الوحدة 14 التشابه والتحويلات والتناظر

السابق

لقد درست موضوع النسبة والتناسب واستخدمته في تطبيقات من الحياة اليومية.

الحالي

في هذه الوحدة سوف:

- تحدد المثلثات المتشابهة وتستخدم النسبة والتناسب في حل المسائل.
- تحدد وتستخدم تحويلات التشابه.
- تستخدم النماذج الهندسية/المصغرة والرسومات ذات المقياس النسبي في حل المسائل.

لماذا؟

الرياضة يمكن استخدام المثلثات المتشابهة في الرياضة لوصف مسار كرة، مثل الضربة المرتدة التي تنتقل من شخص لآخر.

مشروع الوحدة

زمن الارتداد

يُطبق الطلاب ما تعلموه عن المثلثات المتشابهة لتحديد مسار كرة سلة أثناء دحرجتها باتجاه حائط بزاوية معينة.

- يتشارك كل طالب مع زميل له لإجراء هذه التجربة وسوف يحتاج كرة سلة، أو أي نوع كرة آخر مشابه، بالإضافة إلى مسطرة قياس مترية، وكوب ورقي، وشريط لاصق، وقلم تحديد.
- حدِّد، على حائطٍ مستوٍ، نقطة قريبة من الأرض مستخدمًا قطعة من الشريط (النقطة A). قِس مسافة تبلغ 4 أمتار وحدِّد نقطة ثانية باستخدام الشريط على الحائط القريب من الأرضية (النقطة B). قِس مترين إضافيين وحدِّد علامة ثالثة بقطعة من الشريط مجددًا على الحائط القريب من الأرضية (النقطة C).
- بجوار النقطة A، قِس للخارج مسافة عمودية مع الحائط تبلغ 5 أمتار وضع قطعة من الشريط اللاصق على الأرضية وقم بتسميتها "نقطة البدء".
- كيف يمكنك الاعتماد على خواص المثلثات المتشابهة لتحديد مدى البُعد الذي يتعين عنده وضع كوب ورقي متعامد مع الحائط عن النقطة C بحيث إذا دحرجت الكرة من نقطة البدء إلى النقطة B، ترتد الكرة عند ارتطامها بالحائط وتسقط فوق الكوب؟
- ماذا يحدث عندما تُغيِّر مسافة بُعد نقطة البدء عن الحائط؟
- سجِّل نتائجك، وقم بإعداد رسم مقياسي تفصيلي لتجربتك واعرض عملك على الفصل.

المفردات الأساسية قدِّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرِّف: معامل المقياس هو نسبة أطوال الأضلاع المتناظرة في مضلعين متشابهين.

مثال: في الرسم التخطيطي، $\triangle DFG \sim \triangle JHK$.

اسأل: ما معامل قياس $\triangle DFG$ بالنسبة إلى $\triangle JHK$؟ $\frac{12}{4}$ أو 3

ما معامل قياس $\triangle JHK$ بالنسبة إلى $\triangle DFG$؟ $\frac{4}{12}$ أو $\frac{1}{3}$

الاستعداد للوحدة

1 الكتاب الدراسي الاختياري

قم بالتدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

أوجد حل كل معادلة مما يلي.

1. $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$ 4 أو −4
2. $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$ 18
3. $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$ −37
4. $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$ 2 أو −2

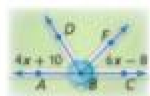
5. **التعليم** نسبة الطلاب إلى المعلمين في إحدى المدارس الثانوية هي 17 إلى 1. فإذا كان عدد الطلاب في المدرسة هو 1088 طالبًا، فكم يبلغ عدد المعلمين؟ 64

الجبر في الشكل التالي، $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ هما شعاعان متقابلان و $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABF$.

6. إذا كان $m\angle ABF = 3x - 8$ و $m\angle ABD = x + 14$، فأوجد $m\angle ABD$. 50

7. إذا كان $m\angle FBC = 2x + 25$ و $m\angle ABF = 10x - 1$، فأوجد $m\angle DBF$. 64.5

8. **المناظر الطبيعية** يخطط مهندس مناظر طبيعية لإضافة أرصفة حول نافورة كما هو مبين في الشكل التالي. إذا كان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ هما شعاعان متقابلان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABF$، فأوجد $m\angle FBC$. 64



تدريب سريع

مثال 1 (مستخدم بالدروس من 14-1 إلى 14-7)

أوجد حل $\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$.

$$\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$$ المعادلة الأصلية

$$3(4x-3) = 5(2x+11)$$ الضرب التقاطعي

$$12x - 9 = 10x + 55$$ خاصية التوزيع

$$2x = 64$$ اجمع.

$$x = 32$$ بسّط.

مثال 2 (مستخدم في الدرس 14-5)

في الشكل، $\overrightarrow{QP}$ و $\overrightarrow{QR}$ هما شلعان متقابلان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصف $\angle SQR$. إذا كان $m\angle SQR = 6x + 8$ و $m\angle TQR = 4x - 14$، فأوجد $m\angle SQT$.

بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$.

$$m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$$ تعريف منصف الزاوية

$$6x + 8 = 2(4x - 14)$$ التعويض

$$6x + 8 = 8x - 28$$ خاصية التوزيع

$$-2x = -36$$ اطرح.

$$x = 18$$ بسّط.

بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQT = m\angle TQR$.

$$m\angle SQT = m\angle TQR$$ تعريف منصف $\angle$

$$m\angle SQT = 4x - 14$$ التعويض

$$m\angle SQT = 58$$ $x = 18$

الأسئلة الأساسية

- ما الذي يجعل الأشكال متشابهة؟ الإجابة النموذجية: تتشابه الأشكال عندما يكون لها نفس الشكل بالضبط. وليس من الضروري أن تكون بنفس الحجم.
- كيف تثبت أن الأشكال متشابهة؟ الإجابة النموذجية: إحدى الطرائق هي إثبات أن جميع الأضلاع متناسبة.
- كيف يُستخدم مفهوم التشابه في الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: يُستخدم التشابه في إعداد رسوم مقياس ونماذج لحل مسائل تتضمن قياسًا غير مباشر.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 14. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة 0 لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات منظّم الدراسة

التناسب والتشابه يساعدك تكوين هذه المطوية في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 14 عن التناسب والمضلعات المتناظرة وتحويلات التشابه. ابدأ بأربع صفحات من الدفتر.

1 **اطو** الورقات الأربع عند المنتصف.

2 **اقطع** بطول ثنية الورق. وثبّت الورق من الداخل لعمل كتاب.

3 **اقطع** الجانب الأيمن من كل ورقة لعمل تبويب لكل فصل.

4 **اكتب** على كل تبويب رقم الدرس، كما هو موضح.

المفردات الجديدة

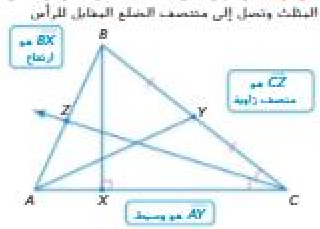
dilation	تغيير الأبعاد (التمدد)
similarity	التشابه
transformation	التحويل
enlargement	التكبير
reduction	التصغير
line of reflection	خط الانعكاس
center of rotation	مركز الدوران
angle of rotation	زاوية الدوران
composition of transformations	تركيب التحويلات
symmetry	التناظر
line symmetry	تناظر محوري
line of symmetry	محور التناظر

مراجعة المفردات

الارتفاع هو عبارة عن قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث وعمودية على المستقيم المحتوي على الضلع المقابل للرأس.

منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

الوسيط هو عبارة عن قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث وتصل إلى منتصف الضلع المقابل للرأس.



المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

التركيز يكتب الطلاب ملاحظاتٍ عن كل درسٍ في هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب عمل المطويات وتسميتها حسبما هو موضح.

يستخدم الطلاب مطوياتهم في عمل الملاحظات، وحل المسألة، وتحديد الأوصاف. بينما يقوم الطلاب بالقراءة والعمل في كل درسٍ من هذه الوحدة، اطلب منهم تدوين أسئلتهم. وبينما يتعلم الطلاب المزيد عن التناسب والتشابه، شجّعهم على إجابة أسئلتهم؛ حيث يعدّ طرح الأسئلة على الذات إستراتيجية تساعد الطلاب في الحفاظ على تركيزهم خلال القراءة.

وقت الاستخدام استخدام الأجزاء المناسبة أثناء تناول الطلاب لكل درس في هذه الوحدة. ويمكن للطلاب الإضافة إلى جزء المفردات أثناء كل درس.

التدريس المتمايز

مسرد مصطلحات الطالب

يُكمل الطلاب المخطط عن طريق تقديم تعريف كل مصطلح وطرح مثال عليه أثناء التقدم في الوحدة 14. هذه الوسيلة الدراسية يمكن استخدامها أيضًا في المراجعة استعدادًا لاختبار الوحدة.

الدرس 14-1 المثلثات المتشابهة

السابق | **الحالي** | **لماذا؟**

- استخدمت نظريات تطابق زاويتين وضلع (AAS) وتطابق الأضلاع الثلاثة (SSS) وتطابق ضلعين وزاوية (SAS) لإثبات تطابق المثلثات.

1 تحديد المثلثات المتشابهة باستخدام مسلّمة تشابه زاويتين (AA) ونظريتي تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS) وضلعين وزاوية (SAS).

2 استخدام المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

- يرغب علي في رسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلج المشترك فيه على ملصق إعلاني. ورسم أولاً مستقيمًا في أسفل الملصق الإعلاني. بعد ذلك، استخدم قياسات المثلث الأصلي لعمل نسختين للزاويتين السفليتين. وأخيرًا، مدّ الجوانب غير المشتركة للزاويتين.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 14-1 تطبيق خواص أشباه المنحرف وأشكال الطائرة الورقية.

الدرس 14-1 تحديد المثلثات المتشابهة باستخدام مسلّمة تشابه مثلثين من خلال تساوي زاويتين متناظرتين فيهما (زاوية-زاوية) ونظرية التشابه (ضلع-ضلع-ضلع) ونظرية التشابه (ضلع-زاوية-ضلع).استخدم المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

بعد الدرس 14-1 تعليل علاقات تشابه المثلثات.

إثبات نظريات حول المثلثات.

استخدم معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

استخدام نماذج الرياضيات محاولة إيجاد البنية واستخدامها

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما وجه المقارنة بين زوايا مثلثين؟ متطابقة
- هل المثلث الجديد مطابق للمثلث الأصلي؟ لا. فأطوال الضلع ليست متشابهة.
- نسخ علي زاويتين من المثلث الأصلي. هل الزاوية الثالثة هي نفس الزاوية في كل مثلث؟ لماذا؟ نعم. لأن مجموع قياسات الزاوية يبلغ 180.

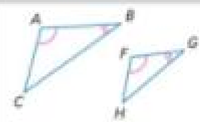
1 تحديد المثلثات المتشابهة

يشير المثال إلى أن المثلثين يكونان متشابهين إذا كان زوجان من الزوايا المتناظرة فيهما متطابقين.

مسلّمة 14.1 تشابه زاويتين (AA)

إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإذًا يكون المثلثان متشابهين.

مثال إذا كان $\angle F \cong \angle A$ و $\angle G \cong \angle B$، فإن $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

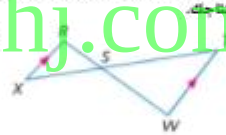


مثال 1 استخدام مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

حدّد إذا ما كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.

a.

b.

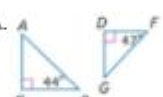


a. بما أن $m\angle L = m\angle M$، فإن $\angle L \cong \angle M$. حسب نظرية مجموع زوايا المثلث $57 + 48 + m\angle K = 180$. إذًا $m\angle K = 75$. بما أن $m\angle P = 75$، فإن $\angle K \cong \angle P$. إذًا $\triangle LJK \sim \triangle MOP$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA).

b. $\angle RSX \cong \angle WST$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس. بما أن $\overline{TW} \parallel \overline{RX}$، فإن $\angle R \cong \angle W$. إذًا $\triangle RSX \sim \triangle WST$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA).

تمرين موجّه

1A.



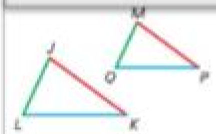
لا؛ لا يتوفر زوجان من ≅ ∆.

1B.

نعم؛ $\angle LJK \cong \angle LPQ$ و $\angle L \cong \angle L$. إذًا $\triangle KLJ \sim \triangle QLP$.

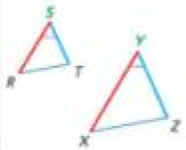
يمكنك استخدام مسلّمة تشابه زاويتين (AA) لإثبات النظريتين التاليتين.

نظريتي تشابه المثلثات



14.1 تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS)
إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإذا يكون المثلثان متشابهين.

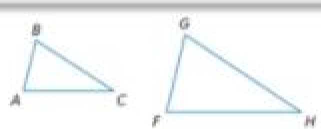
مثال إذا كان $\frac{LJ}{QM} = \frac{KL}{PQ} = \frac{JK}{MP}$، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.



14.2 تشابه ضلعين وزاوية (SAS)
إذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي ضلعين متناظرين في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بين كل زوج من هذه الأضلاع متطابقتين، فإذا يكون المثلثان متشابهين.

مثال إذا كان $\frac{ST}{YZ} = \frac{RS}{XY}$، و $\angle Y \cong \angle S$، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

برهان النظرية 14.1



المعطيات: $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$

فقرة البرهان:

حدد موقع J على $\overline{FG}$ بحيث يكون $JG = AB$. ارسم $\overline{JK}$ بحيث يكون $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$. قم بتسمية $\angle GJK$ باسم $\angle 1$.

بما أن $\angle G \cong \angle G$ حسب خاصية الانعكاس، و $\angle 1 \cong \angle F$ حسب مسلّمة الزوايا المتناظرة، فإن $\triangle GJK \sim \triangle GFH$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA).

وحسب تعريف المضلعات المتشابهة، $\frac{JK}{FH} = \frac{GK}{GH} = \frac{JG}{FG}$. وبالتعويض،

$\frac{JK}{FH} = \frac{GK}{GH} = \frac{AB}{FG}$.

وبما أن المعطيات تقول أيضًا إن $\frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = \frac{AB}{FG}$، يمكننا القول إن $\frac{BC}{GH} = \frac{GK}{GH}$، و $\frac{AC}{FH} = \frac{JK}{FH}$. هذا يعني أن $GK = BC$ و $JK = AC$. إذا $\overline{GK} \cong \overline{BC}$ و $\overline{JK} \cong \overline{AC}$.

حسب نظرية الأضلاع الثلاثة (SSS)، $\triangle ABC \cong \triangle JGK$.

حسب مسلّمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة (CPCTC)، $\angle B \cong \angle G$ و $\angle A \cong \angle 1$. بما أن $\angle 1 \cong \angle F$، فإن $\angle A \cong \angle F$ حسب خاصية التعدي. وحسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)، $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

نصيحة دراسية
الأضلاع المتناظرة لتحديد الأضلاع المتناظرة في مثلثين، ابدأ بمقارنة أطول ضلعين، ثم اللذين يليهما طولاً، وأخيرًا قارن بين أقصر ضلعين.

1 تحديد المثلثات المتشابهة

الأمثلة 1–3 توضح كيفية استخدام النظريات والمسلّمات الجديدة للبرهنة على تشابه المثلثات. **المثالان 4 و 5** يوضحان كيفية استخدام خواص المثلثات المتشابهة لإيجاد الأطوال المجهولة.

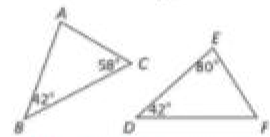
التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

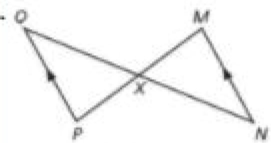
1 حدّد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.

a.



بحسب نظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $m\angle A = 80$. بما أن $\angle A \cong \angle E$ و $\angle B \cong \angle D$، فإن $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ بالتشابه (زاوية–زاوية).

b.



بحسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، فإن $\angle QXP \cong \angle NXM$. وبما أن $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$، $\angle Q \cong \angle N$. إذًا، $\triangle QXP \sim \triangle NXM$ بالتشابه (زاوية–زاوية).

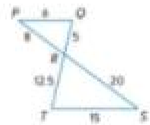
التركيز على محتوى الرياضيات

المقارنة وضّح أوجه التشابه والاختلاف بين مسلّمات ونظريات تطابق المثلثات، ومسلّمات ونظريات التشابه في هذه الوحدة. أكّد أنه على الرغم من ضرورة وجود زوجين من الزوايا المتطابقة فقط لمثلثين حتى يكونا متشابهين، إلا أن الأزواج الثلاثة للأضلاع المتناظرة يجب أن تكون متناسبة.

مثال 2 استخدام نظريتي تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS) وتشابه ضلعين وزاوية (SAS)

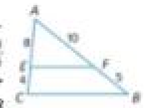
حدّد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.

a.



$\frac{PR}{SR} = \frac{8}{20}$ أو $\frac{2}{5}$، $\frac{PQ}{ST} = \frac{6}{15}$ أو $\frac{2}{5}$، $\frac{QR}{TR} = \frac{5}{12.5} = \frac{50}{125}$ أو $\frac{2}{5}$. إذًا $\triangle PQR \sim \triangle STR$ حسب نظرية تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS).

b.



حسب خاصية الانعكاس، $\angle A \cong \angle A$.

$\frac{AF}{AB} = \frac{10}{10+5} = \frac{10}{15}$ أو $\frac{2}{3}$، $\frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12}$ أو $\frac{2}{3}$.

بما أن أطوال الأضلاع التي تحصر الزاوية $\angle A$ متناسبة، فإن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ حسب نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS).

تمرين موجّه

2A.

2B.

تستطيع أن تقرر ما يعد كافيًا لإثبات تشابه المثلثين.

مثال 3 على الاختبار المعياري شروط كافية

في الشكل، $\angle ADB$ هو مثلث قائم. أي من المعلومات التالية لن تكون كافية لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$؟

A $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ **C** $\angle ABD \cong \angle C$

B $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$ **D** $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{BC}$

قراءة فقرة الاختبار

أمامك معطيات تقول إن $\angle ADB$ زاوية قائمة وطُلب منك تحديد أي من المعلومات الإضافية لن تكون كافية لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$.

حل فقرة الاختبار

بما أن $\angle ADB$ مثلث قائم، فإن $\angle CDB$ مثلث قائم أيضًا. بما أن كل الزوايا القائمة تكون متطابقة، فإن $\angle ADB \cong \angle CDB$. راجع كل الخيارات حتى تجد أحدها الذي لا يقدم شرطًا إضافيًا يكفي لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$.

الخيار A: إذا كان $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$، $\angle ADB \cong \angle CDB$، فإن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$ حسب نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS).

الخيار B: إذا كان $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$، $\angle ADB \cong \angle CDB$، فإذا لا يمكننا استنتاج أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$ لأن زاوية الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ ليست الزاوية $\angle ADB$. إذًا الإجابة هي B.

تصيحة دراسية

رسم الأشكال التخطيطية من المفيد لك أن تعيد رسم المثلثات المتشابهة حتى يكون لأطوال الأضلاع المتناظرة نفس الاتجاه.

2A. نعم؛ $\triangle JLK \sim \triangle QMP$ حسب نظرية تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS) لأن $\frac{JL}{QM} = \frac{LK}{MP} = \frac{JK}{QP} = \frac{4}{3}$.

2B. نعم؛ $\triangle TWZ \sim \triangle YWX$ حسب نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS) لأن $\angle W \cong \angle W$ و $\frac{TW}{YW} = \frac{WZ}{WX} = \frac{1}{2}$.

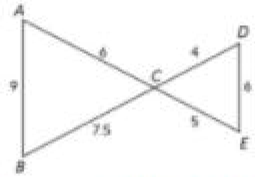
تصيحة عند حل الاختبار

تحديد أمثلة خارجة عن التعريف أحيانًا تتطلب أسئلة الاختبار منك أن تذكر مثالًا خارجًا عن التعريف كما في هذه الحالة.

أمثلة إضافية

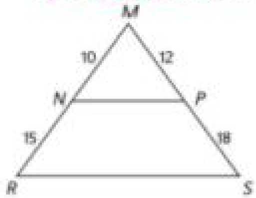
2 حدّد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.

a.



$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ بموجب نظرية التشابه (ضلع–ضلع–ضلع).

b.



$\triangle MNP \sim \triangle MRS$ بموجب نظرية التشابه (ضلع–زاوية–ضلع)

3 **تمرين على الاختبار المعياري** إذا كان $\triangle RST$ و $\triangle XYZ$ مثلثين يتحقق فيهما $\frac{RS}{XY} = \frac{2}{3}$ فأي مما يلي يكون كافيًا للبرهنة أن المثلثين متشابهان؟ **B**

A $\frac{RT}{XZ} = \frac{ST}{YZ}$ **C** $\angle R \cong \angle S$

B $\frac{RS}{XY} = \frac{RT}{XZ} = \frac{ST}{YZ}$ **D** $\frac{RS}{RT} = \frac{XY}{XZ}$

انتبه!

الزوايا المتطابقة يمكن استخدام نظرية التشابه (ضلع–زاوية–ضلع) فقط إذا كانت الزاوية واقعةً بين الضلعين المتناظرين في كل مثلث.

تمرين موجّه

3. إذا كان $\triangle JKL$ و $\triangle FGH$ مثلثين فيهما $\angle F \cong \angle J$، فأيٌّ من الآتي يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان؟ G

F $\frac{KL}{GH} = \frac{JL}{FH}$ G $\frac{JL}{JK} = \frac{FH}{FG}$ H $\frac{JK}{FG} = \frac{KL}{GH}$ J $\frac{JL}{JK} = \frac{GH}{FG}$

2 استخدام المثلثات المتشابهة

كما هو الحال في تطابق المثلثات، فإن تشابه المثلثات يكون انعكاسيًا، ومتناظرًا، ومتعديًا.

نظرية 14.3 خواص التشابه

خاصية انعكاس التشابه	$\triangle ABC \sim \triangle ABC$
خاصية تناظر التشابه	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$، فإن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.
خاصية التعدي في التشابه	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$، فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

مثال 4 أجزاء المثلثات المتشابهة

أوجد BE و AD.

بما أن $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$، فإن $\angle ABE \cong \angle BCD$، و $\angle AEB \cong \angle EDC$ لأنهما زاويتان متطابقتان. وحسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)، $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$ $AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$

$3.5 \cdot 3 = 5 \cdot x$ خاصية الضرب التقاطعي

$2.1 = x$ BE تساوي 2.1.

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$ $AC = 5, AB = 3, AD = y + 3, AE = y$

$5 \cdot y = 3(y + 3)$ خاصية الضرب التقاطعي

$5y = 3y + 9$ خاصية التوزيع

$2y = 9$ بطرح $3y$ من كل طرف.

$y = 4.5$ AD يساوي $y + 3$ أو 7.5.

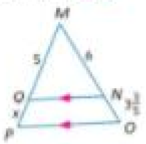
تصيحة دراسية

التناسبات تناسب إضافي بتطبيق على مثال 4 هو $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}$

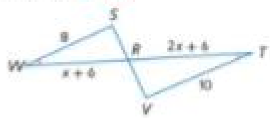
تمرين موجّه

أوجد قياس كل مما يلي.

4A. QP ، MP 3; 8

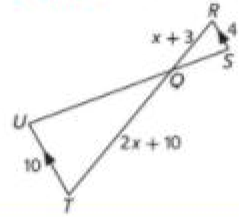


4B. WR ، RT 8; 10



مثال إضافي

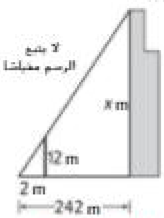
4 سؤال جبري إذا كان $\overline{RS} \parallel \overline{UT}$، $RS = 4$ و $RQ = x + 3$، و $QT = 2x + 10$، و $UT = 10$، فأوجد RQ و QT. 8; 20



864 | الدرس 14-1 | المثلّثات المتشابهة

مثال إضافي

5 ناطحات السحاب يرغب عبد الله في قياس ارتفاع برج سيرز في شيكاغو. استخدم عبد الله عمود إنارة طوله 12 مترًا وقاس ظله عند الساعة 1 P.M. بلغ طول الظل مترين. ثم قاس طول ظل برج سيرز وبلغ 242 مترًا في نفس الوقت. فكم يبلغ ارتفاع برج سيرز؟

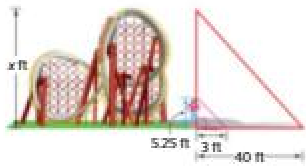


1452 m (الارتفاع الحقيقي: 1450 مترًا)

مثال 5 من الحياة اليومية القياس غير المباشر

قطارات الملاهي **تقدر نورا ارتفاع لعبة قطار الملاهي العملاق في ميتشلفيل، ميريلاند. ويبلغ طول نورا مترًا واحدًا و 57.5 cm ويبلغ طول ظلها 0.9 متر. فإذا كان طول ظل هذه اللعبة هو 12 قدمًا، فكم يبلغ طول اللعبة؟**

الفهم صمم رسمًا تصويريًا لهذه الحالة. متر واحد و 57.5 سنتيمترًا يعادل 1.575 متر.



التخطيط في مسائل الظل، يمكنك أن تفترض أن الزوايا المتكونة من أشعة الشمس مع أي شيئين آخرين تكون متطابقة وأن الشيئين يشكلان أضلاع مثلثين قائمي الزاوية.

بما أن زوجين من الزوايا متطابقان، فالمثلثات القائمة تكون متشابهة حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA). إذًا، يمكننا كتابة التناسب التالي.

$$\frac{\text{ارتفاع نورا}}{\text{ارتفاع اللعبة}} = \frac{\text{ارتفاع ظل نورا}}{\text{ارتفاع ظل اللعبة}}$$

حل عوّض عن القيم المعروفة وافرض أن x = ارتفاع اللعبة.

$\frac{1.575}{x} = \frac{0.9}{12}$	التعويض
$0.9 \cdot x = 12(1.575)$	خاصية الضرب التقاطعي
$0.9x = 18.9$	بسّط.
$x = 21$	اقسم كل طرف على 3.

يبلغ طول لعبة قطار الملاهي 21 مترًا.

تحقق يبلغ طول ظل اللعبة $\frac{12 \text{ m}}{0.9 \text{ m}}$ أو حوالي 13.3 مرة من طول ظل نورا. تحقق من أن ارتفاع اللعبة يصل إلى حوالي 13.3 مرة من طول نورا. $\frac{21 \text{ m}}{1.575 \text{ m}} \approx 13.3$ ✔

تمرين موجّه

5. **مباني** يقف عمر بجوار مبنى البالميتو في كولومبيا، بكارولينا الجنوبية. ويبلغ طول عمر 1.80 متر وطول ظله 2.7 متر. فإذا كان طول ظل هذا المبنى هو 96.75 مترًا فكم يبلغ طوله؟ 64.5 m

نصيحة في حل المسائل

إجابات منطقية عندما تحل مسألة، راجع إجاباتك للتحقق من صحتها. في هذا المثال، ظل نورا أكثر قليلاً من نصف طولها. وكذلك يزيد طول ظل اللعبة قليلاً عن نصف الطول الذي حسبته. لذلك الإجابة منطقية.

ملخص المفهوم تشابه المثلثات

نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS)

إذا كان $\angle A \cong \angle X$ و $\frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX}$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

نظرية تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS)

إذا كان $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

إذا كان $\angle A \cong \angle X$ و $\angle C \cong \angle Z$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب النسب والمثلثات المتشابهة ونظرية التشابه.

اسأل:

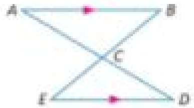
- كيف يمكن إيجاد القياسات المجهولة في المثلثات المتشابهة؟ الإجابة النموذجية: كتابة وحل مسألة تناسب تربط بين ضلعين متناظرين بقياسات معلومة وبين ضلعين متناظرين مع وجود ضلع معلوم وضلع غير معلوم.
- كيف يمكن البرهنة على أن المثلثين متشابهان؟ الإجابة النموذجية: استخدام مسلّمة AA (زاوية–زاوية) أو نظرية SSS (ضلع–ضلع–ضلع) أو نظرية SAS (ضلع–زاوية–ضلع).

التحقق من فهمك

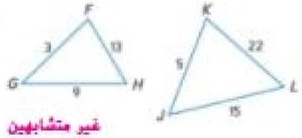
المثالان 1 و 2 حدّد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.

1.


غير متشابهين

2.


$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

3.


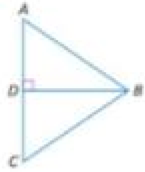
غير متشابهين

4.


$\triangle XYZ \sim \triangle VWR$ حسب نظرية تشابه الأضلاع الثلاثة (SSS)

مثال 3

5. **الاختيار من متعدد** في الشكل، يكون AB متعامدًا على BD. أي من المعلومة الإضافية التي ستكون كافية لإثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle DEC$؟ D



A $m\angle A = 60$

B $m\angle ABD = m\angle BDC$

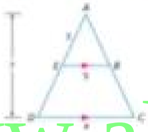
C $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

D BD ينصف AC

مثال 4 **الجبر** حدد المثلثات المتشابهة. وأوجد كل قياس.

6. $\triangle ABE \sim \triangle ACD,\ x = \frac{35}{3}$

7. $\triangle WXY \sim \triangle MLJ,\ x = 30$



مثال 5

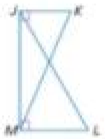
8. **حيوانات أليفة** تسير سالي مع قطها ماكس. فإذا كان طول سالي يبلغ 160 سنتيمترًا وطول ظلها هو 95 سنتيمترًا، وكان طول ظل ماكس هو 45 سنتيمترًا، فما طوله؟

يبلغ طول ماكس حوالي 75 سنتيمترًا.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حدّد إذا ما كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. وإن كانا غير ذلك، فما المعلومات التي ستكون كافية لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.

9.


10.


حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

11.


9. $\triangle ACB \sim \triangle ECD$ حسب نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS)

10. إذا علمنا أن $\frac{JK}{ML} = \frac{KM}{JL}$ إذًا يمكننا إثبات أن

11. $\triangle WXY \sim \triangle TRS$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-24, 37, 39-56	9,23 فردي, 42-45	10-24 زوجي, 37, 39-41, 46-56
OL أساسي	9-21 فردي, 22-25, 27, 29, 31-33, 35, 37, 39,56	9-24, 42-45	25-37, 39-41, 46-56
BL متقدم	25-55, (اختياري: 56)		

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

24. **المعطيات:** $\angle B \cong \angle E$, $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$; $\overline{QP} \cong \overline{EF}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

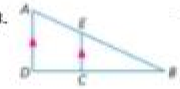
البرهان:

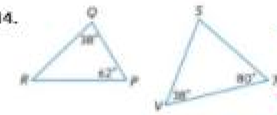
العبارات (المبررات)

1. $\angle B \cong \angle E$, $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$, $\overline{QP} \cong \overline{EF}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (معطى)
2. $\angle APQ \cong \angle C$, $\angle AQP \cong \angle B$ (مسلّمة الزوايا المتناظرة)
3. $\angle AQP \cong \angle E$ (خاصية التعدي)
4. $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ (تشابه زاوية-زاوية)
5. $\frac{AB}{AQ} = \frac{BC}{QP}$ (تعريف $\sim \triangle$s)
6. $AB \cdot QP = AQ \cdot BC$; $AB \cdot EF = DE \cdot BC$ (بالضرب التقاطعي)
7. $QP = EF$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة $\cong$)
8. $AB \cdot EF = AQ \cdot BC$ (بالتعويض)
9. $AQ \cdot BC = DE \cdot BC$ (بالتعويض)
10. $AQ = DE$ (خاصية التوزيع)
11. $\overline{AQ} \cong \overline{DE}$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة $\cong$)
12. $\triangle AQP \cong \triangle DEF$ (تشابه ضلع-زاوية-ضلع)
13. $\angle APQ \cong \angle F$ (الأجزاء المتناظرة من مثلثين متطابقين متطابقة)
14. $\angle C \cong \angle F$ (خاصية التعدي)
15. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (تشابه زاويتين (AA))

25. (انظر الإجابة في صفحة 868.)

12. 

13. 

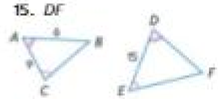
14. 

12. إذا علمنا بوجود زوج آخر من الزوايا المتطابقة، فإذا $\triangle JHK \sim \triangle FEG$.

مثال 4

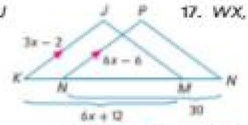
الجبر حدد المثلثات المتشابهة. ثم أوجد كل قياس.

15. DF



$\triangle ABC \sim \triangle DFE$; 10

16. KJ



$\triangle KJM \sim \triangle PLN$; 22

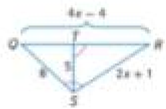
17. WX, XZ

$\triangle WXY \sim \triangle PZY$; $WX = 9$; $XZ = 17$

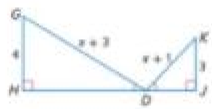
13. $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

14. $\triangle QPR \sim \triangle VST$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)

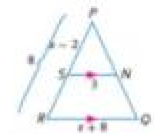
18. SR, TR



19. HJ, DK



20. SR, QR



18. $\triangle QRS \sim \triangle SRT$; $SR = 15$; $TR = \frac{75}{8}$

19. $\triangle GHD \sim \triangle KJD$; $DK = 6$; $HJ = \sqrt{48} + \sqrt{27}$

20. $\triangle PSN \sim \triangle PRQ$; $SR = 2$; $QR = 12$

مثال 5

21. **الأبراج** يقف عدنان بجوار برج هاتف خلوي. فإذا كان طول عدنان هو 1.8 متر وطول ظله 45 سنتيمترًا، وكان طول ظل البرج هو 16.5 مترًا، فما طول البرج؟ **66 مترًا**

22. **الأعلام** عندما وقفت رنا البالغ طولها 159 cm بجوار سارية علم، بلغ طول ظلها 57.5 cm، وكان طول ظل سارية العلم هو 172.5 cm. فما طول سارية العلم؟ **472.5 cm**

23. **التشييد** يستخدم عيسى السلالم في عمله لطلاء المنازل. وبالنسبة لجميع السلالم، يريد عيسى أن تكون الزاوية التي يصنعها السلم مع الأرض مساوية 65°. وعندما يميل السلم على منزل بهذه الزاوية يبلغ السلم البالغ طوله 4.50 أمتار ارتفاع 4.08 أمتار. فما الارتفاع الذي يمكن أن يصل إليه سلم طوله 6 أمتار؟ **5.43 أمتار**

B **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. **24–25. انظر الهامش.**

24. نظرية 14. 2

25. نظرية 14.3

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **26–27. انظر ملحق إجابات الوحدة 14.**

26. **المعطيات:** BD متعامد على AC، $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD}$

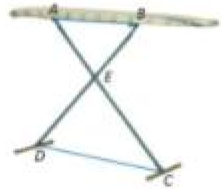
المطلوب: $\triangle ABD \sim \triangle BCD$

27. **المعطيات:** $LMNP$ عبارة عن شكل طائرة ورقية.

المطلوب: $\frac{AP}{AM} = \frac{PQ}{QM}$

867

28. **المهام المنزلية** يتصف ارتفاع طاولة الكي المبينة على اليسار بأنه قابل للتعديل. إذا كانت طاولة الكي متوازية مع الأرضية، فاثبت أن $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 14.**



الهندسة الإحداثية **المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle EBF$ لهما الرؤوس** $A(1, -7), B(7, 5), C(1, 8), E(3, -3), F(3, 7)$.

29. مثّل المثلثين بيانيًا، وحدد ما إذا كان $\triangle EBF \sim \triangle ABC$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 14.**

30. أوجد معامل المقياس ونسبة محيطي المثلثين المبينين.

معامل المقياس $= \frac{2}{3}$، نسبة المحيطين $= \frac{2}{3}$

31. **التزلج** يرتفع فارس على مصعد تزلج. وبعد أن تجاوز 6 أمتار على المصعد، بلغ ارتفاعه 1.50 متر فوق الأرض. استخدم مثلثات متشابهة لاكتشاف ارتفاع فارس فوق الأرض بعد تجاوز 15 مترًا على المصعد. **3.75 أمتار**

برهان أم مثال مضاد قدم إثباتًا أو مثالًا مضادًا لكل من العبارات التالية.

32. كل المثلثات القائمة تكون متشابهة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 14.**

33. كل المثلثات القائمة متساوية الساقين تكون متشابهة. **البرهان: لا بد أن يكون للمثلثات القائمة متساوية الساقين زوايا بالقياسات 90-45-45. إذًا فهي كلها متشابهة بموجب مسلّمة تشابه زاويتين (AA).**

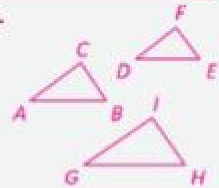
34. كل المثلثات متساوية الأضلاع تكون متشابهة. **البرهان: كل المثلثات متساوية الأضلاع لها زوايا قياسها 60 كما هو الحال مع كل مثلث. وحسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)، لا بد أن تكون هذه المثلثات متشابهة.**

35. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف محيطات المثلثات المتشابهة.

a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة مثلثات مشابهة لـ $\triangle ABC$. سم المثلثات بـ EFG و LMN و XYZ. سم أطوال كل الأضلاع. **الإجابة النموذجية:**

إجابات إضافية

25.



الخاصية العكسية في التشابه

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ (معطى)
2. $\angle A \cong \angle A$، $\angle B \cong \angle B$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (تشابه ضلع–ضلع)

خاصية التناظر في التشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

المطلوب: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (معطى)
2. $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ (تعريف المضلعات المتشابهة تقريبًا ~)
3. $\angle D \cong \angle A$، $\angle E \cong \angle B$ (خاصية التماثل)
4. $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (تشابه زاوية–زاوية)

خاصية التعدّي في التشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\triangle DEF \sim \triangle GHI$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$، $\triangle DEF \sim \triangle GHI$ (معطى)
2. $\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$، $\angle D \cong \angle G$، $\angle E \cong \angle H$ (تعريف المضلعات المتشابهة تقريبًا ~)
3. $\angle A \cong \angle G$، $\angle B \cong \angle H$ (خاصية التعدي)
4. $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ (تشابه زاوية–زاوية)

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ (معطى)
2. $\angle A \cong \angle A, \angle B \cong \angle B$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (تشابه زاوية–زاوية)

35b.

	معامل المقياس $\triangle ABC$	محيط $\triangle EFG$	$\frac{\text{محيط } \triangle EFG}{\text{محيط } \triangle ABC}$
محيط $\triangle EFG$	2	24	2
	معامل المقياس $\triangle ABC$	محيط $\triangle LMN$	$\frac{\text{محيط } \triangle LMN}{\text{محيط } \triangle ABC}$
محيط $\triangle LMN$	3	36	3
	معامل المقياس $\triangle ABC$	محيط $\triangle XYZ$	$\frac{\text{محيط } \triangle XYZ}{\text{محيط } \triangle ABC}$
محيط $\triangle XYZ$	4	48	4

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 35 الرسومات الهندسية والجداول والأوصاف الكلامية لاستكشاف علاقات تناسب أجزاء المثلثات.

b. **جدولي** انسخ الجدول التالي وأكمله. **انظر الهامش.**

محيط $\triangle EFG$	محيط $\triangle EFG$	محيط $\triangle EFG$	$\frac{\text{محيط } \triangle EFG}{\text{محيط } \triangle ABC}$
محيط $\triangle LMN$	محيط $\triangle LMN$	محيط $\triangle LMN$	$\frac{\text{محيط } \triangle LMN}{\text{محيط } \triangle ABC}$
محيط $\triangle XYZ$	محيط $\triangle XYZ$	محيط $\triangle XYZ$	$\frac{\text{محيط } \triangle XYZ}{\text{محيط } \triangle ABC}$

c. **لفظيًا** خمّن شيئًا حول العلاقة بين محيطات المثلثات المتشابهة.
محيطات المثلثات المتشابهة لها نفس معامل مقياس المثلثات المتشابهة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين المثلثات المتشابهة والمثلثات المتطابقة. **يكون للمثلثات المتشابهة والمثلثات المتطابقة نفس الزوايا. ويكون للمثلثات المتشابهة أضلاع متناسبة، بينما يكون للمثلثات المتطابقة أضلاع متطابقة.**

37. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثين متشابهين لمضمهما. اشرح كيف يمكنك التأكد من أنهما متشابهان.

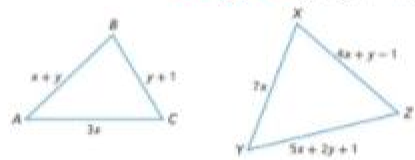
الإجابة النموذجية: أعلم أنهما متشابهان لأن كل الأضلاع متناسبة.

38. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

المثلثان المتطابقان يكونان متشابهين.

دائمًا، لأن المثلثين المتطابقين يجب أن تكون بهما زوايا متطابقة، لذا فهما يحققان مسلمة تشابه زاويتين (AA).

39. **التحدي** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ ، فاستخدم الرسم التخطيطي أدناه لإيجاد قيمتي x و y. $x = 3, y = 4$.



40. **الكتابة في الرياضيات** أوضح ما المعلومات التي تحتاج إليها لإثبات تشابه أي مثلثين. **تتمثل إحدى طرق إثبات تشابه مثلثين في إظهار تطابق زاويتين في كل منهما. وتتمثل طريقة أخرى في إظهار تناسب كل الأضلاع الثلاثة. وتتمثل الطريقة الأخيرة في إظهار تناسب ضلعين وتطابق الزاوية المحصورة بينهما.**

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من الطلاب رسم مثلث قائم الزاوية على مستوى إحداثي وتسمية كل رأس بزوج مرتّب. ثم اطلب منهم رسم مثلث قائم الزاوية آخر أكبر ويتناسب معه. الإجابة النموذجية: نظرًا لأن أطوال ضلعي المثلث متناسبة مع أطوال الضلعين المتناظرين لمثلث آخر علاوة على تطابق الزوايا المضمنة، فإن المثلثين متشابهان.

4 التقويم

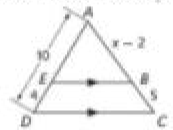
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
اطلب من الطلاب أن يوضحوا كيف أن المثلثات المتشابهة يمكن استخدامها في إيجاد ارتفاع شجرة طويلة. اطلب منهم أن يخبروك قبل انتهاء الدرس والمغادرة.

تدريب على الاختبار المعياري

41. **الاحتمال** $\frac{x^3}{(x-3)!}$ = D

A 3.0
B 0.33
C $x^2 - 3x + 2$
D $x^3 - 3x^2 + 2x$

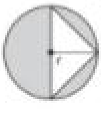
42. **إجابة موسعة** في الشكل أدناه، $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$.



a. اكتب تناسبًا يمكن استخدامه لإيجاد x. $\frac{6}{x-2} = \frac{4}{5}$

b. أوجد قيمة x وقياس $\overline{AB}$. 9.5, 7.5

43. **الجبر** ما متعددة الحدود التي تمثل مساحة المنطقة المظللة؟ J



F πr^2
G $\pi r^2 + r^2$
H $\pi r^2 + r$
J $\pi r^2 - r^2$

44. SAT/ACT يبلغ حجم جسم مكعب مستطيلي $16x$ وحدة مكعبة. إذا كانت أبعاد الجسم هي الأعداد الصحيحة x و y و z وحدة، فما أكبر قيمة ممكنة لـ z؟ B

A 32
B 16
C 8
D 4
E 2

مراجعة شاملة

أوجد حل كل متباينة مركبة، ثم مثّل مجموعة الحلول بيانيًا. 45–50. انظر الهامش.

45. $k + 2 > 12$ و $k + 2 \le 18$
46. $d - 4 > 3$ أو $d - 4 \le 1$
47. $3 < 2x - 3 < 15$
48. $3t - 7 \ge 5$ و $2t + 6 \le 12$
49. $h - 10 < -21$ أو $h + 3 < 2$
50. $4 < 2y - 2 < 10$

51. **المعرفة المالية** شركة متخصصة في أمن المنازل تقدم أنظمة أمنية مقابل AED 5 في الأسبوع زائد رسوم التركيب. وتبلغ التكلفة الإجمالية للتركيب و 12 أسبوعًا من الخدمة AED 210. اكتب معادلة في صيغة النقطة والميل لإيجاد الرسوم الإجمالية y لأي عدد من الأسابيع x. ما قيمة رسوم التركيب؟ $y - 210 = 5(x - 12)$; AED 150

52. **مربع اللغز الصيني** يتكون جهاز التانجرام من سبع قطع، مربع صغير، مثلثين صغيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلث متوسط الحجم قائم الزاوية، والشكل الرباعي. كيف يمكنك تحديد شكل رباعي؟ اشرح. انظر الهامش.

حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلثين متطابقان. وإذا لم يكن ممكنًا إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.

53.

لا يمكن

54.

لا يمكن

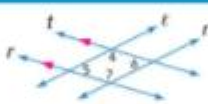
55.

نظرية تطابق الأضلاع الثلاثة (SSS)

مراجعة المهارات

اكتب برهانًا من عمودين. انظر الهامش.

56. **المعطيات:** $r \parallel t$; $\angle 5 \cong \angle 6$
المطلوب: $\ell \parallel m$

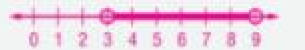


إجابات إضافية

45. $\{k \mid 10 < k \le 16\}$

46. $\{d \mid d \le 5$ أو $d > 7\}$

47. $\{x \mid 3 < x < 9\}$



48. $\varnothing$

49. $\{h \mid h < -1\}$

50. $\{y \mid 3 < y < 6\}$

52. الإجابة النموذجية: إذا كان هناك زوج واحد من الأضلاع المتقابلة متطابقة ومتوازية، فإن رباعي الأضلاع يكون متوازي أضلاع.

56. **المعطيات:** $r \parallel t$: $\angle 5 \cong \angle 6$
المطلوب: $\ell \parallel m$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $r \parallel t$: $\angle 5 \cong \angle 6$ (معطى)
2. $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان. (نظرية الزوايا الداخلية المتتالية)
3. $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$ (تعريف الزوايا المتكاملة)
4. $m\angle 5 = m\angle 6$ (تعريف الزوايا المتطابقة)
5. $m\angle 4 + m\angle 6 = 180$ (التعويض)
6. الزاويتان $\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان. (تعريف الزوايا المتكاملة)
7. $\ell \parallel m$ (إذا كانت الزوايا الداخلية المتتالية ∠s متكاملة، فإن الخطوط المستقيمة ||)

1 التركيز

الهدف استخدام تشابه المثلثات لإثبات معيار الميل للمستقيمات المتعامدة والمتوازية.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- منقلة
- مسطرة تقويم

نصيحة للتدريس

اسأل الطلاب عن تقنيات (تشابه زاوية–زاوية، ضلع–ضلع–ضلع، ضلع–زاوية–ضلع) التي تعلموها إلى الآن والتي يمكن استخدامها لإثبات تشابه مثلثين.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات متنوعة القدرات كل منها من طالبَيْن. اطلب منهم بعد ذلك إكمال النشاط.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرينين 1 و 2.

التركيز على محتوى الرياضيات

إيجاد الميل في النشاط 1، ميل $\overleftrightarrow{AC}$ سالب لأن *الارتفاع* الذي نشأ من A إلى B في الاتجاه السالب على *المسافة الأفقية* من B إلى C في *الاتجاه* الموجب.

التوسع 14-1

مختبر الهندسة
براهين المستقيمات المتعامدة والمستقيمات المتوازية

لقد علمت أن المستقيمين اللذين ليسا أفقيين أو ليسا رأسيين يكونان متعامدين فقط في حالة إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي 1−. في هذا النشاط، ستستخدم مثلثات متشابهة في إثبات النصف الأول من هذه النظرية، إذا كان هناك مستقيمان متعامدان فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي 1−.

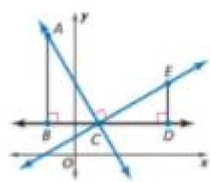
أثبت معايير الميل للمستقيمات المتوازية والمتعامدة، واستخدمها لحل المسائل الهندسية (على سبيل المثال، إيجاد معادلة لمستقيم متوازٍ أو متعامد على مستقيم محدد يمر بنقطة معلومة).

النشاط 1 المستقيمات المتعامدة

المعطيات: ميل $\overleftrightarrow{AC} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{CE} = m_2$ و $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

المطلوب: $m_1m_2 = -1$

الخطوة 1 في المستوى الإحداثي، قم بإنشاء المستقيم $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ والقاطع $\overleftrightarrow{BD}$ بحيث يكون موازيًا للمحور x مارًا بالنقطة C. ثم قم بإنشاء المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ بحيث يكون الوتر هو AC والمثلث القائم الزاوية $\triangle EDC$ بحيث يكون الوتر هو CE. من المفترض أن تتوازى ضلعان كلا المثلثين مع المحورين x و y كما هو موضح.



الخطوة 2 أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CE}$.

ميل $\overleftrightarrow{CE}$

$m_2 = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \frac{DE}{CD}$ الارتفاع $= DE$، الإزاحة $= CD$

ميل $\overleftrightarrow{AC}$

$m_1 = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \frac{-AB}{BC}$ أو $-\frac{AB}{BC}$ الارتفاع $= -AB$، الإزاحة $= CB$

الخطوة 3 أوضح أن $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

بما أن $\triangle ACB$ مثلث قائم به الزاوية القائمة B، فإن $\angle BAC$ متتامة مع $\angle ACB$. ومن المعطيات أن $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AC}$، فإذًا، نحن نعلم أن $\angle ACE$ زاوية قائمة. وحسب الإنشاء، الزاوية $\angle BCD$ هي عبارة عن زاوية مستقيمة. إذًا، $\angle ECD$ متتامة مع $\angle ACB$. وبما أن الزوايا المكملة لنفس الزاوية تكون متطابقة، فإن $\angle BAC \cong \angle ECD$. وبما أن الزوايا القائمة تكون متطابقة، فإن $\angle D \cong \angle B$. لذلك، حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)، $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

الخطوة 4 استخدم المعيقة $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ في إثبات أن $m_1m_2 = -1$.

بما أن $m_1 = -\frac{AB}{BC}$ و $m_2 = \frac{DE}{CD}$، فإن $m_1m_2 = \left(-\frac{AB}{BC}\right)\left(\frac{DE}{CD}\right)$. وبما أن المضلعين المتشابهين يشتملان على أضلاع متناسبة، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE}$. لذلك بالتعويض، نجد أن $m_1m_2 = \left(-\frac{CD}{DE}\right)\left(\frac{DE}{CD}\right)$ أو 1−.

إجابة إضافية

1. ميل $\overleftrightarrow{CE} = m_1 = \frac{DE}{CD}$ و ميل $\overleftrightarrow{AC} = m_2 = -\frac{AB}{BC}$.

معطى	$m_1m_2 = -1$
استبدل	$\left(\frac{DE}{CD}\right)\left(-\frac{AB}{BC}\right) = -1$
اضرب	$\left(\frac{DE}{CD}\right)\left(-\frac{AB}{BC}\right)\left(-\frac{BC}{AB}\right) = -1\left(-\frac{BC}{AB}\right)$
بسّط.	$\frac{DE}{CD} = \frac{BC}{AB}$

بما أن $\angle B$ و $\angle D$ زاويتان قائمتان، فإن $\angle B \cong \angle D$. وبحسب نظرية التشابه (ضلع–زاوية–ضلع)، فإن $\triangle ABC \sim \triangle CDE$. بما أن $\angle B$ زاوية قائمة، فإن $\angle BAC$ و $\angle BCA$ متكاملتان. بما أن $\triangle ABC \sim \triangle CDE$، فإن $\angle BAC \cong \angle DCE$. وبالاستبدال، فإن $\angle DCE$ و $\angle BCA$ متكاملتان. وبحسب تعريف التكامل، فإن $m\angle DCE + m\angle BCA = 90$. وبما أن $\angle BCD$ هي زاوية قائمة، فإنه بإضافة الزاوية $m\angle DCE + m\angle ACE + m\angle BCA = 180$ أو $(m\angle DCE + m\angle BCA) + m\angle ACE = 180$. وبالتعويض، فإن $90 + m\angle ACE = 180$. لذلك $m\angle ACE = 90$. وبحسب التعريف فإن الزاوية $\angle ACE$ تكون زاوية قائمة. بما أن $\overleftrightarrow{CE}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ يتقاطعان ليشكلا الزاوية القائمة $\angle ACE$، فإن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CE}$.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و 2 لتقييم ما إذا كان الطلاب يستوعبون كيفية إثبات معيار ميل مستقيمات متوازية ومتعامدة.

إجابة إضافية

2. ميل $\overleftrightarrow{FG} = m_1 = \frac{GH}{HF}$، و ميل $\overleftrightarrow{JK} = m_2 = \frac{KL}{LJ}$. بما أن $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$، $\overleftrightarrow{FG}$ و $\overleftrightarrow{JK}$ يقطعهما القاطع $\overleftrightarrow{FL}$، فإن $\angle GFH$ و $\angle KJH$ يكونان زاويتين داخليتين متتاليتين متكاملتين. وبحسب تعريف الزوايا المتطابقة، فإن $m\angle GFH = m\angle KJH$. وبحسب تعريف الزوايا المتكاملة، فإن $m\angle KJH = 180 - m\angle GFH$. وبحسب التعريف، فإن $\angle KJH$ و $\angle KJL$ تشكلان زوجًا خطيًا. وبما أن الأزواج الخطية متكاملة، فإن $m\angle KJH = 180 - m\angle KJL$. لذلك، وبالاستبدال، فإن $180 - m\angle GFH = 180 - m\angle KJL$ و $m\angle GFH = m\angle KJL$. وبما أن الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle GHF \cong \angle KLJ$. لذلك، وبحسب نظرية التشابه (زاوية–زاوية)، فإن $\triangle FGH \sim \triangle JKL$. وبما أن المثلثات المتشابهة تكون أضلاعها متناسبة فإن $\frac{GH}{HF} = \frac{KL}{LJ}$ وبما أن $m_1 = \frac{GH}{HF}$ و $m_2 = \frac{KL}{LJ}$، فبالتعويض، $m_1 = m_2$.

النموذج

1. **البرهان** استخدم الرسم التخطيطي من النشاط 1 في إثبات النصف الثاني من النظرية.

المعطيات: ميل $\overleftrightarrow{CE} = m_1$، وميل $\overleftrightarrow{AC} = m_2$، و $m_1 m_2 = -1$، $\triangle ABC$ عبارة من مثلث قائم به الزاوية القائمة B. $\triangle CDE$ عبارة من مثلث قائم به الزاوية القائمة D.

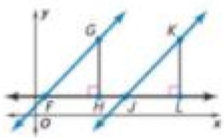
المطلوب: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CE}$ **انظر الهامش.**

يمكنك أيضًا استخدام مثلثات متشابهة في إثبات بعض العبارات عن المستقيمات المتوازية.

النشاط 2 مستقيمات متوازية

المعطيات: ميل $\overleftrightarrow{FG} = m_1$، وميل $\overleftrightarrow{JK} = m_2$، و $m_1 = m_2$. $\triangle FHG$ عبارة عن مثلث قائم به الزاوية القائمة H. $\triangle JLK$ عبارة عن مثلث قائم به الزاوية القائمة L.

المطلوب: $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$



الخطوة 1 في المستوى الإحداثي، قم بإنشاء $\overleftrightarrow{FG}$ و $\overleftrightarrow{JK}$، والمثلث القائم $\triangle FHG$ والمثلث القائم $\triangle JLK$. ثم ارسم قاطعًا أفقيًا $\overleftrightarrow{FL}$، كما هو موضح.

الخطوة 2 أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{FG}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{JK}$.

ميل $\overleftrightarrow{FG}$

$m_1 = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

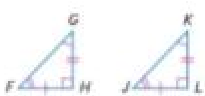
$= \frac{GH}{HF}$ الارتفاع $= GH$، الإزاحة $= HF$

ميل $\overleftrightarrow{JK}$

$m_2 = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \frac{KL}{LJ}$ الارتفاع $= KL$، الإزاحة $= LJ$

الخطوة 3 أثبت أن $\triangle FHG \sim \triangle JLK$.



من المعطيات أن $m_1 = m_2$. بالتعويض، $\frac{GH}{HF} = \frac{KL}{LJ}$. يمكن إعادة صياغة هذه الصيغة في التعويض $\frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$. بما أن $\angle H$ و $\angle L$ زاويتان قائمتان، فإن $\angle H \cong \angle L$. إذًا حسب تشابه ضلعين وزاوية (SAS)، فإن $\triangle FHG \sim \triangle JLK$.

الخطوة 4 استخدم الصيغة $\triangle FHG \sim \triangle JLK$ في إثبات أن $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$.

الزوايا المتناظرة في المثلثات المتشابهة تكون متطابقة. إذًا $\angle GFH \cong \angle KJL$. وفقًا لتعريف الزوايا المتطابقة، $m\angle GFH = m\angle KJL$ (أو $\angle GFH \cong \angle KJL$). حسب التعريف، $\angle KJH$ و $\angle KJL$ تشكلان زوجًا خطيًا بما أن الأزواج الخطية تكون متكاملة، فإن $m\angle KJH + m\angle KJL = 180$. إذًا بالتعويض، $m\angle KJH + m\angle GFH = 180$. حسب التعريف، تكون $\angle KJH$ و $\angle GFH$ متكاملتين. بما أن $\angle KJH$ و $\angle GFH$ متكاملتان وزاويتان داخليتان متتاليتان، فإن $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$.

النموذج

2. **البرهان** استخدم الرسم التخطيطي من النشاط 2 في إثبات العبارة التالية.

المعطيات: ميل $\overleftrightarrow{FG} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{JK} = m_2$، و $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$

المطلوب: $m_1 = m_2$ **انظر الهامش.**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 14-2 استخدام التناسبات لحل المسائل بين المثلثات المتشابهة بين المثلثات المتشابهة.

الدرس 14-2 استخدام الأجزاء المتناسبة ضمن المثلثات مع المستقيمات المتوازية.

بعد الدرس 14-2 تحديد التحويلات المتشابهة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- صف المسافة بين مستقيمين متوازيين. دائمًا نفس المسافة.
- لماذا تبدو المسافة بين خطي سكة القطار تتناقص شيئًا فشيئًا؟ الإجابة النموذجية: يقترب المستقيمان في الصورة إلى بعضهما.
- هل المستقيمان المبيّنان في الصورة والمشكّلان من خطّي سكة الحديد متوازيان؟ نعم

الدرس 14-2 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

السابق

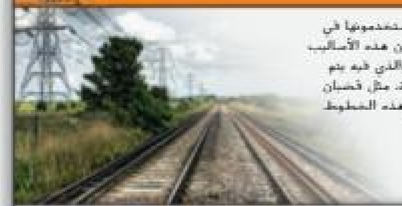
- لقد استخدمت التناسب في حل المسائل بين المثلثات المتشابهة.

الحالي

1. استخدام الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات.
2. استخدام الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية.

لماذا؟

- أمام المصورين أساليب عديدة يستخدمونها في إضافة التشويق إلى الصور. من بين هذه الأساليب استخدام منظور نقطة التلاشي والذي فيه يتم التقاط صورة بها خطوط متوازية، مثل قضبان السكك الحديدية، بحيث تتلاقى هذه الخطوط عند نقطة بالأفق.



المفردات الجديدة

منصف ساقي المثلث
midsegment of a triangle

إثبات نظريات حول المثلثات.

استخدم معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

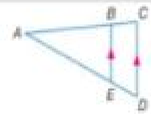
1 الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات

عندما يحتوي مثلث على مستقيم يوازي أحد أضلاعه، فيمكن باستخدام مسلمة تشابه الزوايا إثبات تشابه المثلثين المتكونين. بما أن المثلثين متشابهان، فإن أضلاعهما متناسبة.

النظرية 14.4 نظرية تناسب المثلثات

إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع المثلث وكان يتصف الضلعين الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.

مثال إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.



مثال 1 أوجد طول الضلع

في $\triangle PQR$، تجد أن $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$. فإذا كان $PT = 7.5$ و $TQ = 3$ و $SR = 2.5$، فأوجد PS.

استخدم نظرية تناسب المثلثات.

$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$ نظرية تناسب المثلثات

$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$ عوّض.

$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$ خاصية الضرب التقاطعي

$3PS = 18.75$ اضرب.

$PS = 6.25$ اقسم الطرفين على 3.

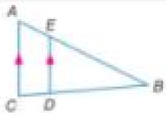
تمرين موجّه

1. إذا كان $PS = 12.5$ و $SR = 5$ و $PT = 15$، فأوجد TQ. 6

معكوس النظرية 14.4 صحيح أيضا ويمكن إثباته باستخدام الأجزاء المتناسبة في المثلث.

النظرية 14.5 معكوس نظرية تناسب المثلثات

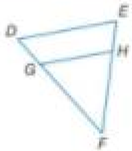
إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسّم الضلعين إلى قطع مستقيمة متناظرة متناسبة، فإن هذا المستقيم يكون موازيا للضلع الثالث في المثلث.



مثال إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DB}$، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$.

الربط بتاريخ الرياضيات
جاليليو جاليلي (1564-1642) ولد جاليليو في مدينة بيزا بإيطاليا. وقد درس الفلسفة والفضاء والرياضيات. وقدم إسهامات كبيرة في المجالات الثلاثة جميعًا. راجع التمرين 39.
المصدر: الموسوعة البريطانية

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا



في $\triangle DEF$، $EH = 3$، و $HF = 9$، و DG تمثل ثلث طول $\overline{GF}$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟

باستخدام معكوس نظرية تناسب المثلثات، ولإثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$، يجب أن نثبت أن $\frac{EH}{HF} = \frac{DG}{GF}$.

أوجد كل نسبة وبسّطها. افترض أن $DG = x$. بما أن DG ثلث GF، فإن $GF = 3x$.

$\frac{EH}{HF} = \frac{3}{9}$ أو $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{DG}{GF} = \frac{x}{3x}$ أو $\frac{1}{3}$

وبما أن $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$، والأضلاع متناسبة فإن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$.

تمرين موجّه

2. DG يمثل نصف طول $\overline{GF}$، و$EH = 6$، و $HF = 10$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟ لا

منتصف ساقي المثلث هو قطعة مستقيمة تقع طرفاها على منتصفي ساقي المثلث. يوجد في كل مثلث ثلاث منتصفات للسيقان. منتصفات السيقان في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}$ و $\overline{PQ}$ و $\overline{RQ}$.

نصيحة دراسية
منتصف ساقي المثلث تكوّن منتصفات سيقان المثلث الثلاثة مثلث المنتصفات.

نظرية تناسب منتصفات سيقان المثلثات هي حالة خاصة من نظرية تناسب المثلثات.

النظرية 14.6 نظرية منتصفات سيقان المثلثات

يكون منتصف ساقي المثلث موازيا لأحد أضلاع المثلث، ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.

مثال إذا كان J و K هما نقطتي المنتصف للضلعين $\overline{FH}$ و $\overline{HG}$ على الترتيب، فإن $\overline{JK} \parallel \overline{FG}$ و $JK = \frac{1}{2}FG$.

1 الأجزاء المتناسبة ضمن المثلثات

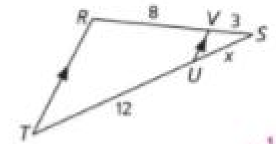
الأمثلة 1–3 توضح كيفية استخدام النظريات التي تنطوي على أجزاء متناسبة في مثلثات لإيجاد قياساتٍ مجهولة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

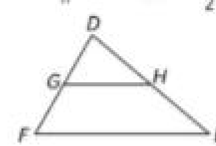
أمثلة إضافية

1 في $\triangle RST$، $\overline{RT} \parallel \overline{VU}$، $SV = 3$، $VR = 8$ و $UT = 12$. أوجد SU.



$4\frac{1}{2}$

2 في $\triangle DEF$، $DH = 18$ و $HE = 36$ و $DG = \frac{1}{2}GF$. هل $\overline{GH} \parallel \overline{FE}$؟

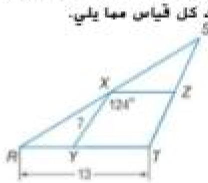


نعم. من المعلومات المعطاة، $\frac{DH}{HE} = \frac{DG}{GH}$. ولأن للقطع المستقيمة أطوالًا متناسبة، فإن $\overline{GH} \parallel \overline{FE}$.

874 | الدرس 14-2 | المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

مثال 3 استخدام نظرية منصفات المثلث

في الشكل، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ هما منصفان لسيقان $\triangle RST$.
أوجد كل قياس مما يلي.



a. XZ

$XZ = \frac{1}{2}RT$ نظرية منصفات سيقان المثلثات

$XZ = \frac{1}{2}(13)$ عوّض

$XZ = 6.5$ بسّط.

b. ST

$XY = \frac{1}{2}ST$ نظرية منصفات سيقان المثلثات

$7 = \frac{1}{2}ST$ عوّض

$14 = ST$ اضرب الطرفين في 2.

c. $m\angle RYX$

باستخدام نظرية منصفات سيقان المثلثات، $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

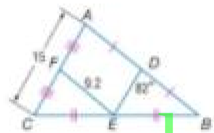
$\angle RYX \cong \angle YXZ$ نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة

$m\angle RYX = m\angle YXZ$ تعريف التطابق

$m\angle RYX = 124$ عوّض

تمرين موجّه

أوجد قياس كل مما يلي.



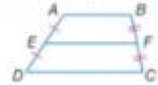
3A. DE 7.5

3B. DB 9.2

3C. $m\angle FED$ 82

تصيحة دراسية

المنصف نظرية منصفات المثلث تشبه نظرية منصف ساقي شبه المنحرف والتي تنص على أن منصف ساقي شبه المنحرف يوازي القاعدتين ويبلغ طوله نصف مجموع طولي القاعدتين.

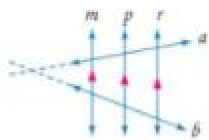


$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

2 الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية

هي حالة خاصة أخرى من نظرية تناسب المثلثات وتتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر يقطعها قاطعان. لاحظ أنه عند مد القاطعين a و b، فإنهما يكوّنان مثلثات مع المستقيمات المتوازية.



تصيحة دراسية

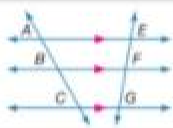
تناسبات أخرى يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال في النتيجة 7.1.

$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$ ، $\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$

اللازمة 14.1 الأجزاء المتناسبة للمستقيمات المتوازية

عند تقاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع قاطعين فإنها تقسّم القاطعين إلى أجزاء متناسبة.

مثال إذا كان $\overline{CG} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{AE}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

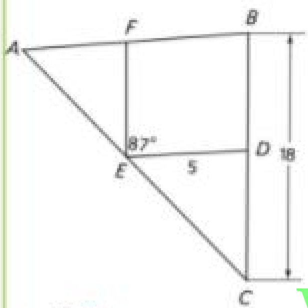


انتبه!

أطوال متناسبة الأطوال المتناسبة عند استخدام الطلاب لنظرية تناسب المثلثات، وجّههم إلى كتابة تناسب. وذكّرهم أنهم إذا كانوا يجدون طول ضلع كامل في مثلث، فعليهم استخدام طول ضلع المثلث المشابه بكامله.

مثال إضافي

3 في الشكل، $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ هما منصفان لسيقان $\triangle ABC$. أوجد كل قياس مما يلي.



a. AB 10

b. FE 9

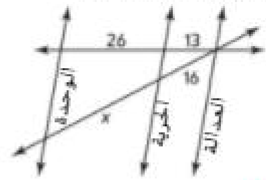
c. $m\angle AFE$ 87

2 الأجزاء المتناسبة التي تشكلها المستقيمات المتوازية

يوضح **المثالان 4 و 5** كيفية إيجاد القطع المستقيمة المتناسبة والمتطابقة عن طريق استخدام النظريات الواردة في هذا الدرس.

مثال إضافي

4 الخرائط في الشكل، شوارع الوحدة والحرية والعدالة شوارع متوازية. يبيّن الشكل المسافة بين مباني المدينة. أوجد x.



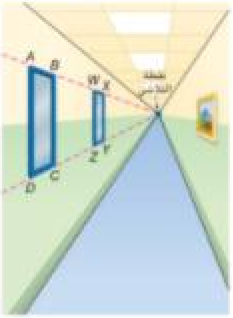
32

التركيز على محتوى الرياضيات

المستقيمات المتوازية إن معكوس النتيجة 14.2 صحيحٌ أيضًا. إذا قطعت ثلاثة مستقيمات كل قاطع إلى قطع مستقيمة متطابقة، فإنها تقطع القطع المستقيمة المتطابقة الواقعة على أي مستقيم عمودي على كل من المستقيمات المقابلة. وهذا يبين أن المستقيمات الثلاثة تفصل بينها المسافة نفسها ولذلك فهي متوازية.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتناسبة للقاطعين

الفن ترسم ريهام رواقًا بمنظور النقطة الواحدة. وتستخدم الخطوط التوجيهية الموضحة لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{WZ}$ و $\overline{XY}$ جميعًا متوازية، ويبلغ $AB = 8$ سنتيمترات، و $DC = 9$ سنتيمترات، و $ZY = 5$ سنتيمترات، فأوجد WX.



وفق النتيجة 7.1، إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$

فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$.

النتيجة 14.1	$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$
عوّض.	$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$
خاصية الضرب التقاطعي	$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$
بسّط.	$9WX = 40$
اقسم الطرفين على 4.	$WX = \frac{40}{9}$

من المفترض للمسافة بين W و X أن تكون $\frac{40}{9}$ أو حوالي 4.4 سنتيمترات.

التحقق نسبة DC إلى ZY تساوي 9 إلى 5، يساوي 10 إلى 5 تقريبًا أو 2 إلى 1. نسبة AB إلى WX تساوي 8 إلى 4.4 أو حوالي 8 إلى 4 أو 2 إلى 1 أيضًا. إذًا الإجابة منطقية. ✓

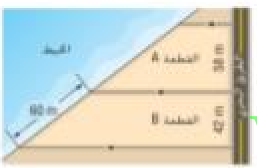
الربط بالحياة اليومية

لكي يظهر الرسم ثنائي الأبعاد ثلاثي الأبعاد، يقدم الفنان عدة إشارات تصويرية.

- الحجم – الأشياء البعيدة تبدو أقرب
- الوضوح – الأشياء الأقرب تبدو أكثر تركيزًا
- التفاصيل – الأشياء القريبة يكون لها هيئة وشكل بينما الأشياء البعيدة تكون تقريبًا مخططة

المصدر: مركز نشر ثقافة الإعلام

تمرين موجّه

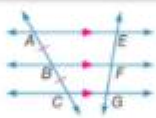


4. العقارات الواجهة هي قياس طول حد العقار الذي يطل على منظر معين مثل شارع أو بحيرة أو محيط أو نهر. أوجد طول واجهة المحيط للقطعة A مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر. **92.9 مترًا**

إذا كان معامل القياس للقطع المستقيمة المتناسبة هو 1، فإنها تقسم القاطعين إلى أجزاء متطابقة.

النتيجة 14.2 الأجزاء المتطابقة للمستقيمات المتوازية

إذا أحدثت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع ما، فإنها تحدث قطعًا مستقيمة متطابقة على كل القواطع.



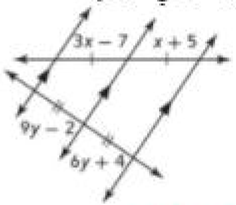
مثال إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.

التدريس المتمايز OL EL

المتعلمون أصحاب النمط البصري اطلب من الطلاب ابتكار رسمٍ يستخدم نقطة تلاشٍ وناقش النواحي الرياضية التي ينطوي عليها ذلك.

مثال إضافي

5 أوجد قيمتي x و y.



$y = 2$ ، $x = 6$

انتبه!

الإجابة عن الأسئلة توخَّ الحذر في الإجابة عن السؤال المطروح. في المثال 5، عليك إيجاد قيمتي x و y وليس طولي القطعتين المستقيمتين.

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتطابقة للقاطعين

الجبر أوجد قيمة x و y.

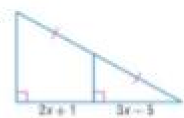
بما أن $\overleftrightarrow{LQ} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{JM}$ ، $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$.
فإن $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 7.2.

$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x - 5 = 4x + 3$	عوض.
$2x - 5 = 3$	اطرح $4x$ من الطرفين.
$2x = 8$	اجمع 5 إلى الطرفين.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 2.
$MP = PQ$	تعريف التطابق
$3y + 8 = 5y - 7$	عوض.
$8 = 2y - 7$	اطرح $3y$ من الطرفين.
$15 = 2y$	اجمع 7 إلى الطرفين.
$7.5 = y$	اقسم 2 على الطرفين.

تمرين موجَّه

5A. $\frac{5}{3}$

5B. 6

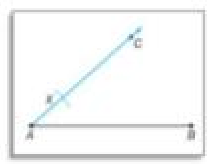


من الممكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين من طريق إنشاء منصف عمودي على القطعة المستقيمة. إلا أنه لا يمكن تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة بإنشاء منصفات عمودية. ولفعل ذلك يجب عليك استخدام المستقيمات المتوازية والنتيجة 14.2.

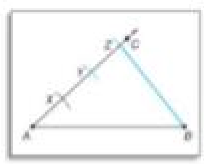
الإنشاء تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء

ارسم القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. ثم استخدم النتيجة 14.2 لتقسيم $\overline{AB}$ إلى ثلاثة أجزاء.

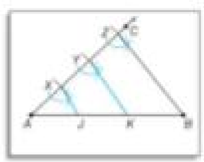
الخطوة 1 ارسم $\overrightarrow{AC}$. ثم ضع الفرجار على A، وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{AC}$ عند X.



الخطوة 2 استخدم نفس وضعية الفرجار لرسم Z و Y بحيث يكون $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$. ثم ارسم $\overline{ZB}$.



الخطوة 3 ارسم مستقيمين يربطان بين Y و X بحيث يوازيان $\overline{ZB}$. اكتب على نقطتي التقاطع على $\overline{AB}$ الحرفين J و K.



الاستنتاج: بما أن المستقيمين المتوازيين يقطعان قطعتين مستقيمتين متطابقتين على القاطعين، فإن $\overline{AJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KB}$.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب استخدام خيط وشريط لاصق والأرضية المبلطة لتعليم قطع مستقيمة متطابقة على خطوط متوازية يتم تشكيلها بواسطة الشريط اللاصق على الأرضية. استخدم الخيط لتوضح أنه إذا شكلت ثلاث مستقيمات متوازية قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع واحد، فإنها تشكل قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع آخر.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-9 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المتابعة

يستكشف الطلاب المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

اطرح السؤال التالي:

- ما العلاقة بين المستقيمات المتوازية والتناسبات؟

الإجابة النموذجية: عند تقاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع قاطعين، فإن القطع المتناظرة التي تقطع كل قاطع متناسبة.

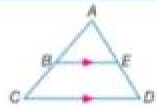
14. نعم، لأن $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

15. لا، لأن $\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC}$.

16. لا، لأن $\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC}$.

17. نعم، لأن $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

التحقق من فهمك

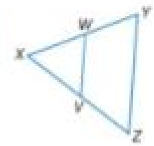


مثال 1

1. إذا كان $AB = 3$ ، $AE = 1$ ، $ED = 12$، فأوجد AD. **5**
2. إذا كان $AB = 7$ ، $AE = 2$ ، $AC = 28$، فأوجد ED. **6**

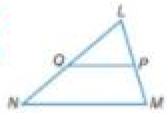
مثال 2

3. في $\triangle XYZ$، إذا كان $XY = 76$ ، $XW = 19$ ، $XV = 18$ ، $XZ = 72$، فحدد ما إذا كان $\overline{ZY} \parallel \overline{VW}$. برر إجابتك.



3. نعم، لأن $\frac{XW}{WY} = \frac{XV}{XZ}$.

4. في $\triangle LMN$، إذا كان $LP = 6$ ، $LM = 22$ ، $LQ = 14$ ، $LN = 43$، فحدد ما إذا كان $\overline{NP} \parallel \overline{QP}$. برر إجابتك.

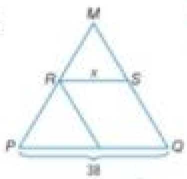


4. لا، لأن $\frac{LQ}{QN} \neq \frac{LP}{PM}$.

مثال 3

$\overline{RS}$ هو منصف ساقي $\triangle MPQ$. أوجد قيمة x.

5.



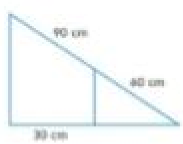
19

6.

14

مثال 4

7. **الرياضات** يبني جمال منحدرًا للدراجات بالأبعاد الموضحة. إذا كانت الدعامة موازية لظهر المنحدر، فما طول المسافة من مقدمة المنحدر إلى الدعامة؟ **20 cm**



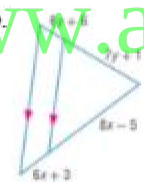
مثال 5

الجبر أوجد قيمة x و y.

8.

$x = 2$، $y = 3$

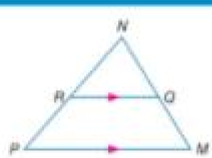
9.



$x = 4$، $y = 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

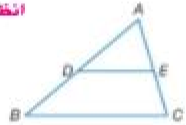


10. إذا كان $WQ = 37$ ، $MQ = 30$ ، $RN = 74$، فأوجد PR. **60**
11. إذا كان $MQ = 44$ ، $PR = 22$ ، $RN = 34$، فأوجد MQ. **68**
12. إذا كان $NQ = 18$ ، $MQ = 47$ ، $PR = 94$، فأوجد RN. **36**
13. إذا كان $MQ = 60$ ، $PR = 20$ ، $RN = 30$، فأوجد QN. **90**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	10-25, 48, 49, 51-73	11-25 فردي, 53, 56	10- 24 زوجي, 48, 49, 51, 52, 57-73
OL أساسي	11-47 فردي, 48, 49, 51-73	10-25, 53-56	26-49, 51, 52, 57-73
BL متقدم	26-66, (اختياري: 67-73)		

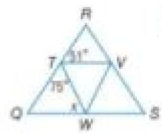
مثال 2 حدد إذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. برر إجابتك. انظر الهامش



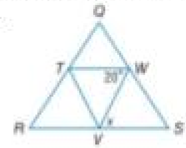
14. $\overline{AD} = 19$ ، $\overline{DB} = 20$ ، $\overline{AE} = 76$ ، $\overline{EC} = 80$
15. $\overline{AD} = 52$ ، $\overline{DB} = 25$ ، $\overline{AE} = 13$ ، $\overline{EC} = 6$
16. $\overline{AD} = 26$ ، $\overline{DB} = 19$ ، $\overline{AE} = 52$ ، $\overline{EC} = 18$
17. $\overline{AD} = 69$ ، $\overline{DB} = 42$ ، $\overline{AE} = 23$ ، $\overline{EC} = 14$

مثال 3 $\overline{TV}$ و $\overline{VW}$ و $\overline{TW}$ منصفات ساقين في $\triangle RQS$. أوجد قيمة x.

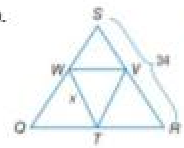
18. 54°



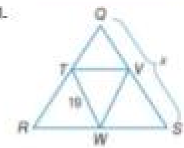
19. 20°



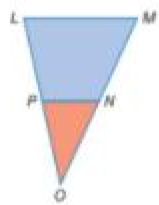
20. 17



21. 38



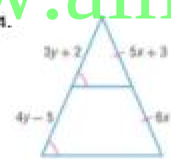
مثال 4 22. **الروح المدرسية** تصمم نجاة لافتة لتجمع طلابي تشجيعي. إذا كان $LM \parallel PN$ و $LP = 26$ cm و $PO = 50$ cm و $MN = 13$ cm، فأوجد MO.
$MO = 48$ cm



23. **التخييم** أثناء التخييم، يريد عامر نصب خيمته في منتصف المسافة بين إحدى الأشجار وحفرة إيقاد النار. إذا كانت المسافة بين قمة الشجرة وقمة خيمته تساوي 12 مترًا، فكم تبعد قمة خيمته عن حفرة النار؟ 12 مترًا

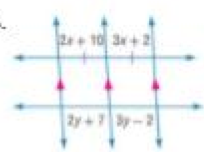
مثال 5 **الجبر** أوجد قيمة x و y.

24. $x = 3$, $y = 7$

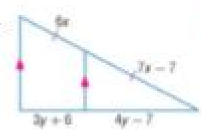


25. $x = 15$, $y = 12$

26. $x = 8$, $y = 9$



27. $x = 7$, $y = 13$



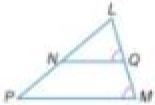
879

البرهان اكتب برهانًا حرًا. **30–28. انظر الهامش.**

28. النتيجة 14.1
29. النتيجة 14.2
30. النظرية 14.4

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **32–31. انظر ملحق إجابات الوحدة 14.**

31. النظرية 14.5
32. النظرية 14.6

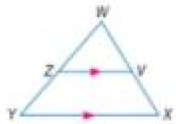


ارجع إلى $\triangle LMP$.

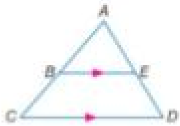
33. إذا كان $LQ = 42$ و $QM = 42$ و $NQ = 50$. فأوجد PM. **100**

34. إذا كان $LN = 12$ و $NQ = 18$ و $PM = 36$. فأوجد LP. **24**

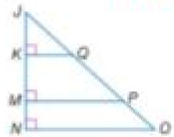
35. إذا كان $WZ = 2x + 4$ و $ZY = 2x + 1$ و $WV = 68$ و $WX = 130$. فأوجد ZY و x. **31, 15**



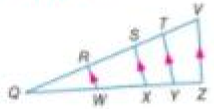
36. إذا كان $AB = t + 2$ و $AC = 31$ و $AE = 4t + 8$ و $ED = 2t - 4$. فأوجد AB. **22**



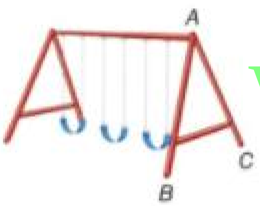
37. إذا كان $JK = 12$ و $MN = 7$ و $JQ = 24$ و $KM = 49$. فأوجد PO و QP. **14, 98**

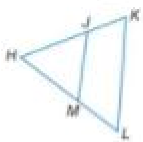


38. إذا كان $QR = 4$ و $QW = 2$ و $RS = 80$ و $XY = 6$ و $TV = 28$. فأوجد WX و ST و YZ. **40, 12, 14**



39. **مجالسة الأطفال** أثناء مجالسة الأطفال، لاحظت مها أن عمود الدعم بآلة الأرجوحة عبارة عن منصف ساقين لـ $\triangle ABC$. إذا قدّرت مها أن طول عمود الدعم يبلغ 1.2 متر، فكم تبعد النقطة B عن النقطة C؟ **2.4 متر**





حدد قيمة x بحيث $JM \parallel KL$.

40. $HJ = 19x + 2$ و $JK = 93$ و $HM = 6x + 2$ و $ML = 7x + 3$ **4**

41. $HJ = \frac{1}{2}x$ و $JK = x - 3$ و $HM = 2x - 8$ و $ML = 39$ **16**

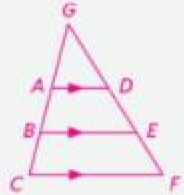
42. **الهندسة الإحداثية** $\triangle QRS$ له الرؤوس $Q(-5, 10)$ و $R(3, 4)$ و $S(10, 8)$. ارسم $\triangle QRS$. وحدد إحداثيات منصف ساقي المثلث والذي يكون متوازيًا مع RS. برر إجابتك. **$(7.5, 9)$, $(-1, 7)$. هذان هما نقطتا المنتصف لـ QS و QR.**

إجابات إضافية

30–28. الإجابات النموذجية معطاة.

28. المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

المطلوب: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

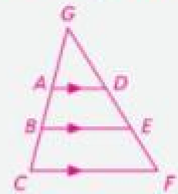


البرهان:

في $\triangle GBE$، $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$. وبحسب نظرية تناسب المثلثات فإن AB و DE متناسبان. في $\triangle GCF$، $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. وبحسب نظرية تناسب المثلثات فإن BC و EF متناسبان. لذلك، $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

29. المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

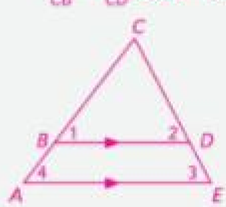


البرهان:

من النتيجة 14.1، $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن $AB = BC$ بحسب تعريف التطابق.
لذلك، $\frac{AB}{BC} = 1$. بحسب التعويض فإن $1 = \frac{DE}{EF}$. لذلك، $DE = EF$. بحسب تعريف التطابق، $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

30. المعطيات: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

المطلوب: $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$



البرهان: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، $\angle 1 \cong \angle 4$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ لأنهما زاويتان متناظرتان. بحسب نظرية تشابه ضلع–ضلع $\triangle BCD \sim \triangle ACE$. وبحسب تعريف المضلعات المتشابهة فإن $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$. بحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن $CA = BA + CB$ و $CE = DE + CD$. وبالتعويض فإن $\frac{DE + CD}{CD} = \frac{BA + CB}{CB}$. وبإعادة الكتابة في صورة مجموع كلي $\frac{CD}{CD} + \frac{DE}{CD} = \frac{CB}{CB} + \frac{BA}{CB}$. وبالتبسيط، $1 + \frac{DE}{CD} = 1 + \frac{BA}{CB}$. لذلك، $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$ عن طريق طرح واحد من كل جانب.

ملاحظات لحل التمرين

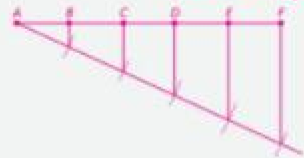
مسطرة التقويم و المنقلة تتطلب التمارين 47–44 استخدام مسطرة عدلة ومنقلة.

التمثيلات المتعددة

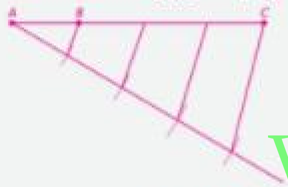
في التمرين 47، يستخدم الطلاب رسومًا هندسيةً وجدولاً إضافةً إلى الوصف اللفظي لاستكشاف منصفات الزوايا والتناسبات.

إجابات إضافية

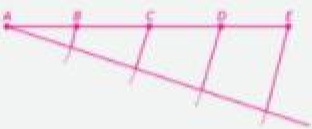
44. الإجابة النموذجية:



45. الإجابة النموذجية:



46. الإجابة النموذجية:



43 **الفن** كجزء من مشروع فني، صمم أحمد مثلثًا متساوي الساقين من قصاصات ورقية ملونة بألوان مختلفة. إذا كانت كل قصاصة ورقية لها نفس العرض، فأوجد أطوال BD و DE و EF و FA. 3.25 cm

الإنشاء أنشئ كل قطعة مستقيمة حسبما هو موضح. 44–46. انظر الهامش.

44. قطعة مستقيمة مقسمة إلى خمس قطع متطابقة

45. قطعة مستقيمة مقسمة إلى قطعتين النسبة بين طوليهما تبلغ 1 إلى 3

46. قطعة مستقيمة طولها 8 سنتيمترات مقسمة إلى أربع قطع متطابقة

47. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف منصفات الساقين للمثلثات المتشابهة.

a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة مثلثات قائمة مع منصفات الساقين لها. قم بتسمية المثلثات ABC ومنصفات الساقين MLP. ثم قم بقياس طول كل منصف ساقين وتسميته. انظر ملحق إجابات الوحدة 14.

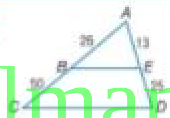
b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله. انظر ملحق إجابات الوحدة 14.

المثلث	ML	LP	م-ب	هل ΔMLP مثلث قائم؟
1				
2				
3				

c. **لفظيًا** خمّن شيئًا حول تعريف منصفات الساقين للمثلث القائم. منصفات الساقين في المثلث القائم تشكل مثلثًا قائمًا.

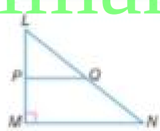
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **تحليل الخطأ** يحاول إبراهيم وأسامة اكتشاف ما إذا كان $CD \parallel BE$. يعتقد إبراهيم أن BE ليس موازيًا لـ CD، ولكن أسامة يعتقد أنهما متوازيان. أي منهما على صواب؟ اشرح إجابتك.



48. آدم على صواب لأن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$

49. **تبرير** إذا كان ΔLMN مثلثًا قائمًا فيه PQ منصف ساقين، فهل تكون $\angle LPQ$ زاوية قائمة؟ اشرح إجابتك. نعم، لأن $\angle LPQ$ و $\angle LMN$ زاويتان متناظرتان.



50. **تحدٍّ** استعن بالرسم التخطيطي أدناه لإيجاد x و y و z. $x = 5, y = 2, z = 3$

51. **مسألة غير محددة الإجابة** قم برسم وتسمية المثلث ABC مع منصف الساقين PQ الموازي لـ BC، بحيث يكون $AP = 3$ و $QC = 4$. انظر ملحق إجابات الوحدة 14.

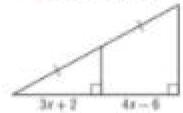
52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقارن بين النتيجة 14.1 والنتيجة 14.2.

52. تتعلق اللازمتان بالمستقيمات المتوازية والعلاقات بين القطع المستقيمة. وتتناول اللازمة 14.1 فقط التناسب بينما تتناول اللازمة 14.2 التطابق.

881

تدريب على الاختبار المعياري

53. الإجابة القصيرة ما قيمة x؟ **8**



54. إذا كانت رؤوس المثلث JKL هي $(0, 0)$ ، $(0, 10)$ ، $(10, 10)$. فإن مساحة المثلث JKL هي **D**

A 20 وحدة^2 C 40 وحدة^2

B 30 وحدة^2 D 50 وحدة^2

55. الجبر تبلغ نسبة حبوب الأرز والقمح والشوفان المكونة لوجبة إفطار 2:4:1. إذا كانت الجهة المصنعة تصنع خليطًا به 110 كيلوجرامات من القمح، فما عدد كيلوجرامات الأرز المستخدمة؟ **G**

F 120 kg   H 240 kg

G 220 kg   J 440 kg

56. SAT/ACT إذا كانت مساحة الدائرة تبلغ 16 مترًا مربعًا، فما طول نصف القطر بالمتر؟ **A**

A $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}$ D 12π

B $\frac{8}{\pi}$ E 16π

C $\frac{16}{\pi}$

57. $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ حسب مسلّمة تشابه زاويتين (AA)؛ 6.25   **58.** $\triangle RSW \sim \triangle TRW$ حسب نظرية تشابه ضلعين وزاوية (SAS)؛ 15, 20

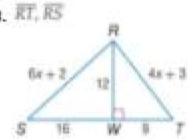
مراجعة شاملة

الجبر حدد المثلثات المتشابهة. ثم أوجد قياس (قياسات) القطعة (القطع) المستقيمة المبينة. (الدرس 1-14)

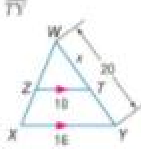
59. $\triangle WZT \sim \triangle WXY$ حسب تشابه AA؛ 7.5

57. $\overline{AB}$

58. $\overline{RT}, \overline{RS}$



59. $\overline{TY}$



60. كرة السلة في كرة السلة، الرمية الحرة تساوي نقطة واحدة والهدف الميداني إما إنه يساوي نقطتين أو ثلاث نقاط. في أحد الأشواط، سجل تيم دانكن لاعب فريق سان أنطونيو سبيرز إجمالي 1342 نقطة. وبلغ إجمالي عدد الأهداف الميدانية ذات النقطتين والأهداف الميدانية ذات النقاط الثلاث، 517 هدفًا، ونجح في إحراز 305 رميات حرة من أصل 455 محاولة. أوجد عدد الأهداف الميدانية ذات النقطتين والأهداف الميدانية ذات النقاط الثلاث التي سجلها دانكن في هذا الشوط. **514 هدفًا ميدانيًا ذا النقطتين؛ 3 أهداف ميدانية ذات النقاط الثلاث**

الهندسة الإحداثية بالنسبة لكل شكل رباعي له رؤوس معلومة، تحقق ما إذا كان الشكل الرباعي هذا شبه منحرف، وحدد ما إذا كان الشكل شبه المنحرف متساوي الساقين أم لا. **61–62. انظر الهامش.**

61. $Q(-12, 1), R(-9, 4), S(-4, 3), T(-11, -4)$ **62.** $A(-3, 3), B(-4, -1), C(5, -1), D(2, 3)$

حلّ كل متباينة مما يلي. وتحقق من حلّك.

63. $3y - 4 > -37$ $\{y \mid y > -11\}$ **64.** $-5q + 9 > 24$ $\{q \mid q < -3\}$ **65.** $-2k + 12 < 30$ $\{k \mid k > -9\}$

66. $5q + 7 \le 3(q + 1)$ $\{q \mid q \le -2\}$ **67.** $\frac{z}{4} + 7 \ge -5$ $\{z \mid z \ge -48\}$ **68.** $8c - (c - 5) > c + 17$ $\{c \mid c > 2\}$

مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية.

69. $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$ $\frac{2}{3}$ **70.** $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$ 6.7   **71.** $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$ 2.1   **72.** $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$ 3.6   **73.** $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$ 8.7

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب شرح نظرية تناسب المثلثات باستخدام خواص تشابه المثلثات.

إجابات إضافية

61. $\overline{QR} \parallel \overline{TS}$ و $\overline{QT} \nparallel \overline{RS}$؛ فإن $QRST$ يكون شبه منحرف متساوي الساقين لأن $RS = \sqrt{26} = QT$.

62. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$؛ فإن $ABCD$ يكون شبه منحرف ولكن ليس متساوي الساقين لأن $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 5$.

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع يقع برج مياه إحدى البلدات في النقطة A. تشكّل حدود البلدة مثلثًا باستخدام النقاط B، و C وبرج المياه. تقع النقطة D في المنتصف بين برج المياه والنقطة B، وتقع النقطة E في المنتصف بين برج المياه والنقطة C. وتقدر المسافة من D إلى E بـ 18.9 كيلو مترًا. فما المسافة من النقطة C إلى النقطة B؟ **37.8 كيلو مترًا.**

الصفحات 867–869، الدرس 14-1

26. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. إذا كان BD عمودياً على AC (معطى)
2. $m\angle BDA = m\angle BDC = 90$ (خطان متعامدان على زوايا قائمة).
3. $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD}$ (معطى)
4. $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ (تشابه ضلعين وزاوية محصورة)

27. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $LMNP$ شكل طائرة ورقية (معطى)
2. $AP = AM$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)
3. $PQ = QM$ (ينصّف قطرا الطائرة بعضهما بعضا).
4. $AQ = AQ$ (خاصية التعاكس)
5. $\triangle APQ \sim \triangle AMQ$ (تشابه أضلاع المثلث الثلاثة)
3. $\frac{AP}{AM} = \frac{PQ}{QM}$ (تعريف تشابه المثلثات).

28. البرهان: بما أنّ طاولة الكي موازية للأرض، ومن ثمّ فإنّ $AB \parallel DC$. إذاً $\angle B \cong \angle D$ و $\angle A \cong \angle C$ لأنهما زاويتان متداخلتان متبادلتان. ومن ثمّ ووفقًا لتشابه زاوية–زاوية، فإنّ $\Delta ABE \sim \Delta CDE$. وبما أن المثلثين متشابهان، فإنّ $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC}$.

29. الحل: المثلثان غير متشابهين.

$AB = \sqrt{(7-1)^2 + (5 - -7)^2} = \sqrt{261}$,

$AC = \sqrt{(1-1)^2 + (8 - -7)^2} = 15$,

$BC = \sqrt{(7-8)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$,

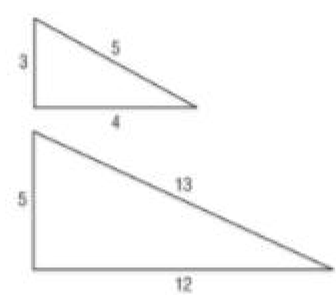
$EB = \sqrt{(7-3)^2 + (5 - -3)^2} = \sqrt{80}$,

$FB = \sqrt{(7-3)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{20}$,

$\frac{AB}{EB} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{29}}{3}, \frac{BC}{BF} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{20}}$. إذاً فإنّ هذه الأضلاع غير متناسبة، والمثلثان غير متشابهين.

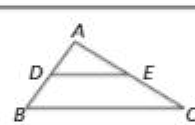
32. الإجابة النموذجية:

المثال المضاد:



الصفحتان 880–881، الدرس 14-2

31. المعطيات: $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$



المطلوب إثبات: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

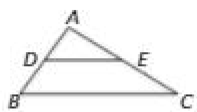
البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ (معطى)
2. $\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$ (خاصية الجمع).
3. $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ (بالتعويض).
4. $AB = AD + DB, AC = AE + EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
5. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (بالتعويض).
6. $\angle A \cong \angle A$ (خاصية الانعكاس).
7. $\triangle ADE \cong \triangle ABC$ (تشابه ضلع–زاوية–ضلع)
8. $\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف ~ المضلعات المتشابهة)
9. $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (إذا كانت الزاويتان المتناظرتان ≅ متطابقتين≅. إذا المستقيمان متوازيان ∥.)

32. المعطيات: D هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، E هي نقطة منتصف $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}; DE = \frac{1}{2}BC$

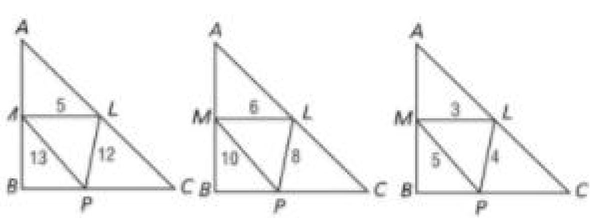


البرهان:

العبارات (المبررات)

1. D هي نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي نقطة منتصف $\overline{AC}$ (معطى)
2. $\overline{AD} \cong \overline{DB}, \overline{AE} \cong \overline{EC}$ (نظرية نقطة المنتصف).
3. $AD = DB, AE = EC$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة).
4. $AB = AD + DB, AC = AE + EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
5. $AB = AD + AD, AC = AE + AE$ (بالتعويض)
6. $AB = 2AD, AC = 2AE$ (بالتعويض)
7. $\frac{AB}{AD} = 2, \frac{AC}{AE} = 2$ (خاصية الطرح)
8. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (خاصية التعدي)
9. $\angle A \cong \angle A$ (خاصية الانعكاس).
10. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (تشابه ضلع–زاوية–ضلع)
11. $\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف ~ المضلعات المتشابهة)
12. $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (إذا كانت الزاويتان المتناظرتان ≅متطابقتين ≅. إذا المستقيمان متوازيان).
13. $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ (تعريف ~ المضلعات المتشابهة)
14. $\frac{BC}{DE} = 2$ (بحسب خاصية التعويض)
15. $2DE = BC$ (خاصية الضرب)
16. $DE = \frac{1}{2}BC$ (خاصية القسمة)

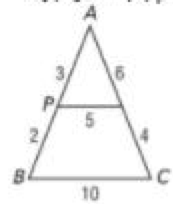
47a. الإجابة النموذجية:



47b.

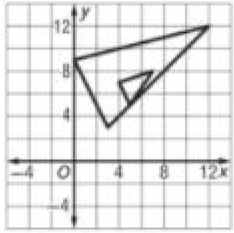
المثلث	ML	LP	MP	$\triangle MLP$ قائم الزاوية؟
1	5	12	13	نعم
2	3	4	5	نعم
3	6	8	10	نعم

51. الإجابة النموذجية:



الصفحتان 887–888، الدرس 14-3

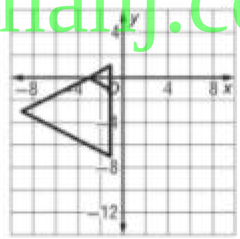
14.



$\overline{AB}=\sqrt{5}, \overline{BC}=3\sqrt{2}, \overline{AC}=\sqrt{17}, \overline{EF}=3\sqrt{5}, \overline{FG}=9\sqrt{2},$
$\overline{EG}=3\sqrt{17}$
$\frac{AB}{EF}=3, \frac{BC}{FG}=3, \frac{AC}{EG}=3$

وحيث إن
$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{EG}$ ، حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة. إذا $ABC \sim EFG$.

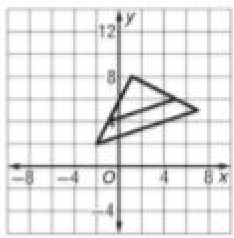
15.



$\overline{XY}=\sqrt{5}, \overline{YZ}=\sqrt{5}, \overline{XZ}=\sqrt{5}, \overline{XW}=4\sqrt{5}, \overline{WV}=4\sqrt{5},$
$\overline{VX}=4\sqrt{5}$
$\frac{XW}{XY}=4, \frac{WV}{YZ}=4, \frac{VX}{XZ}=4$

وحيث إن
$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{EG}$، حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة.
$XYZ \sim XWV$.

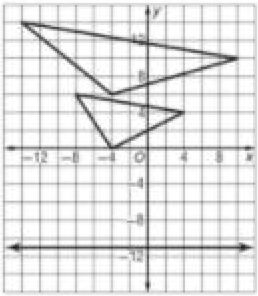
16.



$\overline{LM}=2\sqrt{5}, \overline{MN}=2\sqrt{10}, \overline{LN}=2\sqrt{5}, \overline{LP}=3\sqrt{5}, \overline{PQ}=3\sqrt{10},$
$\overline{LQ}=3\sqrt{5}$
$\frac{LM}{LP}=\frac{2}{3}, \frac{MN}{PQ}=\frac{2}{3}, \frac{LN}{LQ}=\frac{2}{3}$

وحيث إن
$\frac{LM}{LP}=\frac{MN}{PQ}=\frac{LN}{LQ}$، حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة.
$LMN \sim LPQ$.

17.



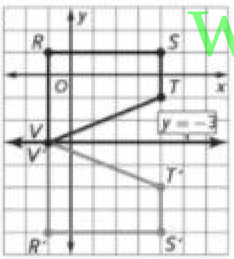
$\overline{JK}=2\sqrt{37}, \overline{KM}=2\sqrt{17}, \overline{JM}=4\sqrt{2}, \overline{RS}=4\sqrt{37},$
$\overline{ST}=4\sqrt{17}, \overline{RT}=8\sqrt{2}$
$\frac{RS}{JK}=2, \frac{ST}{KM}=2, \frac{RT}{JM}=2$

وحيث إن
$\frac{RS}{JK}=\frac{ST}{KM}=\frac{RT}{JM}$، حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة $JKM \sim RST$.

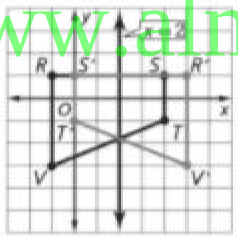
22. $W(0, 0), X\left(0, \frac{4}{\sqrt{2}}\right), Y\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), Z\left(0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

الصفحة 892، الدرس 14-4 (تمرين موجّه)

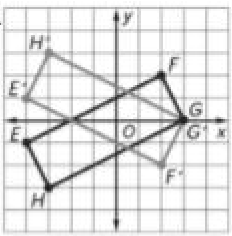
3A.



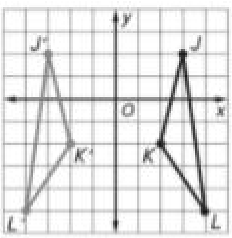
3B.



4A.



4B.



الصفحتان 894–896، الدرس 14-4

4. الإجابة النموذجية: