly continuous function
٧-	تبولوجيا (طبولوجيا)	Topology
٨-	تبولوجيا خشناء	Indiscrete topology
٩-	تبولوجيا عادية على R	Usual topology on R
١٠-	تبولوجيا متقطعة	Discrete topology
١١-	تبولوجيا مولدة بجماعة مـن المجموعات الجزئية	Topology generated by a family of subsets
١٢-	تبولوجيا مولدة بمسافة d	Topology induced by a metric d
١٣-	تبولوجيا نسبية على مجموعة جزئية	Relative topology on a subset
١٤-	ترابط	Connectedness
١٥-	تصاكل	Homeomorphism
١٦-	تطبيق	Mapping
١٧-	تطبيق الإسقاط	Projection mapping

١٨-	تطبيق مغلق	Closed mapping
١٩-	تطبيق مفتوح	Open mapping
٢٠-	تغطية	Cover
٢١-	تغطية جزئية	Subcover
٢٢-	تمهيدية زورن	Zorn lemma
٢٣-	جداء ديكارتي	Cartesian product
٢٤-	جماعة	Family
٢٥-	جوار	Neighborhood
٢٦-	جوار مجموعة	Neighborhood of a set
٢٧-	خارج مجموعة	Exterior of a set
٢٨-	خاصة	Property
٢٩-	داخل مجموعة	Interior of a set
٣٠-	زمرة تبولوجية	Topological group
٣١-	زمرة دوارة	Cyclic group
٣٢-	عدد	Number
٣٣-	عدد حقيقي	Real number
٣٤-	عدد صحيح	Integer
٣٥-	عدد طبيعي	Natural number
٣٦-	عدد عادي (منطق، كسري)	Rational number
٣٧-	عدد عقدي (مركب)	Complex number
٣٨-	عدد غير عادي	Irrational number
٣٩-	عدد لوبيغ	Lebesgue number
٤٠-	فضاء	Space
٤١-	فضاء تام	Complete space
٤٢-	فضاء تبولوجي	Topological space
٤٣-	فضاء جداء	Product space
٤٤-	فضاء جزئي	Sub space
٤٥-	فضاء ذو جداء داخلي	Inner product space
٤٦-	فضاء شعاعي	Vectorial space
٤٧-	فضاء مترابط	Connected space
٤٨-	فضاء مترابط موضعياً	Locally connected space
٤٩-	فضاء متراص	Compact space
٥٠-	فضاء متري	Metric space
٥١-	فضاء متقطع	Discrete space
٥٢-	فضاء متور	Metrizable space
٥٣-	فضاء منظم	Normed space
٥٤-	فضاء هيلبرت	Hilbert space
٥٥-	قاعدة (أساس)	Base (Basis)
٥٦-	كرة مغلقة	Closed sphere
٥٧-	كرة مفتوحة	Open sphere
٥٨-	لصاقة (غلاقة) مجموعة	Closure of a set
٥٩-	متراصة عدياً	Countably compact
٦٠-	متعامدة	Orthogonal
٦١-	متوازي الأضلاع	Parallelogram
٦٢-	متوالية (متتالية)	Sequence
٦٣-	متوالية جزئية	Subsequence

٦٤-	متوالية كوشية	Cauchy sequence
٦٥-	متوالية متقاربة	Convergent sequence
٦٦-	مجموعة	Set
٦٧-	مجموعة كثيفة	(Every where) dense set
٦٨-	مجموعة مشتقة	Derived set
٦٩-	مجموعة مغلقة	Closed set
٧٠-	مجموعة مفتوحة	Open set
٧١-	محيط مجموعة	Frontier (Boundary) of a set
٧٢-	مرشحة	Filter
٧٣-	مسافة	Distance
٧٤-	مسافة بين مجموعتين	Distance between two sets
٧٥-	مسافة بين نقطتين	Distance between two points
٧٦-	مسافتان متكافئتان	Equivalent metrics
٧٧-	مستطيل	Rectangle
٧٨-	نظيم	Norm
٧٩-	نقطة	Point
٨٠-	نقطة محيطية	Boundary point
٨١-	نقطة ملاصقة	Cluster point
٨٢-	نهاية	Limit
٨٣-	نهاية متوالية	Limit of a sequence

بعض المراجع العلمية الأجنبية

1- Dieudonnè,J.: Foundations of Modern Analysis. Academic press, New York and London, 1960.

2- Kelley, J.: General Topology. New York, D. Van Nost rand company, Inc., 1955.

3- LipschutzS.: General Topology- Schaum's Outline series. Mc Graw- Hill book company, 1965.

4- Rudin W.: Principles of Mathematical Analysis. Mc Graw Hill book company, 2000.

5- Simmons G. F.: Introduction to topology and Modern analysis. International student edition, 2003.

بعض المراجع العلمية العربية

(١) أ. د. عبد الواحد أبو حمده – الطبولوجيا(١). منشورات جامعة دمشق (١٩٨٥- ١٩٨٦).

(٢) أ. د. صلاح أحمد- أ. د. عبد الواحد أبو حمده- أ. د. محمد بشير قابيل – الطبولوجيا (١). منشورات جامعة دمشق (١٩٩٠- ١٩٩١).