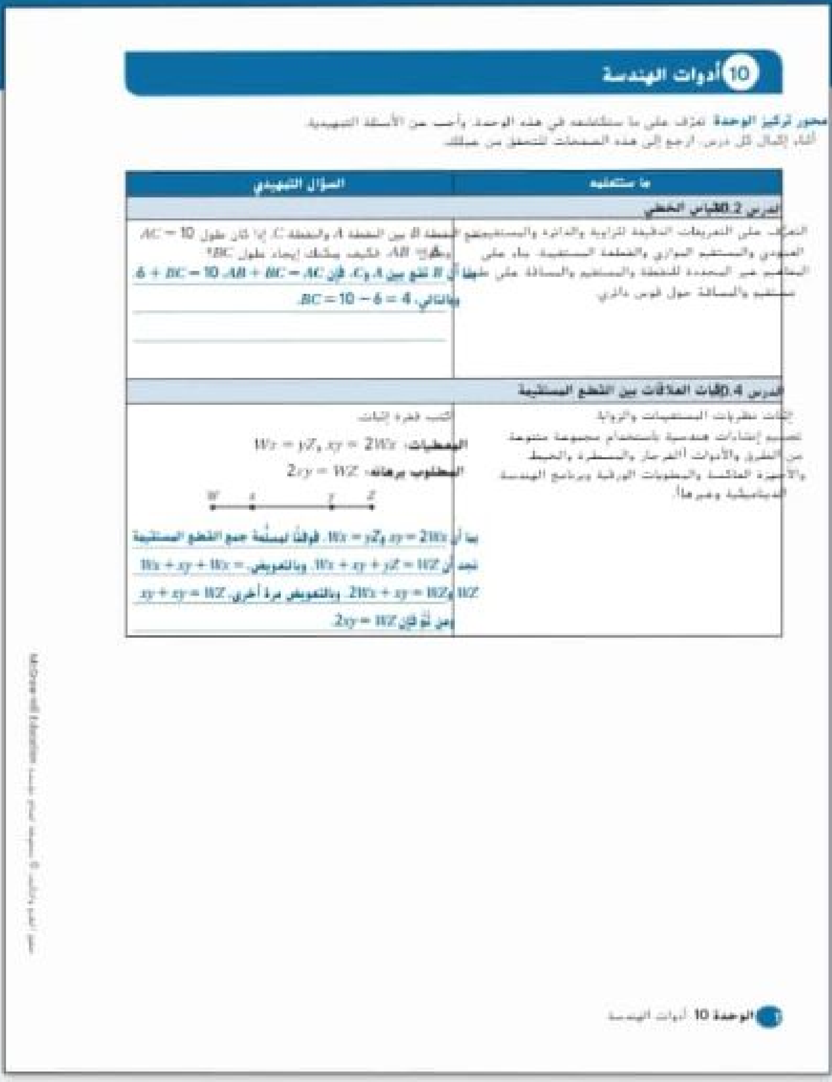
10 أدوات الهندسة



10 أدوات الهندسة

محور تركيز الوحدة تعرّف على ما ستتعلمه في هذه الوحدة وأجب عن الأسئلة التمهيدية أثناء إكمال كل درس. ارجع إلى هذه الصفحات للتحقق من عملك.

ما ستتعلمه	السؤال التمهيدي
الدرس 10.2 القياس الخطي	
التعرّف على التعريفات الدقيقة للزاوية والدائرة والمستقيم العمودي والمستقيم الموازي والقطعة المستقيمة بناء على المفاهيم غير المحددة للنقطة والمستقيم والمسافة على طول مستقيم والمسافة حول قوس دائري	النقطة B بين النقطة A والنقطة C. إذا كان طول $AC = 10$ وطول $AB = 6$، فكيف يمكنك إيجاد طول BC؟ بما أن B تقع بين A و C، فإن $AB + BC = AC$، $6 + BC = 10$ وبالتالي $BC = 10 - 6 = 4$.
الدرس 10.4 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة	
إثبات نظريات المستقيمات والزوايا. تصميم إنشاءات هندسية باستخدام مجموعة متنوعة من الطرق والأدوات الفرجار والمسطرة والخيط والأجهزة العاكسة والمطويات الورقية وبرنامج الهندسة الديناميكية وغيرها.	اكتب فقرة إثبات. **المعطيات:** $Wx = yZ, xy = 2Wx$ **المطلوب برهانه:** $2xy = WZ$ بما أن $xy = 2Wx$ و $Wx = yZ$. فوفقاً لمسلّمة جمع القطع المستقيمة نجد أن $Wx + xy + yZ = WZ$. وبالتعويض، $Wx + xy + Wx = WZ$ و $2Wx + xy = WZ$. وبالتعويض مرة أخرى، $xy + xy = WZ$ ومن ثمّ فإن $2xy = WZ$

الوحدة 10 أدوات الهندسة

استخدام دليل الطالب التفاعلي

يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي مع كتاب رياضيات الصف الثامن–المسار العام.

نصيحة للتدريس — م. ر 1

يمكن أن يؤدي السؤال التمهيدي في الدرس 10.2 إلى استمرار مناقشة المعيار **م. ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. شجع الطلاب على تمييز الرسم التخطيطي بالمعلومات المعطاة لمساعدتهم على فهم المسألة وكتابة كل ما يعرفونه من معلومات بناءً على المعطيات المتوفرة. على سبيل المثال، لأن $\angle QSR$ و $\angle RST$ زاويتان متتامتان، فهم يعلمون أن قياس $\angle QSR + \angle RST = 90$. شجع الطلاب على تقييم إجاباتهم للتحقق من مدى صحتها. سيساعدهم ذلك على تطوير البراعة الرياضية.

نصيحة للتدريس — م. ر 4

يمثل السؤال التمهيدي في الدرس 10.4 نقطة بداية للممارسة **م. ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. ينبغي على الطلاب تفسير المعلومات المعطاة ورسم شكل هندسي يطابق الوصف المطلوب. بعد الانتهاء من رسم النموذج، يجب عليهم حساب مساحة سطح القرص. قد يتمكن بعض الطلاب من إيجاد المساحة من الوصف الموجود بدون رسم النموذج. لذا أكد على أهمية رسم النماذج كطريقة للتأكد من فهم المسألة.

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
2, 3, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

التعرف على المفردات غير المُعرّفة
تطبيق خواص الجذور التربيعية

المواد

برنامج الهندسة الديناميكية


10.2 القياس الخطي

الأهداف
إيجاد طول قطعة مستقيمة
رسم قطعة مستقيمة متطابقة
إيجاد المسافة بين نقطتين على مستوى إحداثي
إيجاد إحداثيات نقطة على قطعة مستقيمة موجهة.

يسمى جزء المستقيم المكون من نقطتي نهاية تقع بينهما كل النقاط **قطعة مستقيمة**. والقطعة المستقيمة ذات نقطتي النهاية P, Q تسمى $\overline{PQ}$ أو $\overline{QP}$ ويكون **طولها** قابلاً للقياس ومحددًا بـ PQ. ويتضمن الطول ... القياس. كما يكون للقطع المستقيمة **المتطابقة** الطول نفسه. يمكن استخدام العديد من الأدوات رسم قطعة مستقيمة متطابقة مع قطعة مستقيمة معطاة.

1 رسم قطعة مستقيمة متطابقة

الاستكشاف استخدم برنامج Geometer's Sketchpad لرسم قطع مستقيمة متطابقة.

a. استخدام الأدوات ارسم قطعة مستقيمة ثم سمّ نقطتي النهاية A, B. استخدم Measure Length لإيجاد طول $\overline{AB}$. حدد نقطة C بحيث تبعد بعض الشيء عن $\overline{AB}$. ارسم دائرة من طريق تحديد Circle by Center + Radius من القائمة Construct ثم باستخدام المركز C ونصف القطر $\overline{AB}$. وبعد ذلك، سمّ نقطة D على الدائرة. ارسم $\overline{CD}$ ثم أوجد طول CD.

m AB = 3.12 cm

نموذج الإجابة: $AB = 3.12$ cm، $CD = 3.12$ cm

b. التفكير بطريقة تجريدية ما العلاقة بين القطعتين المستقيمتين؟ إذا تم تحديد نقطة أخرى E في مكان آخر على الدائرة، فهل ستكون $\overline{CE}$ لها العلاقة نفسها مع $\overline{AB}$؟

نموذج الإجابة: بما أن القطعتين المستقيمتين لهما الطول نفسه، فإنهما متطابقتان. طالما E نقطة على الدائرة، فستكون القطعتان المستقيمتان متطابقتين.

الوحدة 10 أدوات الهندسة

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.ر 8

ينبغي على الطلاب معرفة أن أي نقطة يتم تحديدها على الدائرة ستعطي قطعة مستقيمة لها الطول نفسه للقطعة المستقيمة الأولى.

السؤال الداعم

كيف يمكنك إتمام هذا الرسم بدون برنامج؟ **برسم قطعة مستقيمة؛ ثم ضبط الفرجار على طول القطعة المستقيمة ورسم دائرة.**

خلفية عن الرياضيات

إن المفهوم الذي يقوم عليه نسخ قطعة مستقيمة هو التطابق. يكون الشكلان الهندسيان متطابقين إذا كان يمكن الحصول على أحدهما من الآخر من خلال حركات الدوران والانعكاس والإزاحة.

إن الفكرة الرياضية الأساسية في الرسم هي أن أي نصف قطر من الدائرة يجب أن يكون نسخة من (مطابقًا لـ) القطعة المستقيمة التي تم استخدامها في الرسم ويسمح الرسم برسم نسخة من القطعة المستقيمة في أي مكان، وبأي زاوية.

مثال 2

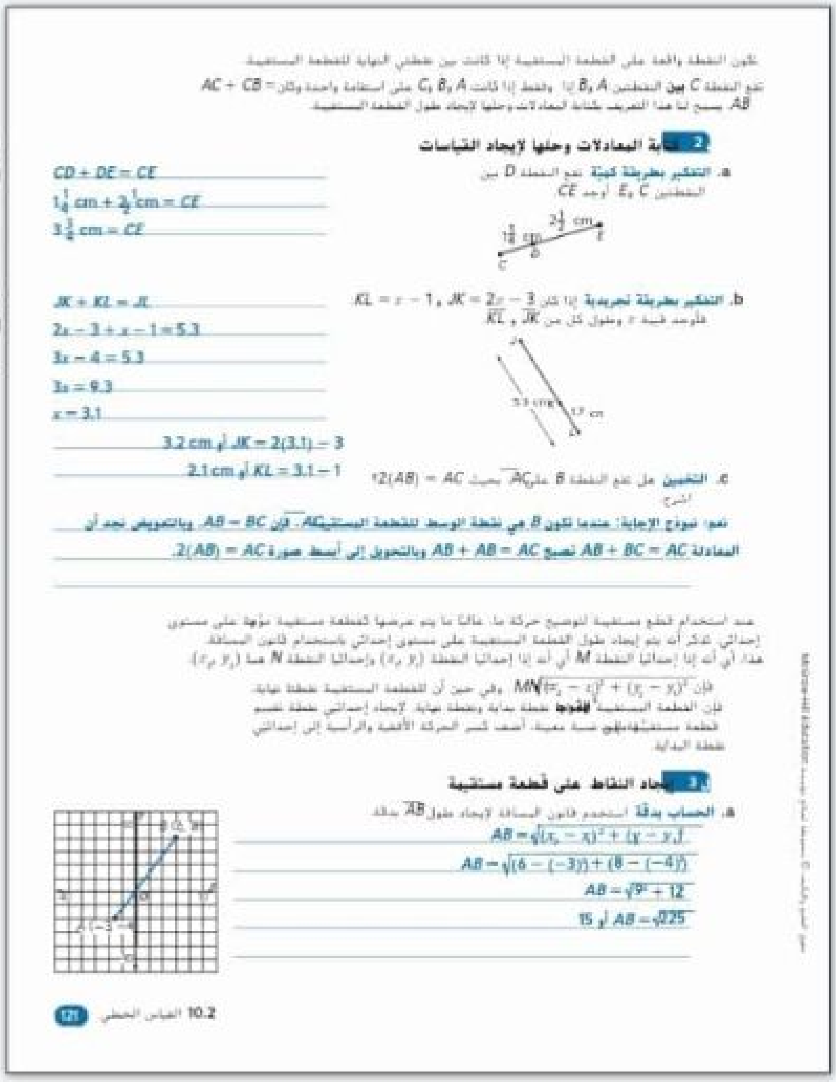
نصيحة للتدريس

م.ر 3

بالنسبة إلى بعض الطلاب، قد يكون من الجيد توضيح العلاقة إيجاد أطوال القطع المستقيمة المجهولة إيجاد المتغيرات المجهولة كما فعلوا في الجبر 1. إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في وضع المعادلات لحل **الجزأين a وb**، فشجعهم على التفكير في أطوال مثل CD وDE كمتغيرات مثل x أو y.

السؤال الداعم

كيف يمكنك التأكد من إجاباتك عن **الجزأين a وb؟ باستخدام مسطرة لرسم القطع المستقيمة وقياسها كما هو موضح لكل جزء.**


تكون النقطة واقعة على القطعة المستقيمة إذا كانت بين نقطتي النهاية للقطعة المستقيمة.

تقع النقطة C **بين** النقطتين A وB إذا، وفقط إذا كانت A وB وC على استقامة واحدة وكان $AC + CB = AB$. يسمح لنا هذا التعريف بكتابة المعادلات وحلها لإيجاد طول القطعة المستقيمة.

2 كتابة المعادلات وحلها لإيجاد القياسات

a. **التفكير بطريقة كمية** تقع النقطة D بين النقطتين C وE. أوجد CE.

$CD + DE = CE$

$1\frac{1}{4}\text{ cm} + 2\frac{1}{2}\text{ cm} = CE$

$3\frac{3}{4}\text{ cm} = CE$

b. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كان $JK = 2x - 3$ و$KL = x - 1$، فأوجد قيمة x وطول كل من $\overline{JK}$ و$\overline{KL}$.

$JK + KL = JL$

$2x - 3 + x - 1 = 5.3$

$3x - 4 = 5.3$

$3x = 9.3$

$x = 3.1$

$JK = 2(3.1) - 3$ أو 3.2 cm

$KL = 3.1 - 1$ أو 2.1 cm

c. **التخمين** هل تقع النقطة B على $\overline{AC}$ بحيث $2(AB) = AC$؟ اشرح.

نعم؛ نموذج الإجابة: عندما تكون B هي نقطة الوسط للقطعة المستقيمة $\overline{AC}$، فإن $AB = BC$. وبالتعويض نجد أن المعادلة $AB + BC = AC$ تصبح $AB + AB = AC$ وبالتحويل إلى أبسط صورة $2(AB) = AC$.

فإن $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3 إيجاد النقاط على قطعة مستقيمة

a. **الحساب بدقة** استخدم قانون المسافة لإيجاد طول $\overline{AB}$ بدقة.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (8 - (-4))^2}$

$AB = \sqrt{9^2 + 12^2}$

$AB = \sqrt{225}$ أو 15

10.2 القياس الخطي 121

التدريس المتمايز

في **المثال 2**، يعمل الطلاب بطريقة غير رسمية باستخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة، المعبر عنها في **الجزء a** بالصورة التالية: إذا كانت D تقع على CE، فإن $CD + DE = CE$. هذه فكرة مهمة للرسومات اللاحقة. قد يستفيد المتعلمون ذوو النمط الحركي من العمل باستخدام شريط قياس لتصور أفكار الجمع والطرح والقسمة المطورة هنا.

يبين **الجزء c** الطلاب لفكرة نقطة منتصف القطعة المستقيمة وعلاقة هذا المفهوم بالطول أو المسافة. وبالنسبة إلى المتعلمين ذوي النمط المرئي الذين قد يحتاجون إلى المساعدة على فهم الأسلوب في **الجزء c**، وضّح الفكرة باستخدام الرسم.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.ر 7

في **الجزء d**، وضّح للطلاب أنهم قاموا بحساب المتوسط للإحداثين x و y؛ ثم اطلب منهم النظر إلى متوسط عددين مميزين ليفهموا أن المتوسط لابد وأن يقع في المنتصف بين العددين على خط الأعداد.

الأسئلة الداعمة

كيف يمكنك التحقق من عملك لمعرفة ما إذا كانت النقطة D تقسم $\overline{AB}$ بحيث $AD = DB$؟ **الإجابة النموذجية: إذا استخدمت قانون المسافة لحساب AD و DB، فيجب أن تكون القيمتان متساويتين.**

ما العلاقة بين إحداثي y لنقطة المنتصف وإحداثيي y للنقطتين A وB؟ **إنه إحداثيا للنقطتين A وB.**

b. التواصل بدقة أوجد إحداثيي النقطة C على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ التي تقسم القطعة إلى مستقيمتين بنسبة 2 إلى 1. اشرح الحل.

(3, 4)؛ إذا كان $AC:BC = 2:1$ فإن $AC = \frac{2}{3}AB$. ننتقل من النقطة A 9 وحدات إلى اليمين و12 وحدة إلى أعلى لنصل إلى النقطة B. ثم لإيجاد C، نضيف $\frac{2}{3}$ من التغيرين الأفقية والرأسية إلى إحداثيي النقطة A. إذًا، $\left(-3 + \frac{2}{3}(9), -4 + \frac{2}{3}(12)\right) = (-3 + 6, -4 + 8) = (3, 4)$.

c. بناء الفرضيات استخدم قانون المسافة للتحقق من أن نسبة $AC:CB$ تساوي 2:1

$AC = \sqrt{(3-(-3))^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{100}$ أو 10؛ $BC = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25}$ أو 5؛ $\frac{AC}{BC} = \frac{10}{5}$ أو $\frac{2}{1}$

d. التواصل بدقة أوجد إحداثيي النقطة D على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ التي تقسم القطعة إلى النسبة 1 إلى 1. اكتب الحل هنا

(1.5, 2)؛ نموذج الإجابة: النقطة D هي $\frac{1}{2}$ المسافة من A إلى B. $\left(-3 + \frac{1}{2}(9), -4 + \frac{1}{2}(12)\right) = (-3 + 4.5, -4 + 6)$. إذًا إحداثيا النقطة D هما (1.5, 2).

e. تقييم مدى صحة الحل أوجد نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ باستخدام الصيغة $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ حيث (x_1, y_1) و(x_2, y_2) نقطتا النهاية للقطعة المستقيمة. ما وجه مقارنة ذلك بإحداثيي النقطة D في الجزء d؟ ما الاستنتاج الذي يمكنك التوصل إليه؟

(2 ,1.5)؛ للنقطتين الإحداثيان نفسهما. نموذج الإجابة: نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقسم القطعة إلى قطعتين مستقيمتين بنسبة 1:1.

تمرين

1. a. **التفكير بطريقة كمية** بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ اكتب معادلة وحلها لإيجاد طول AB.

$AB + BC = AC$

$AB + 1.5 \text{ cm} = 3.7 \text{ cm}$

$AB = 2.2 \text{ cm}$

b. **التفكير بطريقة كمية** ما الطول الذي تحتاجه EF لتطابق $\overline{DE}$ مع $\overline{AB}$؟

تتطابق $\overline{DE}$ و$\overline{AB}$، لابد أن $DE = AB$. إذًا، $DE = 2.2$ cm.

لأن $DF = DE + EF$، و $DF = 3.5$ cm، فإن $EF = DF - DE = 3.5 \text{ cm} - 2.2 \text{ cm} = 1.3 \text{ cm}$.

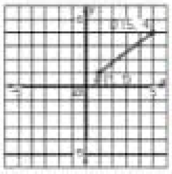
التأكيد على الممارسات الرياضية

يوفر **المثال 3** فرصة لتناول جانبي الحساب والتواصل للممارسة **م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. لا تؤكد على أهمية الحساب بشكل صحيح فحسب، بل أكّد أيضًا على أهمية شرح هذه العملية على نحو يسمح للآخرين بفهم ما يجري.

2. **استخدام البنية** لديك مستطيل $QRST$ فيه $QR = ST = 4$ cm و $RS = QT = 2$ cm، إذا كانت النقطة U تقع على $\overline{QR}$ بحيث $QU = UR$ والنقطة V تقع على $\overline{RS}$ بحيث $RV = VS$. فهل تكون $\overline{QU}$ متطابقة مع $\overline{RV}$؟ اشرح استنتاجك.

لا، نعرف أن $QU + UR = QR = 4$ و $QU = UR$، إذًا $QU = 2$. كما نعرف أن $RV + VS = RS = 2$ و $RV = VS$، إذًا $RV = 1$. وبأن QU لا تساوي RV، نستنتج أن $\overline{QU}$ لا تتطابق مع $\overline{RV}$.

3. **الحساب بدقة** ما الطول الدقيق لـ $\overline{RQ}$ الموضحة على اليسار؟



$RQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$RQ = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2}$

$RQ = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$RQ = \sqrt{25} = 5$ cm

4. a. **التفكير بطريقة كمية** إذا كنت ستضيف النقطة T إلى $\overline{RQ}$ في **التمرين 3** بحيث تكون نسبة RT إلى TQ هي 3 إلى 2. فماذا سيكون إحداثيا النقطة T؟

$\left(\frac{17}{5}, \frac{14}{5}\right)$؛ النقطة T هي $\frac{3}{5}$ المسافة من R إلى Q. إذًا، إحداثيا T هما $\left(1 + \frac{3}{5}(4), 1 + \frac{3}{5}(3)\right) = \left(1 + \frac{12}{5}, 1 + \frac{9}{5}\right)$ أي أن إحداثيا $T = \left(\frac{17}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

b. **التواصل بدقة** أوجد نقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{RQ}$ بدون استخدام قانون المسافة. احسب MT، واشرح استنتاجك.

$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$، إذًا $M = (3, 2.5)$. وبأن M هي نقطة منتصف $\overline{RQ}$، نستنتج أن $RM = \frac{1}{2}(5) = 2.5$ cm. كما نستنتج أن $RT = \frac{3}{5}(5) = 3$ cm. إذًا، $MT = RT - RM = 3\text{ cm} - 2.5\text{ cm} = 0.5$ cm.

c. استخدم قانون المسافة للتحقق من نتيجة حلك في **الجزء b**.

$MT = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$MT = \sqrt{\left(\frac{17}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - 2.5\right)^2}$

$MT = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}$

$MT = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{9}{100}}$

$MT = \sqrt{\frac{25}{100}}$

$MT = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

التأكيد على الممارسات الرياضية

يمكن استخدام **التمرين 4** لتناول الممارسة **م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. يحتاج الطلاب، في **الجزء a**، إلى ترجمة المعلومات حول تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة محددة إلى طريقة عملية للحل. إن الفكرة الرئيسة هي إدراك أن النسبة 3:2 تقسم $\overline{RT}$ في الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{5}$ والقيام بذلك. يجب أن يفهم الطلاب أن نمط التناسب هو $RT{:}TQ = \frac{3}{5}{:}\frac{2}{5} = 3{:}2$.

تمرين

يتطلب **المثال 1** من الطلاب استخدام تعريف القطعة المستقيمة بينما يقومون بإيجاد طول القطع المستقيمة.

في **التمرين 2**، ينبغي على الطلاب استخدام المعلومات المعطاة عن المستطيل لتحديد مدى صحة إحدى العبارات عن أجزاء المستطيل.

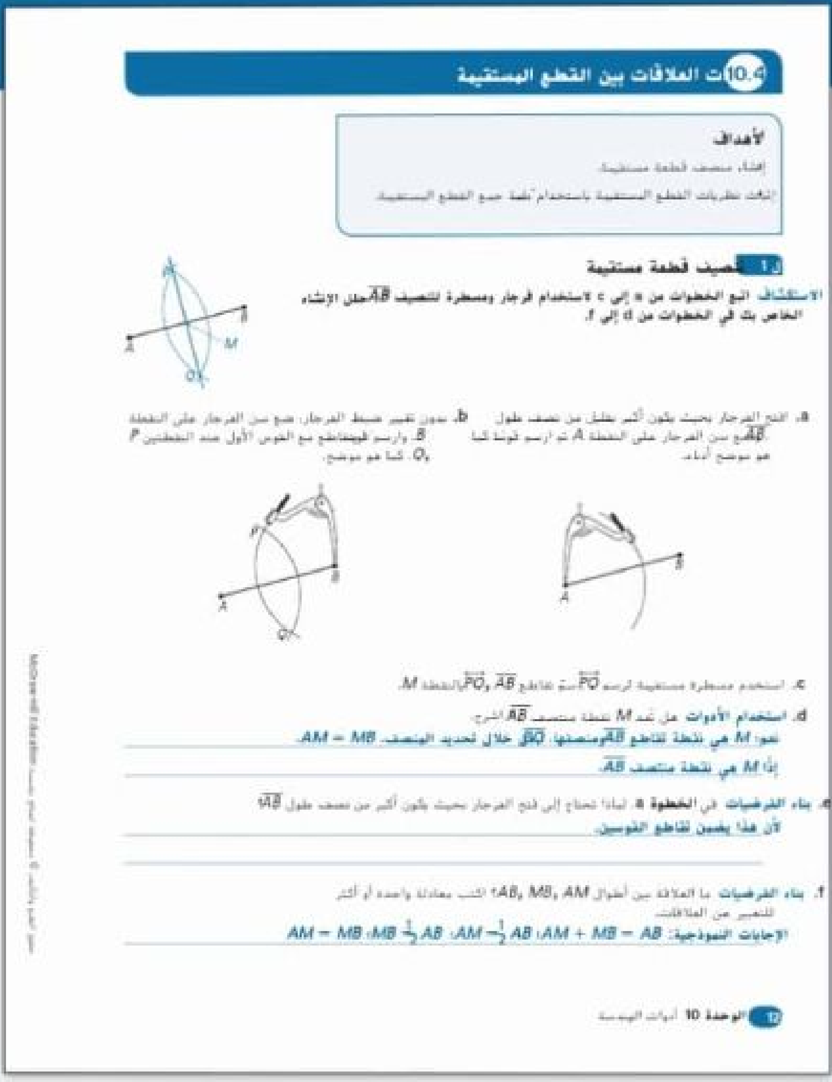
في **التمرين 3**، يستخدم الطلاب قانون المسافة لإيجاد طول القطعة المستقيمة.

يتطلب **التمرين 4** من الطلاب تحديد موقع نقطة منتصف القطعة المستقيمة، بقسمتها إلى قطعتين مستقيمتين بنسبة 1:1، أو بتحديد موقع النقطة التي تقسم قطعة مستقيمة معطاة إلى نسبة أخرى بخلاف 1:1.

تناول الممارسات الرياضية

التمرين	م.ر
1	2
2	7
3	6
4	2, 6

10.4 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة



10.4 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة

الأهداف

إنشاء منتصف قطعة مستقيمة.

إثبات نظريات القطع المستقيمة باستخدام تطابق القطع المستقيمة.

نشاط 1 تنصيف قطعة مستقيمة

الاستكشاف اتبع الخطوات من a إلى c لاستخدام فرجار ومسطرة لتنصيف $\overline{AB}$. حلل الإنشاء الخاص بك في الخطوات من d إلى f.

a. افتح الفرجار بحيث يكون أكبر قليلًا من نصف طول $\overline{AB}$. ضع سن الفرجار على النقطة A ثم ارسم قوسًا كما هو موضح أدناه.

b. بدون تغيير ضبط الفرجار، ضع سن الفرجار على النقطة B. وارسم قوسًا يتقاطع مع القوس الأول عند النقطتين P و Q، كما هو موضح.

c. استخدم مسطرة مستقيمة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$. سمِّ تقاطع $\overline{AB}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ النقطة M.

d. **استخدام الأدوات** هل تعد M نقطة منتصف $\overline{AB}$؟ اشرح.
نعم؛ M هي نقطة تقاطع $\overline{AB}$ ومنصفها $\overleftrightarrow{PQ}$ خلال تحديد المنتصف. $AM = MB$.
إذًا M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

e. **بناء الفرضيات** في **الخطوة a**. لماذا تحتاج إلى فتح الفرجار بحيث يكون أكبر من نصف طول $\overline{AB}$؟
لأن هذا يضمن تقاطع القوسين.

f. **بناء الفرضيات** ما العلاقة بين أطوال AM، MB، AB؟ اكتب معادلة واحدة أو أكثر للتعبير عن العلاقات.
الإجابات النموذجية: $AM + MB = AB$، $AM = \frac{1}{2}AB$، $MB = \frac{1}{2}AB$، $AM = MB$

12 الوحدة 10 أدوات الهندسة

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
6 ،5 ،3 ،1

المتطلبات الأساسية

- معرفة مفهوم التطابق وتطبيقه
- صياغة براهين مكونة من عمودين وفقرة إثبات

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.ر 6

قد ترغب في مناقشة مختصرة للتعريفات بينما يعمل الطلاب على هذا الإنشاء. تأكد من فهم الطلاب أن الكلمة ينصف تعني القسمة إلى جزءين متساويين.

الأسئلة الداعمة

- في **الخطوة a**. هل يهم مقدار فتح الفرجار بالضبط؟ اشرح. **لا؛ لا يهم مقدار فتح الفرجار بالضبط طالما أن المقدار أكثر من نصف طول $\overline{AB}$.**
- هل استخدام ضبط آخر للفرجار ينتج عنه ناتج مختلف؟ اشرح. **لا. سينتج عن استخدام نقطة المنتصف أزواج أكبر أو أصغر من الأقواس، ولكن سيبقى موقع نقطة المنتصف كما هو دون تغيير.**

خلفية عن الرياضيات

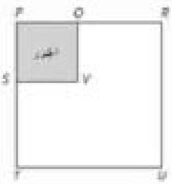
في هذا الدرس، يعمل الطلاب باستخدام القطع المستقيمة حيث يبدأ الطلاب في قراءة براهين أكثر تعقيدًا وكتابتها. وخلال الدرس، سيكوّن الطلاب أشكالاً هندسية ويفسرونها. ويعد هذا وقتًا مناسبًا لتناول الحقائق التي يمكن أو لا يمكن افتراضها من الشكل الموجود. وبصفة عامة، يمكن افتراض أن المستقيمات التي تظهر وكأنها مستقيمة فهي بالفعل كذلك، وأن النقاط التي تقع على طول أحد المستقيمات هي على مستوى واحد. لا يمكن افتراض نقطة تظهر وكأنها نقطة منتصف على أنها بالفعل كذلك فقط لأنها تقع بالقرب من منتصف المستقيم. وبالمثل، عندما يغير الطلاب انتباههم إلى الزوايا في الدروس القليلة القادمة، لا ينبغي عليهم افتراض أن زاوية ما هي زاوية قائمة ما لم يحدد ذلك بوضوح في الشكل.

في الاستكشاف، قد تكون لاحظت وجود علاقة بين أطوال القطعة المستقيمة الأصلية وأطوال القطعتين المستقيمتين الأقصر اللتين أنشأتهما. تنص مسلّمة جمع القطع المستقيمة على أن هذه العلاقة صحيحة.

المفهوم الأساسي مسلّمة جمع القطع المستقيمة

أكمل العبارة التالية.
إذا كان A وB وC تقع على خط واحد، فإن B تقع بين A وC فقط إذا كان $\underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC}$

2 استخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة



توجد مساحة مزروعة بالخضروات في حديقة عائلتك. وتريد عائلتك تخصيص زاوية جانبية من قطعة الأرض لزراعة محصول الجزر، كما هو موضح. بناء على قياساتها، عرفت أن $\overline{PR} \cong \overline{PT}$ و$\overline{QR} \cong \overline{ST}$ وترغب في معرفة ما إذا كانت تستطيع استنتاج أن $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$.

a. **بناء الفرضيات** أكمل البرهان المكون من عمودين أدناه.

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{ST}, \overline{PR} \cong \overline{PT}$

المطلوب برهانه: $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$

المبررات	العبارات
1. المعطيات	1. $\overline{QR} \cong \overline{ST}, \overline{PR} \cong \overline{PT}$
2. القطع المستقيمة المتطابقة لها أطوال متساوية.	2. $QR = ST, PR = PT$
3. مسلّمة جمع القطع المستقيمة	3. $PT = PS + ST, PR = PQ + QR$
4. خاصية التعويض	4. $PQ + QR = PS + ST$
5. خاصية التعويض	5. $PQ + QR = PS + QR$
6. خاصية الطرح	6. $PQ = PS$
7. القطع المستقيمة ذات الأطوال المتساوية تكون متطابقة.	7. $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$

b. **التواصل بدقة** في الخطوة الثانية من البرهان، ما سبب ضرورة تغيير العبارات المعطاة حول القطع المستقيمة المتطابقة إلى عبارات حول أطوال القطع المستقيمة؟

يعتمد البرهان على استخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة، ولكن تتضمن المسلمة أطوال القطع المستقيمة، ولذلك من الضروري تحويل عبارات المطابقة إلى عبارات أطوال.

c. **التواصل بدقة** قم بتمديد القطعة المستقيمة $\overline{SV}$ إلى القطعة المستقيمة $\overline{RU}$. ثم اعتبر W هي نقطة تقاطعهما. اكتب فقرة برهان لإثبات أنه إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{SW}$ و$\overline{QR} \cong \overline{VW}$، فإن $\overline{PQ} \cong \overline{SV}$.

بما أن $\overline{PR} \cong \overline{SW}$ و$\overline{QR} \cong \overline{VW}$، $PR = SW$ و$QR = ST$ لأن القطع المستقيمة المتطابقة متساوية في الطول. وفقًا لمسلّمة جمع القطع المستقيمة، $PR = PQ + QR$ و$SW = SV + VW$. بما أن $PR = SW$، $PQ + QR = SV + VW$ وفقًا لخاصية التعويض. بما أن $QR = VW$، تصبح المعادلة $PQ + VW = SV + VW$ وفقًا لخاصية التعويض. وفقًا لخاصية الطرح $PQ = SV$، وتتطابق القطع المستقيمة بالأطوال ذاتها، إذًا $\overline{PQ} \cong \overline{SV}$.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.ر 3

قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في فهم الاستنتاج في البرهان المكون من عمودين، خاصةً في الخطوات التي يُستخدم فيها التعويض. قد ترغب في أن تطلب من الطلاب استخدام قلم التظليل لوضع علامة على أي جزء من التعبير أو المعادلة يتغير من خطوة إلى أخرى في البرهان. وقد يساعدهم ذلك في التركيز على التعويض الذي تم.

الأسئلة الداعمة

- ما التغيرات التي تلاحظها من **الخطوة 4** إلى **الخطوة 5** من البرهان؟ اشرح كيف يمكن لخاصية التعويض في المعادلة أن تبرر هذه العبارات. **استُخدِمت QR بدلاً ST؛ نحن نعرف أن $QR = ST$ (من الخطوة 2) وتنص خاصية التعويض في المعادلة أنه يمكنك استبدال QR محل ST في أي تعبير أو معادلة.**
- ما الذي تفعله في المعادلة لتنتقل من **الخطوة 5** إلى **الخطوة 6**؟ **اطرح QR من كلا كلا طرفَي المعادلة خاصية الطرح في المعادلاّت.**

التأكيد على الممارسات الرياضية

تُعد مسلّمة جمع القطع المستقيمة مثالاً للممارسة **م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. بداية من هذا الدرس، ينبغي على الطلاب التعود على رؤية قطعة مستقيمة ككل أو "كمجموع" أجزائها. في الشكل الموجود في مربع المفهوم الأساسي، تمثل $\overline{AC}$ قطعة مستقيمة، ولكن يمكن رؤيتها أيضًا على أنها قطعة مستقيمة مكونة من قطعتين مستقيمتين أقصر، $\overline{AB}$ و$\overline{BC}$، وبينهما نقطة واحدة مشتركة (النقطة B). ويعد العمل جيئة وذهابًا بين طريقتي التعامل مع القطعة المستقيمة مهارة مهمة عند البحث عن طريقة منطقية لتقديم برهان ما.

تمرين

يعطي **التمرينان 1** و **2** الطلاب تدريبًا إضافيًا على استخدام فرجار مسطرة مستقيمة لتنصيف قطعة مستقيمة. ويضيف **التمرينان 3** و **4** بُعدًا جديدًا من الاستنتاج لحل الطلاب عند تنصيف قطعة مستقيمة.

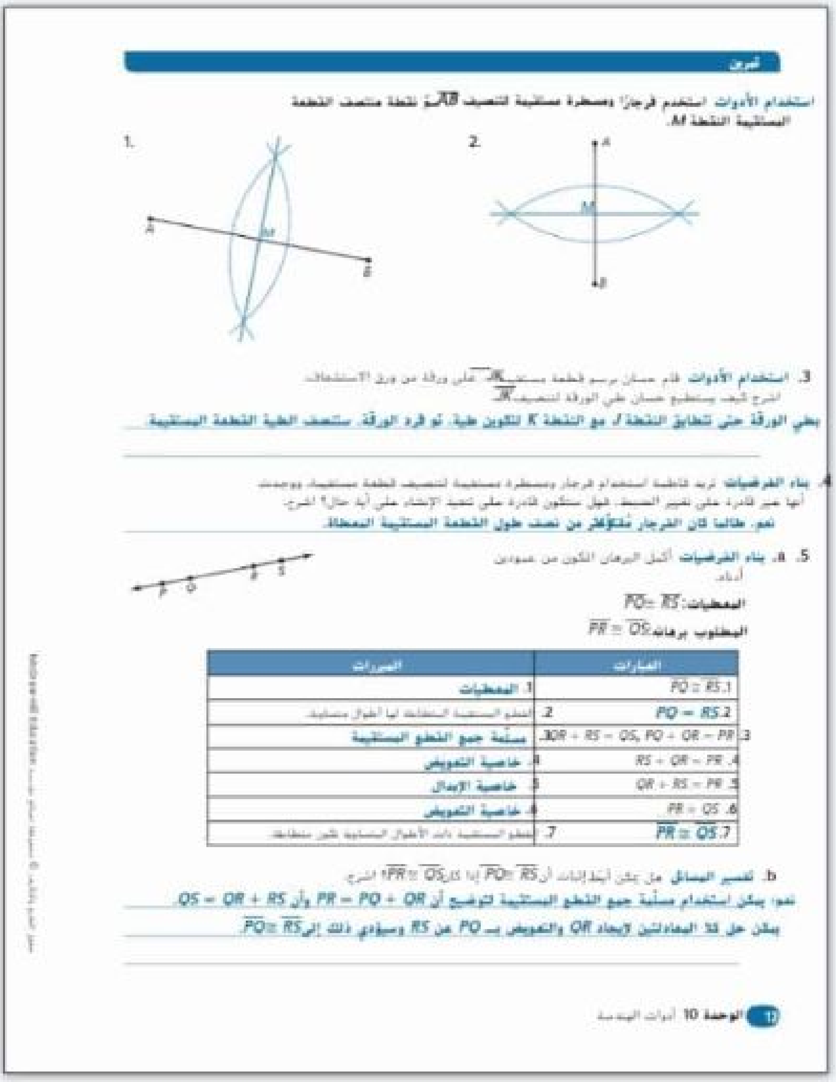
في **التمرينين 5** و **6**، يُكمل الطلاب برهانًا مكونًا من عمودين.

في **التمرين 7**، يُطلَب من الطلاب التعليق على استنتاج أحد البراهين.

ويطلب التمرين 8 من الطلاب كتابة فقرة إثبات تشمل قطعًا مستقيمة.

تناول الممارسات الرياضية

التمرين	م.ر
1-3	5
4	3
5	3
6	1, 3
7-8	3



تمرين

استخدام الأدوات استخدم فرجارًا ومسطرة مستقيمة لتنصيف $\overline{AB}$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة النقطة M.

1.

2.

3. استخدام الأدوات قام حسان برسم قطعة مستقيمة $\overline{JK}$ على ورقة من ورق الاستشفاف. اشرح كيف يستطيع حسان طي الورقة لتنصيف $\overline{JK}$.

يطوي الورقة حتى تطابق النقطة J مع النقطة K لتكوين طية. ثم فرد الورقة. ستنصف الطية القطعة المستقيمة.

4. بناء الفرضيات تريد فاطمة استخدام فرجار ومسطرة مستقيمة لتنصيف قطعة مستقيمة، ووجدت أنها غير قادرة على تغيير الضبط. فهل ستكون قادرة على تنفيذ الإنشاء على أية حال؟ اشرح.

نعم، طالما كان الفرجار مُتوفِّر من نصف طول القطعة المستقيمة المعطاة.

5. a. بناء الفرضيات أكمل البرهان المكون من عمودين أدناه.

المعطيات: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب برهانه: $\overline{PR} \cong \overline{QS}$

المبررات	العبارات
1. المعطيات	1. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$
2. القطع المستقيمة المتطابقة لها أطوال متساوية	2. $PQ = RS$
3. مسلّمة جمع القطع المستقيمة	3. $QR + RS = QS$, $PQ + QR = PR$
4. خاصية التعويض	4. $RS + QR = PR$
5. خاصية الإبدال	5. $QR + RS = PR$
6. خاصية التعويض	6. $PR = QS$
7. القطع المستقيمة ذات الأطوال المتساوية تكون متطابقة	7. $\overline{PR} \cong \overline{QS}$

b. تفسير المسائل هل يمكن أيضًا إثبات أن $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{QS}$؟ اشرح.

نعم، يمكن استخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة لتوضيح أن $PR = PQ + QR$ وأن $QS = QR + RS$

يمكن حل كلا المعادلتين لإيجاد QR والتعويض بـ PQ عن RS وسيؤدي ذلك إلى $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.

12 الوحدة 10 أدوات الهندسة

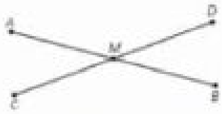
أخطاء شائعة

في **التمرين 5**، قد يواجه الطلاب صعوبة في تحديد الاستنتاج **للخطوة 4** من البرهان، بسبب تشابه العبارة $RS + QR = PR$ مع مسلّمة جمع القطع المستقيمة. فقد يذكر الطلاب ذلك على أنه الاستنتاج لهذه الخطوة. وضّح أنهم بالفعل قد حوّلوا $PQ = RS$ **(الخطوة 2)** و $PQ + QR = PR$ **(الخطوة 3)**. ينتج عن التعويض بـ RS عن PQ في التعبير اللاحق $RS + QR = PR$. إذًا خاصية التعويض في المعادلة هي الاستنتاج الصحيح.

أخطاء شائعة

في **التمرين 7**. قد يعتقد الطلاب أن استنتاج ناصر صحيح لأنه استخدم التعويض بطريقة صحيحة. قد يكون من ارتكب هذا الخطأ من الطلاب لم ينظر إلى الشكل بعناية أو لم يأخذ بعين الاعتبار ما إذا كان يمكن تطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة في هذه الحالة أم لا. أخبر الطلاب أن خطأ ناصر هو خطأ شائع يجب توخي الحذر من الوقوع فيه؛ بما أن النقاط P وQ وR ليست على مستوى واحد. فلا تنطبق مسلّمة جمع القطع المستقيمة.

6. يقوم مخطط المدينة بتصميم حديقة جديدة. يوجد في الحديقة ممران مستقيمان $\overline{AB}$ و$\overline{CD}$ لهما الطول نفسه. يوجد نصب تذكاري M عند نقطة المنتصف لكلا الممرين.



a. **تفسير المسائل** يعتقد مخطط طرق المدينة أن طول $\overline{AM}$ يكون مماثلاً لطول $\overline{CM}$. اشرح لماذا يبدو هذا منطقيًا.

لأنّ القطعتين المستقيمتين نصف طول القطع المستقيمة المتطابقة، ولذلك فإن أطوال القطع المستقيمة الأقصر يجب أن تكون متماثلة.

b. **بناء الفرضيات** أكمل البرهان المكون من عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؛ M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$ و$\overline{CD}$.

المطلوب برهانه: $\overline{AM} \cong \overline{CM}$

المبررات	العبارات
1. المعطيات	1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؛ M هي نقطة المنتصف في $\overline{AB}$ و$\overline{CD}$.
2. القطع المستقيمة المتطابقة لها أطوال متساوية.	2. $AB = CD$
3. تحديد نقطة المنتصف	3. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$؛ $\overline{CM} \cong \overline{MD}$
4. القطع المستقيمة المتطابقة لها أطوال متساوية.	4. $AM = MB$؛ $CM = MD$
5. مسلّمة جمع القطع المستقيمة	5. $AM + MB = AB$؛ $CM + MD = CD$
6. خاصية التعويض	6. $AM + MB = CM + MD$
7. خاصية التعويض	7. $AM + AM = CM + CM$
8. خاصية التوزيع	8. $2AM = 2CM$
9. خاصية القسمة في المعادلة	9. $AM = CM$
10. القطع المستقيمة ذات الأطوال المتساوية تكون متطابقة.	10. $\overline{AM} \cong \overline{CM}$

7. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يعرف ناصر أن النقطة R هي نقطة منتصف $\overline{QS}$ ويعلم أن هذا يعني أن $QR = RS$. ويقول إن $PR = PQ + QR$ وفقًا لمسلّمة جمع القطع المستقيمة، وبالتالي فإن $PR = PQ + RS$ بالتعويض. فهل تتفق مع ناصر في استنتاجه؟ اشرح.

لا؛ يمكن تطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة فقط على النقاط التي على استقامة واحدة، ولكن النقاط P وQ وR ليست على استقامة واحدة.

8. **بناء الفرضيات** اكتب فقرة إثبات تبرهن أنه إذا كان P وQ وR وS تقع على خط واحد، Q هي نقطة منتصف $\overline{PR}$، و$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ فإن R هي نقطة منتصف $\overline{QS}$.

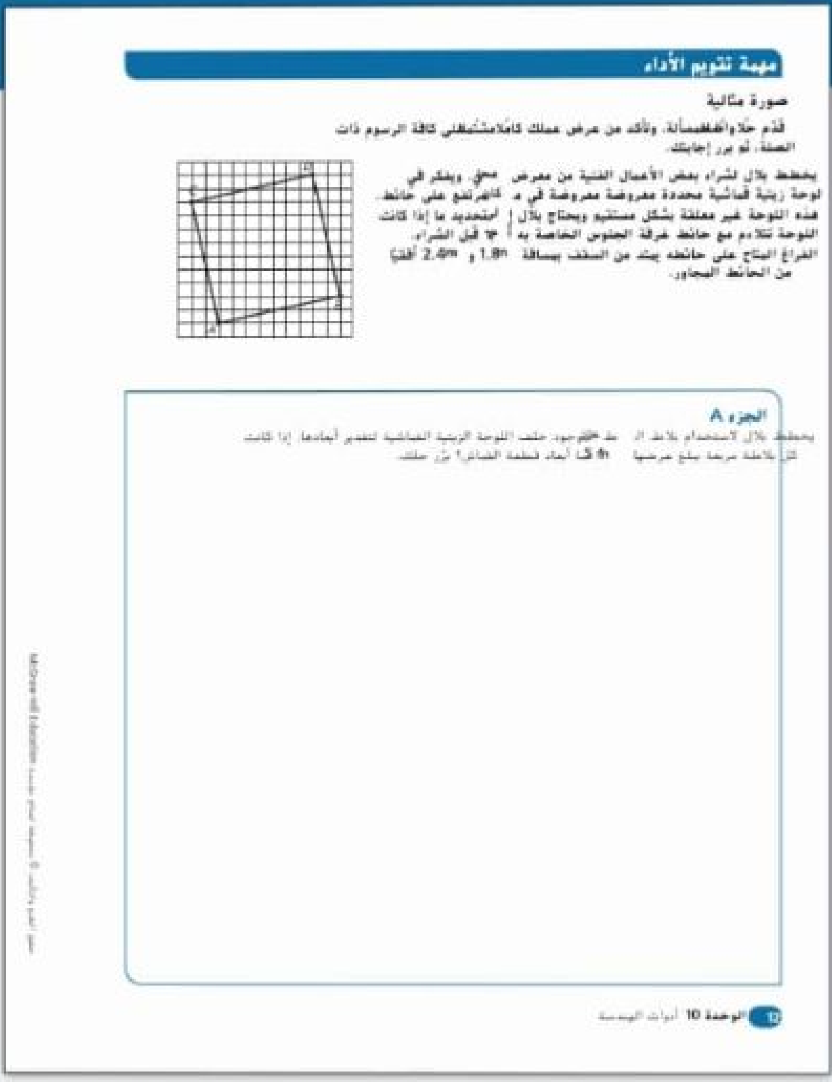
بما أن $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$، المستقيمات المتطابقة متساوية في الطول، $PQ = RS$. لأن Q هي نقطة المنتصف في $\overline{PR}$، $PQ = QR$. وفقًا لخاصية التعويض، $QR = RS$. إذًا R هي نقطة المنتصف في $\overline{QS}$.

10.4 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة 127

التأكيد على الممارسات الرياضية

يرتبط **الجزء a** من **التمرين 6** ارتباطًا بالممارسة **م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. وبصورة خاصة، عندما يُطلب من الطلاب كتابة برهان، ينبغي عليهم أولاً فهم المسألة بطرح سؤال على أنفسهم عن مدى صحة العبارة التي يحاولون حلها. وبسبب ذلك، إن الطلاب الذين يكونون قادرين على إقناع أنفسهم بأن العبارة التي يجب إثباتها صحيحة عادةً ما يكونون في وضع أفضل لوضع فرضية مقنعة على شكل برهان.

10 مهمة تقويم الأداء


مهمة تقويم الأداء

صورة مثالية

قدّم حلًا واضحًا للمسألة. وتأكد من عرض عملك كاملًا مشتملًا على كافة الرسوم ذات الصلة. ثم برر إجابتك.

يخطط بلال لشراء بعض الأعمال الفنية من معرض ... ويفكر في لوحة زينية قماشية محددة معروضة في ... على حائط. هذه اللوحة غير معلقة بشكل مستقيم ويحتاج بلال إلى تحديد ما إذا كانت اللوحة تتلاءم مع حائط غرفة الجلوس الخاصة به قبل الشراء. الفراغ المتاح على حائطه يمتد من السقف بمسافة 1.8m و 2.4m أفقيًا من الحائط المجاور.

الجزء A

يخطط بلال لاستخدام ... للوحة الزينية القماشية لتقدير أبعادها. إذا كانت كل ... مربعة ... قطعة القماش؟ برّر حلك.

الوحدة 10 أدوات الهندسة 12

صورة مثالية

يستخدم الطلاب شبكة لإيجاد الأبعاد والمحيطات والمساحات في إشارة إلى قطعة قماش فنية.

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية: تعزز مهمة تقويم الأداء هذه في الوحدة 10 الممارسات الرياضية **م.ر 1** و **م.ر 2**.

تنشيط الذاكرة

لتقديم المهمة، قد يكون من المفيد توضيح أنه يمكن تعيين الإحداثيات لرؤوس الشكل على شبكة بتعيين الإحداثيين (0, 0) لرأس واحد أولاً وتحديد الإحداثيات الأخرى بناءً على ذلك.

- إذا كان سيتم تعيين الإحداثيين (0, 0) لأحد الرؤوس، فهل يهم أي من الرؤوس سيتم اختياره؟ **لا، يمكن اختيار أي رأس ليكون له الإحداثيات (0, 0).**
- ما الأطوال التي تحتاج إليها لإيجاد محيط اللوحة الزينية القماشية؟ **AB و BC و CD و AD، وهي أطوال أضلاع اللوحة.**
- رأسيًا، تقع النقطة C أعلى النقطة A بمقدار 9 مكعبات. فكم يقابل ذلك من السنتيمترات؟ **ارتفاع كل مكعب يبلغ 15 cm، إذًا 9(15) = 135 cm.**

التأكيد على الممارسات الرياضية

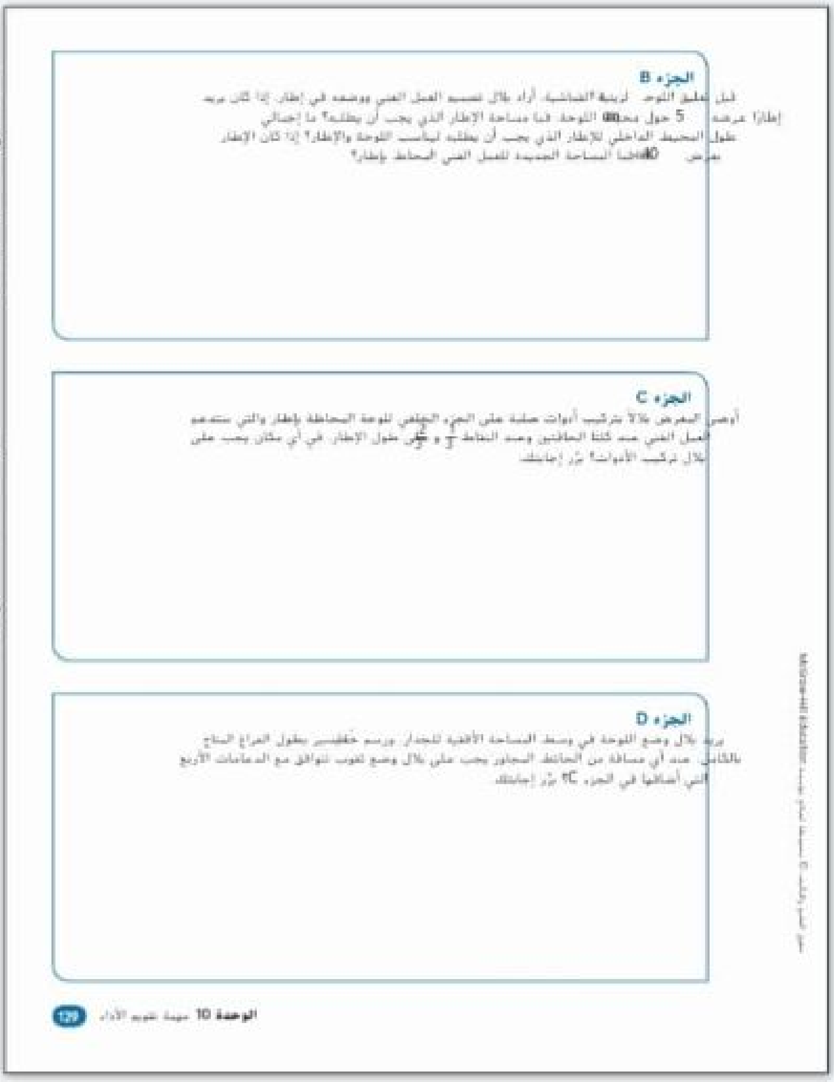
تتسق مهمة تقويم الأداء هذه بشكل أساسي مع الممارسة **م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. تتطلب المهمة من الطلاب تحديد المعلومات التي سيحتاجون إليها لإيجاد كميات مثل الطول والمحيط والمساحة بناءً على شبكة موجودة. ينبغي على الطلاب تعيين إحداثيات الرؤوس وتفسير النتائج في حالة من الحياة اليومية، حيث إن كل جزء من المهمة مبني على ما هو قبله.

نصيحة للتدريس م.ر 2

يرتبط الجزءان C وD بالممارسة م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة) حيث يُطلب من الطلاب تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متساوية وتحويلها إلى نقطة تمركز اللوحة على الحائط. اطلب من الطلاب إيجاد مكان وضع الحافتين اليمنى واليسرى للوحة الزيتية على الحائط أولاً، ثم تحديد النقطتين المتبقيتين.

أخطاء شائعة

قد يقوم الطلاب بتعيين الإحداثيات بشكل خاطئ لرؤوس *ABCD* باعتبار أن كل مكعب على الشبكة يساوي 1 cm بدلاً من 6m. قد يخطئ الطلاب أيضًا في وضع الإطار على اللوحة بحيث تتم محاذاة الإطار مع الحافة الخارجية لقطعة القماش وتمتد 6m إلى الداخل لا إلى الخارج.



الجزء B

الجزء C

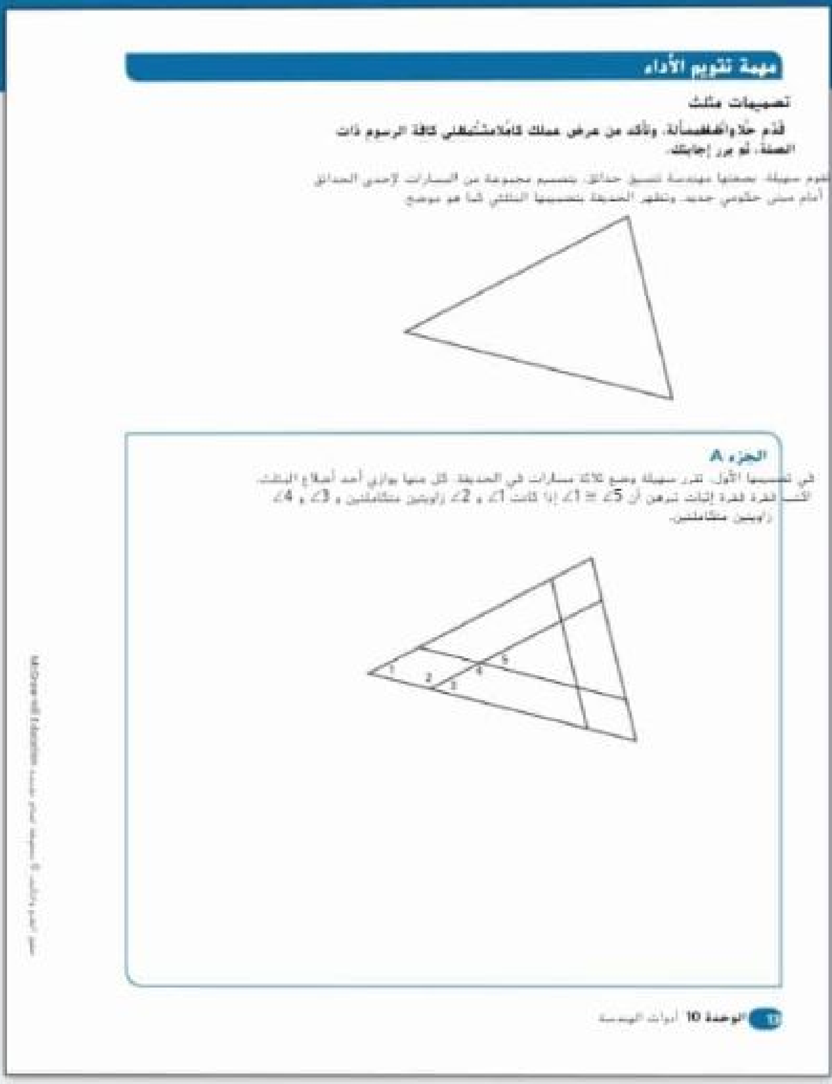
الجزء D

الوحدة 10 مهمة تقويم الأداء 129

إرشادات تسجيل الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة الدرجة الكاملة
A	2	138.3 cm في 138.3 cm أو 0.138 m في 0.138 m؛ إذا افترضنا أن إحداثيي *A* هما (0, 0)، فإن الإحداثيات المتبقية هي $B(9, 2)$ و$C(-2, 9)$ و$D(7, 11)$. ارتفاع اللوحة هو $h=\sqrt{(11-9)^2+(7-(-2))^2}=\sqrt{85}$. عرض اللوحة هو $w=\sqrt{(9-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{85}$. قياس كل مكعب هو 15 cm. إذًا $15(\sqrt{85}) \approx 138.3$ cm أو 0.138 m.
B	2	$(\sqrt{85}\times 15+10)^2-(\sqrt{85}\times 15)^2 \approx 2865\ \text{cm}^2$; $(\sqrt{85}\times 15+10) \approx 30$ cm; $(\sqrt{85}\times 15+30)^2 \approx 28{,}322.5\ \text{cm}^2$
C	2	عند كل طرف. ثم عند 56 cm من أحد الأطراف و 112 cm من الطرف نفسه. إجمالي طول اللوحة المحاطة بإطار يبلغ 168 cm تقريبًا. $\frac{1}{3}(168) \approx 56$ cm؛ $\frac{2}{3}(168) \approx 112$ cm
D	2	36 cm و 92 cm و 148 cm و 204 cm؛ يبعد مركز الجزء 2.4-m من الحائط 120 cm عن الحائط المجاور. وطول اللوحة 168 cm تقريبًا. لذا يجب أن تكون هناك مسافة 84 cm على أحد جانبي العلامة 120 cm و 84 cm على الجانب الآخر. لذا يجب حفر الفتحة الأولى عند 36 = (84 − 120). وتوضع الدعامة التالية للوحة عند 92 cm = (36 + 56). وتوضع الدعامة التالية عند 148 cm = (36 + 112). وتوضع الدعامة الأخيرة عند 204 cm = (36 + 168).
الإجمالي	8	

10 مهمة تقويم الأداء



تصميمات مثلث

يستكشف الطلاب مخططات مختلفة لمسارات في متنزه المدينة، حيث يتضمن أحدها منصفات زوايا ومنصفات متعامدة.

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
تعزز مهمة تقويم الأداء هذه في الوحدة 10 الممارسات الرياضية م.ر 1 و م.ر 2 و م.ر 5 و م.ر 6 و م.ر 7.

المواد

برنامج الهندسة الديناميكية أو فرجار ومسطرة مستقيمة

تنشيط الذاكرة

قد يكون بعض الطلاب غير واثقين من كيفية تكوين منصف زاوية أو منصف متعامد.

كيف يمكنك استخدام الفرجار ومسطرة مستقيمة لإنشاء منصف متعامد؟ **الإجابة النموذجية: إنشاء قوس أكبر بقليل من نصف طول المستقيم. وبدون تغيير ضبط الفرجار نُكرِّر من النقطة الأخرى ثم نستخدم المسطرة المستقيمة لرسم قطعة مستقيمة بين التقاطعين الناتجين من الأقواس، فينتج منصف متعامد.**

التأكيد على الممارسات الرياضية

تتسق مهمة تقويم الأداء هذه بشكل أساسي مع الممارسة **م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. تتطلب المهمة من الطلاب تطبيق الممارسة **م.ر 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)** لعمل الإنشاءات بالورقة والقلم المحددة في **الجزء C**. ويتطلب **الجزء C** من الطلاب تطبيق الممارسة **م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)** الممارسة **م.ر 6 (مراعاة الدقة)** لاستخلاص أن دائرة محيطة ستنتج من الإنشاء باستخدام منصفات متعامدة.

تنشيط الذاكرة (تابع)

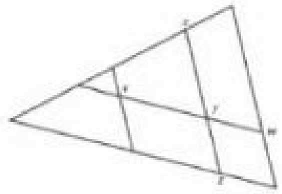
كيف يمكنك استخدام الفرجار ومسطرة مستقيمة لإنشاء منصف متعامد؟ **الإجابة النموذجية: أرسم قوسًا يتقاطع مع ضلعي الزاوية، باستخدام الرأس كمركز. وباستخدام الضبط نفسه، أضع الفرجار على أحد التقاطعات، أرسم قوسًا داخل الزاوية. وأكرر ذلك مع التقاطع الآخر. ثم أستخدم مسطرة مستقيمة لرسم مستقيم من الرأس حتى النقاط التي يتقاطع عندها الأقواس. وسينتج منصف الزاوية.**

أخطاء شائعة

قد يتعامل بعض الطلاب بشكل خاطئ مع الإنشاء على أنه رسم. أكد على الدقة والاستخدام المناسب للأدوات بينما يقوم الطلاب بعمل الإنشاءات الخاصة بهم. تعد محاذاة المسطرة المستقيمة بعناية وضبط الفرجار بدقة حتى لا يتوسع أثناء الدوران من المهارات الضرورية للحصول على النتائج المتوقعة.

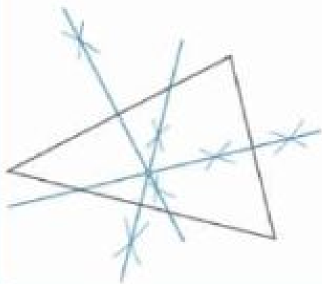
الجزء B

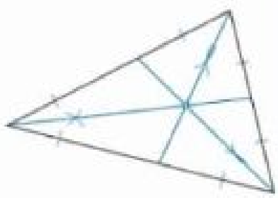
في تصميمها الثاني، قررت سهيلة وضع ثلاثة مسارات في الحديقة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. اكتب فقرة إثبات توضح فيها أنه إذا كان $VW = XZ$ و $YW = YZ$، فإن $VY = XY$



الجزء C

ترغب سهيلة في رسم تصميمين مختلفين لثلاثة مسارات للحديقة. وفي كل تصميم سيتم وضع صندوق القمامة عند النقطة التي تتقاطع عندها المسارات الثلاثة. وفي أحد التصميمات ستكون المسارات بمثابة منصفات الزاوية للمثلث بينما ستكون بمثابة الأعمدة المنصفة للمثلث في التصميم الآخر. اشرح ميزة وضع صندوق القمامة في كل تصميم.

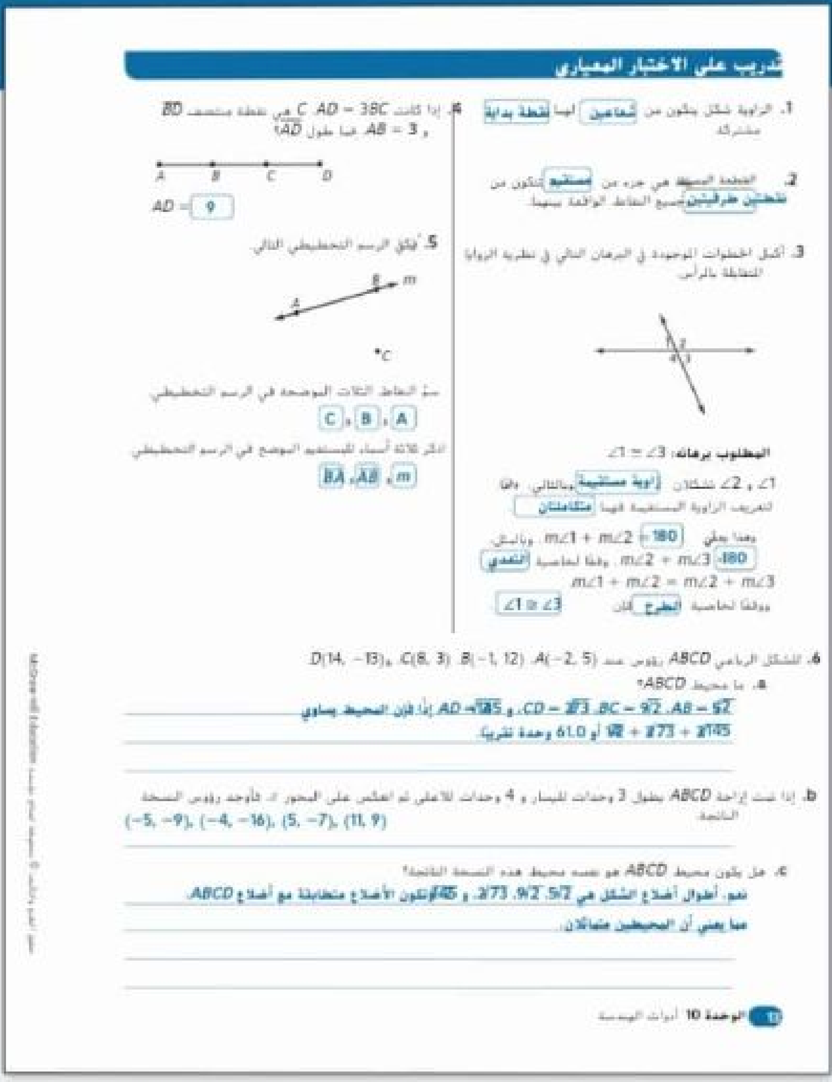




إرشادات تسجيل الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة الدرجة الكاملة
A	2	لأن $\angle 1$ مكملة لـ $\angle 2$ و $\angle 2$ مكملة لـ $\angle 3$، إذًا $\angle 3 \cong \angle 1$. أيضًا، $\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 3$ مكملة لـ $\angle 4$ وبذلك يجب أن تكون $\angle 1$ مكملة لـ $\angle 4$. وأخيرًا، $\angle 4$ مكملة لـ $\angle 1$ و $\angle 5$. إذًا $\angle 5 \cong \angle 1$.
B	2	$VW = VY + YW$ وفقًا لمسلّمة جمع القطع المستقيمة. إذًا $VY = VW - YW$ وفقًا لخاصية التعويض في المعادلة. وبالمثل، $XZ = XY + YZ$ وفقًا لمسلّمة جمع القطع المستقيمة. إذًا $XY = XZ - YZ$ وفقًا لخاصية التعويض في المعادلة وبالتعويض، $VY = XZ - YZ = XY$.
C	4	راجع رسم الطالب للتفاصيل. إذا وضعت سهيلة صندوق القمامة عند تقاطع منصفات الزوايا، فسيكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث. وإذا وضعت صندوق القمامة عند تقاطع المنصفات المتعامدة، فسيكون على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.
الإجمالي	8	

تدريب على الاختبارات المعيارية



تدريب على الاختبار المعياري

1. الزاوية شكل يتكون من **شعاعين** لهما **نقطة بداية** مشتركة.

2. القطعة المستقيمة هي جزء من **مستقيم** تتكون من **نقطتين طرفيتين** وجميع النقاط الواقعة بينهما.

3. أكمل الخطوات الموجودة في البرهان التالي في نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس.

المطلوب برهانه: $\angle 1 \cong \angle 3$

$\angle 1$ و $\angle 2$ تشكلان **زاوية مستقيمة** وبالتالي، وفقًا لتعريف الزاوية المستقيمة فهما **متكاملتان**

وهذا يعني $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$. وبالمثل، $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$. وفقًا لخاصية **التعدي**

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

ووفقًا لخاصية **الطرح** فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

4. إذا كانت C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$، $AD = 3BC$، و $AB = 3$، فما طول $\overline{AD}$؟

$AD = 9$

5. تأمل الرسم التخطيطي التالي.

سمِّ النقاط الثلاث الموضحة في الرسم التخطيطي
A، **B**، **C**

اذكر ثلاثة أسماء للمستقيم الموضح في الرسم التخطيطي
m، $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{BA}$

6. الشكل الرباعي $ABCD$ رؤوس عند $A(-2, 5)$، $B(-1, 12)$، $C(8, 3)$، و $D(14, -13)$.

a. ما محيط $ABCD$؟

$AB = 5\sqrt{2}$، $BC = 9\sqrt{2}$، $CD = \sqrt{73}$، و $AD = \sqrt{185}$ إذًا فإن المحيط يساوي $\sqrt{185} + \sqrt{73} + \sqrt{98}$ أو 61.0 وحدة تقريبًا.

b. إذا تمت إزاحة $ABCD$ بمقدار 3 وحدات لليسار و 4 وحدات للأعلى ثم انعكس على المحور x، فأوجد رؤوس النسخة الناتجة.

$(-5, -9)$، $(-4, -16)$، $(5, -7)$، $(11, 9)$

c. هل يكون محيط $ABCD$ هو نفسه محيط هذه النسخة الناتجة؟

نعم. أطوال أضلاع الشكل هي $5\sqrt{2}$، $9\sqrt{2}$، $\sqrt{73}$، و $\sqrt{185}$ تكون الأضلاع متطابقة مع أضلاع $ABCD$، مما يعني أن المحيطين متماثلان.

الوحدة 10 أدوات الهندسة 13

تشخيص الأخطاء

قد لا يجيد الطلاب الذين أجابوا عن **المسألة 3** بشكل خاطئ استخدام المفردات الموجودة في هذه الوحدة. قم بإعداد قائمة بالمفردات الشائعة مثل. أزواج خطية وزوايا متكاملة وزوايا متقابلة بالرأس وأيضًا الخواص الرياضية مثل. خواص التعدي والجمع والطرح في المعادلات. اطلب من الطلاب شرح المفردة أو الخاصية ورسم مثال أو كتابته لكل من هذه المفردات.

تشخيص الأخطاء

في **المسألة 7**. قد يستفيد الطلاب الذين يجدون صعوبة في كتابة الاستنتاجات من الرسم التخطيطي. اجعل هؤلاء الطلاب يرسمون مخططًا للزوايا A و B و C.

قد يكون الطلاب الذين حددوا بشكل خاطئ الخطوة الثالثة في القائمة على أنها الخطوة 2 في **المسألة 8** لم يراجعوا جميع الخطوات قبل تنفيذها. تعد الخطوة الثانية المدرجة هي أفضل خطوة لهذا الترتيب. لأن أسفل القائمة توجد خطوة تكوّن نقطة T.

المسألة 14

[2] تشمل الإجابة قياس AB بالفرجار لإنشاء قوس بوضع سن الفرجار على Y، ووضع النقطة Z على القوس.

[1] تشمل الإجابة خطوة أو خطوتين صحيحتين

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والتبرير غير صحيحين

المسألة 15

[3] إجابة صحيحة لجميع الأجزاء

[2] توجد أخطاء بسيطة في حساب محيط أو رأس النسخة الناتجة، ولكن التفسير صحيح **للجزء c** أو جزء واحد غير صحيح

[1] تتضمن الإجابة عنصرًا واحدًا على الأقل صحيحًا

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والتبرير غير صحيحين

7. أكمل البرهان التالي

المعطيات: $\angle A$ متكاملة مع $\angle B$

$\angle C$ متكاملة مع $\angle B$

المطلوب برهانه: $\angle A \cong \angle C$

العبارة	المبررات
$\angle A$ مكملة لـ $\angle B$	المعطيات
$m\angle A + m\angle B = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$\angle C$ مكملة لـ $\angle B$	المعطيات
$m\angle C + m\angle B = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$m\angle A + m\angle B = m\angle C + m\angle B$	خاصية التعدي
$m\angle A = m\angle C$	خاصية الطرح
$\angle A \cong \angle C$	تعريف الزوايا المتطابقة

8. يوجد أدناه الخطوات اللازمة لإنشاء $\angle XYZ$ كنسخة من $\angle A$. في العمود الأول، ضع الترتيب الخاص بكل خطوة.

الترتيب	الخطوة
4	بدون تغيير عرض الفرجار، حرك نقطة الفرجار إلى Y وارسم قوسًا يقطع XY عند S
2	ارسم XY
7	ارسم YZ يحتوي على T
5	ضع سن الفرجار عند B ثم اضبط عرضه على BC
1	سمِّ النقطة X حيث ستكون رأس الزاوية الجديدة
6	بدون تغيير عرض الفرجار، حرك سن الفرجار إلى S ثم ارسم قوسًا يقطع القوس الأول لإنشاء النقطة T
3	ضع سن الفرجار على A ثم ارسم قوسًا يقطع ضلعي الزاوية عند B و C

9. يقوم أحمد بإنشاء $\overline{YZ}$ تكون متطابقة مع $\overline{AB}$. ما الخطوات التي يجب على أحمد اتباعها؟

وضع سن الفرجار عند A ثم ضبط عرض الفرجار بحيث يكون السن الآخر عند B

بدون تغيير العرض، يتم تحريك سن الفرجار إلى Y ثم رسم قوس، وضع Z على القوس

ثم توصيل Y و Z.

10. ينص عكس نظرية المنصف على أنه إذا كانت هناك نقطة داخل إحدى الزوايا تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإن هذه النقطة تقع على منصف الزاوية. اشرح كيف تبرر هذه النظرية الطريقة المستخدمة لإنشاء منصف زاوية.

أولًا، نقوم بإنشاء قوس ينتج عنه نقاط في كل شعاع تقع على مسافة واحدة من الرأس. وبعد ذلك نقوم بإنشاء أقواس من هذه النقاط باستخدام العرض ذاته للفرجار. تقع النقطة التي تمر بها هذه الأقواس على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، وبالتالي فإنها تقع على منصف الزاوية.

استراتيجية حل الاختبار

قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تصور الخطوات الموضحة في **المسألة 8**. شجع الطلاب على تنفيذ الإنشاء على قصاصة ورقية، والتأكد من من استخدام أسماء النقاط نفسها المعطاة في المسألة. وأثناء إكمال الطلاب لكل خطوة في الإنشاء، اطلب منهم البحث عن هذه الخطوة في القائمة وترقيمها.

7. أكمل البرهان التالي

المعطيات: $\angle A$ متكاملة مع $\angle B$

$\angle B$ متكاملة مع $\angle C$

المطلوب برهانه: $\angle A \cong \angle C$

المبررات	العبارة
المعطيات	$\angle A$ مكملة لـ $\angle B$
تعريف الزاويتين المتكاملتين	$m\angle A + m\angle B = 180$
المعطيات	$\angle C$ مكملة لـ $\angle B$
تعريف الزاويتين المتكاملتين	$m\angle C + m\angle B = 180$
خاصية التعدي	$m\angle A + m\angle B = m\angle C + m\angle B$
خاصية الطرح	$m\angle A = m\angle C$
تعريف الزوايا المتطابقة	$\angle A \cong \angle C$

8. يوجد أدناه الخطوات اللازمة لإنشاء $\angle XYZ$ كنسخة من $\angle A$. في العمود الأول، ضع الترتيب الخاص بكل خطوة.

الترتيب	الخطوة
4	بدون تغيير عرض الفرجار، حرك نقطة الفرجار إلى Y وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{XY}$ عند S
2	ارسم $\overrightarrow{XY}$
7	ارسم $\overrightarrow{YZ}$ يحتوي على T
5	ضع سن الفرجار عند B ثم اضبط عرضه على BC
1	حدد النقطة X، حيث ستكون رأس الزاوية الجديدة
6	بدون تغيير عرض الفرجار، حرك سن الفرجار إلى S ثم ارسم قوسًا يقطع القوس الأول لإنشاء النقطة T
3	ضع سن الفرجار على A ثم ارسم قوسًا يقطع ضلعي الزاوية لينتج التقاطع B و C

9. يقوم أحمد بإنشاء $\overline{YZ}$ ليكون متطابقة مع $\overline{AB}$. ما الخطوات التي يجب على أحمد اتباعها

وضع سن الفرجار عند A ثم ضبط عرض الفرجار بحيث يكون السن الآخر عند B

بدون تغيير العرض، يتم تحريك سن الفرجار إلى Y ثم رسم قوس. وضع Z على القوس

ثم توصيل Y و Z.

10. ينص عكس نظرية المنصف على أنه إذا كانت هناك نقطة داخل إحدى الزوايا تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإن هذه النقطة تقع على منصف الزاوية. اشرح كيف تبرر هذه النظرية الطريقة المستخدمة لإنشاء منصف زاوية.

إجابة نموذجية: نقوم بإنشاء قوس ينتج عنه نقاط في كل شعاع تقع على مسافة واحدة من الرأس. وبعد ذلك نقوم بإنشاء أقواس من هذه النقاط باستخدام العرض ذاته للفرجار. تقع النقطة التي تمر بها هذه الأقواس على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، وبالتالي فإنها تقع على منصف الزاوية.

استراتيجية حل الاختبار

قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تصور الخطوات الموضحة في **المسألة 8**. شجع الطلاب على تنفيذ الإنشاء على قصاصة ورقية، والتأكد من استخدام أسماء النقاط نفسها المعطاة في المسألة. وأثناء إكمال الطلاب لكل خطوة في الإنشاء، اطلب منهم البحث عن هذه الخطوة في القائمة وترقيمها.

تشخيص الأخطاء

في **المسألة 7**، قد يستفيد الطلاب الذين يجدون صعوبة في كتابة الاستنتاجات من الرسم التخطيطي. اجعل هؤلاء الطلاب يرسمون مخططًا للزوايا A و B و C.

قد يكون الطلاب الذين حددوا بشكل خاطئ الخطوة الثالثة في القائمة على أنها الخطوة 2 في **المسألة 8** لم يراجعوا جميع الخطوات قبل تنفيذها. تعد الخطوة الثانية المدرجة هي أفضل خطوة لهذا الترتيب، لأن أسفل القائمة توجد خطوة تكوّن نقطة T.

المسألة 14

[2] تشمل الإجابة قياس AB بالفرجار لإنشاء قوس بوضع سن الفرجار على Y، ووضع النقطة Z على القوس.

[1] تشمل الإجابة خطوة أو خطوتين صحيحتين

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والتبرير غير صحيحين

المسألة 15

[3] إجابة صحيحة لجميع الأجزاء

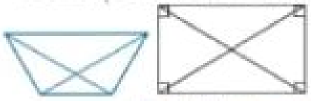
[2] توجد أخطاء بسيطة في حساب محيط أو رأس النسخة الناتجة، ولكن التفسير صحيح **للجزء c** أو جزء واحد غير صحيح

[1] تتضمن الإجابة عنصرًا واحدًا على الأقل صحيحًا

[0] لا توجد إجابة أو الإجابة والتبرير غير صحيحين

11 الأشكال الرباعية

الهدف الأساسي من الوحدة التعرف على بعض المعايير الحكومية الأساسية المشتركة التي ستستكشفها في هذه الوحدة والإجابة على السؤال التمهيدي. أثناء استكشافك لكل درس، ارجع إلى هذه الصفحات للتحقق من حلك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 11.2: متوازي الأضلاع	
أستخدم الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا. أثبت النظريات الخاصة بمتوازيات الأضلاع	رؤوس زوايا متوازي الأضلاع هي كالآتي (0, 4)، و (5, 0)، و (10, 4). اذكر جميع المواقع الممكنة للرؤوس الأربعة. (5, 8) و (−5, 0) و (15, 0)
الدرس 11.3: اختبارات متوازي الأضلاع	
أثبت النظريات الخاصة بمتوازيات الأضلاع. مجسمات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (منقلة ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك). أستخدم الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.	رسمت كريمة الشكل التالي لإثبات أنه إذا تطابق قطرا شكل الشكل الرباعي، فإن هذا الشكل هو متوازي أضلاع. ارسم مثالًا مخالفًا لإثبات خطأ كريمة. ما الخطأ الذي ارتكبته كريمة؟  لا يمكنك برهان عبارة عامة بمثال.
	رؤوس زوايا الشكل الرباعي ABCD هي A(−2, 3) و B(1, 6) و C(7, 3) و D(5, 1). أوجد ميل كل ضلع وحدد ما إذا كان ABCD متوازي أضلاع أم لا. اشرح استنتاجك. الميول: لـ $\overline{AB}$ الميل $\frac{6-3}{1-(-2)} = 1$ ولـ $\overline{BC}$ الميل $\frac{3-6}{7-1} = -\frac{1}{2}$ ولـ $\overline{CD}$ الميل $\frac{1-3}{5-7} = 1$ ولـ $\overline{AD}$ الميل $\frac{1-3}{5-(-2)} = -\frac{2}{7}$ ABCD ليس متوازي أضلاع لأنه لا يضم زوجين من الأضلاع المتوازية.
	كيف يمكن تحريك النقطة C بحيث يصبح الشكل ABCD متوازي أضلاع؟ الإجابة النموذجية: حرك النقطة C إلى (8, 4). إذًا الميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{4-6}{8-1} = -\frac{2}{7}$ والميل $\overline{CD}$ يتغير. إذًا، يضم الشكل ABCD زوجين اثنين من الأضلاع المتقابلة والمتوازية، إذًا فهو متوازي أضلاع.

13 الوحدة 11 الأشكال الرباعية

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) إلى جانب كتاب *الرياضيات المتكاملة 8*.

درس دليل الطالب التفاعلي	الرياضيات المتكاملة 8
11.2	الدرس 11-2
11.3	الدرس 11-3
11.4	الدرس 11-4
11.5	الدرس 11-5
11.6	الدرس 11-6

نصيحة للتدريس م.ر 2

يُقدم السؤال التمهيدي للدرس **11.2** تمرينًا على الممارسة **م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. اطلب من الطلاب تمثيل النقاط الثلاث المعطاة بيانيًا واستخدام التمثيل البياني لتحديد الرؤوس المحتملة الأخرى. ذكّر الطلاب بوجوب استخدام خصائص جبرية لإثبات أن كل نقطة عبارة عن رأس.

نصيحة للتدريس

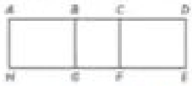
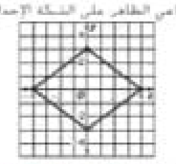
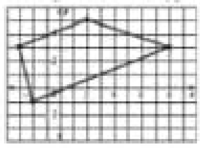
م.ر 7

يتناول السؤال التمهيدي للدرس 11.3 الممارسة **م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. من طرق حل المسألة رسم الأشكال الرباعية الثلاثة المذكورة في نص المسألة بشكل منفصل. اجعل الطلاب يحددوا كل ما يعرفونه قبل القيام بفصل المستطيلات. استخدم هذه المسألة لتعزيز فكرة عدم إمكانية افتراض أن الشكل عبارة عن مستطيل لمجرد أنه يبدو مثل المستطيل، ويجب استخدام النظريات والتعريفات الهندسية لإثبات ذلك.

نصيحة للتدريس

م.ر 6

قد يحث السؤال التمهيدي للدرس 11.4 على بدء نقاش حول الممارسة **م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. تصنيف الشكل الرباعي يتطلب من الطالب أن يكون دقيقًا في انتقاء اللغة والتفكير. فتحديد أطوال الأضلاع على أنها متماثلة يكفي للقول بأن الشكل عبارة عن معين، ولكنه ليس كافيًا لتحديد ما إذا كان الشكل عبارة عن مربع أم لا. يجب على الطلاب أيضًا إجراء الحسابات بدقة، وهم يحددون أطوال الأضلاع وأطوال الأقطار.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 11.4 المستطيل	
أثبت النظريات الخاصة بمتوازيات الأضلاع. مجسمات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (مسطرة ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك). استخدم الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.	ABGH مستطيل و CDEF متوازي أضلاع. هل يمكنك استنتاج أن الشكل BCFG مستطيل؟ اشرح.  لا؛ نعلم أن الشكل BCFG يضم زاويتين قائمتين، ولكننا لا نعلم ما إذا كان BCFG متوازي أضلاع.
الدرس 11.5 المعين والمربع	
أثبت النظريات الخاصة بمتوازيات الأضلاع. مجسمات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (مسطرة ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك). استخدم الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.	صنّف الشكل الرباعي الظاهر على الشبكة الإحداثية. اشرح.  معين؛ أطوال الأضلاع تساوي 5، ولذلك فهي متطابقة. إنه ليس مربعًا لأن القطرين غير متطابقين. للقطرين الطولان 6 و 8.
الدرس 11.6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية	
استخدم الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.	ما إحداثيات نقاط النهاية لقطعة شبه المنحرف؟  $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ و $(5, 4)$

الوحدة 11 الهدف الأساسي من الوحدة 135

11.2 متوازي الأضلاع

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية
1, 2.,3, 5, 6, 7, 8

متطلبات الأساسية

استخدام علاقات الزوايا المكوّنة من مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع

إثبات تطابق المثلثات

مثال 1

نصيحة للتدريس

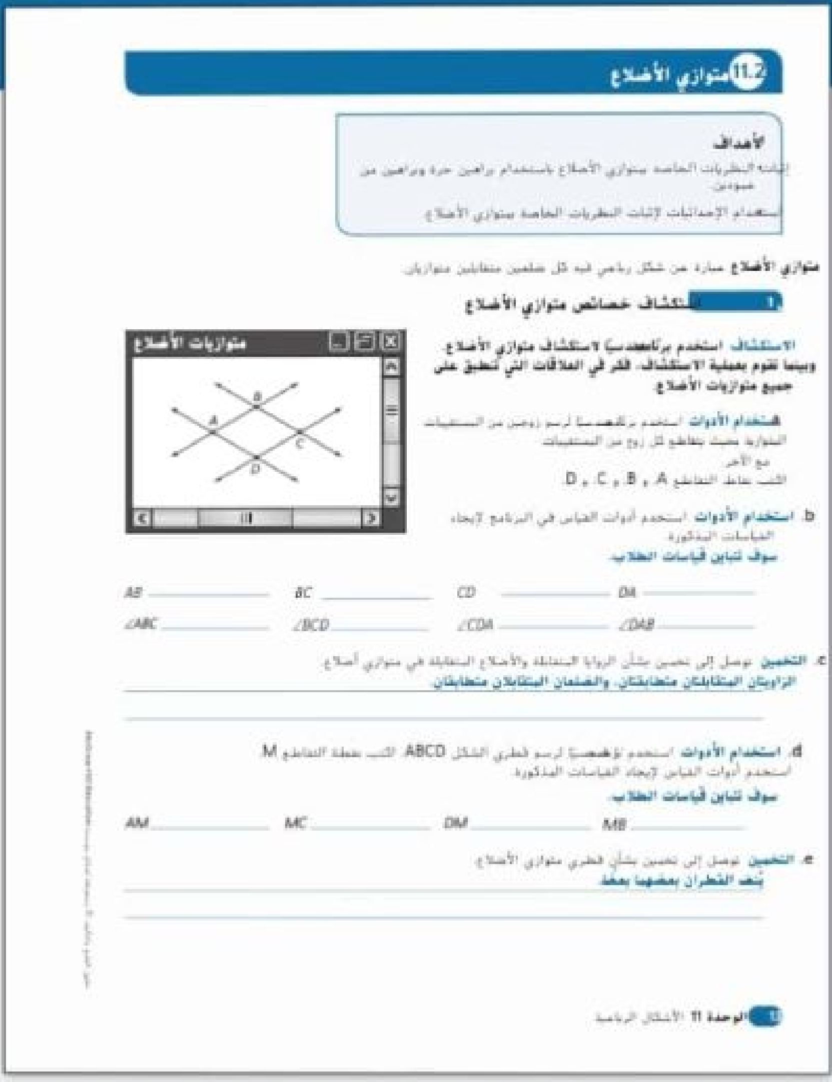
م.ر 7

يوفر **الجزء f** الفرصة لتقديم الممارسة **م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. عندما يحلل الطلاب القياسات التي وجدوها، ينبغي لهم البحث عن نمط يوضح أي الأجزاء من متوازي الأضلاع متطابقة.

الأسئلة الداعمة

هل أي من الأضلاع ≅؟ وإذا كانت الإجابة بنعم، فما هي تلك الأضلاع؟ **الأضلاع المتقابلة تكون ≅.** هل ينطبق ذلك على جميع أزواج الأضلاع المتقابلة في متوازيات الأضلاع؟ **نعم.** هل تعتقد أن جميع الأضلاع المتقابلة ≅ في جميع متوازيات الأضلاع؟ اشرح. **ستتنوع إجابات الطلاب.**

ما الذي تلاحظه في قُطرَي متوازيات الأضلاع؟ **أنهما يتقاطعان مع بعضهما.** هل يعني ذلك أن القطرين ≅؟ اشرح. **لا؛ قد تختلف أطوالهما ولا يزالان يتقاطعان.**



11.2 متوازي الأضلاع

الأهداف
إثبات النظريات الخاصة بمتوازي الأضلاع باستخدام براهين حرة وبراهين من عمودين.
استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الخاصة بمتوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع عبارة عن شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

1 استكشاف خصائص متوازي الأضلاع

الاستكشاف استخدم برنامج هندسي لاستكشاف متوازي الأضلاع. وبينما تقوم بعملية الاستكشاف، فكر في العلاقات التي تنطبق على جميع متوازيات الأضلاع.

a. استخدام الأدوات استخدم برنامجًا هندسيًا لرسم زوجين من المستقيمات المتوازية بحيث يتقاطع كل زوج من المستقيمات مع الآخر. اكتب نقاط التقاطع A و B و C و D.

b. استخدام الأدوات استخدم أدوات القياس في البرنامج لإيجاد القياسات المذكورة.
سوف تتباين قياسات الطلاب.

AB ____ BC ____ CD ____ DA ____
∠ABC ____ ∠BCD ____ ∠CDA ____ ∠DAB ____

c. التخمين توصل إلى تخمين بشأن الزوايا المتقابلة والأضلاع المتقابلة في متوازي أضلاع.
الزاويتان المتقابلتان متطابقتان، والضلعان المتقابلان متطابقان

d. استخدام الأدوات استخدم برنامجًا لرسم قطري الشكل ABCD. اكتب نقطة التقاطع M. استخدم أدوات القياس لإيجاد القياسات المذكورة.
سوف تتباين قياسات الطلاب.

AM ____ MC ____ DM ____ MB ____

e. التخمين توصل إلى تخمين بشأن قطري متوازي الأضلاع.
ينصف القطران بعضهما بعضًا

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

خلفية عن الرياضيات

متوازي الأضلاع هو أحد أنواع الأشكال الرباعية يتوازى فيه كلا زوجي الأضلاع المتقابلة مع بعضهما. تتميز متوازيات الأضلاع بالخواص التالية.

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع متكاملة.

قطرا متوازي الأضلاع يتقاطعان مع بعضهما.

يمكن إثبات كل خاصية من تلك الخواص باستخدام تعريف متوازي الأضلاع وتطابق المثلثات. ويمكن تطبيق تلك الخواص على أي الشكل الرباعي يحدّد على أنه متوازي أضلاع.

مثال 1

نصيحة للتدريس
م.ر 1

في **الجزء a**، يجب على الطلاب تحديد طريقة تعديل الرسم التخطيطي المعطى لإثبات النظرية 11.4 بطريقة معينة. قد يخطط الطلاب للحل بتنفيذه عكسيًا بداية من النتيجة التي يريدونها (إثبات النظرية 11.4 باستخدام مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة). والتي تستخدم الممارسة **م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**.

الأسئلة الداعمة

- ما الذي تحاول إثباته؟ **تطابق الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع.**
- ما الزوايا المتقابلة في الرسم التخطيطي؟ $\angle Q \cong \angle S$ و $\angle P \cong \angle R$
- ما وجه الفائدة من المثلثات عند محاولة إثبات تطابق الأجزاء؟ **هناك العديد من الطرق لمحاولة إثبات أن مثلثين ≅. يمكن تقسيم متوازيات الأضلاع إلى مثلثات، وبمجرد إثبات أن مثلثين ≅، فإنه يمكن استخدام الأجزاء المتناظرة في المثلثين المتطابقين لإثبات تطابق متوازيات الأضلاع.**

إيجاد نمط استخدم متوازي الأضلاع الذي رسمته في **الجزء a**. هل العلاقات التي لاحظتها هي دائمًا؟

نعم؛ يبقى كل ضلعين متوازيين متطابقين، ويبقى كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، وينصف القطران بعضهما بعضًا.

تنطبق عدة خصائص على جميع متوازيات الأضلاع، ويمكن إثبات جميع هذه الخصائص باستخدام التعريفات والخصائص والنظريات التي تعرفها بالفعل.

المفهوم الأساسي

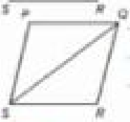
أكمل الجدول بكتابة النظرية الكاملة التي تتوافق مع كل اختصار.

النظرية	العبارة	الاختصار
11.3	إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.	الضلعان المتقابلان في ▱ متطابقان
11.4	إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.	الزاويتان المتقابلتان ∠ في ▱ متطابقتان
11.5	إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متتاليتين فيه متكاملتان.	الزاويتان المتتاليتان ∠ في ▱ متكاملتان
11.6	إذا احتوى متوازي أضلاع على زاوية واحدة قائمة، فإن زواياه الأربعة تكون قائمة.	إذا كان ▱ فيه ∠ واحدة قائمة، فإن له 4∠ قائمة
11.7	إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قطريه ينصف بعضهما بعضًا.	قطرا ▱ ينصفان بعضهما البعض
11.8	إذا كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع، فإن كل قطر يفصل متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.	القطران يقسمان ▱ إلى 2 △ ≅

إثبات أن الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة

خطط وأكمل برهانًا من عمودين على النظرية 11.4 كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان

a. **التخطيط للحل** إذا أردت إثبات أن $\angle R \cong \angle P$ باستخدام مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة، فكيف يمكنك تغيير الرسم التخطيطي على اليسار ليساعدك في برهانك؟ ما الحقائق الخاصة بالنقاط والمستقيمات التي تبرر التغيير الذي تجريه؟



الإجابة النموذجية: سأرسم مستقيمًا من النقطة Q إلى النقطة S حيث يربط بين أية نقطتين مستقيمٌ واحدٌ فقط.

مثال 3

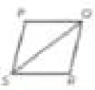
نصيحة للتدريس م.ر 3

راجع الفرق بين البرهان المكتوب في فقرة والمكون من عمودين. وأكّد على أنه في كلا النوعين من البراهين، يجب على الطلاب أن يضعوا باعتبارهم الممارسة **م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين).**

الأسئلة الداعمة

ما وجه الفائدة من نظريات القواطع في إثبات النظريات عن متوازيات الأضلاع؟ **بما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإن الأضلاع المتجاورة تكوّن قاطعًا. وبالتالي، يمكننا استخدام النظريات المتعلقة بالقواطع لصياغة عبارات عن متوازيات الأضلاع.**

لإثبات أن $\angle J$ و $\angle K$ متكاملتان، فأي قطعة مستقيمة هي القاطع وأيها هي القطع المتوازية؟ **$\overline{JM}$ و $\overline{KL}$ هما القطعتان المتوازيتان، و $\overline{JK}$ هي القاطع.**



b. بناء الفرضيات املأ العبارات والأسباب الناقصة لإكمال البرهان.

المعطيات: متوازي الأضلاع PQRS

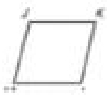
المطلوب إثباته: $\angle R \cong \angle P$

الأسباب	العبارات
1. معطى	1. PQRS متوازي أضلاع
2. تعريف متوازي الأضلاع	2. $\overline{QR} \parallel \overline{SP}$، $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$
3. نظرية الزوايا ∠ الداخلية	3. $\angle RQS \cong \angle PSQ$، $\angle RSQ \cong \angle PQS$
4. خاصية الانعكاس في التطابق	4. $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$
5. (زاوية-ضلع-زاوية)	5. $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$
6. الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	6. $\angle R \cong \angle P$

c. وصف طريقة كيف يمكنك إكمال البرهان لإثبات أن $\angle S \cong \angle Q$؟

الإجابة النموذجية: يمكن أن أرسم القطر $\overline{QS}$ ومن ثم أثبت أن $\triangle QRP \cong \triangle SPR$ وبعد ذلك يمكن أن أستخدم النظرية القائلة إن الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة لإثبات أن $\angle S \cong \angle Q$ الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين ≅ △ متطابقة ≅.

إثبات أن الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع متكاملة



خطط واكتب برهانًا حرًا على النظرية 11.5 إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متتاليتين فيه متكاملتان.

a. بناء الفرضيات أكمل البرهان الحر.

المعطيات: JKLM متوازي أضلاع

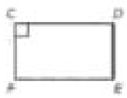
المطلوب إثباته: أن $\angle J$ و $\angle K$، و $\angle K$ و $\angle L$، و $\angle L$ و $\angle M$، و $\angle M$ و $\angle J$ زوايا متكاملة

من المعلوم في الشكل أن JKLM متوازي أضلاع إذًا $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$، و $\overline{KL} \parallel \overline{JM}$

وعندما يقطع مستقيمين متوازيين قاطع فإن الزوايا الداخلية المتتالية متكاملة

إذًا $\angle J$ و $\angle K$، $\angle K$ و $\angle L$، $\angle L$ و $\angle M$، $\angle M$ و $\angle J$ زوايا متكاملة

إثبات الزوايا القائمة في متوازي الأضلاع



اكتب برهانًا حرًا على النظرية 11.6 إذا كان متوازي الأضلاع يحتوي على زاوية واحدة قائمة، فإنه يحتوي على أربع زوايا قائمة.

a. بناء الفرضيات اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات: CDEF متوازي أضلاع، و $\angle C$ زاوية قائمة

المطلوب إثباته: أن $\angle D$، و $\angle E$، و $\angle F$ زوايا قائمة

الإجابة النموذجية: لدينا CDEF متوازي أضلاع ≅ والزاوية C زاوية قائمة. تقول النظرية 11.4 إن كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع ≅ متطابقتان ≅. إذًا $\angle C \cong \angle E$ ولذلك يجب أن تكون الزاوية E زاوية قائمة أيضًا. تقول النظرية 11.5 إن كل زاويتين متتاليتين في متوازي الأضلاع ≅ متكاملتان. إذًا يجب أن تكون الزاوية C مكملة لكلتا الزاويتين $\angle F$ و $\angle D$. إذًا $m\angle C + m\angle D = m\angle C + m\angle F = 180$ حسب تعريف التكامل. إذًا $m\angle D = m\angle F = 180 - 90 = 90$

ولذلك، فالزاويتان $\angle F$ و $\angle D$ زاويتان قائمتان أيضًا.

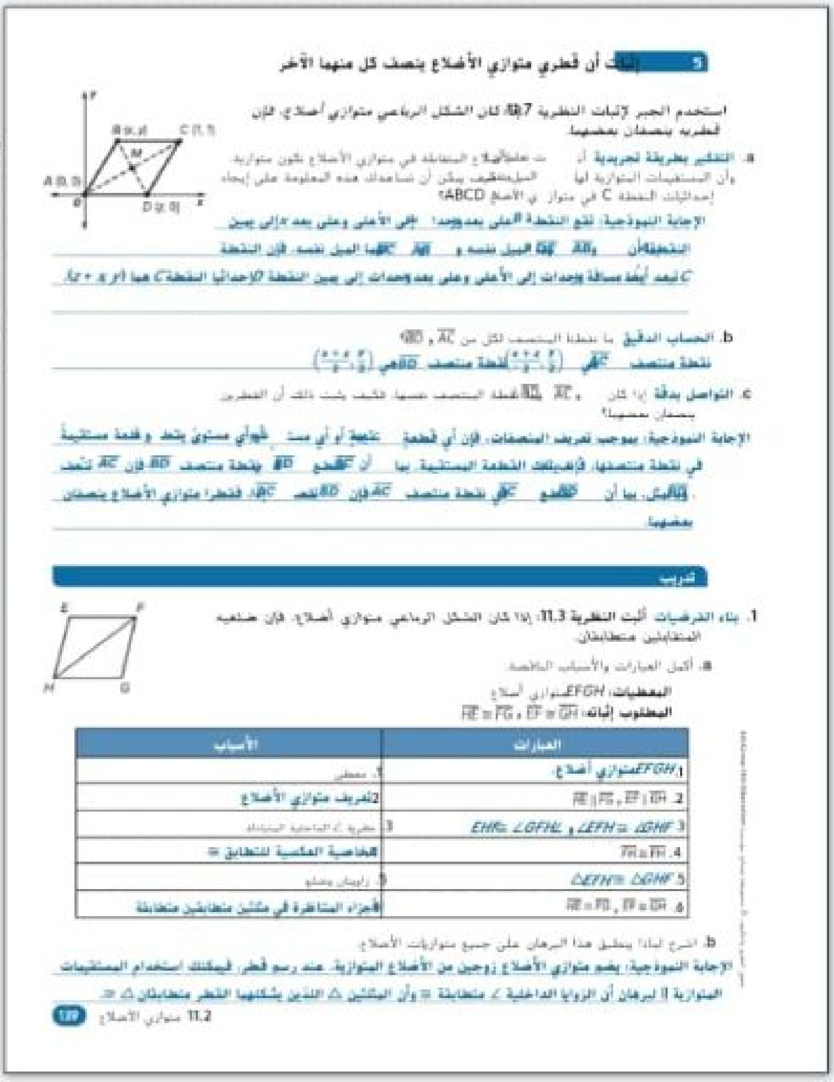
الوحدة 11 الأشكال الرباعية

التدريس المتمايز

يواجه بعض الطلاب صعوبات في تذكر جميع المعلومات اللازمة لإثبات خواص متوازيات الأضلاع. وقبل أن يبدأ الطلاب البراهين، اطلب منهم رسم خريطة مفاهيم تلخص المعلومات المتعلقة بالبراهين.

∠ الزوايا والمستقيمات المتوازية	إثبات تطابق △ المثلثات	خواص متوازي الأضلاع

اطلب من الطلاب التفكير بخصوص المعلومات التي ينبغي إدراجها في أول عمودين وتسجيلها بطريقة تفيدهم. اطلب منهم ملء العمود الثالث أثناء الدرس، وشجعهم على استخدام خريطة المفاهيم خلال الدرس.



5 إثبات أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

استخدم الجبر لإثبات النظرية 11.7: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن القطرين ينصفان بعضهما.

a. التفكير بطريقة تجريدية

إحداثيات النقطة C في متوازي الأضلاع ABCD؟

b. الحساب الدقيق

c. التواصل بدقة

يتصفان بعضهما؟

تدريب

1. بناء الفرضيات أثبت النظرية 11.3: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن ضلعيه المتقابلين متطابقان.

a. أكمل العبارات والأسباب الناقصة.

المعطيات: $EFGH$ متوازي أضلاع

المطلوب إثباته: $\overline{HE} \cong \overline{FG}$، $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

الأسباب	العبارات
1. معطى	1. $EFGH$ متوازي أضلاع
2. تعريف متوازي الأضلاع	2. $\overline{HE} \parallel \overline{FG}$، $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$
3. [illegible]	3. $\angle EFH \cong \angle GHF$ و $\angle EHF \cong \angle GFH$
4. الخاصية العكسية للتطابق	4. $\overline{FH} \cong \overline{FH}$
5. [illegible]	5. $\triangle EFH \cong \triangle GHF$
6. الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	6. $\overline{HE} \cong \overline{FG}$، $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

b. اشرح لماذا ينطبق هذا البرهان على جميع متوازيات الأضلاع.

11.2 متوازي الأضلاع

مثال 4

نصيحة للتدريس

م.ر 3

ينبغي للطلاب معرفة أن بإمكانهم استخدام الاستنتاج السابق وهم يطبقون الممارسة **م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)** لإثبات علاقات جديدة. وبما أنه بمجرد إثبات النظرية، فإنه يمكن استخدامها في صورة سبب في برهان آخر دون الحاجة إلى إثباتها كلها مرة أخرى.

الأسئلة الداعمة

ما الذي أثبتَّه في هذا الدرس؟ **النظرية 11.4: الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع ≅. النظرية 11.5: الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع متكاملة.**

كيف يمكنك تطبيق تلك النظريات على الرسم التخطيطي لإيجاد البرهان؟ **$\angle E \cong \angle C$ و $\angle F \cong \angle D$؛ زوجا الزوايا التاليين متكاملان: $\angle C$ و $\angle D$، $\angle D$ و $\angle E$، $\angle E$ و $\angle F$، $\angle F$ و $\angle C$.**

التأكيد على الممارسات الرياضية

يطلب **المثال 4** من الطلاب وضع خطتهم الخاصة لبرهان يبدأ بالمعطيات وينتهي بالمفترض إثباته. ولا يتلقون مساعدة في الخطوات المتضمنة.

لمساعدة الطلاب في أثناء حل المسألة، اجعلهم يخبروك بكل شيء يعرفونه عن متوازيات الأضلاع والزوايا القائمة. ثم يناقشون الطرق المحتملة التي يمكن استخدامها لإثبات أن الزوايا قائمة. أدِر المناقشة بحيث يربط الطلاب بين ما يعرفونه بالفعل وما يحاولون إثباته. وبمجرد أن تكتمل لديهم نظرة عامة عن طريقة التفكير، اجعلهم يكملوا المثال.

مثال 5

نصيحة للتدريس

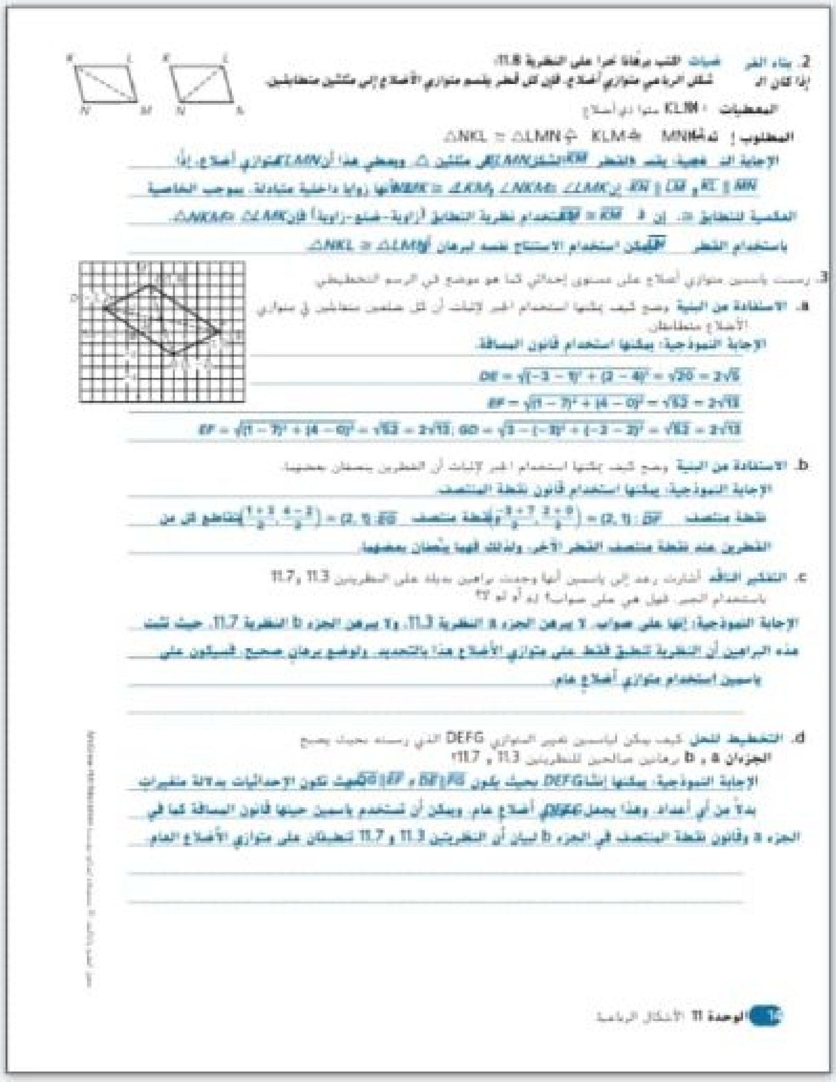
م.ر 2

ثمة طرق عديدة لتقديم الممارسة م.ر 2 **(التفكير بطريقة تجريدية وكميّة).** إحدى تلك الطرق هي استخدام الجبر لتوضيح العلاقات. بينما يكتب الطلاب البرهان الجبري، يجب عليهم ربط المعلومات التي لديهم في استخدام الجبر بالشكل الهندسي وبما يحاولون إثباته فيه.

الأسئلة الداعمة

ما أوجه الترابط بين نقطة المنتصف والمنصّف؟ **أي منّصف يمر بنقطة المنتصف.**

كيف تساعدك معرفة تقاطع المنتصف للقطرين في توضيح أنهما يتقاطعان مع بعضهما؟ **إذا مر أحد القطرين بنقطة منتصف القطر الآخر، فإنه ينصّفه.**



2. بناء الفر... ضيات اكتب برهانًا آخر على النظرية 11.8: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.

المعطيات: KLMN متوازي أضلاع

المطلوب إثباته: $\triangle NKL \cong \triangle LMN$، $\triangle KLM \cong \triangle MNK$

الإجابة النموذجية: يقسم القطر $\overline{KM}$ الشكل KLMN إلى مثلثين. ويعطي هذا أن KLMN متوازي أضلاع. إذًا $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$ و $\overline{LM} \parallel \overline{KN}$، $\angle LMK \cong \angle NKM$، $\angle LKM \cong \angle NMK$ لأنها زوايا داخلية متبادلة. بموجب الخاصية العكسية للتطابق $\overline{KM} \cong \overline{KM}$. باستخدام نظرية التطابق (زاوية-ضلع-زاوية) فإن $\triangle NKM \cong \triangle LMK$. باستخدام القطر $\overline{NL}$ يمكن استخدام الاستنتاج نفسه لبرهان أن $\triangle NKL \cong \triangle LMN$.

3. رسمت ياسمين متوازي أضلاع على مستوى إحداثي كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

a. الاستفادة من البنية وضح كيف يمكنها استخدام الجبر لإثبات أن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

الإجابة النموذجية: يمكنها استخدام قانون المسافة.

$DE = \sqrt{(-3-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$EF = \sqrt{(1-7)^2+(4-0)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$EF = \sqrt{(1-7)^2+(4-0)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$; $GD = \sqrt{(3-(-3))^2+(-2-2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

b. الاستفادة من البنية وضح كيف يمكنها استخدام الجبر لإثبات أن القطرين ينصفان بعضهما.

الإجابة النموذجية: يمكنها استخدام قانون نقطة المنتصف.

نقطة منتصف $\overline{DF}$: $\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 1)$؛ ونقطة منتصف $\overline{EG}$: $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2, 1)$. يتقاطع كل من القطرين عند نقطة منتصف القطر الآخر، ولذلك فهما ينصّفان بعضهما.

c. التفكير الناقد أشارت رهف إلى ياسمين أنها وجدت براهين بديلة على النظريتين 11.3 و 11.7 باستخدام الجبر. فهل هي على صواب؟ لم أو لم لا؟

الإجابة النموذجية: إنها على صواب. لا يبرهن الجزء a النظرية 11.3، ولا يبرهن الجزء b النظرية 11.7، حيث تثبت هذه البراهين أن النظرية تنطبق فقط على متوازي الأضلاع هذا بالتحديد. ولوضع برهان صحيح، فسيكون على ياسمين استخدام متوازي أضلاع عام.

d. التخطيط للحل كيف يمكن لياسمين تغيير المتوازي DEFG الذي رسمته بحيث يصبح الجزءان a و b برهانين صالحين للنظريتين 11.3 و 11.7؟

الإجابة النموذجية: يمكنها إنشاء DEFG بحيث يكون $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{GD}$ بحيث تكون الإحداثيات بدلالة متغيرات بدلاً من أي أعداد. وهذا يجعل DEFG متوازي أضلاع عام. ويمكن أن تستخدم ياسمين حينها قانون المسافة كما في الجزء a وقانون نقطة المنتصف في الجزء b لبيان أن النظريتين 11.3 و 11.7 تنطبقان على متوازي الأضلاع العام.

14 الوحدة 11 الأشكال الرباعية

أخطاء شائعة

قد يحاول الطلاب استخدام طرق غير دقيقة لإثبات النظريات. فقد يقدمون استنتاجات تتضمن انطباعات بصرية من الرسوم التخطيطية أو القياسات باستخدام المسطرة أو المنقلة. أكد على وجوب أن تكون جميع الأسباب المقدمة منطقية من الناحية الرياضية ويجب أن تنطبق على جميع متوازيات الأضلاع وليس فقط الذي يمثله الرسم التخطيطي. لاحظ أنه يجب استخدام التعريفات والخواص والمسلّمات والنظريات والقوانين في براهينهم على أنها معطياتهم.

4. فيما يلي برهان من عمودين على النظرية 11.2: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قطريه ينصفان بعضهما.

المعطيات: WXZY متوازي أضلاع

المطلوب إثباته: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$ ، $\overline{WM} \cong \overline{MZ}$

العبارات	الأسباب
1. WXZY متوازي أضلاع	1. معطى
2. $\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$ ، $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2. تعريف متوازي الأضلاع
3. $\angle XYZ \cong \angle WXM$ ، $\angle XWZ \cong \angle YZW$	3. نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4. $\angle WMX \cong \angle YMZ$	4. الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
5. $\triangle WXM \cong \triangle ZYM$	5. زاوية - زاوية - زاوية (AAA)
6. $\overline{XM} \cong \overline{MY}$ ، $\overline{WM} \cong \overline{MZ}$	6. مسلمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة

a. **التفكير الناقد** ما الخطأ في البرهان؟

ليس التطابق (زاوية – زاوية – زاوية) اختبارًا صالحًا لتطابق المثلثات.

b. **بناء الفرضيات** كيف يمكنك تصحيح الخطأ؟

الإجابة النموذجية: سأبيّن أن كل ضلعين متوازيين في متوازي الأضلاع متطابقان ≅ ثم أستخدم التطابق (زاوية - ضلع - زاوية).

c. أعد كتابة البرهان مع إدخال تعديلاتك.

العبارات	الأسباب
1. WXYZ متوازي أضلاع	1. معطى
2. $\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$ ، $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$	2. تعريف متوازي الأضلاع
3. $\angle XYZ \cong \angle WXM$ ، $\angle XWZ \cong \angle YZW$	3. نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4. $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$	4. النظرية 11.3
5. $\triangle WXM \cong \triangle ZYM$	5. زاويتان وضلع
6. $\overline{XM} \cong \overline{MY}$ ، $\overline{WM} \cong \overline{MZ}$	6. مسلمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة

5. **إيجاد نمط** يتوازى شارع الخليفة مع شارع العروبة، وتتوازى جادة الزهور مع جادة الكرامة ...

الإجابة النموذجية: كلا المسارين متساوٍ في المسافة. نظرًا إلى أن شارع الخليفة يوازي شارع العروبة وأن جادة الزهور موازية لجادة الكرامة، فإن الشكل الذي تشكله الشوارع الأربعة هو متوازي أضلاع بحسب تعريف متوازي الأضلاع. بحسب النظرية 11.3، فإن كل ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع متطابقان. لذلك، فإن لمقطع شارع الخليفة طول مقطع شارع العروبة نفسه، ومقطع جادة الزهور ومقطع جادة الكرامة لهما الطول نفسه. ولذلك فكلا المسارين متساوٍ في المسافة.

11.2 متوازي الأضلاع 141

تمرين

في **التمرينين 1** و **2**، يجب على الطلاب إثبات النظريات عن متوازيات الأضلاع.

التمرين 3 يتيح للطلاب التحقق من العلاقات في متوازي الأضلاع، وذلك باستخدام إحداثيات رؤوسه.

التمرين 4 يتطلب من الطلاب تحليل البرهان عن متوازي الأضلاع وإعادة صياغته.

في **التمرين 5**، يتدرب الطلاب عن طريق إثبات عبارة عن متوازي أضلاع في موقف من الحياة اليومية.

عرض الممارسات الرياضية

تمرين	م.ر
1-2	3
3	1, 3, 7
4	3
5	7

التدريس المتمايز

مفاتيح الحل البصرية غالبًا ما تساعد الطلاب في التفكير بالمسألة بطريقة أكثر وضوحًا. أعطِ كل طالب قلم رصاص أحمر وآخر أزرق. راجع العلامات المستخدمة لتوضيح المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتطابقة والزوايا المتطابقة. اطلب من الطلاب تحديد المعطيات باستخدام القلم الأحمر وما يحاولون إثباته باستخدام القلم الأزرق. وفي كل مرة يكملون فيها خطوة من خطوات البرهان، اجعلهم يحددوا المعلومات على الرسم التخطيطي بالقلم الأحمر. شجع الطلاب على استخدام الرسم التخطيطي الملون وهم يناقشون ويحللون ما يعرفونه وما يحاولون إثباته.

11 اختبارات متوازي الأضلاع

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 5, 7

المتطلبات الأساسية

التعرف على خواص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

المواد

برنامج Geometer's Sketchpad

مثال 1

م ر 5

نصيحة للتدريس

ساعد الطلاب للوصول إلى تخمينات بخصوص متوازيات الأضلاع وذلك بمطالبتهم باستخدام برنامج الهندسة الديناميكي لتعديل الشكل الرباعي $EFGH$ بحيث لا تكون أضلاعه المتقابلة متوازية. ناقش لماذا لا يمكن عمل ذلك.

الأسئلة الداعمة

- عند تغيير شكل $EFGH$، كيف تبين العلاقة بين أطوال أضلاعه؟ **اختر قطعة مستقيمة لكل ضلع. حدد أمر القياس (Measure) لتوضيح طول القطعة المستقيمة. تتحدث الأطوال تلقائيًا مع تغيير $EFGH$.**
- ما العلاقة بين طول $\overline{EF}$ وطول $\overline{FG}$؟ **طول $\overline{EF}$ لا يؤثر في طول $\overline{FG}$، والعكس صحيح. أطوال الأضلاع المتجاورة لمتوازيات الأضلاع لا ترتبط ببعضها.**

11.3 اختبارات متوازي الأضلاع

الأهداف

إثبات النظريات الخاصة بمتوازي الأضلاع بعمل رسومات هندسية للأشكال.

استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الخاصة بمتوازي الأضلاع

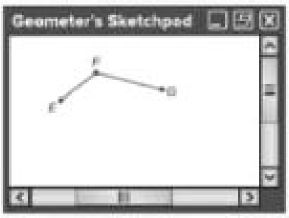
وفق تعريف متوازي الأضلاع، إذا توازى كل ضلعين متقابلين في شكل الشكل الرباعي، فإن الشكل متوازي أضلاع. إذًا لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع، أثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيان.

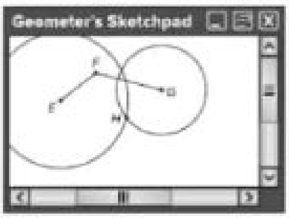
1 استكشاف شروط متوازي الأضلاع

الاستكشاف استخدم برنامجًا ديناميكيًا لاستكشاف متوازي الأضلاع، وأثناء الاستكشاف فكر في طرق مختلفة لاستخدام الأضلاع المتقابلة بحيث تثبت أن شكلاً رباعيًا متوازي أضلاع.

a. استخدام الأدوات استخدم Geometer's Sketchpad لرسم قطعتين مستقيمتين تشتركان في نقطة النهاية. سمّ القطعتين $\overline{EF}$ و $\overline{FG}$ كما هو موضح بالأسفل على اليمين.

b. استخدام الأدوات ارسم دائرة باستخدام أداة "Circle by Center + Radius" يكون مركزها E ونصف قطرها FG. ثم ارسم دائرة أخرى بالطريقة نفسها يكون مركزها G ونصف قطرها EF كما هو موضح أدناه على اليسار. سمّ نقطة تقاطع الدائرتين H. ارسم $\overline{EH}$ و $\overline{GH}$، حدد الدائرتين وقم بإخفائهما.





c. بناء الفرضيات اشرح سبب تطابق $\overline{EF}$ و $\overline{GH}$ وسبب تطابق $\overline{FG}$ و $\overline{HE}$.

الإجابة النموذجية: بما أن طول قوس الدائرة التي مركزها G هو EF، فإن $\overline{GH} \cong \overline{EF}$. وبصورة مشابهة، فإنه بما أن طول قوس الدائرة التي مركزها هو E يساوي FG، فإن $\overline{FG} \cong \overline{HE}$.

d. استخدام الأدوات استخدم أداة تحديد الميل لإيجاد ميل $\overline{EF}$ و $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ و $\overline{HE}$. ما الذي يمكنك استنتاجه عن الأضلاع المتقابلة في $EFGH$؟

الإجابة النموذجية: ميلا كل مستقيمين متقابلين متماثلان، إذًا فكل مستقيمين متقابلين متوازيان.

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

خلفية عن الرياضيات

عندما يستخدم الطلاب برنامج الهندسة الديناميكي لإنشاء شكل رباعي، فقد يفترضون أن الشكل سيكون متوازي الأضلاع ويتبعون طريقة مختصرة عن طريق تبسيط رسم القطع المستقيمة التي تبدو أنها متوازية. ذكّرهم بأنه يجب عليهم البدء بتطابق الأضلاع المتقابلة قبل عمل أي افتراضات أخرى.

باستخدام أدوات القياس المتاحة في برنامج الهندسة الديناميكي، يمكن للطلاب استكشاف ما تعلموه مسبقًا عن خواص الأضلاع والزوايا والأقطار الخاصة بمتوازيات الأضلاع. وأثناء الاستكشاف، شجعهم للتخمين حول الشروط التي تضمن أن يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع والتفكير في طرق لإثبات تلك التخمينات.

التحقق ما الذي يعد تخمينًا منطقيًا عن متوازي الأضلاع بناء على استكشافك للشكل الرباعي EFGH؟
الإجابة النموذجية: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، إذًا فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

إثبات أن الأضلاع المتقابلة متوازية يعد طريقة واحدة فقط لإثبات أن شكلاً رباعيًا ما عبارة عن متوازي أضلاع. هناك شروط أخرى للتحقق من كون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. [illegible] يلزم تحقق شرط واحد لإكمال البرهان.

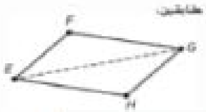
المفهوم الأساسي

أكمل الجدول بكتابة النظرية الكاملة التي تتوافق مع كل اختصار.

النظرية	العبارة	الاختصار
11.9	إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فهو متوازي أضلاع.	إذا كان كلا الزوجين من الأضلاع المتقابلة ≅، فإن الشكل الرباعي يكون ▱
11.10	إذا كانت كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي متطابقتين، فهو متوازي أضلاع.	إذا كان كلا الزوجين من ∠ المتقابلة ≅، فإن الشكل الرباعي يكون ▱
11.11	إذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصفان بعضهما، إذًا فهو متوازي أضلاع.	إذا كان القطران ينصفان بعضهما، فإن الشكل الرباعي يكون ▱
11.12	إذا كان ضلعان متقابلان في الشكل الرباعي متطابقين ومتوازيين، فهو متوازي أضلاع.	إذا كان هناك ضلعان متقابلان ≅ و ∥، فإن الشكل الرباعي يكون ▱

2 إثبات أن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع

أكمل البرهان من عمودين لإثبات أنه إذا كان كلا الزوجين من الأضلاع المتقابلة متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



a. **بناء الفرضيات** املأ العبارات والأسباب الناقصة لإكمال البرهان.

المعطيات: $\overline{EF} \cong \overline{GH}$، $\overline{FG} \cong \overline{EH}$

المطلوب إثباته: EFGH متوازي أضلاع.

العبارات	الأسباب
1. ارسم $\overline{EG}$	1. فيما بين أي نقطتين، يوجد مستقيم واحد بالتحديد.
2. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$، $\overline{FG} \cong \overline{EH}$	2. معطى
3. $\overline{EG} \cong \overline{GE}$	3. خاصية الانعكاس في التطابق
4. $\triangle EFG \cong \triangle GHE$	4. ضلع-ضلع-ضلع
5. $\angle FGE \cong \angle HEG$، $\angle FEG \cong \angle HGE$	5. [illegible] تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة
6. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$، $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$	6. عكس نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
7. EFGH متوازي أضلاع	7. متوازي الأضلاع عبارة عن الشكل الرباعي يتوازي فيه كل ضلعين متقابلين.

b. **التفكير الناقد** قال أحد الطلاب إنه بسبب كون $\angle H \cong \angle F$، فمن الممكن إثبات أن $\triangle EFG \cong \triangle GHE$ باستخدام ضلعين وزاوية محصورة. فهل تتفق معه؟ علل إجابتك.
الإجابة النموذجية: لا، ليس لدينا $\angle H \cong \angle F$ ولم يبرهن ذلك أيضًا.

التأكيد على الممارسات الرياضية

استخدم ما تعلمه الطلاب عن كتابة البراهين لمناقشة **م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. في **الجزء c** من **المثال 2**. قد يفترض الطلاب عن طريق الخطأ أن الزوايا المتقابلة في الشكل الرباعي *EFGH* متطابقة. ذكّر الطلاب بأن إثبات شكل رباعي معطى عبارة عن متوازي أضلاع مختلف عن إثبات أن متوازي الأضلاع له خصائص معينة. إذا لم يتم إثبات أن شكل رباعي معطى عبارة عن متوازي أضلاع، فإنه لا يمكن افتراض خواص متوازيات الأضلاع ولكن يجب إثباتها كذلك.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.ر 3

إذا كان الطلاب يواجهون صعوبة في فهم الخطوة الأولى من البرهان، فراجع استخدام الخط المساعد.

الأسئلة الداعمة

لماذا رُسم الخط المساعد في الفقرة 1؟ **رسم خط إضافي يساعدك في تحليل العلاقات الهندسية بين المثلثين اللذان شكلهما رسم القُطر في متوازي الأضلاع.**

هل يمكن رسم الخط المساعد بين النقطتين F و H بدلاً من الخط الأول؟ وإذا كانت الإجابة بنعم، فكيف سيتأثر البرهان؟ **نعم؛ سيكون المثلثان المتطابقان هما $\triangle EFH$ و $\triangle GHF$؛ وعليه قد يلزم مراجعة جميع القطع المستقيمة والزوايا في البرهان.**

لماذا يعطى معكوس نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة على أنه سبب للعبارة 6 بدلاً من نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة؟ **توضح النظرية أنه إذا كان الخطان متوازيان، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة، بينما يوضح معكوس النظرية أنه إذا كانت الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة، فإن الخطوط متوازية. والنص الأخير موضح في العبارة 6.**

c. **بناء الفرضيات** اشرح سبب كون العبارة 3 ضرورية.

الإجابة النموذجية: الخطوة التالية في البرهان هي إثبات أن $\angle GHE \cong \angle EFG$ بموجب التطابق (ضلع-ضلع-ضلع)، وذلك، فيجب أن تذكر صراحةً أن كل ضلعين متقابلين، بما في ذلك الضلع المشترك المبيّن بـ $\overline{EG}$ و $\overline{GE}$ متطابقان.

d. **بناء الفرضيات** صف إستراتيجية عامة لإثبات أن الأضلاع المتقابلة تكون متوازية بمجرد إثبات تطابق المثلثين اللذين يتكوّنان عند رسم قطر.

الإجابة النموذجية: استخدم النظرية القائلة إن الأجزاء المتناظرة في شكلين متطابقين متطابقة لتحديد الزوايا المتناظرة والمتطابقة والتي تشكل أيضاً زوايا متبادلة داخلياً عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين. ثم استخدم عكس النظرية لذلك الزوج من الزوايا لإثبات أن الأضلاع المتقابلة متوازية.

يمكنك حل مسائل من الحياة اليومية بإثبات أن الأشكال الرباعية عبارة عن متوازي أضلاع.

مثال 3 حل مسائل الحياة اليومية

تعمل جميلة على تصميم مجفف للملابس قابل للطي، فيمكن طيه ليكون مسطحاً أو فتحه بزوايا مختلفة كما هو موضح. وفي الشكل، E هي نقطة المنتصف لـ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$. تحتاج جميلة في إثبات أن الشكل ABCD متوازي أضلاع.

a. **التخطيط للحل** ما الذي يجب على جميلة إثباته لبرهنة أن ABCD متوازي أضلاع؟ اشرح.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ لأن كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متوازيين، فهو متوازي أضلاع.

b. **الدقة** ما الجزء أو الأجزاء في الشكل تحتوي على النقطة E كنقطة نهاية؟ كيف ترتبط هذه الخطوط ببعضها؟ اشرح.

$\overline{AE}$ و $\overline{BE}$ و $\overline{CE}$؛ $\overline{DE}$، $\overline{AE} \cong \overline{CE}$، $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين متساويتين.

c. **الاستفادة من البنية** أي زوايا في الشكل تحتوي على النقطة E كرأس للزاوية؟ كيف ترتبط هذه الزوايا ببعضها؟ اشرح.

$\angle AEB$ و $\angle BEC$ و $\angle CED$ و $\angle DEA$؛ $\angle AEB \cong \angle CED$، $\angle BEC \cong \angle DEA$ الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

يمكنك إثبات أن الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع.

مثال 4 استخدام الإحداثيات لإثبات متوازي الأضلاع

يوضح الجدول إحداثيات ثلاثة من أربعة رؤوس لمتوازي الأضلاع ABCD. أوجد إحداثيات النقطة A.

النقطة	A	B	C	D
x	؟	−2	−1	1
y	؟	−2	4	5

بناء الفرضيات ما الإستراتيجية التي يمكنك استخدامها لتحديد إحداثيات النقطة A؟ اشرح.

الإجابة النموذجية: مثّل B و C و D بيانياً وارسم شعاعاً من B موازياً لـ $\overline{CD}$ وشعاعاً موازياً لـ $\overline{CB}$ من D. A هي نقطة تقاطع الشعاعين. استخدم قانون الميل للتحقق من أن الأضلاع المتقابلة متوازية.

مثال 3

م.ر 1

نصيحة للتدريس

إذا كان الطلاب بحاجة إلى المساعدة في تخطيط البرهان، فاقترح عليهم البدء بتعريف متوازي الأضلاع. ومن خلال هذا المثال، سيبدأ الطلاب التخطيط لبرهان النظرية 11.11 التي ستكتمل في **المثال 5**.

الأسئلة الداعمة

- ما المعلومات المعطاة في المسألة والتي قد تساعدك في بدء إثبات أن الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي *ABCD* متطابقة؟ **النقطة *E* هي نقطة منتصف كل قطر في الشكل الرباعي *ABCD*.**
- كيف يساعدك معرفة أن النقطة E هي نقطة منتصف أقطار الشكل الرباعي *ABCD* عند التخطيط للبرهان؟ **بما أن نقطة المنتصف تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين، سنتمكن من تحديد القطع المستقيمة المتطابقة ونستخدم تلك العلاقات في البرهان.**
- عند التخطيط للبرهان، ما الذي تعلمه عن تطابق الزوايا من تقاطع الأقطار؟ **يكوّن القطر زوجين من الزوايا المتقابلة بالرأس، والزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.**

مثال 4

م.ر 2

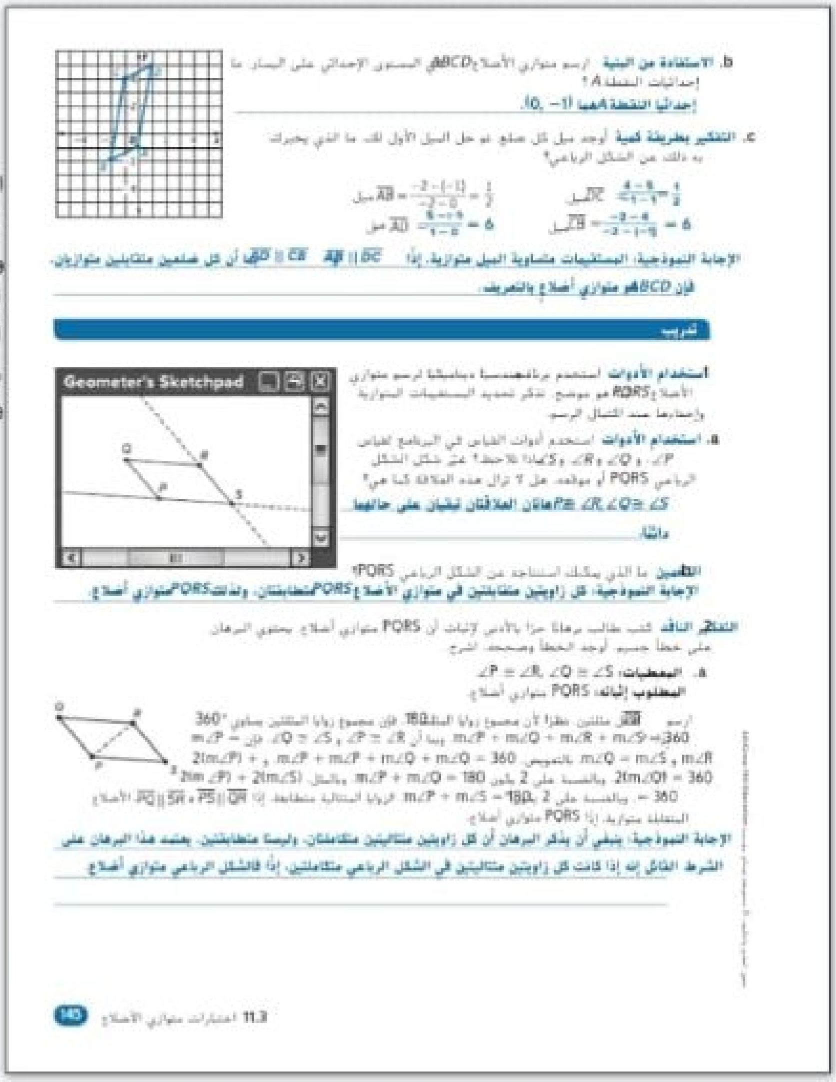
نصيحة للتدريس

وضح للطلاب أنه برغم أن **المثال 4** يتطلب استخدام الإحداثيات لإثبات أن $ABCD$ متوازي أضلاع. فإن الإستراتيجية الأساسية لا تزال واحدة وهي: توضيح أن كل زوجين من الأضلاع المتقابلة متوازيان. وفي المستوى الإحداثي، المستقيمات المتوازية لها الميل ذاته. وبالتالي يمكن أن يجري الطلاب الحسابات باستخدام قانون الميل لإثبات أن ميول الأضلاع المتقابلة متساوية.

الأسئلة الداعمة

افترض أن الطلاب حددوا إحداثيات النقطة A بطريقة غير صحيحة. فكيف يمكن تحديد أن $ABCD$ ليس متوازي أضلاع؟ **عند إيجاد ميل كل ضلع، ستختلف الميول في زوج واحد على الأقل من الأضلاع المتقابلة.**

هل يمكن استخدام قانون نقطة المنتصف لإثبات أن $ABCD$ متوازي الأضلاع؟ اشرح. **نعم؛ إذا كانت أقطار $ABCD$ تتقاطع مع بعضها، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. إذًا، نستخدم قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة المنتصف لكل قطر. إذا كانت للقطرين نقطة المنتصف ذاتها، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.**


b. الاستفادة من البنية ارسم متوازي الأضلاع $ABCD$ في المستوى الإحداثي على اليسار. ما إحداثيات النقطة A؟
إحداثيا النقطة A هما $(0, -1)$.

c. التفكير بطريقة كمية أوجد ميل كل ضلع. ثم حل الميل الأول لك. ما الذي يخبرك به ذلك عن الشكل الرباعي؟

الإجابة النموذجية: المستقيمات متساوية الميل متوازية. إذًا $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$ أي أن كل ضلعين متقابلين متوازيان. فإن $ABCD$ هو متوازي أضلاع بالتعريف.

تدريب

استخدام الأدوات استخدم برنامج هندسة ديناميكيًا لرسم متوازي الأضلاع $PQRS$ كما هو موضح.

a. استخدام الأدوات استخدم أدوات القياس في البرنامج لقياس $\angle P$ و $\angle Q$ و $\angle R$ و $\angle S$. ماذا تلاحظ؟ غيّر شكل الشكل الرباعي $PQRS$ أو موقعه. هل لا تزال هذه العلاقة كما هي؟
$\angle P \cong \angle R$، $\angle Q \cong \angle S$ هاتان العلاقتان تبقيان على حالهما دائمًا.

التخمين ما الذي يمكنك استنتاجه عن الشكل الرباعي $PQRS$؟
الإجابة النموذجية: كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع $PQRS$ متطابقتان، ولذلك $PQRS$ متوازي أضلاع.

التفكير الناقد كتب طالب برهانًا حرًا بالأسفل لإثبات أن $PQRS$ متوازي أضلاع. يحتوي البرهان على خطأ جسيم. أوجد الخطأ وصحح الشرح.

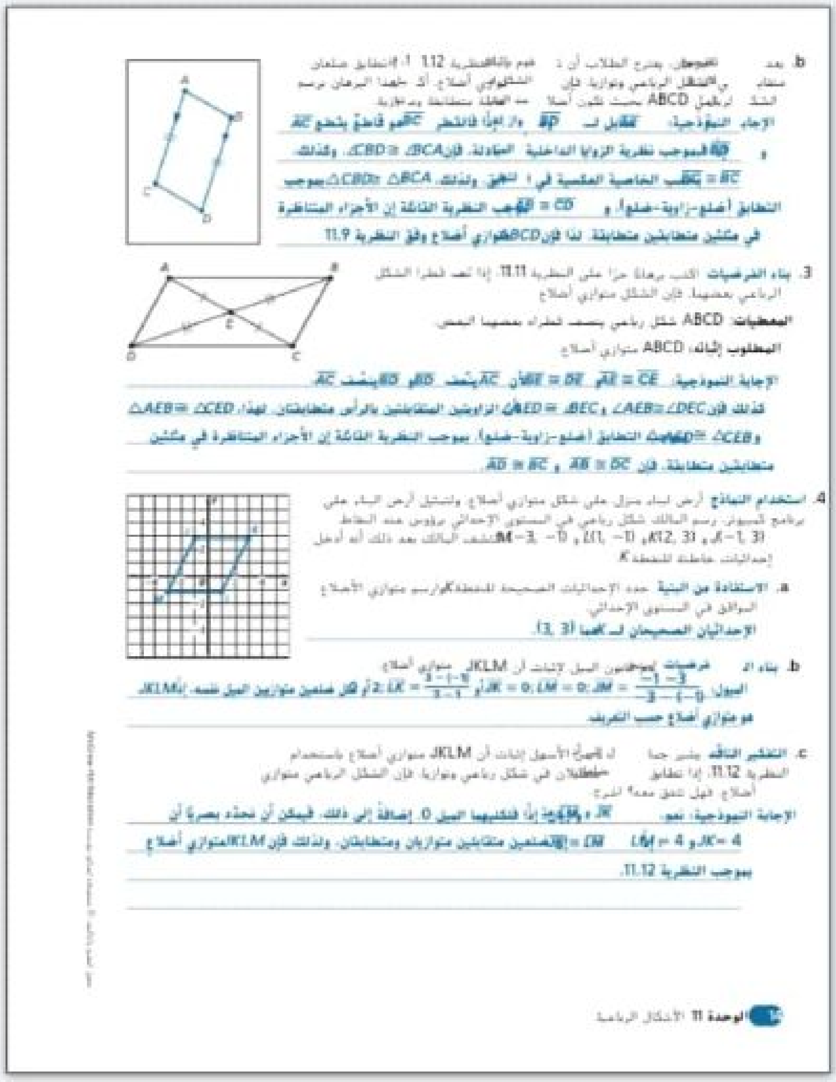
a. المعطيات: $\angle P \cong \angle R$، $\angle Q \cong \angle S$
المطلوب إثباته: $PQRS$ متوازي أضلاع.

الإجابة النموذجية: ينبغي أن يذكر البرهان أن كل زاويتين متتاليتين متكاملتان، وليستا متطابقتين. يعتمد هذا البرهان على الشرط القائل إنه إذا كانت كل زاويتين متتاليتين في الشكل الرباعي متكاملتين، إذًا فالشكل الرباعي متوازي أضلاع.

11.3 اختبارات متوازي الأضلاع 145

التدريس لمتمايز

قد يستفيد الطلاب المتعلمون بالطريقة الحسية البصرية والحركية من رسم أسهم بالغ المستوى الإحداثي لمساعدتهم بصريًا في التأكد من حساباتهم باستخدام قانون الميل. على سبيل المثال، يمكنهم رسم سهم أعلى بمقدار وحدة واحدة وعلى اليمين بمقدار وحدتين من النقطة C إلى النقطة D لتأكيد أن ميل $\overline{DC}$ يساوي $\frac{1}{2}$



تمرين

التمرين 1 يطلب من الطلاب استخدام برنامج الهندسة الديناميكي لإنشاء متوازيات أضلاع وعمل تخمينات عنها.

في **التمرين 2**، يُعلّق الطلاب على إحدى المحاولات في البرهان ثم يُكوّنون فرضية ويكتبون فقرة البرهان عن إحدى النظريات.

في **التمرين 3**، يحتاج الطلاب إلى تكوين فرضية وكتابة فقرة برهان عن متوازي أضلاع.

في **التمرينين 4** و **7**، يثبت الطلاب إحدى النظريات جبريًا، وذلك باستخدام الإحداثيات لإثبات أن شكل رباعي متوازي أضلاع.

في **التمرين 5**، يتنافس الطلاب في البرهان الذي تم التخطيط له في **المثال 3**. وبينما يثبت الطلاب نظرية عن متوازيات الأضلاع، فإنه يجب عليهم استخدام البنية.

التمرين 6 يطلب من الطلاب حل مسألة من الحياة الواقعية باستخدام الإحداثيات لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

أخطاء شائعة

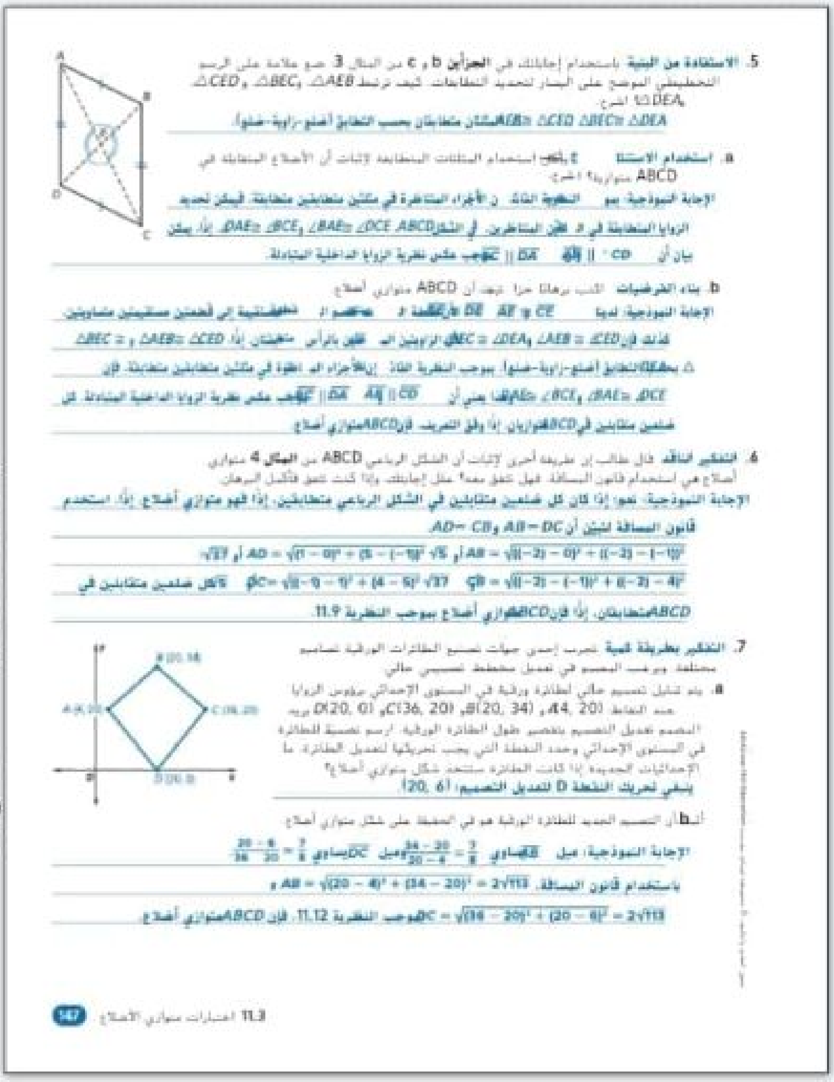
في الشكل الخاص **بالتمرين 1**، قد يلجأ الطلاب لطريقة مختصرة وذلك ببساطة برسم قطع مستقيمة يبدو أنها متوازية. ذكّرهم بأن استخدام أمر إنشاء مستقيم متوازٍ (Construct Parallel Line) يضمن أنه في حالة تغيير شكل متوازي الأضلاع وموضعه، فإن أضلاعه المتقابلة ستبقى متوازية. في **الجزء a من التمرين 1**، قد يواجه الطلاب مشكلات في استخدام الأدوات المتاحة في البرنامج الهندسي الديناميكي لتحديد الزوايا وقياسها. ومن الأخطاء الشائعة وضع قطع مستقيمة أو نقاط إضافية يتم تحديدها عند اختيار أمر قياس (Measure). وفي هذه الحالة، فإنه يمكن تعطيل خيار قياس الزوايا الموجود في القائمة؛ مما يجعله غير متاح للاختيار. انصح الطلاب كذلك بأن يتحققوا جيدًا من تناظر الزوايا المسماة الموضحة قياساتها مع الزوايا التي يقوم الطلاب بقياسها.

عرض الممارسات الرياضية

التمرين	م.ر
1	3, 5
2	3
3	3
4	3, 7
5	3
6	3
7	2

أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، يراجع الطلاب البرهان الذي يستخدم الزوايا المتقابلة لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. يُطلب من الطلاب تحديد الخطأ الجسيم وتصحيحه. إن تحديد الخطأ بطريقة صحيحة يعتمد على الفهم الصحيح للطلاب للنظرية 11.5 وهي: *إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن زواياه المتتالية تكون متكاملة*. إذا كان الطلاب يواجهون صعوبات في التمرين، فاطرح أسألة للتأكد من أنهم لا يخلطون بين الزوايا المتتالية والمتقابلة أو الزوايا المتكاملة والمتطابقة.



5. **الاستفادة من البنية** باستخدام إجابتك في الجزأين b و c من المثال 3، ضع علامة على الرسم التخطيطي الموضح على اليسار لتحديد التطابقات. كيف ترتبط $\triangle AEB$ و $\triangle BEC$ و $\triangle CED$ و $\triangle DEA$؟ اشرح.

6. **التفكير الناقد** قال طالب إن طريقة أخرى لإثبات أن الشكل الرباعي ABCD من **المثال 4** متوازي أضلاع هي استخدام قانون المسافة.

7. **التفكير بطريقة فنية**

$D(20, 6)$ ،$C(36, 20)$ ،$B(20, 34)$ ،$A(4, 20)$

$AB = \sqrt{(20-4)^2 + (34-20)^2} = 2\sqrt{113}$

$DC = \sqrt{(36-20)^2 + (20-6)^2} = 2\sqrt{113}$

التأكيد على الممارسات الرياضية

ربما تحتاج إلى استخدام **التمرين 4** لمناقشة م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)** لجعل الطلاب للربط بين الشكل المرئي لمتوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي وقيمه المتناظرة التي تم إيجادها باستخدام قوانين الميل ونقطة المنتصف والمسافة. على سبيل المثال، قد يحدد الطلاب الميل بصريًا عن طريق تمثيل *JKLM* بيانيًا، وعد المربعات لإيجاد الارتفاع على الامتداد. اطلب منهم التأكد من ملاحظاتهم البصرية عن طريق إدخال الإحداثيات لكل زوج من الرؤوس في قانون الميل والمقارنة بين نتائج حساباتهم والميول التي حددوها بصريًا.

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 5, 6

المتطلبات الأساسية

التعرف على خواص متوازي الأضلاع وتطبيقها.

استخدام قانوني الميل والمسافة

المواد

- فرجار
- مسطرة

مثال 1


11.4 المستطيل

الأهداف

إثبات النظريات الخاصة بالمستطيل باستخدام براهين ذات عمودين.

استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الخاصة بالمستطيل.

عمل رسومات هندسية للأشكال لفهم النظريات الخاصة بالمستطيل.

المستطيل عبارة عن متوازي أضلاع زواياه الأربع قائمة. ونظرًا لكون المستطيل متوازي أضلاع فإن جميع خصائص متوازي الأضلاع تنطبق على المستطيل.

مثال 1 استكشاف خواص المستطيل

الاستكشاف استخدم فرجارًا ومسطرة لتوبع لاستكشاف المستطيل وخصائصه.

a. **استخدام الأدوات** ارسم المستطيل $ABCD$ باستخدام رسومات من المستقيمات المتوازية والمتعامدة.

b. **بناء فرضية** استخدم تعريف المستطيل لشرح الطريقة التي يمكنك بها معرفة أن $ABCD$ مستطيل.

الإجابة النموذجية: المستطيل متوازي أضلاع له أربع زوايا قائمة. كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان. $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ لأن كليهما عمودي على $\overline{AB}$ ... لأن مستقيمان عموديان على المستقيم نفسه، فهما متوازيان. $\overline{CD}$ ... لأن كليهما عمودي على ... كانت كل زاوية على أنها زاوية قائمة. لذلك، فالشكل $ABCD$ مستطيل بموجب تعريف المستطيل.

c. **التخمين** استخدم مسطرة لإيجاد AC و BD. ماذا تلاحظ؟ ما الفرضية التي يمكنك التوصل إليها عن قطري المستطيل؟ هل يمكنك ادعاء صحة فرضيتك بناءً على الأمثلة؟

الإجابة النموذجية: $AC = BD$؛ قطرا المستطيل متطابقان. لا؛ المثال ليس برهانًا. يجب استخدام البراهين باستخدام المنطق.

نظرية 11.13: إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان. ولأن النظرية 11.13 تنطبق على جميع المستطيلات، فيجوز لنا إضافة تطابق القطرين إلى قائمة خصائص المستطيل.

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

نصيحة للتدريس

م.ر 5

يوفر الجزء **a** فرصة لتناول الممارسة **م.ر 5 (استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)**. عندما ينشئ الطلاب مستطيلاً، شجعهم على تكوين روابط بين الخطوات أثناء الإنشاء وسبب اجتهادهم لإنشاء الشكل المطلوب.

خلفية عن الرياضيات

المستطيل عبارة عن متوازي أضلاع له أربع زوايا قائمة. ولأنه متوازي أضلاع، فإن جميع خواص متوازيات الأضلاع تنطبق على المستطيلات. علاوة على ذلك، فإن أقطار المستطيل متطابقة.

يمكن إثبات البراهين عن المستطيلات في صورة براهين ذات عمودين باستخدام خواص متوازيات الأضلاع والمثلثات المتطابقة. ويمكن أيضًا استخدام البراهين الجبرية على المستوى الإحداثي. ويمكن استخدام قانون المسافة لتوضيح الأضلاع المتطابقة والأقطار المتطابقة. كذلك، يمكن استخدام قانون الميل لإثبات أن الأضلاع متعامدة أو متوازية.

2 ...ك أن قطري المستطيل متطابقان

a. بناء الفرضيات املأ الأسباب الناقصة لإكمال البرهان.

المعطيات: $RSTU$ مستطيل

المطلوب إثباته: $\overline{RT} \cong \overline{SU}$

المبرر	العبارة
1. معطى	1. $RSTU$ مستطيل
2. تعريف المثلث	2. $RSTU$ متوازي أضلاع
3. كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان ≅	3. $\overline{RU} \cong \overline{ST}$
4. الخاصية العكسية في التطابق	4. $\overline{UT} \cong \overline{UT}$
5. تعريف المثلث	5. $\angle STU$ ، $\angle RUT$ زاويتان قائمتان
6. جميع الزوايا القائمة متطابقة ≅	6. $\angle RUT \cong \angle STU$
7. مسلمة تساوي ضلعين وزاوية	7. $\triangle RUT \cong \triangle STU$
8. الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	8. $\overline{RT} \cong \overline{SU}$

b. التفكير بطريقة تجريدية اشرح لماذا ينطبق هذا البرهان على جميع المستطيلات.

الإجابة النموذجية: المعلومة الوحيدة المعطاة هي أن الشكل مستطيل. ويمكنك استخدام طريقة الاستنتاج نفسها لأي مستطيل مهما كانت تسميات رؤوسه.

يعد معكوس النظرية 11.13 صحيحًا أيضًا.

نظرية 11.14: إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متطابقين، فإن متوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.
يعد إيجاد القطرين متطابقين أداة قيمة لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل.

3 تطبيق خصائص المستطيل

التخطيط للحل طُلب من نائلة إثبات أن الشكل الموضح على اليسار مستطيل. مع نائلة مسطرة من دون منقلة أو أية أداة أخرى لقياس الزوايا. فكيف يمكنها إثبات أن الشكل مستطيل؟

a. اذكر النظرية التي يمكن استخدامها لإثبات أن الشكل أعلاه متوازي أضلاع باستخدام مسطرة فقط.
الإجابة النموذجية: تنص النظرية 11.9 على أنه إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

b. اذكر النظرية التي يمكن استخدامها لإثبات أن المتوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل باستخدام مسطرة فقط.
الإجابة النموذجية: تنص النظرية 11.14 على أنه إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متطابقين، فإن متوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.

c. باستخدام النظريات الواردة في الجزأين a و b، صف الطريقة التي تستطيع نائلة من خلالها إثبات أن الشكل مستطيل.
الإجابة النموذجية: يمكن أن تقيس نائلة الأضلاع الـ 4 جميعها. إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين ≅، فهو متوازي أضلاع. يمكنها حينها قياس القطرين. فإذا كانا متطابقين ≅، فالشكل مستطيل.

149 المستطيل 11.4

الأسئلة الداعمة

ما خاصيتا المستطيل اللتان لا تنطبقان على جميع متوازيات الأضلاع؟ **يجب أن تكون الزوايا قائمة والأقطار متساوية.**

هل يمكننا افتراض نظريات عن المستطيلات تنطبق على متوازيات الأضلاع؟ **لا؛ فالنظريات عن المستطيلات ليس بالضرورة تنطبق على متوازيات الأضلاع.**

مثال 2

م.ر 3

نصيحة للتدريس

في المثال التالي، ذكِّر الطلاب بأنه يجب عليهم استخدام التعريفات والخواص والمسلّمات والنظريات التي أثبتوها في صورة أسباب لإكمال البرهان.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يجب أن يكون الشكل $RSTU$ متوازي أضلاع؟ تعريف المستطيل يوضح أنه عبارة عن متوازي أضلاع.
- أوجد $\overline{RU}$ و $\overline{ST}$ في الرسم التخطيطي. ما أجزاء متوازي الأضلاع الموجودة؟ **الأضلاع المتقابلة.** النظرية المرتبطة بالأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع؟ **الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.**

هدفك هو إثبات أن $\overline{RT} \cong \overline{SU}$. ما الفائدة من معرفة أن $\triangle RUT \cong \triangle STU$؟ **$\overline{SU}$ و $\overline{RT}$ عبارة عن أوتار للمثلثين $\triangle RUT$ و $\triangle STU$، وبالتالي فهما ضلعان متناظران.**

مثال 3

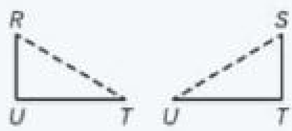
م.ر 1

نصيحة للتدريس

تتطلب هذه المسألة من الطلاب أن يطبقوا خواص المستطيل لحل المسألة. يجب أن يعرفوا كيفية إثبات أن الشكل الرباعي مستطيل عن طريق استخدام الأطوال فقط.

التدريس لمتمايز

قبل الحل قد يواجه الطلاب صعوبة في رؤية المثلثات التي يجب أن تتطابق من أجل $\overline{RT} \cong \overline{SU}$. أولًا، اطلب من الطلاب تحديد مواضع $\overline{RT}$ و $\overline{SU}$ في الرسم التخطيطي. ساعدهم في فصل المثلثين المتداخلين بحيث يمكنهم تتبع الاستنتاج في البرهان بسهولة أكبر. تأكد من أنهم يعرفون أن القطعة المستقيمة $\overline{UT}$ هي ذاتها القاعدة في كل مثلث. اجعلهم يحددوا الأجزاء المتطابقة في المثلث وهم يكتبون البرهان.



الأسئلة الداعمة

باستخدام النظريات التي تعرفها، ما الذي يمكننا إثباته عن الشكل عن طريق قياس الأطوال فقط؟ **إذا كان كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقًا، فإن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع.**

- ما أهمية توضيح أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع؟ **نحتاج إلى هذه المعلومة من أجل استخدام النظرية 11.14.**

مثال 4

نصيحة للتدريس

م.ر 1

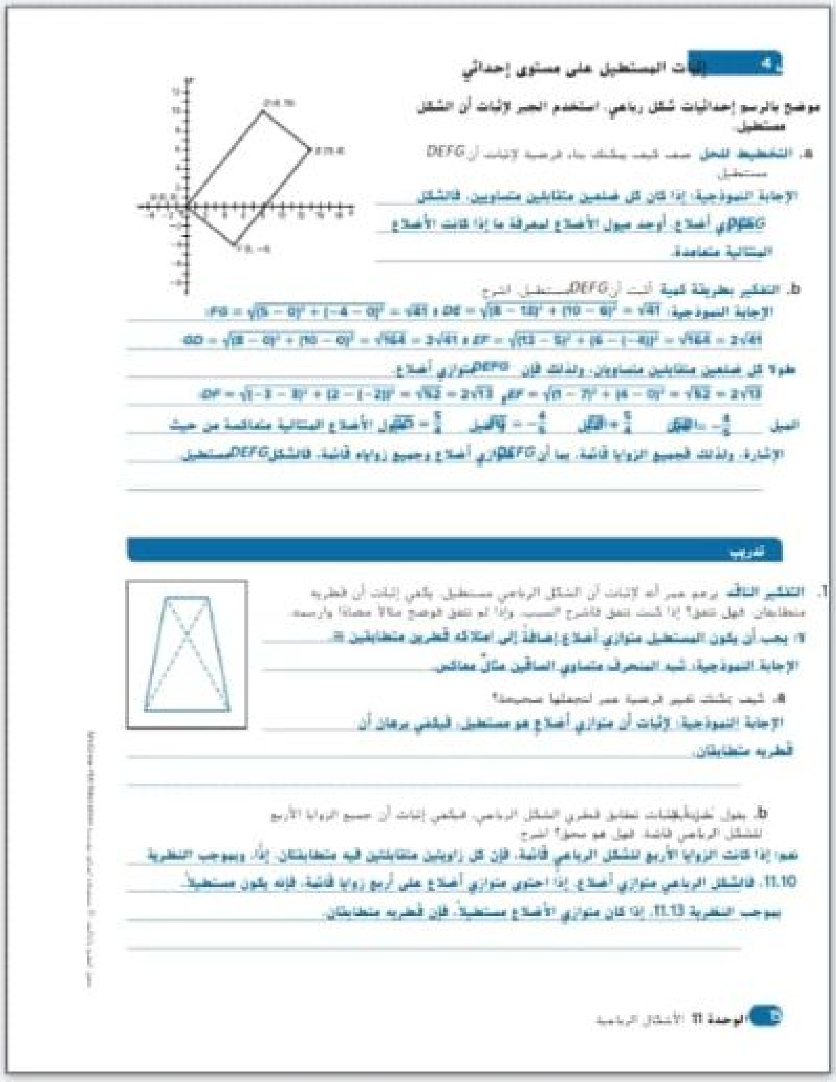
في **المثال 4**، يجب على الطلاب الاعتماد على الجبر بدلاً من أدوات القياس لإثبات أن الشكل عبارة عن مستطيل. تحدّ الطلاب لعمل مقارنات بين أدوات القياس والقوانين الجبرية. على سبيل المثال، يمكن استخدام قانون المسافة وكأنه مسطرة لقياس طول الضلع.

الأسئلة الداعمة

- ما القوانين التي يمكن استخدامها والتي تحدد النقطتين الطرفيتين لقطعة مستقيمة؟ **قانون المسافة يحدد طول القطعة المستقيمة وقانون الميل يحدد ميلها.**

كيف تساعدك الأطوال في إثبات أن الشكل عبارة عن مستطيل؟ **إذا كان كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقًا، فالشكل عبارة عن متوازي أضلاع. وإذا كان متوازي أضلاع ذا أوتار متطابقة، فهو مستطيل.**

كيف تساعدك الميول في إثبات أن الشكل عبارة عن مستطيل؟ **إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة لهما الميل نفسه، فإنهما يكونان متوازيين وبالتالي يكون الشكل متوازي أضلاع. إذا كانت ميول كل زوج من الأضلاع المتتالية عبارة عن معكوس ضربي سالب، فإنهما يكونان متعامدين ومتوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.**



4 إثبات المستطيل على مستوى إحداثي

موضع بالرسم إحداثيات شكل رباعي. استخدم الجبر لإثبات أن الشكل مستطيل.

a. التخطيط للحل صف كيف يمكنك بناء فرضية لإثبات أن DEFG مستطيل.

الإجابة النموذجية: إذا كان كل ضلعين متقابلين متساويين، فالشكل DEFG متوازي أضلاع. أوجد ميول الأضلاع لمعرفة ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة.

b. التفكير بطريقة كمية أثبت أن DEFG مستطيل. اشرح.

الإجابة النموذجية: $DE = \sqrt{(8-10)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{41}$ و $FG = \sqrt{(5-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{41}$

$EF = \sqrt{(13-5)^2 + (6-(-4))^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ و $GD = \sqrt{(8-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

طول كل ضلعين متقابلين متساويان، ولذلك فإن DEFG متوازي أضلاع.

الميل ... الأضلاع المتتالية متناقضة من حيث الإشارة، ولذلك فجميع الزوايا قائمة. بما أن DEFG متوازي أضلاع وجميع زواياه قائمة، فالشكل DEFG مستطيل.

تدريب

1. التفكير الناقد يزعم عمر أنه لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل، يكفي إثبات أن قطريه متطابقان. هل تتفق؟ إذا كنت تتفق فاشرح السبب. وإذا لم تتفق فوضح مثالاً مضادًا وارسمه.

لا، يجب أن يكون المستطيل متوازي أضلاع إضافةً إلى امتلاكه قطرين متطابقين.

الإجابة النموذجية: شبه المنحرف متساوي الساقين مثالٌ معاكس.

a. كيف يمكنك تغيير فرضية عمر لتجعلها صحيحة؟

الإجابة النموذجية: لإثبات أن متوازي أضلاع هو مستطيل، فيكفي برهان أن قطريه متطابقان.

b. يقول خويلة: إنه عند تطابق قطري الشكل الرباعي، فيكفي إثبات أن جميع الزوايا الأربع للشكل الرباعي قائمة. فهل هو محق؟ اشرح.

نعم؛ إذا كانت الزوايا الأربع للشكل الرباعي قائمة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان. إذًا، وبموجب النظرية 11.10، فالشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذا احتوى متوازي أضلاع على أربع زوايا قائمة، فإنه يكون مستطيلاً. بموجب النظرية 11.13، إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان.

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

التأكيد على الممارسات الرياضية

عندما يجب على الطلاب إثبات الخواص الهندسية بدلاً من حفظها، فغالبًا ما يستوعبون المفاهيم ويطبقونها في مجموعة من المواقف. بالتأكيد على الممارسة **م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**، فأنت تجعل الطلاب يأخذون دورًا فعالاً في تعلم خواص الأنواع المختلفة من متوازيات الأضلاع بطريقة تُنمي الفهم.

عندما يثبت الطلاب البراهين، امنحهم الوقت لمناقشة المسائل في مجموعات صغيرة أو بين الفصل بكامله. اطرح أسئلة مثل "كيف تعرف ذلك؟" و"لماذا هذا صحيح؟" و"هل هذا منطقي؟" شجع الطلاب على تقديم شروح تستخدم المفردات الرياضية والاستنتاج.

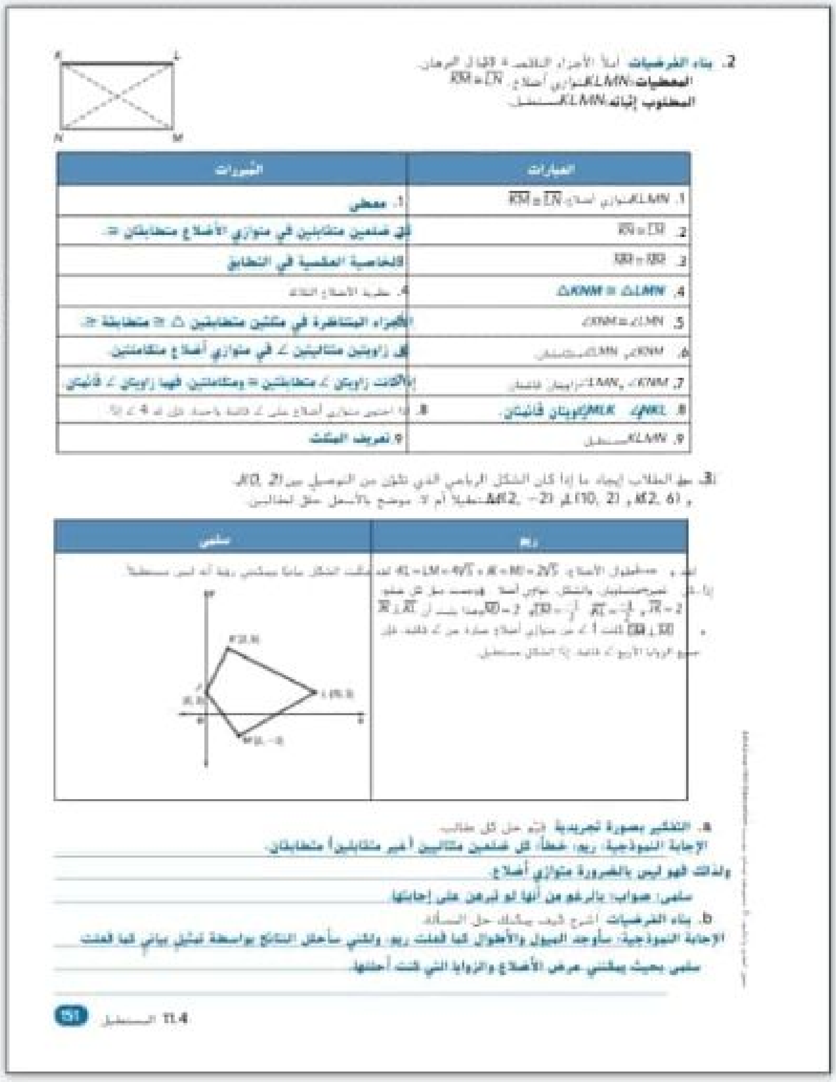
تمرين

في **التمرينين 1 و 2**، يمارس الطلاب الاستنتاج لإثبات نظرية عن متوازيات الأضلاع والمستطيلات.

في **التمرين 3**، يجب على الطلاب استخدام الإحداثيات والجبر لتوضيح ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيل أم لا.

عرض الممارسات الرياضية

التمرين	م.ر
1	2
2	3
3	2, 3



2. **بناء الفرضيات** املأ الأجزاء الناقصة لإكمال البرهان.

المعطيات: $KLMN$ متوازي أضلاع، $\overline{KM} \cong \overline{LN}$

المطلوب إثباته: $KLMN$ مستطيل

المبررات	العبارات
1. معطى	1. $KLMN$ متوازي أضلاع، $\overline{KM} \cong \overline{LN}$
2. كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان	2. $\overline{KN} \cong \overline{LM}$
3. الخاصية العكسية في التطابق	3. $\overline{NM} \cong \overline{NM}$
4. نظرية الأضلاع الثلاثة	4. $\triangle KNM \cong \triangle LMN$
5. الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	5. $\angle KNM \cong \angle LMN$
6. كل زاويتين متتاليتين في متوازي أضلاع متكاملتين	6. $\angle KNM$ و $\angle LMN$ متكاملتان
7. إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين فهما زاويتان قائمتان	7. $\angle KNM$، $\angle LMN$ زاويتان قائمتان
8. إذا احتوى متوازي أضلاع على زاوية قائمة واحدة فإن له 4 زوايا قائمة	8. $\angle NKL$، $\angle MLK$ زاويتان قائمتان
9. تعريف المستطيل	9. $KLMN$ مستطيل

3. طلب من الطلاب إيجاد ما إذا كان الشكل الرباعي الذي تكوّن من التوصيل بين $J(0, 2)$، $K(2, 6)$، $L(10, 2)$، $M(2, -2)$ مستطيلاً أم لا. موضح بالأسفل حل الطالبين.

سلمى	ريم
[illegible]	[illegible]

a. **التفكير بصورة تجريدية** قيِّم حل كل طالب.

الإجابة النموذجية: ريم: خطأ؛ كل ضلعين متتاليين (غير متقابلين) متطابقان. ولذلك فهو ليس بالضرورة متوازي أضلاع.

سلمى: صواب؛ بالرغم من أنها لم تبرهن على إجابتها.

b. **بناء الفرضيات** اشرح كيف يمكنك حل المسألة.

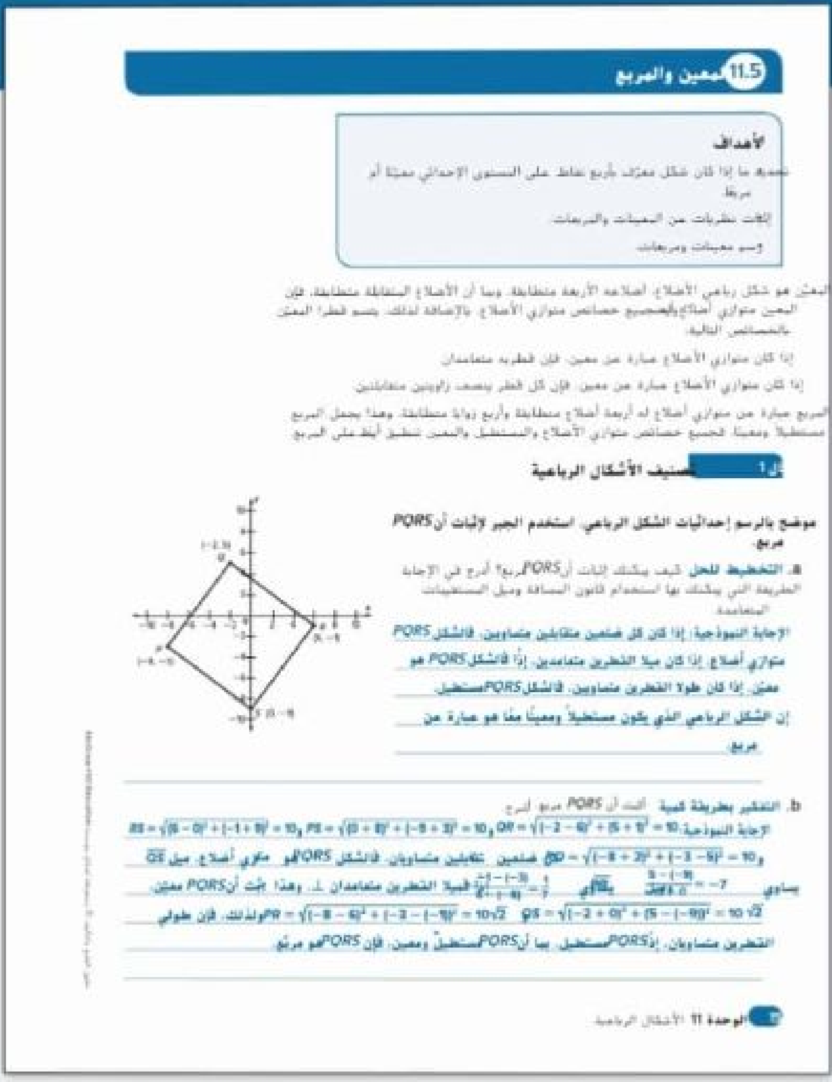
الإجابة النموذجية: سأوجد الميول والأطوال كما فعلت ريم، ولكني سأمثل النتائج بواسطة تمثيل بياني كما فعلت سلمى بحيث يمكنني عرض الأضلاع والزوايا التي قمت بحلها.

11.4 المستطيل 151

أخطاء شائعة

قد يواجه الطلاب صعوبات في صياغة المُبرر الصحيح لبعض الخطوات في **التمرين 2**. إذا لم يكونوا يتذكرون النظرية، فخصص وقتًا لمراجعتها مرة أخرى. على سبيل المثال، قد لا يتذكرون أنه إذا كانت كلا الزاويتين متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما تكونان زاويتين قائمتين. خصص وقتًا لمراجعة الاستنتاج بعد العبارة حتى يفهم الطلاب لماذا هي صحيحة.

في **التمرين 3**، قد يعتقد الطلاب أنه يجب عليهم اختيار حل واحد على أنه هو الحل الصحيح. ساعدهم في ملاحظة أن ريم حاولت اتباع الطريقة التحليلية في الحل، ولكنها لم تطبق المعلومات من القوانين تطبيقًا صحيحًا. حل سلمى يظهر أنه فهم طبيعة المسألة، ولكنه لم يستخدم الرياضيات لدعم عبارته. ينبغي أن تجمع حلول الطلاب بين الأجزاء الأفضل لكل حل موضح.



11.5 المعين والمربع

الأهداف

- تحديد ما إذا كان شكل معرَّف بأربع نقاط على المستوى الإحداثي معينًا أو مربعًا.
- إثبات نظريات عن المعينات والمربعات.
- رسم معينات ومربعات.

المعين هو شكل رباعي الأضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة. وبما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المعين متوازي أضلاع ويحقق جميع خصائص متوازي الأضلاع. بالإضافة لذلك، يتسم قطرا المعين بالخصائص التالية:

إذا كان متوازي الأضلاع عبارة عن معين، فإن قطريه متعامدان.

إذا كان متوازي الأضلاع عبارة عن معين، فإن كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين.

المربع عبارة عن متوازي أضلاع له أربعة أضلاع متطابقة وأربع زوايا متطابقة. وهذا يجعل المربع مستطيلاً ومعينًا. لذلك، تنطبق جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين أيضًا على المربع.

مثال 1 تصنيف الأشكال الرباعية

موضح بالرسم إحداثيات الشكل الرباعي. استخدم الجبر لإثبات أن $PQRS$ مربع.

a. **التخطيط للحل** كيف يمكنك إثبات أن $PQRS$ مربع؟ أدرج في الإجابة الطريقة التي يمكنك بها استخدام قانون المسافة وميل المستقيمات المتعامدة.

الإجابة النموذجية: إذا كان كل ضلعين متقابلين متساويين، فالشكل $PQRS$ متوازي أضلاع. إذا كان ميلا القطرين متعامدين، إذًا فالشكل $PQRS$ هو معين. إذا كان طولا القطرين متساويين، فالشكل $PQRS$ مستطيل. إن الشكل الرباعي الذي يكون مستطيلاً ومعينًا معًا هو عبارة عن مربع.

b. **التفكير بطريقة كمية** أثبت أن $PQRS$ مربع. اشرح.

الإجابة النموذجية: $QR = \sqrt{(-2-6)^2+(5+1)^2} = 10$، $PS = \sqrt{(0+8)^2+(-9+3)^2} = 10$، $RS = \sqrt{(6-0)^2+(-1+9)^2} = 10$، و $PQ = \sqrt{(-8+2)^2+(-3-5)^2} = 10$ ضلعين متقابلين متساويان. فالشكل $PQRS$ هو متوازي أضلاع. ميل $\overline{QS}$ يساوي $\frac{5-(-9)}{-2-0} = -7$ وميل $\overline{PR}$ $= \frac{-1-(-3)}{6-(-8)} = \frac{1}{7}$ قيمة القطرين متعامدان ⊥. وهذا يثبت أن $PQRS$ معين. $QS = \sqrt{(-2+0)^2+(5-(-9))^2} = 10\sqrt{2}$ و $PR = \sqrt{(-8-6)^2+(-3-(-1))^2} = 10\sqrt{2}$ ولذلك، فإن طولي القطرين متساويان. إذًا $PQRS$ مستطيل. بما أن $PQRS$ مستطيل ومعين، فإن $PQRS$ هو مربع.

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

استخدام قوانين المسافة والميل لحل المسائل

استخدام خواص متوازي الأضلاع

المواد

- فرجار
- مسطرة تقويم
- ورقة صغيرة

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.ر 1

شجّع الطلاب ليكونوا واضحين في تصنيف الشكل الذي يتعاملون معه. ذكّرهم بأنه من أجل إثبات شكل معيّن أو مربع، فإنهم يحتاجون أولاً إلى إثبات أن الشكل متوازي الأضلاع.

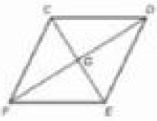
خلفية عن الرياضيات

في هذا الدرس، يثبت الطلاب نظريات عن المعيّنات والمربعات. والعديد من العبارات التي سيثبتها الطلاب تتضمن أطوالاً وزوايا. وعند التعامل مع الإحداثيات، سيوجد الطلاب قانون الميل اللازم لتحديد توازي المستقيمات وتعامدها وقانون المسافة المفيد في التحقق من تساوي الأطوال.

غالبًا ما يوجد العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لإثبات خواص شكل رباعي محدد. حثّ الطلاب على التفكير في الإستراتيجيات المختلفة.

c. **التفكير الناقد** يعتقد محمد أن الشكل الرباعي $PQRS$ يكون مربعًا إذا كان القطران متطابقين ومتعامدين. ومعينًا إذا كان القطران متعامدين ولكن غير متطابقين. ويعتقد بشير أن المعلومات غير كافية لتصنيف الشكل الرباعي. فمن منهما على صواب؟ اشرح إجابتك.

الإجابة النموذجية: إجابة بشير صحيحة. إن طروحات سليم صحيحة فقط إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع. يمكن أن يكون $PQRS$ شكل رباعي محدبًا ذا قطرين متعامدين أو شبه منحرف قطرين متعامدين ومتطابقين.



مثال 2 إثبات أن متوازي الأضلاع معيّن

بناء الفرضيات أثبت أنه إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين، فإن متوازي الأضلاع معيّن.

المعطيات: $CDEF$ متوازي أضلاع، $\overline{CE} \perp \overline{DF}$

المطلوب إثباته: $CDEF$ معيّن

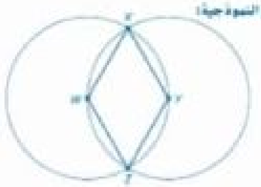
المبررات	العبارات
1. معطى	1. $CDEF$ متوازي أضلاع؛ $\overline{CE} \perp \overline{DF}$
2. قطرا متوازي الأضلاع يتقاطعان مع بعضهما	2. $\overline{DG} \cong \overline{FG}$
3. تعريف التعامد ⊥	3. $\angle CGF$ و $\angle CGD$ زاويتان قائمتان
4. جميع الزوايا القائمة متطابقة	4. $\angle CGF \cong \angle CGD$
5. التطابق ضلع-زاوية-ضلع	5. $\triangle CGF \cong \triangle CGD$
6. الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	6. $\overline{CF} \cong \overline{CD}$
7. الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة	7. $\overline{CF} \cong \overline{DE}, \overline{CD} \cong \overline{EF}$
8. الخاصية التعدي في التطابق ≅	8. $\overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{CF}$
9. تعريف المعيّن	9. $CDEF$ عبارة عن معين

مثال 3 رسم معيّن

a. **استخدام الأدوات** اتبع الخطوات التالية لرسم المعين $WXYZ$ **الإجابة النموذجية:**

في المساحة المتوفرة على اليسار، استخدم الفرجار لرسم الدائرة W التي تحتوي على النقطة Y.

- بوضع الفرجار على النقطة Y ارسم الدائرة Y لاحتوائها النقطة W.
- اكتب على نقطتي التقاطع X و Z.
- ارسم $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ و $\overline{YZ}$ و $\overline{WZ}$



b. **التواصل بدقة** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $WXYZ$ معيّن.

الإجابة النموذجية: الدائرة W والدائرة Y دائرتان متطابقتان لأن لنصفي قطريهما الطول WY. أضلاع الشكل $WXYZ$ الأربعة أنصاف أقطار لدائرتين متطابقتين، ولذلك فهي متطابقة. وهذا يجعل الشكل الرباعي $WXYZ$ معينًا.

11.5 المعين والمربع 153

التأكيد على الممارسات الرياضية

الممارسة م.ر 6 (مراعاة الدقة) ليست مكونًا أساسيًا من مكونات براهين الإحداثيات فحسب، بل جزءًا ضروريًا من شرح أي إجابة. وسواء كان الطلاب يبررون إجاباتهم بجملة واحدة أو بكتابة فقرات برهان أو بصياغة براهين ذات عمودين، فإنه يجب أن يحرصوا على استخدام اللغة والرموز الصحيحة.

ر الطلاب بأن الرياضيات عبارة عن لغة وأن القدرة على التعبير عن الأفكار باستخدام الكلمات والأعداد من الأجزاء الضرورية للتواصل بدقة.

الأسئلة الداعمة

أيّ العبارتين صحيح: "جميع المعينات لها أقطار متعامدة" أم "جميع الأشكال الرباعية ذات الأقطار المتعامدة عبارة عن معيّنات"؟ برر إجابتك. **العبارة الأولى صحيحة بناءً على التعريف. العبارة الثانية ليست صحيحة؛ الطائرات الورقية وشبه المنحرف متساوي الساقين لهما أقطار متعامدة.**

كيف تعرف أن الشكل عبارة عن معيّن والمستطيل عبارة عن مربع؟ **إذا كان الشكل مستطيلاً فإن كل زاوية فيه زاوية قائمة ∠. وإذا كان الشكل عبارة عن معيّن، فإننا نعرف أن جميع الأضلاع ≅. وبما أن جميع الأضلاع والزوايا ∠ تكون ≅، فإن الشكل الرباعي مربع.**

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.ر 3

في **المثال 2**، تم تقديم مزيد من العبارات في بداية البرهان وبالتالي يمكن أن يركز الطلاب على تقديم الاستنتاجات أولاً. ستكون المساعدة المقدمة أقل في النهاية. وقبل أن يبدأ الطلاب في البرهان، ساعدهم في تحديد العبارة التي ستُكتب في النهاية. واجعلهم يكتبوا المسألة بكلمات من عندهم.

الأسئلة الداعمة

ما الذي يمكن أن تقوله عن أي متوازي أضلاع له أقطار متعامدة؟ **إنه معيّن.**

بما أن الشكل متوازي أضلاع، فما الذي يمكن أن يقال عن الأقطار؟ **تتقطع الأقطار بعضها.**

مثال 3

م.ر 3

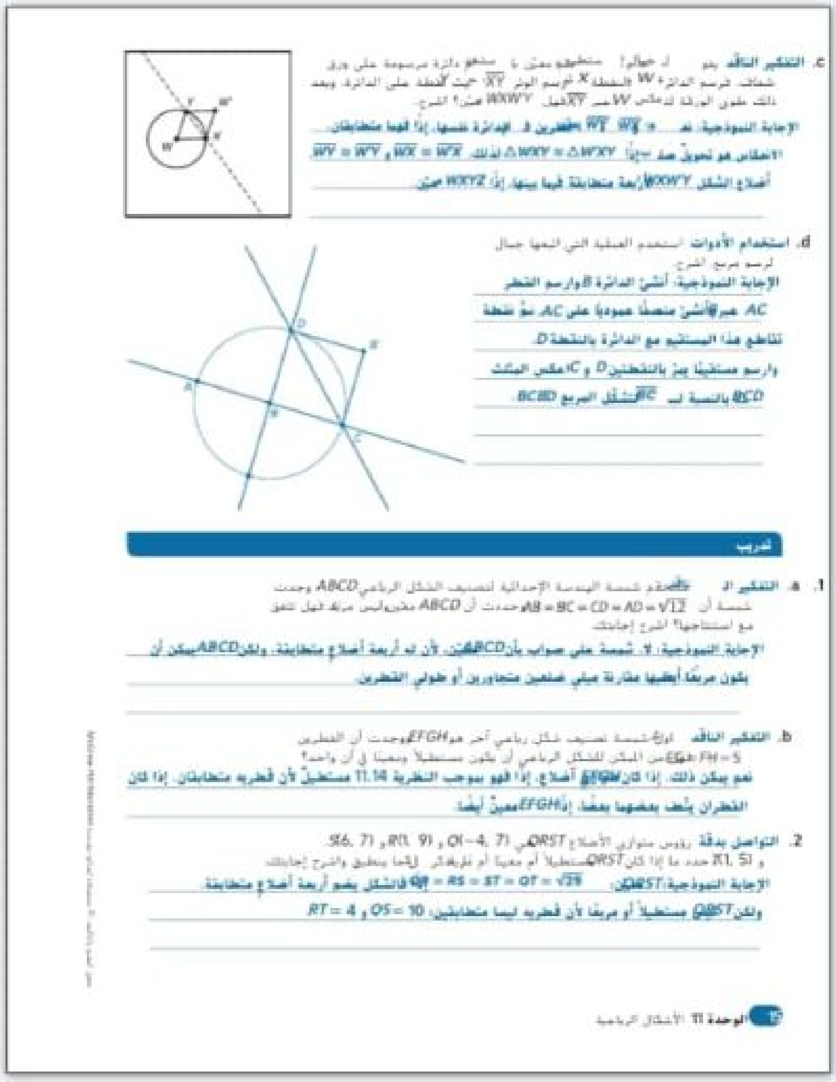
نصيحة للتدريس

يوفر المثال 3 فرصة ممتازة للتدريس المتمايز. قد يدرك بعض الطلاب أوجه التشابه بين الرسم في **الجزء a** ورسم القاطع المتعامد لقطعة المستقيمة شجّع هؤلاء لكتابة البرهان في **الجزء b** الذي يستخدم حقيقة أن القطر $\overline{XZ}$ قاطع متعامد على القطر $\overline{WY}$.

قد يجد بعض الطلاب أنه من المفيد استخدام ورقة صغيرة وفرجار لعمل رسم محمود في **الجزء c**.

الأسئلة الداعمة

- ما وجه الترابط بين الدائرة W والدائرة Y؟ كيف تعرف؟ **إنهما متطابقتان لأن لهما قطر واحد.**
- ما خاصية الانعكاسات التي تتيح لنا استخدام الانعكاسات لإثبات التطابق؟ **الانعكاس عبارة عن تحويل ثابت. وبالتالي تتطابق الصورة الأصلية مع الصورة.**
- في **الجزء d**، ما الرسم الذي يجب أن تنشئه لضمان أن يكون الشكل الرباعي عبارة عن مربع؟ **يجب أن ترسم قاطعًا لقطر الدائرة. وبذلك يضمن أن تكون قياسات الزوايا في الشكل الرباعي 90 درجة وأن تكون الأضلاع متطابقة.**



أخطاء شائعة

في **التمرين 1**، قد يعتبر بعض الطلاب أن المعينات والمربعات عبارة عن مجموعات حصرية. ذكّر الطلاب بأن كل مربع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربع.

في **التمرين 2**، قد يخطئ الطلاب في تحديد ميول أضلاع $QRST$ إذ إنها متعامدة. أشر إلى أن ميول المستقيمات المتعامدة متقابلة ومعكوسة. لكن ميول الأضلاع المتجاورة هنا متقابلة فقط.

تمرين

في **التمرينين 1** و **2**، يستخدم الطلاب الإحداثيات والجبر لإثبات النظريات البسيطة. تحديدًا، **التمرين 2** يطلب من الطلاب تصنيف الشكل الرباعي المعطى باستخدام الإحداثيات فقط.

في **التمرين 3**، يجب على الطلاب رسم الشكل باستخدام الفرجار والمسطرة لصياغة البرهان.

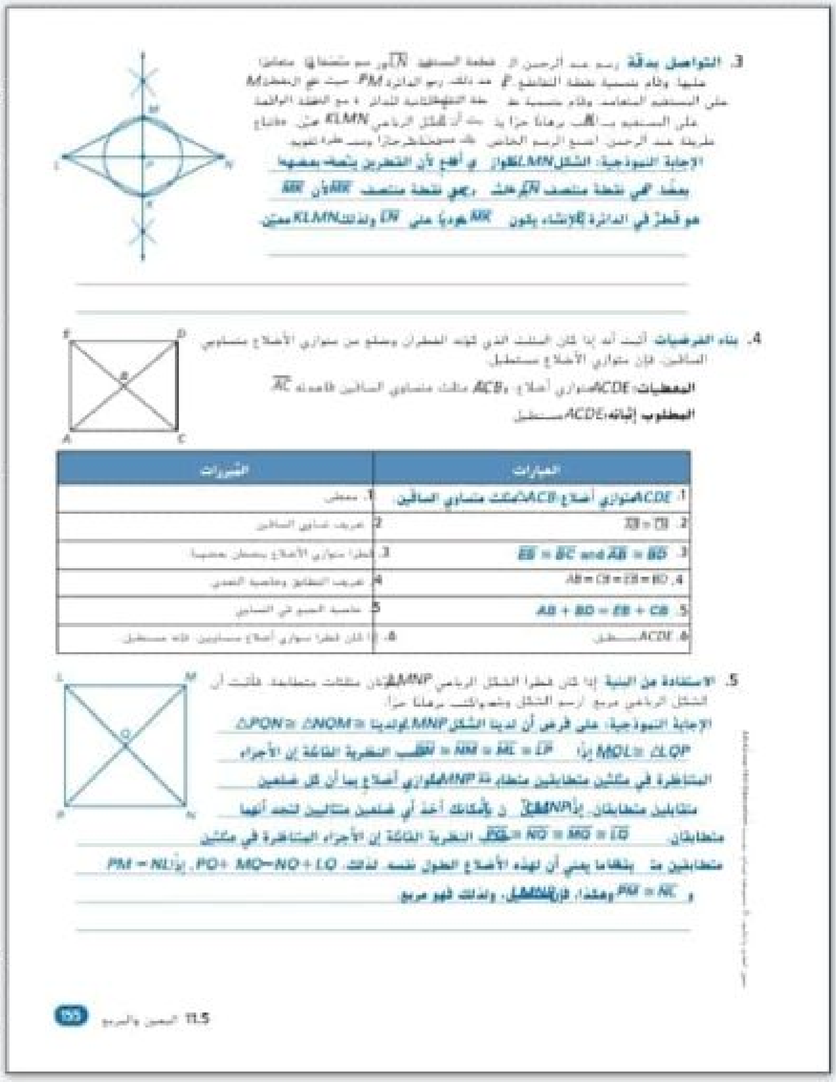
في **التمرينين 4** و **5**، يثبت الطلاب أن متوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.

عرض الممارسات الرياضية

م.ر	التمرين
3	1
6	2
6	3
3	4
7	5

أخطاء شائعة

في **التمرينين 4** و **5**، يوجد العديد من التسلسلات المحتملة التي يمكن ترتيب العبارات بها، ولكن ليس كل تسلسل مقبولاً منطقيًا. ذكّر الطلاب بأنه في الاستنتاج لا يمكن استخدام سوى المعلومات المذكورة بالفعل في البرهان.



3. **التواصل بدقة** ... $KLMN$ ...

الإجابة النموذجية: الشكل $KLMN$ ... هو قطر في الدائرة ... $KLMN$ معين.

4. **بناء الفرضيات** أثبت أنه إذا كان المثلث الذي ... متوازي الأضلاع متساوي الساقين، فإن متوازي الأضلاع مستطيل.

المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع، ACB مثلث متساوي الساقين قاعدته $\overline{AC}$

المطلوب إثباته: $ACDE$ مستطيل

المبررات	العبارات
1. معطى	1. $ACDE$ متوازي أضلاع، ACB مثلث متساوي الساقين
2. تعريف تساوي الساقين	2. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$
3. قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر	3. $\overline{EB} \cong \overline{BC}$ and $\overline{AB} \cong \overline{BD}$
4. تعريف التطابق وخاصية التعدي	4. $AB = CB = EB = BD$
5. خاصية الجمع في التساوي	5. $AB + BD = EB + CB$
6. إذا كان قطرا متوازي أضلاع متساويين فإنه مستطيل.	6. $ACDE$ مستطيل

5. **الاستفادة من البنية** إذا كان قطرا الشكل الرباعي $MNPL$ ... فأثبت أن الشكل الرباعي مربع. ارسم الشكل ...

الإجابة النموذجية: على فرض أن لدينا الشكل $MNPL$ ... $\triangle PON \cong \triangle NOM \cong$ ... $\triangle MOL \cong \triangle LQP$ ... $\overline{PN} \cong \overline{NM} \cong \overline{ML} \cong \overline{LP}$ ... النظرية القائلة إن الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة ... متوازي أضلاع ... $\overline{PO} \cong \overline{NO} \cong \overline{MO} \cong \overline{LO}$ ... $PO + MO = NO + LO$ ... $PM = NL$ ... $\overline{PM} \cong \overline{NL}$ ... لذلك فهو مربع.

11.5 المعين والمربع 155

التأكيد على الممارسات الرياضية

التمرين 2 يمنح الطلاب فرصة للتمرن على الممارسة **م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)** إذ يجب أن يختاروا إستراتيجية مناسبة لتصنيف الشكل.

اطلب من الطلاب توضيح حلهم على اللوحة أو في مجموعات صغيرة واعتبرها فرصة للتدريس المتمايز. شجع الطلاب على استخدام خواص متوازي الأضلاع الخاصة للتحقق من إجاباتهم.

11 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

الممارسات الرياضية

الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 6, 7

المتطلبات الأساسية

استخدام قوانين المسافة والميل لحل المسائل

كتابة معادلات في متغير واحد وحلها

حل نظام معادلات خطية

استخدام خواص متوازيات الأضلاع

المواد

• ورقة صغيرة

مثال 1

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

الأهداف

تحديد ما إذا كان شكل معرّف بأربع نقاط شبه منحرف أو طائرة ورقية

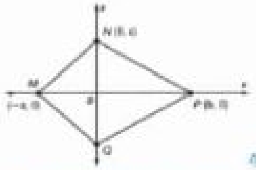
إثبات النظريات الخاصة بشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية باستخدام الإحداثيات.

شبه المنحرف عبارة عن الشكل الرباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يطلق عليهما القاعدة. أما الضلعان غير المتوازيين فيطلق عليهما "الساقان". فمطلقاً في شبه المنحرف عبارة عن قطعة مستقيمة تصل نقطتي منتصف ساقي شبه المنحرف.

إذا تطابق ساقا شبه المنحرف، يكون حينئذ شبه منحرف متساوي الساقين.

الطائرة الورقية لها بالتحديد زوجان من الأضلاع المتتالية المتطابقة.

مثال 1 استخدام الهندسة الإحداثية لاستكشاف شكل الطائرة الورقية



a. **تفسير المسائل** من دون تقديم متغيرات جديدة، اذكر إحداثيات النقطة Q بفرض أن $MNPQ$ طائرة ورقية.

Q $(0, -d)$

b. **الاستفادة من البنية** لاحظ عفوي أنه يجوز تحليل الشكل على هيئة مثلثين $\triangle MNP$ و $\triangle MQP$. ما الذي يمكننا استنتاجه من الزاويتين المتقابلتين $\angle N$ و $\angle Q$؟ اشرح.

الإجابة النموذجية: $\angle Q \cong \angle N$؛ لأن $MN = MQ$ و $NP = PQ$، إذاً فإن $\triangle MNP \cong \triangle MQP$ حسب التناظر (ضلع-ضلع-ضلع) و $\angle Q \cong \angle N$ حسب النظرية القائلة إن الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

c. **بناء الفرضيات** بدلالة الطائرة الورقية $MNPQ$، أثبت أن $\angle NPQ \cong \angle NMQ$.

الإجابة النموذجية: من الجزء b، $\angle Q \cong \angle N$. إذا كانت $\angle NPQ \cong \angle NMQ$، إذاً $MNPQ$ متوازي أضلاع بحسب تعريف متوازي الأضلاع. لا يمكن أن يكون ذلك صحيحاً نظراً لكون $MNPQ$ الشكل الرباعي محدداً، إذاً $\angle NPQ \not\cong \angle NMQ$.

d. **بناء الفرضيات** بدلالة الطائرة الورقية $MNPQ$، أثبت أن $\overline{MP}$ عمودي على $\overline{NQ}$.

الإجابة النموذجية: ميل [illegible] ميل [illegible] إذاً [illegible] المستقيم أفقي ميل [illegible] يساوي [illegible] إذاً، الميل $\overline{NQ}$ غير معرّف، وهو مستقيم رأسي. نظراً إلى أن [illegible] المستقيم أفقي و [illegible] المستقيم رأسي، فهما متعامدان.

e. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا كان $a = b = c$، فهل لا يزال الشكل $MNPQ$ طائرة ورقية؟ علل إجابتك. صنّف الشكل الرباعي بأكبر قدر ممكن من التحديد.

الإجابة النموذجية: لا. إذا كان $a = b = c$، إذاً $MO = OP = NO = QO$، وبالتالي فإن $MNPQ$ متوازي أضلاع. بما أن القطرين يقعان على المحورين الأفقي x والعمودي y فهما متعامدان، إذاً $MNPQ$ معين. وبما أن القطرين متطابقان، فالشكل $MNPQ$ مستطيل، ولذلك فإن $MNPQ$ مربع.

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

نصيحة للتدريس م.ر 1

قد يستفيد المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية من شطّ الشكل $MNPQ$ والمحاور على ورقة صغيرة وطيّ كل شكل بطول كل محور للتحقق من التماثل. أعط ملاحظة للطلاب بأن الشكل مرسوم باستخدام انعكاس مثلث، وهذه الملحوظة مفيدة في **الجزء b**.

الأسئلة الداعمة

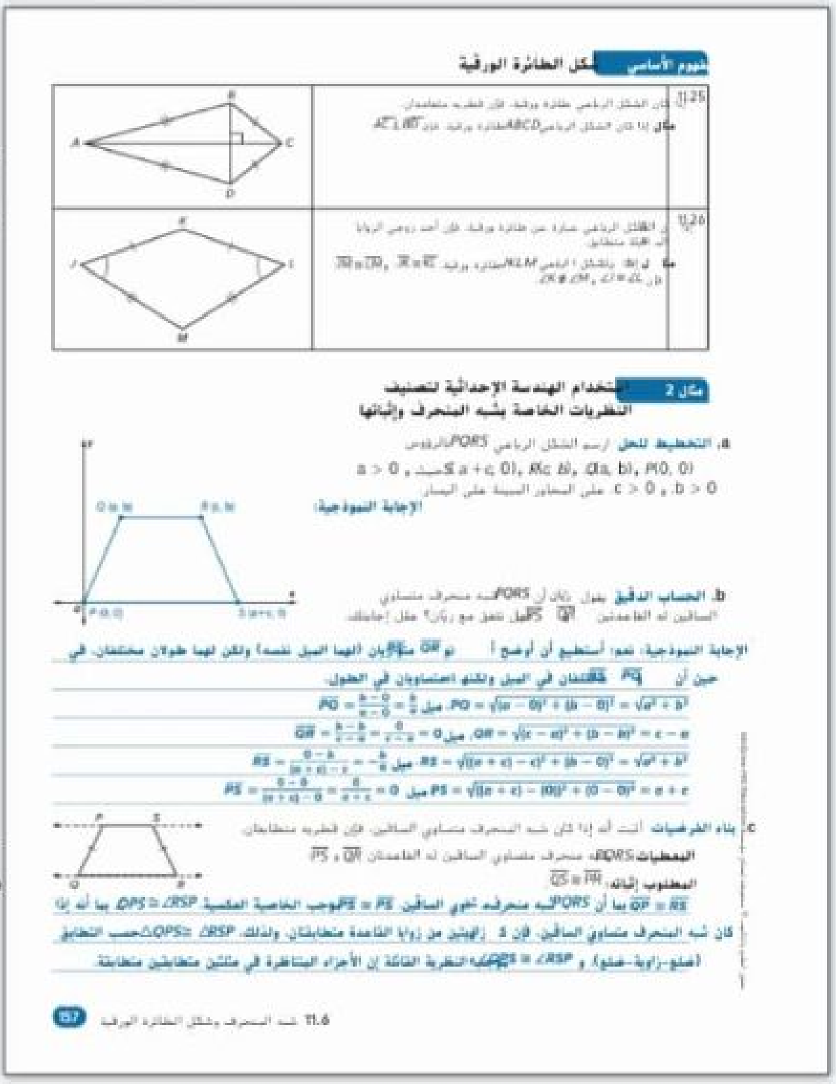
هل الطائرات الورقية عبارة عن مجموعة جزئية من نوع آخر لشكل رباعي خاص؟ **لا؛ على الرغم من أنها تتشارك في مواصفات خاصة مع العديد من الأشكال الرباعية الخاصة، فهي ليست مجموعة جزئية من أي فئة أخرى في الأشكال الرباعية.**

إذا كانت $a = c$ ولكن $a \neq b$، فهل $MNPQ$ لا تزال طائرة ورقية؟ **نعم؛ فهذا لا يزال ممكنًا لمجموعتين بالتحديد من الأضلاع المتتالية المتطابقة: $MN = MQ$ و $PN = PQ$. ولكن $MN \neq PN$.**

خلفية عن الرياضيات

في هذا الدرس، يستكشف الطلاب النظريات عن أشباه المنحرف والطائرات الورقية ويثبتونها. ولأن هذا الدرس يجعل الطلاب يستخدمون الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية جبريًا، فينبغي التأكيد على خواص الأضلاع والأقطار. ولكن زوايا أشباه المنحرف والطائرات الورقية تتميز بالعديد من الخواص المهمة التي تستحق الاستكشاف.

عند التعامل مع الإحداثيات، سيحتاج الطلاب إلى معرفة قانون الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمتعامدة ومعرفة قانون المسافة لتحديد الأطوال.



مثال 2

نصيحة للتدريس م.ر 6

يتطلب المثال 2 من الطلاب استخدام كلٍّ من قانوني الميل والمسافة. شجع الطلاب على التنبه بدقة لعلامات السالب والطرح.

الأسئلة الداعمة

- هل من الضروري التحقق من أن $PS \neq QR$ في الجزء b حتى نعرف أن QPRS ليس متوازي أضلاع؟ **لا؛ إذا كان $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ غير متوازيين، فمن المستحيل أن يكون PQRS متوازي أضلاع.**
- هل يمكن أن يكون PQRS شبه منحرف إذا كان $PS = QR$؟ **لا؛ إذا كان زوج واحد من الأضلاع متقابلاً ومتطابقاً، فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع ولا يمكن أن يكون شبه منحرف.**

نصيحة للتدريس م.ر 3

شجع الطلاب على النظر إلى العديد من خواص أشباه المنحرف والطائرات الورقية وتحديد ما إذا كانت الشروط كافية لتحديد الشكل على أنه شكل رباعي أم لا.

الأسئلة الداعمة

أيّ الأشكال الرباعية أقطارها متطابقة؟ **المستطيلات، المربعات، أشباه المنحرف متساوية الساقين**

التأكيد على الممارسات الرياضية

بينما يستخدم الطلاب هندسة الإحداثيات لإثبات عبارات عن الطائرات الورقية وأشباه المنحرف، فإنهم سيطبقون الممارسة م.ر 2 **(التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. على سبيل المثال، سيحتاجون إلى تمثيل قانوني الميل والمسافة المستخدمَين بمعدل أكثر من قانون غير معروف.

d. **التفكير الناقد** تقول لك أن الشكل الرباعي $BDRS$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين أو قطريه متطابقان. فهل تعد هذه المعلومة كافية لتصنيف $BDRS$ كشبه منحرف متساوي الساقين؟ اشرح.

لا، الإجابة النموذجية: سوف يلغي ذلك لتصنيف شبه المنحرف على أنه متساوي الساقين. ولكن هذه المعلومة ليست كافية لتصنيف أي شكل رباعي على أنه شبه منحرف متساوي الساقين؛ حيث تضم المربعات والمستطيلات وبعض الأشكال الرباعية غير الخاصة قطرين متطابقين.

تدريب

1. **التفكير بطريقة فنية** $(-11, -1)$ W و $(11, 1)$ X هما رأسين للشكل الرباعي $WXYZ$.

a. أوجد إحداثيات Y و Z التي ستجعل $WXYZ$ طائرة ورقية. علل إجابتك.

الإجابة النموذجية: لتكن النقطة Y إحداثياها $(-11, 1)$ والنقطة Z إحداثياها $(-1, 13)$ بحيث يكون $\overline{XZ}$ أفقيًا و $\overline{WY}$ رأسيًا؛ اجعل القطرين متعامدين بحيث تنصف القطعة المستقيمة $\overline{XZ}$ القطعة المستقيمة $\overline{WY}$.

b. أوجد إحداثيات Y و Z التي ستجعل $WXYZ$ شبه منحرف متساوي الساقين. علل إجابتك.

الإجابة النموذجية: لتكن $\overline{WX}$ ميل $\overline{XY}$ يساوي 0، وطول $\overline{WX}$ يساوي $\sqrt{148} = \sqrt{(-11-1)^2 + (-1-1)^2}$. اجعل القواعد موازية للمحور الأفقي x. لتكن النقطة Y إحداثياها $(4, 1)$.

عندها سيكون إحداثيا النقطة Z هما $(k, -11)$. أوجد قيمة k عبر مساواة YZ بـ WX والحل لإيجاد k.

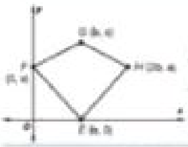
$\sqrt{148} = \sqrt{(k-4)^2 + (-11-1)^2}$ ، $\sqrt{148} = \sqrt{(k-4)^2 + 144}$ ، إذن $4 = (k-4)^2$ ، وبذلك $k = 8$ أو $k = 4$.

إذا كانت النقطة Z إحداثياها $(4, -11)$، فسوف يكون الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع. إذًا يجب أن يكون إحداثيا Z هما $(8, -11)$.

c. إذا كانت إحداثيات Y و Z هي $(4, 1)$ و $(4, -11)$، فحدد شكل $WXYZ$.

$WXYZ$ شبه منحرف؛ حيث يضم ضلعين متوازيين وساقين غير متطابقتين.

2. **بناء فرضيات** $EFGH$ الموضح على اليسار فيه $a \neq b \neq c \neq 0$. استخدم الهندسة الإحداثية لإثبات أن $EFGH$ طائرة ورقية.



الإجابة النموذجية: لاحظ أن $\overline{FH}$ قطعة مستقيمة أفقية $\left(m = \frac{a-a}{2b-0} = \frac{0}{2b} = 0\right)$، بينما $\overline{GE}$ قطعة مستقيمة رأسية $\left(m = \frac{c-0}{b-b} = \frac{c}{0}\right)$؛ لذلك، فإن القطرين متعامدان.

ثم أثبت أن أحد القطرين ينصف الآخر. الضلع الذي يضم $\overline{GE}$ هو $x = b$ والضلع الذي يضم $\overline{FH}$ هو $y = a$. يتقاطع هذان المستقيمان عند النقطة التي إحداثياها (b, a). لتكن هذه النقطة M وبالتالي $FM = \sqrt{(0-b)^2 + (a-a)^2} = \sqrt{b^2} = b$ و $MH = \sqrt{(2b-b)^2 + (a-a)^2} = \sqrt{b^2} = b$.

إذًا $\overline{GE}$ ينصف $\overline{FH}$ عند النقطة M. أثبت أن الأضلاع المتتالية متطابقة.

بما أن $FG = \sqrt{(b-0)^2 + (c-a)^2} = \sqrt{b^2 + (c-a)^2} = \sqrt{(b-2b)^2 + (c-a)^2} = GH$

و $FE = \sqrt{(b-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{(b-2b)^2 + (0-a)^2} = EH$.

تمرين

يتطلب كل تمرين من التمارين 1-4 أن يستخدموا الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية، وفقًا لمتطلبات **G.GPE.4** بصفة خاصة. في **التمرين 1** يُثبت الطلاب أن شكلاً خلصوا سه طالب هو عبارة عن طائرة ورقية وأن شكلاً آخر رسمه الطالب هو عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين. وبالمثل، في **التمرين 2** يكتب الطلاب برهانًا يوضح أن الشكل المعطى عبارة عن طائرة ورقية. وفي **التمرين 3** يثبت الطلاب أن منتصف الساقين في شبه المنحرف متساوي الساقين موازٍ للقواعد.

في **التمرين 4**، يجب أن يثبت الطلاب أن الشكل الرباعي شبه منحرف لكنه ليس متساوي الساقين.

عرض الممارسات الرياضية

التمرين	م.ر
1	2
2	3
3	7
4	3

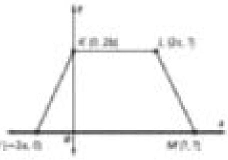
أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، قد يعتقد الطلاب أن ميول القطرين لهما العلامة ذاتها لأنه ليس أي منهما محدَّد على أنه سالب. وقد يبحثون عن تأكيد يثبت أن ميل أحد المستقيمين عبارة عن قاطع سالب القيمة بالنسبة إلى الآخر. ولكن هذا ليس صحيحًا. يكون أحد المستقيمات أفقيًا والآخر رأسيًا لأن ميل المستقيم الرأسي غير محدد. وبما أن المستقيمات الأفقية متعامدة على المستقيمات الرأسية، فإن هذه الأقطار تكون متعامدة.

أخطاء شائعة

في التمرين 3، قد يواجه الطلاب صعوبة في إيجاد الإحداثي x للنقطة M. شجع الطلاب على رسم الارتفاع K و L، بحيث يتم تقسيم شبه المنحرف إلى مستطيل ومثلثين. ومن ثم يمكنهم ملاحظة طول $\overline{JM}$.

3. **الاستفادة من البنية** موضح باليسار شبه المنحرف متساوي الساقين $JKLM$.



a. من دون تقديم متغيرات جديدة، اذكر إحداثيات النقطتين L و M.

L $(2c, 2b)$ M $(2c + 2a, 0)$

b. افترض أن النقطة P هي نقطة المنتصف في $\overline{JK}$ و Q هي نقطة المنتصف في $\overline{LM}$. استخدم الهندسة الإحداثية لإثبات أن $\overline{PQ}$ يوازي قاعدتي $JKLM$ ويساوي نصف مجموع طوليهما.

الإجابة النموذجية: ليكن $P = (-a, b)$ و $Q = (2c + a, b)$.

ميل $\overline{KL} = \frac{2b - 2b}{2c - 0} = \frac{0}{2c} = 0$، $KL = \sqrt{(2c - 0)^2 + (2b - 2b)^2} = 2c$

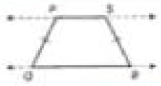
ميل $\overline{JM} = \frac{0 - 0}{(2c + 2a) - (-2a)} = 0$، $JM = \sqrt{[(2c + 2a) - (-2a)]^2 + (0 - 0)^2} = 2c + 4a$

ميل $\overline{PQ} = \frac{b - b}{(2c + a) - (-a)} = 0$، $PQ = \sqrt{[(2c + a) - (-a)]^2 + (b - b)^2} = 2c + 2a$

بما أن لـ $\overline{KL}$ و $\overline{PQ}$ و $\overline{JM}$ الميل نفسه، فهي متوازية وكذلك بما أن $2c + 2a = \frac{1}{2}[(2c) + (2c + 4a)]$،

فإن PQ يساوي نصف مجموع KL و JM.

c. افترض أن النقطة R نقطة المنتصف في $\overline{JM}$ و S نقطة المنتصف في $\overline{KL}$. استخدم الهندسة الإحداثية لإثبات أن $PSQR$ الشكل الرباعي الذي يصل نقطتي المنتصف في $JKLM$ عبارة عن شكل معيّن.



الإجابة النموذجية: ليكن $R = (c, 0)$ و $S = (c, 2b)$ ولإثبات أن $PSQR$ معيّن،

فيجب أن نثبت أنه متوازي أضلاع، وهو ما يمكننا فعله عبر إثبات أن $\overline{PS}$ و $\overline{QR}$ متوازيان ومتطابقان.

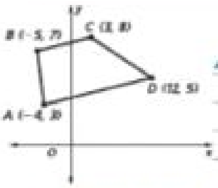
يجب أن نثبت أن $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ متعامدان.

ميل $\overline{PS} = \frac{2b - b}{c - (-a)} = \frac{b}{c + a}$، $PS = \sqrt{(c - (-a))^2 + (2b - b)^2} = \sqrt{(c + a)^2 + b^2}$

ميل $\overline{QR} = \frac{b - 0}{2c + a - c} = \frac{b}{c + a}$، $QR = \sqrt{(2c + a - c)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{(c + a)^2 + b^2}$

ميل $\overline{PQ} = \frac{b - b}{2c + a - (-a)} = \frac{0}{2c + 2a} = 0$ وميل $\overline{RS} = \frac{2b - 0}{c - c} = \frac{2b}{0}$ وهو غير معرّف.

4. **بناء الفرضيات** موضح باليسار الشكل الرباعي $ABCD$.



a. أثبت أن $ABCD$ شبه منحرف.

ميل $\overline{BC}$ هو $\frac{8 - 7}{3 - (-5)} = \frac{1}{8}$ وميل $\overline{AD}$ هو $\frac{5 - 3}{12 - (-4)} = \frac{1}{8}$ وهذا يعني أن $ABCD$ يضم ضلعين متقابلين ومتوازيين، ولذلك فهو شبه منحرف.

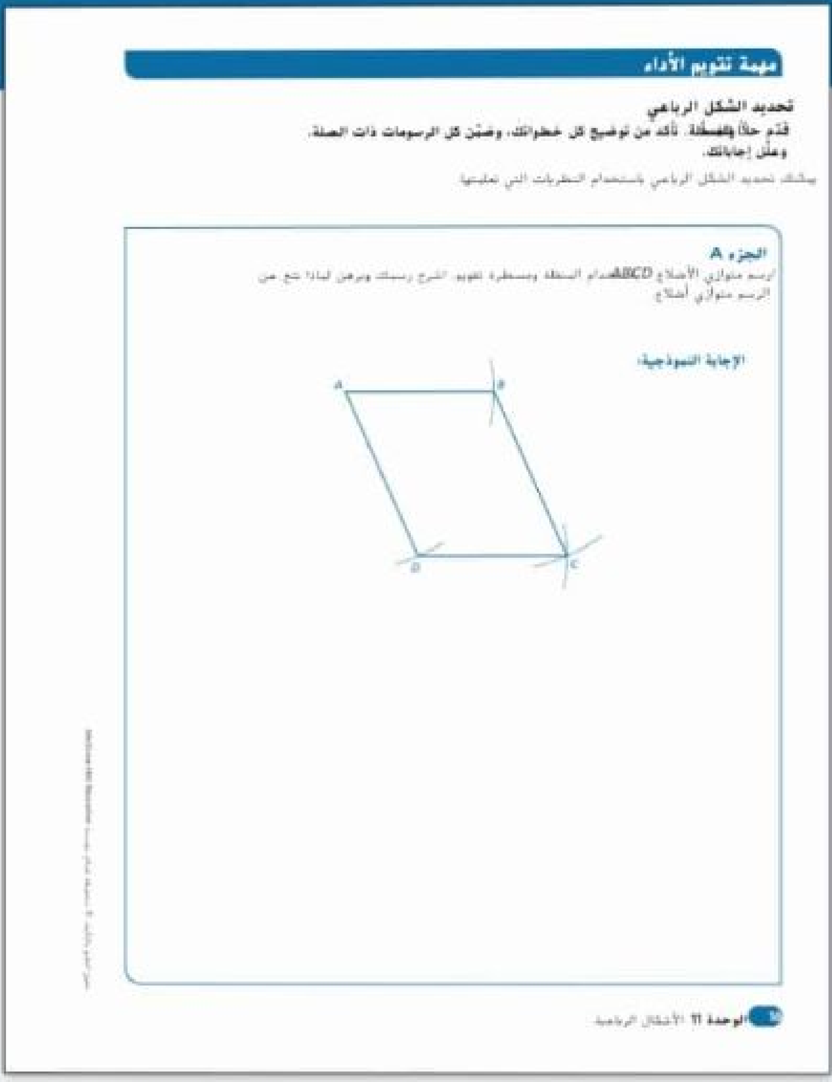
b. أثبت أن $ABCD$ ليس شبه منحرف متساوي الساقين.

ساقا شبه المنحرف هما $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ باستخدام قانون المسافة، يكون $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 3\sqrt{10}$ وهذا يعني أن $\overline{AB}$ ليس مطابقًا لـ $\overline{CD}$. إذًا $ABCD$ لا يمكن أن يكون شبه منحرف متساوي الساقين.

التأكيد على الممارسات الرياضية

يقدم التمرين 3 فرصة لتطبيق الممارسة م.ر 7 (**محاولة إيجاد البنية واستخدامها**)، حيث قد يدرك الطلاب أن نظرية منتصف ساقي المثلث تنتج عندما تكون إحدى القواعد في شبه المنحرف يبلغ طولها 0.

وضّح للطلاب أن برهان الإحداثي يبدأ بمجموعة من المعطيات مثل البرهان ذو عمودين. فحقيقة أن $JKLM$ متساوي الساقين أثبتتها إحداثيات الرؤوس. وبذلك فإنها تُثبت مجرد صلاحيته لأشباه لمنحرف متساوية الساقين في **التمرين 3**. إذا لم يكن $JKLM$ معروفًا على أنه متساوي الساقين، فقد كان ينبغي استخدام متغير واحد إضافي على الأقل في الإحداثيات. اطلب من الطلاب التخمين بشأن أوجه التشابه أو الاختلاف المحتملة بين هذا البرهان وبين عملهم في **التمرين 3**.


مهمة تقويم الأداء

تحديد الشكل الرباعي

قدّم حلاً مفصلاً. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

يمكنك تحديد الشكل الرباعي باستخدام النظريات التي تعلمتها

الجزء A

ارسم متوازي الأضلاع ABCD باستخدام المنقلة ومسطرة تقويم. اشرح رسمك وبرهن لماذا نتج عن الرسم متوازي أضلاع

الإجابة النموذجية:

الوحدة 11 الأشكال الرباعية

1 مهمة تقويم الأداء

تحديد الشكل الرباعي

سيستخدم الطلاب الفرجار والمسطرة لإنشاء متوازي أضلاع ويثبتون متى تضمن متطلبات معينة أن يكون الشكل متوازي أضلاع أو معيّنًا.

الممارسات الرياضية

المهارسات الرياضية:
تعزز مهمة تقويم الأداء في الوحدة 8 الممارسات الرياضية **م.ر 3** و**م.ر 5** و**م.ر 6**.

بداية سريعة

قبل أن يحاول الطلاب إنشاء متوازي أضلاع، اجعلهم يتذكروا الشروط التي بها يوصف الشكل الرباعي على أنه متوازي أضلاع.

ما الذي تريد معرفته عن الشكل الرباعي لتحديد هل هو متوازي أضلاع أم لا؟ **تتميز متوازيات الأضلاع بتطابق الضلعين المتقابلين، والزاويتين المتقابلتين، وتكامل الزاويتين المتتاليتين، وأقطار تتقطع بعضها البعض.**

هل أنت بحاجة إلى إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع قبل أن تقرر هل هو معيّن أم لا؟ اشرح. **نعم. الشكل الرباعي يجب أن يكون متوازي أضلاع قبل استخدام النظريات الإضافية لتحديد هل الشكل عبارة عن معيّن أم لا.**

التأكيد على الممارسات الرياضية

توفر مهمة تقويم الأداء تلك ارتباطًا طبيعيًا بالممارسة **م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. توضح المعايير كيف أن الطلاب المتفوقين في الرياضيات يمكنهم التواصل بدقة مع الآخرين واستخدام التعريفات استخدامًا واضحًا ودقيقًا. ومن ثم يستخدم الطلاب الفرجار والمسطرة لإنشاء متوازي أضلاع. قد يتناول كل طالب الشكل بطريقة مختلفة. ومن المحتمل أن يحاول الطلاب إنشاء الأضلاع المتقابلة حتى تكون متطابقة أو قد يحاولون إنشاء الأقطار التي تقطع بعضها. يجب أن يكون كل طالب قادرًا على تبرير الشكل الذي كوّنه من خلال برهان.

نصيحة للتدريس م.ر 3

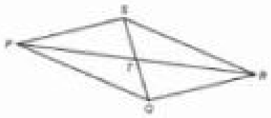
إذا واجه الطلاب صعوبات في إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو معيّن، فاطلب منهم الرجوع إلى التعريفات والرسومات في الوحدات السابقة. فاستخدام التعريفات والنتائج المثبتة مسبقًا في بناء الفرضيات عبارة عن جزء من الممارسة م.ر 3.

الجزء B

هل رسمك على شكل معيّن؟ لِمَ أو لِمَ لا؟ إن كانت الإجابة لا، فكيف يمكنك تغيير الرسم بحيث يصبح على شكل معيّن؟

الجزء C

موضح بالرسم الشكل الرباعي $PQRS$. أثبت أنه إذا كان $\triangle PTQ \cong \triangle STR$، فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.



الجزء D

باستخدام الشكل نفسه من الجزء C، أثبت أنه إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع و $\triangle PTQ \cong \triangle PTS$، فإن $PQRS$ معيّن.

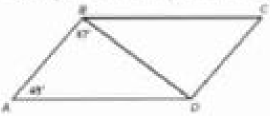
معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط القصوى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	3	انظر دليل الطالب التفاعلي الخاص بك. الإجابة النموذجية: في متوازي الأضلاع، كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابق. إذًا، استخدم الفرجار لإيجاد طول AB. ضع سنّ الفرجار عند النقطة D وارسم قوسًا. اضبط الفرجار على طول AD. ضع السنّ عند النقطة B وارسم قوسًا. تقاطع القوسان هو النقطة C. الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع لأن كلا زوجي الأضلاع المتقابلة متطابقان.
B	1	الإجابة النموذجية: إنه ليس معيّن لأن $\overline{AD}$ لا يطابق $\overline{AB}$ في الشكل الذي رسمته. يمكنني تحويل الرسم عن طريق رسم قطعتين مستقيمتين تتشاركان في نقطة طرفية واحدة، وسوف تكون في متوازي الأضلاع أربعة أضلاع متطابقة.
C	2	$PR = PT + TR$ و $QS = QT + TS$ بناءً على مسلّمة جمع القطع المستقيمة. $\overline{PT} \cong \overline{TR}$ و $\overline{TS} \cong \overline{QT}$ بناءً على مسلّمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة. وهذا يعني أن القطران يقطعان بعضهما. إذًا الشكل $PQRS$ متوازي أضلاع.
D	2	لأن $\overline{PT} \cong \overline{TS}$ و $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$ بناءً على مسلّمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة. وكذلك، $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ و $\overline{QR} \cong \overline{PS}$ لأن $PQRS$ متوازي أضلاع. إذًا $\overline{SR} \cong \overline{RQ} \cong \overline{PS} \cong \overline{PQ}$، وبالتالي، فإن $PQRS$ عبارة عن معيّن.
الإجمالي	8	

تدريب على الاختبارات المعيارية

تدريب على الاختبارات المعيارية

1. في الرسم التخطيطي أدناه ABCD متوازي أضلاع.

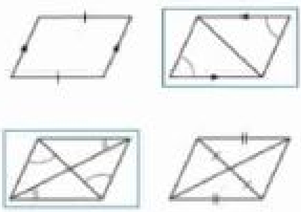


أكمل ما يلي.

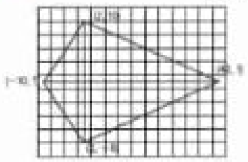
$m\angle CDA =$ 131

2. الشكل JKLM له الرؤوس $J(-4, -1)$ و $K(1, 1)$ و $L(6, 3)$. إحداثيات النقطة M هي (2-, 4).

3. حوّط الأشكال التي تعد متوازي أضلاع.

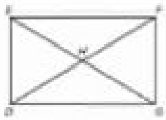


4. مساحة الطائرة الورقية الموضحة بالأسفل تبلغ 468 وحدة مربعة.



5. يكون القطران الشكل الرباعي WXYZ قطعة أربعة مثلثات متساوية الساقين متطابقة. الاسم الأكثر تحديدًا الذي يمكن أن يطلق على الشكل الرباعي WXYZ هو مربّع

6. المستطيل DEFG طوله أكبر من عرضه بمقدار 2 cm



إذا كان $FG < EF$ و $DF = 58$ cm وكان محيط $\triangle DEF$ يساوي 140 cm، فإن محيط $\triangle FHG$ يبلغ 98 cm

7. في الجدول التالي، يضم العمود الأيمن سمة من سمات الشكل الرباعي. ضع علامة على الأعمدة التي تتفق مع أنواع الأشكال الرباعية التي تتصف بتلك السمة.

	متوازي الأضلاع	المستطيل	المربع	المعين	شبه المنحرف	الطائرة الورقية
القطران متطابقان.		✔	✔			
زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة متطابق.						✔
الأضلاع المتقابلة متوازية.	✔	✔	✔	✔		
القطران متعامدان.			✔	✔		✔
يحتوي على أقل من زوجين من الأضلاع المتقابلة المتطابقة.					✔	✔
جميع الأضلاع متطابقة.			✔	✔		
جميع الزوايا قائمة.		✔	✔			
ضلعان متقابلان فقط متوازيان.					✔	

تقييم الأخطاء

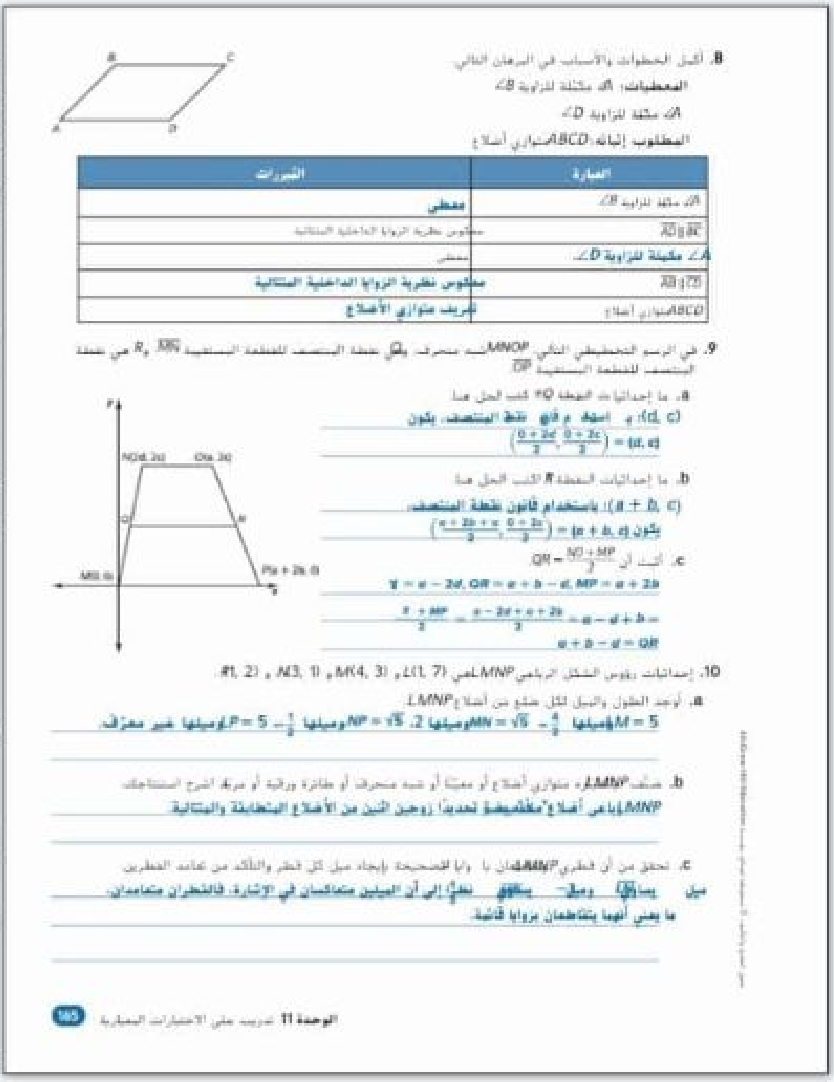
قد يعتقد الطلاب الذين يختارون الشكل الرباعي الأول في **العنصر 3** أن وجود مجموعة واحدة من الأضلاع المتقابلة المتوازية ومجموعة أخرى من الأضلاع المتقابلة المتطابقة كافٍ لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. وضّح أن شبه المنحرف متساوي الساقين له هذه الخواص.

قد يكون الطلاب الذين أعطوا الإجابة 420 على **العنصر 4** قد استخدموا الإحداثي x للرأس أقصى اليمين والإحداثي y للرأس الأعلى على أنهما طولي الأقطار بدلاً من طرح إحداثيات النقطتين الطرفيتين للأقطار لتحديد طولهما.

الطلاب الذين يتحققون من شبه المنحرف لإثبات "تطابق الأقطار" في **العنصر 7** ربما يفكرون في شبه المنحرف متساوي الساقين. ذكّرهم بأنه من أجل وضع علامة التحقق تحت اسم الشكل، فإن الخاصية يجب أن تكون صحيحة في جميع الأمثلة على ذلك الشكل.

إستراتيجية خوض الاختبار

فيما يتعلق **بالعنصر 2**، سيجد الطلاب المسألة أكثر بساطة إذا مثلوا النقاط المعطاة بيانيًا. ذكّرهم بأن المعين له أربعة أضلاع متطابقة والأضلاع المتقابلة متوازية. يمكنهم استخدام هذه الخواص وما يعرفونه عن الميل لإيجاد الرأس الناقصة.


8. أكمل الخطوات والأسباب في البرهان التالي.

المعطيات: $\angle A$ مكملة للزاوية $\angle B$

$\angle A$ مكملة للزاوية $\angle D$

المطلوب إثباته: $ABCD$ متوازي أضلاع

المبررات	العبارة
معطى	$\angle A$ مكملة للزاوية $\angle B$
معكوس نظرية الزوايا الداخلية المتتالية	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
معطى	$\angle A$ مكملة للزاوية $\angle D$
معكوس نظرية الزوايا الداخلية المتتالية	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
تعريف متوازي الأضلاع	$ABCD$ متوازي أضلاع

9. في الرسم التخطيطي التالي، $MNOP$ شبه منحرف. يمثل Q نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{MN}$، و R هي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{OP}$.

a. ما إحداثيات النقطة Q؟ اكتب الحل هنا.

(d, c)؛ باستخدام قانون نقطة المنتصف، يكون $\left(\frac{0+2d}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (d, c)$

b. ما إحداثيات النقطة R؟ اكتب الحل هنا.

$(a+b, c)$؛ باستخدام قانون نقطة المنتصف، يكون $\left(\frac{a+2b+a}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

c. أثبت أن $QR = \frac{NO+MP}{2}$.

10. إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $LMNP$ هي $L(1, 7)$، $M(4, 3)$، $N(3, 1)$، $P(1, 2)$.

a. أوجد الطول والميل لكل ضلع من أضلاع $LMNP$.

b. صنِّف $LMNP$ متوازي أضلاع أو معيناً أو شبه منحرف أو طائرة ورقية أو مربعاً. اشرح استنتاجك.

$LMNP$ رباعي أضلاع ... زوجين اثنين من الأضلاع المتطابقة والمتتالية

c. تحقق من أن قطري $LMNP$ ... بإيجاد ميل كل قطر والتأكد من تعامد القطرين.

... إلى أن الميلين متعاكسان في الإشارة، فالقطران متعامدان، ما يعني أنهما يتقاطعان بزوايا قائمة.

الوحدة 11 تدريب على الاختبارات المعيارية 165

تقييم الأخطاء

الطلاب الذين حددوا الأضلاع الخطأ على أنها متوازية في الخطوة الثانية في **العنصر 8** ربما وجدوا أنه من المفيد تمديد أضلاع متوازي الأضلاع. وسيساعدهم ذلك في تحديد أي الأضلاع التي ستكون بمثابة مستقيمات متوازية، وأيها سيكون بمثابة قاطع.

الطلاب الذين يحسبون أطوال القطع المستقيمة بطريقة غير صحيحة في **العنصر 9c** ربما لم يدركوا أنه بما أن النقطتين الطرفيتين لهما الإحداثي y ذاته، فإن القطع المستقيمة أفقية. وبالتالي يمكنهم إيجاد الطول ببساطة عن طريق طرح إحداثيات x.

العناوين

العنصر 9

[5] إحداثيات Q تساوي R بالنسبة للعمل الموضح. QR و NO و MP تم حسابها بطريقة صحيحة في **الجزء c**.

[4] خطأ صغير في أحد أعمال الأجزاء الثلاثة.

[3] إحداثيات Q و R صحيحة بالنسبة للعمل الموضح. ولكن **الجزء c** غير صحيح.

[2] إحداثيات Q و R صحيحة

[1] إحداثيات Q أو R صحيحة أو أن NO و MP تم حسابهما بطريقة صحيحة في **الجزء c**.

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والخطوات خطأ

العنصر 10

[4] جميع الإجابات صحيحة باستخدام الاستنتاج صحيح.

[3] تم حساب الميل أو طول الضلع بطريقة غير صحيحة في **الجزء a** ولكنه استُخدم بطريقة غير صحيحة في **الجزء b** أو أن الاستنتاج غير صحيح في **الجزء b**.

[2] جزء واحد غير صحيح

[1] يوجد مُركَّب واحد صحيح على الأقل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة خطأ

إستراتيجية خوض الاختبار

فيما يتعلق **بالعنصر 9**، ينبغي للطلاب كتابة قانون نقطة المنتصف في الهامش ليساعدهم في التركيز على المسألة. إذا نسوا القانون بالضبط، فذكرهم بأن نقطة المنتصف هي متوسط الإحداثي x والإحداثي y للنقطتين الطرفيتين. وساعدهم على اشتقاق القانون.