الوحدة 15 الدوائر

:: السابق

لقد تعلّمت من علاقات القطع الدائرية والزوايا المتشابهة في المثلثات.

:: الحالي

في هذه الوحدة سوف تقوم بما يلي:

- تعلّم العلاقات بين الزوايا المركزية والأقواس والزوايا المحيطية في الدائرة.
- تحديد القواطع والمماسات واستخدامها.
- استخدام معادلة للتعرف على دائرة أو وسمها.

:: لماذا؟ ▲

العلوم إن الشكل المنحني لقوس القزح هو دائرةٌ كاملة، والجزء الذي يمكن رؤيته فوق الأفق هو قطعة خاصة من دائرة، ويدعى بالقوس.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا المثال التالي.

تعريف: الدوائر متحدة المركز هي دوائر متّحدة في المستوى لها المركز نفسه.

مثال:

السؤال: هل الدوائر متحدة المستوى متشابهة أم متطابقة؟ اشرح. الدوائر متشابهة لأنها تشتمل على نفس الشكل. الدوائر ليست متطابقة لأنها تشتمل على أنصاف أقطار مختلفة.

مشروع الوحدة

تاريخ دوائر المحاصيل

المحيط، القطر، نصف القطر والمماس

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن خصائص الدوائر لإنشاء تصميم دائرة المحاصيل باستخدام قلم رصاص وقطعة خيط ومسطرة.

- شهدت التصميمات الدائرية ظهورًا غامضًا في حقول المحاصيل لعدة سنوات. ومن أول التصميمات التي ظهرت كانت في ليون، فرنسا في عام 815 الميلادي. اطلب من الطلاب البحث في تاريخ تصميمات المحاصيل وقم بتوجيه الأسئلة التالية. ما أنواع المحاصيل التي وجدوها عادةً؟ هل كانت المحاصيل تالفة؟ ما أكثر التشكيلات تعقيدًا؟ ما الطريقة التي من الأرجح أنه تم استخدامها لإنشائها؟
- الخطوة التالية هي ابتكار تصميم دائرة المحصول الخاص بك على قطعة كبيرة من بطاقات البلوط باستخدام قلم رصاص وقطعة خيط ومسطرة. كيف يمكن استخدام قطعة الخيط والقلم الرصاص لابتكار دوائر بأقطار مختلفة؟ كيف يمكن استخدام خطوط المماس والتثليث لوضع علامة في وسط الدوائر الجديدة بالتصميم؟
- قدِم بحثك وتصميم دائرة المحاصيل للصف الدراسي وقم بتمثيل كيفية استخدامك لخصائص هندسة الدوائر لابتكاره.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

أوجد النسبة المئوية من كل عدد معطى مما يلي.

1. 26% من 500 **130**
2. 79% من 623 **492.17**
3. 19% من 82 **15.58**
4. 10% من 180 **18**
5. 92% من 90 **82.8**
6. %65 من 360 **432**
7. **البقشيش** تناول رجلٌ وزوجته طعام العشاء في مطعم إيطالي، حيث بلغت قيمة الفاتورة AED 32.50. فإذا أرادا أن يتركا بقشيشًا بنسبة 18%. فما المبلغ الذي ينبغي أن يتركاه؟ **AED 5.85**

8. أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **14.1**

9. **الإنشاء** تضع ياسمين دعامة على لوح خشبي، كما هو موضّح على اليسار. أوجد طول اللوح المستخدم للدعامة. **2.55 m**

أوجد حلّ كل معادلة مما يلي باستخدام الصيغة التربيعية. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

10. $5x^2 + 4x - 20 = 0$ **−2.4, 1.6**

11. $x^2 = x + 12$ **−3, 4**

12. **الألعاب النارية** قدّمت الشركة الوطنية، وهي شركة احترافية للألعاب النارية، عرضًا خلال الاحتفال باليوم الوطني الإماراتي. وقد سار أحد الصواريخ المستخدمة في العرض وفق المسار الذي تمثّله الصيغة $d = 80t - 16t^2$ حيث t هو الزمن بالثواني. ولكن الصاروخ لم ينفجر. **5 ثوان**

مراجعة سريعة

مثال 1 (مستخدم في الدرس 2-15)

أوجد النسبة المئوية من كل عدد معطى مما يلي.

بتغيير النسبة المئوية إلى كسر عشري	15% من 35 = (0.15)(35)
الضرب	= 5.25

إذًا، 15% من 35 تساوي 5.25.

مثال 2 (مستخدم في الدرس 5-15)

أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
التعويض	$x^2 + 8^2 = 15^2$
بسّط.	$x^2 + 64 = 225$
اطرح.	$x^2 = 161$
	$x = \sqrt{161} =$ تقريبًا 12.7

مثال 3 (مستخدم في الدرس 7-15)

أوجد حل $x^2 + 3x - 40 = 0$ باستخدام الصيغة التربيعية، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
التعويض	$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$
بسّط.	$= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$
بسّط.	$= 5$ or -8

الأسئلة الأساسية

- ما الذي يمكن قياسه في دائرة؟ الإجابات النموذجية: نصف القطر والقطر والمحيط والمساحة وطول القوس
- لماذا قد تكون دراسة العلاقات بين مقاييس القطع المستقيمة والزوايا التي يتم رسمها في الدوائر وحولها مفيدة في الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: العديد من العناصر الميكانيكية مثل الإطارات والبكرات تكون دائرية. إن فهم العلاقات الخاصة بالدائرة هذه من شأنه أن يساعد في حل المسائل التي تتعلق بهذه العناصر.

المطويات® منظِّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

التركيز يكتب الطلاب عن الدوائر والزوايا والمستقيمات المرتبطة بها.

التدريس بعد أن ينتهي الطلاب من إعداد مطوياتهم، اطلب منهم تسمية الأطرف بما يناظر الدروس الثمانية في هذه الوحدة.

اطلب من الطلاب تدوين ملاحظات عن الدوائر والزوايا والأقواس والأوتار والمماسات والمستقيمات القاطعة والقطع المستقيمة بالدوائر. شجع الطلاب على تطبيق هذه المفاهيم من خلال رسم أمثلة وتطبيق مفاهيم الرياضيات المقترنة بها.

وقت الاستخدام وجه الطلاب لتدوين ملاحظات عند قراءة كل درس والاستماع إلى الشرح. يجب عليهم تضمين تعريفات المصطلحات والمفاهيم الأساسية وكذلك رسومات تخطيطية لتوضيح كل مصطلح.

التدريس المتمايز

مسرد مصطلحات الطالب، ص 2-1

ينبغي أن يُكمل الطلاب المخطط عن طريق تقديم تعريف كل مصطلح وطرح مثال عليه أثناء التقدم في الوحدة 15. هذه الوسيلة الدراسية يمكن استخدامها أيضًا في المراجعة استعدادًا لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 15. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة 0 لمراجعة المهارات المطلوبة:

المطويات منظِّم الدراسة

الدوائر أنشئ المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 10 عن الدوائر. وابدأ بجمع ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **ارسم** دائرة 20 سنتيمترًا على كل ورقة باستخدام الفرجار.

2 **قُصّ** كل ورقة من الأوراق.

3 **دبّس** الدوائر على بعد سنتيمتر واحد من الجانب الأيسر للأوراق.

4 **سَمِّ** الطبقات كما هو موضح.

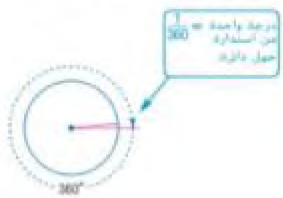
المفردات الجديدة

circle	دائرة
center	مركز
radius	نصف القطر
chord	الوتر
diameter	قطر الدائرة
circumference	محيط الدائرة
π	باي
inscribed	محاط
circumscribed	محيط
tangent	مماس

مراجعة المفردات

النقاط مُتحدة المستوى نقاط تقع في المستوى نفسه

الدرجة $\frac{1}{360}$ من الدوران الدائري حول نقطة



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 15-1 تحديد أجزاء متوازيات الأضلاع واستخدامها.

الدرس 15-1 تحديد أجزاء الدوائر واستخدامها. حل المسائل التي تشتمل على محيط دائرة.

بعد الدرس 15-1 تحديد زوايا الدوائر وأقواسها وإيجاد قياسها

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الذي تمثله المسافة التي يقطعها الراكب خلال دورة واحدة؟ محيط لعبة الملاهي الدائرية
- كيف يمكن استخدام عجلة لقياس المسافة؟ أوجد محيط العجلة واضربه في عدد الدورات التي تمت في المسافة المراد قياسها
- كيف يمكن تطبيق مبدأ قياس المسافة باستخدام عجلة في الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: تستخدم عدّادات المسافة دوران العجلة لتسجيل المسافة بالأميال. يستخدم مسّاحو الأراضي عجلة لقياس المسافة، وهكذا.

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 15-1 الدوائر والمحيط

:: السابق

- تعرفت على أجزاء متوازيات الأضلاع واستخدمتها.

:: الحالي

1. تحديد أجزاء الدوائر واستخدامها.
2. حلّ المسائل التي تشتمل على محيط دائرة.

:: لماذا؟

- تتحرك لعبة المقص في مدينة الألعاب والموضحة بالشكل بسرعة جيئةً وذهابًا وتدور عكس اتجاه عقارب الساعة. وفي بعض الأوقات، يكون الراكب رأسًا على عقب على ارتفاع 42 مترًا فوق سطح الأرض، بحيث يجرّبون تجربة "الزمن في الهواء"، وفيه يشعرون بانعدام الوزن. يساوي عرض اللعبة، أو قطرها، 13.2 مترًا. ويمكنك إيجاد المسافة التي يقطعها الراكب خلال دورة واحدة باستخدام هذا المقياس.

المفردات الجديدة

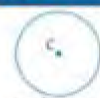
دائرة circle
مركز center
نصف القطر radius
الوتر chord
قطر الدائرة diameter
الدوائر متحدة المركز concentric circles
محيط الدائرة circumference
باي π
محاط inscribed
محيط circumscribed

التعرف على التعريفات الدقيقة للزاوية، والدائرة، والمستقيم المتعامد، والمستقيم المتوازي، والقطعة المستقيمة استنادًا إلى المفاهيم غير المحددة للنقطة والخط المستقيم والمسافة على طول الخط المستقيم والمسافة حول القوس الدائري.

إثبات أن جميع الدوائر متشابهة.

استخدام نماذج الرياضيات. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 القطع في الدوائر إن **الدائرة** هي الشكل الهندسي لمجموعة من جميع نقاط المستوى متساوية البعد عن نقطة معطاة تدعى **مركز** الدائرة. للقطع التي تقطع دائرة أسماء خاصة.



الدائرة C أو ⊙C

المفهوم الأساسي القطع الخاصة في دائرة

إن **نصف القطر** (جمعها أنصاف الأقطار) هو قطعةٌ مستقيمةٌ نقطتاها الطرفيتان تقع إحداها في المركز والأخرى على الدائرة.
أمثلة $\overline{CD}$ و $\overline{CE}$ و $\overline{CF}$ هي أنصاف أقطار ⊙C.

الوتر قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة.
أمثلة $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ هما وتران في ⊙C.

القطر في دائرة هو وتر يمرّ من المركز ويتركّب من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.
مثال $\overline{DE}$ هو قطر في ⊙C. ويتركب القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطر الواقعان على مستقيم واحد $\overline{CE}$ و $\overline{CD}$.

مثال 1 تحديد القطع في دائرة.

a. سمّ الدائرة وحدّد نصف قطر فيها.

يقع مركز الدائرة عند النقطة P، ولذا فهي تسمّى بالدائرة P أو ⊙P. وهناك ثلاثة أنصاف أقطار موضّحة بالشكل: $\overline{PL}$ و $\overline{PN}$ و $\overline{PM}$.

b. حدّد وترًا وقطرًا في الدائرة.

موضّح وتران بالشكل: $\overline{JK}$ و $\overline{HG}$. $\overline{HG}$ يمر بالمركز، إذًا $\overline{HG}$ قطر بالدائرة.

تمرين موجّه

1. سمّ الدائرة، ونصف قطر ووتر وقطر فيها.

الدائرة: X؛ نصف القطر: $\overline{XV}$ أو $\overline{XT}$ أو $\overline{XU}$ أو $\overline{XZ}$ أو الوتر: $\overline{RS}$ أو $\overline{TZ}$؛ القطر: $\overline{TZ}$

- لماذا قد يكون القياس باستخدام عجلة قياس أفضل من القياس باستخدام مسطرة قياس مترية أو شريط قياس؟ الإجابة النموذجية: يكون القياس باستخدام العجلة متصلاً، لكن يجب التقاط مسطرة القياس المترية أو شريط القياس ونقلهما. وكذلك، تستطيع العجلة القياس حول المنحنيات، بينما لا يكون قياس مسطرة القياس المترية أو شريط القياس بنفس القدر من الدقة حول المنحنيات.

1 القطع المستقيمة في الدوائر

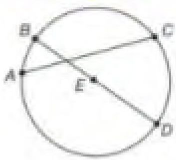
الأمثلة 3–1 توضح كيفية تحديد قياسات القطع المستقيمة في الدوائر وإيجادها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1



a. سمّ الدائرة وحدّد نصف قطر فيها. الاسم: الدائرة E أو $\odot E$ نصفا القطر الموضحين بالشكل: $\overline{ED}$ و $\overline{EB}$

b. حدّد وترًا وقطرًا في الدائرة. ثلاثة أوتار: $\overline{XZ}$ و $\overline{WY}$ و $\overline{WZ}$ قطران: $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$

قراءة في الرياضيات

الدقة تستخدم كلمتا نصف القطر و القطر لوصف طولين وقطعتين مستقيمتين. وبما أن للدائرة الكثير من أنصاف الأقطار والأقطار المختلفة، فإن الكلمتين نصف القطر والقطر تشيران إلى طولين وليس قطعتين مستقيمتين.

بالتعريف، فإن المسافة من مركز الدائرة إلى أي نقطة على محيطها هي واحدة دائمًا. ولذلك، فإن جميع الأقطار r في الدائرة متطابقة. وبما أن القطر d يتركّب من نصفي قطر، فجميع أقطار الدائرة متطابقة أيضًا.

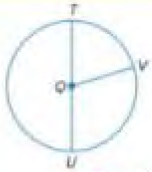
المفهوم الأساسي علاقات نصف القطر والقطر

إذا كان لدائرة نصف القطر r والقطر d، فإن العلاقات التالية تنطبق عليها.

قانون نصف القطر $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$ **قانون القطر** $d = 2r$

مثال 2 إيجاد نصف القطر والقطر

إذا كان $QV = 8$ سنتيمترات، فما قطر $\odot Q$؟



$d = 2r$ قانون قطر الدائرة

$= 2(8) = 16$ عوّض وبسّط.

قطر الدائرة $\odot Q$ يساوي 16 سنتيمترًا.

تمرين موجّه

2A. إذا كان طول $TU = 14$ مترًا، فما هو نصف قطر الدائرة $\odot Q$؟ **7 m**

2B. إذا كان طول $QT = 11$ مترًا، فما هو طول QU؟ **11 m**

وكما الأشكال الأخرى، فيمكن لدائرتين أن تكونا متطابقتين أو متشابهتين أو أن تشتركا بعلاقات خاصة أخرى.

مراجعة المفردات

النقاط متّحدة المستوى نقاط تقع في المستوى نفسه

المفهوم الأساسي أزواج الدوائر

تكون الدائرتان متطابقتين إذا -وفقط إذا- كان بهما نصفا قطر متطابقين.

مثال $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ إذا $\odot G \cong \odot J$.

كل الدوائر متشابهة.

مثال $\odot X \sim \odot Y$

الدوائر متحدة المركز هي دوائر متحدة في المستوى لها المركز نفسه.

مثال $\odot A$ التي بها نصف القطر $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي بها نصف القطر $\overline{AC}$ هما دائرتان متحدتان في المركز.

ستبرهن على أن جميع الدوائر متشابهةً في التمرين 52

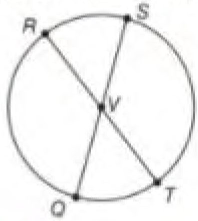
يمكن لدائرتين أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين اثنتين.

نقطتا تقاطع	نقطة تقاطع واحدة	لا توجد نقاط تقاطع
		

966 | الدرس 15-1 | الدوائر والمحيط

أمثلة إضافية

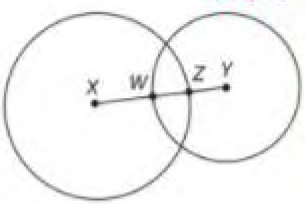
2 إذا كان $RT = 21$ cm. فما طول QV؟



10.5 cm

3 قطر الدائرة $\odot X$ يساوي 22 وحدة، وقطر الدائرة $\odot Y$ يساوي 16 وحدة، و $WZ = 5$ وحدة. أوجد XY.

14 وحدة



2 المحيط

محيط دائرةٍ هو المسافة حول الدائرة.

الأمثلة 4–6 توضح كيفية إيجاد محيط واستخدامه.

مثال إضافي

4 **دوائر المحاصيل** تم اكتشاف سلسلة من دوائر المحاصيل في ألبيرتا، كندا في 4 سبتمبر 1999. وكبرى الدوائر الثلاث تشتمل على نصف قطر 9 أمتار. أوجد محيط الدائرة. ≈56.52

انتبه!

نصف قطر أو قطر في المسائل التي تتعلق بالدوائر، توخ الحذر للتحقق مما إذا كانت المعلومات المعطاة حول نصف القطر أم القطر.

تسمى القطعة المستقيمة التي تربط مركزي الدائرتين المتقاطعتين نصفي قطري الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات الدوائر المتقاطعة

قطر الدائرة $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر الدائرة $\odot R$ يساوي 20 وحدة، و $DS = 9$ وحدات. أوجد CD.

بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30، $CS = 15$.
$\overline{CD}$ جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$CD + DS = CS$
بالتعويض	$CD + 9 = 15$
بطرح 9 من كل طرف.	$CD = 6$

تمرين موجّه

3. استخدم التمثيل البياني أعلاه لإيجاد RC. 4 وحدات

2 محيط الدائرة

محيط الدائرة هو المسافة الموجودة حول الدائرة. وحسب التعريف، فإن النسبة $\frac{C}{d}$ تكون عددًا غير نسبي يطلق عليه **pi (π)**. ويمكن اشتقاق قانونين لحساب محيط الدائرة من خلال استخدام هذا التعريف.

تعريف pi	$\frac{C}{d} = \pi$
اضرب كل طرف في d.	$C = \pi d$
$d = 2r$	$C = \pi(2r)$
بسّط.	$C = 2\pi r$

المفهوم الأساسي محيط الدائرة

الشرح إذا كان لدائرة القطر d ونصف القطر r، فإن المحيط C يساوي القطر مضروبًا بالعدد باي أو ضعف نصف القطر مضروبًا بالعدد باي.

الرموز $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد محيط الدائرة

كرة المضرب أوجد محيط منصة هبوط الطائرات الموصوفة على الجهة اليمنى.

قانون محيط الدائرة	$C = \pi d$
بالتعويض	$= \pi(24)$
بسّط.	$= 24\pi$
استخدم آلة حاسبة.	≈ 75.36

يساوي محيط منصة هبوط الطائرات 24π مترًا أو حوالي 75.36 مترًا.

تمرين موجّه

أوجد محيط كل دائرة موصوفة، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

4A. نصف القطر = 2.5 سنتيمتر 15.71 cm
4B. القطر = 5 أمتار 15.7 m

الربط بالحياة اليومية

في عام 2005، لعب روجيه فيدرير وأندريه أغاشي كرة المضرب على منصة هبوط الطائرات المروحية في برج العرب بالإمارات العربية المتحدة. وكان قطر منصة الهبوط يساوي 24 مترًا وارتفاعها قرابة 21 مترًا.

المصدر: برج العرب

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من الطلاب الإجابة على السؤال التالي. ضرب كويكب كوكب الأرض وأحدث فوهة كبيرة مستديرة. قاس العلماء المسافة حول الفوهة ووجدوا أنها 125.6 كيلومترًا. فما قطر الفوهة؟ ≈40 كيلومترًا

يمكن استخدام قوانين محيط الدائرة أيضًا لتحديد قطر دائرة ونصف قطرها عندما يكون محيط الدائرة معلومًا.

مثال 5 إيجاد قطر الدائرة ونصف قطرها

أوجد قطر دائرة ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزء من مئة إذا كان محيط الدائرة يساوي 106.4 مليمترات.

قانون المحيط	$C = \pi d$	قانون نصف القطر	$r = \frac{1}{2}d$
بالتعويض	$106.4 = \pi d$	$d = 33.87$	$\approx \frac{1}{2}(33.87)$
بقسمة كل طرف على π.	$\frac{106.4}{\pi} = d$	استخدم حاسبة.	$\approx 16.94\ mm$
استخدم حاسبة.	$33.87\ mm \approx d$		

تمرين موجّه

5. أوجد قطر دائرة ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزء من مئة إذا كان محيط الدائرة 77.8 سنتيمترًا. 24.76 cm؛ 12.38 cm

نصيحة دراسية

مستويات الدقة بما أن π غير نسبي، فلا يمكن أن تعطى قيمته في صورة كسر عشري منتهٍ. ويعطي استخدام القيمة 3 لـ π تقديرًا سريعًا في الحسابات، بينما يعطي استخدام القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا أدق. وللتوصل إلى التقريب الأكثر دقة، استخدم الزر π على الآلة الحاسبة. وما لم يذكر خلاف ذلك، افترض أننا استخدمنا في هذا النص آلة حاسبة بها الزر π للحصول على الإجابات.

يكون المضلع **محاطًا** بدائرة إذا كانت جميع رؤوسه تقع على الدائرة. وتسمّى الدائرة **محيطة** للمضلع إذا كانت تضم رؤوس المضلع جميعها.

- المضلع $LMNP$ محاط بالدائرة $\odot K$.
- الدائرة K محيطة للشكل الرباعي $LMNP$.

مثال 6 على الاختبار المعياري محيط مضلع محاط بدائرة

إجابة قصيرة مربع طول ضلعه 9 سنتيمترات محاط بالدائرة $\odot J$. أوجد المحيط الدقيق للدائرة $\odot J$.

قراءة فقرة الاختبار

ينبغي عليك إيجاد قطر الدائرة واستخدامه لحساب محيطها.

حل فقرة الاختبار

أولًا، صمم رسمًا تخطيطيًا. قطر المربع هو قطر الدائرة وهو وتر مثلث قائم.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بالتعويض	$9^2 + 9^2 = c^2$
بسّط.	$162 = c^2$
خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.	$9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ سنتيمترات.

أوجد محيط الدائرة بدلالة π عن طريق التعويض بـ $9\sqrt{2}$ عن d في $C = \pi d$.
المحيط الدقيق هو $9\sqrt{2}$ سنتيمترات.

نصيحة دراسية

الدائرة المحيطة إن الدائرة المحيطة هي دائرة تمرّ بجميع رؤوس مضلع.

تمرين موجّه

أوجد المحيط الدقيق لكل دائرة باستخدام المضلع المعطى.

6A. مثلث قائم الزاوية محاط بدائرة وساقاه طولهما 7 أمتار و 3 أمتار $\pi\sqrt{58}$ m

6B. مربع محيط بدائرة طول ضلعه 10 أمتار $10\pi\sqrt{2}$ m

أمثلة إضافية

5 أوجد قطر دائرة ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزء من مئة إذا كان محيط الدائرة يساوي 65.4 مترًا. $d \approx 20.82$ m; $r \approx 10.41$ m

6 أوجد المحيط الدقيق لـ $\odot K$. 6π وحدة

التركيز على محتوى الرياضيات

الدائرة المحيطة والدائرة المحاطة يمكن أن يكون كل مثلث محيطًا بدائرة محيطة ومحاطًا بدائرة محاطة. يمكن أن يكون رباعي الأضلاع (باستثناء الطائرات الورقية المحدبة) محيطًا ومحاطًا بدوائر فقط إذا كانت الزوايا المتقابلة لرباعي الأضلاع متكاملة. يمكن أن تكون جميع الطائرات الورقية المحدبة محاطة بدائرة، ولكنها لا يمكن أن تكون محيطة بدائرة. يجب أن تكون جميع المضلعات الأخرى مضلعات منتظمة لتكون محيطة ومحاطة بدوائر.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني أرشد الطلاب لاستخدام قطعة خيط لتقدير محيط أقراص أو إسطوانات. ثم اطلب من الطلاب قياس قطر ذلك الشيء. استعرض قوانين إيجاد المحيط باستخدام القطر ونصف القطر. اطلب من الطلاب إيجاد المحيط رياضيًا، وذلك باستخدام القطر ثم نصف القطر، واجعلهم يقارنوا حساباتهم مع التقدير الذي وجدوه باستخدام الخيط.

3 التمرين

التقويم التكويني

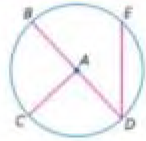
استخدم التمارين 1-9 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2

من أجل التمارين 1-4، عد إلى $\odot A$.



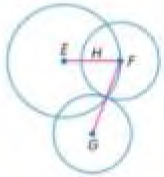
1. سمّ الدائرة. **$\odot A$**
2. حدد كلاً مما يلي.

a. وتراً **ED**   b. قطراً **BD**   c. نصف قطر **AC**

3. إذا كان $BA = 5$ سنتيمترات، فأوجد CA. **5 سنتيمترات**
4. إذا كان $CA = 7$ أمتار، فما قياس قطر الدائرة؟ **14 مترًا**

مثال 3

أقطار الدوائر $\odot E$، و $\odot F$، و $\odot G$ تساوي 14 مترًا، و 5 أمتار، و 9 أمتار على التوالي. أوجد قياس كل مما يلي.



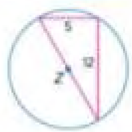
5. FG **14 مترًا**
6. EH **9 أمتار**

مثال 4

7. **الكعك** يبلغ قياس قطر قالب الكعك الموضح 20 cm. فما قياس نصف قطر قالب الكعك ومحيطه؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.
نصف القطر = 10 cm، المحيط = 62.8 cm

8. **التاريخ** يبلغ محيط مدرج كولوسيوم الروماني 545 مترًا. فما قياس قطر الكولوسيوم ونصف قطره؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.
نصف القطر = 86.74 مترًا، القطر = 173.48 مترًا

مثال 5

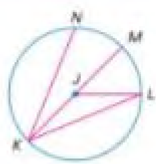


9. **الإجابة القصيرة** المثلث الموضح محاط بالدائرة $\odot Z$. أوجد المحيط الدقيق للدائرة $\odot Z$. **13π**

التمرين وحل المسائل

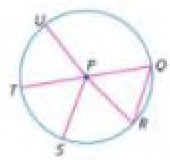
المثالان 1 و 2

من أجل التمارين 10-13، عد إلى $\odot J$.



10. سمّ مركز الدائرة. **J**
11. حدد وترًا هو قطر أيضًا في الدائرة. **KM**
12. هل LK نصف قطر؟ **لا؛ لأنه لا يمر بمركز الدائرة.**
13. إذا كان $KM = 32$ cm، فما JL؟ **16 cm**

من أجل التمارين 14-17، عد إلى $\odot P$.



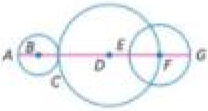
14. حدد وترًا ليس قطرًا في الدائرة. **QR**
15. إذا كان قياس TP يساوي 38 سنتيمترًا، فما قياس قطر الدائرة؟ **76 سنتيمترًا**
16. هل $TQ \cong UP$؟ اشرح. **لا، UP نصف قطر و TQ قطر.**
17. إذا كان $TQ = 56$ cm، فما قياس PR؟ **28 cm**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	10-35, 48, 49, 51, 52, 54-70	55-58 ,فردي 11-35	10-34 ,زوجي 48, 49, 51-52, 54, 59-70
OL أساسي	11-41 ,فردي 43-49, 51, 52, 54-70	10-35, 55-58	36-49, 51-52, 54, 59-70
BL متقدم	36-68		

مثال 3

$\odot B$ نصف قطرها يساوي 3 وحدات، و $\odot D$ نصف قطرها يساوي 7 وحدات، و $\odot G$ نصف قطرها يساوي 5 وحدات. أوجد قياس كل مما يلي.

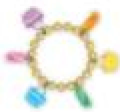


18. EF 2
19. BG 22
20. BD 10
21. AH 30

مثال 4

22. **الساعات** أوجد نصف قطر الساعة الموضّحة ومحيطها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. $r = 18.75$ cm، $C = 117.75$ cm

23. **المجوهرات** يبلغ محيط السوار الموضّح 20 cm. فأوجد نصف قطر السوار وقطره. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. $r = 3.18$ cm, $d = 6.36$ cm



مثال 5

أوجد قطر الدائرة ذات المحيط المُعطى ونصف قطرها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

24. 13 m — $r = 2.07$ m، $d = 4.14$ m
25. 176 سنتيمترًا — 25. $r = 28.01$ سنتيمترًا، $d = 56.02$ سنتيمترًا
26. 43.98 cm — $r = 7.00$ cm، $d = 14.00$ cm
27. 201.06 m — $r = 32.00$ m، $d = 64.00$ m

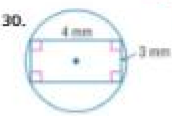
مثال 6

الاستنتاج المنطقي أوجد المحيط الدقيق لكل دائرة باستخدام المضلّع المحاط أو المحيط بها.

28. 11π m

29. $2\sqrt{17}\pi$ cm

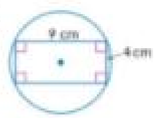
30. 5π mm



31. 17π m

32. $7\sqrt{2}\pi$ m

33. $\sqrt{97}\pi$ cm.



34. **التسييج** يحيط سعيد حديقته دائرية الشكل بسياج لمنع الغزلان من الدخول إليها. ويتكلف السياج 4 AED للمتر. إذا كان نصف قطر حديقته يساوي 15 مترًا، فأوجد التكلفة الإجمالية للسياج. قرّب إلى أقرب فلس. AED 376.99

35. **الفسيفساء** تصمّم وفاء قطعة فسيفساء دائرية الشكل لتزيين دورة المياه الخاصة بها. وموضّح رسم تخطيطي للفسيفساء.

a. ما المحيط التقريبي للفسيفساء؟ 377.1 cm

b. إذا غيرت وفاء خطتها بحيث يكون محيط الدائرة الداخلية 300 cm. فكم ينبغي أن يكون قياس نصف قطر قطعة الفسيفساء مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟ 143.3 cm

970 | الدرس 15-1 | الدوائر والمحيط

ملاحظات لحل التمرين

الفرجار يتطلب التمرين 45 استخدام منقلة.

مسطرة السنتيمترات وأعواد تنظيف الأسنان يتطلب التمرين 46 استخدام مسطرة السنتيمترات وأعواد تنظيف الأسنان.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 45، يستخدم الطلاب الهندسة وجدولاً وأوصافًا لفظية وحسابات عددية لاستكشاف العلاقة بين معامل المقياس وأبعاد أخرى للدوائر.

إجابات إضافية

36. $r = 8.25$، $C = 51.87$

37. $r = 11.46x$ m. $d = 22.92x$ m

38. $d = 29$ m. $C = 91.11$ m

39. $r = 7x$ وحدة، $C = 43.98$ وحدة

45a. الإجابة النموذجية:

B مُعطى فيما يلي نصف قطر دائرةٍ أو قطرها أو محيطها. أوجد كلاً من القياسات الناقصة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. 36–39 انظر الهامش

36. $d = 16.5$ m $r = ?$, $C = ?$

37. $C = 72x$ m, $d = ?$, $r = ?$

38. $r = 14.5$ m, $d = ?$, $C = ?$

39. $d = 14x$ وحدة , $r = ?$, $C = ?$

حدّد ما إذا كانت الدوائر الموضّحة في الأشكال التالية تبدو متطابقة أم متّحدة المركز أم لا شيء من ذلك.

40. 

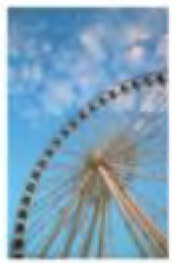
لا شيء من ذلك

41. 

متطابقة

42. 

متّحدة المركز



43. **ألعاب الملاهي** نجمة تانتشانغ هي عجلة فيريس موجودة في الصين، ويبلغ قطرها 157.5 مترًا. فإذا كانت المسافة بين كل من المحدولات التي يركب فيها الأشخاص تبلغ 8.25 أمتار تقريبًا، فكم يبلغ العدد الإجمالي للمحدولات الموجودة في اللعبة؟ **60**

44. **المرايا** إذا كان نصف قطر مرآة يساوي 30 سنتيمترًا، وعرض إطارها يساوي 7.5 سنتيمترات، فما المحيط الإجمالي للمرآة؟ **235.5 cm**

45. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف **C** نسبة محيطات الدوائر متحدة المركز.

a. **هندسيًا** استخدم فرجارًا لرسم ثلاث دوائر متحدة المركز يكون فيها معامل المقياس من كل دائرة إلى التي تليها هو 1:2. سمّ الدوائر A و B و C. سمّ طول نصف قطر كل دائرة. **انظر الهامش.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله. **انظر الهامش.**

الدائرة	نصف القطر	نسبة نصف القطر ونصف قطر الدائرة A	المحيط	نسبة المحيط ومحيط الدائرة A
A				
B				
C				

c. **لفظيًا** خمّن النسبة بين محيطي دائرتين نصفا قطريهما مختلفان. **نسبة محيطي دائرتين هي نفس نسبة نصفي قطريهما.**

45b. الإجابة النموذجية:

الدائرة	نصف القطر	نسبة نصف القطر ونصف قطر الدائرة A	المحيط	نسبة المحيط ومحيط الدائرة A
A	1	1	2π	1
B	2	2	4π	2
C	4	4	8π	4

46. **إبرة بوفون** قِس طول ℓ إبرة (أو عود لتنظيف الأسنان) بالسنتيمتر. ثم ارسم مجموعة مستقيمات أفقية تبعد عن بعضها بمسافة ℓ سنتيمترًا على ورقة بيضاء فارغة.

a. أسقط الإبرة على الورقة. وحين تسقط الإبرة على الورقة، سجّل إن كانت تلمس أحد المستقيمات. ودوّن عدد مرات إصابة خط بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط. **a–b. راجع عمل الطلاب.**

b. احسب النسبة بين ضعف عدد مرات السقوط وبين عدد مرات إصابة مستقيم بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط.

c. ما الرابط بين القيم التي توصلت إليها في الجزء b وبين π؟ **الإجابة النموذجية: القيم تقارب 3.14 ، وهي تساوي تقريبًا π.**

47. **الرياضة** موضح هدف مستخدم في لعبة الرماية. وتشير المسميات الموجودة على الرسم التخطيطي إلى طول نصف قطر الحلقات (بالسنتيمتر).

a. كم يزيد محيط الحلقة البيضاء عن الحلقة الصفراء؟ **62.83 سنتيمترًا**

b. إذا زاد نصف قطر كل دائرة بمقدار سنتيمتر واحد، فكم سيكون مقدار تغير محيط الهدف؟ **3.14 سنتيمترًا**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفروق بين الدوائر المتطابقة والدوائر متحدة المركز. **انظر الهامش.**

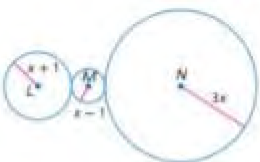
49. **التبرير** هل العبارة التالية تكون *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *لا تكون مطلقًا* صحيحة، إذا أحاطت دائرة بمربع، فإن مساحة الدائرة تكون أكبر من مساحة المربع. **دائمًا.**

50. **تحدٍ** في الشكل، $\odot A$ محاطة بالمثلث متساوي الأضلاع BCD. فما محيط $\odot A$؟ **$\frac{12\pi}{\sqrt{3}}$ مترًا**

51. **التبرير** هل المسافة بين أي نقطتين على دائرة تكون أحيانًا أم دائمًا أم لا تكون مطلقًا أصغر من قطر الدائرة؟ **انظر الهامش**

52. **تحليل الخطأ** تعتقد هيام أن طول نصف قطر في دائرة محيطها 25 مترًا يساوي تقريبًا 8 أمتار، ولكن هناء تعتقد أنه يساوي تقريبًا 16 مترًا. هل أي منهما على صواب؟ **انظر الهامش**

53. **تحدٍ** إذا كان مجموع محيطات الدوائر L و M و N يساوي 30π، فأوجد x. **$x = 3$**



54. **الكتابة في الرياضيات** ابحث عن طريقة أرشميدس لتقريب Pi، واكتب عنها. **انظر الهامش**

إجابة إضافية

48. يجب أن تشتمل الدوائر المتطابقة على نفس القطر، ولكن الدوائر متحدة المركز هي الدوائر التي يكون لها مركز واحد ولكنها متداخلة بداخل بعضها البعض لذا لا يمكن أن يكون لها نفس القطر.

51. اشرح. أحيانًا. إذا كانت النقطتان مقابلتين لبعضهما البعض مباشرة على الدائرة، حينئذ تكون المسافة بينهما مساوية لطول القطر، وإلا فتكونان أقرب.

52. هيام على صواب. إذا كان محيط الدائرة 25 مترًا ، إذًا نصف القطر يساوي $\frac{25}{(2\pi)}$ أمتار وهو 8 أمتار تقريبًا.

54. طريقة أرشميدس لتقريب pi كانت بإحاطة المضلعات بدوائر، وإيجاد نسبة محيطاتها مقارنة بأقطار الدوائر. فاستخدم أولاً سداسي أضلاع، ثم مضلعًا به 12 ضلعًا، ثم مضلعًا به 48 ضلعًا، ثم استخدم أخيرًا مضلعًا به 96 ضلعًا.

972 | الدرس 15-1 | الدوائر والمحيط

4 التقويم

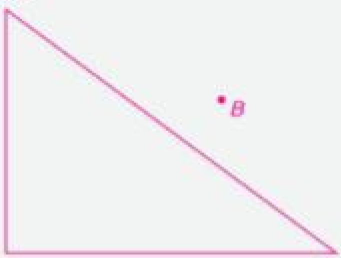
عيّن مصطلح الرياضيات يستطيع الطلاب التمرن على مصطلحات المفردات في هذا الدرس بوصف الدوائر المحددة وتعريف المفردات بصوت مرتفع.

إجابات إضافية

59. 

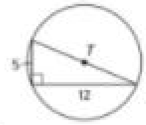
60. 

61. 

62. 

تدريب على الاختبار المعياري

55. الإجابة الشبكية ما محيط الدائرة $T \odot$؟ قرّب لأقرب جزء من عشرة. **40.8**



56. ما قياس نصف قطر طاولة محيطها 3 أمتار؟ **A**

A 0.48 m
B 0.75 m
C 0.96 m
D 1.5 m

57. الجبر يخطط يوسف بستانًا دائريًا لزراعة الخضروات، مع وجود سور يطوّق حدود البستان. فإذا كان يُسمح له أن يستخدم طولاً يصل إلى 50 مترًا من أجل السور، فما قياس نصف القطر الذي يمكنه استخدامه من أجل البستان؟ **J**

F 10
G 9
H 8
J 7

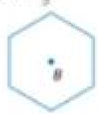
58. SAT/ACT ما طول نصف قطر دائرة مساحتها $\frac{\pi}{4}$ وحدات مربعة؟ **B**

A 0.4 وحدات
B 0.5 وحدات
C وحدتان
D 4 وحدات
E 16 وحدة

مراجعة شاملة

انسخ كلاً من الأشكال إضافةً إلى النقطة B. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه B بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r. **59–62. انظر الهامش.**

59. $r = \frac{1}{5}$



60. $r = \frac{2}{5}$

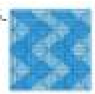
61. $r = 2$

62. $r = 3$

حدد ما إذا كان كل شكل مما يلي له تناظرًا دورانيًا. إذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل، وحدّد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

63. 
لا

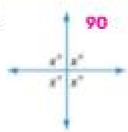
64. 
نعم؛ 4، 90

65. 
لا

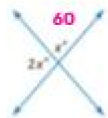
66. 
لا

مراجعة المهارات

أوجد قيمة x.

67. 

90

68. 

60

69. 

20

70. 

45

973

الدرس 15-2 الأقواس والأوتار

‹‹ السابق	‹‹ الحالي	‹‹ لماذا؟
• لقد استخدمت العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد القياسات.	1 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار واستخدامها. 2 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار و الأقطار واستخدامها.	• تستخدم إطارات التطريز في الحياكة وخياطة الملاحف. والتطريز المتصالب والعادي. كل نقطتين طرفيتين في ندفة الثلج المبيّنة هنا نقطتان طرفيتان لوتر وقوس في الوقت نفسه.

تحديد العلاقات بين الزوايا المحاطة وأنصاف الأقطار والأوتار ووصفها

تطبيق الطرق الهندسية لحل المسائل مثل تصميم جسم أو هيكل لاستيفاء القيود الفيزيائية أو تقليل التكلفة، أو العمل بالأنظمة الشبكية المطبعية القائمة على النسب؟★

استخدام نماذج الرياضيات. بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الأقواس والأوتار

القوس هو قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على محيط الدائرة. وإذا لم يكن الوتر قطرًا، إذًا فإن نقطتيه الطرفيتين تقسمان الدائرة إلى قوس أكبر وقوس أصغر.

النظرية 15.1

الشرح في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق قوسان أصغران فقط وفقط إذا كان وتراهما المتناظران متطابقين.

مثال $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$

البرهان النظرية 15.1 (الجزء 1)

المعطيات: $\odot P$, $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\odot P$, $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$	1. المعطيات
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. إذا كان القوسان ≅، فإن ∡ المركزيان المتناظران أيضًا ≅
3. $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3. جميع أنصاف الأقطار في دائرة متطابقة ≅
4. $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4. مسلّمة ضلعين وزاوية
5. $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5. مسلّمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة

ستبرهن على الجزء 2 من النظرية 15.1 في التمرين 25

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس قوس

الحرف اليدوية في إطار التطريز، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $m\widehat{AB} = 60$. أوجد $m\widehat{CD}$

$\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتران متطابقان، إذًا القوسان المتناظران $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ متطابقان. $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60$

تمرين موجّه

1. إذا كان $m\widehat{AB} = 78$ في إطار التطريز، فأوجد $m\widehat{CD}$. 78

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 15-2 استخدام العلاقة بين الأقواس والزوايا لإيجاد القياسات.

الدرس 15-2 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار واستخدامها. التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار و الأقطار واستخدامها.

بعد الدرس 15-2 إيجاد قياسات الزوايا المحاطة، مع تضمين زوايا المضلعات المحاطة.

2 التدريس

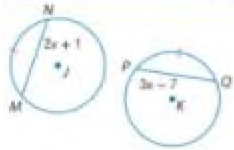
الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما قياس زاوية واحدة مركزية في ندفة الثلج في التطريز العادي؟ $60°$
- افترض أن إطار التطريز يبلغ قطره 30 سنتيمترًا. فما طول قوس زاوية مركزية واحدة؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة. 15.7 سنتيمترًا
- افترض أن حجم إطار التطريز قد زاد بنسبة 125%. خمّن الطول الجديد لوتر وقوس. يزيد الطولان كذلك بنسبة 125%.

مثال 2 استخدام الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار



الجبر في الشكلين، لدينا $\odot J \cong \odot K$ ، $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$. أوجد PQ.

$\widehat{MN}$ و $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين.
إذًا الوتران المتناظران $\overline{MN}$ و $\overline{PQ}$ متطابقان.

$MN = PQ$	تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
$2x + 1 = 3x - 7$	التعويض
$8 = x$	بسّط.

إذًا $PQ = 3(8) - 7 = 17$.

تمرين موجّه

2. في $\odot W$، $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$. أوجد RS. **11**

2 الأقواس والأوتار المنصّفة

المنصّف: إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو شعاع قوسًا إلى قوسين متطابقين، إذًا فهو ينصّف ذلك.

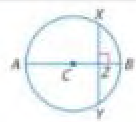
تصيحة دراسية

منصّفات الأقواس في الشكل التالي، $\overline{FH}$ هو منصّف القوس $\widehat{JG}$.

النظريات

15.2 إذا كان أحد أقطار دائرة (أو أحد أنصاف أقطارها) عموديًا على وترٍ فيها، إذًا فإنه ينصّف الوتر وقوسه.

مثال إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على الوتر $\overline{XY}$، إذًا $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$ و $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



15.3 المنصّف العمودي لوترٍ يكون قطرًا (أو نصف قطر) في الدائرة.

المثال إذا كان $\overline{AB}$ منصفًا عموديًا للوتر $\overline{XY}$، إذًا $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.

ستثبت النظريتين 15.2 و 15.3 في التمرينين 26 و 28، على التوالي.

مثال 3 استخدام نصف قطر عمودي على وتر

$\odot S$، $m\widehat{PQR} = 98$. أوجد $m\widehat{PQ}$.

نصف القطر $\overline{SQ}$ عمودي على الوتر $\overline{PR}$. إذًا بموجب النظرية 10.3، $\overline{SQ}$ ينصّف $\widehat{PQR}$. ولذا، $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.

بالتعويض، $\widehat{PQ} = \frac{98}{2}$ أو 49.

تمرين موجّه

3. في الدائرة $\odot C$، أوجد PR. **12 وحدة**

1 الأقواس والأوتار

يبين **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام الأقواس والأوتار المتطابقة لإيجاد قياس الأقواس وطول الأوتار.

التقويم التكويني

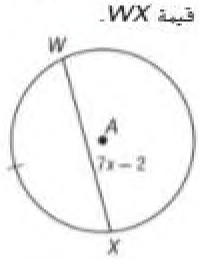
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

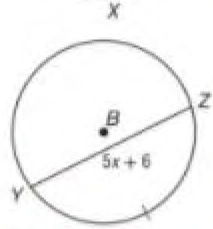
أمثلة إضافية

1 المجوهرات قطعة مستديرة من حجر كريم معلقة في سلسلة بواسطة سلكين ملتفين حول الحجر. $m\widehat{KL} = 90$ و $\overline{JM} \cong \overline{KL}$ أوجد قيمة $m\widehat{JM}$.

$m\widehat{KL} = m\widehat{JM} = 90$

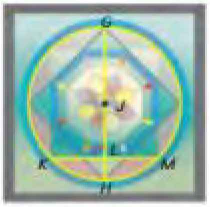
2 الجبر في الشكل التالي، $\odot A \cong \odot B$ و $\widehat{WX} \cong \widehat{YZ}$ أوجد قيمة WX.





$WX = 26$

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قطر عمودي على وتر



الزجاج الملون **في النافذة المصنوعة من الزجاج الملون، يبلغ طول القطر $\overline{GH}$ 57 سنتيمترًا، ويبلغ طول الوتر $\overline{KM}$ 55 سنتيمترًا. أوجد JL.**

الخطوة 1 ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.

يشكّل هذا مثلثًا قائمًا $\triangle JKL$.

الخطوة 2 أوجد JK و KL.

بما أن $GH = 75$ سنتيمترًا، فإن $JH = 37.5$ سنتيمترًا. وبما أن جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة، إذًا $JK = 37.5$ سنتيمترًا.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$ فإن $\overline{GH}$ ينصّف الوتر $\overline{KM}$ بموجب النظرية 10.3. إذًا $KL = \frac{1}{2}(55)$ أو 27.5 سنتيمترًا.

الخطوة 3 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة JL.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$27.5^2 + JL^2 = 37.5^2$	$JK = 37.5$ و $KL = 27.5$
$756.25 + JL^2 = 1,406.25$	بسّط.
$JL^2 = 650$	اطرح 756.25 من كل طرف.
$JL = \sqrt{650}$	خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

إذًا طول JL يساوي $\sqrt{650}$ أو حوالي 25.50 سنتيمترًا.

تمرين موجّه

4. في الدائرة $\odot R$، أوجد TV. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. **18.44 وحدة**

الربط بالحياة اليومية

لتشكيل النوافذ الزجاجية الملوّنة، يسخّن الزجاج إلى حرارة 2000 درجة مئوية، إلى أن يصبح قوامه مشابهًا لقوام الحلوى. وتنتج الألوان عبر إضافة أكاسيد معدنية.

تصيحة دراسية

رسم القطع المستقيمة يمكنك إضافة أي معلومات تعرفها إلى الشكل لتساعدك في حل المسألة. في المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

إضافة إلى النظرية 15.1، يمكنك استخدام النظرية التالية لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

النظرية 15.4

الشرح في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق وتران فقط وفقط إذا كانا متساويي البعد من المركز.

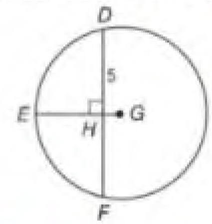
مثال $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا-وفقط إذا-كان $LX = LY$.

2 تنصيف الأقواس والأوتار

تنشئ المنصفات العمودية للأوتار علاقات خاصة بين القطعة المستقيمة والقوس. **الأمثلة 5–3** توضح كيفية استخدام النظريات لإيجاد قياسات أجزاء من دائرة.

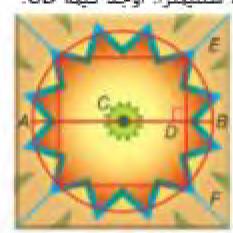
أمثلة إضافية

3 في $\odot G$، $m\widehat{DEF} = 150$. أوجد $m\widehat{DE}$.



$m\widehat{DE} = 75$

4 **بلاط السيراميك** في درجات السلم السيراميك التالي، قطر $\overline{AB}$ هو 45 سنتيمترا والوتر $\overline{EF}$ طوله 20 سنتيمترا. أوجد قيمة CD.



$CD = \sqrt{406.25} \approx 20.15$

إرشاد للمعلمين الجدد

وضع علامة على المعلوم يمكن إضافة أي معلومة تعرفها إلى شكل لمساعدتك في حل المسائل. تكون الزوايا وأطوال القطع المستقيمة والأقواس وأنصاف الأقطار والأقطار جميعها موجودة حتى إذا كانت غير مرسومة. ذكّر الطلاب بتوخي الحرص باتباع الشروط والتعريفات الهندسية عند إضافة عناصر إلى شكل.

مثال 5 الأوتار متساوية البعد عن المركز

الجبر في الدائرة $\odot A$، لديك $WX = XY = 22$. أوجد AB.

بما أن الوترين $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ متطابقان، فهما على مسافة متساوية من A. إذًا $AB = AC$.

$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بسّط.

إذًا $AB = 5(2)$ أو 10.

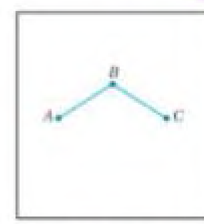
تمرين موجّه

5. في الدائرة $\odot H$، $PQ = 3x - 4$ و $RS = 14$. أوجد x. **6**

يمكنك استخدام النظرية 15.4 لإيجاد النقطة متساوية البعد من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

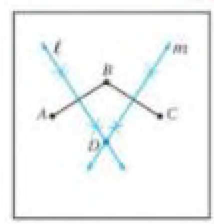
الإنشاء رسم دائرة تمرّ بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1



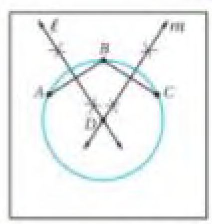
ارسم ثلاث نقاط A، و B، و C لا تقع على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$.

الخطوة 2



ارسم المنصّفين العموديين ℓ و m على $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$، وسمّ نقطة التقاطع D.

الخطوة 3



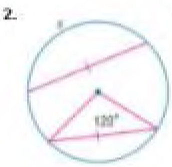
بموجب النظرية 15.3، يضم المستقيمان ℓ و m قطرين للدائرة $\odot D$. ضع سن الفرجار على النقطة D، وارسم دائرةً تمر بالنقاط A و B و C.

التحقق من فهمك

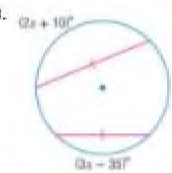
المثالان 1 و 2 **الجبر أوجد قيمة x.**

1. **15**

2. **120**



3. **45**



المثالان 3 و 4 **في $\odot A$، $CE = 12$ و $m\widehat{CBE} = 150$. أوجد قياس كل مما يلي.**

4. DE **6**

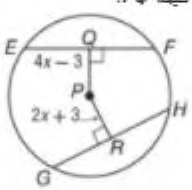
5. $m\widehat{BE}$ **75**

التركيز على محتوى الرياضيات

القطاعات والقطع المستقيمة إن أي زاوية مركزية والقوس الذي يربط نقاط الأطراف لتلك الزاوية تحيطان بقطاع من دائرة. وإن أي وتر وقوس يربطان نقاط الأطراف لذلك الوتر تحيط بقطعة مستقيمة من دائرة. يتشكل المثلث المتساوي الساقين في أي وقت يربط فيه وتر نقاط الأطراف لزاوية مركزية.

مثال إضافي

5 **الجبر** في $\odot P$، $EF = GH = 24$. أوجد قيمة PQ.



$PQ = 9$

التدريس المتمايز AL OL ELL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب إنشاء دائرة تشتمل على وترين متطابقين ومنصفات متعامدة. ثم اطلب منهم كتابة إثبات يدعم تطابق ما قاموا بإنشائه.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 6-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

23. المعطيات: $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب: $\overline{JP}$ ينصف $\overline{KM}$ و $\widehat{KM}$.

البرهان:

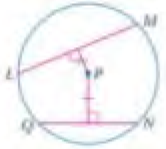
العبارات (المبررات)

1. $\overline{KM} \perp \overline{JP}$ (المعطيات)
2. ارسم أنصاف أقطار $\overline{PK}$ و $\overline{PM}$. (تحدد نقطتان مستقيمًا.)
3. $\overline{PK} \cong \overline{PM}$ (جميع أنصاف الأقطار في ⊙ تكون ≅.)
4. $\overline{PL} \cong \overline{PM}$ (خاصية الانعكاس في ≅)
5. $\angle PLM$ و $\angle PLK$ زاويتان قائمتان ∡. (تعريف ⊥)
6. $\angle PLM \cong \angle PLK$ (جميع الزوايا القائمة ∡ تكون ≅.)
7. $\triangle PLM \cong \triangle PLK$ (SAS)
8. $\overline{ML} \cong \overline{KL}$ (CPCTC)
9. $\overline{PJ}$ ينصف $\widehat{KM}$. (تعريف منصف الزاوية)
10. $\angle MPJ \cong \angle KPJ$ (CPCTC)
11. $\widehat{MJ} \cong \widehat{KJ}$ (في نفس الدائرة، يتطابق قوسان إذا كانت الزوايا المركزية المقابلة لها متطابقة.)
12. $\overline{JP}$ ينصف $\widehat{KM}$. (تعريف منصف الزاوية)

24. البرهان: نظرًا لأن جميع أنصاف الأقطار متطابقة، $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$. أمامك معطيات تقول بأن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. إذًا $\triangle PQR \cong \triangle PST$ حسب المسلمة SSS. وبذلك، $\angle QPR \cong \angle SPT$ حسب المبرهنة CPCTC. نظرًا لأن الزوايا المركزية تشتمل على نفس القياس، فإن الأقواس المتقاطعة لها تشتمل على نفس القياس وبذلك تكون متطابقة. ولذلك، $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$.

مثال 5

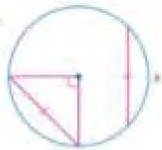
6. في $\odot P$، $LM = 2x + 1$، $QN = 3x - 6$. أوجد x. **7**



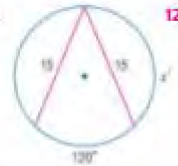
التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **الجبر** أوجد قيمة x.

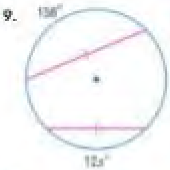
7. **90**



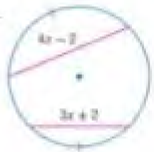
8. **120**



9. **13**

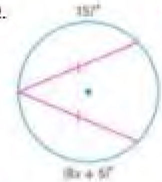


10. **7**



11. **7**

12. **19**



13. $\odot F \cong \odot G$ **22**

14. $\odot E \cong \odot M$ **9**

15. **الموسيقى** تتعلم إيمان كيفية العزف على الجيتار. وتوجد في الجيتار الخاص بها 6 أوتار ممدودة فوق فتحة الصوت. فإذا كان كل من الوترين الخارجيين وترًا E، وكانت المسافة بين الأوتار الممدودة على فتحة الصوت متساوية، فهل يكون لكل من الوترين E الطول ذاته على فتحة الصوت؟ اشرح. **نعم؛ لأنهما وتران في الدائرة يقعان على مسافة متساوية من المركز.**

المثالان 3 و 4

في $\odot S$، القطر يساوي 38، و $RV = 20$. أوجد قياس كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

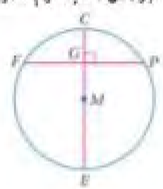
16. PV **10**

17. PW **$24 - 2\sqrt{119}$**

في $\odot M$، القطر يساوي 22، و $FP = 18$، $m\widehat{FP} = 76$. أوجد قياس كل مما يلي، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

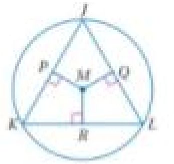
18. $m\widehat{CP}$ **38**

19. GM **6.32**



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

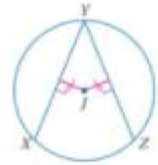
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7-23, 32, 38-50	7-23 فردي، 40-43	8-22 زوجي، 36, 38-39, 44-50
OL أساسي	7-23 فردي، 24-30, 31, 32, 33, 34, 38-50	7-23, 40-43	24-34, 36, 38-39, 44-50
BL متقدم	24-50		



20. **الهندسة** موضح على اليسار مثلث محاط بالدائرة $\odot M$. إذا كان $PM = MQ = MR$، اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $\triangle JKL$ متساوي الأضلاع. **البرهان: نعلم من المعطيات أن $PM = MQ = MR$. وبما أن JL، و KL، و JK أوتار في الدائرة تقع على مسافة واحدة من المركز، إذًا فيجب أن يكون لها الطول ذاته. إذًا، $\triangle JKL$ متساوي الأضلاع.**

مثال 5

21. **الجبر** في $\odot G$، $EF \cong FG$، $BC = 12x - 26, AD = 9x + 28$. فما قيمة x؟ **18**



22. **الجبر** في $\odot J$، $XY = 13x - 30$ و $YZ = 7x + 6$. فما قيمة x؟ **6**

B **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.

23. **المعطيات:** $\odot P$، $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب: $\overline{JP}$ ينصف $\overline{KM}$ و $\widehat{KM}$. **انظر الهامش.**

البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين. **24, 25. انظر الهامش.**

24. برهان حر للنظرية 15.1، الجزء 2

المعطيات: $\odot P$، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

25. برهان من عمودين للنظرية 15.2

المعطيات: $\odot C$، $\overline{AB} \perp \overline{XY}$

المطلوب: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$، $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$

26. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 15.3. **انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

البرهان اكتب برهانًا من عمودين للجزء المشار إليه من النظرية 15.4

27. في الدائرة، إذا كان الوتران على مسافة متساوية من المركز، إذًا فهما متطابقان.

28. في الدائرة، إذا كان الوتران متطابقين، إذًا فإنهما يكونان على مسافة متساوية من المركز.

27, 28. انظر ملحق إجابات الوحدة 15.

25. البرهان:

العبارات (المبررات)

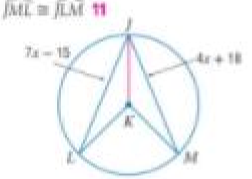
1. $\odot C, \overline{AB} \perp \overline{XY}$ (المعطيات)
2. $\overline{CX} \cong \overline{CY}$ (جميع أنصاف الأقطار في $\odot$ تكون $\cong$.)
3. $\overline{CZ} \cong \overline{CZ}$ (خاصية الانعكاس.)
4. $\angle XZC$ و $\angle CZY$ قائمتان $\measuredangle$ (تعريف المستقيمات $\perp$.)
5. $\triangle XZC \cong \triangle YZC$ (مسلّمة الساق والوتر)
6. $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ $\angle XCZ \cong \angle YCZ$ (مبرهنة CPCTC)
7. $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$ (إذا كانت $\measuredangle$ المركزية $\cong$ تكون الأقواس المتقاطعة $\cong$.)

ملاحظات لحل التمرين

فرجار ومسطرة تقويم يتطلب التمرين 38 استخدام فرجار ومسطرة تقويم.

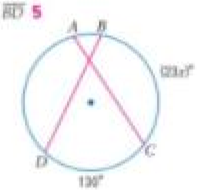
C الجبر أوجد قيمة x.

29. $\widehat{JML} \cong \widehat{JLM}$ **11**



30. $\overline{XZ} \cong \overline{YW}$ **4**

31. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ **5**



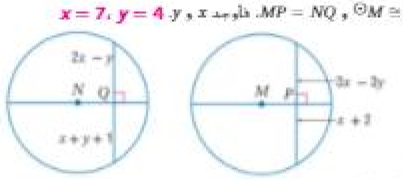
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

32. **التبرير** إذا كان AB و CD وترين في $\odot E$ وطول $AB = 2CD$ فهل CD يكون أحيانًا أم دائمًا أم لا يكون مطلقًا نصف قطر في الدائرة؟ **دائمًا.**

33. **تحليل الخطأ** ينظر كل من إبراهيم وأحمد إلى الرسم التخطيطي للدائرة الموضح على اليسار. يبلغ نصف قطر الدائرة 10 سنتيمترات، وطول ED يساوي 6 سنتيمترات. يعتقد أحمد أن طول AC يساوي 16 سنتيمترًا، بينما يعتقد إبراهيم أن طول AC يساوي 8 سنتيمترات. هل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك. **أحمد على صواب، حيث إنه باستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن DC يساوي 8 سنتيمترات، إذًا AC يساوي 16 سنتيمترًا.**

34. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرة وسمّها $\odot A$. ثم ارسم وترًا للدائرة. وارسم قطرًا عموديًا على الوتر. قِس نصف قطر الدائرة والمسافة من مركز الدائرة إلى الوتر. ثم أوجد طول الوتر. **انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

35. **تحدٍ** $\odot N \cong \odot M$ و $MP = NQ$. فأوجد x و y. **$x = 7$، $y = 4$**



36. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الطرق المختلفة التي تعرفها لتبرهن على تطابق وترين في الدائرة. **إذا كنت تعرف أن القوسين اللذان يقطعاهما متطابقان، إذًا يمكنك استخدام النظرية 15.1 لتبرهن على أنهما متطابقان. وإذا كان الوتران على مسافة متساوية من مركز الدائرة، إذًا يمكنك استخدام النظرية 15.4 لتبرهن على أنهما متطابقان.**

980 | الدرس 2-15 | الأقواس والأوتار

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة فقرة توضح كيف ساعدهم الدرس حول الزوايا والأقواس في الدرس الخاص بالأقواس والأوتار.

تدريب على الاختبار المعياري

37. إذا كان $CW = WF$ و $ED = 30$، فما طول DF؟ **D**

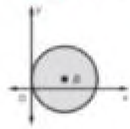
A 60
B 45
C 30
D 15

38. الجبر اكتب نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع في أبسط صورة. **F**

F $\frac{\pi}{4}$
G $\frac{\pi}{2}$
H $\frac{3\pi}{4}$
J π

39. الإجابة القصيرة الأنبوب الموضّح مقسّم إلى خمسة قطاعات متساوية. فما طول الأنبوب بالأمتار (m) والسنتيمترات (cm)؟ **1m 75 cm**

40. SAT/ACT النقطة B مركز لدائرة مماسيّة مع المحور الرأسي y. وإحداثيا النقطة B هما (3, 1). فما هي مساحة الدائرة؟ **E**



A π وحدة^2
B 3π وحدات^2
C 4π وحدات^2
D 6π وحدات^2
E 9π وحدات^2

مراجعة شاملة

41. الحِرَف اليدوية ابتكرت أسماء نمطًا لتطريز أزهار على سطح لحاف، حيث شرعت برسم شكل خماسي منتظم طوله 3.5 سنتيمترات على كل طرف، ثم أضافت نصف دائرة على كل ضلع من أضلاع الشكل الخماسي لتحصل على شكل خمس بتلات. فكم سنتيمترًا سوف تحتاج من القصاصات الذهبية لتزيين حواف 10 أزهار؟ قرّب إلى أقرب سنتيمتر. **275 cm.**

42. الاستثمارات تتناقص قيمة استثمار أماني الذي يبلغ AED 2500 بمعدل 1.5% كل عام. فكم ستبلغ قيمة استثمارها خلال 5 أعوام؟ **AED 2318.04**

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية، وأوجد الحد السابع في كل متتالية.

43. 1, 2, 4, 8, ... $a_n = 1(2)^{n-1}; 64$

44. −20, −10, −5, ... $a_n = -20(0.5)^{n-1}; -0.3125$

45. 4, −12, 36, ... $a_n = 4(-3)^{n-1}; 2916$

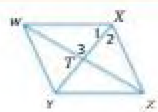
46. 99, −33, 11, ... **49.** $a_n = 99\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}; \frac{11}{81}$

47. 22, 44, 88, ... $a_n = 22(2)^{n-1}; 1408$

48. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$ $a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; \frac{1}{96}$

مراجعة المهارات

الجبر **الشكل الرباعي $WXZY$ عبارة عن معين. أوجد قيمة كل مما يلي أو قياسه.**



49. إذا كانت $m\angle 3 = y^2 - 31$، فأوجد y. **±11**

50. إذا كانت $m\angle XZY = 56$، فأوجد $m\angle YWZ$. **28**

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من الطلاب رسم دائرتين على ورقة. أخبر الطلا ب بأن يرسموا وترًا في أي مكان على الدائرة الأ ولى، ثم ينشئوا منصفًا عموديًا لهذا الوتر ويسموه. وبالنسبة للدائرة الثانية، اطلب من الطلا ب رسم قطعتين مستقيمتين تمتدان من مركز الدائرة بحيث تكون الأوتار المتعامدة على هذين القطعتين المستقيمتين متطابقة. راجع عمل الطلاب.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-15 استخدام نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة.

الدرس 3-15 استخدام خواص المماسات. حلّ مسائل تتضمن مضلعات محاطة.

بعد الدرس 3-15 إيجاد قياسات الزوايا التي تشكلها مستقيمات تتقاطع مع دائرة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الشكل الهندسي الذي يمثله كل ترس؟ دائرة
- ما وجه التشابه بين سلسلة الدراجة والمماس؟
  إنها تصل الدوائر بخط مستقيم.
- ما وجه الاختلاف بين سلسلة الدراجة والمماس؟ تلمس السلسلة الترس في أكثر من نقطة واحدة. المماسات هي خطوط مستقيمة تتقاطع مع دائرة في نقطة واحدة محددة.

الدرس 3-15 المماسات

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد استخدمت نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في مثلثات قائمة.	1 استخدام خواص المماسات. 2 حلّ مسائل تتضمن مضلعات محيطة بدوائر.	كانت الدراجات الأولى تعمل عبر دفع القدمين على الأرض، بينما تستخدم الدراجات الحديثة دواستين وسلسلة وترسين. تلتف السلسلة حول الترسين الدائريين. ويقاس طول السلسلة بين هذين الترسين بقياس المسافة بين نقطتي تماس السلسلة معهما.

المفردات الجديدة

مماس tangent
نقطة التماس point of tangency
مماس مشترك common tangent

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

رسم خط مستقيم مماس من نقطة خارج الدائرة المعطاة وصولاً إلى الدائرة.

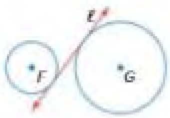
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 المماسات

المماس هو مستقيم يقع في مستوى الدائرة نفسه ويقطع محيطها في نقطة واحدة فقط تُسمى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ هو مماس للدائرة $\odot C$. عند النقطة A، $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{AB}$ يسميان مماسات أيضًا.

المماس المشترك هو مستقيم أو شعاع أو قطعة مستقيمة تمس دائرتين في المستوى نفسه. وفي كل من الشكلين أدناه، المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F و G.



مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

انسخ كل شكل من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل لا توجد مماساتٌ مشتركة.

a.

لهاتين الدائرتين مماسان مشتركان.

b.

لهاتين الدائرتين 4 مماسات مشتركة.

تمرين موجّه 1A, 1B. انظر الهامش.

1A.

1B.

1 المماسات

توضح **الأمثلة 4–1** كيفية استخدام نظريات المماسات لحل مسائل تتضمن المماسات.

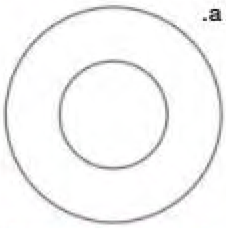
التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

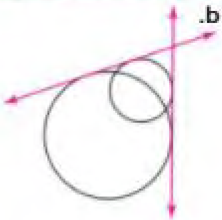
1 انسخ كل شكلٍ من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل *لا توجد مماسات مشتركة*.

a.

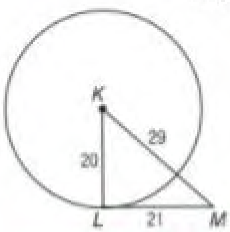


لا توجد مماسات مشتركة

b.



2 $\overline{KL}$ نصف قطر في $\odot K$. حدد ما إذا كان $\overline{LM}$ مماسًا لـ $\odot K$. برّر إجابتك.



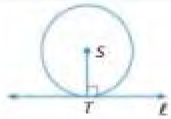
$\overline{LM}$ مماسًا لـ $\odot K$ بحسب معكوس نظرية فيثاغورس.

إن المسافة الأقصر من مماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المرسوم إلى نقطة التماس.

النظرية 15.5

الشرح في مستوى ما، يكون مستقيم مماسًا على دائرة فقط وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

مثال يكون المستقيم ℓ مماسًا للدائرة $\odot S$ إذا –وفقط إذا كان $\ell \perp \overline{ST}$.



سوف تبرهن على كلا جزئي النظرية 15.5 في التمرينين 32 و 33.

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$. حدد ما إذا كان $\overline{KL}$ مماسًا للدائرة $\odot J$. برّر إجابتك.

اختبر لتعلم ما إذا كان المثلث $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8 + 9)^2$ نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بسّط.

$\triangle JKL$ مثلث قائم الزاوية، والزاوية القائمة هي JLK. إذا $\overline{KL}$ عمودي على نصف القطر $\overline{JL}$ عند النقطة L. ولذا، بموجب النظرية 10.10، $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot J$.

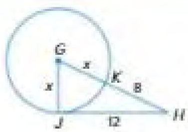
تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان $\overline{GH}$ مماسًا للدائرة $\odot F$. برّر إجابتك. **لا؛ $100 \neq 324$**

يمكنك أيضًا استخدام النظرية 15.5 لتحديد القيم المجهولة.

مثال 3 استخدام المماس لإيجاد قياسات مجهولة

$\overline{JH}$ مماس للدائرة $\odot G$ عند J. أوجد قيمة x.



بموجب النظرية 10.10، $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$. إذًا $\triangle GHJ$ مثلث قائم الزاوية.

$GJ^2 + JH^2 = GH^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 12^2 = (x + 8)^2$ $GJ = x$ و $JH = 12$ و $GH = x + 8$

$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$ اضرب.

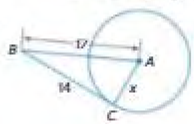
$80 = 16x$ بسّط.

$5 = x$ اقسم كل طرف على 16.

تمرين موجّه

أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

3A. $\sqrt{93} \approx 9.64$



3B. 3

نصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي يمكنك استخدام إستراتيجية حل المسائل الأسهل عبر رسم المثلثات قائمة الزوايا وتسميتها بدون الدوائر. ويوضّح الشكل أدناه رسمًا للمثلث الوارد ذكره في المثال 3.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

1A.

1B.

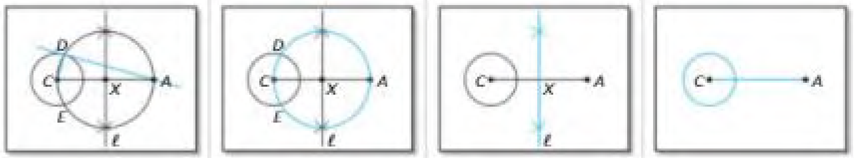
الإنشاء المستقيم المماس لدائرة من نقطة خارجية

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم الدائرة C، وارسم النقطة A خارج الدائرة C، ثم ارسم $\overline{CA}$.

الخطوة 2 ارسم المستقيم ℓ، المنصّف العمودي لـ $\overline{CA}$. وسمّ نقطة التقاطع X.

الخطوة 3 ارسم الدائرة X وبها نصف القطر $\overline{XC}$. سمّ نقطتي تقاطع الدائرتين D و E.

الخطوة 4 ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overline{DC}$. $\triangle ADC$ محاط بنصف دائرة. إذًا، $\angle ADC$ زاوية قائمة و $\overleftrightarrow{AD}$ مماس للدائرة $\odot C$.

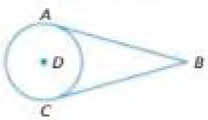


يمكن أن يكون هناك أكثر من مستقيم مماس على الدائرة نفسها.

النظرية 15.6

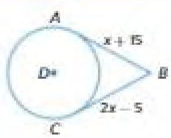
الشرح إذا كانت قطعتان مستقيمتان مرسومتان من نقطة واحدة خارج الدائرة مماستين على تلك الدائرة، فهما متطابقتان.

مثال إذا كان $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسين للدائرة $\odot D$، إذًا $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



مثال 4 استخدام المماسات المتطابقة لإيجاد القياسات

الجبر $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسان للدائرة $\odot D$. فأوجد قيمة x.



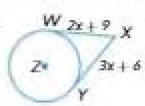
$AB = CB$	المماسان المرسومان من نقطة خارجية واحدة متطابقان.
$x + 15 = 2x - 5$	التعويض
$15 = x - 5$	اطرح x من كل طرف.
$20 = x$	اجمع 5 إلى كل طرف.

تمرين موجّه

الجبر أوجد قيمة. وافترض أن القطع المستقيمة التي تبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

4A. 6

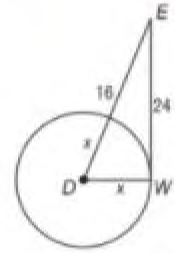
4B. 3



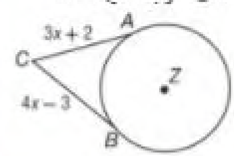
أمثلة إضافية

3 في الشكل، $\overline{WE}$ مماسًا لـ $\odot D$ عند النقطة W. أوجد قيمة x.

$x = 10$



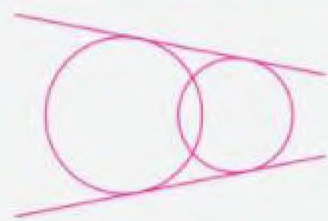
4 **الجبر** $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ مماسان لـ $\odot Z$. أوجد قيمة x.



$x = 5$

إجابات إضافية

1.



التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط الاجتماعي/بطريقة التواصل نظّم الطلاب في مجموعات صغيرة. وضح أن هناك شركة تريد تسويق لعبة جديدة يصل قطرها إلى 12.5 سنتيمترًا. ومهمتهم هي تصميم حاوية للعبة تشغل أقل مساحة على الرف. يجب أن تشتمل الحاوية على جوانب مستوية، ومن ثم لا يمكن أن تكون مستديرة. اطلب من الطلاب رسم اللعبة المستديرة وتسميتها وكذلك رسم الحاوية المحيطة بها. إذا كان رف العرض مساحته 1 متر في 3 أمتار، فما عدد حاويات اللعبة التي يمكن أن تسعها طبقة واحدة بالرف؟ ما الشكل الذي يسمح بعرض أكبر عدد ممكن من اللعب على الرف؟

2 المضلعات المحيطة لدوائر

المضلعات المحيطة لدوائر يكون المضلع محيطًا لدائرة إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًا للدائرة.

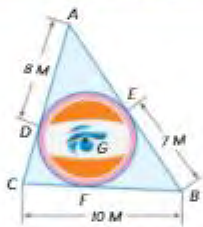
المضلعات المحيطة لدائرة	المضلعات غير المحيطة لدائرة
	

انتبه!
تحديد المضلعات المحيطة لدوائر إن كون الدائرة مماسة لضلع أو أكثر في مضلع لا يعني كون المضلع محيطًا بالدائرة، وذلك كما هو موضح في المجموعة الثانية من الأشكال.

يمكنك استخدام النظرية 15.6 لإيجاد القياسات المجهولة في المضلعات المحيطة لدوائر.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد القياسات في مضلعات محيطة بدائرة

تصميم الجرافيك يعطي أحد مصممي الجرافيك توجيهات لتصميم نسخة أكبر من الشعار مثلث الشكل الموضح. إذا كان $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة $\odot G$، فأوجد محيط $\triangle ABC$.



الخطوة 1 أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة $\odot G$، فإن $\overline{AE}$ و $\overline{AD}$ مماسان للدائرة $\odot G$، تمامًا مثل $\overline{BE}$ و $\overline{BF}$، و $\overline{CF}$ و $\overline{CD}$. لذا $\overline{AE} \cong \overline{AD}$، و $\overline{BF} \cong \overline{BE}$.

إذًا 8 أمتار $= AE = AD$، و 7 أمتار $= BE = BF$.

بموجب جمع القطع المستقيمة، فإن $CF + FB = CB$.

إذًا $CF = CB - FB = 10 - 7$ أو 3 أمتار. إذًا 3 أمتار $= CF = CD$.

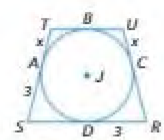
الخطوة 2 أوجد محيط المثلث $\triangle ABC$.

$$\text{المحيط} = AE + EB + BC + CD + DA$$
$$= 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$$

إذًا محيط المثلث $\triangle ABC$ يساوي 36 مترًا.

تمرين موجّه

5. الشكل الرباعي $RSTU$ يحيط بالدائرة $\odot J$. فإذا كان المحيط 18 وحدة، فأوجد قيمة x. **1.5 وحدة**



التحقق من فهمك

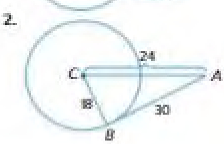
مثال 1

1. انسخ الشكل الموضح، وارسم المماسات المشتركة. فإن لم يكن هناك مماس مشترك، فاكتب لا يوجد مماس مشترك. **انظر الهامش**

مثال 2

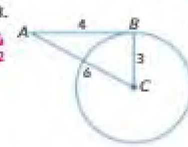
حدّد ما إذا كان $\overline{AB}$ مماسًا للدائرة $\odot C$. برّر إجابتك.

2.



نعم، لأن $18^2 + 24^2 = 30^2$

3.



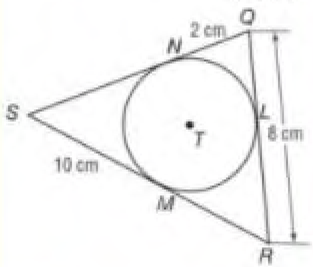
لا، لأن $3^2 + 4^2 \neq 6^2$

2 المضلعات المحيطة لدوائر

يمكن أن تكون المضلعات كذلك محيطة لدائرة. **مثال 5** يوضح كيفية إيجاد محيط مثلث باستخدام النظريات التي سبق تعلمها في هذا الدرس.

مثال إضافي

5 التعبئة يتم تسويق البسكويت المستدير في عبوات مثلثة الشكل لجذب اهتمام المستهلك. إذا كان $\triangle QRS$ محيطًا لـ $\odot T$، أوجد محيط $\triangle QRS$.



36 cm

التركيز على محتوى الرياضيات

المماسات وضح أنه على الرغم من أن المماس يتقاطع مع دائرة، إلا أنه لا يوجد مطلقًا أي جزء من المماس مضمن بداخل دائرة. والنقطة الوحيدة المشتركة بين المماس والدائرة هي نقطة التماس.

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع توجد دائرة محيطة لمربع. نصف قطر الدائرة هو r. اطلب من الطلاب كتابة تعبير لمحيط المربع بالصيغة r. $4r\sqrt{2} \approx 5.66r$

3 التمرين

التقويم التكويني

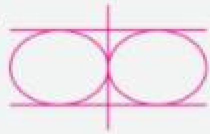
استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

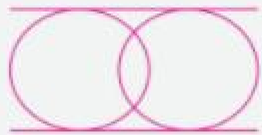
إجابات إضافية

7

10.



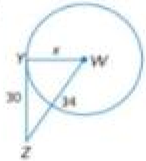
11.



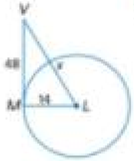
12.

المثالان 3 و 4 **أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.**

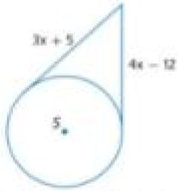
4. 16



5. 50



6. 27



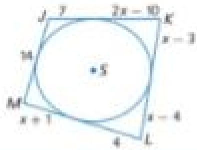
7. **الأولمبياد** موضّح أدناه صورة لرمز الألعاب الأولمبية. الحلقات الأولمبية. انسخ الرسم التخطيطي للحلقات، وارسم أي مماسات مشتركة بين الحلقة الزرقاء والحلقة الخضراء. **انظر الهامش**

مثال 5

8. **الجبر** الشكل الرباعي $JKLM$ يحيط بالدائرة $\odot S$.

a. أوجد قيمة x. **7**

b. أوجد محيط الرباعي $JKLM$. **44**



التمرين وحل المسائل

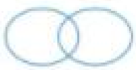
مثال 1 **انسخ كل شكلٍ من الأشكال الموضّحة، وارسم المماسات المشتركة. فإن لم يكن هناك مماس مشترك، فاكتب لا يوجد مماس مشترك.** **10, 11, 12. انظر الهامش.**

9.

لا يوجد مماس مشترك

10.

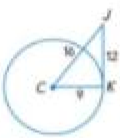
11.



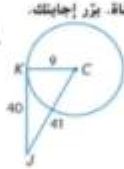
12.

مثال 2 **حدّد ما إذا كان كل $\overline{JK}$ مماسًا للدائرة المعطاة. برّر إجابتك.**

13.



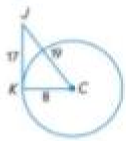
14.



13. لا؛ لأن $9^2 + 12^2 \neq 16^2$
14. نعم؛ لأن $9^2 + 40^2 = 41^2$
15. نعم؛ لأن $45^2 + 200^2 = 205$
16. لا؛ لأن $8^2 + 17^2 \neq 19^2$

15.

16.

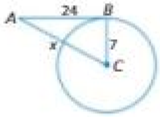


خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

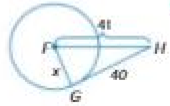
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-25, 36-53	9-25 فردي, 40-43	10-24 زوجي, 36-39, 44-53
OL أساسي	9-27 فردي, 28-34, 36-53	9-25, 40-43	28-34, 36-39, 44-53
BL متقدم	26-52		

المثالان 3 و 4 أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

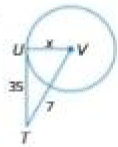
17. **25**



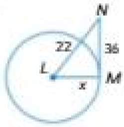
18. **9**



19. **21**

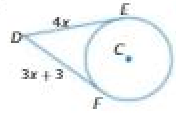


20. **15**



21. **7**

22. **3**

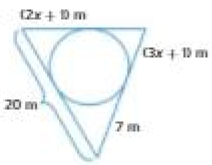


23. **التجمع الحماسي** ترسم سهيلة مكبر صوت على لافتة للإعلان عن تجمع حماسي في المدرسة. إذا كان AB و AC مماسين للدائرة التي تشكل فتحة مكبر الصوت، وطول AB يساوي 25 سنتيمترًا، فكم يبلغ طول AC؟

25 سنتيمترًا

مثال 5 أوجد قيمة x. ثم أوجد المحيط.

24.



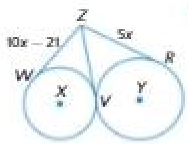
25.

24. $x = 6$، المحيط $= 67$ مترًا

25. $x = 4$، المحيط $= 64$ cm

B أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مئة. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

26. **4.2**



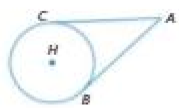
27. **24**

اكتب النوع المحدّد من البراهين. **28، 29. انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

28. البرهان من عمودين للنظرية 15.6

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس للدائرة $\odot H$ عند C.
$\overline{AB}$ مماس للدائرة $\odot H$ عند B.

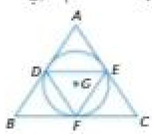
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$



29. برهان حر.

المعطيات: الدائرة G محاطة بالمثلث متساوي الأضلاع ABC، D هي نقطة منتصف AB.

المطلوب: ΔDEF متساوي الأضلاع.

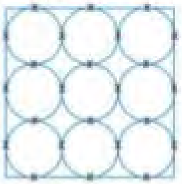


انتبه!

تحديد المماسات ذكّر الطلاب بأنه لا ينبغي لهم افتراض أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا لدائرة هي مماس، ما لم يتم إخبارهم بذلك. يجب أن يكون الشكل إما مشتملاً على رمز لزاوية قائمة أو يتضمن القياسات التي تؤكد وجود زاوية قائمة.

987

30. **النوادي** يصمم نادي الرياضيات شعارًا جديدًا يتكون من دائرة محاطة بمثلث متساوي الأضلاع طوله 3 سنتيمترات. فما الحد الأدنى لأبعاد الورقة التي تتناسب مع الشعار؟ **3 سنتيمترات في 2.6 سنتيمترات**



31. **خياطة اللحاف** تصمم أمل لحافًا يحتوي على 9 دوائر محاطة جميعها بحد مربع. أنشئ رسمًا تخطيطيًا للحاف، وضع علامة X على كل نقطة التماس. كم نقطة التماس موجودة في الرسم التخطيطي؟ وإذا كانت كل دائرة يساوي نصف قطرها 15 سنتيمترًا، فما أبعاد اللحاف؟ **24 نقطة التماس، 0.9 m × 0.9 m**

32. **البرهان** اكتب برهانًا غير مباشر لتبيّن أنه إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة، إذًا فهو عمودي على نصف قطر الدائرة. **(الجزء 1 من النظرية 15.5)**

المعطيات: ℓ مماس للدائرة $\odot S$ عند T، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس $\perp$ على $\overline{ST}$.) **انظر الهامش.**

33. **البرهان** اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن أنه إذا كان مستقيم عموديًا على نصف قطر دائرة عند نقطته الطرفية، إذًا فالمستقيم مماس للدائرة. (الجزء 2 من النظرية 15.5)

المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب برهانه: ℓ مماس للدائرة $\odot S$.

(تلميح: افترض أن ℓ ليس مماسًا على الدائرة $\odot S$.)

33. المطلوب: افترض أن ℓ ليس مماسًا للدائرة $\odot S$. بما أن ℓ يتقاطع $\odot S$ عند T، فيجب أن يتقاطع الدائرة عند نقطة أخرى. سمِّ هذه النقطة Q. إذًا، $ST = SQ$. $\triangle STQ$ متساوي الساقين، إذًا $\angle T \cong \angle Q$. وبما أن، $\overline{ST} \perp \ell$ فإن $\angle T$ و $\angle Q$ زاويتان قائمتان. وهذا يتعارض مع حقيقة أن المثلث يمكن أن يكون له زاوية قائمة واحدة فقط. إذًا، ℓ مماس للدائرة $\odot S$.

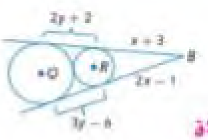
34. **الأدوات** أنشئ خط مماس على دائرة في نقطة على محيطها.

استخدم فرجارًا لرسم الدائرة $\odot A$. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$. ثم ارسم قطعة مستقيمة من النقطة P عمودية على $\overleftrightarrow{AP}$. سمِّ خط المماس t.
اشرح كل خطوة وبرّرها. **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرة محاطة بشكل خماسي الأضلاع. **انظر الهامش.**

36. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كل خطوة في رسم خط مستقيم مماس لدائرة من نقطة خارجية. **انظر الهامش.**



37. **تحدٍّ** إذا كان $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسين للدائرتين Q و R، فأوجد x و y. **$x = 4$، $y = 8$**

38. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة على الإطلاق.
a. الدائرتان متحدتا المركز يكون لهما مماس مشترك. **غير صحيحة على الإطلاق**
b. الدائرتان غير المتقاطعتين لهما مماس مشترك. **دائمًا**
c. الدائرتان المتقاطعتان لهما مماس مشترك. **دائمًا**

39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لتحديد ما إذا كان المستقيم مماسًا لدائرة.

39. يمكن أن نستخدم نصف قطر خارجًا إلى نقطة الالتماس، ومستقيمًا آخر من مركز الدائرة إلى المماس لتشكيل مثلث. إذا كان المثلث قائم الزاوية، إذًا يكون المستقيم مماسًا للدائرة. ويمكن أن نستخدم نظرية فيثاغورس لنختبر ما إذا كان المثلث قائم الزاوية.

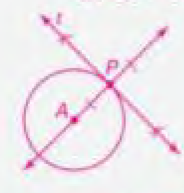
ملاحظات لحل التمرين

فرجار ومسطرة تقويم يتطلب التمرين 34 استخدام فرجار ومسطرة تقويم.

إجابات إضافية

32. البرهان: افترض أن ℓ غير $\perp$ على $\overline{ST}$. إذا كانت ℓ غير $\perp$ على $\overline{ST}$، فإن قطعة مستقيمة أخرى $\overline{SQ}$ يجب أن تكون $\perp$ على ℓ. أيضًا، توجد نقطة R على $\overrightarrow{TR}$ كما هو موضح في الرسم التخطيطي بحيث $\overline{QT} \cong \overline{QR}$ و $\angle SQT$ و $\angle SQR$ زاويتان قائمتان بحسب تعريف العمودي. $\angle SQT \cong \angle SQR$ و $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$، $\triangle SQT \cong \triangle SQR$ طبقًا لمسلمة SAS. إذًا $\overline{ST} \cong \overline{SR}$ حسب المبرهنة CPCTC. وبالتالي، فإن كل من R و T على $\odot S$. ووجود نقطتين ℓ كذلك على $\odot S$ يتعارض مع حقيقة المعطيات بأن ℓ مماسًا لـ $\odot S$ عند T. وبالتالي، $\ell \perp \overline{ST}$ يجب أن يكون صحيحًا.

34. الإجابة النموذجية:



a. رسم $\overleftrightarrow{AP}$. (نقطتان تحددان المستقيم.)
b. ارسم عمودًا عند P. (المماس عمودي على نصف القطر عند نقطته الطرفية.)

35. الإجابة النموذجية:

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب قدِم مثالاً على اللوحة لمثلث يتكون من مماس ونصف قطر ومستقيم من وسط الدائرة إلى نقطة على المماس. قم بتعيين الأطوال للشكل واطلب من الطلاب كتابة المعادلة اللازمة لحل المسألة. اطلب منهم تحديد الإجابة قبل مغادرة غرفة الصف.

إجابات إضافية

36. أولاً ، يتم استخدام فرجار لرسم الدائرة C ونقطة A خارج الدائرة C. يتم رسم المستقيم $\overline{CA}$. يوجد مستقيم واحد بالتحديد بين النقطتين A و C. الخطوة التالية هي إنشاء مستقيم ℓ لينصف المستقيم $\overline{CA}$. وفقًا لتعريف المستقيم المنصف المتعامد ℓ تقع في المنتصف تمامًا بين النقطة C و A. يتم بعد ذلك رسم دائرة ثانية X تشتمل على نصف القطر $\overline{XC}$ الذي يتقاطع مع الدائرة C عند النقطتين E و D. يمكن أن تتقاطع الدائرتين في نقطتين بحد أقصى. يتم بعد ذلك رسم المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{DC}$ ويكون $\triangle ADC$ محاطًا بنصف دائرة. $\angle ADC$ زاوية قائمة و $\overleftrightarrow{AD}$ مماسًا لـ $\odot C$. $\overleftrightarrow{AD}$ مماسًا لـ $\odot C$ عند النقطة D لأنه يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة محددة.

تدريب على الاختبار المعياري

40. $\odot P$ نصف قطرها يساوي 10 سنتيمترات، و $\overline{ED}$ مماس للدائرة عند النقطة D. F تقع على كل من $\odot P$ والقطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24$ سنتيمترًا، فما طول $\overline{EF}$؟ **B**

A 10 cm　　C 21.8 cm
B 16 cm　　D 26 cm

41. الإجابة القصيرة تحاط مربع في دائرة نصف قطرها 6 سنتيمترات. أوجد طول كل ضلع في المربع.

$6\sqrt{2}$ أو 8.5 cm تقريبًا.

42. الجبر أي مما يلي يوضح التحليل الكامل للعلاقة $125x^2 - 5x$ ؟ **G**

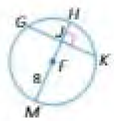
F $5x(x)$　　H $x(x - 5)$
G $5x(5x - 1)$　　J $x(5x - 1)$

43. SAT/ACT ما هو محيط المثلث المعروض أدناه؟ **D**

A 12 وحدة　　D 36 وحدة
B 24 وحدة　　E 104 وحدة
C 34.4 وحدة

مراجعة شاملة

في $\odot F$، $GK = 14$ و $m\widehat{GHK} = 142$. أوجد قياس كل مما يلي، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 15-2)



44. $m\widehat{GH}$ **71**　　**45.** JK **7**　　**46.** $m\widehat{KM}$ **109**

حدّد إذا ما كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح تبريرك.

47.

نعم؛ $\triangle AEC \sim \triangle BDC$ بموجب التشابه زاوية–زاوية.

48.

نعم؛ $\triangle DEF \sim \triangle ACB$ بموجب تشابه الأضلاع الثلاثة.

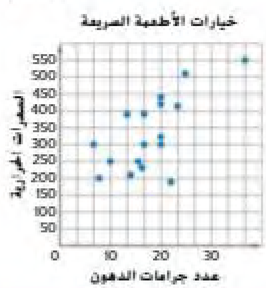
49. الصحة تمرن آمنة كل يوم بأن تمشي وتجري لمسافة 3 كيلومترات على الأقل، حيث تمشي بمعدل 4 كيلومترات في الساعة، وتجري بمعدل 8 كيلومترات في الساعة. افترض أن لديها نصف ساعة بالضبط لتتمرن اليوم. **b–a. انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح المدد الزمنية الممكنة التي يمكن أن تمضيها في المشي والجري.

b. أدرج ثلاثة حلول ممكنة.

50. التغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يوضح ارتباطًا موجبًا، أم سالبًا، أم لا يوجد ارتباط. إذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فصف معناه في الموقف.

موجب؛ كلما ازداد عدد جرامات الدهون، ازدادت كمية السعرات.



مراجعة المهارات

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

51. $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **110**　　**52.** $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **18**　　**53.** $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$ **58**

989

15-3 مختبر الهندسة
الدوائر المحيطة والمحاطة

في هذا المختبر، ستصمم رسومًا تشتمل على دائرة محاطة أو محيطة.

رسم مثلث متساوي الأضلاع ومربع وشكل سداسي منتظم محاطين بدائرة.
رسم الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر المحيطة بمثلث، وإثبات خواص الزوايا لرباعي أضلاع محاط بدائرة.

النشاط 1 رسم دائرة محاطة بمثلث

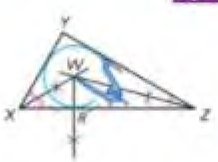
الخطوة 1

ارسم المثلث XYZ وأنشئ منصفي زاويتين في المثلث لتحديد نقطة تلاقي المنصفات W.

الخطوة 2

ارسم قطعة مستقيمة عمودية على أحد الأضلاع وتمر من خلال مركز الدائرة الداخلية، وسمّ نقطة التقاطع R.

الخطوة 3



اضبط فتحة الفرجار بطول $\overline{WR}$، ثم ضع سن الفرجار على النقطة W، وارسم دائرة يساوي نصف قطرها ذلك الطول.

النشاط 2 رسم مثلث يحيط بدائرة

الخطوة 1

أنشئ دائرة وارسم نقطة على محيطها. استخدم فتحة الفرجار التي استخدمتها في إنشاء الدائرة لإنشاء قوس على محيط الدائرة من تلك النقطة. استمر كما هو موضح.

الخطوة 2

ارسم أشعة من المركز وتمر بالأقواس المنشأة على المحيط بالتناوب.

الخطوة 3

أنشئ مستقيمًا عموديًا على كل شعاع.

التمثيل بالنماذج 3–2. انظر ملخص إجابات الوحدة 15.

1. ارسم مثلثًا قائمًا وأحِط دائرة به. انظر الهامش.
2. أحِط سداسي أضلاع منتظمًا بدائرة. ثم أحِط مثلثًا متساوي الأضلاع في دائرة. (تلميح: الخطوة الأولى في كل عملية إنشاء تطابق الخطوة 1 في النشاط 2.)
3. أحِط مربعًا بدائرة. ثم أحِط دائرة بمربع.
4. **تحدٍ** أحِط دائرة بسداسي أضلاع منتظم. انظر الهامش.

1 التركيز

الهدف إنشاء دوائر محاطة ومثلثات محيطة.

المواد الخاصة لكل طالب

- مسطرة تقويم
- فرجار

نصيحة للتدريس

اشرح أن الطلاب سوف يستخدمون المركز الداخلي لمثلث لإنشاء دائرة بحيث يحيط المثلث بالدائرة. وسوف يستخدمون مركز الدائرة المحيطة بمثلث لإنشاء دائرة يكون المثلث محاطًا بها. سوف يتعلمون كذلك كيفية إنشاء مثلث متساوي الأضلاع محاطًا بدائرة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظّم الطلاب في مجموعات من 3 أو 4، متنوعة القدرات. ثم اطلب منهم إكمال النشاطين 1 و 2 والتمرينين 1 و 2.

تدريب اطلب من الطلاب إتمام التمرينين 3 و 4 كل بمفرده.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 3 و 4 لتحليل ما قام الطلاب بإنشائه وتخمينه بشأن المصطلح *المركز الداخلي*.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تخمين السبب في أن الصيغة للمحيط هي $C = 2\pi r$ وليست $6r$ عندما يتم استخدام نصف القطر لتقسيم الدائرة إلى ست أقواس متطابقة.

توسيع المفهوم

تحدَّ الطلّاب أن يكرروا الأنشطة لأنواع مختلفة من المضلعات ويتمرنوا على الإنشاء.

إجابات إضافية

1. مركز الدائرة الداخلية يقع على مسافة واحدة من كل الأضلاع. يجب أن يكون العمودي على أحد الأضلاع بنفس الطول بالنسبة إلى الضلعين الآخرين.
4. الإجابة النموذجية: تستخدم مركز الدائرة الداخلية لإنشاء دائرة محيطة بمثلث. تكون الدائرة في وسط المثلث.

الدرس 15-4 معادلات الدوائر

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• كتبت معادلات مستقيمات باستخدام معلومات عن تمثيلاتها البيانية.	1 • كتابة معادلة دائرة. 2 تمثيل دائرة على المستوى الإحداثي.	• تطلق أبراج الاتصالات إشارات لا سلكية تستخدم لنقل المكالمات الخلوية. ويغطي كل برج مساحة دائرية، وتُرتَّب الأبراج بحيث تتاح الإشارة في أي موقع ضمن منطقة التغطية.

المفردات الجديدة
محل هندسي مركب
compound locus

التحقق: معادلة دائرة مركزها ونصف قطرها معطيان باستخدام نظرية فيثاغورس وإكمال المربع لإيجاد مركز الدائرة التي تحددها المعادلة ونصف قطرها.

إيجاد النقطة على القطعة المستقيمة موجهة بين نقطتين معلومتين تقسمان القطعة المستقيمة بنسبة معينة.

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 معادلة الدائرة

بما أن جميع النقاط على محيط دائرة متساوية البعد عن المركز، فيمكنك إيجاد معادلة دائرة عبر استخدام قانون المسافة.

افترض أن (x, y) تمثّل نقطة على دائرة مركزها عند نقطة الأصل. باستخدام نظرية فيثاغورس، $x^2 + y^2 = r^2$.

افترض الآن أن المركز لا يقع عند نقطة الأصل، بل عند النقطة (h, k). يمكنك استخدام قانون المسافة لوضع معادلة للدائرة.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ قانون المسافة

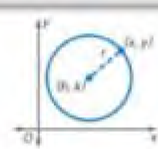
$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$ $d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$ قم بتربيع كل طرف.

المفهوم الأساسي معادلة دائرة بالصيغة القياسية

الصيغة القياسية لمعادلة دائرة يقع مركزها عند (h, k) ونصف قطرها هو r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تدعى الصيغة القياسية لمعادلة دائرة أيضًا بصيغة *المركز–نصف القطر*.



مثال 1 كتابة معادلة باستخدام المركز ونصف القطر

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

a. المركز عند النقطة $(1, -8)$، ونصف القطر يساوي 7

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$ معادلة دائرة

$$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$$ $(h, k) = (1, -8), r = 7$

$$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$$ بسّط.

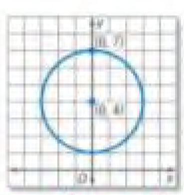
b. الدائرة الممثلة بيانيًا في الجهة اليسرى

المركز عند النقطة $(0, 4)$، ونصف القطر يساوي 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$ معادلة دائرة

$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$ $(h, k) = (0, 4), r = 3$

$$x^2 + (y - 4)^2 = 9$$ بسّط.



تمرين موجّه $1A.\ x^2 + y^2 = 10$ $1B.\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

1A. المركز عند نقطة الأصل، ونصف القطر يساوي $\sqrt{10}$

1B. المركز عند $(4, -1)$، والقطر يساوي 8

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 15-4 كتابة معادلات المستقيمات باستخدام المعلومات حول التمثيلات البيانية الخاصة بها.

الدرس 15-4 كتابة معادلة دائرة.
تمثيل دائرة بيانيًا على المستوى الإحداثي.

بعد الدرس 15-4 التوسع في خواص وتحويلات التشابه من أجل استكشاف التخمينات الخاصة بالأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- أين يقع البرج بالنسبة إلى المساحة التي يغطيها؟ المركز
- ما الذي تمثله المسافة من البرج إلى أبعد نقطة لمنطقة الخدمة؟ نصف القطر
- برج خلوي معين يرسل إشارة نصف قطرها 15 كيلومترًا. لزيادة منطقة الخدمة بنسبة 50%، ما عدد الكيلومترات الإضافية التي ينبغي أن تصل إليها الإشارة من البرج؟ ≈3.37 كيلومترًا

1 معادلة الدائرة

المثالان 1 و 2 يبينان كيفية استخدام المعلومات المعطاة عن دائرة لإيجاد معادلتها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

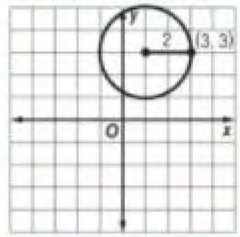
أمثلة إضافية

1 اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

a. المركز عند النقطة (3, -3)، نصف القطر يساوي 6

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 36$

b. الدائرة الممثلة بيانيًا أدناه



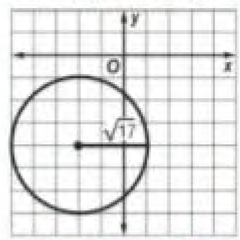
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

2 اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

a. المركز عند النقطة (-2 ,-3)، تمر عبر (-2 ,1)

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

b. الدائرة الممثلة بيانيًا أدناه



$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 17$

مثال 2 كتابة معادلة باستخدام المركز ونقطة

اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (4 ,2−)، وتمرّ بالنقطة (7 ,6−).

الخطوة 1 أوجد المسافة بين النقطتين لتحديد نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4)$ و $(x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25} = 5$ بسّط.

الخطوة 2 اكتب المعادلة باستخدام $h = -2$ و $k = 4$ و $r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $r = 5$ و $k = 4$ و $h = -2$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بسّط.

تمرين موجّه

2. اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (5− ,3−) وتمرّ بالنقطة (0 ,0). $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$

2 تمثيل الدوائر بيانيًا

يمكنك استخدام معادلة دائرة لتمثيلها بيانيًا على مستوى إحداثي. وللقيام بذلك، قد تحتاج إلى كتابة المعادلة بالصيغة القياسية أولاً.

مثال 3 تمثيل دائرة بيانيًا

معادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$. اذكر إحداثيات المركز، وقياس نصف القطر، ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

اكتب معادلة بالصيغة القياسية عبر إكمال المربع.

$x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$ المعادلة الأصلية

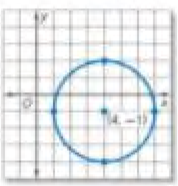
$x^2 - 8x + y^2 + 2y = -8$ اعزل الحدود المتشابهة وجمّعها.

$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = -8 + 16 + 1$ أكمل المربعات.

$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ حلّل إلى العوامل وبسّط.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$ اكتب +1 على أنه $-(-1)$ و 9 على أنها 3^2.

بما أن المعادلة مكتوبة الآن بالصيغة القياسية، فيمكنك تحديد h و k و r.



$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

إذًا $h = 4$ و $k = -1$ و $r = 3$. يقع المركز عند النقطة (1− ,4)، ويساوي نصف القطر 3. مثّل المركز وأربع نقاط تبعد كل منها 3 وحدات من هذه النقطة. وارسم الدائرة التي تمرّ بهذه النقاط الأربع.

نصيحة دراسية

إكمال المربع

لإكمال المربع لأي تعبير تربيعي من الصيغة $x^2 + bx$ اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 أوجد نصفًا واحدًا لـ b.

الخطوة 2 قم بتربيع ناتج الخطوة 1.

الخطوة 3 اجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

تمرين موجّه

من أجل كل دائرة معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

3A. $x^2 + y^2 - 4 = 0$

3B. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 40 = 0$

انتبه!

قانون المسافة عند استخدام قانون المسافة، ذكّر الطلاب بتوخ الحذر في المحافظة على الترتيب الصحيح للإحداثيين x و y و تتبع علاماتهما.

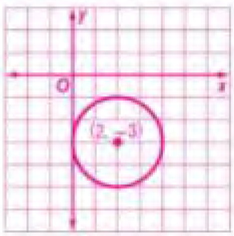
992 | الدرس 4-15 | معادلات الدوائر

2 تمثيل الدوائر بيانيًا

يبين **المثالان 3 و 4** كيفية تحليل معادلة الدائرة وهو ما من شأنه أن يساعد في تمثيل الدائرة بيانيًا على المستوى الإحداثي.

أمثلة إضافية

3 معادلة الدائرة هي $(x-2)^2+(y+3)^2=4$. اذكر المركز ونصف القطر. ثم ارسم التمثيل البياني للمعادلة. المركز هو $(2, -3)$، ونصف القطر هو 2.



4 **الكهرباء** تعتبر المحطات الفرعية الواقعة في الأماكن الإستراتيجية مهمة للغاية في بث وتوزيع مصدر الكهرباء لشركة الطاقة. افترض أن ثلاث محطات فرعية ممثلة بالنقاط $D(3, 6)$، $E(-1, 0)$، و $F(3, -4)$. حدد موقع مسافة متساوية بالمدينة تبتعد بها عن جميع المحطات الفرعية الثلاث، واكتب معادلة للدائرة. $(4, 1)$; $(x-4)^2+(y-1)^2=26$

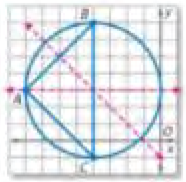
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام ثلاث نقاط لكتابة معادلة

الأعاصير توضع ثلاث صفّارات إنذارٍ للأعاصير بصورةٍ إستراتيجيةٍ على محيط دائرةٍ تحيط ببلدةٍ؛ بحيث يستطيع جميع القاطنين سماعها. اكتب معادلة الدائرة التي توضع عليها الصفّارات إذا كانت إحداثيات الصفّارات هي $A(-8, 3)$ و $B(-4, 7)$ و $C(-4, -1)$.

الفهم لديك ثلاث نقاط تقع على محيط دائرة.

التخطيط مثّل المثلث $\triangle ABC$ بيانيًا. وأنشئ المنصّفين المتعامدين لضلعين من أجل تحديد مركز الدائرة. ثم أوجد نصف القطر.

استخدم المركز ونصف القطر لكتابة معادلة.



الحل يبدو أن المركز يقع عند النقطة $(-4, 3)$. ونصف القطر يساوي 4. اكتب معادلة.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$[x-(-4)]^2+(y-3)^2=4^2$$
$$(x+4)^2+(y-3)^2=16$$

التحقق تحقّق من المركز عبر إيجاد معادلتي المنصّفين وحلّ نظام المعادلات. وتحقق من نصف القطر عبر إيجاد المسافة بين المركز ونقطة أخرى على الدائرة. ✔

تمرين موجّه $(x+2)^2+(y-1)^2=10$

4. اكتب معادلة دائرة تضم النقاط $R(1, 2)$ و $S(-3, 4)$ و $T(-5, 0)$.

الربط بالحياة اليومية يبلغ عدد حوالي 1000 إعصار في جميع أنحاء الولايات المتحدة كل عام. وأعتى الأعاصير لها سرعة رياح تساوي 400 km/h أو أكثر. ويمكن أن يبلغ عرض مسار أضرار الإعصار 1.6 كيلومتر، وأن يبلغ طوله 80 كيلومترًا.

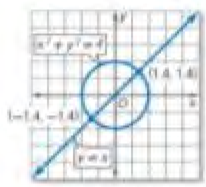
المصدر: الإدارة الوطنية للمحيطات والغلاف الجوي

يمكن أن يقطع مستقيم دائرةً في نقطتين على الأكثر. ويمكنك إيجاد نقطة (نقطتي) التقاطع بين دائرة ومستقيم عبر تطبيق الأساليب المستخدمة لإيجاد نقطة التقاطع بين مستقيمين والأساليب المستخدمة لحلّ المعادلات التربيعية.

مثال 5 نقاط التقاطع مع دوائر

أوجد نقاط التقاطع بين $x^2+y^2=4$ و $y=x$.

مثّل هاتين المعادلتين بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه. إن نقاط التقاطع هي حلولٌ لكلتا المعادلتين. ويمكنك تقدير أن هاتين النقطتين تقعان على التمثيل البياني عند النقطتين $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$ تقريبًا. استخدم التعويض لإيجاد إحداثيات هذه النقاط جبريًا.



$x^2+y^2=4$	معادلة دائرة
$x^2+x^2=4$	بما أن $y=x$، فعوّض بـ x عن y.
$2x^2=4$	بسّط.
$x^2=2$	اقسم كل طرف على 2.
$x=\pm\sqrt{2}$	خذ الجذر التربيعي من كل طرف.

إذا $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$. استخدم المعادلة $y=x$ لإيجاد قيم y المقابلة.

$y=x$	معادلة مستقيم	$y=x$
$y=\sqrt{2}$	$x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$	$y=-\sqrt{2}$

تقع نقاط التقاطع عند $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو تقريبًا عند $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$. تحقّق من هذه الحلول في كل من المعادلتين الأصليتين.

تمرين موجّه $(-2, 2)$ و $(2, -2)$

5. أوجد نقاط التقاطع بين $x^2+y^2=8$ و $y=-x$.

تصيحة دراسية

الأساليب التربيعية بالإضافة إلى أخذ الجذور التربيعية، تتضمن الأساليب الأخرى التي قد تحتاج إلى تطبيقها لإيجاد حل معادلات الصيغة $ax^2+bx+c=0$ إكمال المربع، والتحليل إلى عوامل، والصيغة التربيعية، $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

التدريس المتمايز BL OL

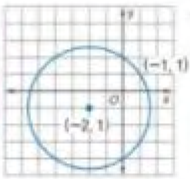
المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اشرح أن الطلاب يمكنهم الاعتماد كثيرًا على معرفتهم الهندسية ومهارات التبرير لحل المسائل في هذا الدرس. اطلب من الطلاب شرح كيفية الاستكشاف والتعاون خلال عملهم مع الأمثلة والتمارين. يحتاج الطلاب إلى تذكر التعريفات والمفاهيم والنظريات لمساعدتهم في شرح سبب استخدامهم طرقًا معينة لحل المسائل.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

1. المركز عند (4, 0)، نصف القطر يساوي 3
2. المركز عند (3 ,1)، نصف القطر يساوي 18
3. يمر المركز الذي يقع عند نقطة الأصل عبر (4, 4)
4. يمر المركز الذي يقع عند (3, 5)، عبر (4, 1)

5. 

6. 

1. $(x-4)^2+y^2=9$
2. $(x-1)^2+(y-3)^2=81$
3. $x^2+y^2=32$
4. $(x-3)^2+(y+5)^2=85$
5. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$
6. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

مثال 3 من أجل كل دائرة معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا. 7,8. انظر الهامش

7. $x^2 \quad 2x \quad y^2 \quad 4y \quad 11$

8. $(x \quad 1)^2 \quad y^2 \quad 9$

مثال 4

9. **المذياع** ثلاثة أبراج إذاعية تمثلها النقاط $R(2, \ 3)$، و $S(\ 2, 5)$، و $T(2, 7)$. حدد موضع برج آخر يقع على مسافة متساوية من جميع الأبراج الثلاثة، واكتب معادلة للدائرة. يقع المركز عند (2, 2)؛ $r = 5$؛ $(x-2)^2+(y-2)^2=25$

10. **الاتصالات** يمكن تمثيل ثلاثة أبراج للهواتف الخلوية بالنقاط $X(3, 5)$، و $Y(\ 3, 11)$، و $Z(9, 5)$. حدد موضع برج آخر يقع على مسافة متساوية من الأبراج الثلاثة الأخرى، واكتب معادلة للدائرة. يقع المركز عند (−3, 5)؛ $r = 6$؛ $(x+3)^2+(y-5)^2=36$

مثال 5 أوجد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أيٍّ منها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.

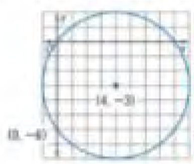
11. $(x \quad 3)^2 \quad y^2 \quad 4$ (3, 2) و (1, 0)
$y \quad x \quad 1$

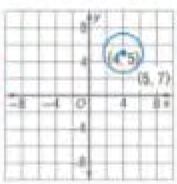
12. $(x \quad 3)^2 \quad (y \quad 2)^2 \quad 18$ (2.4, − 6.2) و (0, 1)
$y \quad 3x \quad 1$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **البنية** اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

13. يقع المركز عند نقطة الأصل، ونصف القطر يساوي 7
14. يقع المركز عند (1, 6)، ونصف القطر يساوي 4
15. يقع المركز عند (0, 2)، والقطر يساوي 20
16. يقع المركز عند (9, 8)، ونصف القطر يساوي $\sqrt{13}$
17. يقع المركز عند (6, 3)، وتمر الدائرة بالنقطة (0, 3)
18. يقع المركز عند (3, 1)، وتمر الدائرة بالنقطة (4, 3)

19. 

20. 

13. $x^2+y^2=49$
14. $(x-1)^2+(y-6)^2=16$
15. $x^2+(y+2)^2=100$
16. $(x+9)^2+(y-8)^2=13$
17. $(x-6)^2+(y+3)^2=36$
18. $(x+2)^2+(y-1)^2=8$
19. $(x-4)^2+(y-5)^2=5$
20. $(x+2.5)^2+(y+5)^2=13$

21. **الطقس** تظهر شاشة رادار دوبلر حلقات متحدة المركز حول إحدى العواصف. فإذا كان مركز شاشة الرادار عند نقطة الأصل وكان بعد كل حلقة عن المركز يزيد عن سابقتها 15 كيلومترًا، فما معادلة الحلقة الرابعة؟ $x^2+y^2=3600$

22. **تنسيق الحدائق** يسقي مرش مساحة دائرية قطرها 12 مترًا بالماء. ويوضع الرشاش على بعد 24 مترًا شمال المنزل. فإذا كان المنزل يقع عند نقطة الأصل، فما معادلة دائرة المساحة التي يسقيها المرشّ بالماء؟ $x^2+(y-24)^2=36$

ر

م ني

اس خدا ال ين ل حـ ق من اس دب الطلاب.

اس خد ال خط أسف ذه الصفحة ل خصـ واجـ ت الطلاب.

مـ حـ ات ل ر

و قة يل ياني طـ ال ين و و اس خدا و ال ذ ال .

يـ ت د

ال رين يـ خد الطلاب جدولًا ذ لات ةوأو لفظ ة لا شـ محـ دسـ مركـ لزو من ال .

ا ات ا ية

ال ركز :
ال ركز :
ال ركز :
ال ركز : $2\sqrt{15}$
ال ركز : $\sqrt{10}$
: $\sqrt{10}$

$(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ و $(-2\sqrt{5} - \sqrt{5})$

و

$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

a) $(x-5)^2+(y+4)^2=36$

يا ت ب ذ ي ا

مـ	ب	يا يـ مـ	
مـ د		ر	وجـ
أسـ مـ	ر		
مـ د	ا :		

مـ لات الدوائر

مثال 3 من أجل كل دائرة معادلتها معطاة، اذكر إحداثيات المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.
23–26. انظر الهامش

23. $x^2 + y^2 = 49$
24. $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 31$
25. $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 75$
26. $x^2 + y^2 - 10x = -15$

مثال 4 اكتب معادلةً للدائرة التي تضم كل مجموعة من النقاط التالية. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

27. $A(-2, -5), B(6, -5), C(2, -9)$ انظر الهامش.
28. $F(-6, -4), G(0, -10), H(2, -8)$ انظر الهامش.

مثال 5 أوجد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أي منها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.

29. $x^2 + y^2 = 25$, $y = \frac{1}{2}x$ انظر الهامش.
30. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x - 2$ $(0, -2)$ و $(2, 0)$
31. $x^2 + (y + 3)^2 = 8$, $y = -x - 3$ $(-2, -1)$ و $(2, -5)$
32. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$, $y = 2x$ انظر الهامش.
33. $x^2 + y^2 = 10$, $y = -2x$ انظر الهامش.
34. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 7$, $y = -x$ لا توجد نقاط تقاطع

B اكتب معادلة كل دائرة. 36. $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 169$

35. دائرة يقع طرفا قطرها عند $(-2, 5)$ و $(4, -3)$ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

36. دائرة قطرها $d = 26$، ومركزها مزاح 5 وحدات إلى يسار نقطة الأصل و 7 وحدات أعلاها.

37. **تمثيل النماذج** سوف تطلق محركات مختلفة الأحجام نماذج صواريخ إلى ارتفاعات مختلفة. وكلما ازداد الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ، كبرت دائرة مواضع هبوطه المحتملة. وفي الأحوال العادية للرياح، يساوي نصف قطر دائرة الهبوط ثلاثة أضعاف الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ. a. $x^2 + y^2 = 360{,}000$

a. اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ يقطع مسافة 200 متر في الهواء.

b. كم سيكون قياس نصف قطر دائرة هبوط صاروخ يقطع مسافة 1500 متر في الهواء؟ افترض أن مركز الدائرة يقع عند نقطة الأصل. $x^2 + y^2 = 2{,}250{,}000$

38. **القفز بالمظلات** ثلاثة من هواة القفز بالمظلات الذين يؤدون عرض التشكيل الدائري الموضح لهم الإحداثيات التقريبية $G(-5, -4)$، و $H(9, -4)$، و $J(2, 10)$.

a. ما الإحداثيات التقريبية لهاوي القفز بالمظلات الموجود في المركز؟ $(2, 4.75)$

b. إذا كانت كل وحدة تمثل مترًا واحدًا، فما قطر التشكيل الذي يصنعه هواة القفز؟ 10.5 m

39. **توصيل الطلبات** يقدّم مطعم الأصدقاء للبيتزا خدمة التوصيل المجانية ضمن مسافة 6 كيلومترات من المطعم. ويقع المطعم على بعد 5 كيلومترات غرب منزل بثينة، و 4 كيلومترات جنوب منزلها.

a. اكتب معادلة ومثّل لها بيانيًا لتمثيل هذا الموقف إذا كان منزل بثينة يقع عند نقطة الأصل في النظام الإحداثي. انظر الهامش.

b. هل ستحظى بثينة بتوصيل مجاني إذا طلبت بيتزا من مطعم الأصدقاء؟ اشرح.

39b. لا، فهي تبعد عن مطعم البيتزا بمسافة تزيد عن 6 كيلومترات.

C 40. **نقاط تقاطع الدوائر** مثّل بيانيًا $x^2 + y^2 = 9$ و $(x + 3)^2 + y^2 = 9$ على نفس المستوى الإحداثي.

a. قدّر نقطة (نقاط) التقاطع بين الدائرتين. $(-1.5, 2.5)$ و $(-1.5, -2.5)$

b. أوجد حل $x^2 + y^2 = 9$ لإيجاد قيمة y. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

c. عوّض بالقيمة التي أوجدتها في الجزء b في $(x + 3)^2 + y^2 = 9$ وأوجد الحل لإيجاد قيمة x. $x = -1.5$

d. عوّض بالقيمة التي أوجدتها في الجزء c في $x^2 + y^2 = 9$ وأوجد الحل لإيجاد قيمة y. $y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx \pm 2.6$

e. استخدم إجابتيك من الجزأين c و d لكتابة إحداثيات نقاط التقاطع. قارن هذه الإحداثيات بتقديرك في الجزء a. انظر الهامش.

f. تحقق من أن النقطة (النقاط) التي توصلت إليها في الجزء d تقع على كلتا الدائرتين. انظر الهامش.

إجابة إضافية

40. e) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ و $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$؛ الإجابات متشابهة ولكنها ليست واحدة.

f) يتبغي على الطلاب وضع كل زوج مرتّب بداخل كل من المعادلات للتحقق من الحل.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب تبادل الأدوار في ذكر معادلة دائرة. وبعد ذلك ينبغي عليهم تسمية مراكز الدوائر وذكر أطوال أنصاف الأقطار.

إجابات إضافية

41. معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 = 16$. بالتعويض عن النقطة، ينتج $(2)^2 + (2\sqrt{3})^2 ? 16;\ 16 = 16$؛ ولذلك، تقع هذه النقطة على الدائرة.

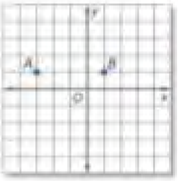
42e. المحل الهندسي لجميع النقاط في مستوى يقع على مسافة واحدة من نقطة يمثل دائرة. المحل الهندسي للنقاط التي تقع على مسافة متساوية من A وB وتبعد بمسافة AB عن B هي تقاطع المحل الهندسي للنقاط التي تقع على مسافة متساوية من A و B والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد بمسافة AB عن B. وبيانيًا، يتم تمثيل المحل الهندسي المركب بنقطتين.

45. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$. الإجابة النموذجية: التحرك 3 وحدات إلى اليسار هو نفسه مثل طرح 3 من الإحداثي x؛ أي $5 - 3 = 2$. التحرك 5 لأعلى هو نفسه مثل إضافة 5 إلى الإحداثي y، أي $-7 + 5 = -2$.

50. هذا السؤال هو نفسه مثل السؤال الأصلي، إذًا يجب أن تكون الإجابة مثل نفس الإجابة على السؤال الأصلي.

41. أثبت أو ادحض. حقيقة أن النقطة $(2, 2\sqrt{3})$ تقع على دائرة مركزها عند نقطة الأصل وتضم النقطة $(0, -4)$. **انظر الهامش.**

42 **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة محلاً هندسيًا مركبًا لزوج من النقاط. يحقق **المحل الهندسي المركب** أكثر من مجموعة متمايزة واحدة من الشروط.



a. **جدوليًا** اختر نقطتين A وB في المستوى الإحداثي. حدّد مواضع 5 إحداثيات في المحل الهندسي لنقاط متساوية البعد من A و B.

42c. مستقيم يعدّ المنصف العمودي لـ $\overline{AB}$

b. **بيانيًا** مثّل المحلّ الهندسي نفسه للنقاط باستخدام تمثيل بياني.

c. **لفظيًا** صِف المحل الهندسي لجميع النقاط متساوية البعد عن زوج من النقاط.

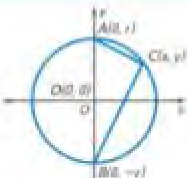
d. **بيانيًا** باستخدام تمثيلك البياني في الجزء b، حدد الموضع الهندسي لجميع النقاط في المستوى والتي تبعد المسافة AB عن B ومثّله بيانيًا.

42b، 42d. انظر ملحق إجابات الوحدة 15.

e. **لفظيًا** صِف المحل الهندسي لجميع نقاط مستوى والتي تبعد مسافة متساوية من نقطة واحدة. ثم صِف المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد مسافة متساوية عن A و B والتي تبعد المسافة AB عن B في الوقت نفسه. صِف التمثيل البياني للمحل الهندسي المركب. **انظر الهامش.**

43. يقع مركز دائرة قطرها 14 في الربع الثاني. المستقيمان $y = -6$ و $x = 2$ مماسان للدائرة. اكتب معادلة للدائرة. $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



44. **تحدٍ** اكتب برهانًا إحداثيًا لتثبت أنه إذا تقاطعت زاوية محيطية مع قطر دائرة وفق ما هو موضح، فإن الزاوية المشكلة زاوية قائمة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

45. **التبرير** دائرة معادلتها $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$. فإذا أزيح مركز الدائرة 3 وحدات إلى اليسار، و 5 وحدات إلى الأعلى، فما معادلة الدائرة الجديدة؟ اشرح تبريرك. **انظر الهامش.**

46. **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة بيانيًا. وصل بينها لتشكّل مثلثًا. ثم ارسم دائرةً تحيط بذلك المثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

47. **الكتابة في الرياضيات** افتتحت سبع محطات إذاعية جديدة بتعيّن تخصيص ترددات بث لها. تقع المحطات عند النقاط $A(10, 3)$، و $B(8, 7)$، و $C(6, 2)$، و $D(9, 0)$، و $E(5, 5)$، و $F(9, 6)$، و$G(4, 3)$. حيث إن الوحدة الواحدة = 50 كيلومترًا.

a. فإذا كان يمكن تخصيص التردد نفسه للمحطات التي تبعد عن بعضها مسافة أكثر من 200 كيلومتر، فما هو العدد الأدنى من الترددات الذي يمكن تخصيصه لهذه المحطات جميعًا؟

b. صِف طريقتين مختلفتين للشروع في حل هذه المسألة.

c. اختر طريقة وحُلّ المسألة واشرح تبريرك. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 15.**

تحدٍ أوجد إحداثيات النقطة P على $\overline{AB}$ التي تقسّم القطعة المستقيمة إلى النسبة المعطاة AP إلى PB.

48. $A(0, 0), B(-3, -4)$؛ 3 إلى 2 $(-1.8, -2.4)$

49. $A(0, 0), B(8, -6)$؛ 1 إلى 4 $(1.6, -1.2)$

50. **الكتابة في الرياضيات** صِف كيف تتغير معادلة دائرة إذا أُزيحت الدائرة مسافة a وحدات إلى اليمين و b وحدات إلى الأسفل. **انظر الهامش.**

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع ما العلاقة بين الدوائر المتحدة المركز التي تشتمل على نفس نصف القطر؟ اشرح. تعتبر جميعًا دائرة. تشمل على مركز ونصف قطر وكل ما نحتاج إليه لتعريف الدائرة. الدائرتان المشتركتان في نفس المركز ولهما نفس نصف القطر تكونان متطابقتان.

تدريب على الاختبار المعياري

51. أي مما يلي يمثل معادلة الدائرة التي مركزها (6, 5) والمارة بالنقطة (2, 8)؟ **A**

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$

B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$

C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$

D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

52. الجبر ما حلول $n^2-4n=21$؟ **H**

F 3, 7	H −3, 7
G 3, −7	J −3, −7

53. الإجابة القصيرة حلّ $5(x-4)=16$.

الخطوة 1: $5x-4=16$

الخطوة 2: $20=5x$

الخطوة 3: $4=x$

ما الخطوة الأولى الخاطئة في الحل المبيّن أعلاه؟ **الخطوة 1**

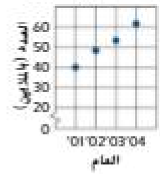
54. SAT/ACT يقع مركز الدائرة $\odot F$ عند النقطة (−4, 0) ولهذه الدائرة نصف القطر 4. فما النقطة التي تقع على محيط الدائرة $\odot F$؟ **D**

A (4, 0)	D (−4, 4)
B (0, 4)	E (0, 8)
C (4, 3)	

مراجعة شاملة

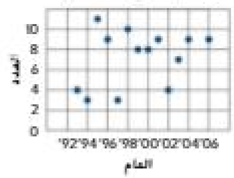
حدد ما إذا كان كل تمثيل بياني يوضّح ارتباطًا موجبًا، أم سالبًا أم لايوجد ارتباط. إذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فصِف معناه في الموقف.

55. عائدات الضرائب الإلكترونية



موجب؛ بمرور الوقت، يزداد عدد الأشخاص الذين يستخدمون الإقرارات الضريبية الإلكترونية

56. إعصارات المحيط الأطلنطي



لايوجد ارتباط

57. الطرقات يحتم الحي الذي يقطنه أسامة دوارات عند نقاط التقاء شوارع محددة. فإذا أكمل أسامة بدراجته دورة واحدة على حافّة الدائرة المعشّبة بالضبط، فكم عدد السنتيمترات التي يكون قد قطعها؟ (الدرس 1-15) **942 cm**

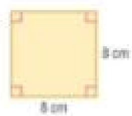
مراجعة المهارات

أوجد محيط كل شكلٍ ومساحته.

58.

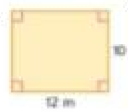
50 سنتيمترًا؛ $144\ cm^2$

59.



32 cm؛ $64\ cm^2$

60.



44 m؛ $120\ m^2$

997

15 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوائر والمحيط

- يساوي محيط دائرة πd أو $2\pi r$.

الأقواس والأوتار

- يتناسب مع طول قوس طول المحيط.
- تقطع الأقطار العمودية على أوتار الأوتار والأقواس المحصورة.

المماسات

- يقطع المستقيم المماس لدائرة الدائرة في نقطة واحدة فقط وهو عمودي على نصف قطرها.
- إن مماسي الدائرة المرسومين من نقطة خارجية واحدة متطابقان.

معادلات الدوائر

- معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (h, k) ونصف قطرها هو r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

المطويات منظِّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

مركز center	الدوائر متحدة المركز concentric circles
الوتر chord	قطر الدائرة diameter
دائرة circle	محاط inscribed
محيط الدائرة circumference	باي π
محيط circumscribed	نقطة التماس point of tangency
مماس مشترك common tangent	نصف القطر radius
المحل الهندسي المركب compound locus	مماس tangent

مراجعة المفردات

حدِّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. فإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

1. أي قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة هي نصف قطر في الدائرة. **خاطئة؛ وتر**
2. الوتر المار بمركز دائرة هو قطر الدائرة. **صواب**
3. المماس المشترك هو النقطة التي يقطع عندها مستقيم يقع في المستوى نفسه مع دائرة تلك الدائرة. **خاطئة؛ نقطة التماس**
4. القاطع هو قطعة مستقيمة من نصف القطر تقع نقطة واحدة فيها فقط على محيط الدائرة. **خاطئة؛ المستقيم القاطع**
5. تكون دائرتان متحدتي المركز فقط وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين. **خاطئة؛ متطابقتين**

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في استكمال التمارين من 1 إلى 5، فذكرهم باستخدام مراجع الدروس هذه لإنعاش ذاكراتهم بشأن مفردات المصطلحات.

صانع ألغاز المفردات

صانع ألغاز المفردات يحسن مفردات الرياضيات للطلاب باستخدام تنسيقات أربعة للألغاز – الكلمات المتقاطعة، التعمية، البحث عن الكلمات باستخدام قائمة الكلمات والبحث عن الكلمات باستخدام مفاتيح الحل. يستطيع الطلاب العمل عبر الإنترنت أو من ورقة عمل مطبوعة.

المطويات منظِّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا المفاهيم الأساسية إلى علامات تبويب الدرس الملائم في مطوياتهم. اقترح على الطلاب الاحتفاظ بمطوياتهم بجانبهم أثناء إنجاز صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وبيِّن لهم أن المطويات تمثل أداة مراجعة سريعة للمذاكرة لاختبار الوحدة.

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

خيار اليومين اطلب من الطلاب إكمال مراجعة درس بدرس في ص 999-1000. وبعد ذلك يمكنك استخدام التقويم الإلكتروني لتخصيص ورقة عمل مراجعة أخرى للتمرين على جميع أهداف هذه الوحدة أو فقط الأهداف التي يحتاج الطلاب إلى المزيد من المساعدة بشأنها.

إجابات إضافية

9. 13.69 cm; 6.84 cm
10. 8.50 m; 4.25 m
11. 34.54 m; 17.27 m
12. 71.91 mm; 35.95 mm

مراجعة درس بدرس

15-1 الدوائر والمحيط

من أجل التمارين 8–6، عد إلى الدائرة $\odot D$.

6. سمّ الدائرة. $\odot D$
7. سمّ نصف قطر. $\overline{DM}$ أو $\overline{DP}$
8. سمّ وترًا ليس قطرًا في الدائرة. $\overline{LN}$

أوجد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة. 9–12. انظر الهامش.

9. $C = 43$ cm
10. $C = 108.5$ m
11. $C = 26.7$ m
12. $C = 225.9$ mm

مثال 1

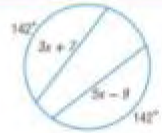
أوجد محيط الدائرة $\odot A$.

$C = 2\pi r$	قانون محيط الدائرة
$= 2\pi(10)$	بالتعويض
$= 62.83$	استخدم آلة حاسبة.

يساوي محيط الدائرة $\odot A$ حوالي 62.83 سنتيمترًا.

15-2 الأقواس والأوتار

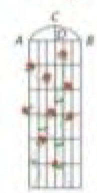
13. أوجد قيمة x. 8



في $\odot K$، $MN = 16$ و $m\widehat{MN} = 98$. أوجد كل قياس، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

14. $m\widehat{NJ}$ 131
15. LN 8.94

16. **تنسيق الحدائق** الجزء العلوي في التعريشة الموضحة هو قوس دائرة فيها $\overline{CD}$ جزء من القطر و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. إذا كان $\widehat{ACB}$ يساوي 28% تقريبًا من دائرة كاملة، فكم يساوي $m\widehat{CB}$؟ 50.4



مثال 2

الجبر في $\odot E$، $EG = EF$. أوجد قيمة AB.

بما أن الوترين $\overline{EG}$ و $\overline{EF}$ متطابقان، فهما على مسافة متساوية من E. إذًا، $AB = CD$.

$AB = CD$	النظرية 10.5
$3x - 9 = 2x + 3$	بالتعويض
$3x = 2x + 12$	اجمع.
$x = 12$	بسّط.

إذًا، $AB = 3(12) - 9 = 27$.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

15

15-3 المماسات

17. **الخيال العلمي** في قصة يكتبها حمدان، يمكن السفر اللحظي بين كوكب ثلاثي الأبعاد وقمره عندما يتبع المسافر عبر الزمن مماسًا. انسخ الشكلين أدناه وارسم جميع مسارات السفر الممكنة. **انظر الهامش.**

18. أوجد قيمة x و y. افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. $x = 10, y = 12.6$

مثال 3

في الشكل، $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot M$ عند النقطة K. أوجد قيمة x.

بموجب النظرية 10.9، $\overline{MK} \perp \overline{KL}$. إذًا، $\triangle MKL$ مثلث قائم الزاوية.

$KM^2 + KL^2 = ML^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$	بالتعويض
$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$	الضرب.
$289 = 20x + 100$	بسّط.
$189 = 20x$	بالطرح.
$9.45 = x$	بالقسمة.

15-4 معادلات الدوائر

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

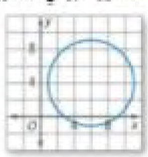
19. المركز عند $(-2, 4)$، نصف القطر يساوي 5 $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$

20. المركز عند $(1, 2)$، القطر يساوي 14 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 49$

21. **الحطب** خلال حصة تدريبية خارجية، تتعلم بدرية قحطًا للسلامة في عملية تقطيع الحطب. وتتضمن الطريقة تشكيل دائرة بمد ذراعها لتتحقق من أنها لن تصدم أي شيء فوقها أثناء التقطيع. فإذا كان امتداد ذراعها يساوي 47.5 سنتيمترًا، وكان طول الفأس 37.5 سنتيمترًا، وكان كتفها يقع عند نقطة الأصل، فما معادلة دائرة السلامة الخاصة ببدرية؟ **انظر الهامش.**

مثال 4

اكتب معادلة التمثيل البياني الدائري أدناه.

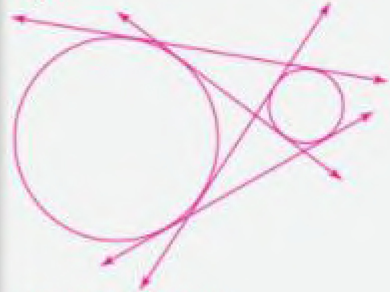


يقع المركز عند النقطة $(6, 4)$، ونصف القطر يساوي 5.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$	$(h, k) = (6, 4)$ و $r = 5$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$	بسّط.

إجابة إضافية

17.



21. $x^2 + y^2 = 1156$

الوحدة 15 تدريب على الاختبار

1. **برك السباحة** لدى عائلة حصة بركة سباحة عمقها 1.2 متر في الفناء الخلفي لمنزلهم. فإذا كان قطر البركة 7.5 أمتار، فما محيط البركة مقربًا إلى أقرب متر؟ **24 m**

2. أوجد المحيط الدقيق للدائرة التالية. **32π**

من أجل التمارين 5-3، عد إلى $\odot A$.

3. سمِّ الدائرة. **$\odot A$**

4. سمِّ قطرًا. **$\overline{EC}$**

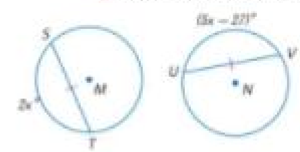
5. سمِّ وترًا ليس قطرًا في الدائرة. **$\overline{ED}$**

6. **الاختيار من متعدد** ما قياس ED؟ **D**

A 15   C 88.5

B 25   D المعلومات غير كافية

7. أوجد قيمة x إذا كانت $\odot M \cong \odot N$. **9**

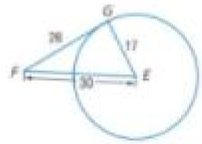


8. **الاختيار من متعدد** في كم نقطة تشترك دائرتان متحدتا المركز؟ **F**

F 0   H 2

G 1   J عدد لا نهائي من النقاط

9. حدِّد ما إذا كان $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة $\odot E$. برِّر إجابتك. **انظر الهامش.**



10. **الدراجات** دراجة بها إطاران يبلغ قطر كل منهما 60 سنتيمترًا.

a. أوجد محيط كل إطار. **188.4 cm**

b. ما المسافة التي يقطعها الإطار الواحد بالسنتيمترات بعد 100 دورة؟ **18,840 cm**

11. أوجد محيط المثلث الموضَّح على اليسار، وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل. **58**

12. **الأزهار** تريد حليمة إحاطة جذع شجرة بحوض للأزهار. فإذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل وتريد حليمة توسيع الحوض لمسافة متر واحد بعيدًا عن مركز الشجرة، فما المعادلة التي يمكن أن تمثِّل حوض الأزهار؟ **$x^2 + y^2 = 1$**

إجابة إضافية

9. لا؛ $\triangle EFG$ ليس مثلث قائم الزاوية. إذًا $\angle G$ ليست زاوية قائمة و $\overline{FG}$ لا يمكن أن تكون مماسًا.

1 التركيز

الهدف التعرف على أجزاء دائرة، إيجاد قياسات القوس، والزاوية والقطعة المستقيمة بدائرة وكتابة معادلة دائرة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطرح الأسئلة التالية:

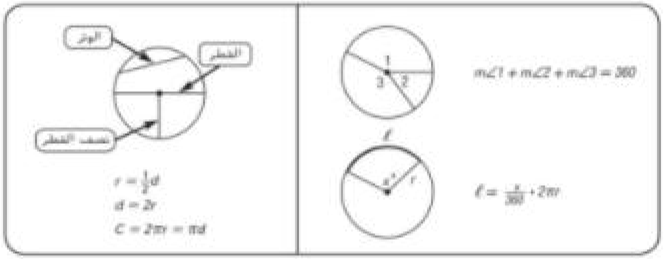
- كيف تستطيع إيجاد محيط دائرة إذا كان معطى لك نصف القطر؟ مضاعفة نصف القطر والضرب في π.
- ما الفرق بين الوتر، والمماس والقاطع؟ القاطع يتقاطع مع دائرة في نقطتين. المماس يتقاطع مع دائرة في نقطة واحدة. الوتر هو مستقيم بداخل دائرة تقع نقطتاه الطرفيتان على الدائرة.
- في نفس الدائرة أو في دائرتين متطابقتين، عند تطابق وترين، إذًا فإنهما يكونا على ________________ من المركز؟ مسافة متساوية

الوحدة 15

التحضير للاختبارات المعيارية

خواصّ الدوائر

الدائرة شكلٌ فريدٌ تملك فيه الزوايا والأقواس والقطع المتقاطعة مع الدائرة خواص وعلاقات مميزة. ويتعيّن عليك أن تتمتّع بالقدرة على تحديد أجزاء الدائرة وتكتب معادلتها وتوجد قياسات الأقواس والزوايا والقطع في الدائرة.



إستراتيجيات تطبيق خواصّ الدوائر

الخطوة 1

راجع أجزاء الدائرة وعلاقاتها

- تتضمن بعض الأجزاء الرئيسية: **نصف القطر، القطر، القوس، الوتر، المماس، القاطع**
- ادرس النظريات والخواص الرئيسية للدوائر فضلاً عن العلاقات بين أجزاء الدائرة.

الخطوة 2

اقرأ عبارة المسألة وادرس أي شكل يُعرض عليك بعناية.

- حدّد ما الذي يُطلب منك إيجاده.
- دوّن على الشكل أي معلومات بوسعك إضافتها.
- حدّد ما هي النظريات أو الخواص التي تنطبق على حالة المسألة.

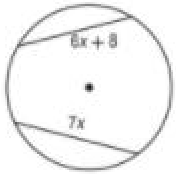
الخطوة 3

حُلّ المسألة وتحقق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخواص لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال إضافي

1 تدريب على الاختبار المعياري
اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج لمعرفته. ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لإيجاد *x*.



تحتاج إلى معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة متطابقة. لا توجد معلومات كافية لإيجاد x.

3 التقويم

استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم استيعاب الطلاب.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته. ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

أوجد قيمة *x* في الشكل.

A 2 C 4

B 3 D 6

اقرأ عبارة المسألة وادرس الشكل بعناية. لديك دائرة فيها وتران يقابلان قوسين أصغرين. تشير إحدى الخواص الهامة في الدائرة إلى أنه يتطابق وتران فقط وفقط إذا كان قوساهما الأصغران المقابلان متطابقين. يمكنك الاستفادة من هذه النظرية لترتيب المعادلة وحلها لإيجاد *x*.

$4x - 2 = 6x - 10$ تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$4x - 6x = -10 + 2$ بالطرح.

$-2x = -8$ بسّط.

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$ اقسم كل طرف على 2−.

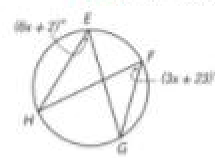
$x = 4$ بسّط.

إذًا قيمة *x* تساوي 4. والإجابة هي C. يمكنك التحقق من إجابتك عبر تعويض 4 في كل تعبير والتحقق من أن لكلا الوترين الطول نفسه.

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

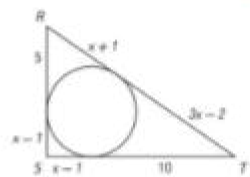
1. أوجد قيمة *x* في الشكل أدناه. D



A 4 C 6

B 5 D 7

2. يحيط المثلث *RST* بالدائرة المبينة أدناه. فما هو محيط المثلث؟ G



F 33 وحدة H 37 وحدة

G 36 وحدة J 40 وحدة

الوحدة 15

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 15

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. إذا كان $ABCD$ معيّنًا، و $m\angle ABC = 70°$، فما قياس الزاوية $m\angle 1$؟ B

A 45°

B 55°

C 70°

D 125°

2. دراجة بها إطاران يبلغ قطر كل منهما 60 سنتيمترًا. أوجد محيط إطار واحد. C

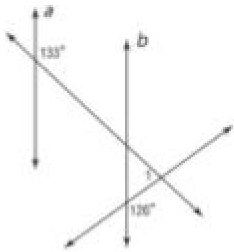
A 63 cm

B 120 cm

C 188.5 cm

D 30 cm

3. إذا علمت أن $b \parallel a$، أوجد $m\angle 1$. H



F 47°

G 54°

H 79°

J 101°

4. أي من الشروط التالية لن يضمن أن يكون رباعي الأضلاع متوازي أضلاع؟ D

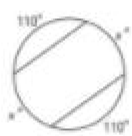
A كل ضلعين متقابلين متطابقان.

B كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

C ينصّف القطران بعضهما بعضًا.

D ضلعان متقابلا ن فقط متوازيان.

5. أوجد قيمة x. A



A 70

B 110

C 220

D 50

1004 | الوحدة 15 | تدريب على الاختبار المعياري

التقويم التكويني

يمكنك استخدام هذه الصفحات لتقويم مدى تقدم الطلاب.

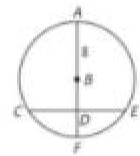
الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

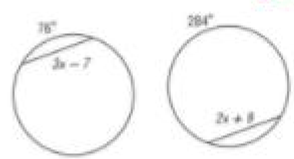
6. هل الشكل الموضّح له تناظر دوراني؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر. **نعم؛ ترتيبه 2**

7. **الإجابة الشبكية** دائرة تحيط بمربع طول ضلعه 5 سنتيمترات. فما محيط الدائرة؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر. **22.2**

8. في $\odot B$، $CE = 13.5$. أوجد BD، وقرب إلى أقرب جزء من مئة. **4.29**

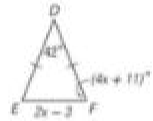


9. الدائرتان الموضحتان متطابقتان. أوجد قيمة x وطول الوتر. **$x = 16$; 41**



10. **الإجابة الشبكية** اذكر مقدار التناظر الدوراني للشكل، واكتب إجابتك بالدرجات. **45**

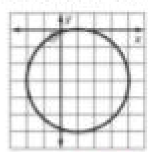
11. ما طول $\overline{EF}$؟ **26**



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

12. استخدم الدائرة الموضحة للإجابة عن كل من الأسئلة التالية.



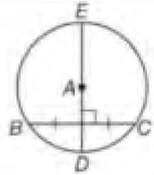
a. ما مركز الدائرة؟ **$(1, -3)$**

b. ما نصف قطر الدائرة؟ **3 وحدات**

c. اكتب معادلة للدائرة. **$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 3^2$**

1005

الصفحتان 979–980، الدرس 15-2



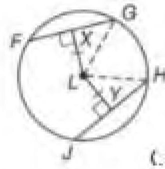
26. المعطيات: ⊙A، $\overline{ED}$ هو المنصف ⊥ لـ $\overline{BC}$.

المطلوب: $\overline{ED}$ هو قطر ⊙A.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{ED}$ هو المنصف ⊥ لـ $\overline{BC}$. (معطيات)
2. A تقع على مسافة متساوية من B وC. (جميع أنصاف الأقطار في ⊙ تكون ≅.)
3. A تقع على المنصف ⊥ لـ $\overline{BC}$. (عكس نظرية المنصف ⊥.)
4. $\overline{ED}$ هو قطر ⊙A. (تعريف قطر الدائرة)



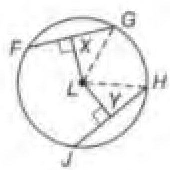
27. المعطيات: ⊙L, $\overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}$, $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

المطلوب: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{LG} \cong \overline{LH}$ (جميع أنصاف أقطار ⊙ تكون ≅.)
2. $\overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}, \overline{LX} \cong \overline{LY}$ (المعطيات)
3. ∠LXG و ∠LYH زاويتان قائمتان. (تعريف المستقيمات ⊥.)
4. $\triangle XGL \cong \triangle YHL$ (مسلّمة الوتر والساق)
5. $\overline{XG} \cong \overline{YH}$ (المبرهنة CPCTC)
6. $XG = YH$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
7. $2(XG) = 2(YH)$ (خاصية الضرب)
8. $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$. (نصف القطر ⊥ على وتر ينصف الوتر.)
9. $FG = 2(XG), JH = 2(YH)$ (تعريف منتصف القطعة المستقيمة)
10. $FG = JH$ (بالتعويض)
11. $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)



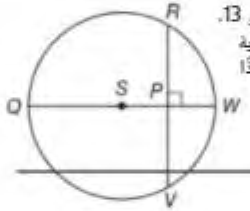
28. المعطيات: ⊙L, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$، $\overline{LG}$ و $\overline{LH}$ أنصاف أقطار. $\overline{LX} \perp \overline{FG}$؛ $\overline{LY} \perp \overline{JH}$

المطلوب: $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. ⊙L, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$، $\overline{LG}$ و $\overline{LH}$ أنصاف أقطار. $\overline{LX} \perp \overline{FG}; \overline{LY} \perp \overline{JH}$ (المعطيات)
2. $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$. ($\overline{LX}$ و $\overline{LY}$ نصفي قطرين تضمهما الدائرة. نصف القطر ⊥ على وتر ينصف الوتر.)
3. $XG = \frac{1}{2}FG, YH = \frac{1}{2}JH$ (تعريف المنتصف)
4. FG = JH (تعريف القطع المستقيمة ≅)
5. $\frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}JH$ (خاصية الضرب)
6. XG = YH (بالتعويض)
7. $\overline{XG} \cong \overline{YH}$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
8. $\overline{LG} \cong \overline{LH}$ (جميع أنصاف أقطار دائرة تكون ≅.)
9. ∠GXL و ∠HYL قائمتان. (تعريف المستقيمات ⊥.)
10. △XLG ≅ △YLH (مسلّمة الوتر والساق)
11. $\overline{LX} \cong \overline{LY}$ (المبرهنة CPCTC)



34. الإجابة النموذجية: طول نصف القطر هو 13، وطول SP هو 5 cm. إذًا باستخدام نظرية فيثاغورس يكون طول PV هو 12 cm. إذًا طول الوتر هو 24 cm.

صفحة 987–989، الدرس 15-3

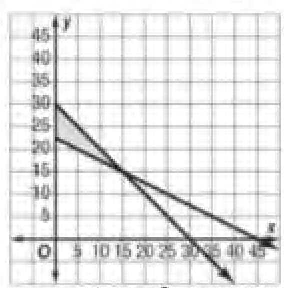
28. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AC}$ مماس لـ ⊙H عند C؛ $\overline{AB}$ مماسا لـ ⊙H عند B. (المعطيات)
2. ارسم $\overline{BH}$ و $\overline{AH}$ و $\overline{CH}$. (عبر أية نقطتين هناك مستقيم واحد.)
3. $\overline{AC} \perp \overline{CH}, \overline{AB} \perp \overline{BH}$ (المستقيم المماس لدائرة يكون ⊥ على نصف القطر عند نقطة التماس).
4. ∠ACH و ∠ABH زاويتان قائمتان. (تعريف المستقيمات ⊥.)
5. $\overline{CH} \cong \overline{BH}$ (جميع أنصاف أقطار دائرة تكون ≅.)
6. $\overline{AH} \cong \overline{AH}$ (خاصية الانعكاس)
7. $\triangle ACH \cong \triangle ABH$ (مسلّمة الوتر والساق)
8. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (المبرهنة CPCTC)

29. البرهان. تذكر المعطيات أن △ABC مثلث متساوي الأضلاع، إذًا $AB = BC = AC$. تذكر المعطيات أيضًا أن D نقطة منتصف AB. إذًا $AD = DB$. حسب النظرية 15.6، $AE = AD$. نظرًا لأن △ABC مثلث متساوي الأضلاع $m\angle A = 60$. حسب نظرية مجموع زوايا المثلث، $m\angle D = m\angle E = 60$. وبالتالي △ADE مثلث متساوي الأضلاع. إذًا $AD = DE$. كذلك حسب نظرية 15.6، $DB = BF$. وكذلك، $m\angle B = 60$ و △BDF مثلث متساوي الأضلاع. إذًا $BD = DF$. وفقًا لخاصية التعدي $DF = DE$. نظرًا لأن △BDF و △ADE كلا هما مثلثين متساو الأضلاع، $m\angle BDF = 60$ و $m\angle ADE = 60$. إذًا نظرًا لأن ADB زاوية مستقيمة، $m\angle EDF = 60$. لذلك فإنه حسب نظرية مجموع زوايا المثلث، $m\angle DEF = m\angle FED = 60$ و △DEF مثلث متساوي الأضلاع.

49a.

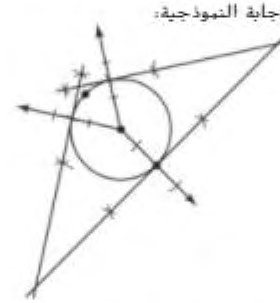


49b. الإجابة النموذجية:
المشي: 15 min،
الجري: 15 min؛
المشي: 10 min،
الجري: 20 min؛
المشي: 5 min،
الجري: 25 min

صفحة 990، التوسّع 15-3

2. الإجابة النموذجية:

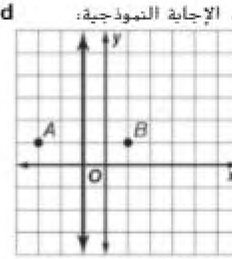
3. الإجابة النموذجية:



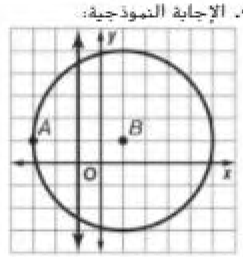
الإجابة النموذجية: اخترت نقطة على الدائرة واستخدمت إعدادًا للفرجار أصغر من إعداد الفرجار الذي استخدمته للدائرة لوضع علامة قوس على كل من جانبي النقطة. ثم اخترت نقطة على الجانب الآخر من الدائرة ورسمت الأشعة عبر النقاط الثلاث. لقد وجدت أن المستقيمات المتعامدة على الأشعة تشكل مثلثًا منفرج الزاوية.

الصفحات 996، الدرس 4-15

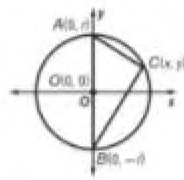
42b. الإجابة النموذجية:



42d. الإجابة النموذجية:



44. المعطيات: $\overline{AB}$ هو قطر ⊙O، و C هي نقطة على ⊙O.



المطلوب: ∠ACB زاوية قائمة.

البرهان:

$\overline{AC}$ له الميل $\frac{y-r}{x}$، و $\overline{CB}$ له الميل $\frac{y-(-r)}{x}$ أو $\frac{y+r}{x}$.

$\frac{y-r}{x}\cdot\frac{y+r}{x}=\frac{y^2-r^2}{x^2}$ الضرب.

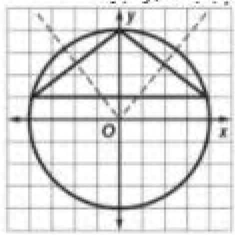
$=\frac{y^2-(x^2+y^2)}{x^2}$ $\quad r^2=x^2+y^2$

$=\frac{y^2-x^2-y^2}{x^2}$ $\quad -(x^2+y^2)=-x^2-y^2$

$\frac{-x^2}{x^2}=-1$ بسّط.

بما أن ناتج ضرب الميل $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ هو −1، $\overline{AC}\perp\overline{CB}$ و ∠ACB زاوية قائمة.

46. الإجابة النموذجية:



47. الطريقة 1: رسم دائرة نصف قطرها 200 ومركزها عند كل محطة. الطريقة 2: استخدام نظرية فيثاغورس للتعرف على المحطات التي تبعد عن بعضها البعض بأكثر من 200 كيلومتر. باستخدام الطريقة 2، ارسم النقاط التي تمثل المحطات على تمثيل بياني. المحطات التي تبعد بأكثر من 4 وحدات عن بعضها البعض على التمثيل البياني ستكون أبعد بأكثر من 200 كيلومتر وبذلك تستطيع استخدام نفس التردد. خصص المحطة A للتردد الأول. المحطة B تبعد بنحو 4 وحدات عن المحطة A ، لذا يجب تخصيص التردد الثاني لها. المحطة C تبعد بنحو 4 وحدات عن كل من المحطتين A و B ، لذا يجب تخصيص التردد الثالث لها. المحطة D تبعد كذلك بنحو 4 وحدات عن المحطات A و B و C، لذا يجب تخصيص تردد رابع لها. المحطة E تبعد بنحو $\sqrt{29}$ أو 5.4 وحدة عن المحطة A، لذا يمكنها مشاركة التردد الأول. المحطة F تبعد بنحو $\sqrt{29}$ أو 5.4 وحدة عن المحطة B ، لذا يمكنها مشاركة التردد الثاني. المحطة G تبعد بنحو $\sqrt{32}$ أو 5.7 وحدة عن المحطة C، إذًا يمكنها مشاركة التردد الثالث. وبناء عليه، فإن أقل عدد من الترددات يمكن تخصيصه هو 4.