الوحدة 13 المثلثات المتطابقة

السابق

تعرفت على القطع والزوايا واكتشفت العلاقات بين قياساتها.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تطبيق علاقات خاصة بين الزوايا الداخلية والخارجية للمثلثات.
- تحديد الأجزاء المقابلة للمثلثات المتطابقة وإثبات تطابق المثلثات.
- التعرّف على الخواص الخاصة للمثلثات متساوية الساقين والمثلثات متساوية الأضلاع

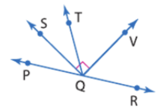
لماذا؟ ▲

اللياقة تُستخدم المثلثات لإضافة قوة إلى الكثير من التركيبات، بما في ذلك معدات اللياقة مثل هياكل الدراجات.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها *قائمة، أو حادة، أو منفرجة.*



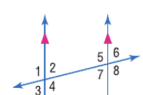
.1 $m\angle VQS$

حادة $m\angle TQV$

.3 $m\angle PQV$

.4 أوريغامي يتضمن فن طي الأوريغامي طي قطعة ورقية بحيث تشكل الحافة السفلية للقطعة زاوية قائمة مع نفسها. ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها قائمة أو حادة أو منفرجة.

الجبر استخدم الشكل لإيجاد المتغير المتغيرات المشار إليه. اشرح تبريرك.



.5 جـــد قيمة x إذا كانت $m\angle 3 = x - 12$ و $m\angle 6 = 72$.

.6 إذا كانت $m\angle 4 = 2y + 32$ و $m\angle 5 = 3y - 3$، فجـــد قيمة y.

جـــد المسافة بين كل زوجين من النقاط.

7. $F(3, 6)$, $G(7, -4)$

8. $X(-2, 5)$, $Y(1, 11)$

9. $R(8, 0)$, $S(-9, 6)$

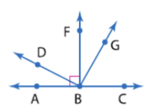
10. $A(14, -3)$, $B(9, -9)$

.11 الخرائط وضعت إيمان شبكة إحداثية على خريطة إمارة بحيث تمثل كل وحدة 10 km. إذا علمت أن مدينتها تقع عند $(-8, -12)$ وعاصمة الإمارة تقع عند $(0, 0)$. فجـــد المسافة من مدينتها لعاصمة الإمارة مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.

مراجعة سريعة

مثال 1

ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها مستقيمة، أو حادة، أو منفرجة.



.a $m\angle ABG$

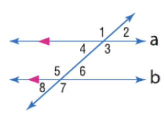
تقع النقطة G في الزاوية $\angle ABG$ على الزاوية القائمة $\angle ABF$ من الخارج؛ ولذلك فإن $\angle ABG$ هي زاوية منفرجة.

.b $m\angle DBA$

تقع النقطة D في الزاوية $\angle DBA$ على الزاوية القائمة $\angle FBA$ من الداخل؛ ولذلك فإن $\angle DBA$ هي زاوية حادة.

مثال 2

في الشكل، $m\angle 4 = 42$. جـــد $m\angle 7$.



$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان داخليتان متبادلتان. إذًا هما متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ زوج خطي. إذًا هما متكاملتان. إذًا، $\angle 7$ تكمل $\angle 1$. قياس $\angle 7$ هو $180 - 42$ أو 138.

مثال 3

جـــد المسافة بين $J(5, 2)$ و $K(11, -7)$.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$ عوّض.

$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$ اطرح.

$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ بسّط.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 13. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

المثلثات المتطابقة شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 13 عن المثلثات المتطابقة. وابدأ بورقة قياسها 21 cm × 27.5 cm.

1 **قم** بطيها على شكل مثلث قاعدته مربعة. ثم اقطع قطعة الورق الزائدة التي تكونت من المربع.

2 **افتح** الطي وأعد طيه في الاتجاه المقابل لتشكيل مثلث آخر ونمط الطي X.

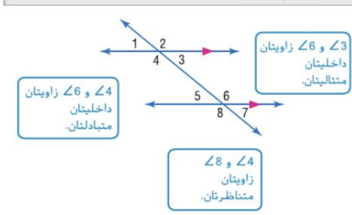
3 **افتح** الأركان وقم بطيها نحو النقطة المركزية في الشكل X لتشكيل مربع صغير.

4 **اكتب** على الأطرف كما هو موضح.

المفردات الجديدة

مثلث متساوي الزوايا	equiangular triangle
مثلث متساوي الأضلاع	equilateral triangle
مثلث متساوي الساقين	isosceles triangle
مثلث مختلف الأضلاع	scalene triangle
خط مساعد	auxiliary line
تطابق	congruent
مضلعات متطابقة	congruent polygons
أجزاء متناظرة	corresponding parts
زاوية محصورة	included angle
ضلع محصور	included side
زاوية قاعدية	base angle
التحويل	transformation
الصورة الأصلية	preimage
الصورة	image
الانعكاس	reflection
إزاحة	translation
الدوران	rotation

مراجعة المفردات



الدرس 13-1 تصنيف المثلثات

.. السابق
- لقد قست الزوايا وصنفتها.

.. الحالي
1. تحديد المثلثات وتصنيفها حسب قياس الزوايا.
2. تحديد المثلثات وتصنيفها حسب قياس الأضلاع.

.. لماذا؟
- تم تصميم أبراج البث اللاسلكي لتدعم الهوائيات لبث إشارات المذياع أو التلفاز. يكشف هيكل البرج المعروض عن نمط للدعامات المثلثة.

المفردات الجديدة

مثلث حاد
acute triangle
مثلث متساوي الزوايا
equiangular triangle
مثلث منفرج الزاوية
obtuse triangle
مثلث قائم الزاوية
right triangle
مثلث متساوي الأضلاع
equilateral triangle
مثلث متساوي الساقين
isosceles triangle
مثلث مختلف الأضلاع
scalene triangle

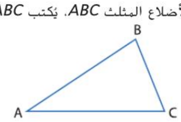
تصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات والطرق (الفرجار والمسطرة والخيط والأدوات العاكسة والورق القابل للطي وبرنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

التفكير بطريقة تجريدية وكمّية.

مراعاة الدقة.

1 تصنيف المثلثات حسب الزوايا

تذكّر أن المثلث شكل ثلاثي الأضلاع المثلث ABC. يُكتب $\triangle ABC$، له أجزاء مسماة باستخدام الأحرف A و B و C.



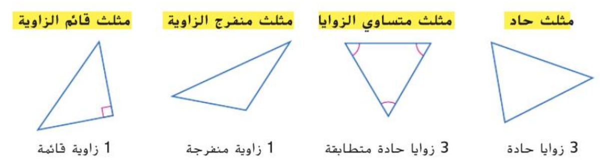
أضلاع $\triangle ABC$ هي $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$.

الرؤوس هي النقاط A و B و C.

الزوايا هي $\angle BAC$ أو $\angle A$ و $\angle ABC$ أو $\angle B$ و $\angle BCA$ أو $\angle C$.

يمكن تصنيف المثلثات بطريقتين – حسب زواياها أو حسب أضلاعها. تحتوي كل المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، لكن الزاوية الثالثة تُستخدم في تصنيف المثلث.

المفهوم الأساسي تصنيفات المثلثات حسب الزوايا



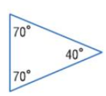
المثلث متساوي الزوايا هو نوع خاص من المثلث حاد الزاوية.

عند تصنيف المثلثات، كن دقيقًا قدر الإمكان. فبينما المثلث الذي يضم ثلاث زوايا حادة متطابقة يُعتبر مثلثًا حاد الزاوية، من الأدق تصنيفه على أنه مثلث متساوي الزوايا.

مثال 1 تصنيف المثلثات حسب الزوايا

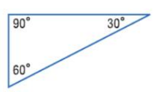
ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

a.



يحتوي المثلث على ثلاث زوايا حادة غير متساوية.

b.



يبلغ قياس إحدى زوايا المثلث 90، ولذلك فهي زاوية قائمة. بما أن المثلث يحتوي على زاوية قائمة، فهو مثلث قائم الزاوية.

مراجعة المفردات

الزاوية الحادة زاوية بقياس درجة أقل من 90

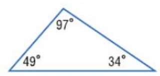
الزاوية القائمة زاوية بقياس درجة يبلغ 90

الزاوية المنفرجة زاوية بقياس درجة أكبر من 90

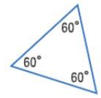
تمرين موجّه

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

1A.

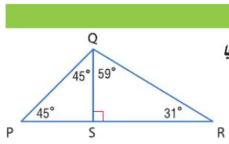


1B.



مثال 2 تصنيف المثلثات حسب الزوايا داخل الأشكال

ضع تصنيفًا للمثلث $\triangle PQR$ باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. اشرح تبريرك.



النقطة S تقع في الزاوية الداخلية لـ $\angle PQR$. إذا حسب مسلّمة جمع الزوايا، $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$. بالتعويض، $m\angle PQR = 45 + 59$ أو 104.

بما أن $\triangle PQR$ يحتوي على زاوية منفرجة، فهو مثلث منفرج.

تمرين موجّه

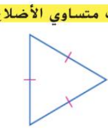
2. استخدم الرسم التخطيطي لتصنيف $\triangle PQS$ باعتباره حاد الزاوية، أو متساوي الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية. اشرح تبريرك.

2 تصنيف المثلثات حسب الأضلاع

يمكن أيضًا تصنيف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها. لتوضيح أن أضلاع المثلث متطابقة، يتم رسم عدد متساوٍ من علامات التجزئة على الأضلاع المتناظرة.

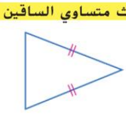
المفهوم الأساسي تصنيفات المثلثات حسب الأضلاع

مثلث متساوي الأضلاع



الأضلاع الثلاثة متطابقة

مثلث متساوي الساقين



ضلعان متطابقان على الأقل

مثلث مختلف الأضلاع

لا توجد أضلاع متطابقة

المثلث متساوي الأضلاع نوع خاص من المثلث متساوي الساقين.

مثال 3 من الحياة اليومية تصنيف المثلثات حسب الأضلاع

الموسيقى ***ضع تصنيفًا لصندوق أصوات العزف الروسي أدناه باعتباره متساوي الأضلاع أو متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع.***

ضلعان لهما القياس نفسه وهو 40 cm. إذًا، المثلث له ضلعان متطابقان. المثلث متساوي الساقين.

تمرين موجّه

3. **سلامة القيادة** ضع تصنيفًا للزر في الصورة على اليمين حسب أضلاعه.

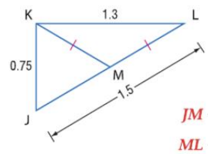
الربط بالحياة اليومية

في الكثير من السيارات، تعمل مصابيح الخطر بالضغط على زر صغير يوجد بالقرب من عمود القيادة. يتخذ المفتاح في العادة شكلاً مألوفًا يشبه المثلث متساوي الأضلاع.

المصدر: جنرال موتورز

مثال 4 تصنيف المثلثات حسب الأضلاع داخل الأشكال

إذا كانت النقطة M هي نقطة المنتصف في $\overline{JL}$، فضع تصنيفًا للمثلث $\triangle JKM$ باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع. اشرح تبريرك.



حسب تعريف نقطة المنتصف، $JM = ML$.

مُسلّمة جمع القطع المستقيمة	$JM + ML = JL$
تعويض	$ML + ML = 1.5$
بسّط.	$2ML = 1.5$
اقسم الطرفين على 2.	$ML = 0.75$

$JM = ML$ أو 0.75. بما أن $KM = ML$، و $\overline{KM} \cong \overline{ML}$ أو 0.75.

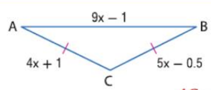
بما أن $KJ = JM = KM = 0.75$ يضم المثلث ثلاثة أضلاع بالقياس نفسه. ولهذا، يضم المثلث ثلاثة أضلاع متطابقة، ولهذا فهو متساوي الأضلاع.

تمرين موجّه

4. صنّف $\triangle KML$ باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع. اشرح تبريرك.

يمكنك أيضًا استخدام خواص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع لإيجاد القيم المفقودة.

مثال 5 إيجاد القيم المفقودة



الجبر جـــد قياسات أضلاع المثلث متساوي الساقين ABC

الخطوة 1 جـــد قيمة x.

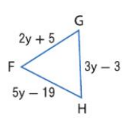
معطى	$AC = CB$
التعويض	$4x + 1 = 5x - 0.5$
اطرح $4x$ من كل ضلع.	$1 = x - 0.5$
بجمع 0.5 إلى كل طرف.	$1.5 = x$

الخطوة 2 قم بالتعويض لإيجاد طول كل ضلع.

معطى	$AC = 4x + 1$
$x = 1.5$	$= 4(1.5) + 1 = 7$
معطى	$CB = AC$
$AC = 7$	$= 7$
معطى	$AB = 9x - 1$
$x = 1.5$	$= 9(1.5) - 1$
بسّط.	$= 12.5$

تمرين موجّه

5. جـــد قياس أضلاع المثلث متساوي الأضلاع FGH.

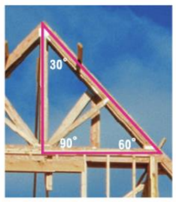


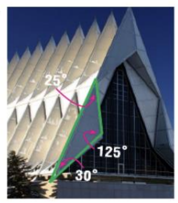
نصيحة دراسية

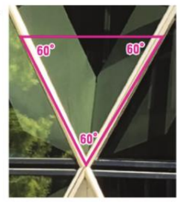
المثابرة في المثال 5. للتحقق من إجابتك، قم بإجراء اختبار لترى ما إذا كان $CB = AC$ عند وضع 1.5 مكان x في التعبير $CB = 5x - 0.5$. $CB = 5x - 0.5$
$= 5(1.5) - 0.5 = 7$ ✓

التحقق من فهمك

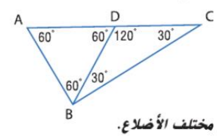
مثال 1 **الهندسة المعمارية** ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

1.


2.


3.


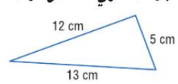
مثال 2 ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أوقائم الزاوية . اشرح تبريرك.



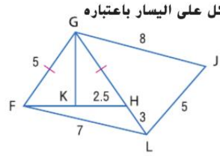
4. $\triangle ABD$
5. $\triangle BDC$
6. $\triangle ABC$

مثال 3 **الدقة** ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.

7.

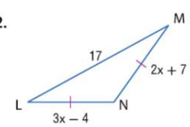

8.


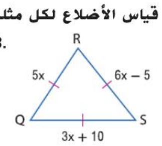
مثال 4 إذا كانت النقطة K هي نقطة المنتصف في $\overline{FH}$، فضع تصنيفًا لكل مثلث في الشكل على اليسار باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.



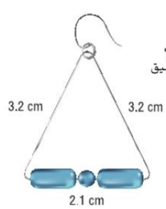
9. $\triangle FGH$
10. $\triangle GJL$
11. $\triangle FHL$

مثال 5 **الجبر** جـــد قيمة x المجهولة في قياس الأضلاع لكل مثلث.

12.


13.


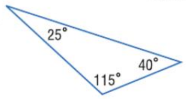
14. **مجوهرات** افترض أنك تطوي سلكًا من الصلب الذي لا يصدأ لعمل القرط المعروض. الجزء المثلث من القرط عبارة عن مثلث متساوي الساقين. إذا كان مطلوبًا 1.5 cm لعمل جزء تعليق القرط. فكم عدد الأقراط التي يمكن عملها من 45 cm من السلك؟ اشرح تبريرك.



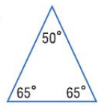
التمرين وحل المسائل

مثال 1 ***ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.***

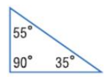
15.



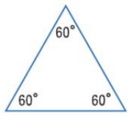
16.



17.

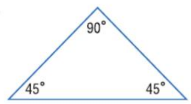


18.

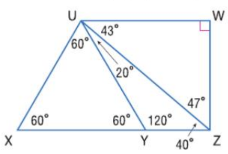


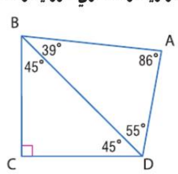
19.

20.



مثال 2 **الدقة** ***ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.***





.21 $\triangle UYZ$

.22 $\triangle BCD$

.23 $\triangle ADB$

.24 $\triangle UXZ$

.25 $\triangle UWZ$

.26 $\triangle UXY$

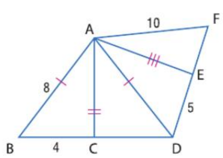
مثال 3 ***ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.***

27.

28.

29.

مثال 4 **إذا كانت النقطة C هي نقطة الوسط في $\overline{BD}$ والنقطة E هي نقطة الوسط في $\overline{DF}$، فضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.**



.30 $\triangle ABC$

.31 $\triangle AEF$

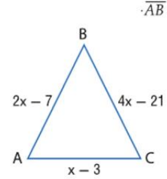
.32 $\triangle ADF$

.33 $\triangle ACD$

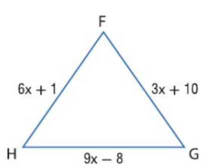
.34 $\triangle AED$

.35 $\triangle ABD$

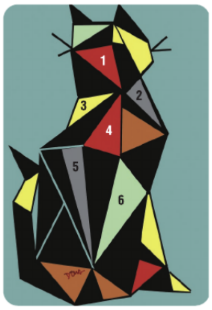
مثال 5 .36 **الجبر** جـــد قيمة x وطول كل ضلع إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



37 **الجبر** جـــد قيمة x وطول كل ضلع إذا كان $\triangle FGH$ متساوي الأضلاع.



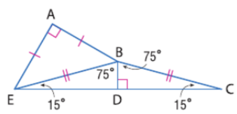
38. **فن الرسم** راجع الرسم المعروض. صنّف كل مثلث مرقّم في شكل الطائرة الورقية *Kat* حسب زواياه وأضلاعه. استخدم ركن صفحة الدفتر لتصنيف قياس الزاوية واستخدم مسطرة لقياس الأضلاع.



Kat, 2002, by Diana Ong, computer graphic

39 **كليدوسكوب** يبني إبراهيم كليدوسكوبًا مختلف الألوان باستخدام أنبوب بلاستيكي وورق مقوى وقطع من الورق الملون وبلاطة عاكسة $30\ cm^2$. سيتم تقطيع البلاطة المربعة إلى شرائح وترتيبها لتشكيل منشور مفتوح بقاعدة تشبه قاعدة مثلث متساوي الأضلاع. اصنع رسمًا للمنشور مع تحديد أبعاده. اشرح تبريرك.

الدقة **ضع تصنيفًا لكل مثلث في الشكل حسب زواياه وأضلاعه.**



40. $\triangle ABE$

41. $\triangle EBC$

42. $\triangle BDC$

هندسة الإحداثيات **جـــد قياس أضلاع $\triangle XYZ$ وضع تصنيفًا لكل مثلث حسب أضلاعه.**

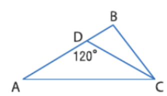
43. $X(-5, 9),\ Y(2, 1),\ Z(-8, 3)$

44. $X(7, 6),\ Y(5, 1),\ Z(9, 1)$

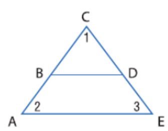
45. $X(3, -2),\ Y(1, -4),\ Z(3, -4)$

46. $X(-4, -2),\ Y(-3, 7),\ Z(4, -2)$

47. **البرهان** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $\triangle DBC$ حاد الزاوية إذا كان $m\angle ADC = 120$ و $\triangle ABC$ حاد الزاوية



48. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن *BCD* متساوي الزوايا إذا كان *ACE* متساوي الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



الجبر **لكل مثلث، جـــد x وقياس كل ضلع.**

49. $\triangle FGH$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $FG = 3x - 10$ و $GH = 2x + 5$ و $HF = x + 20$.

50. $\triangle JKL$ مثلث متساوي الساقين حيث $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ و $JK = 4x - 1$ و $KL = 2x + 5$ و $LJ = 2x - 1$.

51. $\triangle MNP$ مثلث متساوي الساقين حيث $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ أقل باثنين من خمسة مضروبة في x و NP أكثر بسبعة من اثنين مضروبة في x و PM أكثر باثنين من ثلاثة مضروبة في x.

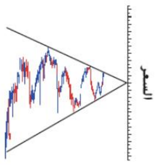
52. $\triangle RST$ مثلث متساوي الأضلاع. RS أكثر بثلاثة من أربعة مضروبة في x و ST أكثر بسبعة من اثنين مضروبة في x و TR أكثر بواحد من خمسة مضروبة في x.

53. **الإنشاء** قم بإنشاء مثلث متساوي الأضلاع. تحقق من إنشائك باستخدام القياس وعلله باستخدام الرياضيات. (تلميح: استخدم الإنشاء في نسخ قطعة مستقيمة).

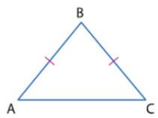
54. **الأسهم** يستخدم المحللون الفنيون مخططات بيانية لتحديد الأنماط التي يمكن أن تشير إلى نشاط مستقبلي في أسعار الأسهم. تحقق مخططات المثلثات المتناظرة الفائدة الأكبر عندما يقل التقلب في سعر سهم مع الوقت.

a. ضع تصنيفًا حسب الأضلاع والزوايا للمثلث الذي يتشكل إذا تم رسم خط رأسي عند أية نقطة على التمثيل البياني. مثلث

b. كيف يجب أن يتقلب السعر لكي تشكل البيانات مثلثًا منفرج الزاوية؟ ارسم مثالاً لدعم تبريرك.



55. **التمثيلات** المتعددة في الرسم التخطيطي، الرأس *المقابلة* للضلع $\overline{BC}$ هي $\angle A$. .



a. **هندسيًا** ارسم أربعة مثلثات متساوية الساقين، بما فيها مثلث حاد الزاوية ومثلث قائم الزاوية ومثلث منفرج الزاوية. واكتب على الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين الحرفين A و C. وميّز الرأس المتبقية بالحرف B. ثم قس زوايا كل مثلث واكتب كل زاوية مع قياسها.

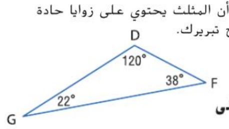
b. **جدوليًا** قس جميع زوايا كل مثلث. ضع القياسات بالترتيب لكل مثلث في جدول. وأضف عمودًا إلى جدولك لتسجيل مجموع هذه القياسات.

c. **لفظيًا** ضع تخمينًا لقياسات الزوايا المقابلة للأضلاع المتطابقة لمثلث متساوي الساقين. ثم ضع تخمينًا لمجموع قياسات الزوايا لمثلث متساوي الساقين.

d. **جبريًا** إذا كانت x هي قياس إحدى الزوايا المقابلة لأحد الأضلاع المتطابقة في مثلث متساوي الساقين، فاكتب تعابير لقياسات كل من الزاويتين الأخريين في المثلث. اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

56. **تحليل الخطأ** تقول أسماء إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية. تختلف معها أماني، وتشرح أن المثلث يحتوي على زوايا حادة أكثر من الزوايا المنفرجة. فلا بد أنه حاد الزاوية. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.



الدقة حدد ما إذا كانت العبارات أدناه صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك.

57. المثلثات متساوية الزوايا تُعتبر أيضًا مثلثات قائمة الزاوية.

58. المثلثات متساوية الأضلاع تُعتبر متساوية الساقين.

59. المثلثات قائمة الزاوية تُعتبر متساوية الأضلاع.

60. **تحدٍ** إذا كان قياس أضلاع مثلث متساوي الأضلاع $5x + 3$ وحدات و $7x - 5$ وحدات. فما محيط المثلث؟ اشرح.

مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثالاً لكل نوع من المثلثات أدناه باستخدام منقلة ومسطرة. اكتب قياس أضلاع وزوايا كل مثلث. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

61. مختلف الأضلاع قائم الزاوية
62. متساوي الساقين منفرج الزاوية
63. متساوي الأضلاع منفرج الزاوية

64. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن تصنيف مثلث متساوي الزوايا باعتباره مثلثًا حادًا متساوي الزوايا غير ضروري.

تدريب على الاختبارات المعيارية

.65 ما نوع المثلث الذي يمكن أن يقدم مثالاً مضادًا على الفرضية أدناه؟

> إذا كانت زاويتا مثلث حادتين، فإن قياس الزاوية الثالثة يجب أن يكون أكبر من 90 أو يساويها.

A متساوي الأضلاع
B منفرج الزاوية
C قائم الزاوية
D مختلف الأضلاع

.66 الجبر يتكلف قفاز كرة البيسبول في الأصل AED 84.50. اشتراه إسماعيل بخصم 40%. فكم كان مقدار الخصم من السعر الأصلي؟

F AED 50.70
G AED 44.50
H AED 33.80
J AED 32.62

.67 الإجابة الشبكية يتدرب أسامة لخوض سباق 20 km. ويركض 7 km أيام الاثنين والثلاثاء والجمعة، و 12 km يومي الأربعاء والسبت. بعد 6 أسابيع من التدريب، كم عدد السباقات التي تساوي ما يفترض أن يكون أسامة قد ركضه حينها؟

.68 SAT/ACT ما ميل المستقيم الذي تحدده المعادلة $2x + y = 5$؟

A $-\frac{5}{2}$
B -2
C -1
D 2
E $\frac{5}{2}$

مراجعة شاملة

جـــد المسافة بين كل زوج من الخطوط المتوازية بمراعاة المعادلات المعطاة.

69. $x = -2$, $x = 5$

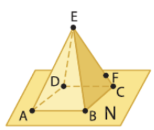
70. $y = -6$, $y = 1$

71. $y = 2x + 3$, $y = 2x - 7$

72. $y = x + 2$, $y = x - 4$

.73 كرة القدم عند تخطيط ملعب التدريب على كرة القدم، رسم السيد أيمن الخطوط الجانبية أولاً. ثم وضع علامات لزيادات بمقدار 10 أمتار على أحد خطوط الجانب. ثم وضع خطوطًا عمودية على الخطوط الجانبية عند كل علامة على مسافة 10 m. لماذا يضمن هذا توازي خطوط الـــ 10 m؟

راجع الشكل الموجود على اليسار.



.74 كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟

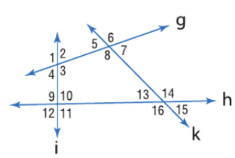
.75 اذكر اسم تقاطع المستوى AEB مع المستوى N.

.76 عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

77 هل النقاط D، و E، و C، و B على مستوى واحد؟

مراجعة المهارات

حدد كل زوج من الزوايا باعتباره زوايا داخلية متبادلة، أو زوايا خارجية متبادلة، أو زوايا متناظرة، أو زوايا داخلية متتالية.



78. $\angle 5$ و $\angle 3$

79. $\angle 9$ و $\angle 4$

80. $\angle 11$ و $\angle 13$

81. $\angle 1$ و $\angle 11$

استكشاف 13-2

مختبر الهندسة
زوايا المثلثات

في هذا النشاط المعملي، ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلثات.

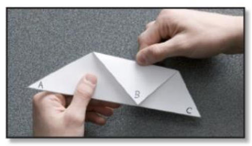
قم بتصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات والطرق (الفرجار والمسطرة والخيط والأدوات العاكسة والورق القابل للطي وبرنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

النشاط 1 الزوايا الداخلية لمثلث

الخطوة 1

ارسم عدة مثلثات مختلفة وقصها. واكتب على الرؤوس A و B و C.

الخطوة 2



مع كل مثلث، قم بطي الرأس B لأسفل بحيث يتوازى خط الطي مع $\overline{AC}$. أعد تسمية الرأس باسم B.

الخطوة 3

ثم قم بطي الرأسين A و C بحيث يقابلان الرأس B. أعد تسمية الرأسين باسم A و C.

تحليل النتائج

1. الزوايا A و B و C تُسمى الزوايا الداخلية للمثلث ABC. ما نوع الشكل التي تشكله هذه الزوايا عند ضمها معًا في الخطوة 3؟

2. **التخمين** مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمثلث.

النشاط 2 الزوايا الخارجية لمثلث

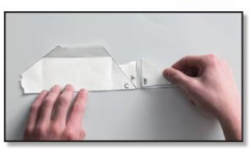
الخطوة 1

افتح كل مثلث ناتج عن النشاط 1 وضع كلاً منها على قطعة ورق منفصلة. وقم بمد $\overline{AC}$ كما هو موضح.

الخطوة 2

من كل مثلث، اقطع الزاويتين $\angle A$ و $\angle B$.

الخطوة 3



قم بترتيب $\angle A$ و $\angle B$ بحيث تملآن الزاوية المجاورة للزاوية $\angle C$ كما هو موضح.

تمثيل النتائج وتحليلها

3. الزاوية المجاورة لــ $\angle C$ تُسمى زاوية خارجية للمثلث ABC. **خمّن** العلاقة بين $\angle A$ و $\angle B$ والزاوية الخارجية عند C.

4. كرر الخطوات في النشاط 2 مع الزاويتين الخارجيتين $\angle A$ و $\angle B$ في كل مثلث.

5. **قم بتخمين** قياس زاوية خارجية ومجموع قياس الزوايا الداخلية غير المجاورة لها.

الدرس 13-2 زوايا المثلثات

السابق

- لقد صنفت المثلثات حسب أطوال أضلاعها أو قياس زواياها.

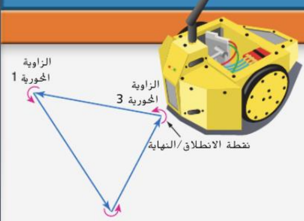
الحالي

1. تطبيق نظرية مجموع زوايا المثلث.
2. تطبيق نظرية الزاوية الخارجية.

لماذا؟

- يرعى معهد ماساتشوستس للتقنية (MIT) المسابقة السنوية *للتصميم 2.007* التي يصمم فيها الطلاب إنسانًا آليًا ويصنعونه.

من بين اختبارات حركات الإنسان الآلي برمجته على التحرك في مسار مثلث. سيظل مجموع قياس الزوايا المحورية التي يجب أن يدور الإنسان الآلي عبرها ثابتًا دائمًا.



المفردات الجديدة

خط مساعد
auxiliary line
زاوية خارجية
exterior angle
زوايا داخلية غير مجاورة
remote interior angles
البرهان التسلسلي
flow proof
نتيجة
corollary

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

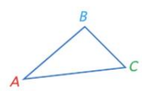
1 نظرية مجموع زوايا المثلث

تحدد نظرية مجموع زوايا المثلث العلاقة بين قياس الزوايا الداخلية في أي مثلث.

النظرية 13.1 نظرية مجموع زوايا المثلث

الشرح يبلغ مجموع قياس زوايا المثلث 180.

مثال $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

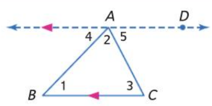


تتطلب برهنة نظرية مجموع زوايا المثلث استخدام خط مساعد. **الخط المساعد** خط إضافي أو قطعة إضافية مرسومة في شكل للمساعدة في تحليل العلاقات الهندسية. كما يحدث مع أي عبارة في برهان، يجب عليك أن تعلل أي خواص لخط مساعد رسمته.

البرهان نظرية مجموع زوايا المثلث

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$



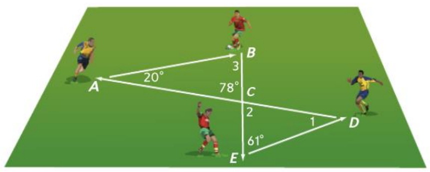
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\triangle ABC$	1. المعطيات
2. ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ عبر A بحيث يكون موازيًا لـ $\overline{BC}$.	2. مسلمة التوازي
3. $\angle 4$ و $\angle BAD$ تشكلان زاوية مستقيمة.	3. تعريف الزاوية المستقيمة
4. $\angle 4$ و $\angle BAD$ متكاملتان.	4. إذا كان 2 ∡ تشكلان زاوية مستقيمة، فهما متكاملتان.
5. $m\angle 4 + m\angle BAD = 180$	5. تعريف نظرية التكامل ∡
6. $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	6. مسلّمة جمع الزوايا
7. $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180$	7. التعويض
8. $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$	8. نظرية ∡ الداخلية المتبادلة
9. $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	9. تعريف ∡ ≅
10. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	10. التعويض

يمكن استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لتحديد قياس الزاوية الثالثة لمثلث عند معرفة قياسي الزاويتين الأخريين.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة القدم **يوضح الرسم التخطيطي مسار الكرة في تدريبٍ على التمرير لأربعة أصدقاء. جـــد قياس كل زاوية مرقّمة.**



الفهم افحص المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي. أنت تعرف قياسي زاويتين في مثلث واحد وقياس زاوية واحدة فقط في مثلث آخر. أنت تعرف أيضًا أن $\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان.

التخطيط جـــد $m\angle 3$ باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لأن قياسي زاويتي $\angle ABC$ معلوم. استخدم نظرية الزوايا الرأسية لإيجاد $m\angle 2$. ثم ستكون لديك معلومات كافية لإيجاد قياس $\angle 1$ في $\triangle CDE$.

الحل

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 3 + 20 + 78 = 180$	تعويض
$m\angle 3 + 98 = 180$	بسّط.
$m\angle 3 = 82$	اطرح 98 من كل طرف.

$\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان متطابقتان. إذًا، $m\angle 2 = 78$.

استخدم $m\angle 2$ و $\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد قيمة $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 1 + 78 + 61 = 180$	تعويض
$m\angle 1 + 139 = 180$	بسّط.
$m\angle 1 = 41$	اطرح 139 من كل طرف.

التحقق ينبغي أن يبلغ مجموع قياس زوايا $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ 180.

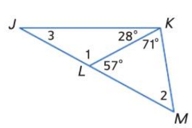
$\triangle ABC$: $m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82 + 20 + 78 = 180$ ✓

$\triangle CDE$: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41 + 78 + 61 = 180$ ✓

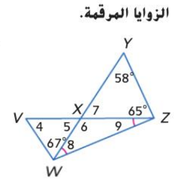
تمرين موجّه

جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

1A.



1B.



الربط بالحياة اليومية

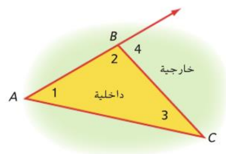
يتضمن تدريب التمرير والتحرك في كرة القدم عدة جوانب أساسية للتمرير. تأخذ كل التمريرات في هذا التدريب شكل مثلث، وهو أساس كل حركات الكرة. كما أن اللاعبين ملزمون بالتحرك بمجرد تمرير الكرة.

نصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي غالبًا ما يمكن حل المسألة المعقدة بسهولة أكبر إذا حللتها أولاً إلى أجزاء أسهل في التعامل معها. في المثال 1، قبل أن تتمكن من إيجاد قيمة $m\angle 1$، يجب أولاً أن تجد قيمة $m\angle 2$.

2 نظرية الزوايا الخارجية

نظرية الزوايا الخارجية بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث في المثلث، يمكن أن تتشكل **زاوية خارجية** من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع المجاور. يوجد لكل زاوية خارجية في المثلث **زاويتان داخليتان غير مجاورتين**، أي أنهما لا تجاوران الزاوية الخارجية.

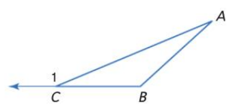


$\angle 4$ هي زاوية خارجية للمثلث $\triangle ABC$. وزاويتاها الداخليتان غير المجاورتين هما $\angle 1$ و $\angle 3$.

النظرية 13.2 نظرية الزوايا الخارجية

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

مثال $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



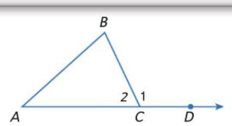
قراءة في الرياضيات
برهان المخطط التسلسلي يُسمى البرهان التسلسلي أحيانًا ببرهان *المخطط التسلسلي*.

يستخدم **البرهان التسلسلي** عبارات مكتوبة بمربعات وأسهم لإظهار التسلسل المنطقي للفرضية. السبب المبرر لكل عبارة مكتوب تحت المربع. يمكنك استخدام البرهان التسلسلي في إثبات نظرية الزوايا الخارجية.

البرهان نظرية الزوايا الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



نصيحة دراسية
البراهين التسلسلية يمكن كتابة البراهين التسلسلية رأسيًا أو أفقيًا.

البرهان التسلسلي:

$\triangle ABC$
المعطيات

$\angle 2$ و $\angle 1$ تشكلان زوجًا خطيًا.
تعريف الزوج الخطي

$\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متكاملتان.
إذا شكّلت $\angle 2$ و $\angle 1$ زوجًا خطيًا، فإنهما متكاملتان.

$m\angle 2 + m\angle 1 = 180$
تحديد الزوايا المتكاملة

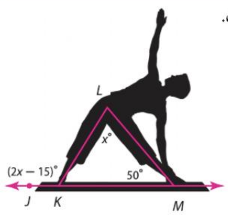
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 1$
التعويض

$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
خاصية الطرح في المعادلة

يمكن أيضًا استخدام نظرية الزوايا الخارجية في إيجاد القياسات الناقصة.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزوايا الخارجية

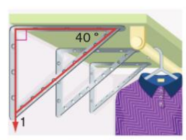


اللياقة جـــد قياس $\angle JKL$ في الوضعية المعروضة التي على شكل مثلث.

نظرية الزوايا الخارجية	$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$
تعويض	$x + 50 = 2x - 15$
بطرح x من كل طرف.	$50 = x - 15$
بجمع 15 إلى كل طرف.	$65 = x$

إذًا، $m\angle JKL = 2(65) - 15$ أو 115.

تمرين موجّه



2. **ترتيب الخزانة** تثبت بثينة ذراع الرف الظاهر في جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$، وهي الزاوية التي يشكلها الذراع مع الجدار؟

مهنة من الحياة اليومية

المدرب الشخصي يعمل المدربون الشخصيون على توجيه الأفراد وتحفيزهم في نشاطات التمارين. يشرحون عدة تمارين ويساعدون العملاء على تحسين أساليب التدريب لديهم. ويجب أن يحصل المدربون الشخصيون على اعتماد في مجال اللياقة.

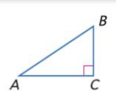
النتيجة نظرية لها برهان تأتي كنتيجة مباشرة لنظرية أخرى. كما هو الحال مع النظرية، يمكن استخدام النتيجة كسبب في برهان. تنتج اللوازم أدناه بشكل مباشر عن نظرية مجموع زوايا المثلث.

اللوازم نتائج مجموعة زوايا المثلث

13.1 الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية هما زاويتان متممتان.

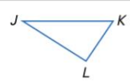
الاختصار: $\measuredangle$ الحادة في $\triangle$ قائم متممة.

مثال: إذا كانت $\angle C$ زاوية قائمة، فإن $\angle A$ و $\angle B$ متممتان.



13.2 يمكن أن توجد زاوية واحدة قائمة أو منفرجة بحد أقصى في المثلث.

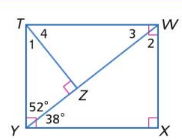
مثال: إذا كانت $\angle L$ زاوية قائمة أو منفرجة، فإن $\angle J$ و $\angle K$ يجب أن تكونا زاويتين حادتين.



ستبرهن النتيجتين 13.1 و 13.2 في التمرينين 34 و 35.

مثال 3 إيجاد قياس الزوايا في المثلثات قائمة الزاوية

جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.



$\measuredangle$ الزوايا الحادة في $\triangle$ القائم متممة.	$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90$
التعويض	$m\angle 1 + 52 = 90$
اطرح 52 من كل طرف.	$m\angle 1 = 38$

تمرين موجّه

3A. $\angle 2$ **3B.** $\angle 3$ **3C.** $\angle 4$

نصيحة دراسية

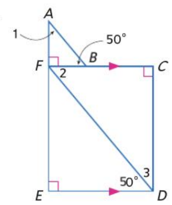
التحقق من مدى صحة الحل عندما تعمل على إيجاد قياس زاوية أو أكثر في مثلث، تحقق دائمًا للتأكد من أن مجموع قياسات الزوايا يبلغ 180.

التحقق من فهمك

مثال 1 جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

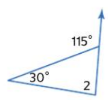
1.

2.

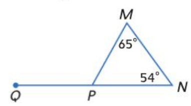


مثال 2 جـــد قياس كل مما يلي.

3. $m\angle 2$



4. $m\angle MPQ$



المقعد تشكل دعامة مقعد الاسترخاء هذا مثلثًا مع بقية هيكل المقعد كما هو ظاهر. إذا علمتَ أن $m\angle 1 = 105$ و $m\angle 3 = 48$، فجـــد كل قياس.

5. $m\angle 4$ **6.** $m\angle 6$

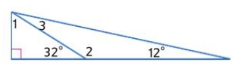
7. $m\angle 2$ **8.** $m\angle 5$

مثال 3 **الانتظام** جـــد قياس كل مما يلي.

9. $m\angle 1$

10. $m\angle 3$

11. $m\angle 2$



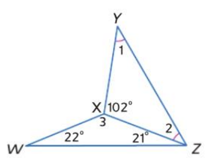
التمرين وحل المسائل

مثال 1 جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

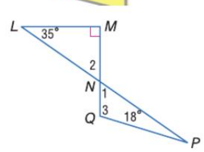
12.

13.

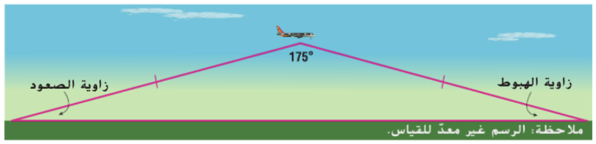
14.



15.



.16 **الطائرات** يمكن تمثيل مسار طائرة باستخدام ضلعي مثلث كما هو ظاهر. المسافة التي تقطعها الطائرة أثناء الصعود تساوي المسافة التي تقطعها أثناء الهبوط.

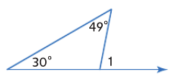


a. ضع تصنيفًا للنموذج باستخدام أضلاعه وزواياه.

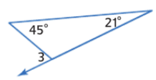
b. زاويتا الصعود والهبوط متطابقتان. جـــــد قياسيهما.

مثال 2 **جـــــد قياس كل مما يلي.**

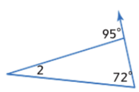
17. $m\angle 1$



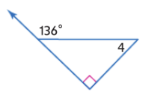
18. $m\angle 3$



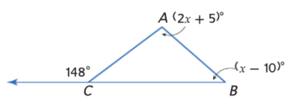
19. $m\angle 2$



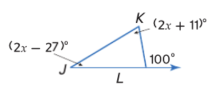
20. $m\angle 4$



21. $m\angle ABC$

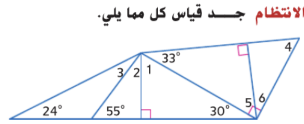


22. $m\angle JKL$



مثال 3 **.23** **منحدر الكرسي المتحرك** افترض أن منحدر الكرسي المتحرك الظاهر يشكل زاوية تبلغ °12 مع الأرض. فما قياس الزاوية التي يشكلها المنحدر مع باب السيارة؟

الانتظام **جـــــد قياس كل مما يلي.**



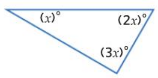
24. $m\angle 1$ **25.** $m\angle 2$

26. $m\angle 3$ **27.** $m\angle 4$

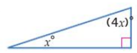
28. $m\angle 5$ **29.** $m\angle 6$

الجبر جـــد قيمة x. ثم جـــد قياس كل زاوية.

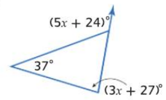
30.



31.



32.



.33 **البستنة** قرر أحد مهندسي المناظر الطبيعية ضم دفيئة زراعية مثلثة الشكل إلى حديقة. الشكل هو مثلث متساوي الساقين زاويته الرأسية ربع زاوية القاعدة. ماذا ينبغي أن يكون قياس كل زاوية؟

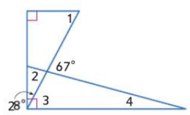
البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين.

.34 البرهان التسلسلي للنتيجة 13.1

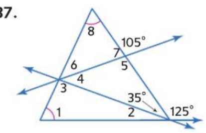
.35 فقرة برهان للنتيجة 13.2

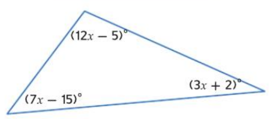
الانتظام جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

36.



37.





.38 **الجبر** صنّف المثلث الموضح حسب زواياه. اشرح تبريرك.

.39 **الجبر** يقل قياس الزاوية الحادة الأكبر في المثلث القائم الزاوية بمقدار 12 درجة عن ناتج ضرب أربعة في قياس الزاوية الحادة الأصغر. جـــد قياس كل زاوية.

.40 حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت خاطئة فقدم مثالاً مضادًا. وإذا كانت صحيحة، فاذكر فرضية تدعم استنتاجك.

إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فالمثلث حاد الزاوية.

.41 **الجبر** في $\triangle XYZ$، $m\angle X = 152$ و $m\angle Z = z$ و $m\angle Y = Y$. اكتب متباينة لوصف القياسات المحتملة للزاوية $\angle Z$. اشرح تبريرك.

.42 **السيارات** راجع الصورة الموجودة على اليسار.

.a جـــد $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

.b إذا كان داعم الغطاء أطول من الداعم المعروض. فما التغير الذي سيحدث في $m\angle 1$؟ اشرح.

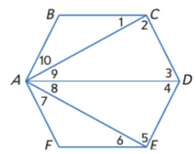
.c إذا كان داعم الغطاء أطول من الداعم المعروض. فما التغير الذي سيحدث في $m\angle 2$؟ اشرح.

البرهان **اكتب نوع البرهان المحدد.**

.43 برهان من عمودين

المعطيات: $ABCDEF$ شكل خماسي الأضلاع.

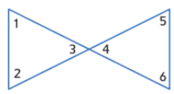
المطلوب: $m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDE + m\angle DEF + m\angle F + m\angle FAB = 720$



.44 برهان حرّ

المعطيات: الصورة على اليسار

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 5 + m\angle 6$



.45 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على مجموع قياس الزوايا الخارجية في مثلث.

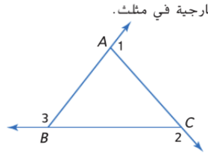
a. **هندسيًا** ارسم خمسة مثلثات مختلفة مع تمديد الأضلاع وتسمية الزوايا كما يظهر. احرص على إدراج مثلث منفرج الزاوية ومثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا واحدًا من كل نوع على الأقل.

b. **جدوليًا** قس الزوايا الخارجية في كل مثلث. وسجّل قياسات كل مثلث ومجموع هذه القياسات في جدول.

c. **لفظيًا** قم بتخمين مجموع الزوايا الخارجية في مثلث. واكتب تخمينك بكلمات.

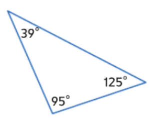
d. **جبريًا** ضع صياغة جبرية للتخمين الذي كتبته في الجزء c.

e. **تحليليًا** اكتب برهانًا حرًا لتخمينك.

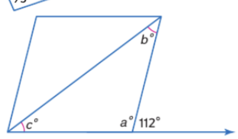


مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

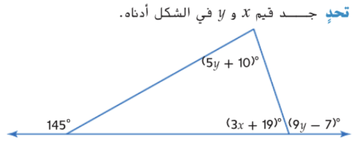
.46 **تحليل الخطأ** قاس بدر زوايا المثلث وأسماها كما هو ظاهر. ويقول بلال إن قياسًا واحدًا على الأقل غير صحيح. اشرح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف عرف بلال ذلك.



.47 **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ستتوصل إلى القياسات الناقصة في الشكل الظاهر.



.48 **تحدٍ** جـــد قيم x و y في الشكل أدناه.



.49 **التبرير** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة للزاوية $\angle A$ زاوية منفرجة. فهل $\triangle ABC$ حاد الزاوية أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم لا يمكن تحديد تصنيفه؟ اشرح تبريرك.

.50 **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على زوايا داخلية منفرجة وحادة وقائمة.

تدريب على الاختبارات المعيارية

.51 الاحتمال يملك السيد جاسم متجر فيديو ويريد إجراء استبيان لعملائه للتوصل إلى نوع الأفلام التي ينبغي أن يشتريها. أي من الخيارات التالية سيمثل الطريقة الأفضل لكي يحصل السيد جاسم على نتائج دقيقة للاستبيان؟

A إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون من الساعة 9 مساءً إلى الساعة 10 مساءً
B إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون في الإجازة الأسبوعية
C إجراء استبيان للعملاء الذكور
D إجراء استبيان في أوقات مختلفة من الأسبوع واليوم

.52 الإجابة القصيرة يبلغ قياس زاويتين في مثلث $35°$ و $80°$. جـــــد قيم قياس الزوايا الخارجية للمثلث.

.53 الجبر ما المعادلة التي تعادل $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟

F $2x - 6 = 8$
G $22x - 6 = 8x$
H $-8x - 6 = 8x$
J $22x + 6 = 8x$

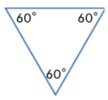
.54 SAT/ACT يملك جمال 4 ألعاب فيديو أكثر من حارب ونصف ما يملكه حسام. إذا كان مجموع ما معهم يبلغ 24 لعبة فيديو، فكم عدد ما يملكه حسام؟

A 7
B 9
C 12
D 13
E 14

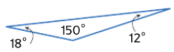
مراجعة شاملة

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

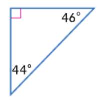
55.



56.



57.



هندسة الإحداثيات **جـــد المسافة من P إلى ℓ.**

.58 المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(0, -2)$ و $(1, 3)$. والنقطة $P(-4, 4)$

.59 المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$. والنقطة $P(4, 3)$

مراجعة المهارات

اذكر الخاصية التي تعلل كل عبارة.

.60 إذا كانت $\frac{x}{2} = 7$، فإن $x = 14$.

.61 إذا كانت $x = 5$ و $b = 5$، فإن $x = b$.

.62 إذا كانت $XY - AB = WZ - AB$، فإن $XY = WZ$.

.63 إذا كانت $m\angle A = m\angle B$ و $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle C$.

.64 إذا كانت $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$.

الدرس 13-3 المثلثات المتطابقة

السابق

- تعرفت على المثلثات المتطابقة واستخدمتها.

الحالي

1. ذكر الأجزاء المتناظرة في المضلعات المتطابقة واستخدامها.
2. البرهنة على تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

لماذا؟

- تصنع شركات كثيرة أجهزة الاستريو في السيارة بواجهات قابلة للفك كنوع من التأمين ضد السرقة. يجب أن يتطابق شكل الواجهة وحجمها تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها لكي يتم تركيبها في لوحة عدادات السيارة بالشكل الملائم.

المفردات الجديدة

تطابق congruent
مضلعات متطابقة congruent polygons
أجزاء متناظرة corresponding parts

استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتوضيح أن المثلثين يكونان متطابقين إذا وفقط إذا كانت أزواج الأضلاع المتناظرة متطابقة وأزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.

استخدام معايير التقارب والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

مراعاة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 التطابق والأجزاء المتناظرة

إذا كان هناك شكلان هندسيان بنفس الشكل والحجم، فإنهما **متطابقان**.

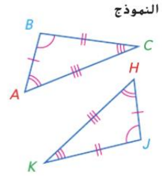
متطابقة	غير متطابقة
	
على الرغم من أن الأشكال 1 و 2 و 3 في أوضاع مختلفة. إلا أن لها نفس الشكل والقياس.	الشكلان 4 و 5 لهما الشكل نفسه تمامًا لكن ليس القياس نفسه. والشكلان 5 و 6 لهما القياس نفسه ولكن ليس الشكل نفسه.

في **المضلعين المتطابقين**، تتطابق جميع أجزاء أحد المضلعين مع **الأجزاء المتناظرة** أو الأجزاء المقابلة في المضلع الآخر. وتشمل هذه الأجزاء المتناظرة الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

المفهوم الأساسي تعريف المضلعات المتطابقة

الشرح يتطابق المضلعان فقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة.

النموذج



مثال

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\angle B \cong \angle J$ $\angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\overline{AC} \cong \overline{HK}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

توجد عبارات تطابق أخرى بالنسبة للمثلثات أعلاه. إن عبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تسرد الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

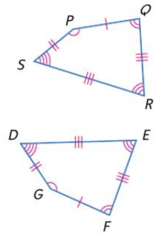
$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

ليست عبارة صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

مثال 1 تحديد الأجزاء المتطابقة المتناظرة

وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.



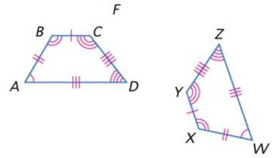
الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$ $\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$ $\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

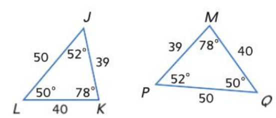
جميع الأجزاء المتناظرة في المضلعين متطابقة.
ولذلك، المضلع PQRS ≅ المضلع GFED.

تمرين موجّه

1A.



1B.



الربط بتاريخ الرياضيات

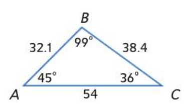
يوهان كارل فريدريش غاوس
(1777–1855) ابتكر غاوس رمز التطابق ليوضح أن طرفي المعادلة متشابهان وإن لم يكونا متساويين. وتوصل إلى الكثير من التطورات في الرياضيات والفيزياء، بما في ذلك برهان للنظرية الأساسية في الجبر.

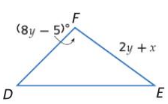
المصدر: The Granger Collection, New York

تعني عبارة "فقط إذا" في تعريف المضلع المتطابق أن كلاً من الشرط وعكسه صحيحان. وعلى هذا، فإذا كان المضلعان متطابقين، فإن أجزاءهما المتناظرة تكون متطابقة. بالنسبة للمثلثات، نقول إن الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة.

مثال 2 استخدام الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين

في الرسم التخطيطي، $\triangle ABC \cong \triangle DFE$. جـــد قيمة x و y.





$\angle F \cong \angle B$	خاصية الانعكاس في التطابق
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	تعويض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى كل طرف.
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8.
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	خاصية الانعكاس في التطابق
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	تعويض
$2(13) + x = 38.4$	تعويض
$26 + x = 38.4$	بسّط.
$x = 12.4$	اطرح 26 من كل طرف.

نصيحة دراسية

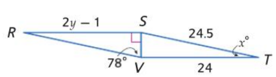
استخدام عبارة تطابق يمكنك استخدام عبارة تطابق لتساعدك على تحديد الأضلاع المتناظرة بشكل صحيح.

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$

$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

تمرين موجّه

2. في الرسم التخطيطي، $\triangle RSV \cong \triangle TVS$. جـــد قيمة x و y.



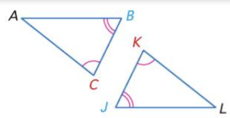
2 البرهنة على تطابق المثلثات

تؤدي نظرية مجموع زوايا المثلث إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

النظرية 13.3 نظرية الزاوية الثالثة

الشرح: إذا كانت زاويتان في مثلث متطابقتين مع زاويتين في مثلث آخر، فعندئذٍ تتطابق الزاوية الثالثة في المثلثين.

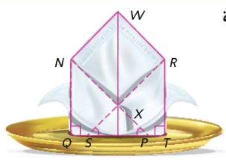
مثال: إذا كانت $\angle C \cong \angle K$ و $\angle B \cong \angle J$، إذًا $\angle A \cong \angle L$.



ستبرهن على هذه النظرية في التمرين 21.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزاوية الثالثة

تنظيم حفل قرر مخططو المائدة الكبرى طي مناديل المائدة على شكل طي الجيب المثلث كي يتمكنوا من وضع هدية صغيرة في الجيب. إذا علمتَ أن $\angle NPQ \cong \angle RST$ و $m\angle NPQ = 40$، فجـــد $m\angle SRT$.



$\angle NPQ \cong \angle RST$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، $\angle NQP \cong \angle RTS$. وحسب نظرية الزاوية الثالثة، $\angle QNP \cong \angle SRT$. ووفقًا لتعريف التطابق، $m\angle QNP = m\angle TRS$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90$	الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان.
$m\angle QNP + 40 = 90$	التعويض
$m\angle QNP = 50$	بطرح 40 من كل طرف.

بالتعويض، $m\angle SRT = m\angle QNP$ أو 50.

الربط بالحياة اليومية

استخدام بعض المهارات الأساسية في طي المناديل يمكن أن يضيف لمسة أنيقة على أي حفل. الكثير من الطيات تستخدم المثلثات.

تمرين موجّه

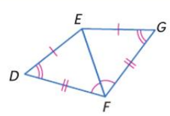
3. في الرسم التخطيطي أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$ و $\overline{WX}$ تنصف $\angle NXR$ و $m\angle WNX = 88$ و $m\angle NXW = 49$، فجـــد $m\angle NWR$. اشرح تبريرك.

مثال 4 البرهنة على أن الزاويتين متطابقتان

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

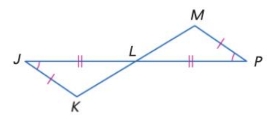


البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1. $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	**.1** المعطيات
2. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	**.2** خاصية الانعكاس في التطابق
3. $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$	**.3** المُعطى
4. $\angle DEF \cong \angle GEF$	**.4** نظرية الزوايا الثالثة
5. $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	**.5** تعريف المضلعات المتطابقة

نصيحة دراسية

خاصية الانعكاس عندما يشترك مثلثان في ضلع، استخدم خاصية انعكاس التطابق لإثبات أن الضلع المشترك متطابق مع نفسه.



تمرين موجه

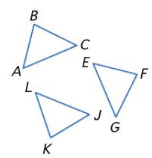
4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P, \overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{JL} \cong \overline{PL}$، و L تنصف $\overline{KM}$.

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

مثل تطابق القطع والزوايا، تطابق المثلثات يتمتع بخواص الانعكاس والتناظر والتعدي.

النظرية 13.4 خصائص تطابق المثلث



خاصية انعكاس تطابق المثلث

$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية تناظر تطابق المثلث

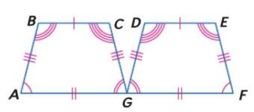
إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$، فإن $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

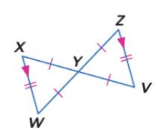
خاصية تعدي تطابق المثلث

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ و $\triangle EFG \cong \triangle JKL$، فإن $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

التحقق من فهمك

مثال 1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.

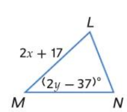
1. 

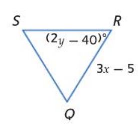
2. 

مثال 2 في الشكل، $\triangle LMN \cong \triangle QRS$.

3. جد x.

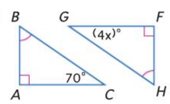
4. جد y.



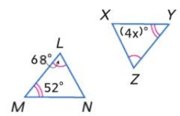


مثال 3 **الانتظام** جــــد x. اشرح تبريرك.

5.



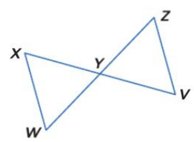
6.



مثال 4 **7. البرهان** اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات: Y هي نقطة منتصف $\overline{XV}$ و $\overline{WZ}$.
$\overline{WX} \parallel \overline{ZV}$; $\overline{WX} \cong \overline{ZV}$

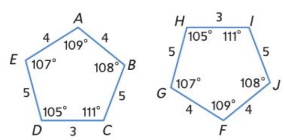
المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle ZYV$



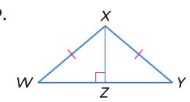
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.**

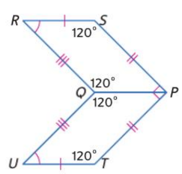
8.



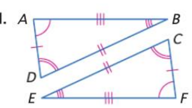
9.



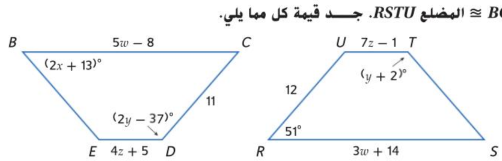
10.



11.

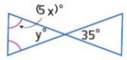


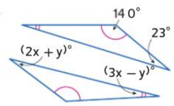
مثال 2 **المضلع $BCDE$ ≅ المضلع $RSTU$. جــــد قيمة كل مما يلي.**

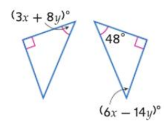


12. x **13.** y **14.** z **15.** w

مثال 3 جـــد قيمة x و y.

16.


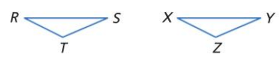
17.


18.


مثال 4 .19 **البرهان** اكتب برهانًا حرًا للنظرية 13.3.

.20 **البرهان** ضع العبارات المستخدمة في برهنة العبارة أدناه بالترتيب الصحيح. واذكر مبررات كل عبارة.

تطابق المثلثات يكون متناظرًا. (النظرية 13.4)



المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$, $\angle T \cong \angle Z$, $\overline{RS} \cong \overline{XY}$, $\overline{ST} \cong \overline{YZ}$, $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\angle X \cong \angle R$, $\angle Y \cong \angle S$, $\angle Z \cong \angle T$, $\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$
?	?	?	?

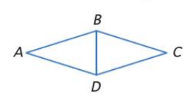
الفرضيات اكتب برهانًا من عمودين.

.21 **المعطيات:** متوازي الأضلاع $PQRS$

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$

.22 **المعطيات:** $\angle A \cong \angle C$; $\angle ABD \cong \angle CBD$;
$\angle ADB \cong \angle CDB$
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$; $\overline{CD} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



.23 **طباعة القمصان** تعشق حصة مادة الرياضيات وأرادت الطباعة على القمصان من أجل صديقاتها. وقد ذهبت إلى شركة تطبع على القمصان حسب الطلب. تصميمها موضح على اليسار. ما الخاصية التي تضمن تطابق التصميمات المطبوعة؟

البرهان **اكتب النوع المحدد من برهان الجزء المشار إليه في النظرية 13.4.**

.24 تطابق المثلثات يتسم بالتعدي. (برهان حرّ)

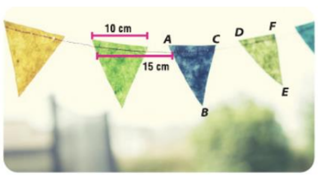
.25 تطابق المثلثات يتسم بالانعكاس. (برهان تسلسلي)

الجبر **ارسم شكلاً وسمّه لتمثيل المثلثات المتطابقة. ثم جـــد قيمة x و y.**

26. $\triangle ABC \cong \triangle DEF,\ AB = 11,\ AC = 17 + x,\ DF = 2x + 13,\ DE = 3y + 2$

27. $\triangle LMN \cong \triangle RST,\ m\angle L = 51,\ m\angle M = 9y,\ m\angle S = 72,\ m\angle T = 4x + 15$

28. $\triangle JKL \cong \triangle MNP,\ JK = 12,\ LJ = 7,\ PM = 3x - 2,\ m\angle L = 67,\ m\angle K = y + 9,\ m\angle N = 2y - 4$



.29 **الأشكال المثلثة** يتولى حسن مسؤولية تطويق منطقة بحبل وتبلغ مساحتها 9 أمتار مربعة لكي تستخدمها الفرقة الموسيقية أثناء تجمع طلابي. ويستخدم سلسلة من المثلثات المتطابقة متساوية الساقين.

.a اذكر سبعة أزواج من القطع المتطابقة في الصورة.

.b إذا كانت المساحة التي يطوقها بحبل مربعة، فما الطول المطلوب لحبل المثلثات؟

.c كم عدد المثلثات التي ستكون في الحبل؟

.30 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على عبارة *محيطات المثلثات المتطابقة متساوية.*

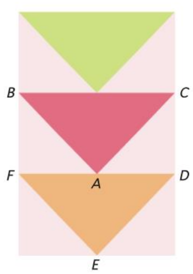
.a **لفظيًا** اكتب عبارة شرطية لتمثيل العلاقة بين محيطي زوج من المثلثات المتطابقة.

.b **لفظيًا** اكتب عبارة عكسية لعبارتك الشرطية. هل العكس صحيح أم خطأ؟ اشرح تبريرك.

.c **هندسيًا** ارسم مثلثين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

.d **هندسيًا** ارسم مستطيلين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

.31 **الأنماط** الإوز الطائر قالب يُستخدم كثيرًا في صناعة الألحفة.



.a ما المضلعان المستخدمان لإنشاء النمط؟

.b اذكر اسم زوج من المثلثات المتطابقة.

.c اذكر اسم زوج من الزوايا المتناظرة.

.d إذا كانت $BC = 4$، فما FD؟ اشرح.

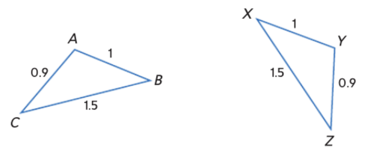
.e ما قياس الزاوية $\angle E$؟ اشرح.

.32 **الموسيقى** يمكن استخدام أطواق طبلة صوت الباص لإصلاحها. ويجب أن تكون الأطواق بالحجم ذاته. أي قياس ستستخدم لإثبات أن الأطواق متطابقة. اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

33. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب أهمية ترتيب الرؤوس عند تسمية المثلثات المتطابقة. اذكر مثالاً لدعم إجابتك.

34. **تحليل الخطأ** يحدد حمادة ووليد قيمًا للأشكال المتطابقة أدناه. يقول حمادة $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ويقول وليد $\triangle XYZ \cong \triangle CAB$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟



الكتابة في الرياضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك.

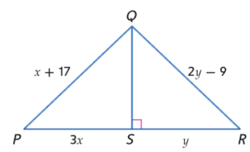
35. *المثلثات متساوية الزوايا متطابقة.*

36. *المثلثان اللذان يتطابق بهما زوجان من الأضلاع المتناظرة وزوج من الزوايا المتناظرة يكونان متطابقين.*

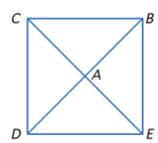
37. *المثلثان اللذان يتطابق بهما ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة يكونان متطابقين.*

38. *المثلثان القائمان اللذان يتطابق بهما زوجان من السيقان المتناظرة يكونان متطابقين.*

39. **تحدٍ** جـــــد قيمة x و y إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

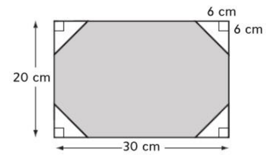


40. **تحدٍ** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن المثلثات الأربعة الناتجة بواسطة أقطار مربع تكون متطابقة.



تدريب على الاختبارات المعيارية

41. قطع حسن أربعة مثلثات متطابقة من أركان مستطيل ليصنع شكلاً ثمانيًا كما هو ظاهر بالأدنى. فما مساحة الشكل الثماني؟



A $456\ cm^2$ C $552\ cm^2$
B $528\ cm^2$ D $564\ cm^2$

42. الإجابة الشبكية المثلث ABC متطابق مع $\triangle HIJ$. رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-1, 2)$ و $B(0, 3)$ و $C(2, -2)$. فما قياس ضلع $\overline{HJ}$؟

43. الجبر أي مما يلي عامل من عوامل التعبير $x^2 + 19x - 42$؟

F $x + 14$ H $x - 2$
G $x + 2$ J $x - 14$

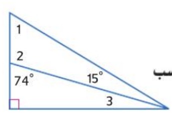
44. SAT/ACT يقطع حمد مسافة معينة بسرعة 20 km في الساعة ويعود على نفس الطريق بسرعة 65 km/h. فما متوسط سرعته بالكيلومتر في الساعة طوال الرحلة؟

A 32.5 D 47.5
B 35.0 E 55.3
C 41.0

مراجعة شاملة

جـــد كل قياس في المثلث الذي على اليسار.

45. $m\angle 2$ **46.** $m\angle 1$ **47.** $m\angle 3$

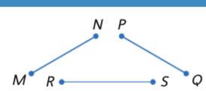


هندسة الإحداثيات **جـــد** قياسات أضلاع $\triangle JKL$ وضع تصنيفًا لكل مثلث حسب قياسات أضلاعه.

48. $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$
49. $J(9, 9), K(12, 14), L(14, 6)$
50. $J(4, 6), K(4, 11), L(9, 6)$
51. $J(16, 14), K(7, 6), L(-5, -14)$

مراجعة المهارات

52. انسخ البرهان مع إكماله.



المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$
المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$
البرهان:

العبارات	المبرّرات
a. ____ ؟	a. المُعطى
b. $MN = PQ, PQ = RS$	b. ____ ؟
c. ____ ؟	c. ____ ؟
d. $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d. تعريف القطع المتطابقة

الدرس 13-4 إثبات تطابق المثلثات - تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

.. السابق

لقد برهنت على تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

.. الحالي

1 استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) لاختبار تطابق المثلثين.

2 استخدام مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS) لاختبار تطابق المثلثين.

.. لماذا؟

اللوح المزدوج بهيكل على شكل A يُعتبر طريقة مريحة لعرض المعلومات. ولا تقتصر مزاياه على الطي بشكل مسطح للتخزين بسهولة. لكن عند تثبيت الذراع الجانبية في مكانها، يصبح الهيكل قويًا جدًا. وعندما يكون الذراعان الجانبيان بالطول نفسه وعلى المسافة نفسها من أعلى على أي من الجانبين، يشكل الهيكل المفتوح مثلثين متطابقين.

المفردات الجديدة

زاوية محصورة
included angle

إثبات نظريات حول المثلثات.

استخدام معايير التقارب والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة SSS

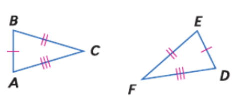
في الدرس 13-3، برهنت على أن المثلثين كانا متطابقين بتوضيح أن كل الأزواج الستة من الأجزاء المتناظرة كانت متطابقة. من الممكن البرهنة على تطابق المثلثين باستخدام أزواج أقل.

يوضح اللوح المزدوج أنه إذا كان المثلثان بنفس أطوال الأضلاع الثلاثة، فهما متطابقان. ويظهر هذا في المسلّمة أدناه.

المسلّمة 13.1 تطابق بتساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)

إذا كانت ثلاثة أضلاع في مثلث متطابقة مع ثلاثة أضلاع في مثلث آخر، فالمثلثان متطابقان.

مثال إذا كان الضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$،
الضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$،
والضلع $\overline{AC} \cong \overline{DF}$،
إذًا $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



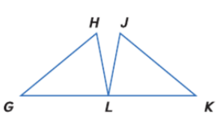
مثال 1 استخدام تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) للبرهنة على أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ و $\overline{HL} \cong \overline{JL}$ و L نقطة المنتصف في $\overline{GK}$.

المطلوب: $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان التسلسلي:

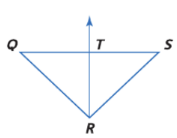


تمرين موجّه

1. **اكتب برهانًا تسلسليًا.**

المعطيات: $\triangle QRS$ متساوي الساقين حيث $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.
$\overline{RT}$ ينصف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



مثال 2 على الاختبار المعياري تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) على المستوى الإحداثي

إجابة موسعة المثلث ABC رؤوسه $A(1, 1)$ و $B(0, 3)$ و $C(2, 5)$. والمثلث EFG رؤوسه $E(1, -1)$ و $F(2, -5)$ و $G(4, -4)$.

a. ارسم كلا المثلثين على مستوى إحداثي واحد.

b. استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.

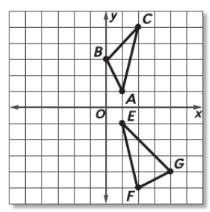
c. اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم التخمين الذي توصلت إليه في الجزء b.

قراءة فقرة الاختبار

مطلوب منك ثلاثة أشياء في هذه المسألة. في الجزء a، عليك تصميم تمثيل بياني لكل من $\triangle ABC$ و $\triangle EFG$ على المستوى الإحداثي ذاته. في الجزء b، عليك تخمين أن $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أو $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ بناءً على التمثيل البياني. وأخيرًا في الجزء c، مطلوب منك إثبات التخمين.

حَل فقرة الاختبار

.a



b. يبدو من التمثيل البياني أن المثلثين ليسا بالشكل نفسه. إذًا يمكننا تخمين أنهما ليسا متطابقين.

c. استخدم قانون المسافة لبيان عدم تساوي قياس كل الأضلاع المتناظرة.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

بينما $AB = FG$ و $AC = EF$ و $BC \neq EG$. نظرًا لعدم التطابق بتساوي الأضلاع الثلاثة، $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

نصيحة عند حل الاختبار

الأدوات عندما تحل المسائل باستخدام المستوى الإحداثي، تذكر أن تستخدم أدوات مثل قوانين المسافة ونقطة المنتصف والميل لحل المسائل والتحقق من حلولك.

قراءة في الرياضيات

الرموز $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ تُقرأ المثلث ABC ليس مطابقًا للمثلث EFG.

تمرين موجّه

2. المثلث JKL رؤوسه $J(2, 5)$ و $K(1, 1)$ و $L(5, 2)$. والمثلث NPQ رؤوسه $N(-3, 0)$ و $P(-7, 1)$ و $Q(-4, 4)$.

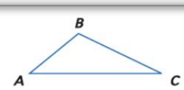
a. مثّل المثلثين بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

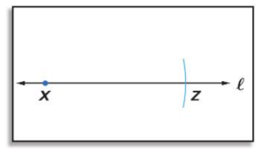
b. استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.

c. اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم التخمين الذي توصلت إليه في الجزء b.

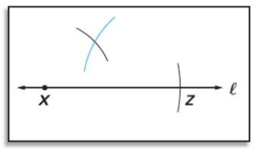
الإنشاء المثلثات المتطابقة باستخدام الأضلاع

ارسم مثلثًا وسِمه $\triangle ABC$. ثم استخدم مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) لإنشاء $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

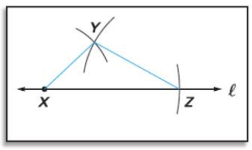




الخطوة 1 ارسم النقطة X على المستقيم ℓ. ثم قم بإنشاء $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على المستقيم ℓ



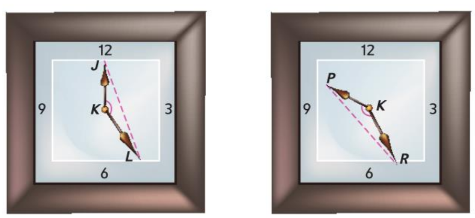
الخطوة 2 قم بإنشاء قوس بنصف القطر AB ومركزه عند النقطة X وقوس آخر بنصف القطر BC ومركزه عند النقطة Z.



الخطوة 3 اكتب على نقطة تقاطع القوسين Y. ارسم $\overline{XY}$ و $\overline{ZY}$ لتكوين $\triangle XYZ$.

2 مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

الزاوية التي يشكلها ضلعان متجاوران في مضلع تُسمى **زاوية محصورة**. فكّر في الزاوية المحصورة JKL التي تشكلها العقارب على الساعة الأولى الظاهرة أدناه. في أي وقت تشكل العقارب زاوية بالقياس نفسه، ستكون المسافة بين طرفي العقربين $\overline{JL}$ و $\overline{PR}$ واحدة.

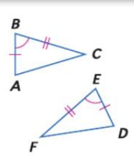


$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أي مثلثين يتشكلان باستخدام نفس أطوال الأضلاع والزاوية المحصورة سيتطابقان. وهذا يوضح المسلّمة التالية.

المسلّمة 13.2 التطابق بتساوي ضلعين وزاوية (SAS)

الشرح عند تطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث آخر، فيكون المثلثان متطابقين.



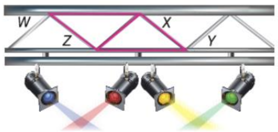
مثال إذا كان **الضلع** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$،
والزاوية $\angle B \cong \angle E$،
والضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$،
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

نصيحة دراسية
مسلمة تساوي ضلعين وزاوية لا يكفي قياس الضلعين والزاوية غير المحصورة للبرهنة على تطابق مثلثين.

مهنة من الحياة اليومية

فنيو الإضاءة في مجال تصوير الأفلام، يضع الفنيون أو فنيو الإضاءة ما يتطلبه الفيلم من إضاءة. يتأكد الفنيون أن الزوايا التي تشكلها المصابيح في الأوضاع الصحيحة. قد يكونون حاصلين على درجات علمية جامعية أو من المدارس الفنية أو ربما يكونون قد استكملوا برنامجًا تدريبيًا رسميًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام مُسلّمة ضلعين وزاوية لإثبات



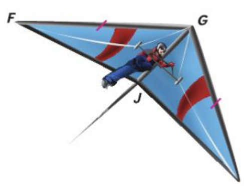
الإضاءة تبدو سقالات إضاءة المسرح الموضحة أنها مكونة من مثلثات متطابقة. إذا كان $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ و$\overline{ZY} \parallel \overline{WX}$، فاكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$	1. المعطيات
2. $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2. المعطيات
3. $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3. نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4. $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4. خاصية الانعكاس في التطابق
5. $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5. مسلمة تساوي ضلعين وزاوية

تمرين موجّه

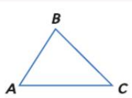
3. **الرياضات الخطرة** تبدو أجنحة الطيران الشراعي الموضحة كمثلثات متطابقة. إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ و $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$. فأثبت أن $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

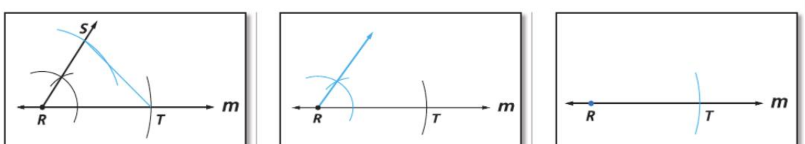


يمكنك أيضًا إنشاء مثلثين متطابقين على أساس ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

الإنشاء مثلثان متطابقان باستخدام ضلعين والزاوية المحصورة

ارسم مثلثًا وسمِه $\triangle ABC$.
ثم استخدم مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SAS) لإنشاء $\triangle RST \cong \triangle ABC$.



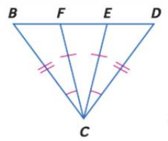


الخطوة 1 ارسم النقطة R على المستقيم m. ثم قم بإنشاء $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على المستقيم m.

الخطوة 2 أنشئ $\angle A \cong \angle R$ باستخدام $\overline{RT}$ كضلع للزاوية والنقطة R.

الخطوة 3 أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$. ثم ارسم $\overline{ST}$ لتكوين $\triangle RST$.

مثال 4 تسلوي ضلعين وزاوية (SAS) أو تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)



اكتب برهانًا حرًّا.

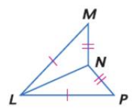
المعطيات: $\overline{BC} \cong \overline{DC}, \angle BCF \cong \angle DCE, \overline{FC} \cong \overline{EC}$

المطلوب: $\angle CFD \cong \angle CEB$

البرهان:

بما أن $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، $\angle BCF \cong \angle DCE$ و $\overline{FC} \cong \overline{EC}$، إذًا $\triangle BCF \cong \triangle DCE$ وفقًا لمُسلّمة SAS. حسب CPCTC، $\angle CFB \cong \angle CED$.
$\angle CFD$ تشكل زوجًا خطيًا مع $\angle CFB$، و $\angle CEB$ تشكل زوجًا خطيًا مع $\angle CED$.
وفقًا لمُسلّمة نظرية تطابق الزوايا المتكاملة، $\angle CFD$ تكمل $\angle CFB$ و $\angle CEB$ تكمل $\angle CED$. بما أن الزوايا المتكاملة مع زاوية واحدة أو متكاملة مع زوايا متطابقة تكون متطابقة، فإن $\angle CFD \cong \angle CEB$.

تمرين موجّه



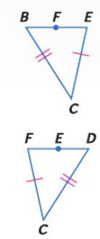
4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PN}, \overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: $\angle LNM \cong \angle LNP$

نصيحة دراسية

الأشكال المتداخلة عندما تتداخل المثلثات، قد يكون من المفيد رسم كل مثلث بشكل منفصل وتسمية الأجزاء المتطابقة. في المثال 4، كان يمكن فصل الشكل كما هو ظاهر.



التحقق من فهمك

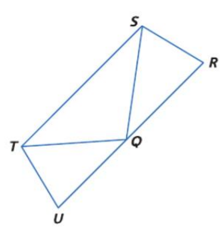
مثال 1

1. **الهندسة المعمارية** المثلثات شائعة الاستخدام في الهندسة المعمارية لأنها أشكال "ثابتة". كيف تفسر خاصية تطابق المثلثات هذه الخاصية؟ بخلاف الأسقف، اذكر مثالاً واحدًا على الأقل لتطابق المثلثات في منزلك.

مثال 2

2. **إجابة موسعة** المثلث ABC رؤوسه $A(-4, 1)$ و $B(-1, 1)$ و $C(-1, 5)$. والمثلث XYZ رؤوسه $X(4\ -1)$ و $Y(1\ -1)$ و $Z(1\ -5)$.
   - **a.** ارسم كلا المثلثين على مستوى إحداثي واحد.
   - **b.** استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.
   - **c.** اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم تخمينك.

مثال 3

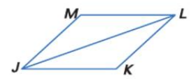


3. في الرسم التخطيطي، $\triangle TQR$ متساوي الأضلاع، و $\angle UTQ \cong RSQ$، و $\overline{SR} \cong \overline{TU}$. اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle RSQ \cong \triangle UTQ$.

مثال 4 **4. اكتب برهانًا من عمودين.**

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$; $\angle KJL \cong \angle MLJ$

المطلوب: $\overline{JM} \cong \overline{LK}$



التمرين وحل المسائل

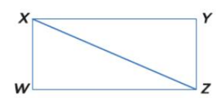
مثال 1 **البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين.**

5. برهان حرّ

المعطيات: $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$

$\overline{XW} \cong \overline{ZY}$

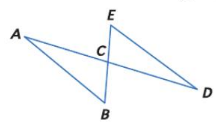
المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle ZWX$



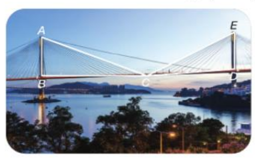
6. برهان من عمودين

المعطيات: C نقطة منتصف كل من $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$.

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DCE$



7. الجسور يوجد الجسر المعلق أدناه في بوشانغ في مقاطعة خوبي في الصين. والجسر مدعوم باستخدام كابلات من الصلب معلقة من دعامتين خرسانيتين. إذا كانت الدعامتان بالارتفاع نفسه فوق الطريق وعموديتين على الطريق وتلتقي أعلى الكابلات عند نقطة في المنتصف بين الدعامتين. فبرهن على أن المثلثين الظاهرين في الصورة متطابقان.



الاستنتاج المنطقي حدد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$. اشرح.

8. $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, -4), R(-7, -1), S(-3, 0)$

9. $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(-3, 3), R(-4, 4), S(-3, 7)$

10. $M(0, -3), N(0, 2), O(-3, 1), Q(4, -1), R(6, 1), S(9, -1)$

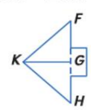
11. $M(4, 7), N(5, 4), O(2, 3), Q(2, 3), R(3, 0), S(0, -1)$

مثال 3 **البرهان اكتب النوع المحدّد من البراهين.**

12. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{KG}$ منصف عمودي لـ $\overline{FH}$

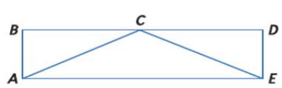
المطلوب: $\triangle KGH \cong \triangle KGF$



13. برهان حرّ

المعطيات: المستطيل $ABDE$؛ C نقطة منتصف $\overline{BD}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

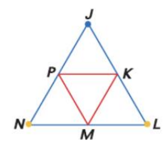


مثال 4 **البرهان** **اكتب النوع المحدّد من البراهين.**

14. برهان من عمودين

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$؛ P نقطة منتصف $\overline{JN}$؛ M نقطة منتصف $\overline{NL}$؛ $\triangle JLN$ متساوي الأضلاع

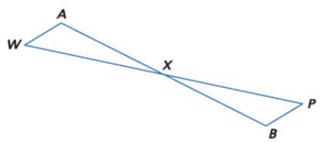
المطلوب: $\triangle NPM \cong \triangle LKM$



15. برهان حرّ

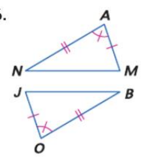
المعطيات: $\overline{AB}$ و $\overline{WP}$ ينصف كل منهما الآخر

المطلوب: $\angle A \cong \angle B$

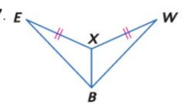


فرضيات **حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلثين متطابقان. وإذا لم يكن ممكنًا إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.**

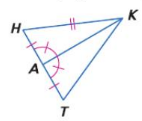
16.



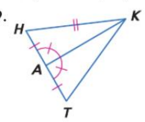
17.



18.



19.

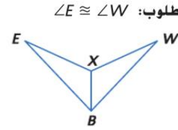


20. **الموسيقى** لتحديد وتيرة معيّنة، يتم ضبط الوزن على بندول الإيقاع (الميسزع) بحيث يتأرجح بمعدل محدد. أثبت أن المثلثات المتشكلة نتيجة حركة البندول متطابقة. أي أثبت أن $\triangle ABR \cong \triangle CBR$.

البرهان **اكتب برهانًا من عمودين.**

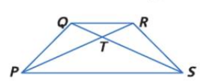
21. **المعطيات:** $\overline{XB}$ ينصف $\angle EBW$
$\overline{EB} \cong \overline{WB}$

المطلوب: $\angle E \cong \angle W$

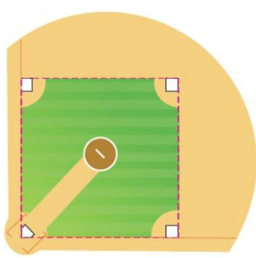


22. **المعطيات:** شبه منحرف متساوي الساقين $PQRS$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle SRQ$



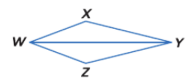
23. **البيسبول** استخدم الرسم التخطيطي الموضح لملعب البيسبول.



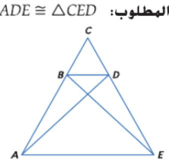
a. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن المسافة من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثالثة هي نفسها المسافة من اللوح الأصلي إلى القاعدة الثانية.

b. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن الزاوية التي تتشكل من القاعدة الثانية واللوح الأصلي والقاعدة الثالثة هي نفسها الزاوية التي تتشكل من القاعدة الثانية واللوح الأصلي والقاعدة الأولى.

24. **المعطيات:** $\overline{XW} \cong \overline{ZW}, \overline{XY} \cong \overline{ZY}$
المطلوب: $\angle X \cong \angle Z$



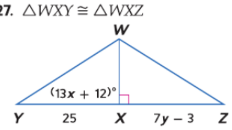
25. **المعطيات:** $\triangle EAB \cong \triangle DCB$
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle CED$



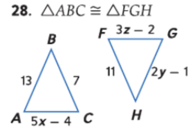
26. **فرضيات** اكتب برهانًا حرًا.
المعطيات: $\overline{BF} \cong \overline{DF}; \overline{FE} \cong \overline{FA}$
$\overline{AB} \cong \overline{ED}$
المطلوب: $\triangle ABE \cong \triangle EDA$

الجبر **باستخدام خاصية الانعكاس في التطابق، جـــد قيم المتغيرات التي تحقق مثلثات متطابقة.**

27. $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$

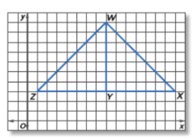


28. $\triangle ABC \cong \triangle FGH$



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

29. **تحدٍ** **راجع التمثيل البياني المعروض.**



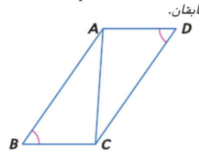
a. صف طريقتين يمكنك استخدامهما للبرهنة على أن $\triangle WYZ$ متطابق مع $\triangle WYX$. لا يجوز لك استخدام مسطرة أو منقلة. أي طريقةٍ أكثر كفاءة برأيك؟ اشرح.

b. هل $\triangle WYZ$ و $\triangle WYX$ متطابقان؟ اشرح تبريرك.

30. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. وإذا كانت العبارة صحيحة، فاشرح تبريرك. وإذا كانت *خاطئة*، فاذكر مثالاً مضادًا.

إذا كانت زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين بنفس قياس زاويتي القاعدة في مثلث آخر متساوي الساقين، فإن المثلثين متطابقان.

31. **تحليل الخطأ** تقول خديجة إن $\triangle ABC \cong \triangle CAD$ حسب المسلّمة SSS. وتختلف معها خولة وتقول إنهما متطابقان حسب مبرهنة SAS. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.



32. **مسألة غير محددة الإجابة** استخدم حافة مستقيمة لرسم المثلث منفرج الزاوية ABC. ثم قم بإنشاء $\triangle XYZ$ بحيث يكون متطابقًا مع $\triangle ABC$ باستخدام المسلّمة SSS أو SAS. برر إنشاءك رياضيًا وتحقق منه باستخدام القياس.

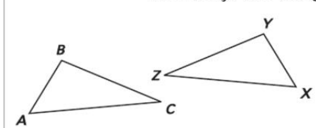
33. **الكتابة في الرياضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك. *إذا تطابق زوجان من الأضلاع المتناظرة في مثلثين قائمين، فالمثلثان متطابقان.*

تدريب على الاختبارات المعيارية

34. الجبر قطعت عائلة خالد مسافة 300 km بالسيارة لزيارة الجد والجدة. وقام السيد خالد بقيادة السيارة بسرعة 70 km/h لمسافة تعادل 65% من الرحلة و 35 km/h أو أقل لمسافة تعادل 20% من الرحلة المتبقية. بافتراض أن السيد خالد لم يقم بزيادة السرعة مطلقًا عن 70 km/h. فكم عدد الكيلومترات التي قطعها بين 35 km/h و 70 km/h؟

A 195
B 84
C 21
D 18

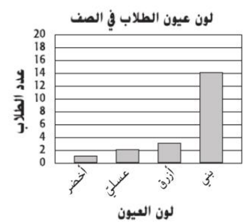
35. في الشكل، $\angle Z \cong \angle C$ و $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$.



ما المعلومات الإضافية التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟

F $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$
G $\overline{AB} \cong \overline{XY}$
H $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$
J $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

36. إجابة موسعة يوضح التمثيل البياني أدناه ألوان عيون كل الطلاب في صف دراسي. ما احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيًا من هذا الصف بعينين زرقاوين؟ اشرح تبريرك.

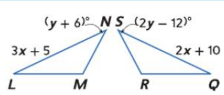


37. SAT/ACT إذا كان $4a + 6b = 6$ و $-2a + b = -7$. فما قيمة a؟

A −2
B −1
C 2
D 3
E 4

مراجعة شاملة

في الرسم التخطيطي، $\triangle LMN \cong \triangle QRS$.



38. جــد x.

39. جــد y.

40. الفلك مجموعة الدبة الكبرى جزء من كوكبة الدب الأكبر. تشكل ثلاثة من النجوم الأكثر سطوعًا في الكوكبة $\triangle RSA$. إذا كان $m\angle R = 41$ و $m\angle S = 109$. فجــد $m\angle A$.

اكتب معادلةً وفق صيغة الميل والمقطع لكل خط.

41. $(-5, -3)$ و $(10, -6)$

42. $(4, -1)$ و $(-2, -1)$

43. $(-4, -1)$ و $(-8, -5)$

مراجعة المهارات

اذكر الخاصية التي تعلل كل عبارة.

44. $AB = AB$

45. إذا كان $EF = GH$ و $GH = JK$. إذًا $EF = JK$.

46. إذا كان $a^2 = b^2 - c^2$. إذًا $b^2 - c^2 = a^2$.

47. إذا كان $XY + 20 = YW$ و $XY + 20 = DT$. إذًا $YW = DT$.

التوسع

13-4 مختبر الهندسة
برهنة الإنشاءات

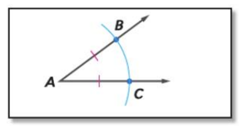
عندما ترسم الإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار، فإنك تفترض تطابق القطع التي يتم إنشاؤها باستخدام ضبط واحد للفرجار. يمكنك استخدام هذه المعلومات إلى جانب التعريفات والمسلّمات والنظريات للبرهنة على الإنشاءات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).
استخدام معايير التقارب والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

النشاط

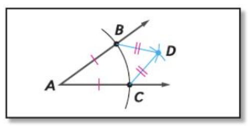
اتبع الخطوات أدناه لتنصيف زاوية. ثم برهن على الإنشاء.

الخطوة 1



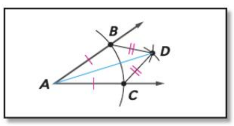
ارسم زاوية بالرأس A. ضع نقطة الفرجار عند A وارسم قوسًا يتقاطع مع كلا ضلعي $\angle A$. قم بتسمية النقطتين B و C. ضع علامة على القطع المتطابقة.

الخطوة 2



ضع نقطة الفرجار عند B، وارسم قوسًا في $\angle A$. باستخدام نصف القطر نفسه، ارسم قوسًا من C يتقاطع مع القوس الأول عند D. ارسم القطعتين $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$. ضع علامة على القطع المتطابقة.

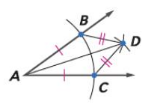
الخطوة 3



ارسم $\overline{AD}$.

المعطيات: وصف الخطوات والرسم التخطيطي للإنشاء

المطلوب: $\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$.



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	1. تم استخدام إعداد واحد للفرجار من النقطة A لإنشاء النقطتين B و C.
2. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	2. تم استخدام إعداد واحد للفرجار من النقطتين B و C لإنشاء النقطة D.
3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	3. خاصية الانعكاس
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	4. مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة
5. $\angle BAD \cong \angle CAD$	5. مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة
6. $\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$.	6. تعريف منصّف الزاوية

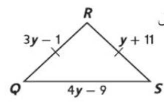
التمارين

1. قم بإنشاء مستقيم يوازي خط معين ويمر بنقطة معينة على المستقيم. واكتب برهانًا من عمودين لإنشائك.
2. قم بإنشاء مثلث متساوي الأضلاع. واكتب برهانًا حرًا لإنشائك.
3. **تحدٍ** أنشئ منصف قطعة يكون عموديًا أيضًا على القطعة واكتب برهانًا من عمودين لإنشائك. (*تلميح:* ستحتاج إلى استخدام أكثر من زوج من المثلثات المتطابقة).

الوحدة 13
اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-13 إلى 4-13

.1 **هندسة الإحداثيات** حدد تصنيف $\triangle ABC$ بالرؤوس $A(-2, -1)$ و $B(-1, 3)$ و $C(2, 0)$ باعتباره *مختلف الأضلاع*، أو *متساوي الأضلاع*، أو *متساوي الساقين*.

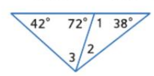
.2 **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يمثل قياسات أضلاع مثلث متساوي الساقين QRS؟



A 17, 17, 15
B 15, 15, 16
C 14, 15, 14
D 14, 14, 16

.3 **الجبر** جـــد قيمة x وطول كل ضلع إذا علمت أن $\triangle WXY$ مثلث متساوي الأضلاع أضلاعه $\overline{WX} = 6x - 12, \overline{XY} = 2x + 10$ و $\overline{WY} = 4x - 1$.

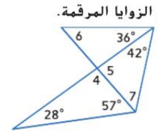
جـــد قياس جميع الزوايا المشار إليها.



4. $m\angle 1$
5. $m\angle 2$
6. $m\angle 3$

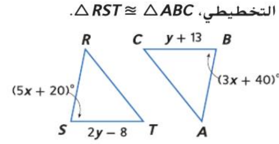
.7 **فلك** ليو هي عبارة عن كوكبة على شكل أسد. تشكل ثلاثة من النجوم الأكثر سطوعًا في الكوكبة $\triangle LEO$. إذا كانت الزوايا بالقياسات الموضحة في الشكل. فجـــد $m\angle OLE$.

جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.



8. $m\angle 4$
9. $m\angle 5$
10. $m\angle 6$
11. $m\angle 7$

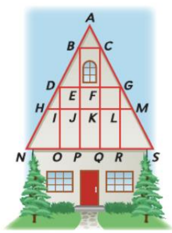
في الرسم التخطيطي، $\triangle RST \cong \triangle ABC$.



.12 جـــد x.

.13 جـــد y.

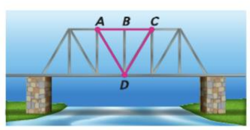
.14 **الهندسة المعمارية** يوضح الرسم التخطيطي منزلاً بهيكل على شكل A وبه عدة نقاط لها أسماء. افترض أن القطع والزوايا التي تبدو متطابقة في الرسم التخطيطي متطابقة. أوضح أي المثلثات متطابقة.



.15 **الاختيار من متعدد** حدد العبارة الصحيحة إذا علمتَ أن $\triangle CBX \cong \triangle SML$.

F $\overline{MO} \cong \overline{SL}$
G $\overline{XC} \cong \overline{ML}$
H $\angle X \cong \angle S$
J $\angle XCB \cong \angle LSM$

.16 **الجسور** تظهر أطواق حديدية لجسر في الرسم التخطيطي أدناه، حيث $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ و B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟



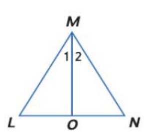
حدد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$.

17. $P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12)$
18. $P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1)$
19. $P(8, 1), Q(-7, -15), R(9, -6), X(5, 11), Y(-10, -5), Z(6, 4)$

.20 **اكتب برهانًا من عمودين.**

المعطيات: $\triangle LMN$ مثلث متساوي الساقين، حيث $\overline{LM} \cong \overline{NM}$. و $\overline{MO}$ ينصف $\angle LMN$.

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



الدرس 13-5 إثبات تطابق المثلثات-تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) وتساوي زاويتين وضلع (AAS)

السابق

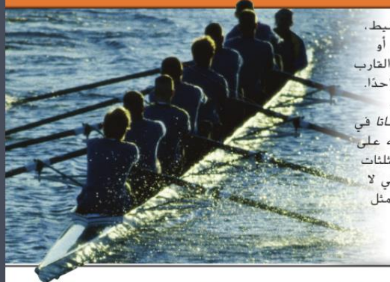
- لقد برهنت على تطابق مثلثين باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) وتساوي ضلعين وزاوية (SAS).

الحالي

1. استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لاختبار التطابق.
2. استخدام نظرية تساوي زاويتين وضلع (AAS) لاختبار التطابق.

لماذا؟

- تتضمن رياضة التجديف بالتمشيط، وتُسمى أيضًا *الطاقم*، شخصين أو أكثر يجلسون بمواجهة مؤخرة القارب ويسحب كل مجدف مجدافًا واحدًا. في مسابقات المدرسة الثانوية، يتطلب السباق الذي يُسمى *ريغاتا* في العادة مسطحًا مائيًا يزيد طوله على 1500 متر. يمكن استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة بسهولة، مثل طول مسار الريغاتا.



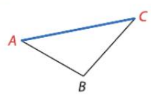
المفردات الجديدة

ضلع محصور
included side

إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام معايير التقارب والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

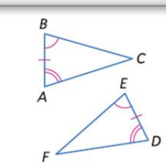
الضلع المحصور هو الضلع الموجود بين زاويتين متتاليتين في مضلع. في $\triangle ABC$ على اليسار، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$ و $\angle C$.



المسلّمة 13.3 تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

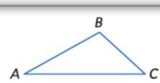
عند تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث آخر، يكون المثلثان متطابقان.

مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$.
والضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.
الزاوية $\angle B \cong \angle E$.
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

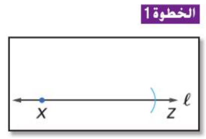


الإنشاء مثلثان متطابقان باستخدام زاويتين والضلع المحصور بينهما

ارسم مثلثًا وسمِه $\triangle ABC$. ثم استخدم مسلّمة تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإنشاء $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

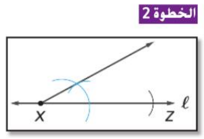


الخطوة 1



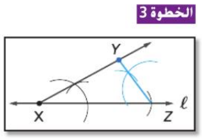
ارسم المستقيم ℓ وحدد النقطة X. وقم بإنشاء $\overline{XZ}$ بحيث $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2



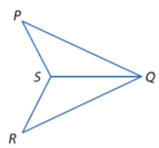
أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle A$ عند X باستخدام $\overleftrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية.

الخطوة 3



أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle C$ عند Z باستخدام $\overleftrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية. ضع اسمًا للنقطة التي يلتقي عندها الضلعان الجديدان للزوايا Y.

مثال 1 استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإثبات أن المثلثين متطابقان



اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: QS ينصف $\angle PQR$
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$؛ $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1. المعطيات
2. $\angle PQS \cong \angle RQS$	2. تعريف منصّف الزاوية
3. $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3. خاصية الانعكاس في التطابق
4. $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4. مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

تمرين موجّه

1. اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ ينصف؛ $\angle WZY$ $\overline{XZ}$ ينصف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

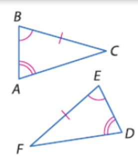
2 نظرية تساوي زاويتين وضلع

تطابق زاويتين وضلع غير محصور كافٍ أيضًا للبرهنة على تطابق مثلثين. تمثل علاقة التطابق هذه نظرية لأنها يمكن البرهنة عليها باستخدام نظرية الزوايا الثالثة.

النظرية 13.5 تطابق بتساوي زاويتين وضلع (AAS)

عند تطابق زاويتين والضلع غير المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين وضلع مناظرين في مثلث آخر، فالمثلثان متطابقان.

مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$،
الزاوية $\angle B \cong \angle E$،
و الضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

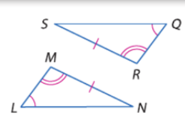


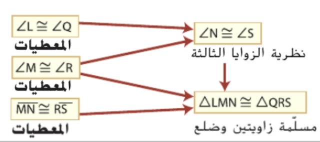
إثبات نظرية زاويتين وضلع

المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

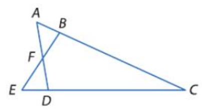
البرهان:





مثال 2 استخدام مسلّمة زاويتين وضلع لإثبات أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا من عمودين.

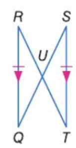


المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: نعلم أن $\angle BEC \cong \angle DAC$ و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. $\angle C \cong \angle C$ حسب خاصية الانعكاس. حسب مسلّمة ضلعين وزاوية، $\triangle ECB \cong \triangle ACD$.

تمرين موجّه



2. اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ و $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي من الصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من الحياة اليومية تطبيق تطابق المثلثات

الخدمة المجتمعية يعمل خلف ضمن مجموعة للخدمة المجتمعية لبناء جسر يعبر قناة في حديقة محلية. سيغطي الجسر القناة بين النقطتين C و B. حدد خلف النقطة الثابتة D لاستخدامها كنقطة مرجعية بحيث يكون بين القطع العلاقات الموضحة. A نقطة منتصف $\overline{CD}$ و DE *تساوي 5 أمتار*. ما الطول المطلوب للجسر؟

لتحديد طول $\overline{CD}$، يجب أن نبرهن أولاً على أن المثلثين اللذين صنعهما خلف متطابقان.

- بما أن $\overline{CB}$ متعامد على كل من $\overline{CB}$ و $\overline{DE}$. تشكل القطع مثلثات قائمة الزاوية كما يظهر على الرسم التخطيطي.
- كل الزوايا القائمة متطابقة. إذًا $\angle EDA \cong \angle BCA$.
- النقطة A هي نقطة المنتصف في $\overline{CD}$. إذًا $\overline{AD} \cong \overline{CA}$.
- $\angle BAC$ و $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس، ولذلك فهما متطابقتان.

ولهذا، وبموجب مسلّمة زاويتين وضلع محصور بينهما، فإن $\triangle EAD \cong \triangle BAC$.

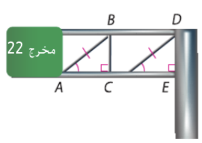
بما أن $\overline{CB} \cong \overline{DE}$. $\triangle EAD \cong \triangle BAC$ حسب CPCTC. بما أن قياس $\overline{DE}$ هو 5 m. إذًا قياس $\overline{CB}$ كذلك 5 m. إذًا، الطول المطلوب للجسر هو 5 m.

نصيحة دراسية

تطابق الزوايا الثلاث في المثال 3، $\angle B$ و $\angle E$ متطابقتان حسب نظرية الزوايا الثالثة. إلا أن تطابق الزوايا المتناظرة الثلاثة جميعًا لا يكفي للبرهنة على أن المثلثين متطابقان.

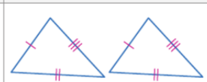
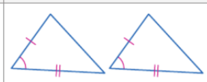
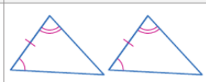
تمرين موجّه

3. في سقالة اللافتة الظاهرة على اليسار، $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}$، $\angle BAC \cong \angle DCE$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. واكتب برهان حرّ لإثبات أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.



لقد تعلمت عدة طرق للبرهنة على تطابق المثلثات.

ملخص المفهوم البرهنة على تطابق المثلثات

ضلع-ضلع-ضلع	ضلع-زاوية-ضلع	زاوية-ضلع-زاوية	ضلع-ضلع-زاوية
			
تطابق ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة.	تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المتناظرين غير المحصورين.

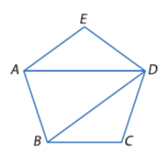
التحقق من فهمك

مثال 1 **البرهان** اكتب النوع المحدد من البراهين.

1. برهان تسلسلي

المعطيات: خماسي منتظم $ABCDE$

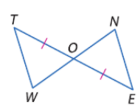
المطلوب: $\overline{AD} \cong \overline{DB}$



2. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{WT} \parallel \overline{NE}; \overline{TO} \cong \overline{EO}$

المطلوب: $\triangle WOT \cong \triangle NOE$

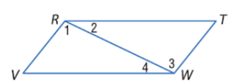


مثال 2

3. برهان حرّ

المعطيات: $\overline{RV} \parallel \overline{TW}; \overline{RT} \parallel \overline{VW}$

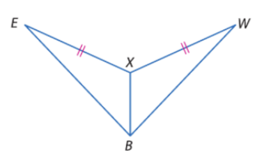
المطلوب: $\triangle RWV \cong \triangle WRT$



4. برهان من عمودين

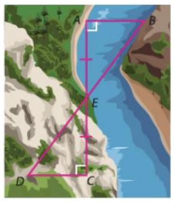
المعطيات: $\overline{EX} \cong \overline{WX}$؛ $\overline{XB}$ ينصف $\angle EXW$ و $\angle EBW$

المطلوب: $\triangle EXB \cong \triangle WXB$



مثال 3

5. **بناء الجسور** تحتاج مهندسة مسح إلى إيجاد المسافة من النقطة A إلى النقطة B عبر أحد الأودية. وضعت وتدًا عند A، ووضع زميل لها وتدًا عند B على الجانب الآخر من الوادي. ثم حددت مهندسة المسح النقطة C على نفس الجانب من الوادي الموجود عليه A بحيث $\overline{AB} \perp \overline{CA}$. تم وضع وتد رابع عند E، نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا، تم وضع وتد عند D بحيث إن $\overline{CA} \perp \overline{CD}$ وتقع D، و E، و B على الخط نفسه.



a. اشرح كيف تستطيع مهندسة المسح استخدام المثلثات التي تشكلت لإيجاد AB.

b. إذا كان $AC = 1500$ m، و $DC = 690$ m، و $DE = 973.5$ m . فما قياس AB؟ اشرح تبريرك.

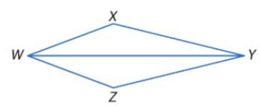
التمرين وحل المسائل

مثال 1

البرهان اكتب برهانًا حرًا.

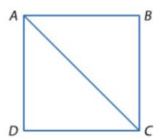
6. **المعطيات:** $\overline{WY}$ ينصف $\angle XWZ$ و $\angle XYZ$

المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$



7. **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}; \overline{AB} \perp \overline{AD}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$



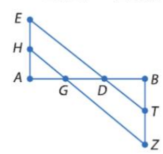
8. **الألعاب** الصورة على اليسار توضح بيت بطاقات. بيت البطاقات هو هيكل ناتج عن تكديس بطاقات اللعب فوق بعضها. اشرح كيف تساعد الخطوط المتوازية والمثلثات المتطابقة من يحاول بناء بيت بطاقات.

مثال 2

البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

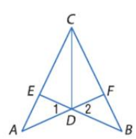
9. **المعطيات:** $\overline{HZ} \parallel \overline{ET}; \overline{AG} \cong \overline{BD}; \angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BGZ$



10. **المعطيات:** $\triangle CDB \cong \triangle CDA$

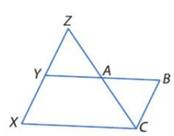
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BDF$



11. **فرضيات** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{AY} \cong \overline{BA}; \overline{ZX} \parallel \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{YZ} \cong \overline{BC}$



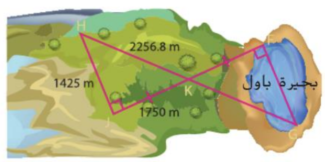
12. **البرهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XZ}$ هو المنصف العمودي لـ $\overline{WY}$

المطلوب: $\angle W \cong \angle Y$

مثال 3

13. **تمثيل النماذج** تريد مدرسة ثانوية أن تقيم سباق تجديف طوله 1500 m على بحيرة باول لكنها غير متأكدة مما إذا كانت البحيرة طويلة بما يكفي. لقياس المسافة عبر البحيرة، يحدد أعضاء الطاقم رؤوس المثلثات أدناه ويتوصلون إلى قياس أطوال $\triangle HJK$ كما يظهر أدناه.

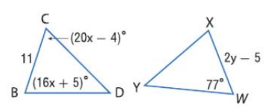


a. اشرح كيف يستطيع فريق الطاقم استخدام المثلثات التي تتشكل لتقدير مسافة FG عبر البحيرة.

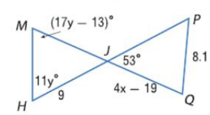
b. باستخدام القياسات المعطاة، هل البحيرة طويلة بما يكفي لكي يستخدمها الفريق كموقع لسباقهم؟

الجبر جـــد قيمة المتغير الذي يعطي مثلثات متطابقة.

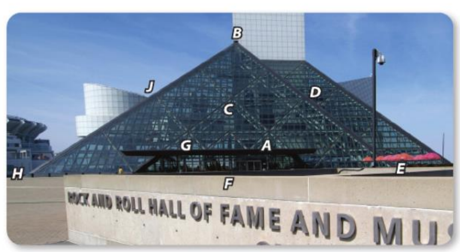
14. $\triangle BCD \cong \triangle WXY$



15. $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$



16. **تصميم المسرح** تبدو الأطواق الحديدية لسقف المسرح المكشوف الظاهر أدناه مكونة من عدة أزواج مختلفة من المثلثات المتطابقة. افترض أن الأطواق الحديدية التي تبدو أنها تقع على خط واحد تقع فعليًا على خط واحد.



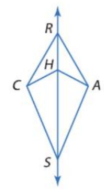
a. إذا كان $\overline{AB}$ ينصف $\angle CBD$ و $\angle CAD$، فبرهن على أن $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

b. إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ و $\angle FCA \cong \angle EDA$، فبرهن على أن $\triangle CAF \cong \triangle DAE$.

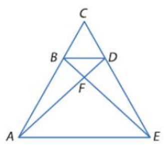
c. إذا كان $\angle BHG \cong \angle BEA$ و $\overline{HB} \cong \overline{EB}$، و $\angle HGJ \cong \angle EAD$، و $\angle JGB \cong \angle DAB$، فبرهن على أن $\triangle BHG \cong \triangle BEA$.

البرهان اكتب برهانًا حرًّا.

17. **المعطيات:** $\overleftrightarrow{RS}$ ينصف $\angle CSA$ و $\angle CHA$
المطلوب: $\triangle CHS \cong \triangle AHS$

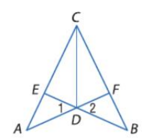


18. **المعطيات:** $\triangle BDF$ متساوي الأضلاع؛ $\angle BAD \cong \angle DEB$
المطلوب: $\triangle BAD \cong \triangle DEB$

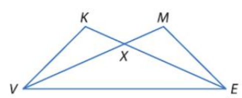


البرهان **اكتب برهانًا من عمودين.**

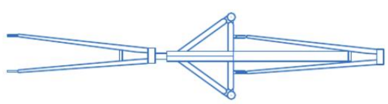
19. **المعطيات:** $\angle CED \cong \angle CFD$؛ $\overline{CD}$ ينصف $\angle ECF$
المطلوب: $\triangle CED \cong \triangle CFD$



20. **المعطيات:** $\overline{VK} \perp \overline{KX}; \overline{EM} \perp \overline{MX}; \overline{KX} \cong \overline{MX}$
المطلوب: $\angle V \cong \angle E$



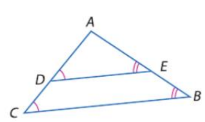
21. **الدراجة الثلاثية** يصور الرسم أدناه هيكل دراجة ثلاثية يتم النظر إليها من الجو.
a. خمّن نوعين من المثلثات المستخدمة لعمل الهيكل الأساسي.
b. ما المعلومات المطلوبة لإثبات تطابق المثلثات؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

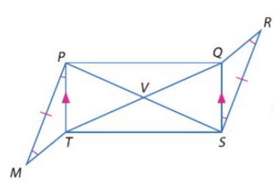
22. **الكتابة في الرياضيات** باستخدام مستطيل، اشرح طريقتين على الأقل لإثبات أن القطر يقسم المستطيل إلى مثلثين متطابقين.

23. **تحليل الخطأ** يقول خليفة إنه من الممكن إثبات أن $\triangle ACB \cong \triangle ADE$ ولكن خميس يختلف معه. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.



24. **التبرير** حدد ما إذا كان يمكن استخدام مسلمة ضلعين وزاوية (SSA) لإثبات تطابق مثلثين. اشرح تبريرك.

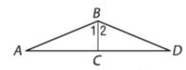
25. **تحدٍ** باستخدام المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي، اكتب برهانًا تسلسليًا يثبت أن $\triangle PVT \cong \triangle SVQ$.



26. **الكتابة في الرياضيات** كيف تعرف الطريقة (مسلّمة الأضلاع الثلاثة ومسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما، إلخ) التي يتم استخدامها عند البرهنة على تطابق المثلثات؟ استخدم مخططًا لشرح تبريرك.

تدريب على الاختبارات المعيارية

.27 المعطيات: $\overline{BC}$ متعامد على $\overline{AD}$، $\angle 1 \cong \angle 2$.



ما النظرية أو المسلّمة التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟

A AAS
B ASA
C SAS
D SSS

.28 **الإجابة القصيرة** اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول.

n	−8	−4	−1	0	1
$s(n)$	1.00	2.00	2.75	3.00	3.25

.29 **الجبر** إذا كان −7 مضروبًا في عدد أكبر من 1. فأي مما يلي يصف النتيجة؟

F عدد أكبر من 7
G عدد يتراوح بين −7 و 7
H عدد أكبر من −7
J عدد أقل من −7

30. SAT/ACT $\sqrt{121 + 104} = ?$

A 15
B 21
C 25
D 125
E 225

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$. اشرح.

31. $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5),$
$X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$

32. $A(0, 5), B(0, 0), C(-2, 0),$
$X(4, 8), Y(4, 3), Z(6, 3)$

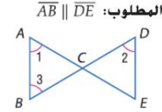
.33 **الجبر** إذا كان $\triangle RST \cong \triangle JKL$، و $RS = 7$، و $ST = 5$، و $RT = 9 + x$، و $JL = 2x - 10$، و $JK = 4y - 5$. فارسم شكلاً يمثل المثلثات المتطابقة وحدد له اسمًا. ثم جـــد x و y.

.34 **المعرفة المالية** يتقاضى رشيد 5 AED على طلاء صندوق البريد و 4 AED في الساعة لجز أعشاب حديقة. اكتب معادلة تمثل مقدار المال الذي يستطيع رشيد أن يكسبه من مالك منزل يطلي صندوق بريده ويجز أعشاب حديقته.

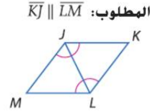
مراجعة المهارات

البرهان **اكتب برهانًا من عمودين لكلٍ مما يلي.**

.35 **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 1 \cong \angle 3$
المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



.36 **المعطيات:** $\angle MJK \cong \angle KLM$
$\angle LMJ$ و $\angle KLM$ متكاملتان.
المطلوب: $\overline{KJ} \parallel \overline{LM}$



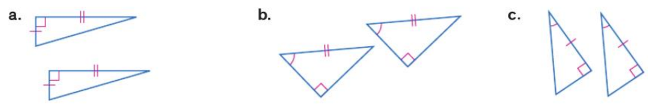
مختبر الهندسة

التطابق في المثلثات قائمة الزاوية

في الدرسين 4-13 و 5-13، تعلمت نظريات ومسلّمات تبرهن على تطابق المثلثات. كيف يتم تطبيق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

ادرس كل زوج من المثلثات قائمة الزاوية.



التحليل

1. هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إذا كان الأمر كذلك، فما نظرية أو مسلّمة التطابق المستخدمة؟

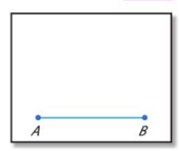
2. أعد صياغة قواعد التطابق المأخوذة من التمرين 1 باستخدام الساق، (L)، أو الوتر، (H)، الذي *يحل محل* الضلع. احذف A لأية زاوية قائمة بما أننا نعلم أن كل المثلثات القائمة الزاوية تحتوي على زاوية قائمة وكل الزوايا القائمة متطابقة.

3. **التخمين** إذا كنت تعلم أن الساقين المتناظرتين في مثلثين قائمي الزاوية متطابقتان، فما المعلومات الأخرى التي تحتاج إليها لإثبات تطابق المثلثين؟ اشرح.

في الدرس 5-13، تعلمت أن SSA ليست اختبارًا صالحًا لتحديد تطابق المثلثات. هل يمكن استخدام SSA في إثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟

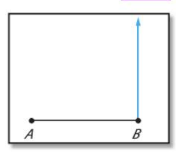
النشاط مسلّمة ضلعين وزاوية (SSA) والمثلثات قائمة الزاوية

الخطوة 1



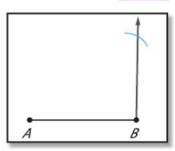
ارسم $\overline{AB}$ بحيث $AB = 6$ سنتيمترات.

الخطوة 2



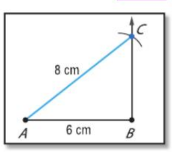
استخدم منقلة لرسم شعاع من B متعامد على $\overline{AB}$.

الخطوة 4



افتح الفرجار بعرض 8 سم. ضع النقطة عند A وارسم قوسًا يتقاطع مع الشعاع.

الخطوة 5



سمّ التقاطع C وارسم $\overline{AC}$ لاستكمال $\triangle ABC$.

التحليل

4. هل يقدم النموذج مثلثًا متفردًا؟

5. هل يمكنك استخدام طول الوتر وطول الساق لإثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟

6. التخمين بخصوص حالة SSA التي تنطبق على المثلثات قائمة الزاوية.

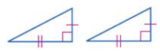
(يتبع في الصفحة التالية)

مختبر الهندسة
التطابق في المثلثات قائمة الزاوية تابع

يوفر عملك في الصفحة السابقة دليلاً على أربع طرق لإثبات تطابق المثلثات قائمة الزاوية.

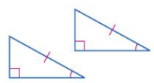
النظرية تطابق المثلثات قائمة الزاوية

النظرية 13.6 تطابق بتساوي ساقين
إذا كانت ساقا مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساقين المناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.



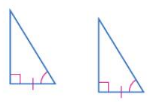
الاختصار LL يرمز إلى تساوي ساقين

النظرية 13.7 تطابق وتر وزاوية
إذا كان الوتر وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقين مع الوتر والزاوية الحادة المناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.



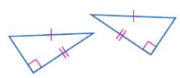
الاختصار HA يرمز إلى وتر وزاوية

النظرية 13.8 تطابق ساق وزاوية
إذا كانت ساق واحدة وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساق والزاوية الحادة المناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.



الاختصار LA يرمز إلى ساق وزاوية

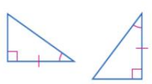
النظرية 13.9 تطابق وتر وساق
إذا كان الوتر وساق في مثلث قائم الزاوية متطابقان مع الوتر والساق المناظرين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

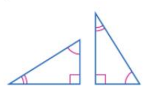


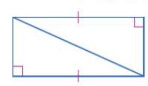
الاختصار HL يرمز إلى وتر وساق

التمارين

حدد ما إذا كان كل زوجين من المثلثات متطابقين. إذا كان الأمر كذلك، فحدد المسلّمة أو النظرية المستخدمة.

7. 

8. 

9. 

البرهان اكتب برهانًا لكلٍ مما يلي.

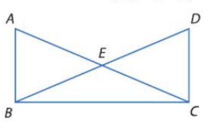
10. النظرية 13.6

11. النظرية 13.7

12. النظرية 13.8 (*تلميح*: هناك حالتان محتملتان.)

13. النظرية 13.9 (*تلميح*: استخدم نظرية فيثاغورس)

استخدم الشكل على اليسار.



14. المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

15. المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \perp \overline{BC}$
E نقطة منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

الدرس 13-6 المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

السابق
- تعرفت على المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

الحالي
1. استخدام خواص المثلثات متساوية الساقين.
2. استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع.

لماذا؟
- تحتوي قضبان قطارات الملاهي على دعامات مثلثة بين القضبان للدعم والتثبيت. الدعامات المثلثة التي في الصورة مثلثات متساوية الساقين.

المفردات الجديدة
ساقا المثلث متساوي الساقين
legs of an isosceles
زاوية الرأس
vertex angle
زوايا القاعدة
base angles

إثبات نظريات حول المثلثات.
عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

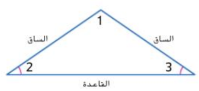
1 خواص المثلثات متساوية الساقين

تذكّر أن المثلثات متساوية الساقين تحتوي على ضلعين متطابقين على الأقل. أجزاء المثلث متساوي الساقين لها أسماء خاصة.

يُسمى الضلعان المتطابقان **ساقي المثلث متساوي الساقين**. والزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين يمثلان الساقين تُسمى **زاوية الرأس**. ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس يُسمى *القاعدة*. الزاويتان المتكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتا القاعدة**.

$\angle 1$ هي زاوية الرأس.

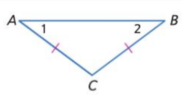
$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتا القاعدة.



النظريات المثلث متساوي الساقين

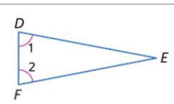
13.10 نظرية المثلث متساوي الساقين إذا كان ضلعان في المثلث متطابقين، فالزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين متطابقتان.

مثال إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



13.11 معكوس نظرية المثلث متساوي الساقين إذا كانت زاويتان في المثلث متطابقتين، فالضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين متطابقان.

مثال إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$.



سوف تثبت النظرية 13.11 في التمرين 37.

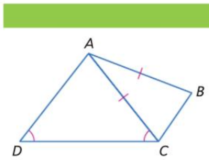
مثال 1 القطع المتطابقة والزوايا المتطابقة

a. اذكر اسم زاويتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$ و $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$.
إذًا $\angle ACB \cong \angle B$.

b. اذكر اسم قطعتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

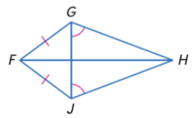
$\overline{AD}$ يقابل $\angle ACD$ و $\overline{AC}$ يقابل $\angle D$.
إذًا $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.



تمرين **موجّه**

1A. اذكر اسم زاويتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

1B. اذكر اسم قطعتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

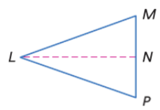


للبرهنة على نظرية المثلث متساوي الساقين. ارسم خطًا مستقيمًا مساعدًا واستخدم المثلثين المتكونين.

البرهان نظرية المثلث متساوي الساقين

المعطيات: $\triangle LMP$ ؛ $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: $\angle M \cong \angle P$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	1. كل قطعة لها نقطة منتصف واحدة فقط.
2. ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$	2. تحدد نقطتان مستقيمًا.
3. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$	3. نظرية نقطة المنتصف
4. $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4. خاصية الانعكاس في التطابق
5. $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5. المعطيات
6. $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6. مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)
7. $\angle M \cong \angle P$	7. CPCTC خاصية الانعكاس في التطابق

2 خواص المثلثات متساوية الأضلاع

تقود نظرية المثلث متساوي الساقين إلى لازمتين بخصوص زوايا المثلث متساوي الأضلاع.

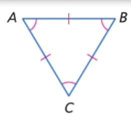
مراجعة المفردات

المثلث متساوي الأضلاع مثلث بثلاثة أضلاع متطابقة

اللازمات المثلث متساوي الأضلاع

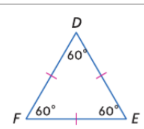
13.3 يكون المثلث متساوي الأضلاع فقط إذا كان متساوي الزوايا.

مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



13.4 يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة.

مثال إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FE}$، فإن $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60$.

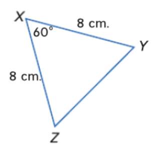


ستبرهن النتيجتين 13.3 و 13.4 في التمرينين 35 و 36.

مثال 2 إيجاد القياسات المجهولة

جـــد قياس كل مما يلي.

a. $m\angle Y$



بما أن $XY = XZ$، $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$. حسب نظرية المثلث متساوي الساقين. زاويتا القاعدة Z و Y متطابقتان. ولذلك $m\angle Z = m\angle Y$. استخدم نظرية مجموع المثلث لكتابة معادلة وحلها لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180$	نظرية مجموع المثلث
$60 + m\angle Y + m\angle Y = 180$	$m\angle X = 60$, $m\angle Z = m\angle Y$
$60 + 2(m\angle Y) = 180$	بسّط.
$2(m\angle Y) = 120$	اطرح 60 من كل طرف.
$m\angle Y = 60$	اقسم كل طرف على 2.

b. YZ

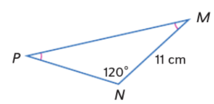
$m\angle Z = m\angle Y$. إذًا $m\angle Z = 60$ بالتعويض. بما أن $m\angle X = 60$. وقياس الزوايا الثلاث جميعها يبلغ 60. إذًا فالمثلث متساوي الزوايا. بما أن المثلث متساوي الزوايا يكون متساوي الأضلاع أيضًا. $XY = XZ = ZY$. بما أن $XY = 8$ سم. $YZ = 8$ سم بالتعويض.

نصيحة دراسية

المثلثات متساوية الساقين

كما اكتشفت في المثال 2. أي مثلث متساوي الساقين له زاوية واحدة بقياس 60° يجب أن يكون مثلثًا متساوي الأضلاع.

تمرين موجّه



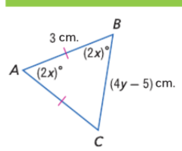
2A. $m\angle M$

2B. PN

يمكنك استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع والجبر لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

الجبر **جـــد قيمة كل متغير.**



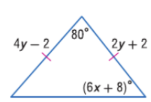
بما أن $\angle B = \angle A$. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ وفقًا لعكس نظرية المثلث متساوي الساقين. كل أضلاع المثلث متطابقة. إذًا فالمثلث متساوي الأضلاع. يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة. إذًا $2x = 60$ و $x = 30$.

المثلث متساوي الأضلاع. إذًا فكل الأضلاع متطابقة وأطوال كل الأضلاع متساوية.

$AB = BC$	تعريف المثلث متساوي الأضلاع
$3 = 4y - 5$	تعويض
$8 = 4y$	اجمع 5 على كل طرف.
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4.

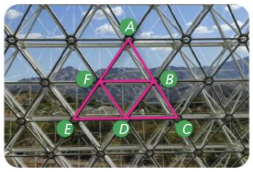
تمرين موجّه

3. جـــد قيمة كل متغير.



مثال 4 من الحياة اليومية تطبيق تطابق المثلثات

البيئة راجع صورة المحيط الحيوي على اليسار. $\triangle ACE$ مثلث متساوي الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$. و B نقطة منتصف $\overline{CA}$. أثبت أن $\triangle FBD$ أيضًا متساوي الأضلاع.



المعطيات: $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$.

المطلوب: $\triangle FBD$ متساوي الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع.	1. المعطيات
2. F نقطة منتصف AE، و D نقطة منتصف EC. و B نقطة منتصف CA.	2. المعطيات
3. $m\angle A = 60, m\angle C = 60, m\angle E = 60$	3. يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة.
4. $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	4. تعريف التطابق والتعويض
5. $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CA}$	5. تعريف المثلث متساوي الأضلاع
6. $AE = EC = CA$	6. تعريف التطابق
7. $\overline{AF} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{DC}, \overline{CB} \cong \overline{BA}$	7. نظرية نقطة المنتصف
8. $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	8. تعريف التطابق
9. $AF + FE = AE, ED + DC = EC, CB + BA = CA$	9. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
10. $AF + AF = AE, FE + FE = AE, ED + ED = EC, DC + DC = EC, CB + CB = CA, BA + BA = CA$	10. التعويض
11. $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = EC, 2DC = EC, 2CB = CA, 2BA = CA$	11. خاصية الجمع
12. $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = AE, 2DC = AE, 2CB = AE, 2BA = AE$	12. خاصية التعويض
13. $2AF = 2ED = 2CB, 2FE = 2DC = 2BA$	13. خاصية التعدي
14. $AF = ED = CB, FE = DC = BA$	14. خاصية القسمة
15. $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	15. تعريف التطابق
16. $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	16. مسلّمة ضلعين وزاوية (SAS)
17. $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	17. CPCTC خاصية الانعكاس في التطابق
18. $\triangle FBD$ متساوي الأضلاع.	18. تعريف المثلث متساوي الأضلاع

تمرين موجّه

4. إذا علمتَ أن $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع، و $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$ و $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$. فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.

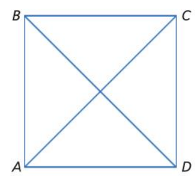
الربط بالحياة اليومية

المحيط الحيوي 2 هو أكبر نظام بيئي مغلق تمامًا تم تشييده على الإطلاق، ويغطي مساحة 0.0127 كم مربع في مدينة أوراكل في أريزونا. يبلغ ارتفاع أعلى نقطة في المنشأة البيئية الخاضعة للتحكم 27.3 مترًا، وتضم 6500 نافذة تحيط بمساحة حجمها 194.400 مترًا مكعب.

المصدر: جامعة أريزونا

التحقق من فهمك

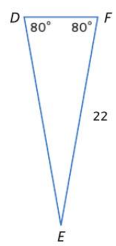
مثال 1 **راجع الشكل الموجود على اليسار.**



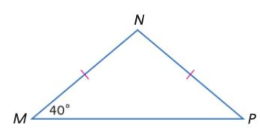
1. إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ فاذكر اسم زاويتين متطابقتين.
2. إذا كانت $\angle CAD \cong \angle ACD$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

مثال 2 **جـــد قياس كل مما يلي.**

3. DE

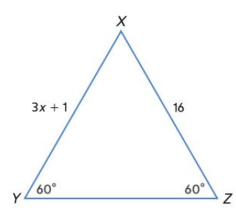


4. $m\angle MPN$

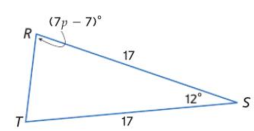


مثال 3 **الجبر جـــد قيمة كل متغير.**

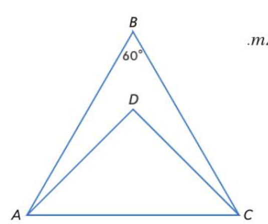
5.



6.



مثال 4 7. **البرهان اكتب برهانًا من عمودين.**

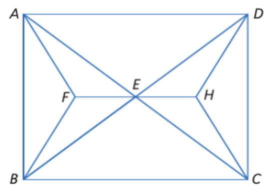


المعطيات: $m\angle ABC = 60$, $\overline{DA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAD \cong \angle BCD$.

المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **راجع الشكل الموجود على اليسار.**



8. إذا كانت $\angle DAE \cong \angle ADE$. فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

9. إذا كانت $\angle ABF \cong \angle BAF$. فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

10. إذا كانت $\overline{CE} \cong \overline{BE}$. فاذكر اسم زاويتين متطابقتين.

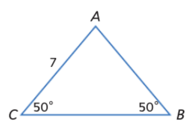
11. إذا كانت $\angle DCE \cong \angle CDE$. فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

12. إذا كانت $\overline{AE} \cong \overline{DE}$. فاذكر اسم زاويتين متطابقتين.

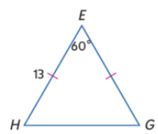
13. إذا كانت $\overline{DH} \cong \overline{CH}$. فاذكر اسم زاويتين متطابقتين.

مثال 2 **جـــد قياس كل مما يلي.**

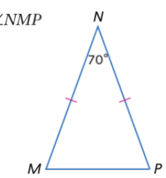
14. AB



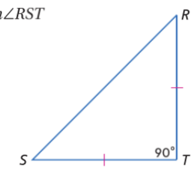
15. HG



16. $m\angle NMP$

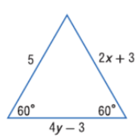


17. $m\angle RST$

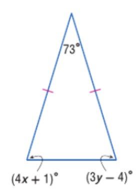


مثال 3 **الجبر** **جـــد قيمة كل متغير.**

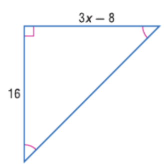
18.



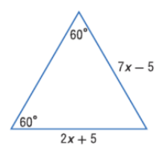
19.



20.



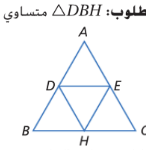
21.



مثال 4 **البرهان** **اكتب برهانًا حرًا.**

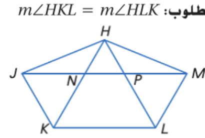
22. **المعطيات:** $\triangle ABC$ متساوي $\overline{BC}$ يوازي $\overline{DE}$ الأضلاع. $\triangle DEH$ متساوي الأضلاع.

المطلوب: $\triangle DBH$ متساوي الأضلاع.

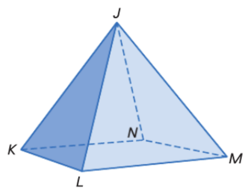


23. **المعطيات:**

المطلوب: $m\angle HKL = m\angle HLK$

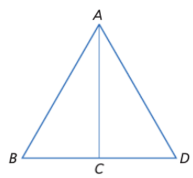


.24 **الأهرامات** يتكون الهرم الموضح من 4 مثلثات. إذا كان $\triangle JKL$؛ و $\triangle JLM$؛ و $\triangle JMN$؛ مثلثات متساوية الساقين، فأثبت أن $\triangle JKN$؛ أيضًا متساوي الساقين.



.25 **الإنشاء** أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع. اشرح الطريقة المستخدمة. ثم تحقق من إنشائك باستخدام القياس والرياضيات. ثم أنشئ منصفات زوايا لزاوية من كل مثلث.

.26 **البرهان** استنادًا إلى الإنشاء الوارد في التمرين 27. خمن وأثبت العلاقة بين منصف الزاوية وضلع المثلث الذي يقطعه.



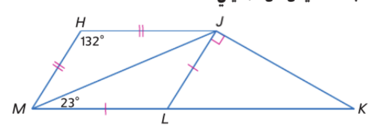
جـــــد قياس كل مما يلي.

27. $m\angle JLM$

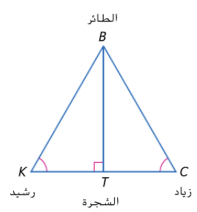
28. $m\angle HJM$

29. $m\angle JKL$

30. $m\angle JLK$

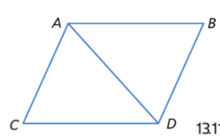


.31 **مراقبة الطيور** يراقب رشيد وزياد أحد الطيور أثناء بناء عش على شجرة. إذا كان عليهما استخدام زاوية الارتفاع ذاتها للتمكن من رؤية الطائر، فأثبت أن الشجرة تقع في منتصف المسافة بينهما



.32 **المعطيات:** $\triangle ACD$ و $\triangle ABD$ متساويا الساقين و $\overline{AB}$ يوازي $\overline{CD}$.

المطلوب: $\angle BAC$ و $\angle ABD$ متكاملتان.



البرهان **اكتب برهانًا من عمودين لكل نتيجة أو نظرية.**

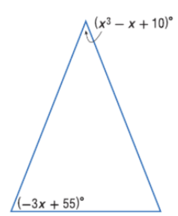
.33 نتيجة 13.3

.34 نتيجة 13.4

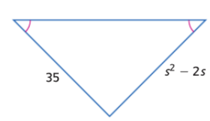
.35 نظرية 13.11

جـــــد قيمة كل متغير.

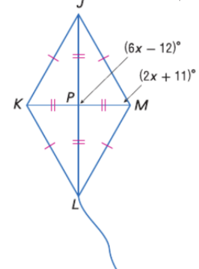
36.



37.



الألعاب استخدم رسمًا تخطيطيًا للطائرة الورقية الموضحة لإيجاد كل قياس



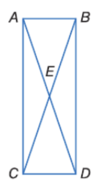
38. $m\angle JMP$

39. $m\angle MJK$

40. $m\angle MKL$

41. $m\angle KLM$

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف المثلثات الناشئة من قطري مستطيل.



a. **هندسيًا** استخدم مسطرة ومنقلة لرسم ثلاثة مستطيلات مختلفة وأقطارها. ضع تسميات كما هو موضح.

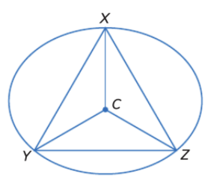
b. **جدوليًا** استخدم منقلة لقياس وتسجيل $m\angle CAE$ و $m\angle ACE$. استخدم هذه القياسات لإيجاد $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$. رتب النتائج في جدول.

c. **لفظيًا** اشرح كيفية استخدام $m\angle CAE$ و $m\angle ACE$. لإيجاد $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$.

d. **جبريًا** إذا علمتَ أن $m\angle CAE = x$. فاكتب تعبيرًا لقياس $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **تحدٍ** ΔXYZ محاط بدائرة مركزها C كما هو موضح. إذا علمتَ أن $m\angle YCZ = 120$ و $\overline{CZ}$ ينصف $\angle XZY$، فأثبت أن ΔXYZ متساوي الأضلاع.

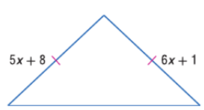


التبرير **حدد ما إذا كانت العبارات التالية تصح *أحيانًا أم دائمًا أم لا تصح أبدًا*. اشرح.**

44. إذا كان قياس زاوية الرأس في مثلث متساوي الساقين عددًا صحيحًا، فإن قياس كل زاوية قاعدة عدد زوجي.

45. إذا كان قياسا زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين عددين زوجيين، فإن قياس زاوية رأسه عدد فردي.

46. **تحليل الخطأ** يحاول سالم وسعيد إيجاد قيمة x في الشكل الموضح. يقول سالم إن $x = 5$. بينما يقول سعيد إن $x = 8$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.



47. **التبرير** إذا كان لديك رسم تخطيطي لمثلث متساوي الساقين. فكم عدد الزوايا التي يجب أن تكون معلومة لإيجاد قياس كل زاوية؟ اشرح تبريرك.

48. **الكتابة في الرياضيات** أين ترى التناظر في المثلثات متساوية الساقين والأضلاع؟

تدريب على الاختبارات المعيارية

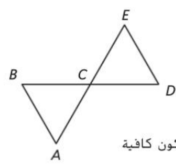
49. الجبر ما الكمية التي ينبغي إضافتها إلى كلا طرفي هذه المعادلة لاستكمال المربع؟

$x^2 - 10x = 3$

A -25
B -5
C 5
D 25

50. الإجابة القصيرة في مدرسة تضم 375 طالبًا، يمارس 150 طالبًا الرياضة ويشارك 70 طالبًا في نادي الخدمة الاجتماعية. يمارس 30 طالبًا الرياضة ويشاركون أيضًا في نادي الخدمة الاجتماعية. كم عدد الطلاب غير المشتركين في أي من الرياضة أو نادي الخدمة الاجتماعية؟

51. في الشكل $\overline{AE}$ و $\overline{BD}$ ينصفان بعضهما عند النقطة C.



ما المعلومات الإضافية التي ستكون كافية للبرهنة على أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟

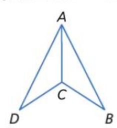
F $\angle A \cong \angle BCA$
G $\angle B \cong \angle D$
H $\angle ACB \cong \angle EDC$
J $\angle A \cong \angle B$

52. SAT/ACT إذا كان $x = -3$، فإن $4x^2 - 7x + 5 =$

A 2
B 14
C 20
D 42
E 62

مراجعة شاملة

53. إذا كانت $m\angle ADC = 35$ و $m\angle ABC = 35$، و $m\angle DAC = 26$ و $m\angle BAC = 26$. **فحدد ما إذا كان** $\triangle ADC \cong \triangle ABC$.

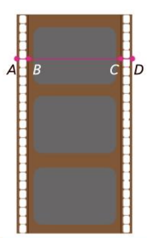


حدد ما إذا كان $\triangle STU \cong \triangle XYZ$. اشرح.

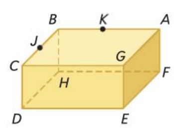
54. $S(0, 5)$, $T(0, 0)$, $U(1, 1)$, $X(4, 8)$, $Y(4, 3)$, $Z(6, 3)$

55. $S(2, 2)$, $T(4, 6)$, $U(3, 1)$, $X(-2, -2)$, $Y(-4, 6)$, $Z(-3, 1)$

56. التصوير يتم إدخال الفيلم عبر الكاميرا التقليدية عن طريق الترسين اللذين يمسكان الثقوب في الفيلم. المسافة من A إلى C تساوي المسافة من B إلى D. أثبت أن الشريطين المثقوبين لهما نفس العرض.



راجع الشكل الموجود على اليسار.



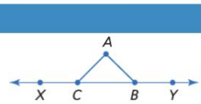
57. كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟

58. عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

59. هل النقاط A، و C، و D، و J على مستوى إحداثي واحد؟

مراجعة المهارات

60. البرهان إذا كانت $\angle ACB \cong \angle ABC$، فإن $\angle XCA \cong \angle YBA$.



الاستكشاف 13-7

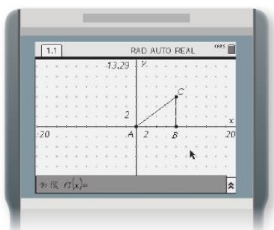
مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويلات التطابق

يمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لإجراء تحويلات على المثلثات في المستوى الإحداثي واختبار التطابق.

باستخدام شكل هندسي وعملية الدوران أو الانعكاس أو الإزاحة، ارسم الشكل المُحوَّل باستخدام ورق رسم بياني، مثلاً، أو ورق شفاف، أو برنامج هندسة. وحدد تسلسل التحويلات التي تحوّل شكل معطى إلى آخر.
استخدام الوصف الهندسي للحركات الصلبة لتحويل الأشكال هندسيًا وتوقع تأثير الحركة الصلبة المعلومة على الشكل المعطى؛ وبافتراض وجود شكلين، استخدم تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتحديد ما إذا كان الشكلان متطابقين.

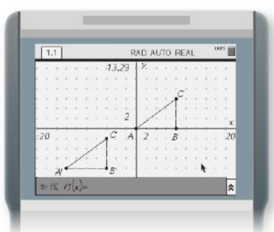
النشاط 1 إزاحة مثلث واختبار التطابق

الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة. واختر **Show Grid (إظهار الشبكة)** من القائمة **View (عرض)**. واستخدم القائمة **Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)** لضبط حجم النافذة.

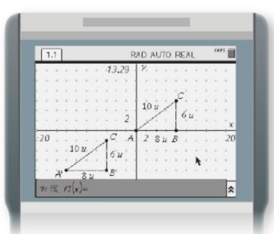


الخطوة 2 اختر Triangle (مثلث) من قائمة Shapes (أشكال) وارسم مثلثًا قائم الزاوية بساقين بقياس 6 وحدات و 8 وحدات كما هو موضح عن طريق وضع النقطة الأولى عند (0, 0) والنقطة الثانية عند (8, 0) والنقطة الثالثة عند (8, 6). واستخدم الأداة Text (نص) من القائمة Actions (إجراءات) لتسمية رؤوس المثلث A و B و C.

الخطوة 3 اختر **Translation (إزاحة)** من القائمة **Transformation (تحويل)**. ثم اختر $\triangle ABC$ والنقطة A. قم بإزاحة أو تحريك المثلث قائم الزاوية 8 وحدات لأسفل و 14 وحدة لليسار. قم بتسمية الرؤوس المناظرة للصورة A' و B' و C'.

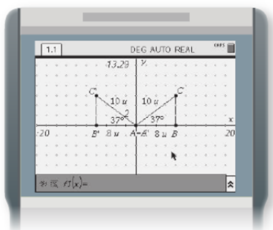


الخطوة 4 للتحقق من أن $\triangle A'B'C'$ يطابق $\triangle ABC$. اختر **Length (الطول)** من قائمة **Measurement (قياس)**. ثم اختر أي نقطتين طرفيتين واضغط على مفتاح **ENTER** لتحديد طول القطعة. وكرر هذا مع كل القطع في كل مثلث.



بالإضافة إلى قياس الأطوال، يمكن أيضًا استخدام تقنية TI-Nspire لقياس الزوايا. ويسمح لك هذا باستخدام اختبارات أخرى لتطابق المثلثات تتضمن قياس الزوايا.

النشاط 2 عكس مثلث واختبار التطابق



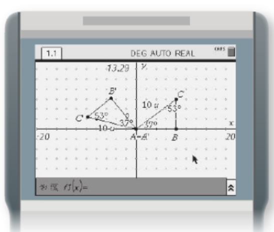
الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة. واعرض الشبكة وأعد رسم $\triangle ABC$ من النشاط 1.

الخطوة 2 اختر **Reflection (انعكاس)** من قائمة **Transformation (تحويل)** ثم اختر $\triangle ABC$ ثم المحور y لعكس أو قلب $\triangle ABC$ في المحور y. قم بتسمية الرؤوس المتناظرة للصورة A' و B' و C'.

الخطوة 3 استخدم الأداة **Angle (زاوية)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle A'$. استخدم الأداة **Length (طول)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد AB و $A'B'$ و AC و $A'C'$.

لدوران شكل حول نقطة الأصل باستخدام تقنية TI-Nspire. استخدم أداة Rotation (دوران) لتحديد الشكل ثم النقطة $(0, 0)$ ثم ارسم زاوية الدوران.

النشاط 3 دوران مثلث واختبار التطابق



الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة. واعرض الشبكة وأعد رسم $\triangle ABC$ من النشاط 1.

الخطوة 2 اختر **Rotation (دوران)** من القائمة **Transformation (تحويل)**. ثم اختر $\triangle ABC$. واختر نقطة الأصل واكتب عددًا لزاوية الدوران.

الخطوة 3 استخدم الأداة **Angle (زاوية)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle A'$ و $m\angle C$ و $m\angle C'$. استخدم الأداة **Length (طول)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد AC و $A'C'$

تحليل النتائج

حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متطابقين. اشرح تبريرك.

1. النشاط 1
2. النشاط 2
3. النشاط 3
4. اشرح السبب في أن $\triangle A'B'C'$ في النشاط 3 لا يبدو متطابقًا مع $\triangle ABC$.
5. **التخمين** كرر الأنشطة 1-3 باستخدام مثلث مختلف XYZ. حلل نتائجك وقارنها بالنتائج الموجودة في التمارين 1-3. خمّن العلاقة بين مثلث وصورته المتحولة بسبب الإزاحة أو الانعكاس أو الدوران.
6. هل المقاييس والملاحظات التي دونتها في الأنشطة 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 5؟ اشرح.

الدرس 13-7 تحويلات التطابق

.. السابق	.. الحالي	.. لماذا؟
• لقد برهنت على تطابق مثلثين.	1 تحديد الانعكاس والإزاحة والدوران. 2 التحقق من التطابق بعد تحويل تطابق.	• كثيرًا ما تستخدم صناعة الملابس مطبوعات تعرض أنماطًا. يتم إنشاء الكثير من هذه الأنماط عن طريق أخذ شكل وتحريكه لإنشاء شكل آخر في موقع مختلف أو قلب الشكل لإنشاء صورة معكوسة أو دوران الشكل الأصلي لإنشاء شكل جديد.

المفردات الجديدة

التحويل transformation
الصورة الأصلية preimage
الصورة image
تحويل التطابق congruence transformation
تساوي الأبعاد isometry
الانعكاس reflection
إزاحة translation
دوران rotation

استخدام الوصف الهندسي للحركات الصلبة لتحويل الأشكال هندسيًا وتوقع تأثير الحركة الصلبة المعلومة على الشكل المعطى؛ وبافتراض وجود شكلين، استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتحديد ما إذا كان الشكلان متطابقين.

استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتوضيح أن المثلثين يكونان متطابقين إذا وفقط إذا كانت أزواج الأضلاع المتناظرة متطابقة وأزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.

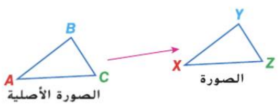
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد تحويلات التطابق

التحويل هو عملية تخطط شكلاً هندسيًا أصليًا، **أي الصورة الأصلية**، إلى شكل جديد يطلق عليه **الصورة**. ويستطيع التحويل أن يغير الموضع أو الحجم أو الشكل.

يمكن توضيح التحويل باستخدام سهم.
تبين لك عبارة التحويل $\triangle ABC \rightarrow \triangle XYZ$ أن A تتحول إلى X و B تتحول إلى Y و C تتحول إلى Z.

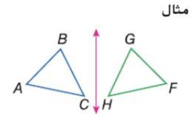


أما **تحويل التطابق**، الذي يُسمى أيضًا *التحويل الثابت* أو **تساوي الأبعاد**، هو التحويل الذي قد يختلف موضع الصورة فيه عن موضع الصورة الأصلية لكن يظل الشكلان متطابقين. والأنواع الرئيسية الثلاثة لتحويلات التطابق ظاهرة بالأسفل.

المفهوم الأساسي الانعكاس والإزاحة والدوران

يُعتبر **الانعكاس** أو *القلب* تحويلاً على خط يُسمى *خط الانعكاس*. وتقع كل نقطة في الصورة الأصلية وصورتها على مسافة واحدة من خط الانعكاس.

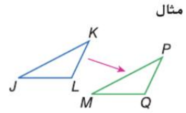
مثال



$\triangle ABC \longrightarrow \triangle FGH$

تُعتبر **الإزاحة** أو *التحريك* تحويلاً يؤدي إلى تحريك كل نقاط الشكل الأصلي للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.

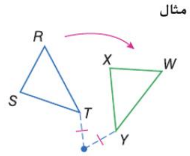
مثال



$\triangle JKL \longrightarrow \triangle MPQ$

يُعتبر **الدوران** أو *الاستدارة* تحويلاً حول نقطة ثابتة تُسمى *مركز الدوران* بزاوية معينة وفي اتجاه معين. وتقع كل نقطة في الشكل الأصلي وصورته تقع على مسافة واحدة من المركز.

مثال

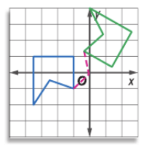


$\triangle RST \longrightarrow \triangle WXY$

مثال 1 تحديد تحويلات التطابق

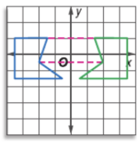
حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

.a



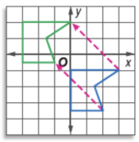
يقع كل رأس وصورته على مسافة واحدة من نقطة الأصل. والزوايا المتكونة من كل زوج من النقاط المتناظرة ونقطة الأصل تكون متطابقة. هذا دوران.

.b



يقع كل رأس وصورته على مسافة واحدة من المحور الرأسي *y*. هذا انعكاس.

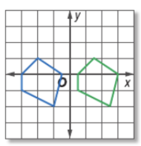
.c



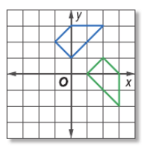
يقع كل رأس وصورته في الموضع نفسه، لكن بعد 3 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات لأعلى. هذه إزاحة.

تمرين موجّه

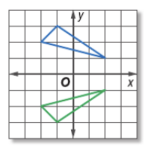
1A.



1B.



1C.



نصيحة دراسية

التحويلات لا تحافظ كل التحويلات على التطابق. والتحويلات التي لا تغير حجم الشكل أو شكله هي فقط التي تعتبر تحويلات تطابق.

يمكن تمثيل بعض الحركات أو الأجسام في الحياة اليومية بالتحويلات.

مثال 2 من الحياة اليومية تحديد تحويل في الحياة اليومية

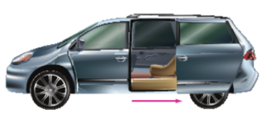
الألعاب **راجع المعلومات المبينة في الجانب الأيسر. حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في الرسم التخطيطي باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة أو دورانًا*.**

يعطي موضع الوزن في أوقات مختلفة مثالاً على الدوران. ومركز الدوران هو كاحل الشخص.

تمرين موجّه

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة أو دورانًا*.

2A.



2B.

الربط بالحياة اليومية

تتضمن اللعبة الظاهرة أعلاه ربط وزن بحلقة تستطيع وضعها حول كاحلك. وعندما يمر الحبل من أمام قدمك الأخرى، تقفز فوقه.

9:39 PM Thu 2 Apr

elib.moe.gov.ae

2 التحقق من التطابق

التحقق من التطابق يمكنك التحقق من أن الانعكاس والإزاحة والدوران للمثلثات تنتج مثلثات متطابقة باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS).

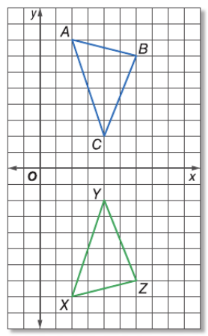
مثال 3 التحقق من التطابق بعد التحويل

المثلث XZY بالرؤوس $X(2, -8)$ و $Z(6, -7)$ و $Y(4, -2)$ تحويل للمثلث $\triangle ABC$ بالرؤوس $A(2, 8)$ و $B(6, 7)$ و $C(4, 2)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

الفهم مطلوب منك أن تحدد نوع التحويل - انعكاس أو إزاحة أو دوران. ثم عليك إثبات أن الشكلين متطابقين.

التخطيط استخدم صيغة المسافة لإيجاد قياس كل ضلع. ثم أثبت أن المثلثين متطابقان بموجب SSS.

الحل مثّل بيانيًا كل شكل. التحويل يبدو انعكاسًا على المحور الرأسي x جـــــد قياس أضلاع كل مثلث.



$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(6-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40}$$

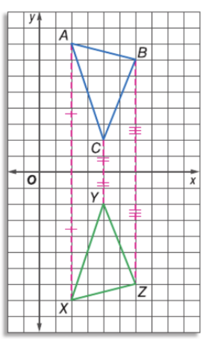
$$XZ = \sqrt{(6-2)^2 + [-7-(-8)]^2} = \sqrt{17}$$

$$ZY = \sqrt{(6-4)^2 + [-7-(-2)]^2} = \sqrt{29}$$

$$XY = \sqrt{(2-4)^2 + [-8-(-2)]^2} = \sqrt{40}$$

بما أن $AB = XZ$ و $BC = ZY$ و $AC = XY$. إذًا $\overline{AB} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{BC} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{AC} \cong \overline{XY}$ حسب مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS). $\triangle ABC \cong \triangle XZY$

التحقق استخدم تعريف الانعكاس. استخدم مسطرة لقياس ومقارنة القطع التي تربط كل رأس وصورته بخط التناظر. هذه القطع متطابقة. إذًا فالمثلثات متطابقة. ✔



نصيحة دراسية

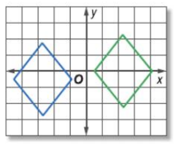
تساوي الأبعاد كما يحافظ التماثل على التطابق، يحافظ *تساوي الأبعاد المباشر* أيضًا على اتجاه الأحرف أو ترتيبها. يؤدي *تساوي الأبعاد غير المباشر* أو العكسي إلى تغيير هذا الترتيب، مثل تغييره من الحركة في اتجاه عقارب الساعة إلى الحركة عكس اتجاه عقارب الساعة.

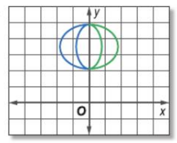
تمرين موجّه

3. المثلث JKL بالرؤوس $J(-2, 2)$ و $K(-8, 5)$ و $L(-4, 6)$ تحويل للمثلث $\triangle PQR$ بالرؤوس $P(2, -2)$ و $Q(8, -5)$ و $R(4, -6)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل. وتحقق من أنه تحويل تطابق.

التحقق من فهمك

مثال 1 حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة أو دورانًا.*

1. 

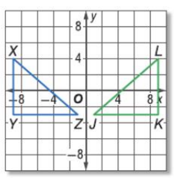
2. 

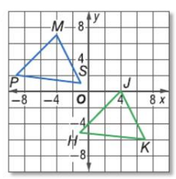
مثال 2

3. 

4. 

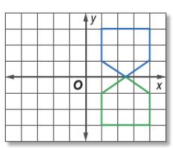
مثال 3 الهندسة الإحداثية حدد كل تحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

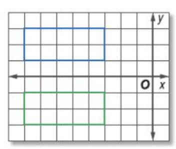
5. 

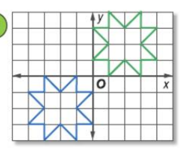
6. 

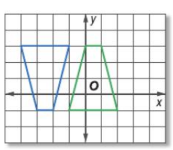
التمرين وحل المسائل

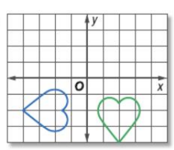
مثال 1 البنية حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة أو دورانًا.*

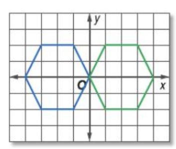
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

مثال 2 حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في كل صورة باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة* أو دورانًا.

13. 

14. 

15. 

16. 

مثال 3 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق.

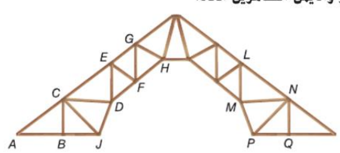
17. $M(-7, -1), P(-7, -7), R(-1, -4);$ $T(7, -1), V(7, -7), S(1, -4)$

18. $A(3, 9), B(3, 7), C(7, 7);$ $S(3, 5), T(3, 3), R(7, 3)$

19. $A(-4, 5), B(0, 2), C(-4, 2);$ $X(-5, -4), Y(-2, 0), Z(-2, -4)$

20. $A(2, 2), B(4, 7), C(6, 2);$ $D(2, -2), F(4, -7), G(6, -2)$

الإنشاء حدد نوع تحويل التطابق الذي تم على كل مثلث محدد لإنشاء المثلث الآخر في الطوق الحديدي بالضلعين المماثلين الأيسر والأيمن الظاهرين أدناه.



21. $\triangle NMP$ إلى $\triangle CJD$

22. $\triangle EFD$ إلى $\triangle GHF$

23. $\triangle CBJ$ إلى $\triangle NQP$

الألعاب الترفيهية حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في كل صورة باعتباره *انعكاسًا أو إزاحة* أو دورانًا.

24. 

25. 

26. 

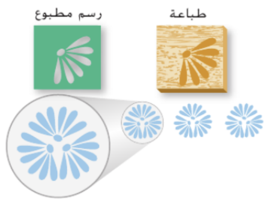
27. **المدرسة** حدد التحويلات المستخدمة لفتح قفل توفيقي على خزانة. حدد خط التناظر أو مركز الدوران إذا كان ذلك ملائمًا.

28. **البنية** حدد الحروف الكبيرة في الأبجدية الإنجليزية التي لها خطوط انعكاس رأسية و/أو أفقية.

29 **الديكور** تعيد غاية ترتيب ديكورات غرفة نومها. تستطيع استخدام رسوم مطبوعة أو طباعة لإنشاء التصميم المعروض.

a. إذا استخدمت غاية الرسم المطبوع، فما نوع التحويل المستخدم لإنتاج كل زهرة في التصميم؟

b. ما نوع التحويل المستخدم إذا استخدمت الطباعة لإنتاج كل زهرة في التصميم؟



.30 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأزواج المرتبة لشكل وصورته بعد الإزاحة.

a. **هندسيًا** ارسم المستطيلين المتطابقين $ABCD$ و $WXYZ$ على مستوى إحداثي.

b. **لفظيًا** كيف تصل من رأس على $ABCD$ إلى الرأس المناظرة على $WXYZ$ باستخدام حركة أفقية ورأسية فقط؟

c. **جدوليًا** انسخ الجدول الموضح. استخدم مستطيلك لتملأ الإحداثيات الأفقية والإحداثيات الرأسية والقيمة المجهولة في عمود التحويل.

المستطيل ABCD	التحويل	المستطيل WXYZ
$A(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$W(?, ?)$
$B(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$X(?, ?)$
$C(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$Y(?, ?)$
$D(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$Z(?, ?)$

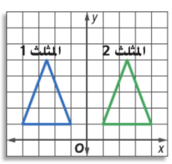
d. **جبريًا** رمز الدالة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$، حيث a و b عددان حقيقيان، يمثل تحولاً من مجموعة إحداثيات إلى مجموعة أخرى. استكمل الرمز التالي الذي يمثل قاعدة الإزاحة $ABCD \rightarrow WXYZ: (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.31 **تحدٍ** استخدم الرسم التخطيطي إلى اليسار.

a. حدد تحويلين للمثلث 1 يمكن أن يؤديا إلى المثلث 2.

b. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا في المثلثين لكي يؤدي أكثر من تحويل واحد على الصورة الأصلية إلى الصورة نفسها؟ اشرح تبريرك.

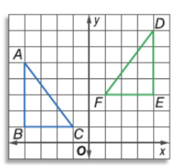


.32 **التبرير** التمدد نوع آخر من التحويل. في الرسم التخطيطي، تم تمديد قصاصة ورقية صغيرة لتنتج قصاصة ورقية أكبر. اشرح السبب في أن التمديدات ليست تحويل تطابق.

مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لكل مما يلي، بخلاف الأمثلة المذكورة في هذا الدرس.

.33 الانعكاس **.34** الإزاحة **.35** الدوران

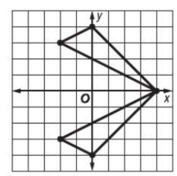
.36 **الكتابة في الرياضيات** في الرسم التخطيطي على اليسار $\triangle DEF$ يُسمى الانعكاس الانزلاقي للمثلث $\triangle ABC$. بناء على الرسم التخطيطي، عرف الانعكاس الانزلاقي. هل يُعتبر الانعكاس الانزلاقي تحويل تطابق؟ ضع تعريفًا لتحويل التطابق في إجابتك. اشرح تبريرك.



تدريب على الاختبارات المعيارية

.37 الإجابة القصيرة تتسوق علياء لشراء كرسي مكتب جديد من متجر يقدم تخفيضًا يبلغ 50% على كراسي المكتب. ومعها أيضًا إيصال بخصم 50% على أي شيء. تعتقد علياء أنها تستطيع الآن أن تحصل على كرسي المكتب مجانًا. هل هذا صحيح؟ إذا لم يكن كذلك، فماذا ستكون النسبة المئوية للخصم الذي ستحصل عليه في وجود كل من التخفيض والإيصال؟

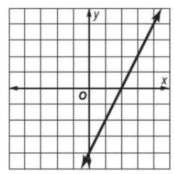
.38 حدد تحويل التطابق الظاهر.



A تمديد　**C** دوران

B انعكاس　**D** إزاحة

.39 انظر إلى التمثيل البياني أدناه. ما ميل الخط المبين؟



F -2　**H** 1

G -1　**J** 2

.40 SAT/ACT ما تقاطع المحور الرأسي y مع الخط الذي تحدده المعادلة $3x - 4 = 12y - 3$؟

A -12　**D** $\frac{1}{4}$

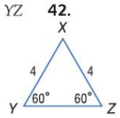
B $-\frac{1}{12}$　**E** 12

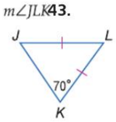
C $\frac{1}{12}$

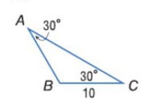
مراجعة شاملة

جـــد قياس كل مما يلي.

41. YZ **42.** $m\angle JLK$**43.** AB



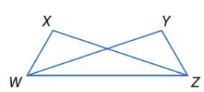




.44 البرهان اكتب فقرة برهانًا حرًا.

المعطيات: $\angle YZW \cong \angle XWZ$ و $\angle YWZ \cong \angle XZW$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle ZYW$



مراجعة المهارات

حدّد إحداثيات نقطة المنتصف في قطعة بالنقاط النهائية المعطاة.

45. $A(10, -12), C(5, -6)$　**46.** $A(13, 14), C(3, 5)$　**47.** $A(-28, 8), C(-10, 2)$

48. $A(-12, 2), C(-3, 5)$　**49.** $A(0, 0), C(3, -4)$　**50.** $A(2, 14), C(0, 5)$

الدرس 13-8 المثلثات والبرهان الإحداثي

.. السابق

- لقد استخدمت الهندسة الإحداثية لإثبات تطابق المثلثات.

.. الحالي

1. تحديد موقع المثلثات وكتابة أسمائها للاستخدام في البراهين الإحداثية.
2. كتابة البراهين الإحداثية.

.. لماذا؟

- يتلقى النظام العالمي لتحديد المواقع (GPS) بثًا من الأقمار الصناعية يسمح بتحديد الموقع الدقيق لسيارة. ويمكن استخدام المعلومات مع برنامج ملاحة لتقديم اتجاهات القيادة.

المفردات الجديدة

البرهان الإحداثي
coordinate proof

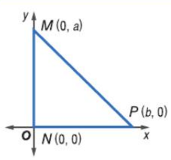
إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 تحديد موقع المثلثات وكتابة أسمائها

كما هو الحال مع نظم تحديد المواقع العالمية، تتيح معرفة إحداثيات الشكل في مستوى إحداثي إمكانية أن تتعرف على خصائصه وتتوصل إلى استنتاجات بشأنه. **البراهين الإحداثية** تستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات المفاهيم الهندسية. والخطوة الأولى في برهان إحداثي هي وضع الشكل على المستوى الإحداثي.

مثال 1 تحديد موقع مثلث وتسميته

حدد موقع المثلث قائم الزاوية MNP واسمه على المستوى الإحداثي بحيث يصل طول الساق $\overline{MN}$ إلى a من الوحدات وطول الساق $\overline{NP}$ إلى b من الوحدات.



- سيكون طول (أطوال) الضلع (الأضلاع) الموازي للمحاور أسهل في التحديد من طول (أطوال) الضلع (الأضلاع) الذي ليس موازيًا لمحور. بما أن هذا مثلث قائم الزاوية، يمكن تحديد موقع ضلعين على محور.
- سيتيح وضع الزاوية القائمة للمثلث، $\angle N$، عند نقطة الأصل إمكانية وضع الساقين بمحاذاة المحورين الأفقي x والرأسي y.
- ضع المثلث في الربع الأول.
- بما أن M على المحور y، فإحداثي x لها هو 0. وإحداثي y هو a لأن طول الساق a وحدات.
- بما أن P على المحور x، فإحداثي y هو 0. وإحداثي x هو b لأن طول الساق b وحدات.

تمرين موجّه

1. حدد موقع المثلث متساوي الساقين JKL واسمه على المستوى الإحداثي بحيث يصل طول قاعدته $\overline{JL}$ إلى a وحدات وتقع رأسه K على المحور الرأسي y ويبلغ ارتفاع المثلث b وحدات.

المفهوم الأساسي وضع المثلثات على المستوى الإحداثي

الخطوة 1 استخدم نقطة الأصل كرأس أو مركز للمثلث.

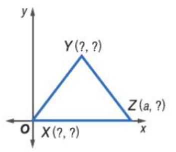
الخطوة 2 ضع ضلعًا واحدًا على الأقل في المثلث على محور.

الخطوة 3 حافظ على المثلث داخل الربع الأول إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 4 استخدم الإحداثيات التي تجعل الحسابات بسيطة قدر الإمكان.

مثال 2 تحديد الإحداثيات المجهولة

عيّن الإحداثيات المجهولة للمثلث متساوي الساقين XYZ.

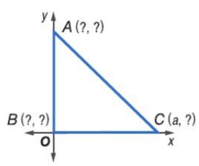


يقع الرأس X عند نقطة الأصل؛ وإحداثياته هي $(0, 0)$.

يقع الرأس Z على المحور X. إذًا إحداثي y هو 0. إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$.

$\triangle XYZ$ متساوي الساقين. إذًا باستخدام قطعة رأسية من Y إلى المحور X ونظرية الوتر-الساق تثبت أن إحداثي X لـ Y في منتصف المسافة بين 0 و a أو $\frac{a}{2}$. لا يمكننا كتابة إحداثي Y بدلالة a. إذًا نسميها b. إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تمرين موجّه



2. عيّن الإحداثيات المجهولة للمثلث متساوي الساقين القائم الزاوية ABC.

نصيحة دراسية
الزاوية القائمة تقاطع المحورين الأفقي x والرأسي y بشكل زاوية قائمة، ولهذا فهو مكان مناسب لتحديد موقع الزاوية القائمة في شكل مثل المثلث قائم الزاوية.

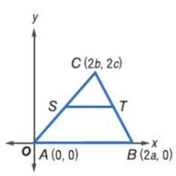
2 كتابة البراهين الإحداثية

بعد وضع مثلث على المستوى الإحداثي وتسميته، يمكننا استخدام البراهين الإحداثية للتحقق من الخصائص وبرهنة النظريات.

نصيحة دراسية
البرهان الإحداثي تسري الإرشادات والأساليب المستخدمة في هذا الدرس على كل الأشكال المضلعة، وليس المثلثات فقط.

مثال 3 كتابة برهان إحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًا لتوضيح أن القطعة المستقيمة الموصلة بين نقطتي المنتصف في ضلعين لمثلث تتوازى مع الضلع الثالث.



ضع رأسًا عند نقطة الأصل واكتب عليها A. استخدم إحداثيات تمثل مضاعفات العدد 2 لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيات على 2.

المعطيات: $\triangle ABC$
S نقطة منتصف $\overline{AC}$.
T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$

البرهان:

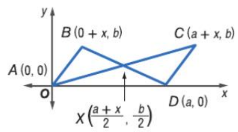
حسب قانون نقطة المنتصف، إحداثيات S هي $\frac{2b+0}{2}$ و $\frac{2c+0}{2}$ أو (b, c) وإحداثيات T هي $\frac{2a+2b}{2}$ و $\frac{0+2c}{2}$ أو $(a+b, c)$.

حسب قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو $\frac{c-c}{a+b-b}$ و 0 وميل $\overline{AB}$ هو $\frac{0-0}{2a-0}$ أو 0.

بما أن $\overline{ST}$ و $\overline{AB}$ لهما الميل نفسه، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

تمرين موجّه

3. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle CDX$.



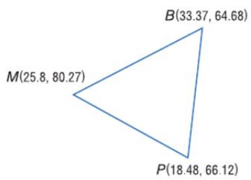
الأساليب المستخدمة مع البراهين الإحداثية يمكن استخدامها في حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 4 من الحياة اليومية تصنيف المثلثات

الجغرافيا مثلث برمودا منطقة يحيط بها ميامي وفلوريدا وسان خوان وبورتوريكو وبرمودا. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 25.8°N 80.27°W و 18.48°N 66.12°W و 33.37°N 64.68°W. اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن مثلث برمودا مختلف الأضلاع.

الخطوة الأولى هي تعيين إحداثيات كل موقع. افترض أن M تمثل ميامي و B تمثل برمودا و P تمثل بورتوريكو.

إذا لم يكن أي ضلعين في $\triangle MPB$ متطابقين، فإن مثلث برمودا مختلف الأضلاع. استخدم قانون المسافة وحاسبة لإيجاد المسافة بين كل موقع.

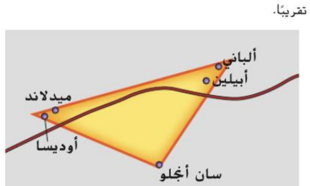


$$MB = \sqrt{(33.37 - 25.8)^2 + (64.68 - 80.27)^2}$$
$$\approx 17.33$$
$$MP = \sqrt{(25.8 - 18.48)^2 + (80.27 - 66.12)^2}$$
$$\approx 15.93$$
$$PB = \sqrt{(33.37 - 18.48)^2 + (64.68 - 66.12)^2}$$
$$\approx 14.96$$

بما أن كل ضلع له طول مختلف، فإن $\triangle MPB$ مختلف الأضلاع. ولهذا، مثلث برمودا مختلف الأضلاع.

تمرين موجّه

4. **جغرافيا** في عام 2006، تعاونت مجموعة من متاحف الفن لتشكيل مثلث تكساس الغربي (West Texas Triangle) للترويج إلى مجموعاتهم الفنية. تشكلت هذه المنطقة من مدن أوديسا وسان أنجلو. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 31.9°N 102.3°W و 32.7°N 99.3°W و 31.4°N 100.5°W. اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن مثلث تكساس الغربي متساوي الساقين تقريبًا.



الربط بالحياة اليومية

اختفت أكثر من 50 سفينة و 20 طائرة بشكل غامض في قطاع من شمال المحيط الأطلنطي أمام ساحل أمريكا الشمالية والمعروف باسم مثلث برمودا.

المصدر: موسوعة بريتانيكا

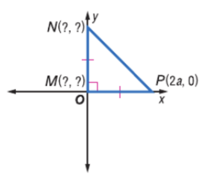
التحقق من فهمك

مثال 1 **ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.**

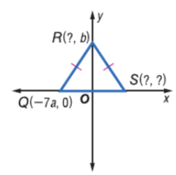
1. المثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$ بقاعدة $\overline{BC}$ طولها $4a$ وحدات.
2. المثلث قائم الزاوية $\triangle FGH$ بساقين $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ بحيث طول الساق $\overline{FG}$ هو $3a$ وحدات وطول الساق $\overline{GH}$ هو $5b$ وحدات

مثال 2 **عيّن الإحداثي (الإحداثيات) المجهول لكل مثلث.**

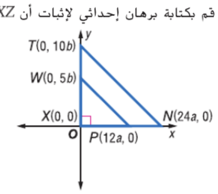
3.



4.



مثال 3 5. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\triangle TXZ$ يشبه $\triangle WXY$.

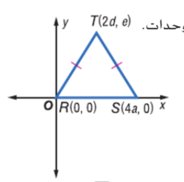


مثال 4 6. **الدورة الأولمبية** خلال رحلة الشعلة الأولمبية من أولمبيا في اليونان إلى دورة الألعاب الشتوية 2010. مرت الشعلة بمدينة لندن في إنجلترا وشلالات نياغرا وأونتاريو وانتهى بها المطاف في فانكوفر في كولومبيا البريطانية. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 42.9°N و 81.2°W و 43.1°N و 79.1°W و 49.3°N و 123.1°W. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن هذه النقاط الثلاث الواقعة في مسار الشعلة تشكل مثلثًا مختلف الأضلاع.

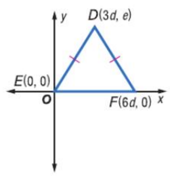
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.**

7. متساوي الأضلاع $\triangle ABC$ بطول أضلاع $5a$ وحدات.
8. متساوي الأضلاع قائم الزاوية $\triangle RST$ طول وتره $\overline{RS}$ يساوي $4d$ وحدات.



9. قائم الزاوية $\triangle JKL$ بالساقين $\overline{JK}$ و $\overline{JL}$. بحيث طول $\overline{JK}$ يبلغ a وحدات وطول $\overline{JL}$ 4 أضعاف طول $\overline{JK}$.
10. متساوي الأضلاع $\triangle XYZ$ بأضلاع طولها $\frac{1}{4}c$ وحدات.

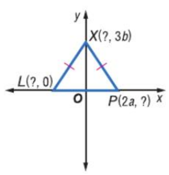


11. متساوي الساقين ΔDEF بساقين $\overline{DE}$ و $\overline{DF}$ مع قاعدة طولها $6d$ وحدات.

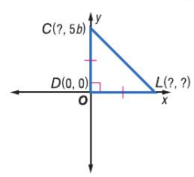
12. قائم الزاوية ΔMNP بوتر $\overline{MN}$. طول $\overline{MP}$ يبلغ $2a$ وحدات وطول $\overline{NP}$ يبلغ $4b$ وحدات.

مثال 2 **عيّن الإحداثي (الإحداثيات) المجهول لكل مثلث.**

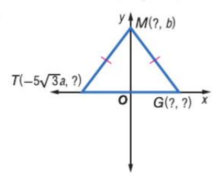
13.



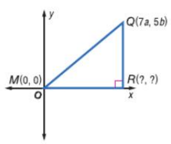
14.



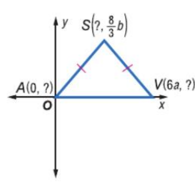
15.



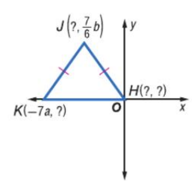
16.



17.

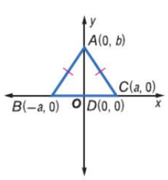


18.

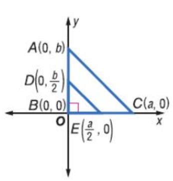


مثال 3 **البرهان اكتب برهانًا إحداثيًا لكل عبارة.**

19. عند رسم الارتفاع في مثلث متساوي الساقين، يتكون مثلثين متطابقين.

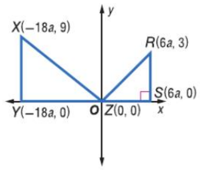


20. القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي منتصف ساقي مثلث قائم الزاوية توازي الوتر.



مثال 4 **البرهان** **اكتب برهانًا إحداثيًا لكل عبارة.**

21. ΔXYZ يشبه ΔRSZ.



22. $R(-3, -3), S(3, -3), T(0, 3\sqrt{3} - 3)$ تشكل مثلثًا متساوي الأضلاع.

23. **كرة القدم** فريق ولاية أوهايو في كولومبوس، أوهايو وفريق ولاية بنسلفانيا في يونيفرستي بارك، بنسلفانيا وفريق نورث ويسترن في إيفانستون، إلينوي هم جميعًا جزء من مجموعة العشرة الكبار. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 39.98°N و 82.98°W و 40.79°N 77.86°W و 41.88°N و 87.62°W. ما نوع المثلث المتشكل بهذه المدن الثلاث؟

24. **كرة الطلاء** سلطان وجمال وصالح جميعًا في فريق واحد في لعبة كرة الطلاء. يقف جمال عند نقطة الأصل وسلطان عند (4, 3) وصالح عند (0, 5). قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن المثلث المكون بواسطة فريق كرة الطلاء متساوي الأضلاع.

ارسم ΔXYZ وجـــد ميل كل ضلع في المثلث. حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. اشرح.

25. $X(0, 0), Y(2a, 3b), Z(3a, 2b)$

26. $X(0, 0), Y(7c, 3), Z(-3c, 7c^2)$

27. **الملاهي** طارق في مدينة الملاهي ويريد ركوب الأفعوانية ودوامة الخيول وسيارات التصادم. إذا علمتَ أن الأفعوانية تقع عند (2, −1) ودوامة الخيول تقع عند (3, 3) وسيارات التصادم تقع عند (−2, 0). فقم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن الشكل المكون بالألعاب الثلاث قائم الزاوية.

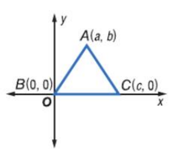
28. **البرهان** قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن ΔABC مثلث مختلف الأضلاع إذا علمت أن الرؤوس هي $A(0, 0)$ و $B(3a, 5a)$ و $C(-2a, 8a)$.

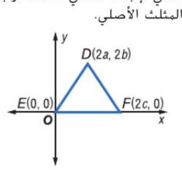
29. **الماراثون الثلاثي** تشارك فتحية في ماراثون ثلاثي. تقع نقطة البداية عند نقطة الأصل. خلال الشوط الأول من الماراثون الثلاثي، تركض فتحية لمسافة 10 km باتجاه الشرق ثم تركب الدراجة لمسافة 40 km باتجاه الشمال وفي الشوط الأخير تسبح لمسافة 1.5 km باتجاه الشمال. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن المثلث المتكون من نقطة البداية وبداية ركوب الدراجة ونهاية السباحة هو مثلث مختلف الأضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

30. **التبرير** إذا علمت أن نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتر مثلث قائم الزاوية رأساه عند (−4, 2) و (4, 2). فجـــد الرأس الثالثة.

31. **تحدٍ** قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أنه في حالة ضرب كل إحداثي من إحداثيات x وإحداثيات y في 2، فإن الشكل الناتج يشبه المثلث الأصلي.

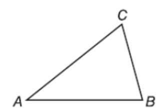




32. **التبرير** إذا علمت أن ΔABC مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية والإحداثيات هي $A(0, 0)$، $B(4, 0)$. فكم عدد النقاط المختلفة التي يمكن أن تقع C عندها على المستوى الإحداثي؟

تدريب على الاختبارات المعيارية

33. **الإجابة الشبكية** في الشكل أدناه، $m\angle B = 76$. قياس $\angle A$ نصف قياس $\angle B$. ما قياس $m\angle C$؟

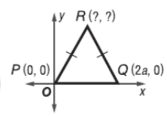


34. **الجبر** ما الإحداثي الأفقي x لحل نظام المعادلات الظاهر أدناه؟

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 2y = -18 \end{cases}$$

A -6 C 3
B -3 D 6

35. ما إحداثيات النقطة R في المثلث؟



F $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ H $\left(\frac{b}{2}, a\right)$
G (a, b) J $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$

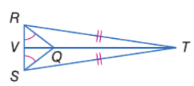
36. **SAT/ACT** بالنسبة لكل x.

$17x^5 + 3x^2 + 2 - (-4x^5 + 3x^3 - 2) =$

A $13x^5 + 3x^3 + 3x^2$
B $13x^5 + 6x^2 + 4$
C $21x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 4$
D $21x^5 + 3x^2 + 3x^3$
E $21x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 4$

مراجعة شاملة

راجع الشكل الموجود على اليسار.



37. اذكر اسم زاويتين متطابقتين.
38. اذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.
39. اذكر اسم زوج من المثلثات المتطابقة.

40. **المنحدرات** يتطلب القانون الأمريكي لذوي الإعاقة أن تمتد منحدرات الكراسي المتحركة لمسافة 30 cm على الأقل لكل ارتفاع بمقدار 2.5 cm.

a. حدد الميل المتمثل في هذا المطلب.

b. أقصى طول يسمح به القانون لمنحدر هو 9 m. كم يبلغ ارتفاع أعلى نقطة في هذا المنحدر بالسنتيمتر؟

مراجعة المهارات

جـــد المسافة بين كل زوج من النقاط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

41. $X(5, 4)$ و $Y(2, 1)$
42. $A(1, 5)$ و $B(-2, -3)$
43. $J(-2, 6)$ و $K(1, 4)$

13-9A مختبر الهندسة
إنشاء المنصفات

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

الإنشاء منصف عمودي

أنشئ منصفًا عموديًا على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle MPQ$، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2

اطو المثلث إلى نصفين على طول $\overline{MQ}$ بحيث تلامس الرأس M الرأس Q.

الخطوة 3

استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overline{AB}$ بطول الطي. $\overline{AB}$ هو المنصف المتعامد لـ $\overline{MQ}$.

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

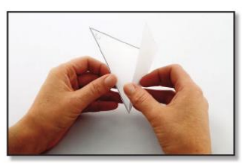
الإنشاء منصف الزاوية

أنشئ منصف زاوية لمثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle ABC$ وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2



اطوِ المثلث إلى نصفين من الرأس A بحيث يكون الضلعان $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ محاذيين لبعضهما.

الخطوة 3

حدد النقطة L في الثنية على طول الحافة $\overline{BC}$. استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overline{AL}$ بطول الطي. $\overline{AL}$ هو منصف الزاوية للمثلث $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل

1. أنشئ المنصف العمودي لضلعي $\triangle MPQ$ الآخرين ومنصف الزاوية للزاويتين الأخريين للمثلث. ما الذي تلاحظه بشأن التقاطعات؟

كرر هذا التمرين مع نوعي المثلثين الآخرين.

2. حاد
3. منفرج
4. قائم

استكشاف 13-9B

مختبر الهندسة
إنشاء الوسيطات والارتفاعات

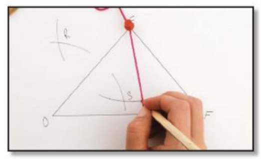
وسيط المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء وسيط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

اربط طرف خيط حول قلم رصاص، واستخدم دبوسًا لتثبيت الخيط بالرأس.

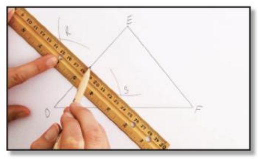
الإنشاء 1 وسيط المثلث

الخطوة 1



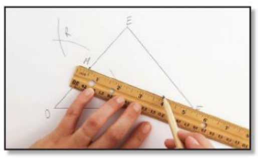
ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{DE}$. سمِّ نقاط التقاطع R و S.

الخطوة 2



استخدم مسطرة تقويم لإيجاد النقطة حيث $\overline{RS}$ يتقاطع مع $\overline{DE}$. سمّ النقطة M. وهي نقطة منتصف $\overline{DE}$.

الخطوة 3

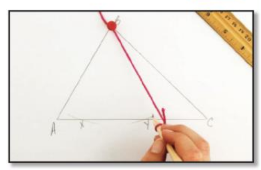


ارسم مستقيمًا يمر خلال F و M. $\overline{FM}$ هو وسيط$\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل.

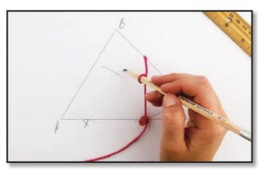
الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1



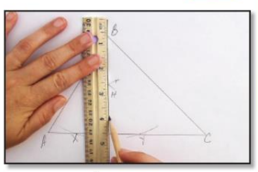
ضع الدبوس على الرأس B لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.

الخطوة 2



عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسمار على X وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. سمّ نقطة تقاطع الأقواس H.

الخطوة 3



استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overrightarrow{BH}$. سمّ النقطة حيث تتقاطع $\overrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ النقطة D. $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ ومتعامد على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل

1. أنشئ وسيطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ما الذي تلاحظه بشأن وسيطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ما الذي تلاحظه؟

مختبر تقنية التمثيل البياني
متباينة المثلث

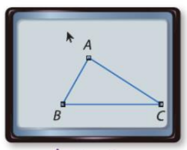
يمكنك استخدام تطبيق Cabri™ Jr. على حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لاكتشاف خواص المثلثات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

النشاط 1

قم بعمل مثلث. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.

الخطوة 1 قم بعمل مثلث باستخدام أداة المثلث في القائمة **F2**. ثم استخدم أداة **Alph-Num** في القائمة **F5** لتسمية الرؤوس بالرموز A، و B، و C.

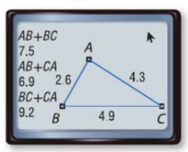


الخطوة 1

الخطوة 2 أدخل إلى أداة **المسافة والطول** التي تظهر باسم **D. & Length** تحت **Measure** في القائمة **F5**. استخدم الأداة لقياس كل ضلع في المثلث.

الخطوة 3 اعرض $AB + BC$، و $AB + CA$، و $BC + CA$ باستخدام أداة **Calculate** في القائمة **F5**. اكتب القياسات

الخطوة 4 انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.



الخطوتان 2 و 3

تحليل النتائج

1. استبدل كل ● بالرموز >، أو <، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$AB + BC \bullet CA$ $\quad$ $AB + CA \bullet BC$ $\quad$ $BC + CA \bullet AB$

2. انقر فوق الرؤوس واسحبها لتغيير شكل المثلث. ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ما الذي تلاحظه؟
3. انقر فوق النقطة A واسحبها بحيث تقع فوق المستقيم BC. ما الذي تلاحظه في AB، و BC، و CA؟ هل A، و B، و C رؤوس مثلث؟ اشرح.
4. **التخمين** حول مجموع أطوال ضلعين من مثلث وطول الضلع الثالث.
5. هل المقاييس والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمارين 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 4؟ اشرح.
6. استبدل كل ● بالرموز <، أو >، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$|AB - BC| \bullet CA$ $\quad$ $|AB - CA| \bullet BC$ $\quad$ $|BC - CA| \bullet AB$

ثم انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث وراجع إجاباتك. ما الذي تلاحظه؟

7. كيف تمكنت من استخدام ملاحظاتك لتحديد الأطوال المحتملة للضلع الثالث بالمثلث من خلال معرفة طولي الضلعين الآخرين؟

الدرس 13-9

مساحة متوازي الأضلاع والمثلث

السابق

- لقد أوجدت مساحات المستطيلات والمربعات.

الحالي

1 إيجاد محيط ومساحة متوازي الأضلاع.

2 إيجاد محيط ومساحة المثلث.

لماذا؟

- لغز تانجرام هو لغز صيني قديم يمكن إعادة ترتيبه لتكوين صور مختلفة مثل الحيوانات الموضحة. تبقى مساحة اللغز ثابتة قبل الترتيب وبعده. وهي مجموع مساحات القطع.

المفردات الجديدة

قاعدة متوازي الأضلاع
base of a parallelogram
ارتفاع متوازي الأضلاع
height of a parallelogram
قاعدة المثلث
base of a triangle
ارتفاع المثلث
height of a triangle

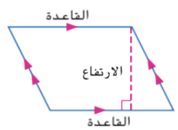
استخدام الإحداثيات لحساب محيطات المضلعات ومساحات المثلثات والمستطيلات مثل استخدام قانون المسافة.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 مساحة متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. وأي ضلع في متوازي الأضلاع يمكن تسميته **قاعدة متوازي الأضلاع**. **ارتفاع متوازي الأضلاع** هو المسافة العمودية بين أي قاعدتين متوازيتين.

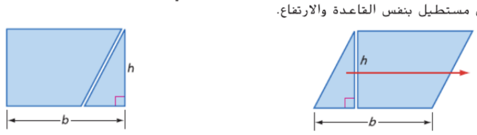


يمكنك استخدام المسلمة التالية لوضع صيغة لمساحة متوازي الأضلاع.

المسلّمة 13.4 مسلّمة جمع المساحات

مساحة منطقة هي مجموع مساحات الأجزاء غير المتداخلة بها.

في الشكل أدناه، تم قص مثلث قائم الزاوية من أحد أضلاع متوازي أضلاع وإزاحته إلى الضلع الآخر كما هو موضح لتكوين مستطيل بنفس القاعدة والارتفاع.

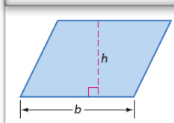


تذكر من السابق أن مساحة المستطيل هي ناتج ضرب القاعدة في الارتفاع. وحسب مسلمة جمع المساحات، متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h له نفس مساحة مستطيل قاعدته b وارتفاعه h.

المفهوم الأساسي مساحة متوازي الأضلاع

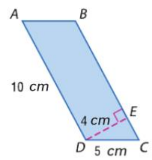
الشرح المساحة A لمتوازي الأضلاع هي ناتج ضرب القاعدة b في الارتفاع المناظر لها h.

الرموز $A = bh$



مثال 1 محيط ومساحة متوازي الأضلاع

جـــد محيط ومساحة $\square ABCD$.



المحيط

بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة في متوازي الأضلاع.
إذًا $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. إذًا
$AB = 5$ cm و $BC = 10$ cm.

محيط $\square ABCD = AB + BC + DC + AD$
$5 + 10 + 5 + 10 = 30$ cm

المساحة

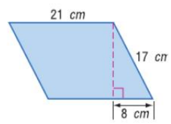
الارتفاع المذكور. DE هو 4 cm. $\overline{BC}$ هي القاعدة وتبلغ 10 cm.

$A = bh$ مساحة متوازي الأضلاع
$= (10)(4) = 40 \text{ cm}^2$ $b = 10$ و $h = 4$

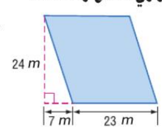
تمرين موجّه

جـــد محيط كل متوازي أضلاع ومساحته.

1A.

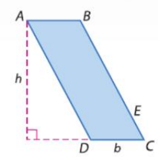


1B.



نصيحة دراسية

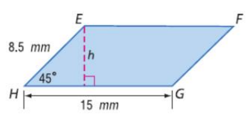
ارتفاعات الأشكال يمكن حساب ارتفاع شكل عن طريق مد قاعدة. في المثال 1، يمكن قياس ارتفاع $\square ABCD$ المناظر للقاعدة $\overline{DC}$ من خلال مد $\overline{DC}$.



يمكنك استخدام حساب المثلثات لحساب مساحة متوازي الأضلاع.

مثال 2 مساحة متوازي الأضلاع

جـــد مساحة $\square EFGH$.



الخطوة 1 استخدم المثلث الذي يبلغ قياس زواياه $45°$–$45°$–$90°$ لإيجاد الارتفاع h لمتوازي الأضلاع.

تذكر أنه إذا كان قياس الساق المقابلة للزاوية $45°$ هو h، فإن قياس الوتر هو $h\sqrt{2}$.

$h\sqrt{2} = 8.5$ استبدل 8.5 بقياس الوتر.

$h = \frac{8.5}{\sqrt{2}} = 6$ mm تقريبًا اقسم كل طرف على $\sqrt{2}$.

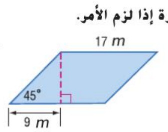
الخطوة 2 جـــد المساحة.

$A = bh$ مساحة متوازي الأضلاع
$\approx (15)(6) = 90 \text{ mm}^2$ $b = 15$ و $h \approx 6$

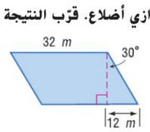
تمرين موجّه

جـــد مساحة كل متوازي أضلاع. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

2A.



2B.



انتبه!

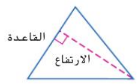
الدقة تذكر أنه يتم قياس المحيط باستخدام الوحدات الخطية مثل البوصة والسنتيمتر. ولكن يتم قياس المساحة باستخدام الوحدات المربعة مثل القدم المربع والمليمتر المربع.

مراجعة المفردات

ارتفاع المثلث قطعة مستقيمة ممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم المحتوي على الضلع المقابل، كما أنها عمودية على المستقيم المحتوي على هذا الضلع

2 مساحة المثلث

مساحة المثلث كما هو الحال مع قاعدة متوازي الأضلاع، **قاعدة المثلث** يمكن أن تكون أي ضلع. **ارتفاع المثلث** هو طول ارتفاع مرسوم من قاعدة معينة.



يمكنك استخدام المسلمة التالية لوضع صيغة لمساحة المثلث.

المسلّمة 13.5 مسلّمة تطابق المساحات

إذا كان شكلان متطابقتين، فسيكون لهما المساحة ذاتها.

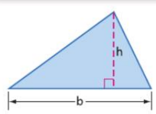
في الشكل أدناه، تم قص متوازي أضلاع إلى نصفين بطول القطر لتكوين مثلثين متطابقين بنفس القاعدة والارتفاع.

حسب مسلّمة تطابق المساحات، المثلثان المتطابقان لهما نفس المساحة. إذًا، مثلث قاعدته b وارتفاعه h تبلغ مساحته نصف مساحة متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

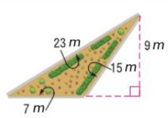
الشرح المساحة A للمثلث هي نصف ناتج ضرب القاعدة b في الارتفاع المناظر h.

الرموز $A = \frac{1}{2}bh$ أو $A = \frac{bh}{2}$



مثال 3 من الحياة اليومية محيط ومساحة المثلث

البستنة **أمير يحتاج كمية كافية من النشارة لتغطية الحديقة المثلثة الموضحة وكمية كافية من حجارة الممشى لعمل حدود لها. إذا علمت أن كيسًا واحدًا من النشارة يغطي $12\ m^2$ وكل حجر من أحجار الممشى يغطي $10\ cm$ من الحد، فكم عدد أكياس النشارة وأحجار الممشى التي يجب عليه شراؤها؟**



الخطوة 1 جـــد محيط الحديقة.

محيط الحديقة $23 + 15 + 7 = 45\ m$

الخطوة 2 جـــد مساحة الحديقة.

$A = \frac{1}{2}bh$ مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(7)(9) = 31.5\ m^2$ $b = 7$ و $h = 9$

الخطوة 2 استخدم تحليل الوحدات لتحديد المطلوب من كل عنصر.

أكياس النشارة

$31.5\ \cancel{m^2} \cdot \frac{1\ bag}{12\ \cancel{m^2}} =$ 2.625 من الأكياس

أحجار الممشى

$45\ m \cdot \frac{100\ \cancel{cm}}{1\ \cancel{m}} \cdot \frac{1\ stone}{10\ \cancel{cm}} =$ 450 حجرًا

قرّب عدد الأكياس للأعلى بحيث تكون هناك كمية كافية من النشارة. سوف يحتاج إلى 3 أكياس من النشارة و 135 من أحجار الممشى.

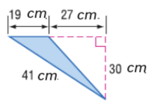
الربط بالحياة اليومية

يمكن للحدائق المثلثة أن تشكل بؤرة في المناظر الطبيعية أو تنتج ببساطة من تقاطع الممرات.

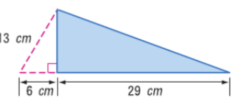
تمرين **موجّه**

جـــد محيط كل مثلث ومساحته.

3A.



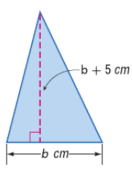
3B.



يمكنك استخدام الجبر للحل لإيجاد القياسات غير المعلومة في متوازيات الأضلاع والمثلثات.

مثال 4 استخدام المساحة لإيجاد القياسات المجهولة

الجبر **ارتفاع مثلث يزيد عن قاعدته بمقدار 5 cm. ومساحة المثلث $52\ cm^2$. جـــد القاعدة والارتفاع.**



الخطوة 1 اكتب تعابير لتمثيل كل قياس.

افترض أن b تمثل قاعدة المثلث. إذًا، الارتفاع يساوي $b + 5$.

الخطوة 2 استخدم صيغة مساحة المثلث لإيجاد b.

$A = \frac{1}{2}bh$	مساحة المثلث
$52 = \frac{1}{2}b(b + 5)$	استبدل A بـــ 52 و h بـــ b + 5.
$104 = b(b + 5)$	اضرب كل طرف في 2.
$104 = b^2 + 5b$	خاصية التوزيع
$0 = b^2 + 5b - 104$	اطرح 104 من كل طرف.
$0 = (b + 13)(b - 8)$	حلل إلى العوامل.
$b + 13 = 0$ و $b - 8 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$b = -13$ $\quad b = 8$	حل لإيجاد b.

الخطوة 3 استخدم التعابير من الخطوة 1 لإيجاد كل قياس.

بما أن الطول لا يمكن أن يكون بالسالب. إذًا قياس القاعدة 8 cm وقياس الارتفاع $8 + 5$ أو 13 cm.

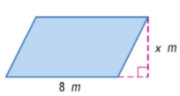
نصيحة دراسية

خاصية ناتج الضرب الصفري إذا كان ناتج ضرب عاملين يساوي 0، فأحدهما على الأقل يجب أن يساوي 0.

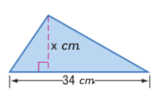
تمرين **موجّه**

الجبر **جـــد قيمة** x.

4A. $A = 148\ m^2$



4B. $A = 357\ cm^2$

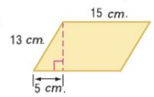


4C. الجبر قاعدة متوازي أضلاع ضعف ارتفاعه. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع $72\ cm^2$. فجـــد القاعدة والارتفاع.

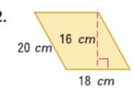
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **جـــد محيط ومساحة كل متوازي أضلاع أو مثلث. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

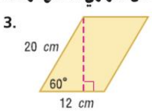
1.



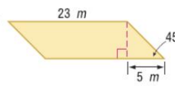
2.



3.

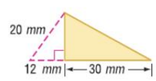


4.

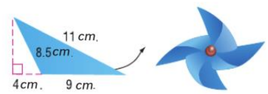


5.

6.

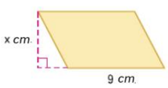


.7 **الحرف اليدوية** يصنع عبد الرحمن وعبد الرحيم المراوح الورقية. كل مروحة مكونة من 4 مثلثات بالأبعاد الموضحة. جـــد محيط ومساحة كل مثلث.

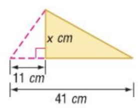


مثال 4 **جـــد قيمة** x.

8. $A = 153 \text{ cm}^2$



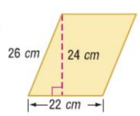
9. $A = 165 \text{ cm}^2$



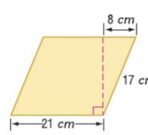
التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **البنية** **جـــد محيط ومساحة كل متوازي أضلاع أو مثلث. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

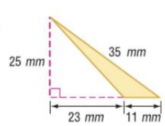
10.



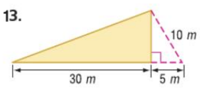
11



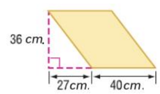
12.



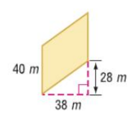
13.



14.



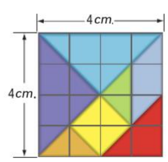
15.



.16 **ألغاز تانجرام** مساحة لغز تانجرام الموضح 4 cm^2.

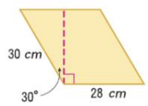
.a جـــد محيط ومساحة المثلث الأرجواني. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

.b جـــد محيط ومساحة متوازي الأضلاع الأزرق. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

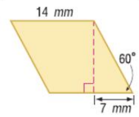


مثال 2 **البنية جـــد مساحة كل متوازي أضلاع. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

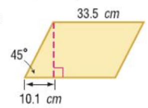
17.



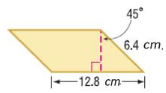
18.



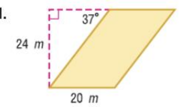
19.



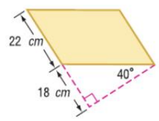
20.



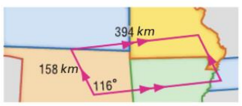
21.



22.



23. **الطقس** كثيرًا ما يتم عرض مناطق ترقب الأعاصير على خرائط الطقس باستخدام متوازيات أضلاع. ما مساحة المنطقة المتأثرة بإعلان ترقب الأعاصير الموضح؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر مربع.



مثال 4

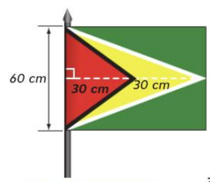
24. ارتفاع متوازي أضلاع يزيد عن قاعدته بمقدار 4 mm. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع 221 mm مربعًا، فجـــد القاعدة والارتفاع.

25. ارتفاع متوازي أضلاع يساوي ربع قاعدته. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع $36\ cm^2$. فجـــد القاعدة والارتفاع.

26. قاعدة مثلث مِثلي ارتفاعه. إذا علمت أن مساحة المثلث $49\ m^2$. فجـــد القاعدة والارتفاع.

27. ارتفاع مثلث أقصر من قاعدته بمقدار 3 m. إذا علمت أن مساحة المثلث $44\ m^2$. فجـــد القاعدة والارتفاع.

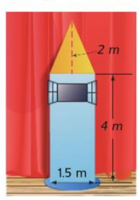
28. الأعلام يريد عمر صنع نسخة مطابقة للعلم الوطني لغينيا.



a. ما مساحة قطعة القماش المطلوبة للمنطقة الحمراء؟ والصفراء؟

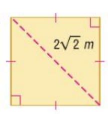
b. إذا علمت أن تكلفة القماش AED 3.99 للمتر المربع لكل لون وقد اشترى كمية القماش المطلوبة بالضبط. فكم سيتكلف العلم؟

29. دراما ليلى مسؤولة عن تصميم الديكور للأداء الفني لمسرحية *روميو وجوليت* في مدرستها. يغطي لتر واحد من الطلاء $7\ m^2$. فكم عدد اللترات المطلوبة من كل لون إذا علمت أن السقف والبرج يتطلب كل منهما 3 طبقات من الطلاء؟

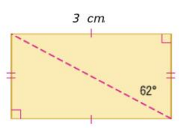


جـــد محيط ومساحة كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

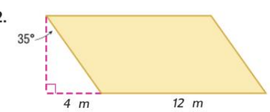
30.



31.



32.



الهندسة الإحداثية جـــد مساحة كل شكل. واشرح الطريقة المستخدمة.

33 $\square ABCD$ به الرؤوس $A(4, 7)$ و $B(2, 1)$ و $C(8, 1)$ و $D(10, 7)$

.34 $\triangle RST$ به الرؤوس $R(-8, -2)$ و $S(-2, -2)$ و $T(-3, -7)$

.35 **صيغة هيرون** تربط صيغة هيرون أطوال أضلاع مثلث بمساحته. والصيغة هي $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث s هو نصف محيط المثلث و a و b و c أطوال الأضلاع.

a. استخدم صيغة هيرون لإيجاد مساحة مثلث أطوال أضلاعه 7 و10 و4.

b. أثبت أن المساحة التي تم إيجادها للمثلث قائم الزاوية 13-12-5 هي ذاتها باستخدام صيغة هيرون وباستخدام صيغة مساحة المثلث التي تعلمتَ سابقًا في هذا الدرس.

36 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين مساحة مثلث ومحيطه.

a. **جبريًا** مستطيل محيطه 12 وحدة. إذا كان طوله x وعرضه y، فاكتب معادلتين لمحيطه ومساحته.

b. **جدوليًا** ضع في جدول جميع القيم المحتملة من الأعداد الكلية لطول المستطيل وعرضه وجـــد مساحة كل زوج.

c. **بيانيًا** مثّل بيانيًا مساحة المستطيل بالنسبة إلى طوله.

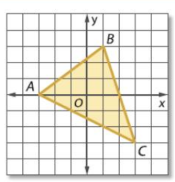
d. **لفظيًا** صف كيفية تغير مساحة المستطيل بتغير طوله.

e. **تحليليًا** لأي قيم الطول والعرض من الأعداد الكلية ستكون المساحة أكبر ما يكون؟ أقل ما يكون؟ اشرح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

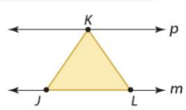
استخدام مهارات التفكير العليا

.37 **تحدٍ** جـــد مساحة $\triangle ABC$ الممثل بيانيًا على اليسار. اشرح طريقتك.



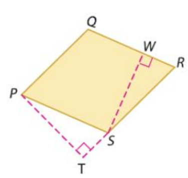
.38 **فرضيات** هل سيكون محيط متوازي الأضلاع غير المستطيل *دائمًا* أم *أحيانًا* أم *لن يكون مطلقًا* أكبر من محيط مستطيل بنفس المساحة والارتفاع؟ اشرح.

.39 **الكتابة في الرياضيات** تقع النقطتان J و L على المستقيم m. وتقع النقطة K على المستقيم p. إذا علمت أن المستقيمين m و p متوازيان، فصف كيفية تغير مساحة $\triangle JKL$ بينما تتحرك K على طول المستقيم p.



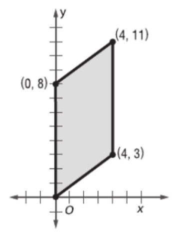
.40 **مسألة غير محددة الإجابة** مساحة مضلع 35 وحدة مربعة. الارتفاع 7 وحدات. ارسم ثلاثة مثلثات وثلاثة متوازيات أضلاع مختلفة تحقق المتطلبات. واذكر القاعدة والارتفاع بكل منها.

.41 **الكتابة في الرياضيات** صف طريقتين مختلفتين لاستخدام القياس لإيجاد مساحة متوازي أضلاع $PQRS$.



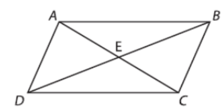
تدريب على الاختبارات المعيارية

42. ما المساحة بالوحدات المربعة لمتوازي الأضلاع الموضح؟

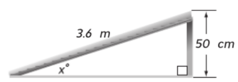


A 12 **C** 32
B 20 **D** 40

43. **الإجابة الشبكية** في متوازي الأضلاع $ABCD$، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ يتقاطعان عند E. إذا علمت أن $AE = 9$ و $BE = 3x - 7$ و $DE = x + 5$.
فجـــد x.



44. تم إنشاء منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع 50 سم وطول 3.6 أمتار كما هو موضح. ما قياس الزاوية x التي يصنعها المنحدر مع الأرض، إلى أقرب درجة؟



ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

F 8 **H** 37
G 16 **J** 53

45. **SAT/ACT** صيغة تحويل الدرجة المئوية إلى درجة فهرنهايت هي $F = \frac{9}{5}C + 32$، حيث تمثل F درجة فهرنهايت و C الدرجة المئوية. أي مما يلي الدرجة المئوية المكافئة لدرجة 86° فهرنهايت؟

A 15.7° C **D** 122.8° C
B 30° C **E** 186.8° C
C 65.5° C

مراجعة شاملة

حدد العينة والمجتمع الإحصائي لكل حالة. ثم صف إحصاء العينة ومَعْلَمَة المجتمع الإحصائي.

46. **الملاهي** تم سؤال عينة منتظمة من 250 ضيفًا عن مقدار المال الذي تم إنفاقه في أكشاك بيع الوجبات الخفيفة داخل الملاهي. وتم حساب متوسط المبلغ.

47. **حفل التخرج** تم إجراء استطلاع مع عينة عشوائية من 100 طالب في الصف الثاني عشر بمدرسة البراء بن عازب الثانوية. وحساب المتوسط الحسابي للمبلغ الذي تم إنفاقه على حفل التخرج لكل طالب.

جـــد معكوس كل دالة مما يلي.

48. $f(x) = 2x - 14$
49. $f(x) = 17 - 5x$
50. $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$
51. $f(x) = -\frac{1}{7}x - 1$
52. $f(x) = \frac{2}{3}x + 6$
53. $f(x) = 12 - \frac{3}{5}x$

مراجعة المهارات

جـــد قيمة كل تعبير إذا كان $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$.

54. $\frac{1}{2}ac$
55. $\frac{1}{2}cb$
56. $\frac{1}{2}b(2a + c)$
57. $\frac{1}{2}c(b + a)$
58. $\frac{1}{2}a(2c + b)$

الوحدة 13 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 13-1)

- يمكن تصنيف المثلثات حسب زواياها بأنها حادة أو منفرجة أو قائمة وحسب أضلاعها بأنها مختلفة الأضلاع أو متساوية الساقين أو متساوية الأضلاع.

زوايا المثلثات (الدرس 13-2)

- قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

المثلثات المتطابقة (الدروس 13-3 و 13-4 و 13-5)

- SSS: إذا كانت كل الأضلاع المتناظرة في مثلثين متطابقة، فالمثلثان متطابقان.
- SAS: عند تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة في مثلثين والزاويتين المحصورتين بينهما، فالمثلثان متطابقان.
- ASA: عند تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة في مثلثين والضلعين المحصورين بينهما، فالمثلثان متطابقان.
- AAS: عند تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة في مثلثين وزوج مناظر من الأضلاع غير المحصورة، فالمثلثان متطابقان.

المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع (الدرس 13-6)

- زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة ويكون المثلث متساوي الأضلاع إذا كان متساوي الزوايا.

التحويلات والبراهين الإحداثية (الدرسان 13-7 و 13-8)

- في تحويل التطابق، قد يختلف موضع الصورة عن الصورة الأصلية، لكن الشكلين يظلان متطابقين.
- البراهين الإحداثية تستخدم الجبر لإثبات المفاهيم الهندسية.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

مثلث حاد acute triangle
خط مساعد auxiliary line
زوايا القاعدة base angles
قاعدة متوازي الأضلاع base of a parallelogram
قاعدة المثلث base of a triangle
تحويل التطابق congruence transformation
مضلعات متطابقة congruent polygons
البرهان الإحداثي coordinate proof
نتيجة corollary
أجزاء متناظرة corresponding parts
مثلث متساوي الزوايا equiangular triangle
مثلث متساوي الأضلاع equilateral triangle
زاوية خارجية exterior angle
البرهان التسلسلي flow proof
ارتفاع متوازي الأضلاع height of a parallelogram
ارتفاع المثلث height of a triangle
زاوية محصورة included angle
ضلع محصور included side
مثلث متساوي الساقين isosceles triangle
مثلث منفرج الزاوية obtuse triangle
الانعكاس reflection
زوايا داخلية غير مجاورة remote interior angles
مثلث قائم الزاوية right triangle
الدوران rotation
مثلث مختلف الأضلاع scalene triangle
إزاحة translation
زاوية الرأس vertex angle

مراجعة المفردات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة *صحيحة* أم *خاطئة*. إن كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

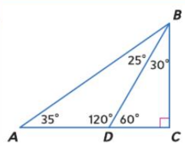
1. المثلث متساوي الزوايا مثال أيضًا على المثلث حاد الزاوية.
2. المثلث الذي يحتوي على زاوية قياسها أكبر من 90° مثلث قائم الزاوية.
3. المثلث متساوي الأضلاع دائمًا ما يكون متساوي الزوايا.
4. يحتوي المثلث مختلف الأضلاع على ضلعين متطابقين على الأقل.
5. زوايا الرأس في المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة.
6. الضلع المحصور هو الضلع الموجود بين زاويتين متتاليتين في مضلع.
7. الأنواع الثلاثة من تحويلات التطابق هي الدوران والانعكاس والإزاحة.
8. يؤدي الدوران إلى تحريك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.
9. البرهان التسلسلي يستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات المفاهيم الهندسية.
10. قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات زاويتيه الداخليتين غير المجاورتين.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

13-1 تصنيف المثلثات

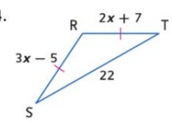
ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره *حاد الزاوية*، أو *متساوي الزوايا*، أو *منفرج الزاوية*، أو *قائم الزاوية*.



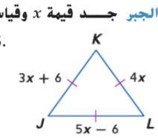
11. $\triangle ADB$
12. $\triangle BCD$
13. $\triangle ABC$

الجبر جـــد قيمة x وقياس الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

14.



15.

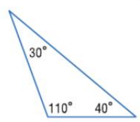


16. **الخرائط** المسافة من شيكاغو إلى كليفلاند إلى سينسيناتي ثم العودة إلى شيكاغو تبلغ 1,440 km. تزيد المسافة من شيكاغو إلى كليفلاند 80 km على المسافة من سينسيناتي إلى شيكاغو، وتقل المسافة من كليفلاند إلى سينسيناتي 80 km عن المسافة من سينسيناتي إلى شيكاغو. جـــد كل مسافة وضع تصنيفًا للمثلث المتشكل من المدن الثلاث.

مثال 1

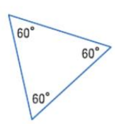
ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره *حاد الزاوية*، أو *متساوي الزوايا*، أو *منفرج الزاوية*، أو *قائم الزاوية*.

a.



بما أن المثلث يحتوي على زاوية منفرجة، فهو مثلث منفرج.

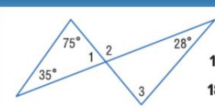
b.



يحتوي المثلث على ثلاث زوايا حادة تتساوى جميعها. إنه مثلث متساوي الزوايا.

13-2 زوايا المثلثات

جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

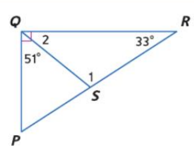


17. $\angle 1$
18. $\angle 2$
19. $\angle 3$

20. **المنازل** دعامة السقف في منزل عبد الكريم على شكل مثلث متساوي الساقين بزاويتي قاعدة بالقياس 38°. جـــد x.

مثال 2

جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

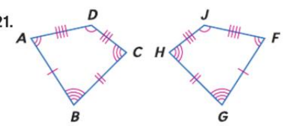


$m\angle 2 + m\angle PQS = 90$	
$m\angle 2 + 51 = 90$	تعويض
$m\angle 2 = 39$	اطرح 51 من كل طرف.
$m\angle 1 + m\angle 2 + 33 = 180$	نظرية مجموع المثلث
$m\angle 1 + 39 + 33 = 180$	تعويض
$m\angle 1 + 72 = 180$	بسّط.
$m\angle 1 = 108$	اطرح.

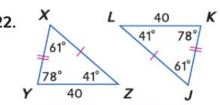
13-3 المثلثات المتطابقة

أثبت أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.

21.



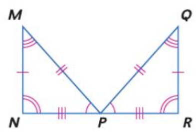
22.



23. **تركيب البلاط** موضح هنا جزء من تركيبة بلاط. عيّن المثلثات التي تبدو متطابقة.

مثال 3

أثبت أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.



الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

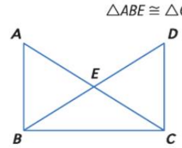
كل الأجزاء المتناظرة في المثلثين متطابقة. ولذلك، $\triangle MNP \cong \triangle QRP$.

13-4 إثبات تطابق المثلثات — تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

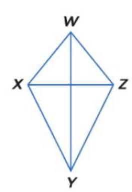
اكتب برهانًا من عمودين.

24. **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$



25. **الطائرات الورقية** طائرة عبد الله الورقية موضحة في الشكل على اليسار. إذا علمت أن $\overline{WY}$ ينصف $\angle XWZ$ و$\angle XYZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.

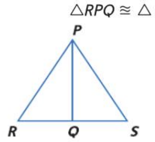


مثال 4

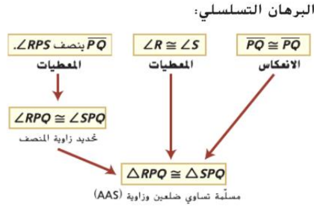
اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{PQ}$ ينصف $\angle RPS$.
$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$



البرهان التسلسلي:

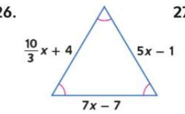


دليل الدراسة والمراجعة تابع

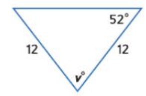
13-6 المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

جـــــد قيمة كل متغير.

26.



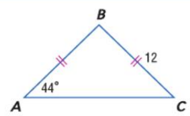
27.



28. **الرسم** ترسم فوزية باستخدام حامل رسم خشبي. يشكل قضيب الدعم في الحامل مع الدعامتين الأماميتين مثلثًا متساوي الساقين. وفقًا للشكل أدناه. ما قياسا زاويتي القاعدة في المثلث؟

مثال 5

جـــــد قياس كل مما يلي.



a. $m\angle B$

بما أن $\overline{BC} \cong \overline{AB}, AB = BC$. حسب نظرية المثلث متساوي الساقين. زاويتا القاعدة A و C متطابقتان. إذًا $m\angle A = m\angle C$. استخدم نظرية مجموع المثلث لكتابة معادلة وحلها لإيجاد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	نظرية مجموع المثلث
$44 + m\angle B + 44 = 180$	$m\angle A = m\angle C = 44$
$88 + m\angle B = 180$	بسّط.
$m\angle B = 92$	اطرح.

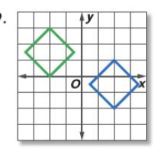
b. AB

$AB = BC$. إذًا $\triangle ABC$ متساوي الساقين. بما أن $BC = 12$. إذًا $AB = 12$ بالتعويض.

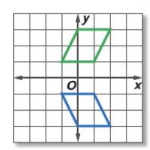
13-7 تحويلات التطابق

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *تحويلاً*، أو *دورانًا*.

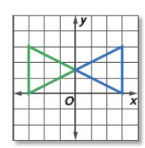
29.



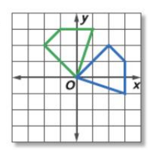
30.



31.



32.



33. المثلث ABC بالرؤوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(3, -1)$ هو تحويل للمثلث $\triangle MNO$ بالرؤوس $M(-1, 1)$ و $N(-2, 3)$ و $O(-3, -1)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل. وتحقق من أنه تحويل تطابق.

مثال 6

المثلث RST بالرؤوس $R(4, 1)$ و$S(2, 5)$ و $T(-1, 0)$ تحويل للمثلث $\triangle CDF$ بالرؤوس $C(1, -3)$ و $D(-1, 1)$ و $F(-4, -4)$. حدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

مثّل بيانيًا كل شكل. التحويل يبدو إزاحة. جـــــد أطوال أضلاع كل مثلث.

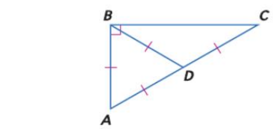
$$RS = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$
$$TS = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{34}$$
$$RT = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}$$
$$CD = \sqrt{(-1-1)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{20}$$
$$DF = \sqrt{[-4-(-1)]^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{34}$$
$$CF = \sqrt{(-4-1)^2 + [-4-(-3)]^2} = \sqrt{26}$$

بما أن كل رأس في $\triangle CDF$ قد تعرض لتحويل بمقدار 3 وحدات لليمين و 4 وحدات لأعلى، فهذه إزاحة.

بما أن $RS = CD$ و$TS = DF$ و$RT = CF$. إذًا $\overline{TS} \cong \overline{DF}, \overline{RS} \cong \overline{CD}$ و $\overline{RT} \cong \overline{CF}$. حسب مسلّمة تطابق الأضلاع الثلاثة (SSS). $\triangle RST \cong \triangle CDF$.

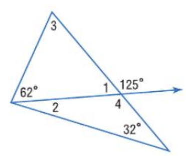
الوحدة 13 تدريب على الاختبار

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره *حاد* الزاوية، أو *متساوي* الأضلاع، أو *منفرج* الزاوية، أو *قائم* الزاوية.



1. $\triangle ABD$ 2. $\triangle ABC$ 3. $\triangle BDC$

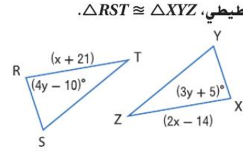
جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.



4. $\angle 1$ 5. $\angle 2$

6. $\angle 3$ 7. $\angle 4$

في الرسم التخطيطي، $\triangle RST \cong \triangle XYZ$.



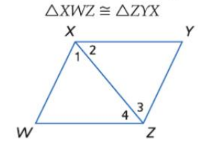
8. جـــد x.

9. جـــد y.

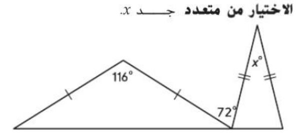
10. **البرهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ and $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$



11. **الاختيار من متعدد** جـــد x.

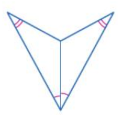


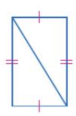
A 36 C 28

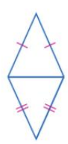
B 32 D 22

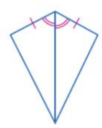
12. حدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ إذا علمت $T(-4, -2)$, $J(0, 5)$, $D(1, -1)$, $S(-1, 3)$, $E(3, 10)$, $K(4, 4)$. اشرح.

حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات تطابق كل زوج من المثلثات. وإذا لم يكن ممكنًا إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.

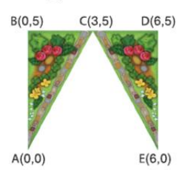
13. 

14. 

15. 

16. 

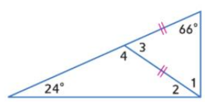
17. **المناظر الطبيعية** وضعت موزة تصميمًا لحديقة تتكون من منطقتين مثلثتين تم عرضهما أدناه. النقاط هي $A(0, 0)$ و$B(0, 5)$ و$C(3, 5)$ و $D(6, 5)$ و$E(6, 0)$. عيّن نوع تحويل التطابق للصورة الأصلية $\triangle ABC$ إلى $\triangle EDC$.



جـــد قياس جميع الزوايا المرقمة.

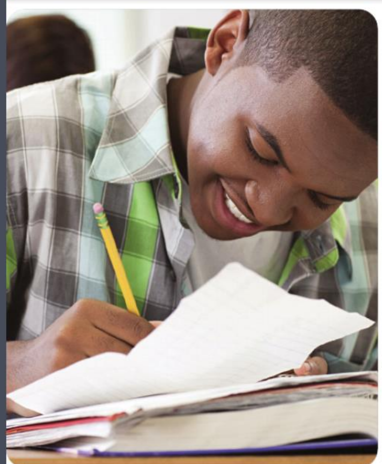
18. $\angle 1$

19. $\angle 2$



20. **البرهان** $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية بالوتر $\overline{AB}$. M نقطة منتصف $\overline{AB}$. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\overline{CM}$ متعامد على $\overline{AB}$.

التحضير للاختبارات المعيارية



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم حلاً للمسألة إلى جانب الطريقة و/أو التفسير و/أو التعليل المستخدم للوصول إلى الحل.

يتم تقويم الأسئلة ذات الإجابات القصيرة في العادة باستخدام **معيار**. أو دليل رصد الدرجات.

فيما يلي مثال على معيار رصد درجات سؤال قصير الإجابة.

معايير رصد الدرجات		
النقاط	المعايير	
2	الإجابة صحيحة ويتوفر تفسير كامل يوضح كل خطوة.	**الدرجة الكاملة**
1 1	• الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	**درجة جزئية**
0	إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	**بدون درجة**

إستراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتصل إلى فهم ما تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات الصلة.
- ابحث عن الكلمات الأساسية ومصطلحات الرياضيات.

الخطوة 2

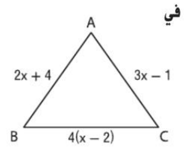
ضع خطة وجـــد حل المسألة.

- اشرح تبريرك أو اذكر أسلوبك لحل المسألة.
- اعرض كل عملك أو خطواتك.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحلّ هنا.

المثلث ABC متساوي الساقين وقاعدته هي $\overline{BC}$. ما محيط المثلث؟



اقرأ المسألة بعناية. علمت أن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين وقاعدته هي $\overline{BC}$. مطلوب منك إيجاد محيط المثلث.

ضع خطة وجـــد حل المسألة.

ساقا المثلث متساوي الساقين متطابقان.

إذًا، $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ أو $AB = AC$. حل لإيجاد x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم جـــد طول كل ضلع.

وحدة $BA = 2(5) + 4 = 14$

وحدة $AC = 3(5) - 1 = 14$

وحدة $BC = 4(5 - 2) = 12$

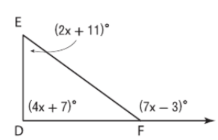
محيط $\triangle ABC$ يساوي $14 + 14 + 12 = 40$ وحدة.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والتبرير. وقد توصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

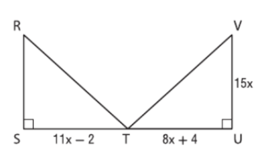
التمارين

اقرأ كل مسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحلّ هنا.

1. صنّف $\triangle DEF$ وفقًا لقياسات زواياه.

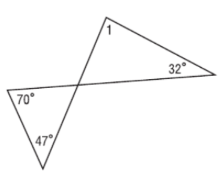


2. في الشكل أدناه. $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟



3. يريد مزارع تجهيز حظيرة للدجاج على شكل مستطيل مساحته $6\ m^2$. ويريد أن يوفر المال بشراء أقل قدر ممكن من السياج لإحاطة المساحة. فما الأبعاد بأعداد كلية والتي ستتطلب أقل كمية من السياج؟

4. ما قياس $m\angle 1$ بالدرجات؟



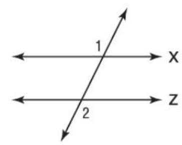
5. اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2, 4)$ و $(0, -2)$.

تدريب على الاختبارات المعيارية

الاختيار من متعدّد

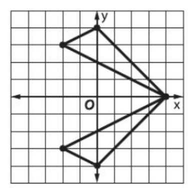
اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. إذا كانت $m\angle 1 = 110°$. فما القياس الذي يجب أن تبلغه $m\angle 2$ ليكون الخطان المستقيمان X و Z متوازيين؟



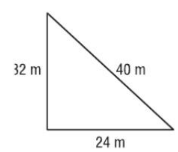
A 30°　B 60°　C 70°　D 110°

2. أي من المصطلحات التالية يمثل الوصف الأمثل للتحويل أدناه؟



F التمديد　H الدوران
G الانعكاس　J الإزاحة

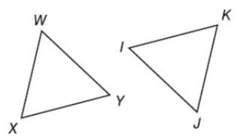
3. ضع تصنيفًا للمثلث أدناه وفقًا لأطوال أضلاعه.



A متساوي الأضلاع　C قائم الزاوية
B متساوي الساقين　D مختلف الأضلاع

نصيحة عند حل الاختبار
السؤال 3 اقرأ نص المسألة بعناية للتأكد من أنك تختار الإجابة الصحيحة.

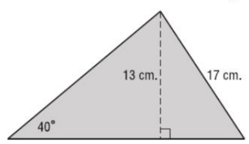
4. **المعطيات:** $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}, \angle X \cong \angle K$



أي مما يلي يذكر التطابق الصحيح للمثلثين؟

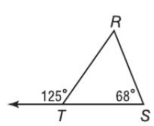
F $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$
G $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$
H $\triangle WXY \cong \triangle JKI$
J $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

5. ما مساحة المثلث أدناه؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



A 110.5 cm^2
B 144.2 cm^2
C 164.5 cm^2
D 171.9 cm^2

6. ما قياس الزاوية R أدناه؟



F 57°　G 59°　H 65°　J 68°

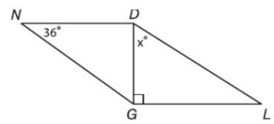
7. افترض أن إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين بقياس **44°**. فما قياس زاوية الرأس؟

A 108°　C 56°
B 92°　D 44°

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

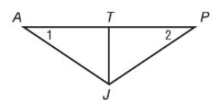
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

8. **الإجابة الشبكية** في الشكل أدناه، $\triangle NDG \cong \triangle LGD$. ما قيمة x؟



9. **الإجابة الشبكية** افترض أن المستقيم ℓ يحتوي على النقاط A و B و C. إذا علمت أن $AB = 7$ سم و $AC = 32$ سم، والنقطة B بين النقطتين A و C. فما طول $\overline{BC}$؟ اكتب الإجابة بالسنتيمتر.

10. استخدم الشكل والمعلومات المذكورة أدناه.



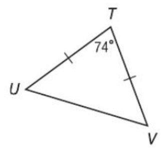
المعطيات: $\overline{JT} \perp \overline{AP}$

$\angle 1 \cong \angle 2$

ما نظرية التطابق التي يمكنك استخدامها لإثبات أن $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ فقط باستخدام المعطيات؟ اشرح.

11. اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تمثل المستقيم المار بالنقطتين $(0, 3)$ و $(4, -5)$.

12. **الإجابة الشبكية** جـــد $m\angle TUV$ في الشكل.



13. افترض أن ضلعين في المثلث ABC متطابقان مع ضلعين في المثلث MNO. افترض أيضًا أن إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle ABC$ متطابقة مع إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle MNO$. هل المثلثان متطابقان؟ إذا كانا كذلك، فاكتب برهانًا حرًا يوضح التطابق. وإذا لم يكونا كذلك، فارسم مثالاً مضادًا.

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

14. استخدم شبكة إحداثيات لكتابة برهان إحداثي للعبارة التالية.

إذا كانت رؤوس المثلث هي $A(0, 0)$ و $B(2a, b)$ و $C(4a, 0)$، فإن المثلث متساوي الساقين.

a. ارسم الرؤوس على شبكة إحداثيات لتمثيل المسألة.

b. استخدم قانون المسافة لكتابة تعبير AB.

c. استخدم قانون المسافة لكتابة تعبير BC.

d. استخدم النتائج من الجزأين b و c لوضع استنتاج بشأن $\triangle ABC$.

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لــ a
$\|a\|$	القيمة المطلقة لــ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لــ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لــ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\ ]$	تتضمن الأطراف
$(\ )$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لــ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لــ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\|\mathbf{a}\|$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A وB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\|\overrightarrow{AB}\|$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\widehat{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\widehat{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A وC
$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$f(x) = \{$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \|x\|$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim\limits_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا، أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو $_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو $_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما، رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum\limits_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\overline{x}$	متوسط x ، متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m) 1 متر = 100 سنتيمتر (cm) 1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd) 1 ميل = 5280 قدمًا (ft) 1 ياردة = 3 أقدام 1 قدم = 12 بوصة (in) 1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL) 1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt) 1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz) 1 كوارت = 2 باينت (pt) 1 باينت = 2 كوب (c) 1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g) 1 جرام = 1000 ملليجرام (mg) 1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	1 طن (T) = 2000 رطل (lb) 1 رطل = 16 أونصة (oz)

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a. يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$. يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$. فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$. فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b. $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c. $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c. $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a. يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$. حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$. يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a. يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$. فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$. فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c. حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$. فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a > b$. فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a > b$. فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$. فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$. فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b. إذا كان $ab = 0$. فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.*

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات			
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
كثيرات الحدود			
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
اللوغاريتمات			
خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية			
المرابحة المركبة	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	**النمو أو الاضمحلال الأسيّ**	$N = N_0(1+r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	**النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر**	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	**خاصية القوة**	$\log_b x^p = p\log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	**خاصية تغيير الاساس**	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
المتتاليات والمتسلسلات			
الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	**الحد النوني لمتتالية هندسية**	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	**مجموع متسلسلة هندسية**	$S_n = \frac{a_1-a_1r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1-a_nr}{1-r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1-r}, \lvert r \rvert < 1$	**صيغة أويلر**	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$	**المتسلسلة الأسيّة**	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
نظرية ذات الحدين	$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$		
المتجهات			
الجمع في المستوى	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$	**الجمع في الفضاء**	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \langle a_1-b_1, a_2-b_2\rangle$	**الطرح في الفضاء**	$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ $= \langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$	**الضرب القياسي في الفضاء**	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	**الضرب النقطي في الفضاء**	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	**مسقط u على v**	$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}^2$	**الضرب القياسي لثلاثة متجهات**	$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي			
صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$		
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطيّة			
قطع مكافئ	$(x-h)^2=4p(y-k)$ أو $(y-k)^2=4p(x-h)$	**دائرة**	$x^2+y^2=r^2$ أو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	**قطع زائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x'=x\cos\theta+y\sin\theta$ و $y'=y\cos\theta-x\sin\theta$		
المعادلات الوسيطيّة			
الموقع العمودي	$y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$	**المسافة الأفقية**	$x=tv_0\cos\theta$
الاعداد المُركبة			
صيغة الضرب	$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	**صيغة القسمة**	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	**نظرية ديموافر**	$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية			
الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2\neq x_1$	**المسافة على خط الأعداد**	$d=\lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	**طول القوس**	$\ell=\frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$	**نقطة المنتصف على خط الأعداد**	$M=\frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$	**نظرية فيثاغورس**	$a^2+b^2=c^2$

المحيط					
مربع	$P=4s$	**مستطيل**	$P=2\ell+2w$	**دائرة**	$C=2\pi r$ أو $C=\pi d$

مساحة السطح الجانبية			
منشور	$L=Ph$	**هرم**	$L=\frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L=2\pi rh$	**مخروط**	$L=\pi r\ell$

مساحة السطح الكلية					
منشور	$S=Ph+2B$	**مخروط**	$S=\pi r\ell+\pi r^2$	**إسطوانة**	$S=2\pi rh+2\pi r^2$
هرم	$S=\frac{1}{2}P\ell+B$	**كرة**	$S=4\pi r^2$	**مكعب**	$S=6s^2$
الحجم					
منشور	$V=Bh$	**مخروط**	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h^2$	**إسطوانة**	$V=\pi r^2h$
هرم	$V=\frac{1}{3}Bh$	**كرة**	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	**مكعب**	$V=s^3$
متوازي مستطيلات	$V=\ell wh$				

الدوال والمتطابقات المثلثية

الدوال المثلثية

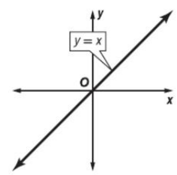
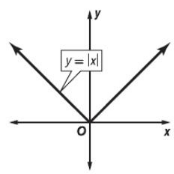
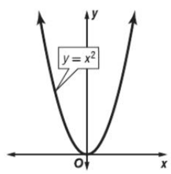
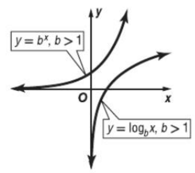
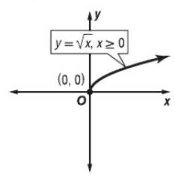
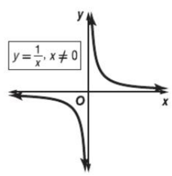
النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$ $\sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ $\csc\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	صيغة هيرون	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاوية	$\omega = \frac{\theta}{t}$

المتطابقات المثلثية

متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$	
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال الخطية	دوال القيمة المطلقة	الدوال التربيعية
		
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية	**دوال الجذر التربيعي**	**الدوال العكسية والنسبية**
		

العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	**الضرب**	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ ، إذاكان $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim\ x\to c\,[f(x)^n]=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظيّة $v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t}{h}$ المتوسطة $v_{avg}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)>0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x)=x^n$ فإن $f'(x)=nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x)=g(x)\pm h(x)$ فإن $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx=F(x)+C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$، درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \dfrac{1}{n-1}\sum\left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$