المثلثات المتطابقة
مخطط الوحدة

التقويم التشخيصي
تدريب سريع، صفحة 705

	الدرس 12-1 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 12-2 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 12-2 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم
العنوان	**تصنيف المثلثات**	**مختبر الهندسة: زوايا المثلث**	**زوايا المثلثات**
الأهداف	▪ تعريف وتصنيف المثلثات بقياسات الزوايا وقياسات الأضلاع.	▪ إيجاد العلاقة بين قياسات الزوايا الداخلية للمثلث.	▪ تطبيق نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث ▪ تطبيق نظرية الزاوية الخارجية
المفردات الأساسية	مثلث حاد acute triangle مثلث متساوي الزوايا equilangular triangle مثلث منفرج الزاوية obtuse triangle مثلث قائم الزاوية right triangle مثلث متساوي الأضلاع equilateral triangle مثلث متساوي الساقين isosceles triangle مثلث مختلف الأضلاع scalene triangle		خط مساعد auxiliary line زاوية خارجية exterior angle زاوية داخلية غير مجاورة remote interior angle البرهان التسلسلي flow proof نتيجة corollary

الدرس 12-3 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	الدرس 12-4 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	التوسع 12-4 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 12-5 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم
المثلثات المتطابقة	**إثبات تطابق المثلثات–تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)**	**مختبر الهندسة: برهنة الإنشاءات**	**إثبات تطابق المثلثات–تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)، تساوي زاويتين وضلع (AAS)**
▪ ذكر الأجزاء المتناظرة في المضلعات المتطابقة واستخدامها. ▪ إثبات تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.	▪ استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS) لاختبار تطابق المثلث.	▪ إثبات صحة الإنشاءات باستخدام القياسات المتطابقة.	▪ استخدام مسلّمة تساوي زاويتين وضلع محصور بينهما (ASA) ومسلّمة تساوي زاويتين وضلع (AAS) لاختبار تطابق المثلث.
تطابق congruent مضلعات متطابقة congruent polygon أجزاء متناظرة corresponding parts	زاوية محصورة included angle		ضلع محصور included side

التقويم التكويني

اختبار نصف الوحدة، صفحة 744

المثلثات المتطابقة

مخطط الوحدة

	التوسع 12-5 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 12-6 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 12-7 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم
العنوان	**مختبر الهندسة: التطابق في المثلثات قائمة الزاوية**	**المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع**	**مختبر تقنية التمثيل البياني: تحويلات التطابق**
الأهداف	▪ استكشاف التطابق في المثلثات قائمة الزاوية.	▪ استخدام خصائص المثلثات متساوية الساقين والمثلثات متساوية الأضلاع.	▪ استخدام حاسبة التمثيل البياني لإجراء عمليات تحويل على المثلثات في المستوى الإحداثي. ▪ اختبار تحويلات التطابق في المثلثات.
المفردات الأساسية		ساقا المثلث متساوي الساقين legs of an isosceles triangle زاوية الرأس vertex angle زوايا القاعدة base angles	

الدرس 12-7 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	الدرس 12-8 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 12-9A 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 12-9B 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم
تحويلات التطابق	**المثلثات والبرهان الإحداثي**	**مختبر الهندسة: إنشاء المنصفات**	**مختبر الهندسة: إنشاء الوسيطات والارتفاعات**
▪ تحديد تحويلات التطابق. ▪ التحقق من تطابق الأشكال بعد تحويل التطابق.	▪ تحديد موضع المثلثات وكتابة أسمائها للاستخدام في البراهين الإحداثية. ▪ استخدام هندسة الإحداثيات لكتابة البراهين.	▪ إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.	▪ إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.
تحويل transformation الصورة الأصلية preimage الصورة image تحويل التطابق congruence transformation متساوي الأبعاد isometry إزاحة translation انعكاس reflection دوران rotation	البرهان الإحداثي coordinate proof	منصّف الزاوية angle bisector	وسيط median ارتفاع altitude

مخطط الوحدة

	الاستكشاف 12-9C 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 12-9 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم
العنوان	**مختبر تقنية التمثيل البياني: متباينة المثلث**	**مساحات متوازيات الأضلاع والمثلثات**
الأهداف	▪ استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.	▪ حساب محيطات ومساحات متوازيات الأضلاع. ▪ حساب محيطات ومساحات المثلثات.
المفردات الأساسية		قاعدة متوازي الأضلاع base of a parallelogram ارتفاع متوازي الأضلاع height of a parallelogram base of a triangle قاعدة المثلث height of a triangle ارتفاع المثلث
		التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة، الصفحتان 791-794 تدريب على الاختبار، صفحة 795

ما تقوله الأبحاث...

التقويم التكويني—تقويمات متواصلة مصممة لجعل تفكير الطلاب واضحًا لكل من المعلمين والطلاب—وهي ضرورية ومهمة. إنها تسمح للمعلم أن يتفهم الفهم المسبق للطلا ب ويتفهم الوقت الذي يكونون فيه في طور الا نتقال من التفكير غير الرسمي إلى التفكير الرسمي ومن ثم يصمم التعليمات والإرشادات تبعًا لهذا الطور (برانفورد وآخرون، 2000).

- استخدم النشاط التقويمي الموجود في نهاية كل درس لتقويم مدى استيعاب الطلاب لمفاهيم الدرس.

نصيحة من معلّم

كارين إس كومينس، معلمة
مدرسة فرانكلين سنترال الثانوية
إنديانابوليس، إنديانا

> ***بعد تقديم البراهين، قمت بكتابة العديد من البراهين البسيطة على مجموعة من البطاقات. ثم قطعت الجمل وفصلتها عن الأسباب وأعطيتها للطلاب وجعلتهم يعيدوا تكوينها من جديد.***

التقويم

التشخيص	سبل الحل
بداية الوحدة 12	
الاستعداد للوحدة 12 **كتاب الطالب**	الاستجابة للتدخل التقويمي **كتاب المعلم**
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا؟ **كتاب الطالب**	الوحدة 0 **كتاب الطالب**

التقويم التشخيصي

أثناء/بعد كل درس	
تمرين موجّه **كتاب الطالب**، كل مثال التحقق من فهمك **كتاب الطالب** مسائل مهارات التفكير العليا **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلم** الخطوة 4، التقويم **كتاب المعلم**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم؛** خيارات الواجب المنزلي المتمايزة **كتاب المعلم**
نصف الوحدة	
اختبار نصف الوحدة **كتاب الطالب**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تدريب على الاختبار **كتاب الطالب** تدريب على الاختبار المعياري **كتاب الطالب**	

التقويم التكويني

التقويم الختامي

التدريس المتمايز

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة OL AL BL

الطريقة الحسية الحركية علّم المستوى الإحداثي على الأرض باستخدام شريطٍ لاصق. اجعل الطلاب يكوّنوا رؤوس الأشكال، ممسكين بينهم بخيطٍ أو حبلٍ لتكوين الأضلاع. اجعلهم يصنعوا كل مثلثٍ درسوه في هذه الوحدة. اطلب منهم أن يقارنوا ويظهروا الفرق بين المثلثات.

النمط الطبيعي اجعل الطلاب يستخدموا أمثلةً من الوحدة وكذا ملا حظاتهم لتصنيف المثلثات الموجودة في الطبيعة. فعلى سبيل المثال، بعض الأوراق والأشجار التي تنمو بشكلٍ مثلثيّ، القطط لها آذانٌ مثلثة الشكل. وبعض الطحالب مثلثةٌ في بنيتها.

النمط البصري حالات الدوران والانعكاس والازاحة يمكن استخدامها في ابتكار أعمال فنية رائعة. اجعل الطلاب يبدؤوا بعمل شكلٍ واحدٍ في المستوى الإحداثي ويستخدموا صور تحويل متنوعة لابتكار عملٍ فنيّ. يجب على الطلا ب تسجيل كل تحويلٍ يستخدمونه في ابتكار تصميماتهم.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

قسّم الطلا ب إلى مجموعاتٍ صغيرة يعملوا معًا ويستخدموا المستوى الإحداثي المرسوم على لو ح من الفلين لصنع المثلثات التي درسوها في هذه الوحدة. اجعل الطلا ب يستخدموا الدبابيس لعمل الرؤوس والخيوط للأضلاع. اطلب منهم شرح خصائص كل مثلث وتصنيفه.

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اطلب من الطلاب ابتكار بنك الأمثلة من أجل زملائهم. اطلب منهم ابتكار أمثلة على تطابق المثلثات. عليهم كتابة SSS، أو SAS، أو ASA، أو AAS على أحد جوانب بطاقةٍ أو ملصقٍ مع تعريفٍ لكلٍّ منهم. وعلى الجانب الآخر، عليهم وضع مثالٍ.

تحدَّ الطلاب لرسم كلّ أنواع المثلثات الممكنة. اطلب منهم تنظيم محاولاتهم في جدولٍ كالموجود بالأسفل. وعليهم رسمُ مثالٍ لكلّ نوعٍ من أنواع المثلثات، أو كتابة تفسيرٍ يبيّن سببَ عدم تمكنه من ذلك.

	حاد الزاوية	قائم الزاوية	منفرج الزاوية	متساوي الزوايا
مختلف الأضلاع				
متساوي الساقين				
متساوي الأضلاع				

التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 12

الموضوعات ذات الصلة

- استخدام المفاهيم والخصائص الهندسية لحل المسائل.
- التمثيل البياني على المستوى الإحداثي.

الوحدة 12

الموضوعات ذات الصلة

- وضع فرضيات عن المضلعات.
- استخدام الأنماط العددية والهندسية لوضع تعميماتٍ عن الخصائص الهندسية.
- استخدام التفكير المنطقي لإثبات صحة العبارات.

بعد الوحدة 12

الإعداد

- حل مسائل من حالاتٍ فيزيائيةٍ باستخدام حساب المثلثات، بما في ذلك استخدام قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine وقوانين المساحة.

معاينة درس تلو الآخر

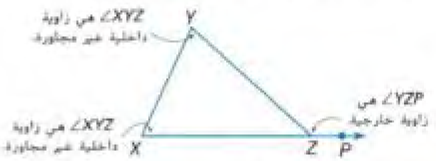
12-1 تصنيف المثلثات

يمكن تصنيف المثلثات حسب قياسات زواياها. ففي المثلث الحاد، تكون جميع زواياه حادة. وفي المثلث المنفرج، تكون إحدى الزوايا منفرجة. وفي المثلث القائم، قياس إحدى الزوايا يساوي 90. وفي حالة تطابق جميع زوايا المثلث، يسمى بالمثلث متساوي الزوايا.

كما يمكن تصنيف المثلثات حسب عدد الأضلاع المتطابقة. فلا يوجد ضلعان متطابقان في المثلث مختلف الأضلاع. ويوجد على الأ قل ضلعان متطابقان في المثلث متساوي الساقين. وكل الأضلا ع متطابقة في المثلث متساوي الأضلاع. المثلث متساوي الأضلا ع هو نوع خاص من المثلث متساوي الساقين.

12-2 زوايا المثلثات

تؤكد نظرية مجموع الزوايا أن مجموع قياس الزوايا الداخلية للمثلث هو 180 دائمًا. ويمكن تطبيق هذه النظرية على أي مثلث. كما تقودنا إلى نظرية الزاوية الثالثة والتي تقول: إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثات مع زاويتين في مثـ ثٍ آخر، فإن الزاوية الثالثة في كلا المثلثَين متطابقة أيضًا. وكل زاوية في المثلث لها زاوية خارجية، ناتجة عن تقابل أحد أضلا ع المثلث مع امتداد ضلع آخر. تسمى زوايا المثلث الداخلية التي لا تجاور زاوية خارجية معينة بالزوايا الداخلية غير المجاورة. وقياس زاوية خارجية في مثلث تساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين. وهذا ما يسمى بنظرية الزاوية الخارجية.



$$m\angle XYZ + m\angle YXZ = m\angle YZP$$

12-3 المثلثات المتطابقة

يتطابق المثلثان *إذا وفقط إذا* كانت أجزاؤهما المتناظرة متطابقة. بعض التحويلا ت، مثل الإزاحة، والانعكاس، والدوران، لا تؤثر على التطابق. وتسمى هذه التحويلات *بتحويلا ت التطابق*.

تطابق المثلثات، كما في الزوايا، والقطع المستقيمة، انعكاسي، وتماثلي، ومتعدٍ.

12-4 إثبات تطابق المثلثات—تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

في هذا الدرس سترسم مثلثًا به ثلاثة أضلا ع متطابقة مع ثلاثة أضلاع لمثلثٍ مُعْطَى. يوضح هذا النشاط مسلّمة تشابه ضلع-ضلع-ضلع، والتي تكتب (SSS). وسترسُم أيضًا مثلثًا يتطابق فيه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ مُعْطَى آخر. ويوضح هذا النشاط مسلّمة تشابه ضلع-زاوية- ضلع، والتي تكتب (SAS).

12-5 إثبات تطابق المثلثات—تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)، تساوي زاويتين وضلع (AAS)

مسلّمة التشابه زاوية–ضلع –زاوية، والتي تُكتب (ASA)، تصلح لأن قياس الزاويتين والضلع المحصور بينهما يكوّن مثلثًا فريدًا. وتقرر هذه المسلّمة أنه إذا تطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثات مع الضلعَيْن المتناظرَيْن والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثَيْن متطابقان.

يترتب على مسلّمة تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) نظرية تطابق زاويتين وضلع، أو (AAS)، والتي تقرر: يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع غير المحصور بينهما في أحد المثلثَيْن مع نظائرها في المثلث الآخر.

للمثلثات القائمة نظريات خاصة بها لإثبات التطابق. إحدى هذه النظريات هي نظرية تطابق الساقَيْن أو (LL)، والتي تطبقها مسلّمة SAS على المثلثات قائمة الزاوية. تنص هذه النظرية على أنه: إذا كانت ساقا مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساقين المناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان. وتعتمد مسلّمة الوتر والساق (HL) على مسلّمة SSA، وهي اختبار ينطبق فقط على المثلثات قائمة الزاوية. وتنص هذه المسلّمة على أنه: يتطابق المثلثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعي المثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في المثلث الآخر.

12-6 المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

للمثلثات متساوية الساقين مصطلحات خاصة بأجزائها. فالزاوية الناتجة عن الضلعَيْن المتطابقَيْن تُسمّى *زاوية الرأس*. والزاويتان الناتجتان عن القاعدة وأحد الأضلاع المتطابقيْن تسمّيان *زاويتي القاعدة*. والضلعان المتطابقان هما *الساقان*. وللمثلثات متساوية الساقين أيضًا خواص خاصة تظهر في نظرية المثلث متساوي الساقيْن ومعكوسها: إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتيْن المقابلتيْن لهذيْن الضلعين تتطابقان أيضًا.

تقودنا هذه النظرية إلى لازمات خاصة بزوايا المثلث متساوي الأضلاع. تنص أولاها على أن المثلث يكون متساوي الأضلاع في حالةٍ وحيدة فقط وهي تساوي زواياه. وتنص النتيجة الثانية على أن كل زاوية من زوايا المثلث متساوي الأضلاع تساوي $60°$.

12-7 تحويلات التطابق

التحويل هو عملية تحويل شكل هندسي، الصورة الأصلية، إلى شكل هندسي آخر، يُسمّى الصورة. وفي تحويل التطابق قد يتغير موضع الصورة عن الصورة الأصلية، ولكن يظل الشكلان متطابقيْن. من أنواع تحويل التطابق: الانعكاس، والانتقال، والدوران. تتنوع تحويلات التطابق باستخدام خواص المثلثات المتطابقة.

12-8 المثلثات والبرهان الإحداثي

يمكن استخدام المستوى الإحداثي بجانب الجبر في البرهان الإحداثي. وقبل البدء في البرهان الإحداثي، يجب عليك وضع الشكل في المستوى الإحداثي. ومن الضروري استخدام الإحداثيات التي تجعل إجراء الحسابات بسيطًا بقدر الإمكان. استخدام نقطة الأصل كرأس أو مركزٍ سيساعد على ذلك، ويجب عليك وضع ضلعٍ واحدٍ على الأقل من المضلع على المحور. وبقدر الإمكان، احتفظ بالشكل داخل الربع الأول.

وعند وضع المثلث في مكانه، يمكنك متابعة خطوات البرهان. ويتم غالبًا استخدام قانون المسافة، وقانون الميل، وقانون نقطة المنتصف في البراهين الإحداثية.

12-9 مساحات متوازيات الأضلاع والمثلثات

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي به كل ضلعين متقابلين متوازيين. يمكن أن نطلق كلمة قاعدة على أي جانب من جوانب متوازي الأضلاع. لكل قاعدة، هناك ارتفاع مقابل يكون عموديًا على القاعدة. يتطابق الارتفاع مع ارتفاع متوازي الأضلاع. إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع تبلغ A وحدة مربعة، وكانت القاعدة تبلغ b وحدة، وكان ارتفاعه يبلغ h وحدة، إذا $A = bh$.

لإيجاد مساحة شكل رباعي على المستوى الإحداثي، عليك أولاً أن تحدد ما إذا كان الشكل عبارة عن متوازي أضلاع أم لا. يمكنك أن تستخدم صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية أم لا. عقب ذلك، عليك أن تحسب قياسات القاعدة والارتفاع وتستخدمها في حساب المساحة.

الوحدة 12 المثلثات المتطابقة

السابق

عرفت على القطع والزوايا واكتشفت العلاقات بين قياساتها.

الحالي

في هذه الوحدة سوف تقوم بما يلي:

- تطبيق علاقات خاصة بين الزوايا الداخلية والخارجية للمثلثات.
- تحديد الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة وإثبات تطابق المثلثات.
- التعرف على الخواص الخاصة للمثلثات متساوية الساقين والمثلثات متساوية الأضلاع

لماذا؟ ▲

اللياقة تستخدم المثلثات لإضافة قوة إلى الكثير من التركيبات بما في ذلك معدات اللياقة مثل هياكل الدراجات.

مشروع الوحدة

تصنيف المثلثات

يستخدم الطلاب ما تعلموه بشأن المثلثات لتصنيف العديد من الأنواع المختلفة المستخدمة في الأجهزة الرياضية وأجهزة اللياقة البدنية.

- اجعل الطلاب يبحثوا عن أمثلة عن استخدام المثلثات في الأجهزة الرياضية وأجهزة اللياقة البدنية مثل إطارات الدراجات والمرمى الخاص بكرة القدم والأرجوحات المعلقة وما شابه ذلك. وما أنواع المثلثات النموذجية؟ وكيف يتم استخدام هذه الأشكال؟ وما تصاميم المثلثات التي تساعد في عملها؟
- اطبع أكبر قدر ممكن من الأمثلة وتتبع أشكال المثلثات الموجودة في التصاميم على قطعة من الورق. ناقش كيف تم استخدام المثلثات في كل جهاز من الأجهزة.
- في النهاية، صنّف كل مثلث طبقًا لأضلاعه وزواياه واعرض نتائجك أمام الصف الدراسي بأكمله.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام الطريقة التالية.

تعريف: المثلث متساوي الساقين هو المثلث الذي به ضلعان متطابقان على الأقل.

مثال:

اسأل: هل تعتقد أن الزاوية الثالثة تكون الأصغر دائمًا؟ الإجابة النموذجية: لا؛ فمن الممكن أن يكون مجموع قياسات الزوايا المقابلة للضلعين المتطابقين أقل من 90، فتصبح الزاوية الثالثة زاوية منفرجة مما يعني أنها أكبر زاوية في المثلث.

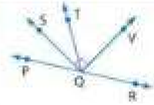
الإجابات الإضافية (صفحة 705)

7. ≈10.8
8. ≈6.7
9. ≈18.0
10. ≈7.8

الاستعداد للوحدة

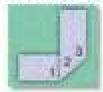
تدريب سريع	مراجعة سريعة

ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها قائمة، أو حادة، أو منفرجة.



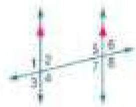
1. $m\angle VQS$ **قائمة** 2. $m\angle TQV$ **حادة** 3. $m\angle PQV$ **منفرجة**

4. **أوريغامي** يتضمن فن طي الأوريغامي طي قطعة ورقية بحيث تشكل الحافة السفلية للقطعة زاوية قائمة مع نفسها. ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها قائمة أو حادة أو منفرجة.



$\angle 1$، قائمة؛ $\angle 2$، حادة؛ $\angle 3$، منفرجة

الجبر استخدم الشكل لإيجاد المتغير المتغيرات المشار إليه. اشرح تبريرك.



5. أوجد قيمة x إذا كانت $m\angle 3 = x - 12$ و $m\angle 6 = 72$.
$84°$؛ زوايا خارجية متبادلة

6. إذا كانت $m\angle 4 = 2y + 32$ و $m\angle 5 = 3y - 3$، فأوجد قيمة y.
$35°$؛ زوايا داخلية متبادلة

أوجد المسافة بين كل زوجين من النقاط. **7–10 انظر الهامش.**

7. $F(3, 6), G(7, -4)$
8. $X(-2, 5), Y(1, 11)$
9. $R(8, 0), S(-9, 6)$
10. $A(14, -3), B(9, -9)$

11. **الخرائط** وضعت إيمان شبكة إحداثية على خريطة إمارة بحيث تمثل كل وحدة 10 كم. إذا علمت أن مدينتها تقع عند $(-8, -12)$ وعاصمة الإمارة تقع عند $(0, 0)$، فأوجد المسافة من مدينتها لعاصمة الإمارة مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الكيلومتر. **144.2 كيلومترًا**

مثال 1 **(مستخدم في الدرس 1-12)**

ضع تصنيفًا لكل زاوية باعتبارها مستقيمة، أو حادة، أو منفرجة.

a. $m\angle ABG$
تقع النقطة G في الزاوية $\angle ABG$ على الزاوية القائمة $\angle ABF$ من الخارج، ولذلك فإن $\angle ABG$ هي زاوية منفرجة.

b. $m\angle DBA$
تقع النقطة D في الزاوية $\angle DBA$ على الزاوية القائمة $\angle FBA$ من الداخل، ولذلك فإن $\angle DBA$ هي زاوية حادة.

مثال 2 **(مستخدم في الدروس من 2-12 إلى 5-12)**

في الشكل، $m\angle 4 = 42$. أوجد $m\angle 7$.

$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان داخليتان متبادلتان، إذًا هما متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ زوج خطي، إذًا هما متكاملتان. إذًا $\angle 7$ تكمل $\angle 1$. قياس $\angle 7$ هو $180 - 42$ أو 138.

مثال 3 **(مستخدم في الدروس 4-12 و 7-12 و 8-12)**

أوجد المسافة بين $J(5, 2)$ و $K(11, -7)$.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$ عوّض.

$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$ اطرح.

$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ بسّط.

الأسئلة الأساسية

- كيف يمكنك أن تثبت أن المثلثين متطابقان؟ الإجابة النموذجية: من خلال إثبات أن جميع الأجزاء المتقابلة من المثلث متطابقة، أو بإثبات أن الأجزاء الثلاثة المتقابلة متطابقة.
- ما تحويل التطابق؟ الإجابة النموذجية: هو التحويل الذي تكون فيه الصورة والصورة الأصلية متطابقتين.

705

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 12. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة 0 لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات® منظّم الدراسة

المثلثات المتطابقة شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 12 عن المثلثات المتطابقة. وابدأ بورقة قياسها 21 cm × 27.5 cm.

1 **قم** بطيها على شكل مثلث قاعدته مربعة. ثم اقطع قطعة الورق الزائدة التي تكونت من المربع.

2 **افتح** الطي وأعد طيه في الاتجاه المقابل لتشكيل مثلث آخر وخط الطي X.

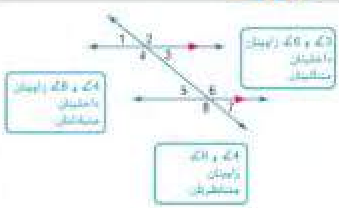
3 **افتح** الأركان وقم بطيها نحو النقطة المركزية في الشكل X لتشكيل مربع صغير.

4 **اكتب** على الأطرف كما هو موضح.

المفردات الجديدة

مثلث متساوي الزوايا	equiangular triangle
مثلث متساوي الأضلاع	equilateral triangle
مثلث متساوي الساقين	isosceles triangle
مثلث مختلف الأضلاع	scalene triangle
خط مساعد	auxiliary line
تطابق	congruent
مضلعات متطابقة	congruent polygons
أجزاء متناظرة	corresponding parts
زاوية محصورة	included angle
ضلع محصور	included side
زاوية قاعدية	base angle
التحويل	transformation
الصورة الأصلية	preimage
الصورة	image
الانعكاس	reflection
إزاحة	translation
الدوران	rotation

مراجعة المفردات



المطويات® منظّم الدراسة

المطويات® Dinah Zike

الهدف الأساسي يستخدم الطلاب مطوياتهم لتدوين الملاحظات، وتعريف المصطلحات، وتسجيل المفاهيم، وكتابة أمثلة عن المثلثات.

التدريس بعد أن يصنع الطلاب صحائفهم المطوية، اجعلهم يرقموا الصفحات لتتوافق مع الدروس الثمانية في هذه الوحدة. ويمكن استخدام هذه الصحف في تدوين الملاحظات، وفي وصف تقدمهم في التعلم، والأفكار الشخصية التي ترد إلى الذهن، وكذلك في وضع قائمة بأمثلة عن الأساليب التي استخدموا فيها معرفتهم الجديدة، أو التي قد يستخدمونها في حياتهم اليومية.

وقت الاستخدام استخدم الجزء المناسب أثناء تناول الطلاب لكل درس في هذه الوحدة. يمكن للطلاب الإضافة إلى جزء المفردات أثناء كل درس.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-1 قياس الخطوط والزوايا وتصنيفها.

الدرس 12-1 تعريف وتصنيف المثلثات بقياسات الزوايا وقياسات الأضلاع.

بعد الدرس 12-1 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الذي يبدو صحيحًا عن أطوال أقواس الأبراج الثلاثة التي تشكّل مثلثًا؟ أطوال الأقواس متماثلة.
- يبدو أن الزوايا الثلاث في هذه المثلثات التي نشأت عن الأقواس متطابقة. ولو كان هذا صحيحًا. فما قياس كل زاوية؟ 60 درجة
- لو نشأ عن الأقواس زوايا غير متطابقة. فهل كان من الممكن أن تظل الأقواس متطابقة؟ بالطبع لا. فالمثلث متساوي الأضلاع يجب أن تكون زواياه الثلاث أيضًا متطابقة.

الدرس 12-1 تصنيف المثلثات

السابق

- لقد قست الزوايا وصنفتها.

الحالي

1 تحديد المثلثات وتصنيفها حسب قياسات الزوايا.

2 تحديد المثلثات وتصنيفها حسب قياسات الأضلاع.

لماذا؟

- تم تصميم أبراج البث اللاسلكي لتدعم الهوائيات لبث إشارات المذياع أو التلفاز. يكشف هيكل البرج المعروض عن نمط للمثلثات المختلفة.

المفردات الجديدة

مثلث حاد
acute triangle
مثلث متساوي الزوايا
equiangular triangle
مثلث منفرج الزاوية
obtuse triangle
مثلث قائم الزاوية
right triangle
مثلث متساوي الأضلاع
equilateral triangle
مثلث متساوي الساقين
isosceles triangle
مثلث مختلف الأضلاع
scalene triangle

تصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات والطرق (الفرجار والمسطرة والخيط والأدوات العاكسة والورق المطوي وبرنامج هندسي ديناميكي وما إلى ذلك).

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

مراعاة الدقة.

1 تصنيف المثلثات حسب الزوايا تذكّر أن المثلث شكل ثلاثي الأضلاع المثلث ABC. يكتب $\triangle ABC$. له أجزاء مسماة باستخدام الأحرف A و B و C.

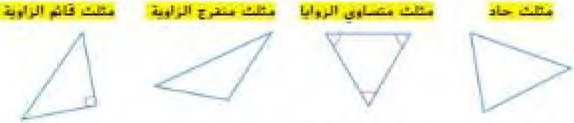
أضلاع $\triangle ABC$ هي $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$.

الرؤوس هي النقاط A و B و C.

الزوايا هي $\angle BAC$ أو $\angle A$ و $\angle ABC$ أو $\angle B$ و $\angle BCA$ أو $\angle C$.

يمكن تصنيف المثلثات بطريقتين – حسب زواياها أو حسب أضلاعها. تحتوي كل المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، لكن الزاوية الثالثة تُستخدم في تصنيف المثلث.

المفهوم الأساسي تصنيفات المثلثات حسب الزوايا



مثلث حاد	مثلث متساوي الزوايا	مثلث منفرج الزاوية	مثلث قائم الزاوية
3 زوايا حادة	3 زوايا حادة متطابقة	1 زاوية منفرجة	1 زاوية قائمة

المثلث متساوي الزوايا هو نوع خاص من المثلث حاد الزاوية.

عند تصنيف المثلثات، كن دقيقًا قدر الإمكان. فبينما المثلث الذي يضم ثلاث زوايا حادة متطابقة يُعتبر مثلثًا حاد الزاوية، من الأدق تصنيفه على أنه مثلث متساوي الزوايا.

مثال 1 تصنيف المثلثات حسب الزوايا

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

a.

يحتوي المثلث على ثلاث زوايا حادة غير متساوية.

b.

يبلغ قياس إحدى زوايا المثلث 90. ولذلك، فهي زاوية قائمة. بما أن المثلث يحتوي على زاوية قائمة، فهو مثلث قائم الزاوية.

1 تصنيف المثلثات حسب الزوايا

يبيّن **المثالان 1 و 2** طريقة تصنيف المثلثات حسب قياس الزوايا.

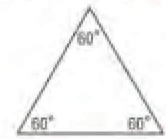
التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره *حاد الزاوية*، أو *متساوي الزوايا*، أو *منفرج الزاوية*، أو *قائم الزاوية*.

a.



بما أن المثلث يحتوي على ثلاث زوايا متطابقة، فهو مثلث متساوي الزوايا.

b.

إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث يساوي 130 درجة فهذا المثلث منفرج الزاوية. إذا كان بالمثلث زاوية منفرجة، فهذا المثلث منفرج الزاوية.

2 ضع تصنيفًا للمثلث $\triangle XYZ$ باعتباره *حاد الزاوية*، *متساوي الزوايا*، *منفرج الزاوية*، أو *قائم الزاوية*. اشرح تبريرك.

النقطة W تقع داخل $\angle XYZ$. إذا باستخدام مسلّمة جمع الزوايا $m\angle XYW + m\angle WYZ = m\angle XYZ$. بالتعويض، $m\angle XYZ = 40 + 50$ أو 90. بما أن $\triangle XYZ$ به زاوية قائمة، إذًا فهو مثلث قائم الزاوية.

مراجعة المفردات

الزاوية الحادة زاوية بقياس درجة أقل من 90

الزاوية القائمة زاوية بقياس درجة يبلغ 90

الزاوية المنفرجة زاوية بقياس درجة أكبر من 90

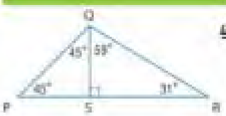
تمرين موجّه

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

1A. **منفرج الزاوية**

1B. **متساوي الزوايا**

مثال 2 تصنيف المثلثات حسب الزوايا داخل الأشكال



ضع تصنيفًا للمثلث $\triangle PQR$ باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. اشرح تبريرك.

النقطة S تقع في الزاوية الداخلية لـ $\angle PQR$. إذًا حسب مسلّمة جمع الزوايا $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$. بالتعويض، $m\angle PQR = 45 + 59$ أو 104.

بما أن $\triangle PQR$ يحتوي على زاوية منفرجة، فهو مثلث منفرج.

تمرين موجّه

2. استخدم الرسم التخطيطي لتصنيف $\triangle PQS$ باعتباره حاد الزاوية، أو متساوي الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية. اشرح تبريرك. **قائم الزاوية؛ $\triangle PQS$ به زاوية قائمة واحدة.**

2 تصنيف المثلثات حسب الأضلاع

يمكن أيضًا تصنيف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها. لتوضيح أن أضلاع المثلث متطابقة، يتم رسم عدد متساوٍ من علامات التجزئة على الأضلاع المتناظرة.

المفهوم الأساسي تصنيفات المثلثات حسب الأضلاع

مثلث متساوي الأضلاع	مثلث متساوي الساقين	مثلث مختلف الأضلاع
الأضلاع الثلاثة متطابقة	ضلعان متطابقان على الأقل	لا توجد أضلاع متطابقة

المثلث متساوي الأضلاع نوع خاص من المثلث متساوي الساقين.

مثال 3 من الحياة اليومية تصنيف المثلثات حسب الأضلاع

الموسيقى ***ضع تصنيفًا لصندوق أصوات العزف الروسي أدناه باعتباره متساوي الأضلاع أو متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع.***

ضلعان لهما القياس نفسه وهو 40 سم. إذًا، المثلث له ضلعان متطابقان. المثلث متساوي الساقين.

تمرين موجّه

3. **سلامة القيادة** ضع تصنيفًا للزر في الصورة على اليمين حسب أضلاعه. **متساوي الأضلاع**

الربط بالحياة اليومية

في الكثير من السيارات، تعمل مصابيح الخطر بالضغط على زر صغير يوجد بالقرب من عمود القيادة. يتخذ المفتاح في العادة شكلًا مألوفًا يشبه المثلث متساوي الأضلاع.

المصدر: جنرال موتورز

التدريس المتمايز AL OL EL

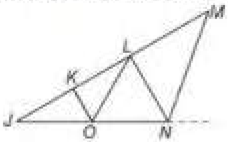
طريقة التواصل يعمل الطلاب في مجموعات من 2 إلى 3 أشخاص لاستكشاف تصنيف المثلثات. اطلب من الطلاب أن يستكشفوا ويناقشوا الأسئلة التالية: هل تستطيع رسم مثلث متساوي الزوايا به زاوية 90°؟ هل تستطيع رسم مثلث قائم الزاوية وبه زاوية منفرجة؟ قم بتسهيل المناقشة ليكتشف الطلاب أيًا من تصنيفات المثلث متنافية وأيها غير متنافية.

2 تصنيف المثلثات حسب الأضلاع

الأمثلة 5–3 توضح كيف يمكن تصنيف المثلثات باستخدام عدد الأضلاع المتطابقة.

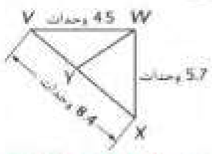
أمثلة إضافية

3 **الهندسة المعمارية** تم وضع الهيكل مثلث الشكل الموضح بالأسفل لبناء من الصلب. صنّف كل من $\triangle JMN$، $\triangle JKO$، و$\triangle OLN$ باعتباره *حادًا، أو متساويًا، أو منفرجًا، أو قائم الزاوية.*



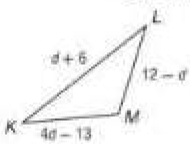
$\triangle JMN$ منفرج الزاوية. $\triangle JKO$ مثلث قائم الزاوية. $\triangle OLN$ متساوي الزوايا.

4 إذا كانت النقطة Y هي نقطة منتصف الضلع $\overline{VX}$ و $WY = 3.0$ وحدات، صنّف $\triangle VWY$ باعتباره *متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.* اشرح تبريرك.



مختلف الأضلاع؛ لأن الأضلاع الثلاثة لها أطوال مختلفة.

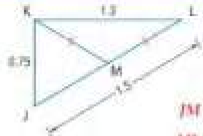
5 **الجبر** أوجد قياسات أضلاع المثلث متساوي الساقين KLM الذي قاعدته $\overline{KL}$



$KM = LM = 7, KL = 11$

مثال 4 تصنيف المثلثات حسب الأضلاع داخل الأشكال

إذا كانت النقطة M هي نقطة المنتصف في $\overline{JL}$، فضع تصنيفًا للمثلث $\triangle JKM$ باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع. اشرح تبريرك.



حسب تعريف نقطة المنتصف، $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	تعويض
$2ML = 1.5$	بسّط.
$ML = 0.75$	اقسم الطرفين على 2.

$JM = ML$ أو 0.75. بما أن $KM = ML$ و $\overline{KM} \cong \overline{ML}$ أو 0.75.

بما أن $KJ = JM = KM = 0.75$ يضم المثلث ثلاثة أضلاع بالقياس نفسه. ولهذا، يضم المثلث ثلاثة أضلاع متطابقة، ولهذا فهو متساوي الأضلاع.

تمرين موجّه **4. متساوية الساقين: ضلعان في المثلث متطابقان.**

A. صنّف $\triangle KML$ باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع. اشرح تبريرك.

يمكنك أيضًا استخدام خواص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع لإيجاد القيم المفقودة.

مثال 5 إيجاد القيم المفقودة

الجبر **أوجد قياسات أضلاع المثلث متساوي الساقين ABC.**

الخطوة 1 أوجد قيمة x.

$AC = CB$	معطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	التعويض
$1 = x - 0.5$	اطرح $4x$ من كل ضلع.
$1.5 = x$	مجموع 0.5 إلى كل طرف.

الخطوة 2 قم بالتعويض لإيجاد طول كل ضلع.

$AC = 4x + 1$	معطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	$x = 1.5$
$CB = AC$	معطى
$= 7$	$AC = 7$
$AB = 9x - 1$	معطى
$= 9(1.5) - 1$	$x = 1.5$
$= 12.5$	بسّط.

تمرين موجّه

5. أوجد قياسات أضلاع المثلث متساوي الأضلاع FGH.

$FG = GH = HF = 21$

تصيحة دراسية

المثابرة في المثال 5، للتحقق من إجابتك، قم بإجراء اختبار لترى ما إذا كان $CB = AC$ عند وضع 1.5 مكان x في التعبير $CB = 5x - 0.5$. $CB = 5x - 0.5 = 5(1.5) - 0.5 = 7$ ✓

التدريس المتمايز OL BL

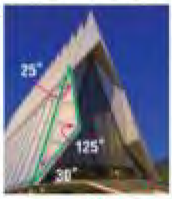
التوسع اطلب من الطلاب الرجوع إلى صورة الأقواس المثلثة في أعلى صفحة 235 ومقارنة المثلثات المتكوّنة. هل الأضلاع متطابقة؟ هل الزوايا متطابقة؟ هل المثلثات متطابقة؟ اطلب منهم عمل تخمينات عن الزوايا والأضلاع المشتركة في المثلثين. الأضلاع المتناظرة متطابقة، والمثلثات متطابقة.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الهندسة المعمارية** ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

1\. 

قائم

2\. 

منفرج الزاوية

3\. 

متساوي الزوايا

مثال 2 ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية . اشرح تبريرك.

4\. $\triangle ABD$ متساوي الزوايا؛ فالزوايا الثلاث جميعًا قياسها °60.

5\. $\triangle BDC$ منفرج الزاوية؛ $\angle BDC > 90°$

6\. $\triangle ABC$ قائم الزاوية؛ $\angle ABC = 90°$

مثال 3 **الدقة** ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.

7\. 

متساوي الساقين

8\. 

مختلف الأضلاع

مثال 4 إذا كانت النقطة K هي نقطة المنتصف في $\overline{FH}$، فضع تصنيفًا لكل مثلث في الشكل على اليسار باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.

9\. $\triangle FGH$ متساوي الأضلاع

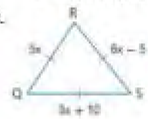
10\. $\triangle GJL$ متساوي الساقين

11\. $\triangle FHL$ مختلف الأضلاع

مثال 5 **الجبر** أوجد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

12\. 

$x = 11,$
$LN = 29,$
$MN = 29$

13\. 

$x = 5,$
$QR = RS =$
$QS = 25$

14\. **مجوهرات** افترض أنك تطوي سلكًا من الصلب الذي لا يصدأ لعمل القرط المعروض. الجزء المثلث من القرط عبارة عن مثلث متساوي الساقين. إذا كان مطلوبًا 1.5 سم لعمل جزء تعليق القرط، فكم عدد الأقراط التي يمكن عملها من 45 سم من السلك؟ اشرح تبريرك.

4؛ القدر الإجمالي من السلك المطلوب، بما في ذلك جزء التعليق هو $1.5 + 3.2 + 3.2 + 2.1$ أو $10\ cm$. $45\ cm \div 10\ cm$ للقرط $4.5 =$ أقراط. لا يوجد سلك كافٍ لعمل 5 أقراط، يمكن عمل 4 فقط باستخدام $45\ cm$ من السلك.

انتبه!

الاستمرار! ذكّر الطلاب أنّه في التمرينين 12 و 13، حتى يتمكنوا من الإجابة عن الأسئلة كاملةً فعليهم أن يقدموا أكثر من حلٍّ للمتغير x. عند إيجاد قيمة x، يتم التعويض بها في كل تعبيرٍ خاص بطول كل ضلع.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي ذكّر الطلاب بأنّ المثلث الحاد لا بدّ أنْ يكون به ثلاث زوايا حادة. ولذا، عند تصنيف مثلث، إذا كان المثلث به زاوية واحدة ليست حادة، فلا بدّ أن يكون المثلث قائمًا أو منفرجًا.

3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين 14-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	15-37, 56-59, 61-81	15-37 فردي، 65-68	16-36 زوجي، 56-59، 61-64, 69-81
OL أساسي	15-53 فردي، 54-59، 61-81	15-37, 65-68	38-59, 61-64, 69-81
BL متقدم	38-81		

التمرين وحل المسائل

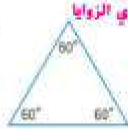
مثال 1 ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

15. منفرج الزاوية

16. حاد الزاوية

17. قائم الزاوية

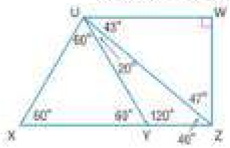
18. متساوي الزوايا

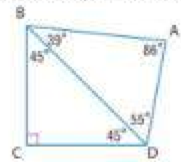


19. حاد الزاوية

20. قائم الزاوية

مثال 2 **الدقة** ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.





21. $\triangle UYZ$ منفرج الزاوية
22. $\triangle BCD$ قائم الزاوية
23. $\triangle ADB$ حاد الزاوية
24. $\triangle UXZ$ حاد الزاوية
25. $\triangle UWZ$ قائم الزاوية
26. $\triangle UXY$ متساوي الزوايا

مثال 3 ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.

27.

متساوي الأضلاع

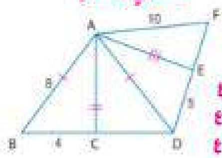
28.

متساوي الساقين

29.

مختلف الأضلاع

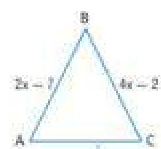
مثال 4 إذا كانت النقطة C هي نقطة الوسط في $\overline{BD}$ والنقطة E هي نقطة الوسط في $\overline{DF}$، فضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين، أو مختلف الأضلاع.



30. $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع
31. $\triangle AEF$ مختلف الأضلاع
32. $\triangle ADF$ متساوي الساقين
33. $\triangle ACD$ مختلف الأضلاع
34. $\triangle AED$ مختلف الأضلاع
35. $\triangle ABD$ متساوي الأضلاع

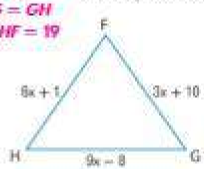
مثال 5 36. **الجبر** أوجد قيمة x وطول كل ضلع إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

$x = 7, AB = 7, BC = 7, CA = 4$



37. **الجبر** أوجد قيمة x وطول كل ضلع إذا كان $\triangle FGH$ متساوي الأضلاع.

$x = 3;$
$FG = GH$
$= HF = 19$



711

38. فن الرسم راجع الرسم المعروض. صنّف كل مثلث مرقّم في *Kat* حسب زواياه وأضلاعه. استخدم ركن صفحة الدفتر لتصنيف قياسات الزاوية واستخدم مسطرة لقياس الأضلاع. **انظر الهامش.**


Kat, 2002, by Diana Ong, computer graphic

39. كليدوسكوب يبني أحمد كليدوسكوبًا مختلف الألوان باستخدام أنبوب بلاستيكي وورق مقوى وقطع من الورق الملون وبلاطة ملاصقة 30 سم مربع. سيتم تقطيع البلاطة المربعة إلى شرائح وترتيبها لتشكيل منشور مفتوح بقاعدة تشبه قاعدة مثلث متساوي الأضلاع. اصنع رسمًا للمنشور مع تحديد أبعاده. اشرح تبريرك. **انظر الهامش.**

الدقة ضع تصنيفًا لكل مثلث في الشكل حسب زواياه وأضلاعه.

40. $\triangle ABE$ **متساوي الساقين قائم الزاوية**

41. $\triangle EBC$ **متساوي الساقين منفرج الزاوية**

42. $\triangle BDC$ **مختلف الأضلاع قائم الزاوية**

هندسة الإحداثيات أوجد قياسات أضلاع $\triangle XYZ$ وضع تصنيفًا لكل مثلث حسب أضلاعه.
43–46. انظر الهامش.

43. $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$

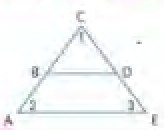
44. $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$

45. $X(3, -2), Y(1, -4), Z(3, -4)$

46. $X(-4, -2), Y(-3, 7), Z(4, -2)$

47. **البرهان** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $\triangle DBC$ حاد الزاوية إذا كان $m\angle ADC = 120$ و $\triangle ABC$ حاد الزاوية **انظر الهامش.**

48. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن BCD متساوي الزوايا إذا كان ACE متساوي الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12



الجبر لكل مثلث، أوجد x وقياس كل ضلع.

49. $\triangle FGH$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $FG = 3x - 10$ و $GH = 2x + 5$ و $HF = x + 20$.
49. $x = 15$; $FG = 35$, $GH = 35$, $HF = 35$

50. $\triangle JKL$ مثلث متساوي الساقين حيث $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ و $JK = 4x - 1$ و $KL = 2x + 5$ و $LJ = 2x - 1$.
$x = 3$; $JK = 11$, $KL = 11$, $LJ = 5$

51. $\triangle MNP$ مثلث متساوي الساقين حيث $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ أقل باثنين من خمسة مضروبة في x و NP أكثر بسبعة من اثنين مضروبة في x و PM أكثر باثنين من ثلاثة مضروبة في x. **$x = 3$; $MN = 13$, $NP = 13$, $PM = 11$**

52. $\triangle RST$ مثلث متساوي الأضلاع. RS أكثر بثلاثة من أربعة مضروبة في x و ST أكثر بسبعة من اثنين مضروبة في x و TR أكثر بواحد من خمسة مضروبة في x. **$x = 2$; $RS = ST = TR = 11$**

52. **الإنشاء** قم بإنشاء مثلث متساوي الأضلاع. تحقق من إنشائك باستخدام القياس وعلله باستخدام الرياضيات. (تلميح: استخدم الإنشاء في نسخ قطعة مستقيمة). **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اجعل الطلاب يحاولوا رسم كل توافيق المثلث المعطاة في هذا المخطط. يجب أن يقدم الطلاب مثالاً على كل نوع من أنواع المثلثات، أو توضيحًا للسبب وراء اعتقادهم أن هذه التوافيق غير ممكنة.

	حاد الزوايا	منفرج الزاوية	قائم الزاوية	متساوي الزوايا
مختلف الأضلاع				
متساوي الساقين				
متساوي الأضلاع				

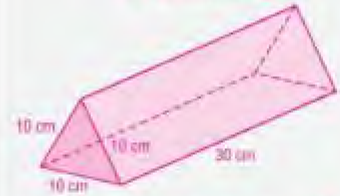
ملاحظات لحل التمرين

فرجار ومسطرة تقويم يتطلب التمرين 53 استخدام فرجار ومسطرة تقويم.

إجابات إضافية

38. $\angle 1$: مختلف الأضلاع قائم الزاوية.
$\angle 2$: مختلف الأضلاع قائم الزاوية.
$\angle 3$: مختلف الأضلاع منفرج الزاوية.
$\angle 4$: مختلف الأضلاع حاد الزاوية.
$\angle 5$: مختلف الأضلاع قائم الزاوية.
$\angle 6$: مختلف الأضلاع منفرج الزاوية

39. لأن قاعدة المنشور المتكونة عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع، فيجب تقطيع البلاطة المربعة إلى ثلاث شرائح متطابقة في العرض. وبما أن البلاطة الأصلية عبارة عن مربع 40 سنتيمترًا، فيكون طول كل شريحة 12 سنتيمترًا في $3 \div 12$ أو 4 سنتيمترات عرضًا.



43. مختلف الأضلاع: $XZ = 3\sqrt{5}$، $XY = \sqrt{113}$، $YZ = 2\sqrt{26}$

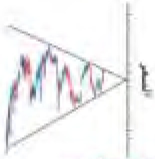
44. متساوي الساقين: $XZ = \sqrt{29}$، $XY = \sqrt{29}$، $YZ = 4$

45. متساوي الساقين: $XZ = 2$، $XY = 2\sqrt{2}$، $YZ = 2$

46. مختلف الأضلاع: $XZ = 8$، $XY = \sqrt{82}$، $YZ = \sqrt{130}$

47. المعطيات: $m\angle ADC = 120$
المطلوب: $\triangle DBC$ مثلث حاد الزاوية.
البرهان: $\angle ADC$ و $\angle BDC$ تكوّنان زوجًا خطيًا. $\angle ADC$ و $\angle BDC$ متكاملتان لأنه: إذا كانت زاويتان تكوّنان زوجًا خطيًا، فإنهما متكاملتان. إذًا $m\angle ADC + m\angle BDC = 180$. نحن نعرف أنّ $m\angle ADC = 120$، وبالتعويض، $120 + m\angle BDC = 180$. باستخدام الطرح نجد أنّ $m\angle BDC = 60$. نحن بالفعل نعرف أنّ $\angle B$ هي زاوية حادة لأن $\triangle ABC$ هو مثلث حاد. $\angle BCD$ يجب أيضًا أن تكون حادة لأنّ $\angle C$ حادة و $m\angle C = m\angle ACD + m\angle BCD$. $\triangle DBC$ هو مثلث حاد طبقًا للتعريف.

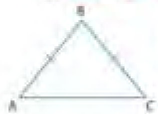
54. **الأسهم** يستخدم المحللون الفنيون مخططات بيانية لتحديد الأنماط التي يمكن أن تشير إلى نشاط مستقبلي في أسعار الأسهم. تحقق مخططات المثلثات المتناظرة القائمة الأكبر عندما يقل التقلب في سعر سهم مع الوقت.



a. ضع تصنيفًا حسب الأضلاع والزوايا للمثلث الذي يتشكل إذا تم رسم خط رأسي عند أية نقطة على التمثيل البياني. مثلث **متساوي الساقين؛ حاد الزاوية**

b. كيف يجب أن يتقلب السعر لكي تشكل البيانات مثلثًا منفرج الزاوية؟ ارسم مثالاً لدعم تبريرك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

55. **التمثيلات** المتعددة في الرسم التخطيطي، الرأس المقابلة للضلع $\overline{BC}$ هي $\angle A$. **a–d. انظر الهامش.**



a. **هندسيًا** ارسم أربعة مثلثات متساوية الساقين، بما فيها مثلث حاد الزاوية ومثلث قائم الزاوية ومثلث منفرج الزاوية. واكتب على الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين الحرفين A و C. وميّز الرأس المتبقية بالحرف B. ثم قس زوايا كل مثلث واكتب كل زاوية مع قياسها.

b. **جدوليًا** قس جميع زوايا كل مثلث. ضع القياسات بالترتيب لكل مثلث في جدول. وأضف عمودًا إلى جدولك لتسجيل مجموع هذه القياسات.

c. **لفظيًا** ضع تخمينًا لقياسات الزوايا المقابلة للأضلاع المتطابقة لمثلث متساوي الساقين. ثم ضع تخمينًا لمجموع قياسات الزوايا لمثلث متساوي الساقين.

d. **جبريًا** إذا كانت x هي قياس إحدى الزوايا المقابلة لأحد الأضلاع المتطابقة في مثلث متساوي الساقين، فاكتب تعابير لقياسات كل من الزاويتين الأخريين في المثلث. اشرح.

56. الإجابة النموذجية: أسماء، تحتوي كل المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، ولذلك، وباستخدام تبرير أماني، سيتم تصنيف كل المثلثات بأنها حادة. يتم تصنيف المثلثات بدلاً من ذلك حسب زاويتها الثالثة. إذا كانت الزاوية الثالثة حادة أيضًا، فالمثلث حاد الزاوية. إذا كانت الزاوية الثالثة منفرجة، كما في المثلث الظاهر، فالمثلث مصنف بأنه منفرج الزاوية.

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

56. **تحليل الخطأ** تقول أسماء إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية. تختلف معها أماني، وتشرح أن المثلث يحتوي على زوايا حادة أكثر من الزوايا المنفرجة، فلا بد أنه حاد الزاوية. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.

الدقة حدد ما إذا كانت العبارات أدناه صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح تبريرك. **57–60. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

57. المثلثات متساوية الزوايا تُعتبر أيضًا مثلثات قائمة الزاوية.

58. المثلثات متساوية الأضلاع تُعتبر متساوية الساقين.

59. المثلثات قائمة الزاوية تُعتبر متساوية الأضلاع.

60. **تحدٍ** تبلغ قياسات أضلاع مثلث متساوي الأضلاع $5x + 3$ وحدات و $7x - 5$ وحدات. فما محيط المثلث؟ اشرح.

مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثالاً لكل نوع من المثلثات أدناه باستخدام منقلة ومسطرة. اكتب على القياسات أضلاع وزوايا كل مثلث. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب. **61–64. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

61. مختلف الأضلاع قائم الزاوية
62. متساوي الساقين منفرج الزاوية
63. متساوي الأضلاع منفرج الزاوية

64. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن تصنيف مثلث متساوي الزوايا باعتباره مثلثًا حادًا متساوي الزوايا غير ضروري.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 55، يستكشف الطلاب زوايا مثلث متساوي الساقين باستخدام أدوات الرسم، ومتعددة، والوصف اللفظي، والوصف الجبري.

انتبه!

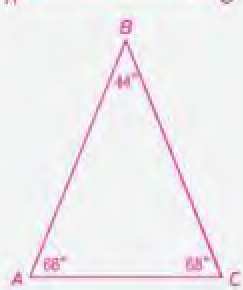
تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 56، على الطلاب أن يفهموا أن أسماء مُحِقّة. ناقش أن المثلث يمكن أنّ يوجد به زاوية منفرجة واحدة فقط ولذا فكل مثلث منفرج به زاويتان حادتان. في الحقيقة، كل مثلث به زاويتان حادتان على الأقل؛ ولذا، فمنطق أماني خطأ.

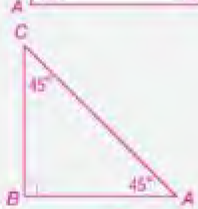
ملاحظات لحل التمرين

المنقلة والمسطرة تتطلب التمارين 61-63 استخدام منقلة ومسطرة.

إجابات إضافية

55a. الإجابة النموذجية:





55b.

$m\angle A$	$m\angle C$	$m\angle B$	مجموع قياسات الزوايا
55	55	70	180
68	68	44	180
45	45	90	180
30	30	120	180

55c. الإجابة النموذجية: في المثلث متساوي الساقين، تتساوى الزوايا المقابلة للأضلاع المتطابقة في القياس. مجموع قياس زوايا المثلث متساوي الساقين هو 180.

55d. x و $180 - 2x$؛ إذا كانت الزوايا المقابلة للضلعين المتطابقين في المثلث متساوي الساقين لها نفس القياس، فإذا كانت إحداهما تساوي x، فإن الأخرى أيضًا تساوي x. مجموع قياس زوايا المثلث متساوي الساقين هو 180، إذًا فقياس الزاوية الثالثة يساوي $180 - 2x$.

تدريب على الاختبار المعياري

65. ما نوع المثلث الذي يمكن أن يقدم مثالاً مضادًا على المرضية أدناه؟ **A**

> إذا كانت زاويتا مثلث حادتين، فإن قياس الزاوية الثالثة يجب أن يكون أكبر من 90 أو يساويها.

A متساوي الأضلاع　　**C** قائم الزاوية
B منفرج الزاوية　　**D** مختلف الأضلاع

66. الجبر يتكلف قفاز كرة البيسبول في الأصل AED 84.50. اشتراه إسماعيل بخصم 40%. فكم كان مقدار الخصم من السعر الأصلي؟ **H**

F AED 50.70　　**H** AED 33.80
G AED 44.50　　**J** AED 32.62

67. الإجابة الشبكية يتدرب أسامة لخوض سباق 20 كم. ويركض، 7 كم أيام الاثنين والثلاثاء والجمعة، و 12 كم يومي الأربعاء والسبت. بعد 6 أسابيع من التدريب، كم عدد المسافات التي تساوي ما يفترض أن يكون أسامة قد ركضه منها؟ **13.5**

68. SAT/ACT ما ميل الخط الذي تحدده المعادلة $2x + y = 5$؟ **B**

A $-\frac{5}{2}$　　**D** 2
B -2　　**E** $\frac{5}{2}$
C -1

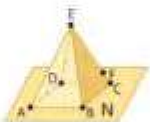
مراجعة شاملة

أوجد المسافة بين كل زوج من الخطوط المتوازية بمراعاة المعادلات المعطاة.

69. $x = -2$, $x = 5$ **7**　**70.** $y = -6$, $y = 1$ **7**　**71.** $y = 2x + 3$, $y = 2x - 7$ **$2\sqrt{5}$**　**72.** $y = x + 2$, $y = x - 4$ **$3\sqrt{2}$**

73. كرة القدم عند تخطيط ملعب التدريب على كرة القدم، رسم السيد بلال الخطوط الجانبية أولاً. ثم وضع علامات لزيادات بمقدار 10 أمتار على أحد خطوط الجانب. ثم وضع خطوطًا عمودية على الخطوط الجانبية عند كل علامة على مسافة 10 أمتار. لماذا يضمن هذا توازي خطوط الـ 10 أمتار؟
الخطان اللذان يقعان على مستوى واحد ومتعامدان على خط واحد يكونان متوازيين.

راجع الشكل الموجود على اليسار.



74. كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟ **5**

75. اذكر اسم تقاطع المستوى AEB مع المستوى N. **انظر الهامش.**

76. عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة. **E و F و C**

77. هل النقاط D، و E، و C، و B على مستوى واحد؟ **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات

حدد كل زوج من الزوايا باعتباره زوايا داخلية متبادلة، أو زوايا خارجية متبادلة، أو زوايا متناظرة، أو زوايا داخلية متتالية.

78. $\angle 3$ و $\angle 5$ **زوايا داخلية متبادلة.**

79. $\angle 4$ و $\angle 9$ **زوايا داخلية متتالية.**

80. $\angle 11$ و $\angle 13$ **زوايا داخلية متبادلة.**

81. $\angle 1$ و $\angle 11$ **زوايا خارجية متبادلة.**

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يكتبوا عن استخدام المعلومات التي تعلموها عن تصنيف المثلثات في إيجاد قياسات زوايا المثلث باستخدام الرموز >، <، أو =. على سبيل المثال، المثلث المتفرج به زاوية أكبر من 90 درجة.

المتابعة

استكشف الطلاب تصنيفات المثلثات.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يتم تصنيف المثلثات؟

الإجابة النموذجية: متساوي الأضلاع، متساوي الساقين، مختلف الأضلاع، أو طبقًا للزوايا: متساوي الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية، حاد الزاوية

إجابات إضافية

75. المستوى AEB يتقاطع مع المستوى N في $\overleftrightarrow{AB}$.

77. تقع النقاط D، C، و B في المستوى N، ولكن النقطة E لا تقع في المستوى N. وبالتالي، فإنها ليست في مستوى واحد.

714 | الدرس 1-12 | تصنيف المثلثات

1 التركيز

الهدف إيجاد العلاقات بين قياسات الزوايا الداخلية للمثلث.

المواد

- منقلة
- مقص

نصيحة للتدريس

وجه الطلاب لتسمية الزاوية المنفرجة B عندما يبدؤون العمل لأول مرة عبر **النشاط 1**. عليهم أيضًا تكرار **النشاط 1** مستخدمين المثلثات ذات الزوايا الحادة، والقائمة، والمثلث متساوي الأضلاع لتأكيد المفاهيم أكثر .

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات من 3 أو 4، متنوعة القدرات. ثم اطلب منهم إكمال النشاط 1 وتحليل النتيجتين 1 و 2.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الشيء العام المشترك بين كل المثلثات؟ جميع المثلثات بها ثلاثة أضلاع وثلاثة رؤوس.
- عندما تحول مثلثًا من حاد الزاوية إلى منفرج الزاوية، كيف يؤثر ذلك على قياس الزوايا الأخرى؟ سيقل قياس الزوايا الأخرى
- عندما تتغير قياس الزوايا، ما الشيء الذي يظل ثابتًا؟ مجموع قياس الزوايا

تدريب اطلب من الطلاب إكمال النشاط 2 ومثّل وحلّل النتائج 3-5.

الاستكشاف 12-2

مختبر الهندسة
زوايا المثلثات

في هذا النشاط العملي، ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث.

قم بتصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات، والطيّ الورق، والفرجار والمسطرة والخيط، والأدوات العاكسة والورق الشفاف والطي وبرامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك.

النشاط 1 الزوايا الداخلية لمثلث

الخطوة 1

ارسم عدة مثلثات مختلفة وقصها. واكتب على الرؤوس A و B و C.

الخطوة 2

مع كل مثلث، قم بطي الرأس B لأسفل بحيث يتوازى خط الطي مع $\overline{AC}$. أعد تسمية الرأس باسم B.

الخطوة 3

ثم قم بطي الرأسين A و C بحيث يقابلان الرأس B. أعد تسمية الرأسين باسم A و C.

تحليل النتائج

1. الزوايا A و B و C تُسمى الزوايا الداخلية للمثلث ABC. ما نوع الشكل التي تشكله هذه الزوايا عند ضمها معًا في الخطوة 3؟
زاوية مستقيمة أو خط مستقيم

2. **التخمين** مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمثلث.
يبلغ مجموع قياسات زوايا أي مثلث 180 درجة.

النشاط 2 الزوايا الخارجية لمثلث

الخطوة 1

افتح كل مثلث ناتج عن النشاط 1 وضع كلًا منها على قطعة ورق منفصلة. وقم بمد $\overline{AC}$ كما هو موضح.

الخطوة 2

من كل مثلث، اقطع الزاويتين $\angle A$ و $\angle B$.

الخطوة 3

قم بترتيب $\angle A$ و $\angle B$ بحيث تملآن الزاوية المجاورة للزاوية $\angle C$ كما هو موضح.

تمثيل النتائج وتحليلها

3. الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ تُسمى زاوية خارجية للمثلث ABC. **خمّن** العلاقة بين $\angle A$ و $\angle B$ والزاوية الخارجية عند C. **$m\angle A + m\angle B$ هو قياس الزاوية الخارجية عند C.**

4. كرر الخطوات في النشاط 2 مع الزاويتين الخارجيتين $\angle A$ و $\angle B$ في كل مثلث. **راجع عمل الطلاب.**

5. **قم بتخمين** قياس زاوية خارجية ومجموع قياسات الزوايا الداخلية غير المجاورة لها. **انظر الهامش.**

3 التقويم

التقويم التكويني

في التمارين 1-5، يحدد الطلاب قياسات زوايا المثلثات المستخدمة في هذا النشاط، ويوجدون العلاقات، ويضعون الفروض التي تقودهم إلى نظرية مجموع الزوايا ونظرية قياس الزاوية الخارجية.

من العملي إلى النظري

يستطيع الطلاب عمل المزيد من الاستكشافات والافتراضات عن العلاقات بين قياسات أضلاع وزوايا المثلث الصغير الناشئ عندما يتم طي الرأس B في النشاط 1. يجب أن يفهم الطلاب أنه على الرغم من اختلاف أطوال الأضلاع، فإن قياسات الزوايا متطابقة.

إجابة إضافية

5. قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

12-2 الدرس
زوايا المثلثات

السابق
- لقد صنفت المثلثات حسب أطوال أضلاعها أو قياسات زواياها.

الحالي
1. تطبيق نظرية مجموع زوايا المثلث.
2. تطبيق نظرية الزاوية الخارجية.

لماذا؟
- يرعى معهد ماساتشوستس للتقنية (MIT) المسابقة السنوية للتصميم 2.007 التي يصمم فيها الطلاب إنسانًا آليًا ويصنعونه.

من بين اختبارات حركات الإنسان الآلي برمجته على التحرك في مسار مثلث. سيظل مجموع قياسات الزوايا المحورية التي يجب أن يدور الإنسان الآلي عبرها ثابتًا دائمًا.

المفردات الجديدة
خط مساعد
auxiliary line
زاوية خارجية
exterior angle
زوايا داخلية غير مجاورة
remote interior angles
البرهان التسلسلي
flow proof
نتيجة
corollary

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 نظرية مجموع زوايا المثلث

تحدد نظرية مجموع زوايا المثلث العلاقة بين قياسات الزوايا الداخلية في أي مثلث.

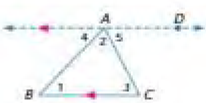
النظرية 12.1 نظرية مجموع زوايا المثلث

الشرح يبلغ مجموع قياسات زوايا المثلث 180.

مثال $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

تتطلب برهنة نظرية مجموع زوايا المثلث استخدام خط مساعد. **الخط المساعد** خط إضافي أو قطعة إضافية مرسومة في شكل للمساعدة في تحليل العلاقات الهندسية. كما يحدث مع أي عبارة في برهان، يجب عليك أن تعلل أي خواص لخط مساعد رسمته.

البرهان نظرية مجموع زوايا المثلث



المعطيات. $\triangle ABC$

المطلوب. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$

البرهان.

العبارات	المبررات
1. $\triangle ABC$	1. المعطيات
2. ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ عبر A بحيث يكون موازيًا لـ $\overline{BC}$	2. مسلمة التوازي
3. $\angle 4$ و $\angle BAD$ تشكلان زوجًا خطيًا.	3. تعريف الزوج الخطي
4. $\angle 4$ و $\angle BAD$ متكاملتان.	4. إذا كان 2 ∠ تشكلان زوجًا خطيًا، فهما متكاملتان.
5. $m\angle 4 + m\angle BAD = 180$	5. تعريف نظرية التكامل ∠
6. $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	6. مسلّمة جمع الزوايا
7. $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180$	7. التعويض
8. $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$	8. نظرية ∠ الداخلية المتبادلة
9. $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	9. تعريف ∠ ≅
10. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	10. التعويض

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-2 تصنيف المثلثات حسب أطوال الأضلاع وقياس الزوايا.

الدرس 12-2 تطبيق نظرية مجموع زوايا المثلث و نظرية الزاوية الخارجية.

بعد الدرس 12-2 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما القياس، بخلاف الزاوية المحورية، الذي يجب برمجته لكي يتمكن الروبوت من التحرك في مسار مثلث الشكل؟ المسافة التي سيقطعها الروبوت قبل الدوران حول المحور.
- جميع الزوايا المحورية المبينة في الصورة زوايا حادة. فهل يجب أن تكون كل زاوية محورية حادة؟ لا، فالزاوية المحورية يمكن أن تكون قائمة أو منفرجة.
- تنص الطريقة على أن مجموع قياسات الزوايا المحورية يجب أن يكون نفس المجموع. فما المجموع؟ 180؛ مجموع قياس الزوايا الداخلية للمثلث هو 180 دائمًا.

1 نظرية مجموع زوايا المثلث

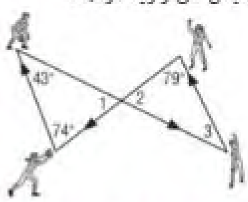
المثال 1 يوضح طريقة حساب قياس الزاوية المجهولة باستخدام النظريات التي سبق تعلمها ونظرية مجموع زوايا المثلث.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 كرة البيسبول يوضح الرسم التخطيطي مسار الكرة في تدريب لأربعة لاعبين. أوجد قياس كل زاوية مرقّمة.



$m\angle 1 = 63$, $m\angle 2 = 63$, $m\angle 3 = 38$

التركيز على محتوى الرياضيات

المعرفة السابقة في الوحدة 11، استخدم الطلاب العلاقات بين الزوايا لإيجاد قياس الزوايا. وفي هذا الدرس سيطبق الطلاب معرفتهم بالزوايا الرأسية، والزاويتان المتكاملتان، والزاويتان المتتامتان، إلى جانب نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية الزاوية الخارجية لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

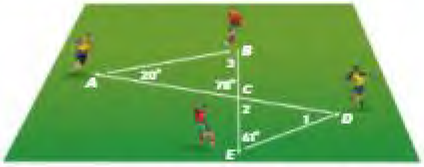
الربط بالحياة اليومية

تتضمن تدريب التمرير والتحرك في كرة القدم عدة جوانب أساسية للتمرير. تأخذ كل التمريرات في هذا التدريب شكل مثلث، وهو أساس كل حركات الكرة. كما أن اللاعبين ملزمون بالتحرك بمجرد تمرير الكرة.

يمكن استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لتحديد قياس الزاوية الثالثة لمثلث عند معرفة قياسي الزاويتين الأخريين.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة القدم يوضح الرسم التخطيطي مسار الكرة في تدريبٍ على التمرير لأربعة أصدقاء. أوجد قياس كل زاوية مرقّمة.



الفهم افحص المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي. أنت تعرف قياسي زاويتين في مثلث واحد وقياس زاوية واحدة فقط في مثلث آخر. أنت تعرف أيضًا أن $\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان.

التخطيط أوجد $m\angle 3$ باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لأن قياسي زاويتي $\angle ABC$ معلوم. استخدم نظرية الزوايا الرأسية لإيجاد $m\angle 2$. ثم ستكون لديك معلومات كافية لإيجاد قياس $\angle 1$ في $\triangle CDE$.

الحل

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20 + 78 = 180$ تعويض

$m\angle 3 + 98 = 180$ بسّط.

$m\angle 3 = 82$ اطرح 98 من كل طرف.

$\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان متطابقتان. إذًا $m\angle 2 = 78$.

استخدم $m\angle 2$ و $\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد قيمة $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78 + 61 = 180$ تعويض

$m\angle 1 + 139 = 180$ بسّط.

$m\angle 1 = 41$ اطرح 139 من كل طرف.

التحقق ينبغي أن يبلغ مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ 180.

$\triangle ABC$: $m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82 + 20 + 78 = 180$ ✓

$\triangle CDE$: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41 + 78 + 61 = 180$ ✓

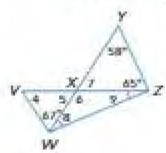
تمرين موجّه

أوجد قياسات جميع الزوايا المرقّمة.

1A.

$m\angle 1 = 123$, $m\angle 2 = 52$, $m\angle 3 = 29$

1B.



1B. $m\angle 4 = 56$, $m\angle 5 = 57$, $m\angle 6 = 123$, $m\angle 7 = 57$, $m\angle 8 = m\angle 9 = 28.5$

تصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي غالبًا ما يمكن حل المسائل المعقدة بسهولة أكبر إذا حللتها أولاً إلى أجزاء أسهل في التعامل معها. في المثال 1، قبل أن تتمكن من إيجاد قيمة $m\angle 1$، يجب أولاً أن تجد قيمة $m\angle 2$.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

جهاز العرض المتصل بالحاسوب استخدم برنامجًا من البرامج الهندسية لترسم عدة مثلثات. ثم أنشئ زوايا المثلثات. رتّب الزوايا معًا لتوضيح العلاقات بينها.

2 نظرية الزوايا الخارجية

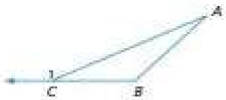
بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث في المثلث يمكن أن تتشكل **زاوية خارجية** من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع المجاور. يوجد لكل زاوية خارجية في المثلث **زاويتان داخليتان غير مجاورتين** أي أنهما لا تجاوران الزاوية الخارجية.

$\angle 4$ هي زاوية خارجية للمثلث $\triangle ABC$. وزاويتاها الداخليتان غير المجاورتين هما $\angle 1$ و $\angle 3$.

النظرية 12.2 نظرية الزوايا الخارجية

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

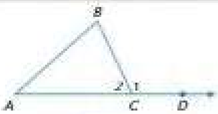
مثال $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



قراءة في الرياضيات
برهان المخطط التسلسلي يُسمى البرهان التسلسلي أيضًا برهان المخطط التسلسلي

يستخدم **البرهان التسلسلي** عبارات مكتوبة بمربعات وأسهم لإظهار التسلسل المنطقي للفرضية. السبب المبرر لكل عبارة مكتوب تحت المربع. يمكنك استخدام البرهان التسلسلي في إثبات نظرية الزوايا الخارجية.

البرهان نظرية الزوايا الخارجية



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

نصيحة دراسية
البراهين التسلسلية يمكن كتابة البراهين التسلسلية رأسيًا أو أفقيًا.

البرهان التسلسلي:

$\triangle ABC$
المعطيات
↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle 2$ و $\angle 1$ تشكلان زوجًا خطيًا.
تعريف الزوج الخطي
↓
$\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متكاملتان.
إذا شكلت $\angle 2$ زوجًا خطيًا فإنهما متكاملتان.
↓
$m\angle 2 + m\angle 1 = 180$
تحديد الزوايا المتكاملة

↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 1$
التعويض
↓
$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
خاصية الطرح في المعادلة

يمكن أيضًا استخدام نظرية الزوايا الخارجية في إيجاد القياسات الناقصة.

إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا الخارجية اطلب من طلابك أن يكتشفوا النظرية 12.2 بإعطائهم أمثلة متعددة بها الزوايا الداخلية غير المتجاورة معروفة القيمة. واطلب منهم إيجاد قياس الزاوية الخارجية.

التدريس المتمايز AL OL

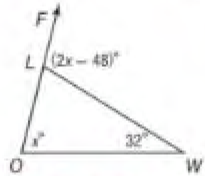
المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني أخبر طلابك أنّ كُلًا من نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية الزوايا الخارجية قائم على الفكرة التي تقول إنّ قياس الزاوية المستقيمة يساوي °180. ووضح لهم أنهم لو قاموا بتقطيع زوايا أيّ مثلثٍ ووضعوها بجوار بعضها، لحصلوا على خطٍ مستقيم. وهذا يوضح بصريًا السبب في أن مجموع قياس الزوايا الداخلية للمثلث يساوي 180 درجة.

2 نظرية الزاوية الخارجية

المثال 2 يوضح طريقة حساب قياس الزاوية المجهولة باستخدام النظريات التي سبق تعلمها ونظرية الزوايا الخارجية.
المثال 3 يستخدم نتيجة لإيجاد قياس زاوية.

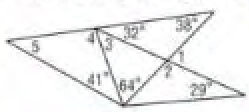
أمثلة إضافية

2 علم البستنة أوجد قياس $\angle FLW$ في حديقة الأزهار المُسوَّرة المُبيَّنة أمامك.



$m\angle FLW = 112$

3 أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.



$m\angle 1 = 70$ و $m\angle 2 = 110$
و $m\angle 3 = 46$ و $m\angle 4 = 102$
و $m\angle 5 = 37$

إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا المُرقَّمة قد لا تستطيع إيجاد قياس بعض الزوايا المرقمة بنفس ترتيب ترقيمها. شجّع طلابك لإيجاد قياس الزاوية المجهولة بترتيب منطقيّ ومساعد لهم.

انتبه!

نظرية مجموع زوايا المثلث
عند إيجاد القياسات المجهولة لمثلث ما، تحقق من صحة الحل عن طريق التأكد من أن مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزوايا الخارجية

اللياقة أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضعية المعروضة التي على شكل مثلث.

نظرية الزوايا الخارجية	$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$
تعويض	$x + 50 = 2x - 15$
بطرح x من كل طرف.	$50 = x - 15$
بجمع 15 إلى كل طرف.	$65 = x$

إذًا $m\angle JKL = 2(65) - 15$ أو 115.

تمرين موجَّه

2. ترتيب الخزانة تثبت بثبتة ذراع الرف الظاهر في جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$، وهي الزاوية التي يشكلها الذراع مع الجدار؟ **130**

مهنة من الحياة اليومية

المدرب الشخصي يعمل المدربون الشخصيون على توجيه الأفراد وتحفيزهم في نشاطات التمارين. يشرحون مدة تمارين ويساعدون العملاء على تحسين أساليب التدريب لديهم. ويجب أن يحصل المدربون الشخصيون على اعتماد في مجال اللياقة.

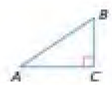
النتيجة نظرية لها برهان تأتي كنتيجة مباشرة لنظرية أخرى. كما هو الحال مع النظرية، يمكن استخدام النتيجة كسبب في برهان. تنتج اللوازم أدناه بشكل مباشر عن نظرية مجموع زوايا المثلث.

اللوازم نتائج مجموعة زوايا المثلث

12.1 الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية هما زاويتان متتامتان.

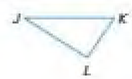
الاختصار: $\measuredangle$ الحادة في $\triangle$ قائم متتامة.

مثال: إذا كانت $\angle C$ زاوية قائمة، فإن $\angle A$ و $\angle B$ متتامتان.



12.2 يمكن أن توجد زاوية واحدة قائمة أو منفرجة بحد أقصى في المثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ زاوية قائمة أو منفرجة، فإن $\angle J$ و $\angle K$ يجب أن تكونا زاويتين حادتين.



ستبرهن النتيجتين 12.1 و 12.2 في التمرينين 34 و 35.

مثال 3 إيجاد قياسات الزوايا في المثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياسات جميع الزوايا المرقمة.

$\measuredangle$ الزوايا الحادة في $\triangle$ القائم متتامة.	$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90$
التعويض	$m\angle 1 + 52 = 90$
اطرح 52 من كل طرف.	$m\angle 1 = 38$

تمرين موجَّه

3A. $\angle 2$ **52**   **3B.** $\angle 3$ **38**   **3C.** $\angle 4$ **52**

نصيحة دراسية

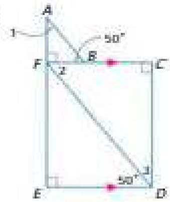
التحقق من مدى صحة الحل عندما تعمل على إيجاد قياس زاوية أو أكثر في مثلث، تحقق دائمًا للتأكد من أن مجموع قياسات الزوايا يبلغ 180.

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد قياسات جميع الزوايا المرقمة.

1. 

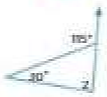
$m\angle 1 = 61°$

2. 

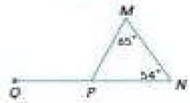
$m\angle 1 = 40°$; $m\angle 2 = 42°$; $m\angle 3 = 48°$

مثال 2 أوجد قياس كل مما يلي.

3. $m\angle 2$ 85°



4. $m\angle MPQ$ 119



المقعد تشكل دعامة مقعد الاسترخاء هذا مثلثًا مع بقية هيكل المقعد كما هو ظاهر. إذا علمت أن $m\angle 1 = 105$ و $m\angle 3 = 48$، فأوجد كل قياس.

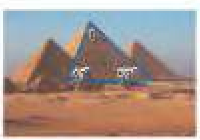
5. $m\angle 4$ 57°
6. $m\angle 6$ 132°
7. $m\angle 2$ 75°
8. $m\angle 5$ 123

مثال 3 **الانتظام** أوجد قياس كل مما يلي.

9. $m\angle 1$ 58°
10. $m\angle 3$ 20°
11. $m\angle 2$ 148°

التمرين وحل المسائل

مثال 1 أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

12. 
$m\angle 1 = 60°$

13. 

$m\angle 1 = 30°$

14. 

14. $m\angle 1 = m\angle 2 = 39°$; $m\angle 3 = 137°$

15. 

15. $m\angle 1 = m\angle 2 = 55°$; $m\angle 3 = 107°$

3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

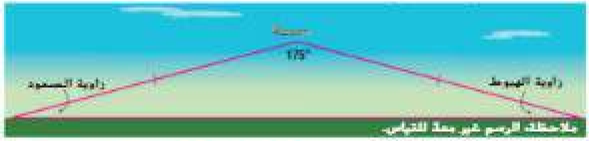
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12-29, 46-48, 50-64	52-55 ، فردي 13-29	46-48, 50, 51, 56-64 ، زوجي 12-28
OL أساسي	12-37, 38-48, 50-64	12-29, 52-55	30-48, 50, 51, 56-64
BL متقدم	30-62		

إجابات إضافية

21. $x = 51$; $m\angle CAB = 102°$; $m\angle ABC = 41°$

22. $x = 29$; $m\angle J = 31°$; $m\angle K = 69°$

16. **الطائرات** يمكن تمثيل مسار طائرة باستخدام ضلعي مثلث كما هو ظاهر. المسافة التي تقطعها الطائرة أثناء الصعود تساوي المسافة التي تقطعها أثناء الهبوط.

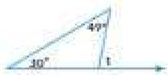


a. ضع تصنيفًا للنموذج باستخدام أضلاعه وزواياه. **مثلث منفرج متساوي الساقين**

b. زاويتا الصعود والهبوط متطابقتان. أوجد قياسيهما. **الزاويتان $2\frac{1}{2}°$ أو $2.5°$**

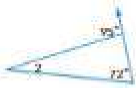
مثال 2 **أوجد قياس كل مما يلي.**

17. $m\angle 1$ **79°**

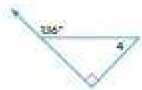


18. $m\angle 3$ **66°**

19. $m\angle 2$ **23°**



20. $m\angle 4$ **46°**



21. $m\angle ABC$ **انظر الهامش**

22. $m\angle JKL$ **انظر الهامش**

مثال 3 23. **منحدر الكرسي المتحرك** افترض أن منحدر الكرسي المتحرك الظاهر يشكل زاوية تبلغ 12° مع الأرض. فما قياس الزاوية التي يشكلها المنحدر مع باب السيارة؟ **60°**

الانتظام **أوجد قياس كل مما يلي.**

24. $m\angle 1$ **60°**
25. $m\angle 2$ **35°**
26. $m\angle 3$ **31°**
27. $m\angle 4$ **57°**
28. $m\angle 5$ **57°**
29. $m\angle 6$ **33°**

721

الجبر أوجد قيمة x. ثم أوجد قياس كل زاوية.

30. 

$x = 30$. الزوايا هي $30°$ و$60°$ و$90°$.

31. 

$x = 18$. الزاويتان هما $18°$ و$72°$.

32. 

$x = 20$. الزاويتان هما $124°$ و$87°$.

33. **البستنة** قرر أحد مهندسي المناظر الطبيعية ضم حديقة زراعية مثلثة الشكل إلى حديقة. الشكل هو مثلث متساوي الساقين زاويته الرأسية ربع زاوية القاعدة. ماذا ينبغي أن يكون قياس كل زاوية؟
كل زاوية قاعدة $80°$ والزاوية الرأسية $20°$.

البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين. 34-35. انظر الهامش.

34. البرهان التسلسلي للنتيجة 12.1

35. فقرة برهان للنتيجة 12.2

الانتظام أوجد قياس جميع الزوايا المرقّمة.

36. 

$m\angle1 = m\angle3 = 62°$; $m\angle2 = 85°$; $m\angle4 = 5°$

37. 

$m\angle1 = 62.5°$; $m\angle2 = 20°$; $m\angle3 = 97.5°$; $m\angle4 = 40°$; $m\angle5 = 105°$; $m\angle6 = 42.5°$; $m\angle7 = 75°$; $m\angle8 = 62.5°$

38. **الجبر** صنّف المثلث الموضح حسب زواياه. اشرح تبريرك.

38. الزوايا هي $29°$ و$48°$ و$103°$. هذا مثلث منفرج الزاوية.

39. **الجبر** يقل قياس الزاوية الحادة الأكبر في المثلث القائم الزاوية بمقدار 12 درجة عن ناتج ضرب أربعة في قياس الزاوية الحادة الأصغر. أوجد قياس كل زاوية. الزاويتان هما $21°$ و$69°$.

40. حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة فقدم مثالاً مضاداً. وإذا كانت صحيحة، فاذكر فرضية تدعم استنتاجك. انظر الهامش.

إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فالمثلث حاد الزاوية.

41. **الجبر** في $\triangle XYZ$، $m\angle X = 152$ و $m\angle Z = z$ و $m\angle Y = y$. اكتب متباينة لوصف القياسات المحتملة للزاوية $\angle Z$. اشرح تبريرك. انظر الهامش.

42. **السيارات** راجع الصورة الموجودة على اليسار.

a. أوجد $m\angle1$ و $m\angle2$. $m\angle1 = 135°$; $m\angle2 = 45°$

b. إذا كان دعم الغطاء أطول من الداعم المعروض، فما التغير الذي سيحدث في $m\angle1$؟ اشرح. انظر الهامش.

c. إذا كان دعم الغطاء أطول من الداعم المعروض، فما التغير الذي سيحدث في $m\angle2$؟ اشرح. انظر الهامش.

إجابات إضافية

34. **المعطيات:** $\triangle RST$

$\angle R$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle S$ و $\angle T$ زاويتان متتامتان.

البرهان:

$\angle R$ هي زاوية قائمة. (المعطيات)

$m\angle R = 90$ (تعريف الزاوية القائمة)

$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180$ (نظرية مجموع الزوايا)

$90 + m\angle S + m\angle T = 180$ (التعويض)

$m\angle S + m\angle T = 90$ (خاصية الطرح)

$\angle S$ و $\angle T$ زاويتان متتامتان. (تعريف الزوايا المتتامة)

35. **المعطيات:** $\triangle MNO$

$\angle M$ زاوية قائمة.

المطلوب: يمكن أن توجد زاوية واحدة قائمة بحد أقصى في المثلث.

البرهان: في $\triangle MNO$، M زاوية قائمة. $m\angle M + m\angle N + m\angle O = 180$. إذا كانت $m\angle M = 90$، $m\angle N + \angle O = 90$. N زاوية قائمة، إذًا $m\angle O = 0$. ولكنّ هذا مستحيلٌ. وإذًا لا يمكن للمثلث أن يوجد به زاويتان قائمتان.

المعطيات: $\triangle PQR$

$\angle P$ زاوية منفرجة.

المطلوب: يمكن أن يوجد زاوية واحدة منفرجة بحد أقصى في المثلث.

البرهان: في $\angle PQR$، $\angle P$ زاوية منفرجة. إذًا $m\angle P > 90$. $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 180$. إذًا لا بد أن $m\angle Q + m\angle R < 90$. إذًا $\angle Q$ و $\angle R$ لا بد أن يكون كل منهما زاوية حادة.

40. هذه عبارة خاطئة. والمثلث يجب أن يكون مثلثًا منفرج الزاوية.

41. $z < 28$؛ الإجابة النموذجية: بما أن مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180 و $m\angle X = 152$، $152 + m\angle Y + m\angle Z = 180$. إذًا $m\angle Y + m\angle Z = 28$. إذا كان $m\angle Y = 0$، إذًا $m\angle Z = 28$. لكن قياس الزاوية يجب أن يكون أكبر من 0. إذًا $m\angle Z$ لا بد وأن يكون أقل من 28. إذًا $z < 28$.

التدريس المتمايز OL BL

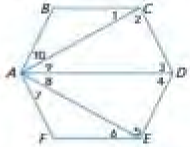
التوسع اطلب من الطلا ب اختيار رأس زاوية في شكل سداسي واطلب منهم رسم خطوط مستقيمة داخلية من هذا الرأس إلى رؤوس أخرى ليس لها خطوط مستقيمة موجودة بالفعل. اسألهم عن عدد المثلثات الناتجة. كم عدد المثلثات الناتجة عن استخدام شكل سباعي؟ اكتب المعادلة الجبرية التي تصلح مع n أضلاع و t مثلثات.
$4; 5; t = n - 2$

البرهان اكتب نوع البرهان المحدد.

43. برهان من عمودين **انظر الهامش.**

المعطيات. $ABCDEF$ شكل خماسي الأضلاع.

المطلوب. $m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDE + m\angle DEF + m\angle F + m\angle FAB = 720$



44. برهان حرّ **انظر الهامش.**

المعطيات. الصورة على اليسار

المطلوب. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 5 + m\angle 6$

45. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على مجموع قياسات الزوايا الخارجية في مثلث. **a–e انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

a. **هندسيًا** ارسم خمسة مثلثات مختلفة مع تمديد الأضلاع وتسمية الزوايا كما يظهر. احرص على إدراج مثلث منفرج الزاوية ومثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا واحدًا من كل نوع على الأقل.

b. **جدوليًا** قس الزوايا الخارجية في كل مثلث، وسجل قياسات كل مثلث ومجموع هذه القياسات في جدول.

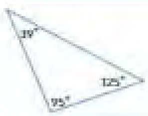
c. **لفظيًا** قم بتخمين مجموع الزوايا الخارجية في مثلث، واكتب تخمينك بكلمات.

d. **جبريًا** ضع صياغة جبرية للتخمين الذي كتبته في الجزء c.

e. **تحليليًا** اكتب برهانًا حرًا لتخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. **تحليل الخطأ** قاس بدر زوايا المثلث وأسماها كما هو ظاهر. ويقول بلال إن قياسًا واحدًا على الأقل غير صحيح. اشرح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف عرف بلال ذلك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



47. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ستتوصل إلى القياسات الناقصة في الشكل الظاهر. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

48. **تحدٍ** أوجد قيم x و y في الشكل أدناه. **$x = 17, y = 13$**

49. **التبرير** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة للزاوية $\angle A$ زاوية منفرجة، فهل $\triangle ABC$ حاد الزاوية أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم لا يمكن تحديد تصنيفه؟ اشرح تبريرك. **لا يمكن تحديد التصنيف.**

50. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على زوايا داخلية منفرجة وحادة وقائمة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

التمثيلات المتعددة

في التمرين 45، يستكشف الطلاب مجموع قياس الزوايا الخارجية للمثلث مستخدمين الرسومات الهندسية، ومنضدة، ووصفًا لفظيًا، وإثبات حرّ.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 46، يستطيع بلال أن يبرّر ادعاءه بتوضيح أنّ مجموع الزوايا الداخلية للمثلث يساوي $37 + 93 + 130 = 260$، وهذا لا يمكن أن يكون صحيحًا لأن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث يساوي 180. كما أنّ المثلث لا يمكن أن يوجد به أكثر من زاوية منفرجة واحدة. ولذلك، لا يمكن أنْ يوجدَ بالمثلث زاويتان يصل قياسهما إلى °93 و °103.

إجابات إضافية

42b. الإجابة النموذجية: قياس $\angle 1$ سيصبح أصغر لو كانت الدعامة أطول لأنّ الغطاء سيكون أبعد من ساق المثلث الموجودة على طول ممتص صدمات السيارة.

42c. الإجابة النموذجية: قياس $\angle 2$ ستصبح أكبر إذا كانت الدعامة أطول لأن $\angle 1$ ستصبح أصغر وهما عبارة عن زوج خطي.

43. البرهان: العبارات (المبررات)

1. $ABCDEF$ شكل خماسي الأضلاع. (معطيات)

2. $m\angle B + m\angle 1 + m\angle 10 = 180$
$m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 9 = 180$
$m\angle 8 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180$
$m\angle F + m\angle 6 + m\angle 7 = 180$
(نظرية مجموع زوايا المثلث)

3. $m\angle B + m\angle 1 + m\angle 10 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 9 + m\angle 8 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle F + m\angle 6 + m\angle 7 = 720$ (خاصية الجمع)

4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle BCD$
$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle CDE$
$m\angle 5 + m\angle 6 = m\angle DEF$
$m\angle 7 + m\angle 8 + m\angle 9 + m\angle 10 = m\angle FAB$ (جمع الزوايا)

5. $m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDE + m\angle DEF + m\angle F + m\angle FAB = 720$ (التعويض)

إرشاد للمعلمين الجدد

قياس الزوايا ذكّر الطلاب بأنه عند قياس الزوايا، يجب عليهم أولاً على أن يضعوا الزاوية 0 على جانبي المنقلة جانب الزاوية. إذا كانت الزاوية 0 على المقياس الخارجي، فسوف يحتاجون إلى قراءة العدد الموجود على المقياس الخارجي حيث يتقاطع الجانب الآخر من الزاوية مع المنقلة.

44. طبقًا لنظرية مجموع زوايا المثلث $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$ و $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180$. تكون هاتان الزاويتان مساويتين لبعضهما البعض $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6$. ونظرًا لتطابق الزوايا الرأسية، $\angle 3 \cong \angle 4$. طبقًا لتعريف الزوايا المتطابقة، $m\angle 3 = m\angle 4$. باستخدام خاصية الطرح، $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 5 + m\angle 6$.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات ارسم مثلثًا حادًا بزوايا قياسها 44 و 56. ارسم مثلثًا منفرجًا بزوايا قياسها 110 و 40 درجة. ارسم مثلثًا متساوي الساقَين بزاويتين قياس كلٍّ منهما 75 درجة. على الطلاب استخدام النظريات في هذا الدرس لإيجاد قياس الزوايا المجهولة في كل مثلث ثم كتابة إجاباتهم.

تدريب على الاختبار المعياري

51. **الاحتمال** يملك السيد جاسم متجر فيديو ويريد إجراء استبيان لعملائه للتوصل إلى نوع الأفلام التي ينبغي أن يشتريها. أي من العبارات التالية سيمثل الطريقة الأفضل لكي يحصل السيد جاسم على نتائج دقيقة للاستبيان؟ D

A إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون من الساعة 9 مساءً إلى الساعة 10 مساءً
B إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون في الإجازة الأسبوعية
C إجراء استبيان للعملاء الذكور
D إجراء استبيان في أوقات مختلفة من الأسبوع واليوم

52. **الإجابة القصيرة** يبلغ قياس زاويتين في مثلث $35°$ و $80°$. أوجد قيم قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.
$100°, 115°, 145°$

53. **الجبر** ما المعادلة التي تعادل $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟ G

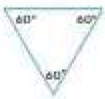
F $2x - 6 = 8$
G $22x - 6 = 8x$
H $-8x - 6 = 8x$
J $22x + 6 = 8x$

54. **SAT/ACT** يملك جمال 4 ألعاب فيديو أكثر من حارب ونصف ما يملكه حسام. إذا كان مجموع ما معهم يبلغ 24 لعبة فيديو، فكم عدد ما يملكه حسام؟ E

A 7
B 9
C 12
D 13
E 14

مراجعة شاملة

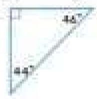
ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

55.


متساوي الزوايا

56.


منفرج الزاوية

57.


قائم الزاوية

هندسة الإحداثيات أوجد المسافة من P إلى ℓ.

58. المستقيم ℓ يحتوي على النقطتين $(0, -2)$ و $(1, 3)$. والنقطة P لها إحداثيات $(-4, 4)$. $\sqrt{26}$ وحدة

59. المستقيم ℓ يحتوي على النقطتين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$. والنقطة P لها إحداثيات $(4, 3)$. 3 وحدات

مراجعة المهارات

اذكر الخاصية التي تعلل كل عبارة.

60. إذا كانت $\frac{x}{2} = 7$، فإن $x = 14$. خاصية الضرب

61. إذا كانت $x = 5$ و $b = 5$، فإن $x = b$. خاصية التعويض

62. إذا كانت $XY - AB = WZ - AB$، فإن $XY = WZ$. خاصية الجمع

63. إذا كانت $m\angle A = m\angle B$ و $m\angle A = m\angle C$، $m\angle B = m\angle C$. خاصية التعدي

64. إذا كانت $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$. خاصية التعويض

724 | الدرس 2-12 | زوايا المثلثات

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-3 تحديد واستخدام الزوايا المتطابقة.

الدرس 12-3 تعيين واستخدام أجزاء المثلثات المتطابقة. إثبات تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

بعد الدرس 12-3 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- لماذا يجب أن يتطابق شكل اللوحة وحجمها تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها؟ إذا لم تتطابق اللوحة، فقد لا يتم تثبيتها بطريقة صحيحة، أو قد لا يتم تثبيتها على الإطلاق.
- ما الأجزاء الأخرى من اللوحة التي يجب أن تتطابق تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها؟ فتحات المقابض والأزرار يجب أن تكون بنفس شكل وحجم المقابض والأزرار الفعلية.
- ما نتيجة عدم تثبيت اللوحة بطريقة صحيحة؟ لن يكون الجهاز مؤمّنًا تأمينًا جيدًا ضد السرقة.

الدرس 12-3 المثلثات المتطابقة

السابق	الحالي	لماذا؟
• تعرفت على المثلثات المتطابقة واستخدمتها.	1 ذكر الأجزاء المتناظرة في المضلعات المتطابقة واستخدامها. 2 البرهنة على تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.	• تصنع شركات كثيرة أجهزة الاستريو في السيارة بواجهات قابلة للفك كنوع من التأمين ضد السرقة. يجب أن يتطابق شكل الواجهة وحجمها تمامًا مع المساحة التي يتم تركيبها فيها لكي يتم تركيبها في لوحة عدادات السيارة بالشكل الملائم.

المفردات الجديدة

تطابق congruent
مضلعات متطابقة congruent polygons
أجزاء متناظرة corresponding parts

استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتوضيح أن المثلثين يكونان متطابقين إذا وفقط إذا كانت أزواج الأضلاع المتناظرة متطابقة وأزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.

استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

مراعاة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 التطابق والأجزاء المتناظرة

إذا كان هناك شكلان هندسيان بنفس الشكل والحجم، فإنهما **متطابقان**.

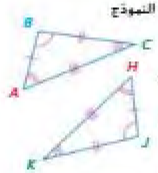
متطابقة	غير متطابقة
	
على الرغم من أن الأشكال 1 و 2 و 3 في أوضاع مختلفة، إلا أن لها نفس الشكل والحجم.	الشكلان 4 و 5 لهما الشكل نفسه تمامًا لكن ليس الحجم نفسه. والشكلان 5 و 6 لهما الحجم نفسه ولكن ليس الشكل نفسه.

في **المضلعين المتطابقين** ، تتطابق جميع أجزاء أحد المضلعين مع **الأجزاء المتناظرة** أو الأجزاء المقابلة في المضلع الآخر. وتشمل هذه الأجزاء المتناظرة الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

المفهوم الأساسي تعريف المضلعات المتطابقة

الشرح يتطابق المضلعان فقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة.

النموذج



مثال

الزوايا المتناظرة

$\angle C \cong \angle K$ $\angle B \cong \angle J$ $\angle A \cong \angle H$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AC} \cong \overline{HK}$ $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\overline{AB} \cong \overline{HJ}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

توجد عبارات تطابق أخرى بالنسبة للمثلثات أعلاه. إن عبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تسرد الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

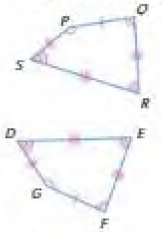
$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

ليست عبارة صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

مثال 1 تحديد الأجزاء المتطابقة المتناظرة

وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب جملة التطابق.



الزوايا: $\angle P \cong \angle G$, $\angle Q \cong \angle F$, $\angle R \cong \angle E$, $\angle S \cong \angle D$

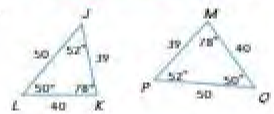
الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}$, $\overline{QR} \cong \overline{FE}$, $\overline{RS} \cong \overline{ED}$, $\overline{SP} \cong \overline{DG}$

جميع الأجزاء المتناظرة في المضلعين متطابقة. ولذلك، المضلع PQRS ≅ المضلع GFED.

تمرين موجّه **1A-1B. انظر الهامش.**

1A.

1B.

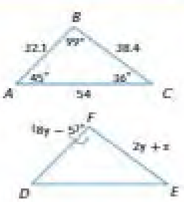


تعني عبارة "فقط إذا" في تعريف المضلع المتطابق أن كلاً من الشرط وعكسه صحيحان. وعلى هذا، فإذا كان المضلعان متطابقين، فإن أجزاءهما المتناظرة تكون متطابقة. بالنسبة للمثلثات، نقول إن الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة.

> **الربط بتاريخ الرياضيات**
> **يوهان كارل فريدريش غاوس**
> (1777–1855) ابتكر غاوس رمز التطابق ليوضح أن طرفي المعادلة متطابقان وإن لم يكونا متساويين. وتوصل إلى الكثير من التطورات في الرياضيات والفيزياء، بما في ذلك برهان للنظرية الأساسية في الجبر.
> **المصدر:** The Granger Collection, New York

مثال 2 استخدام الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين

في الرسم التخطيطي، $\triangle ABC \cong \triangle DFE$. أوجد قيمة x و y.



$\angle F \cong \angle B$	CTCPC
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	تعويض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى كل طرف.
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8.
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	CTCPC
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	تعويض
$2(13) + x = 38.4$	تعويض
$26 + x = 38.4$	بسّط.
$x = 12.4$	اطرح 26 من كل طرف.

> **نصيحة دراسية**
> **استخدام عبارة تطابق** يمكنك استخدام عبارة تطابق لمساعدتك على تحديد الأضلاع المتناظرة بشكل صحيح.
> $\triangle ABC \cong \triangle DFE$
> $\overline{BC} \cong \overline{FE}$

تمرين موجّه

2. في الرسم التخطيطي، $\triangle RSV \cong \triangle TVS$. أوجد قيمة x و y. **$x = 12$; $y = 12.5$**

1 التطابق والأجزاء المتناظرة

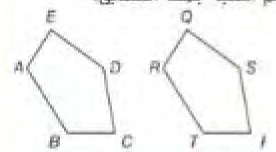
المثال 1 يوضح أنه إذا كانت الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقة، فالمثلثان متطابقان. **المثال 2** يستخدم التطابق في إيجاد القيم المجهولة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

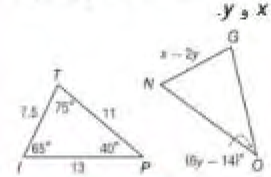
1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد كل الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب جملة التطابق.



$\angle A \cong \angle R$, $\angle B \cong \angle T$, $\angle C \cong \angle P$, $\angle D \cong \angle S$, $\angle E \cong \angle Q$
$\overline{AB} \cong \overline{RT}$, $\overline{BC} \cong \overline{TP}$, $\overline{CD} \cong \overline{PS}$, $\overline{DE} \cong \overline{SQ}$, $\overline{EA} \cong \overline{QR}$

كل الأجزاء المتناظرة في المضلعين متطابقة. ولذلك، $ABCDE \cong RTPSQ$.

2 في الرسم التخطيطي، $\triangle ITP \cong \triangle NGO$. أوجد قيمة x و y.



$x = 25.5$, $y = 9$

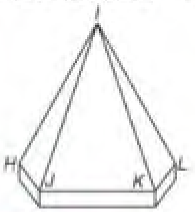
التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي / الموسيقي اشرح للطلاب أن التطابق من الممكن أن يلفت السمع والبصر. وضّح لهم أنهم إذا استخدموا الضربات الإيقاعية لوضع نموذج لمثلثين متساويي الأضلاع ومتطابقين، فيمكنهم استخدام ثلاث ضربات بالطبلة على فترات زمنية متساوية في المرة الأولى ثم تكرار نفس الإيقاع في المرة الثانية. ومن الممكن أن يتكون إيقاع المثلث متساوي الساقين من ضربتين سريعتين وواحدة بطيئة أو العكس. أخبر الطلاب أن الإيقاع المتطابق في الموسيقى يُستخدم في الأغاني. ومن الأمثلة المشهورة أغنية "Louie, Louie".

2 إثبات تطابق المثلثات

أمثلة إضافية

3 الهندسة المعمارية مخطط لسطح برج مكوّن من مثلثات متطابقة تتقارب كلُّها عند نقطة في الأعلى. إذا كان $\angle J \cong \angle K$ و $m\angle J = 72$، فأوجد $m\angle JIH$.



$m\angle JIH = 36$

4 اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{OP}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle PON$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{OP}$ (معطيات)
2. $\angle LNM \cong \angle PNO$ (نظرية ∡ زاوية الرأس)
3. $\angle M \cong \angle O$ (نظرية ∡ الزاوية الثالثة)
4. $\triangle LMN \cong \triangle PON$ (CPCTC المبرهنة)

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

1A. $\angle A \cong \angle W$, $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$, $\angle D \cong \angle Z$; $\overline{AB} \cong \overline{WX}$, $\overline{BC} \cong \overline{XY}$, $\overline{CD} \cong \overline{YZ}$, $\overline{DA} \cong \overline{ZW}$; المضلع $ABCD \cong WXYZ$ المضلع

1B. $\angle J \cong \angle P$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle L \cong \angle Q$; $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{KL} \cong \overline{MQ}$, $\overline{LJ} \cong \overline{QP}$, $\triangle JKL \cong \triangle PMQ$

2 البرهنة على تطابق المثلثات

تؤدي نظرية مجموع زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2-4 إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

النظرية 12.3 نظرية الزوايا الثالثة

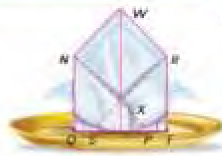
الشرح: إذا كانت زاويتان في مثلث متطابقتين مع زاويتين في مثلث آخر، فستتحدد تطابق الزاوية الثالثة في المثلثين.

مثال: إذا كانت $\angle C \cong \angle K$ و $\angle B \cong \angle J$، إذا $\angle A \cong \angle L$.

ستبرهن على هذه النظرية في التمرين 21.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزوايا الثالثة

تنظيم حفل قرر مخططو المائدة الكبرى طي مناديل المائدة على شكل طي الجيب المثلث كي يتمكنوا من وضع هدية صغيرة في الجيب. إذا علمت أن $\angle NPQ \cong \angle RST$ و $m\angle NPQ = 40$، فأوجد $m\angle SRT$.



$\angle NPQ \cong \angle RST$، وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، $\angle NQP \cong \angle RTS$ وحسب نظرية الزاوية الثالثة $\angle QNP \cong \angle SRT$ ووفقًا لتعريف التطابق $m\angle QNP = m\angle TRS$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90$	الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان.
$m\angle QNP + 40 = 90$	التعويض
$m\angle QNP = 50$	بطرح 40 من كل طرف.

بالتعويض، $m\angle SRT = m\angle QNP$ أو 50.

تمرين موجّه

3. في الرسم التخطيطي أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$ و $\overline{WX}$ تنصف $\angle NXR$ و $m\angle WNX = 88$ و $m\angle NXW = 49$، فأوجد $m\angle NWR$. اشرح تبريرك.

الربط بالحياة اليومية

استخدام بعض المهارات الأساسية في طي المناديل يمكن أن يضيف لمسة أنيقة على أي حفل. الكثير من الطيات تستخدم المثلثات.

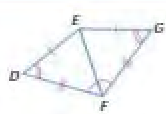
3. 86. بما أن $\angle WNX \cong \angle WRX$ و $\angle NXW \cong \angle RWX$ و $\angle NWX \cong \angle RWX$. $\angle NWX = 180 - 88 - 49 = 43°$، إذًا $\angle NWR$ تساوي $2 \times 43°$ أو 86.

مثال 4 البرهنة على أن الزاويتين متطابقتان

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	1. المعطيات
2. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2. خاصية الانعكاس في التطابق
3. $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$	3. المعطى
4. $\angle DEF \cong \angle GEF$	4. نظرية الزوايا الثالثة
5. $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5. تعريف المضلعات المتطابقة

نصيحة دراسية

خاصية الانعكاس عندما يشترك مثلثان في ضلع، استخدم خاصية انعكاس التطابق لإثبات أن الضلع المشترك متطابق مع نفسه.

727

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من طلابك أن يرسموا $\triangle ABC$ به الرؤوس $A(-8, 8)$ و $B(-2, 5)$ و $C(-8, 2)$. بعد ذلك، اطلب منهم أن يرسموا $\triangle PTS$ الذي رؤوسه $P(8, 8)$ و $T(2, 5)$ و $S(8, 2)$. اسألهم كيف يمكنهم التحقق من تطابق الأضلاع المتناظرة في المثلثين. بالإضافة إلى ذلك، يسّر لهم النقاش حول ما إذا كانت الزوايا المتناظرة في $\triangle ABC$ و $\triangle PTS$ متطابقة. يمكن للطلاب استخدام قانون المسافة لإثبات أن الأضلاع المتناظرة متطابقة. قد تحتوي المناقشات الأخرى الخاصة بالزوايا على اقتراحات بأن المثلثين متماثلان تمامًا لأن أحدهما هو انعكاس للآخر، أو أنّ أطوال الأضلاع المتساوية تتطلب زوايا متساوية.

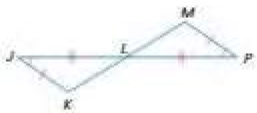
4.
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\angle J \cong \angle P$، $\overline{JK} \cong \overline{PM}$، $\overline{JL} \cong \overline{PL}$، و L تنصف $\overline{KM}$. (معطى)
2. $\angle JLK \cong \angle PLM$ (الزوايا المتقابلة بالرأس ∠ تكون ≅)
3. $\overline{LK} \cong \overline{LM}$ (تعريف منصف القطعة)
4. $\angle K \cong \angle M$ (نظرية الزوايا الثالثة)
5. $\triangle JLK \cong \triangle PLM$ (CPCTC)

تمرين موجّه

4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$، $\overline{JK} \cong \overline{PM}$، $\overline{JL} \cong \overline{PL}$، و L تنصف $\overline{KM}$.

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$



مثل تطابق القطع والزوايا، تطابق المثلثات يتمتع بخواص الانعكاس والتناظر والتعدي.

النظرية 12.4 خصائص تطابق المثلث

خاصية انعكاس تطابق المثلث

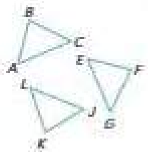
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية تناظر تطابق المثلث

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$، فإن $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصية تعدي تطابق المثلث

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ و $\triangle EFG \cong \triangle JKL$، فإن $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.



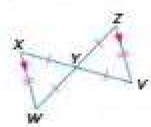
1. $\overline{CG} \cong \overline{DG}$; $\overline{BC} \cong \overline{ED}$; $\overline{AB} \cong \overline{FE}$; $\overline{AG} \cong \overline{FG}$ $\angle CGA \cong \angle DGF$; $\angle C \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle A \cong \angle F$ المضلع $ABCG \cong$ المضلع $FEDG$
2. $\triangle XYW \cong \triangle VYZ$; $\overline{WY} \cong \overline{ZY}$; $\overline{XY} \cong \overline{VY}$; $\overline{XW} \cong \overline{VZ}$; $\angle ZYV \cong \angle WYX$; $\angle V \cong \angle X$; $\angle Z \cong \angle W$

التحقق من فهمك

مثال 1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.

1.

2.



مثال 2 في الشكل، $\triangle LMN \cong \triangle QRS$.

3. أوجد x. **22**

4. أوجد y. **46**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض مثلثين متطابقين على اللوحة. اسحب واحدًا منهما لتوضح لطلابك أنه يتناسب تمامًا أعلى المثلث الآخر. استخدم هذه الوسيلة المرئية لتوضح أي أجزاء المثلث تتطابق مع بعضها البعض.

انتبه!

التطابق مقابل التشابه. لإثبات أن مضلعًا متطابقًا، فمن الضروري أن تبين أنّ كل الأضلاع والزوايا متساوية القياس. إذا تبين أن الزوايا فقط هي المتطابقة، فهذا يثبت فقط أنّ المضلعات متشابهة.

إرشاد للمعلمين الجدد

التطابق البصري يستطيع الطلاب استخدام العلامات لمساعدتهم في تنظيم الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة بصريًا.

التركيز على محتوى الرياضيات

مفاهيم خاطئة شائعة وضّح للطلاب أن وضع العلامات على الأشكال لا يتم بصورة دائمة وأنّ الأمر متروكٌ لهم ليستخدموا معرفتهم بالمفاهيم الهندسية لإثبات التطابق. أكّد على أهمية استخدام المعطيات فقط ولا يتم استخدام أي فرضيات يفترضها الطلاب بناءً على المظهر الخارجي للشكلين المرسومَين.

3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

5. $x = 17.5$ CPCTC

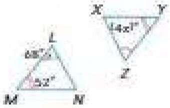
6. $x = 15$

7. لأن Y هي نقطة المنتصف في $\overline{XV}$ و $\overline{WZ}$ إذاً $\overline{WY} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \cong \overline{VY}$. هناك خطان متوازيان يقطعهما خط مستعرض لهما زوايا داخلية متبادلة متطابقة. ومن ثم، $\angle W \cong \angle Z$، $\angle X \cong \angle V$ لأن الزوايا $\angle XYW \cong \angle VYZ$ الرأسية متطابقة. بما أنّ جميع الزوايا والأضلاع المتناظرة متطابقة، فإن $\triangle WYX \cong \triangle ZYV$.

مثال 3 **الانتظام** أوجد x. اشرح تبريرك. **5-6. انظر الهامش.**

5.

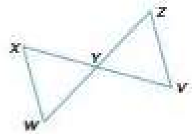
6.



مثال 4 **7. البرهان** اكتب برهاناً حراً.

المعطيات: Y هي نقطة منتصف $\overline{XV}$ و $\overline{WZ}$.
$\overline{WX} \parallel \overline{ZV}$; $\overline{WX} \cong \overline{ZV}$

المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle ZYV$ **انظر الهامش.**

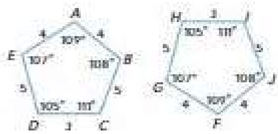


التمرين وحل المسائل

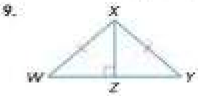
مثال 1 وضّح أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

8. $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle J$, $\angle C \cong \angle I$, $\angle D \cong \angle H$, $\angle E \cong \angle G$, $\overline{AB} \cong \overline{FJ}$, $\overline{BC} \cong \overline{JI}$, $\overline{CD} \cong \overline{IH}$, $\overline{DE} \cong \overline{HG}$, $\overline{AE} \cong \overline{FG}$; المضلع $ABCDE \cong$ المضلع $FJIHG$

8.

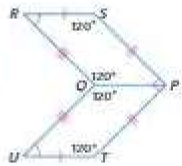


9.



9. $\angle W \cong \angle Y$; $\angle XZW \cong \angle XZY$; $\angle WXZ \cong \angle YXZ$; $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$; $\overline{XW} \cong \overline{XY}$; $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$; $\triangle XWZ \cong \triangle XYZ$

10.

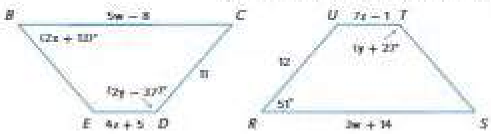


10. $\angle R \cong \angle U$; $\angle S \cong \angle T$; $\angle SPQ \cong \angle TPQ$; $\angle RQP \cong \angle UQP$; $\overline{RS} \cong \overline{UT}$; $\overline{TP} \cong \overline{SP}$; $\overline{RQ} \cong \overline{UQ}$; $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$; المضلع $RSPQ \cong$ المضلع $TPQU$

11.

11. $\overline{AB} \cong \overline{FE}$; $\overline{BD} \cong \overline{EC}$; $\overline{AD} \cong \overline{FC}$; $\angle A \cong \angle F$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle D \cong \angle C$; $\triangle ABD \cong \triangle FEC$

مثال 2 المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$. أوجد قيمة كل مما يلي.



12. x **18** 13. y **39** 14. z **2** 15. w **11**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-27, 36-38, 40-58	9-27 فردي، 43-47	10-26 زوجي، 36-38, 40, 41, 48-52
OL أساسي	9-31 فردي، 32-38, 40, 41, 43-52	9-27, 44-47	28-38, 40-43, 48-52
BL متقدم	28-52		

مثال 3 أوجد قيمة x و y.

16. 

$x = 14.5,\ y = 35$

17. 

$x = 8,\ y = 1$

18. 

$x = 11.2,$
$y = 1.8$

مثال 4 19. **البرهان** اكتب برهانًا حرًا للنظرية 12.3. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

20. **البرهان** ضع العبارات المستخدمة في برهنة العبارة أدناه بالترتيب الصحيح. واذكر مبررات كل عبارة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

تطابق المثلثات يكون متناظرًا. (النظرية 12.4)

المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

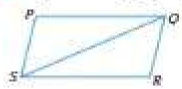
المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

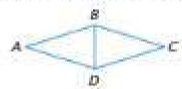
$\angle X \cong \angle R$, $\angle Y \cong \angle S$, $\angle Z \cong \angle T$, $\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$, $\angle T \cong \angle Z$, $\overline{RS} \cong \overline{XY}$, $\overline{ST} \cong \overline{YZ}$, $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?

الفرضيات اكتب برهانًا من عمودين.

21. **المعطيات:** متوازي الأضلاع $PQRS$
المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



22. **المعطيات:** $\angle A \cong \angle C$; $\angle ABD \cong \angle CBD$; $\angle ADB \cong \angle CDB$
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$; $\overline{CD} \cong \overline{AD}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



23. **طباعة القمصان** تطبق حصة مادة الرياضيات وأرادت الطباعة على القمصان من أجل صديقاتها. وقد ذهبت إلى شركة تطبع على القمصان حسب الطلب. تصميمها موضح على اليسار. ما الخاصية التي تضمن تطابق التصميمات المطبوعة؟

23. الإجابة النموذجية: جميع القمصان ستكون متطابقة نظرًا لطباعتها باستخدام الرسم المطبوع ذاته. وفقًا لخاصية التعدي في التطابق، ستكون الصور مطابقة لبعضها البعض.

730 | الدرس 3-12 | المثلثات المتطابقة

البرهان اكتب النوع المحدد من برهان الجزء المشار إليه في النظرية 12.4.

24. تطابق المثلثات يتسم بالتعدي. (برهان حر) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

25. تطابق المثلثات يتسم بالانعكاس. (برهان تسلسلي) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

الجبر ارسم شكلاً وسمّه لتمثيل المثلثات المتطابقة. ثم أوجد قيمة x و y. **26-28. انظر الهامش.**

26. $\triangle ABC \cong \triangle DEF,\ AB = 11,\ AC = 17 + x,\ DF = 2x + 13,\ DE = 3y + 2$

27. $\triangle LMN \cong \triangle RST,\ m\angle L = 51,\ m\angle M = 9y,\ m\angle S = 72,\ m\angle T = 4x + 15$

28. $\triangle JKL \cong \triangle MNP,\ JK = 12,\ LJ = 7,\ PM = 3x - 2,\ m\angle L = 67,\ m\angle K = y + 9,\ m\angle N = 2y - 4$

29. **الأشكال المثلثة** يتولى حسن مسؤولية تطويق منطقة بحبل وتبلغ مساحتها 9 أمتار مربعة لكي تستخدمها الفرقة الموسيقية أثناء تجمع طلابي. وسيستخدم سلسلة من المثلثات المتطابقة متساوية الساقين.

a. اذكر سبعة أزواج من القطع المتطابقة في الصورة.

b. إذا كانت المساحة التي يطوقها بحبل مربعة، فما الطول المطلوب لحبل المثلثات؟ **12 m**

c. كم عدد المثلثات التي ستكون في الحبل؟ **80**

29a. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{FE}$, $\overline{CB} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$, $\overline{DE} \cong \overline{FE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

30. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على عبارة محيطات المثلثات المتطابقة متساوية. **a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

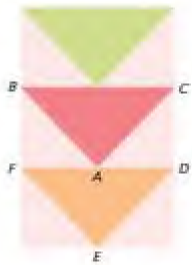
a. **لفظيًا** اكتب عبارة شرطية لتمثيل العلاقة بين محيطي زوج من المثلثات المتطابقة.

b. **لفظيًا** اكتب عبارة عكسية لعبارتك الشرطية. هل العكس صحيح أم خطأ؟ اشرح تبريرك.

c. **هندسيًا** ارسم مثلثين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

d. **هندسيًا** ارسم مستطيلين لهما المحيط ذاته لكنهما غير متطابقين إذا كان ذلك ممكنًا. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

31. **الأنماط** الآ يز الطائر قالب يُستخدم كثيرًا في صناعة الألحفة.



a. ما المثلثان المستخدمان لإنشاء النمط؟ **a-e. انظر الهامش.**

b. اذكر اسم زوج من المثلثات المتطابقة.

c. اذكر اسم زوج من الزوايا المتناظرة.

d. إذا كانت $BC = 4$، فما FD؟ اشرح.

e. ما قياس الزاوية $\angle E$؟ اشرح.

32. **الموسيقى** يمكن استخدام أطواق طبلة صوت الباص لإصلاحها. ويجب أن تكون الأطواق بالحجم ذاته. أي قياس ستستخدم لإثبات أن الأطواق متطابقة. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

التمثيلات المتعددة

في التمرين 30، يستخدم الطلاب الوصف اللفظي والرسومات الهندسية لاستكشاف مساحات المثلثات المتطابقة.

إجابات إضافية

26. $x = 4,\ y = 3$

27. $x = 13,\ y = 8$

28. $x = 3,\ y = 13$

31a. مثلثان مختلفان في الحجم.

31b. الإجابة النموذجية: $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ أو $\triangle ABF \cong \triangle ACD$

31b. الإجابة النموذجية: $\triangle ABF \cong \triangle ACD$ أو $\triangle BAC \cong \triangle FED$

31d. $FD = 4$ لأن الأجزاء المتناظرة من المثلثات المتطابقة متطابقة.

31e. $m\angle E = 90$؛ المثلثات عبارة عن مثلثات متساوية الساقين. الزوايا المقابلة لهذين الساقين تكون متطابقة. في هذه الحالة، سيكون قياس كل منهما 45 درجة، وهذا ما يجعل $\angle E$ زاوية قائمة.

32. القطر، أو نصف القطر، أو محيط الدائرة؛ الإجابة النموذجية: تكون الدائرتان متساويتين في الحجم إذا كان لهما نفس طول القطر، أو نصف القطر، أو المحيط، ولذلك فهي تستطيع أن تحدد إذا كانت الأطواق متطابقة بقياس أيٍّ منها.

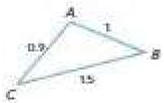
التدريس المتمايز BL OL

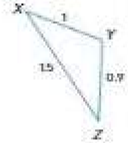
التوسع تسهّل ورقة التمثيل البياني إنشاء أنواع مختلفة من المثلثات المتطابقة. اطلب من طلابك إنشاء تصميم يحتوي على ما لا يقل عن 10 أزواج مختلفة من المثلثات المتطابقة. ضع التحدي أمام الطلاب في شرح كيف يتعرفون على تطابق كل زوجين من المثلثات وفي مقارنة إنشاءاتهم من المثلثات المتطابقة على ورقة التمثيل البياني لإيجاد ميل الخط المستقيم.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

33. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب أهمية ترتيب الرؤوس عند تسمية المثلثات المتطابقة. اذكر مثالاً لدعم إجابتك. **انظر الهامش.**

34. **تحليل الخطأ** يحدد حمادة ووليد قيمًا للأشكال المتطابقة أدناه. يقول حمادة $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ويقول وليد $\triangle CAB \cong \triangle XYZ$. فهل أيٌ منهما على صواب؟ **اشرح انظر الهامش.**





الكتابة في الرياضيات **حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك.** **35-38. انظر الهامش.**

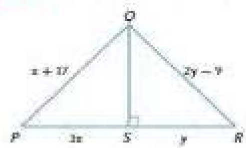
35. المثلثات متساوية الزوايا متطابقة.

36. المثلثان اللذان يتطابق بهما زوجان من الأضلاع المتناظرة وزوج من الزوايا المتناظرة يكونان متطابقين.

37. المثلثان اللذان يتطابق بهما ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة يكونان متطابقين.

38. المثلثان القائمان اللذان يتطابق بهما زوجان من السيقان المتناظرة يكونان متطابقين.

39. **تحدٍ** أوجد قيمة x و y إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. **انظر الهامش.**



40. **تحدٍ** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن المثلثات الأربعة الناتجة بواسطة أقطار مربع تكون متطابقة. **انظر الهامش.**

إجابات إضافية

33. الإجابة النموذجية: عندما تذكر مثلثات متطابقة، فمن المهم أن تذكر الرؤوس المتناظرة في نفس موقعها بالنسبة لكلا المثلثين لأن الموقع يشير إلى التطابق. على سبيل المثال إذا كان $\triangle ABC$ متطابقًا مع $\triangle DEF$، إذًا $\angle A$ تتطابق مع $\angle D$، $\angle B$ تتطابق مع $\angle E$، و $\angle C$ تتطابق مع $\angle F$.

34. حمادة على صواب. فقد جعل الأجزاء متطابقة.

35. في بعض الأحيان، تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت أضلاع المثلثات متشابهة.

36. في بعض الأحيان، تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت الزاوية المتطابقة هي تلك التي تشكلت من تقاطع الضلعين المتطابقين.

37. دائمًا ما يكون هناك طريقة واحدة فقط يمكن أن يتم من خلالها رسم المثلث من خلال ثلاث قطع مستقيمة معطاة.

38. لا يكون هناك دائمًا مثال مضاد يمكن أن يتم رسمه.

39. $x = 5.2,\ y = 15.6$

40. لأن الشكل عبارة عن مربع، فإن جوانبه الأربعة تكون متطابقة، ويكون الجانبان المتقابلان متوازيين، وتتقاطع أقطاره في نقطة المنتصف. كل هذا يساهم في جعل الزوايا الموجودة في المنتصف متطابقة لأن الزوايا الرأسية تكون متطابقة. وتكون الزوايا الأصغر متطابقة لأن الخطين المتوازيين يقطعهما خط مستعرض. وتكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة. ومن ثم، تكون جميع الأجزاء المتناظرة للمثلثات الأربعة متطابقة، وهذا ما يجعل جميع المثلثات متطابقة. $\triangle ABE \cong \triangle AED \cong \triangle ADC \cong \triangle ACB$

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يتوقعوا كيف يمكن لتحديد الأجزاء المتناظرة المتطابقة في مثلث أن يساعدهم في إثبات أن المثلثين متطابقان. في أثناء مغادرة الطلاب لغرفة الصف، دعهم يتبادلوا الأدوار عند ذكر إجاباتهم.

إجابات إضافية

48. $JK = 2\sqrt{146}, KL = \sqrt{290}, JL = \sqrt{146}$; مختلف الأضلاع

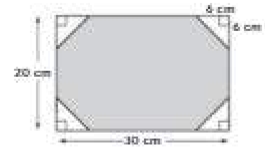
49. $JK = \sqrt{34}, KL = 2\sqrt{17}, JL = \sqrt{34}$; متساوي الأضلاع

50. $JK = 5, KL = 5\sqrt{2}, JL = 5$; متساوي الأضلاع

51. $JK = \sqrt{145}, KL = 4\sqrt{34}, JL = 35$; مختلف الأضلاع

تدريب على الاختبار المعياري

41. قطع حسن أربعة مثلثات متطابقة من أركان مستطيل ليصنع شكلاً ثمانيًا كما هو ظاهر بالأدنى. فما مساحة الشكل الثماني؟ **B**



A $456\ cm^2$ C $552\ cm^2$
B $528\ cm^2$ D $564\ cm^2$

42. الإجابة الشبكية المثلث ABC متطابق مع $\triangle HIJ$. رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-1, 2)$ و $B(0, 3)$ و $C(2, -2)$. فما قياس ضلع $\overline{HJ}$؟ **5**

43. الجبر أي مما يلي عامل في $x^2 + 19x - 42$؟ **H**

F $x + 14$ H $x - 2$
G $x + 2$ J $x - 14$

44. SAT/ACT يقطع جواد مسافة معينة بسرعة 30 كم في الساعة ويعود على نفس الطريق بسرعة 65 كم في الساعة. فما متوسط سرعته بالكيلومتر في الساعة طوال الرحلة؟ **C**

A 32.5 D 47.5
B 35.0 E 55.3
C 41.0

مراجعة شاملة

أوجد كل قياس في المثلث الذي على اليسار.

45. $m\angle 2$ **106** 46. $m\angle 1$ **59** 47. $m\angle 3$ **16**

هندسة الإحداثيات أوجد قياسات أضلاع $\triangle JKL$ وضع تصنيفًا لكل مثلث حسب قياسات أضلاعه. **48-51. انظر الهامش.**

48. $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$
49. $J(9, 9), K(12, 14), L(14, 6)$
50. $J(4, 6), K(4, 11), L(9, 6)$
51. $J(16, 14), K(7, 6), L(-5, -14)$

مراجعة المهارات

52. انسخ البرهان مع إكماله.

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$
المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$
البرهان:

العبارات	المبررات
a. ? $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$	a. المعطى
b. $MN = PQ, PQ = RS$	b. ? **تعريف القطع ≅**
c. ? $MN = RS$	c. ? **خاصية التعدي (=)**
d. $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d. تعريف القطع المتطابقة

الدرس 4-12 إثبات تطابق المثلثات - تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

السابق
- لقد برهنت على تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

الحالي
1. استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) لاختبار تطابق المثلثين.
2. استخدام مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS) لاختبار تطابق المثلثين.

لماذا؟
- اللوح المزدوج بهيكل على شكل A تعتبر طريقة مريحة لعرض المعلومات. ولا تقتصر مزاياه على الطي بشكل مسطح للتخزين بسهولة لكن عند تثبيت الذراع الجانبية في مكانها، يصبح الهيكل قويًا جدًا. وعندما يكون الذراعان الجانبيان بالطول نفسه وعلى المسافة نفسها من أعلى على أي من الجانبين، يشكل الهيكل المفتوح مثلثين متطابقين.

المفردات الجديدة
زاوية محصورة
included angle

إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة SSS

في الدرس 3-12، برهنت على أن المثلثين كانا متطابقين بتوضيح أن كل الأزواج الستة من الأجزاء المتناظرة كانت متطابقة. من الممكن البرهنة على تطابق المثلثين باستخدام أزواج أقل.

يوضح اللوح المزدوج أنه إذا كان المثلثان بنفس أطوال الأضلاع الثلاثة، فهما متطابقان. ويظهر هذا في المسلّمة أدناه.

المسلّمة 12.1 تطابق بتساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)

إذا كانت ثلاثة أضلاع في مثلث متطابقة مع ثلاثة أضلاع في مثلث آخر، فالمثلثان متطابقان.

مثال إذا كان الضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
الضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
والضلع $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
إذًا $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

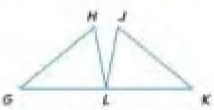
مثال 1 استخدام تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) للبرهنة على أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$، $\overline{HL} \cong \overline{JL}$، L نقطة المنتصف في $\overline{GK}$

المطلوب: $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان التسلسلي:



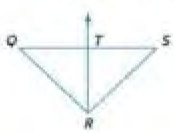
$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ — المعطيات
$\overline{HL} \cong \overline{JL}$ — المعطيات
L هي نقطة المنتصف في $\overline{GK}$ — المعطيات
$\overline{GL} \cong \overline{KL}$ — نظرية نقطة المنتصف
$\triangle GHL \cong \triangle KJL$ — مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة

تمرين موجّه

1. اكتب برهانًا تسلسليًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12**

المعطيات: $\triangle QRS$ متساوي الساقين حيث $\overline{QR} \cong \overline{SR}$
$\overline{RT}$ ينصف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-12 إثبات تطابق المثلثات باستخدام تعريف التطابق.

الدرس 4-12 استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS) لاختبار تطابق المثلث.

بعد الدرس 4-12 وضع صياغة للتخمينات المتعلقة بخواص المضلعات وسماتها واختبارها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- كيف يمكن أن تتأثر اللوحة إذا كانت الأذرع الجانبية ليست على مسافة واحدة من أعلى اللوحة؟ يؤدي هذا إلى تمايل اللوحة.
- ما الذي يجب أن يكون صحيحًا إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟ من المفترض تطابق جميع الأضلاع الثلاثة المتناظرة والزوايا الثلاث المتناظرة.
- كيف يتأثر تطابق المثلثات المذكورة إذا كانت الأذرع الجانبية غير موضوعة على نفس المسافة من أعلى اللوحة؟ المثلثات الناتجة لن تكون متطابقة.

1 مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)

المثالان 1 و 2 يوضّحان طريقة إثبات تطابق مثلثين باستخدام المسلّمة 4.1.

التقويم التكويني

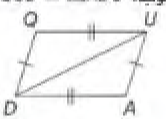
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{QU} \cong \overline{AD}, \overline{QD} \cong \overline{AU}$

المطلوب: $\triangle QUD \cong \triangle ADU$



البرهان التسلسلي:

$\overline{QU} \cong \overline{AD}$ — المعطيات

$\overline{DU} \cong \overline{DU}$ — الخاصية الانعكاسية

$\overline{QD} \cong \overline{AU}$ — المعطيات

$\triangle QUD \cong \triangle ADU$ — مسلّمة الأضلاع الثلاثة

مثال 2 على الاختبار المعياري تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) على المستوى الإحداثي

إجابة موسعة المثلث ABC رؤوسه $A(1, 1)$ و $B(0, 3)$ و $C(2, 5)$. والمثلث EFG رؤوسه $E(1, -1)$ و $F(2, -5)$ و $G(4, -4)$.

a. ارسم كلا المثلثين على مستوى إحداثي واحد.

b. استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.

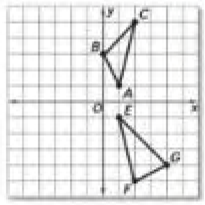
c. اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم التخمين الذي توصلت إليه في الجزء b.

قراءة فقرة الاختبار

مطلوب منك ثلاثة أشياء في هذه المسألة. في الجزء a، عليك تصميم تمثيل بياني لكل من $\triangle ABC$ و $\triangle EFG$ على المستوى الإحداثي ذاته. في الجزء b، عليك تخمين أن $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أو $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ بناءً على التمثيل البياني. وأخيراً في الجزء c، مطلوب منك إثبات التخمين.

حل فقرة الاختبار

a.



b. يبدو من التمثيل البياني أن المثلثين ليسا بالشكل نفسه، إذاً يمكننا تخمين أنهما ليسا متطابقين.

c. استخدم قانون المسافة لبيان عدم تساوي قياس كل الأضلاع المتناظرة.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

بينما $AB = FG$ و $AC = EF$ و $BC \neq EG$. نظراً لعدم التطابق بتساوي الأضلاع الثلاثة، $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

نصيحة عند حل الاختبار

الأدوات عندما تحل المسائل باستخدام المستوى الإحداثي، تذكر أن تستخدم أدوات مثل قوانين المسافة ونقطة المنتصف والميل لحل المسائل والتحقق من حلولك.

قراءة في الرياضيات

الرموز $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ تقرأ المثلث ABC ليس مطابقاً للمثلث EFG.

تمرين موجّه

2. المثلث JKL رؤوسه $J(2, 5)$ و $K(1, 1)$ و $L(5, 2)$، والمثلث NPQ رؤوسه $N(-3, 0)$ و $P(-7, 1)$ و $Q(-4, 4)$. **2a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

a. مثّل المثلثين بيانياً على مستوى إحداثي واحد.

b. استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.

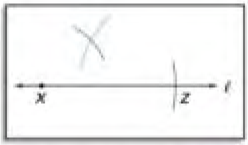
c. اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم التخمين الذي توصلت إليه في الجزء b.

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي/الرياضي يمكن للطلاب أن يستخدموا طريقةً نظامية لكتابة براهين المسائل والأمثلة الواردة في هذا الدرس. اطلب من طلابك أن يبدؤوا بالبحث عن طرق البرهان الممكنة باستخدام SSS أو SAS. وعليهم أن يفحصوا المسألة لتحديد كمّ المعلومات الضرورية المتاحة وطريقة إيجاد أي معلومات أخرى مطلوبة للبرهان. وأخيراً، يمكنهم الاستفادة من معرفتهم السابقة بنقاط المنتصف، والمسافات، وعلاقات الزوايا، وغيرها، لاستخلا ص أي معلومات ضرورية أخرى ودمج الحقائق معاً للوصول إلى البرهان النهائي.

الإنشاء المثلثات المتطابقة باستخدام الأضلاع

ارسم مثلثًا وسمه $\triangle ABC$. ثم استخدم مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) لإنشاء $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.



الخطوة 1 ارسم النقطة X على المستقيم ℓ. ثم قم بإنشاء $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على المستقيم ℓ.

الخطوة 2 قم بإنشاء قوس بنصف القطر AB ومركزه عند النقطة X وقوس آخر بنصف القطر BC ومركزه عند النقطة Z.

الخطوة 3 اكتب على نقطة تقاطع القوسين Y. ارسم $\overline{XY}$ و $\overline{ZY}$ لتكوين $\triangle XYZ$.

2 مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

الزاوية التي يشكلها ضلعان متجاوران في مضلع تسمى **زاوية محصورة**. فكّر في الزاوية المحصورة JKL التي تشكلها العقارب على الساعة الأولى الظاهرة أدناه. في أي وقت تشكل العقارب زاوية بالقياس نفسه، ستكون المسافة بين طرفي العقربين $\overline{JL}$ و $\overline{PR}$ واحدة.

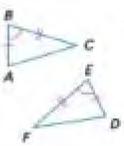
$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أي مثلثين يتشكلان باستخدام نفس أطوال الأضلاع والزاوية المحصورة سيتطابقان. وهذا يوضح المسلّمة التالية.

المسلّمة 12.2 التطابق بتساوي ضلعين وزاوية (SAS)

الشرح عند تطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث آخر، فيكون المثلثان متطابقين.

مثال إذا كان الضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
والزاوية $\angle B \cong \angle E$
والضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



نصيحة دراسية
مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية لا تكفي قياسات الضلعين والزاوية غير المحصورة للبرهنة على تطابق مثلثين.

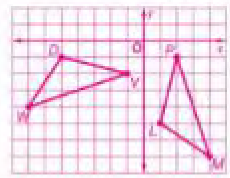
مثال إضافي

2 الإجابة الموسعة المثلث DVW به الرؤوس $D(-5, -1)$ و $V(-1, -2)$ و $W(-7, -4)$. المثلث LPM به الرؤوس $L(1, -5)$ و $P(2, -1)$ و $M(4, -7)$.

a. ارسم كلا المثلثين على مستوى إحداثي واحد.

b. استخدم رسمك لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.

c. اكتب فرضية منطقية تستخدم هندسة الإحداثيات لدعم التخمين الذي توصلت إليه في الجزء b.



$DV = LP$ و $WD = ML$ و $VW = PM$. حسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة، كل القطع المستقيمة المتناظرة متطابقة. ولذلك، $\triangle WDV \cong \triangle MLP$ حسب مسلّمة SSS.

التركيز على محتوى الرياضيات

تسمية المثلثات وضّح لطلابك أنه عند ذكر المثلثات المتطابقة، فمن المهم سرد تطابق المثلثات بنفس ترتيب الأجزاء المتناظرة المتطابقة. إذا كان $\triangle PKR \cong \triangle JKL$ يستخدم ترتيبًا مناسبًا لتوضيح الأضلاع المتناظرة والزوايا المتطابقة في كلا المثلثين، فمن الخطأ أن نكتب $\triangle PRK \cong \triangle JKL$.

انتبه!

حصر الزاوية يمكن استخدام مسلّمة التشابه SAS فقط عند وجود الزاوية بين ضلعَيْن متجاورَيْن.

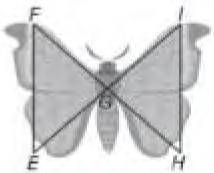
736 | الدرس 12-4 | إثبات تطابق المثلثات—تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

2 مسلّمة SAS

المثالان 3 و 4 يوضحان طريقة إثبات أنّ المثلثين يتطابقان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.

مثال إضافي

3 **علم الحشرات** يشكل جناحي أحد أنواع حشرة العثّة مثلثين. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أنّ $\triangle FEG \cong \triangle HIG$ إذا كان $\overline{EI} \cong \overline{FH}$ و G هي نقطة المنتصف $\overline{EI}$ و $\overline{FH}$



العبارات (المبرّرات)

1. $\overline{EI} \cong \overline{FH}$؛ G هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{EI}$؛ G هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{FH}$ (معطيات)
2. $\overline{FG} \cong \overline{HG}$، $\overline{EG} \cong \overline{IG}$ (نظرية نقطة المنتصف)
3. $\angle FGE \cong \angle HGI$ (نظرية الزوايا الرأسية)
4. $\triangle FEG \cong \triangle HIG$ (مسلّمة SAS)

مهنة من الحياة اليومية

فنيو الإضاءة في مجال تصوير الأفلام، يضع الفنيون أو فنيو الإضاءة ما يتطلبه الفيلم من إضاءة. يتأكد الفنيون أن الزوايا التي تشكلها المصابيح في الأوضاع الصحيحة. قد يكونون حاصلين على درجات علمية جامعية أو من المدارس الفنية أو ربما يكونون قد استكملوا برنامجًا تدريبيًا رسميًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام مسلّمة ضلعين وزاوية لإثبات

الإضاءة تبدو سقالات إضاءة المسرح الموضحة أنها مكونة من مثلثات متطابقة. إذا كان $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ و $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$، فاكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$	1. المعطيات
2. $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2. المعطيات
3. $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3. نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4. $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4. خاصية الانعكاس في التطابق
5. $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5. مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية

تمرين موجّه

3. **الرياضات الخطرة** تبدو أجنحة الطيران الشراعي الموضحة كمثلثات متطابقة. إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ و $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$، فأثبت أن $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.
انظر الهامش.

يمكنك أيضًا إنشاء مثلثين متطابقين على أساس ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

الإنشاء مثلثان متطابقان باستخدام ضلعين والزاوية المحصورة

ارسم مثلثًا وسمه $\triangle ABC$.
ثم استخدم مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SAS) لإنشاء $\triangle RST \cong \triangle ABC$.

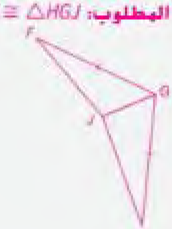
الخطوة 1 ارسم النقطة R على المستقيم m. ثم قم بإنشاء $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على المستقيم m.

الخطوة 2 أنشئ $\angle R \cong \angle A$ باستخدام $\overline{RT}$ كضلع للزاوية والنقطة R.

الخطوة 3 أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$. ثم ارسم $\overline{ST}$ لتكوين $\triangle RST$.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. **المعطيات:** $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ؛ $\overline{JG}$ ينصّف $\angle FGH$.
المطلوب: $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$

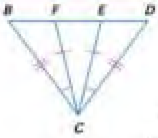


البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{FG} \cong \overline{GH}$، $\overline{JG}$ ينصّف $\angle FGH$. (معطيات)
2. $\angle FGJ \cong \angle HGJ$ (تعريف منصّف الزاوية)
3. $\overline{GJ} \cong \overline{GJ}$ (خاصية الانعكاس ≅)
4. $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$ (مسلّمة SAS)

مثال 4 تساوي ضلعين وزاوية (SAS) أو تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)



اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\overline{BC} \cong \overline{DC}, \angle BCF \cong \angle DCE, \overline{FC} \cong \overline{EC}$

المطلوب: $\angle CFD \cong \angle CEB$

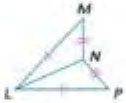
البرهان:

بما أن $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، $\angle BCF \cong \angle DCE$ و $\overline{FC} \cong \overline{EC}$، إذاً $\triangle BCF \cong \triangle DCE$ وفقاً لمسلّمة SAS. حسب CPCTC، $\angle CFB \cong \angle CED$.
$\angle CFD$ تشكل زوجاً خطياً مع $\angle CFB$، و $\angle CEB$ تشكل زوجاً خطياً مع $\angle CED$.
وفقاً لمسلّمة نظرية تطابق الزوايا المتكاملة، $\angle CFD$ تكمل $\angle CFB$، و $\angle CEB$ تكمل $\angle CED$. بما أن الزوايا المتكاملة مع زاوية واحدة أو متكاملة مع زوايا متطابقة تكون متطابقة، فإن $\angle CFD \cong \angle CEB$.

نصيحة دراسية

الأشكال المتداخلة عندما تتداخل المثلثات، قد يكون من المفيد رسم كل مثلث بشكل منفصل وتمييز الأجزاء المتطابقة. في المثال 4، كان يمكن فصل الشكل كما هو ظاهر.

تمرين موجّه



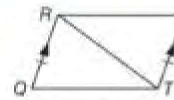
4. اكتب برهاناً من عمودين. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PN}, \overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: $\angle LNM \cong \angle LNP$

مثال إضافي

4 اكتب برهاناً حرّاً.



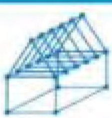
المعطيات: $\overline{RQ} \parallel \overline{TS}$

$\overline{RQ} \cong \overline{TS}$

المطلوب: $\angle Q \cong \angle S$

لأنّ $\overline{RQ} \parallel \overline{TS}$، الزاويتين الداخليتين المتبادلتين $\angle QRT$ و $\angle STR$ متطابقتان. بمعنى أن $\angle QRT \cong \angle STR$. $\overline{RQ} \cong \overline{TS}$ و $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ حسب خاصية الانعكاس. ولذلك، $\triangle QRT \cong \triangle STR$ حسب المسلّمة SAS. وحسب النظرية CPCTC، فإن $\angle Q \cong \angle S$.

التحقق من فهمك



مثال 1

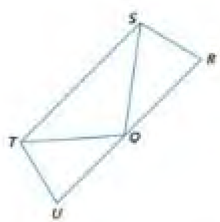
1. **الهندسة المعمارية** المثلثات شائعة الاستخدام في الهندسة المعمارية لأنها أشكال "ثابتة". كيف تفسر خاصية تطابق المثلثات هذه الخاصية؟ بخلاف الأسقف، اذكر مثالاً واحداً على الأقل لتطابق المثلثات في منزلك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

مثال 2

2. **إجابة موسعة** المثلث ABC رؤوسه $A(-4, 1)$ و $B(-1, 1)$ و $C(-1, 5)$. والمثلث XYZ رؤوسه $X(4, -1)$ و $Y(1, -1)$ و $Z(1, -5)$. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**
   a. ارسم كلا المثلثين على مستوى إحداثي واحد.
   b. استخدم التمثيل البياني لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. اشرح تبريرك.
   c. اكتب فرضية منطقية باستخدام هندسة الإحداثيات لدعم تخمينك.

مثال 3

3. في الرسم التخطيطي، $\triangle TQR$ متساوي الأضلاع، و $\angle RSQ \cong \angle UTQ$، و $\overline{SR} \cong \overline{TU}$. اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن $\triangle RSQ \cong \triangle UTQ$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 4 للتحقق من استيعاب الطلاب.

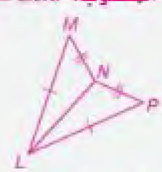
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

4. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PN}, \overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: $\angle LNM \cong \angle LNP$



العبارات (المبررات)

1. $\overline{MN} \cong \overline{PN}, \overline{LM} \cong \overline{LP}$ (معطيات)
2. $\overline{LN} \cong \overline{LN}$ (خاصية انعكاس التطابق)
3. $\triangle LNM \cong \triangle LNP$ (مسلّمة SSS)
4. $\angle LNM \cong \angle LNP$ (بناءً على النظرية CPCTC)

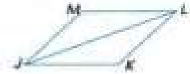
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	5-15, 30-47	5-15 ،فردي 34-37	6-14 ،زوجي 30-33, 38-47
OL أساسي	5-27 ،فردي 30-47	5-15, 34-37	16-28, 30-33, 38-47
BL متقدم	16-45, (46-47 :اختياري)		

مثال 4 4. اكتب برهاناً من عمودين. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$, $\angle KJL \cong \angle MLJ$

المطلوب: $\overline{JM} \cong \overline{LK}$



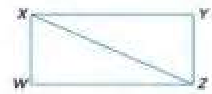
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **البرهان** اكتب النوع المحدد من البراهين. **6-5. انظر الهامش.**

5. برهان حرّ

المعطيات: $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$
$\overline{XW} \cong \overline{ZY}$

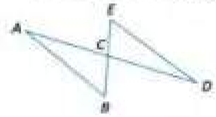
المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle ZWX$



6. برهان من عمودين

المعطيات: C نقطة منتصف كل من $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$.

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DCE$



7. **الجسور** يوجد الجسر المعلق أدناه في يوشانغ في مقاطعة خوبي في الصين. والجسر مدعوم باستخدام كابلات من الصلب معلقة من دعامتين خرسانيتين. إذا كانت الدعامتان بالارتفاع نفسه فوق الطريق وعموديتين على الطريق وتلتقي أعلى الكابلات مع نقطة في المنتصف بين الدعامتين، فبرهن على أن المثلثين الظاهرين في الصورة متطابقان. **انظر الهامش.**

الاستنتاج المنطقي حدد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$. اشرح. **8-11. انظر الهامش.**

8. $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, -4), R(-7, -1), S(-3, 0)$
9. $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(-3, 3), R(-4, 4), S(-3, 7)$
10. $M(0, -3), N(0, 2), O(-3, 1), Q(4, -1), R(6, 1), S(9, -1)$
11. $M(4, 7), N(5, 4), O(2, 3), Q(2, 3), R(3, 0), S(0, -1)$

مثال 3 **البرهان** اكتب النوع المحدّد من البراهين. **12-13. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

12. برهان من عمودين

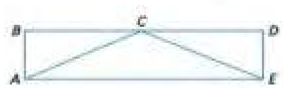
المعطيات: $\overline{KG}$ منصف عمودي لـ $\overline{FH}$

المطلوب: $\triangle KGH \cong \triangle KGF$

13. برهان حرّ

المعطيات: المستطيل ABDE، C نقطة منتصف $\overline{BD}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



إجابات إضافية

4. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\overline{JK} \cong \overline{LM}$، $\angle KJL \cong \angle MLJ$ (معطيات)
2. $\overline{JL} \cong \overline{JL}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle JKL \cong \triangle LMJ$ (مسلّمة SAS)
4. $\overline{JM} \cong \overline{LK}$ (النظرية CPCTC)

5. طبقًا لخاصية الانعكاس، $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$. وبناءً عليه، $\triangle XYZ \cong \triangle ZWX$ طبقًا لمسلّمة SSS.

6. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. C هي نقطة منتصف كل من $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ (معطيات)
2. $AC = DC$ و $BC = EC$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{AC} \cong \overline{DC}$، $\overline{BC} \cong \overline{EC}$ (تعريف التطابق)
4. $\angle ACB \cong \angle DCE$ (الزوايا الرأسية متطابقة)
5. $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ (مسلّمة SAS)

7. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$، $AB = ED$، $\overline{AB} \perp \overline{BD}$، $\overline{ED} \perp \overline{BD}$ (معطيات)
2. $BC = DC$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$، $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ (تعريف التطابق)
4. $\angle ABC$ و $\angle EDC$ زاويتان قائمتان. (تعريف المتعامد العمودي)
5. $\angle EDC \cong \angle ABC$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)
6. $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ (حسب مسلّمة SAS)

8. استخدم صيغة حساب المسافات. $MN = QR = 3\sqrt{2}$، $NO = RS = MO = QS = \sqrt{17}$ المثلثات متطابقة وفقًا لمسلّمة SSS.

9. استخدم صيغة حساب المسافات. $QS = 4$، $MO = 2\sqrt{5}$ المثلثات ليست متطابقة.

10. استخدم صيغة حساب المسافات. $MN = 5$، $QR = 2\sqrt{2}$؛ المثلثات ليست متطابقة.

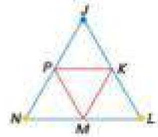
11. استخدم صيغة حساب المسافات. $MN = QR = NO = RS = \sqrt{10}$، $MO = QS = 2\sqrt{5}$؛ المثلثات ليست متطابقة وفقًا لمسلّمة SSS.

مثال 4 **البرهان** اكتب النوع المحدّد من البراهين. 15-14. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

14. برهان من عمودين

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$، P نقطة منتصف $\overline{JN}$، M نقطة منتصف $\overline{NL}$، $\triangle JLN$ متساوي الأضلاع

المطلوب: $\triangle NPM \cong \triangle LKM$



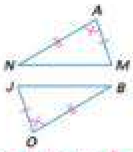
15. برهان [illegible]

المعطيات: $\overline{AB}$ و $\overline{WP}$ ينصف كل منهما الآخر

المطلوب: $\angle A \cong \angle B$

فرضيات حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلثين متطابقان. وإذا لم يكن ممكنًا إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.

16.

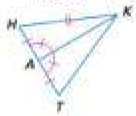


مسلّمة ضلعين وزاوية

17.

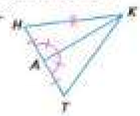
لا يمكن

18.



مسلّمة ضلعين وزاوية

19.



لا يمكن

20. **الموسيقى** لتحديد وتيرة معيّنة، يتم ضبط الوزن على بندول الإيقاع (الميقاع) بحيث يتأرجح بمعدل محدد. أثبت أن المثلثات المتشكلة نتيجة حركة البندول متطابقة، أي أثبت أن $\triangle ABR \cong \triangle CBR$. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. 22-21. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

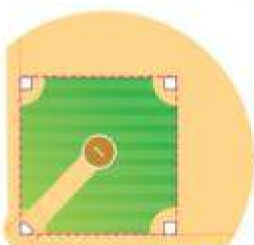
21. **المعطيات:** $\overline{XB}$ ينصف $\angle EBW$، $\overline{EB} \cong \overline{WB}$

المطلوب: $\angle E \cong \angle W$

22. **المعطيات:** شبه منحرف متساوي الساقين $PQRS$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle SRQ$

23. **البيسبول** استخدم الرسم التخطيطي الموضح لملعب البيسبول. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



a. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن المسافة من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثالثة هي نفسها المسافة من اللوح الأصلي إلى القاعدة الثانية.

b. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن الزاوية التي تتشكل من القاعدة الثانية واللوح الأصلي والقاعدة الثالثة هي نفسها الزاوية التي تتشكل من القاعدة الثانية واللوح الأصلي والقاعدة الأولى.

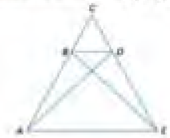
التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية خصص عدة تمارين للصف الدراسي، ثم اختر عدة طلاب ليعرضوا عملهم ويوضحوا كيف استخدموا مسلّمة SSS أو مسلّمة SAS لتطابق المثلثين.

740 | الدرس 12-4 | إثبات تطابق المثلثات-تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

.24 المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{ZW}, \overline{XY} \cong \overline{ZY}$
المطلوب: $\angle X \cong \angle Z$ **انظر الهامش**

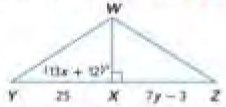
.25 المعطيات: $\triangle EAB \cong \triangle DCB$
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle CED$ **انظر الهامش**



.26 فرضيات اكتب برهانًا حرًا.
المعطيات: $\overline{BF} \cong \overline{DF}; \overline{FE} \cong \overline{FA}$
$\overline{AB} \cong \overline{ED}$
المطلوب: $\triangle ABE \cong \triangle EDA$ **انظر الهامش**

الجبر **باستخدام CPCTC، أوجد قيم المتغيرات التي تحقق مثلثات متطابقة.**

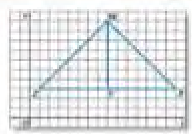
27. $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$ **$x = 6; y = 4$**



28. $\triangle ABC \cong \triangle FGH$ **$x = 3; y = 4;$ $z = 5$**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.29 تحدٍ **راجع التمثيل البياني المعروض.** **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



a. صف طريقتين يمكنك استخدامهما للبرهنة على أن $\triangle WYZ$ متطابق مع $\triangle WYX$. لا يجوز لك استخدام مسطرة أو منقلة. أي طريقة أكثر كفاءة برأيك؟ اشرح.

b. هل $\triangle WYZ$ و $\triangle WYX$ متطابقان؟ اشرح تبريرك.

.30 التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت العبارة صحيحة، فاشرح تبريرك. وإذا كانت خاطئة، فاذكر مثالاً مضادًا.

إذا كانت زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين بنفس قياس زاويتي القاعدة في مثلث آخر متساوي الساقين، فإن المثلثين متطابقان. **انظر الهامش.**

.31 تحليل الخطأ تقول خديجة إن $\triangle ABC \cong \triangle CAD$ حسب المبرهنة SSS. وتختلف معها خولة وتقول إنهما متطابقان حسب مبرهنة SAS. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.

.31 كلاهما خطأ. لا توجد معلومات للوصول إلى استنتاج.

.32 مسألة غير محددة الإجابة استخدم حافة مستقيمة لرسم المثلث منفرج الزاوية ABC. ثم قم بإنشاء $\triangle XYZ$ بحيث يكون متطابقًا مع $\triangle ABC$ باستخدام مبرهنة SSS أو SAS. برر إنشاءك رياضيًا وتحقق منه باستخدام القياس.

.32 الإجابة النموذجية: باستخدام مسطرة، قست كل الأضلاع وهي متطابقة، ولهذا فالمثلثات متطابقة حسب SSS.

.33 الكتابة في الرياضيات حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح تبريرك. *إذا تطابق زوجان من الأضلاع المتناظرة في مثلثين قائمين، فالمثلثان متطابقان.* **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

.26 لأن القطع المستقيمة متطابقة، فإن أطوالها تكون متساوية. $BF = DF$ و $FE = FA$. باستخدام خاصية الجمع، $BF + FE = DF + FA$. وفقًا لجمع القطع المستقيمة، $BE = BF + FE$ و $DA = DF + FA$. باستخدام خاصية التعويض، $BE = DA$. بما أن الأطوال متساوية، $\overline{BE} \cong \overline{DA}$. طبقًا لخاصية الانعكاس، $\overline{AE} \cong \overline{EA}$. الأضلاع الثلاثة متطابقة، ومن ثم $\triangle ABE \cong \triangle EDA$.

.30 هذه العبارة خاطئة. الإجابة النموذجية: المثلثات متساوية الأضلاع يكون بها زاويتان متطابقتان، ولكن ليس لجميع المثلثات متساوية الأضلاع أطوال الأضلاع نفسها.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 31، إجابة خولة صحيحة. فبالرغم من وجود ضلعين متناظرين متطابقين وزاوية واحدة متناظرة متطابقة في المثلثين الموضحين، إلّا أنّ الزاوية المُعلَّمة ليست ناتجة عن الضلعين المتطابقين؛ ولذلك، فهي ليست زاوية محصورة. لتطبيق مسلّمة SAS، لا بد أن تكون الزاويةُ زاويةً محصورة. ولا توجد معلومات إضافية أو معلومات يمكن استنتاجها من الشكل. وإذًا لا توجد معلومات كافية لتحديد إذا ما كانت المثلثات متطابقة.

ملاحظات لحل التمرين

فرجار ومسطرة تقويم يتطلب التمرين 32 استخدام فرجار ومسطرة تقويم.

إجابات إضافية

.24 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ،$\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ (معطيات)
2. $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$ (مسلّمة SSS)
4. $\angle X \cong \angle Z$ (نظرية CPCTC)

.25 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle EAB \cong \triangle DCB$ (معطيات)
2. $\overline{DB} \cong \overline{EB}$ ،$\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ،$\overline{AE} \cong \overline{CD}$ (نظرية CPCTC)
3. $\overline{ED} \cong \overline{ED}$ (خاصية الانعكاس)
4. $DB = EB$ ،$AB = CB$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)
5. $AB + DB = CB + EB$ (خاصية جمع المتباينات)
6. $CE = CB + EB$ ،$AD = AB + DB$ (جمع القطع المستقيمة)
7. $AD = CE$ (التعويض)
8. $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)
9. $\triangle EAD \cong \triangle DCE$ (مسلّمة SSS)

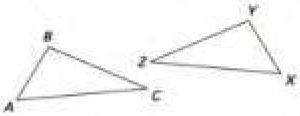
تدريب على الاختبار المعياري

34. الجبر قطعت عائلة خالد مسافة 300 كم بالسيارة لزيارة الجد والجدة. وقام السيد خالد بقيادة السيارة بسرعة 70 كم في الساعة لمسافة تعادل 65% من الرحلة و 35 كم في الساعة أو أقل لمسافة تعادل 20% من الرحلة المتبقية. بافتراض أن السيد خالد لم يقم بزيادة السرعة مطلقًا عن 70 كم في الساعة، فكم عدد الكيلومترات التي قطعها بين 35 و 70 كم في الساعة؟ **B**

A 195 C 21

B 84 D 18

35. في الشكل، $\angle C \cong \angle Z$ ، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$



ما المعلومات الإضافية التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟ **F**

F $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

G $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

H $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

J $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

36. إجابة موسعة يوضح التمثيل البياني أدناه ألوان عيون كل الطلاب في صف دراسي. ما احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيًا من هذا الصف بعينين زرقاوين؟ اشرح تبريرك. **انظر الهامش.**

37. SAT/ACT إذا كان $4a + 6b = 6$ ، $-2a + b = -7$. فما قيمة a؟ **D**

A -2

B -1

C 2

D 3

E 4

مراجعة شاملة

في الرسم التخطيطي، $\triangle LMN \cong \triangle QRS$.

38. أوجد x. **5**

39. أوجد y. **18**

40. الفلك مجموعة الدبة الكبرى جزء من كوكبة الدب الأكبر. تشكل ثلاثة من النجوم الأكثر سطوعًا في الكوكبة $\triangle RSA$. إذا كان $m\angle R = 41$ ، $m\angle S = 109$. فأوجد $m\angle A$. **30**

اكتب معادلة وفق صيغة الميل والمقطع لكل خط.

43. $(-4, -1)$ ، $(-8, -5)$ **$y = x + 3$**

42. $(4, -1)$ ، $(-2, -1)$ **$y = -1$**

41. $(-5, -3)$ ، $(10, -6)$ **$y = -\frac{1}{5}x - 4$**

مراجعة المهارات

اذكر الخاصية التي تعلل كل عبارة.

44. $AB = AB$. **خاصية الانعكاس.**

45. إذا كان $EF = GH$ ، $GH = JK$. فإن $EF = JK$. **خاصية التعدي**

46. إذا كان $a^2 = b^2 - c^2$. فإن $b^2 - c^2 = a^2$. **خاصية التناظر**

47. إذا كان $XY + 20 = YW$ ، $XY + 20 = DT$. فإن $YW = DT$. **خاصية التعويض**

4 التقويم

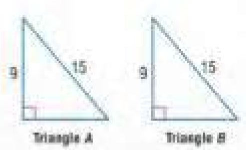
عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من طلابك أن يكتبوا بتعبيراتهم الخاصة كيف يستطيعون استخدام SSS و SAS في إثبات تطابق المثلثات.

إجابات إضافية

36. $\frac{3}{20}$؛ أولاً يجب عليك إيجاد عدد الطلاب في الصف الدراسي. يوجد لديك 14 + 3 + 2 + 1 أو 20. بعد ذلك الاحتمال العشوائي لاختيار طالب ذي عين زرقاء هو عدد الطلاب ذوي العيون الزرقاء مقسومًا على 20. ونظرًا لوجود 3 طلاب عيونهم زرقاء، فالاحتمال هو $\frac{3}{20}$.

التدريس المتمايز OL BL

التوسع المثلثان A و B كلا هما قائم الزاوية وكلٌ منهما له ساق بطول 9 وطول وتره 15. أثبت أن المثلث A متطابق مع المثلث B. واشرح تبريرك. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الساق المجهولة، 12. المثلثان متطابقان تبعًا للمسلّمة SSS.



1 التركيز

الهدف برهنة الإنشاءات باستخدام القياسات المتطابقة.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- فرجار
- مسطرة تقويم

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظّم الطلاب في مجموعات متنوعة القدرات كل منها من طالبيْن. اطلب منهم بعد ذلك إكمال النشاط.

اطرح الأسئلة التالية:

- كيف تعرف أن أيًا من هذه القطع المستقيمة متطابقة في الخطوة 1؟ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ لأن تلك القطع المستقيمة تم إنشاؤها باستخدام وضعية الفرجار نفسها. وهذا يؤكد أن هذه القطع المستقيمة لها نفس الطول.
- كيف تتأكد أنّ $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$ قطعتان متطابقتان؟ لا بد من الحذر التام للحفاظ على نفس وضعية الفرجار لضمان قياسات متساوية من قطعة لأخرى.
- هل $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$ قطع متطابقة؟ ما الذي يجب أن يحدث حتى تتطابق جميع هذه القطع مع بعضها؟ ليس بالضرورة؛ تتساوى أطوال هذه القطع الأربع فقط إذا حافظنا على وضعية الفرجار نفسها في القياسات الأربعة كلها.
- خطأ شائع في برهان إثبات أنّ $\triangle ABC \cong \triangle DBC$. ما الخطأ؟ الخطأ في أنْ نذكر الأجزاء المتطابقة في كل مثلث بمفرده بدلًا من أن تكون في الأجزاء المتناظرة في مثلثين مختلفين.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 3.

12-4 مختبر الهندسة
برهنة الإنشاءات

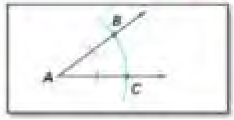
عندما ترسم الإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار، فإنك تفترض تطابق القطع التي يتم إنشاؤها باستخدام ضبط واحد للفرجار. يمكنك استخدام هذه المعلومات إلى جانب التعريفات والمسلّمات والنظريات للبرهنة على الإنشاءات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).
استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

النشاط

اتبع الخطوات أدناه لتنصيف زاوية. ثم برهن على الإنشاء.

الخطوة 1

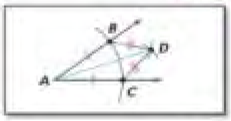


ارسم زاوية بالرأس A. ضع نقطة الفرجار عند A وارسم قوسًا يتقاطع مع كلا ضلعي $\angle A$. قم بتسمية النقطتين B و C. ضع علامة على القطع المتطابقة.

الخطوة 2

ضع نقطة الفرجار عند B، وارسم قوسًا في $\angle A$. باستخدام نصف القطر نفسه، ارسم قوسًا من C يتقاطع مع القوس الأول عند D. ارسم القطعتين $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$. ضع علامة على القطع المتطابقة.

الخطوة 3



ارسم $\overrightarrow{AD}$.

المعطيات: وصف الخطوات والرسم التخطيطي للإنشاء.

المطلوب: $\overrightarrow{AD}$ ينصف $\angle BAC$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	1. تم استخدام إعداد واحد للفرجار من النقطة A لإنشاء النقطتين B و C.
2. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	2. تم استخدام إعداد واحد للفرجار من النقطتين B و C لإنشاء النقطة D.
3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	3. خاصية الانعكاس
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	4. مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة
5. $\angle BAD \cong \angle CAD$	5. مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة
6. $\overrightarrow{AD}$ ينصف $\angle BAC$	6. تعريف منصّف الزاوية

التمارين

1. قم بإنشاء مستقيم يوازي خط معين ويمر بنقطة معينة على المستقيم. واكتب برهانًا من عمودين لإنشائك.
2. قم بإنشاء مثلث متساوي الأضلاع، واكتب برهانًا حرًا لإنشائك.

3–1. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

3. **تحدٍ** أنشئ منصف قطعة يكون عموديًا أيضًا على القطعة واكتب برهانًا من عمودين لإنشائك. (تلميح: ستحتاج إلى استخدام أكثر من نوع من المثلثات المتطابقة.)

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 2-1 للتأكد من فهم الطلاب لطريقة برهنة الإنشاءات.

من العملي إلى النظري

استخدم معرفتك عن الزوايا التي تمّت مناقشتها في المعمل لتوضيح أنّ $\overrightarrow{AD}$ ينصّفُ $\angle BAC$ جبريًا. نظرًا لأنّ $\angle BAD \cong \angle CAD$، فإن $m\angle BAD = m\angle CAD$. وأيضًا، $m\angle BAD + m\angle CAD = m\angle BAC$. باستخدام التعويض،

$$m\angle BAD + m\angle BAD = m\angle BAC$$
$$2m\angle BAD = m\angle BAC$$
$$m\angle BAD = \frac{m\angle BAC}{2}$$
$$m\angle CAD = \frac{m\angle BAC}{2}$$

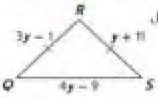
إذًا، $\overrightarrow{AD}$ ينصّفُ $\angle BAC$.

12 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 1-12 إلى 4-12

1. **هندسة الإحداثيات** حدد تصنيف $\triangle ABC$ بالرؤوس $A(-2, -1)$ و $B(-1, 3)$ و $C(2, 0)$ باعتباره مختلف الأضلاع، أو متساوي الأضلاع، أو متساوي الساقين. **متساوي الساقين**

2. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يمثل قياسات أضلاع مثلث متساوي الساقين QRS؟ **A**



A 17, 17, 15
B 15, 15, 16
C 14, 15, 14
D 14, 14, 16

3. **الجبر** أوجد قيمة x وطول كل ضلع إذا علمت أن $\triangle WXY$ مثلث متساوي الأضلاع أضلاعه $\overline{WX} = 6x - 12$, $\overline{XY} = 2x + 10$ و $\overline{WY} = 4x - 1$. **$x = 5.5$; $WX = XY = WY = 21$**

أوجد قياس جميع الزوايا المشار إليها.

4. $m\angle 1$ **108**
5. $m\angle 2$ **34**
6. $m\angle 3$ **66**

7. **فلك** ليو هي عبارة عن كوكبة على شكل أسد. تشكل ثلاثة من النجوم الأكثر سطوعًا في الكوكبة $\triangle LEO$. إذا كانت الزوايا بالقياسات الموضحة في الشكل، فأوجد $m\angle OLE$. **66**

أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

8. $m\angle 4$ **95**
9. $m\angle 5$ **85**
10. $m\angle 6$ **49**
11. $m\angle 7$ **53**

في الرسم التخطيطي، $\triangle RST \cong \triangle ABC$.

12. أوجد x. **10**

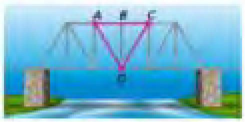
13. أوجد y. **21**

14. **الهندسة المعمارية** يوضح الرسم التخطيطي منزلاً بهيكل على شكل A وبه عدة نقاط لها أسماء. افترض أن القطع والزوايا التي تبدو متطابقة في الرسم التخطيطي متطابقة. أوضح أي المثلثات متطابقة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

15. **الاختيار من متعدد** حدد العبارة الصحيحة إذا علمت أن $\triangle CBX \cong \triangle SML$. **J**

F $\overline{MO} \cong \overline{SL}$
G $\overline{XC} \cong \overline{ML}$
H $\angle X \cong \angle S$
J $\angle XCB \cong \angle LSM$

16. **الجسور** تظهر أطواق حديدية لجسر في الرسم التخطيطي أدناه، حيث $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ و B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟
مسلّمة تساوي ضلعين وزاوية



حدد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$.

17. $P(3, -5)$, $Q(11, 0)$, $R(1, 6)$, $X(5, 1)$, $Y(13, 6)$, $Z(3, 12)$ **نعم**

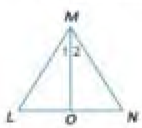
18. $P(-3, -3)$, $Q(-5, 1)$, $R(-2, 6)$, $X(2, -6)$, $Y(3, 3)$, $Z(5, -1)$ **لا**

19. $P(8, 1)$, $Q(-7, -15)$, $R(9, -6)$, $X(5, 11)$, $Y(-10, -5)$, $Z(6, 4)$ **نعم**

20. اكتب برهانًا من عمودين. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\triangle LMN$ مثلث متساوي الساقين، حيث $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ و $\overline{MO}$ ينصف $\angle LMN$.

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجّعهم على مراجعة معلومات الدروس من 1-12 إلى 4-12 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابات إضافية

20. العبارات (المبررات)

1. $\triangle LMN$ مثلث متساوي الساقين، حيث $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ (معطيات)
2. $\overline{MO}$ ينصف $\angle LMN$ (معطيات)
3. $\angle 1 \cong \angle 2$ (تعريف منصّف الزاوية)
4. $\overline{MO} \cong \overline{MO}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle MLO \cong \triangle MNO$ (مسلّمة SAS)

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-5 إثبات تطابق المثلثات باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (SAS).

الدرس 12-5 استخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (ASA) ومسلّمة تساوي ضلعين وزاوية (AAS) لاختبار تطابق المثلث.

بعد الدرس 12-5 استخدام مسلّمات تطابق المثلثات لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- في الفقرة، هناك ادّعاء يقول إنه يمكن قياس مسار السباق بطريقة غير مباشرة. فإلى أيّ سطح ستحوّل طول المسار؟ الأرض أو الشاطئ
- لتقدير المسافة من الشاطئ حتى نقطة بداية السباق، قف عند نقطة تكون عمودية على خط بداية السباق وانظر مباشرة إلى نقطة البداية. اجعل عينيك ثابتتين

ورقبتك كذلك، وقم بلف جسمك لتصبح على نفس الخط البصري للنقطة على الأرض. قِس بعد ذلك المسافة من مكان وقوفك إلى النقطة التي أنشأتها على الأرض. لقد أنشأت ثوا مثلثين متطابقين؛ كيف تثبت ذلك؟ لأنك قائم عموديًا على الأرض، فتتكوّن من ذلك زاويتان قائمتا الزاوية متطابقتان. الزوايا الناتجة من الخط البصري متساوية وكذلك ارتفاعك عن الأرض متساوٍ في كلا المثلثين. ولذلك، فالمثلثان المتكونان متطابقان حسب المسلّمة ASA؛ وكذلك حسب النظرية CPCTC؛ فإنّ المسافات متساوية.

الدرس 12-5 مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) وتساوي زاويتين وضلع (SAA)

السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد برهنت على تطابق مثلثين باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS) وتساوي ضلعين وزاوية (SAS).	1 استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لاختبار التطابق. 2 استخدام نظرية تساوي زاويتين وضلع (AAS) لاختبار التطابق.	• تتضمن رياضة التجديف بالتبشيط، وتسمى أيضًا الطاقم، شخصين أو أكثر يجلسون بمواجهة مؤخرة القارب ويسحب كل مجدف مجدافًا واحدًا، في مسابقات المدرسة الثانوية. يتطلب السباق الذي يُسمى ريغاتا في العادة مسطحًا مائيًا يزيد طوله على 1500 متر. يمكن استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة بسهولة، مثل طول مسار الريغاتا.

المفردات الجديدة
ضلع محصور
included side

إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.
بناء فرضيات مبنية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

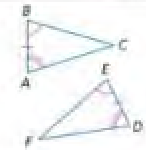
1 مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

الضلع المحصور هو الضلع الموجود بين زاويتين متتاليتين في مضلع. في $\triangle ABC$ على اليسار، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$ و $\angle C$.

المسلّمة 12.3 تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

عند تطابق زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث آخر، يكون المثلثان متطابقان.

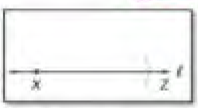
مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$،
والضلع $\overline{AB} \cong \overline{DE}$،
الزاوية $\angle B \cong \angle E$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



الإنشاء مثلثان متطابقان باستخدام زاويتين والضلع المحصور بينهما

ارسم مثلثًا وسمه $\triangle ABC$. ثم استخدم مسلّمة تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإنشاء $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

الخطوة 1



ارسم المستقيم ℓ وحدد النقطة X. وقم بإنشاء $\overline{XZ}$ بحيث $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2

أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle A$ عند X باستخدام $\overrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية.

الخطوة 3

أنشئ زاوية متطابقة مع $\angle C$ عند Z باستخدام $\overrightarrow{XZ}$ كضلع للزاوية. ضع اسمًا للنقطة التي يلتقي عندها الضلعان الجديدان للزوايا Y.

1 مسلّمة تساوي زاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

المثال 1 يوضّح طريقة استخدام مسلّمة ASA في البرهان.

التقويم التكويني

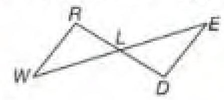
استخدم التمارين الواردة في "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: L هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{WE}$
$\overline{WR} \parallel \overline{ED}$

المطلوب: $\triangle WRL \cong \triangle EDL$

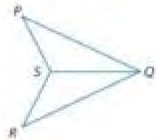


البرهان:

العبارات (المبررات)

1 L هي نقطة المنتصف للقطعة $\overline{WE}$ (معطيات)
2 $\overline{WL} \cong \overline{LE}$ (نظرية نقطة المنتصف)
3 $\overline{WR} \parallel \overline{ED}$ (معطيات)
4 $\angle W \cong \angle E$ (نظرية الزوايا الداخلية)
5 $\angle WLR \cong \angle ELD$ (نظرية الزوايا الرأسية)
6 $\triangle WRL \cong \triangle EDL$ (مسلّمة ASA)

مثال 1 استخدام مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) لإثبات أن المثلثين متطابقان



اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$.
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1. المعطيات
2. $\angle PQS \cong \angle RQS$	2. تعريف منصّف الزاوية
3. $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3. خاصية الانعكاس في التطابق
4. $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4. مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

تمرين موجّه

1. اكتب برهانًا تسلسليًا. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{ZX}$ ينصف $\angle WZY$، $\overline{XZ}$ ينصف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

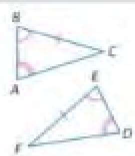
2 نظرية تساوي زاويتين وضلع

تطابق زاويتين وضلع غير محصور كافٍ أيضًا للبرهنة على تطابق مثلثين. تمثل علاقة التطابق هذه نظرية لأنها يمكن البرهنة عليها باستخدام نظرية الزوايا الثالثة.

النظرية 12.5 تطابق بتساوي زاويتين وضلع (AAS)

عند تطابق زاويتين والضلع غير المحصور بينهما في مثلث مع زاويتين وضلع مناظرين في مثلث آخر، فالمثلثان متطابقان.

مثال إذا كانت الزاوية $\angle A \cong \angle D$،
الزاوية $\angle B \cong \angle E$،
و الضلع $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



إثبات نظرية زاويتين وضلع

المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

$\angle L \cong \angle Q$ المعطيات
$\angle M \cong \angle R$ المعطيات
$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ المعطيات
$\angle N \cong \angle S$ نظرية الزوايا الثالثة
$\triangle LMN \cong \triangle QRS$ مسلّمة زاويتين وضلع

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

1.
$\overline{ZX}$ ينصف $\angle WZY$ المعطيات
$\angle WZX \cong \angle YZX$ تعريف منصف الزوايا
$\overline{ZX}$ ينصف $\angle YXW$ المعطيات
$\angle WXZ \cong \angle YXZ$ تعريف منصف الزوايا
$\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ خاصية الانعكاس
$\triangle WXZ \cong \triangle XZY$ مسلّمة ASA

التركيز على محتوى الرياضيات

التدخل التقويمي قد يسأل الطالب عن إثبات التطابق باستخدام المسلّمة SSA. وضّح أن المثلثين اللّذين بهما يتطابق زوجان من الأضلاع والزوايا غير المحصورة لا يكونان بالضرورة متطابقيْن. فموقع الزوايا بالنسبة إلى أضلاع المثلث هو أمرٌ حاسمٌ وأساسيٌ لإثبات التطابق.

2 نظرية تطابق زاويتين وضلع (AAS)

المثال 2 يوضّح طريقة إثبات تطابق مثلثين باستخدام النظرية 4.5.
المثال 3 يوضّح طريقة استخدام المثلثات المتطابقة في قياس المسافات بطريقة غير مباشرة.

أمثلة إضافية

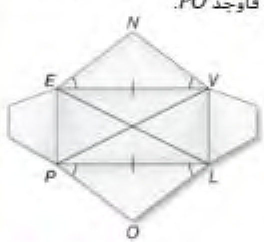
2 اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات: $\angle NKL \cong \angle NJM$
$\overline{KL} \cong \overline{JM}$

المطلوب: $\overline{LN} \cong \overline{MN}$

البرهان:
$\angle N$ و $\angle NKL \cong \angle NJM, \overline{KL} \cong \overline{MN}$
$\angle N \cong$ طبقًا لخاصية الانعكاس.
ومن ثم، $\triangle JNM \cong \triangle KNL$
طبقًا لمسلّمة AAS. وفقًا للنظرية $\overline{LN} \cong \overline{MN}$ .CPCTC

3 **التصنيع** تصمّم ميساء قالبًا ورقيًا لمظروفٍ معين. قامت بتصميم اللسان العلوي واللسان السفلي على هيئة مثلثين متساويي الساقين بهما قاعدتان متطابقتان وزوايا قاعدة متطابقة. إذا كان $EV = 8$ cm وارتفاع المثلث المتساوي الساقين يساوي 3 cm. فأوجد PO.



$PO = 5$ cm

انتبه!

أين الضلع؟ يمكن استخدام المسلّمة AAS فقط عند عدم وجود الضلع بين الزاويتين.

مثال 2 استخدام مسلّمة زاويتين وضلع لإثبات أن المثلثين متطابقان

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: نعلم أن $\angle DAC \cong \angle BEC$ و $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، $\angle C \cong \angle C$ حسب خاصية الانعكاس. حسب مسلّمة ضلعين وزاوية $\triangle ACD \cong \triangle ECB$.

تمرين موجّه

2. اكتب برهانًا تسلسليًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

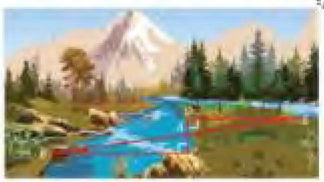
المعطيات: $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$ ، $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استخدام المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي من الصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من الحياة اليومية تطبيق تطابق المثلثات

الخدمة المجتمعية يعمل خلف ضمن مجموعة للخدمة المجتمعية لبناء جسر يعبر قناة في حديقة محلية. سيغطي الجسر القناة بين النقطتين C و B. حدد خلف النقطة الثابتة D لاستخدامها كنقطة مرجعية بحيث يكون بين القطع العلاقات الموضحة. A نقطة منتصف $\overline{CD}$ و DE تساوي 5 أمتار. ما الطول المطلوب للجسر؟



لتحديد طول $\overline{CD}$، يجب أن نبرهن أولاً على أن المثلثين اللذين ضمنهما خلف متطابقان.

- بما أن $\overline{CB}$ متعامد على كل من $\overline{CB}$ و $\overline{DE}$، تشكل القطع مثلثات قائمة الزاوية كما يظهر على الرسم التخطيطي.
- كل الزوايا القائمة متطابقة. إذًا $\angle EDA \cong \angle BCA$.
- النقطة A هي نقطة المنتصف في $\overline{CD}$. إذًا $\overline{CA} \cong \overline{AD}$.
- $\angle BAC$ و $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس، ولذلك فهما متطابقتان.

ولهذا وبموجب مسلّمة زاويتين وضلع محصور بينهما، فإن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$.

بما أن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ ، $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ حسب CPCTC. بما أن قياس $\overline{DE}$ هو 5 أمتار، إذًا قياس $\overline{CB}$ كذلك 5 أمتار. إذًا الطول المطلوب للجسر هو 5 أمتار.

نصيحة دراسية

تطابق الزوايا الثلاث في المثال 3، $\angle B$ و $\angle E$ متطابقتان حسب نظرية الزوايا الثالثة. إلا أن تطابق الزوايا المتناظرة الثلاث معًا لا يكفي للبرهنة على أن المثلثين متطابقان.

التدريس المتمايز OL BL

تمرين شخصي اطلب من الطلاب دراسة براهين الأمثلة الموجودة في هذا الدرس وملاحظة الخواص المتكررة، مثل خواص انعكاس الزوايا، والقطع المستقيمة، والمنصفات، ونقاط المنتصف، وغيرها. يستطيع الطلاب أن يبدؤوا بمشاهدة بعض الأشياء أثناء عملهم على البراهين والتي يمكن أن تتضمّن الخواص المتكررة، والنظريات، والصيغ، والطرق التي يمكنهم الرجوع إليها في الدروس اللاحقة. كما يمكنهم النظر إلى ترتيب الخطوات في البراهين الحرّة، والبراهين التسلسلية، والبراهين ذات العمودين من أجل معرفة التشابهات والاختلافات.

تمرين موجّه

3. في مظلة اللافتة الظاهرة على اليسار، $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}$، $\angle BAC \cong \angle DCE$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. واكتب برهان حرّ لإثبات أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$. **انظر الهامش.**

لقد تعلمت عدة طرق للبرهنة على تطابق المثلثات.

ملخص المفهوم البرهنة على تطابق المثلثات

ضلع-ضلع-ضلع	ضلع-زاوية-ضلع	زاوية-ضلع-زاوية	ضلع-ضلع-زاوية
			
تطابق ثلاثة أزواج من الأضلاع المتناظرة.	تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.	تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المتناظرين غير المحصورين.

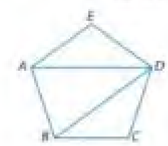
التحقق من فهمك

مثال 1 **البرهان** اكتب النوع المحدد من البراهين. **1-4. انظر الهامش.**

1. برهان تسلسلي

المعطيات: خماسي منتظم $ABCDE$

المطلوب: $\overline{AD} \cong \overline{DB}$



2. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{WT} \parallel \overline{NE}, \overline{TO} \cong \overline{EO}$

المطلوب: $\triangle WOT \cong \triangle NOE$

مثال 2

3. برهان حرّ

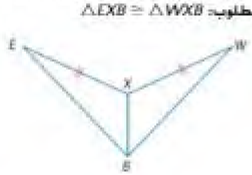
المعطيات: $\overline{RV} \parallel \overline{TW}; \overline{RT} \parallel \overline{VW}$

المطلوب: $\triangle RWV \cong \triangle WRT$

4. برهان من عمودين

المعطيات: $\overline{EX} \cong \overline{WX}$، $\overline{XB}$ ينصف $\angle EXW$ و $\angle EBW$

المطلوب: $\triangle EXB \cong \triangle WXB$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات موضحين كيفية إثبات أن المثلثين متطابقان مستخدمين مسلّمة ASA و/أو مسلّمة AAS. وانشر مقاطع الفيديو على موقع ويب لمشاركة مواقع الفيديو واجعل كل مجموعة تشاهد مقاطع فيديو المجموعات الأخرى.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-5 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. لدينا في المعطيات $\overline{BC} \perp \overline{AC}$، $\overline{DE} \perp \overline{CE}, \angle BAC \cong \angle DCE,$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. بما أن $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ و $\overline{DE} \perp \overline{CE}$، و $\angle BCA$ و $\angle DEC$ عبارة عن زوايا قائمة. $\angle BCA \cong \angle DEC$ وهذا لأن جميع الزوايا القائمة تكون متطابقة. بعد ذلك، وطبقًا لمسلّمة AAS، $\triangle BAC \cong \triangle DCE$. ومن ثم، $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ وفقًا للنظرية CPCTC.

إجابات إضافية

1. 

2. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\overline{WT} \parallel \overline{NE}; \overline{TO} \cong \overline{EO}$ (معطيات)
2. $\angle OTW \cong \angle OEN$، $\angle OWT \cong \angle ONE$ (الخطوط المتوازية يقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة)
3. $\triangle WOT \cong \triangle NOE$ (مسلّمة AAS)

3. إذا قطع خط مستعرض خطين متوازيين، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة. ومن ثم، $\angle 1 \cong \angle 3; \angle 2 \cong \angle 4$. $\overline{RW} \cong \overline{RW}$ طبقًا لخاصية الانعكاس. $\triangle RWV \cong \triangle WRT$ وفقًا لخاصية التطابق للمسلّمة ASA.

4. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\overline{EX} \cong \overline{WX}$، $\overline{XB}$ ينصف $\angle EXW$ و $\angle EBW$ (معطيات)
2. $\angle EXB \cong \angle WXB; \angle EBX \cong \angle WBX$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\triangle EXB \cong \triangle WXB$ (مسلّمة AAS)

إجابات إضافية

5a. نحن نعلم أن $\angle BAE$ و $\angle DCE$ متطابقتان لأنهما زاويتان قائمتان. $\overline{AE}$ متطابق مع $\overline{EC}$ حسب نظرية نقطة المنتصف. وحسب نظرية الزوايا المتقابلة الرأسية، $\angle DEC \cong \angle BEA$. حسب المسلّمة ASA، فإن المسّاح يعرف أنّ $\triangle BAE \cong \triangle DCE$. وفقًا للنظرية CPCTC، $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ إذًا، يستطيع المسّاح قياس $\overline{DC}$ ويعرف المسافة بين A و B.

6. **البرهان:** وفقًا لتعريف منصّف الزاوية، $\angle XYW \cong \angle XWY$ و $\angle ZWY \cong \angle ZYW$. يتشارك المثلثان في الضلع WY. وفقًا لخاصية الانعكاس، $\overline{WY} \cong \overline{YW}$ وفقًا للمسلّمة ASA، $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$.

7. **البرهان:** يوجد خطان متعامدان على الخط نفسه، وهما موازيان لبعضهما البعض. ومن ثم، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. عندما يقطع خط مستعرض خطوطًا متوازية، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة. $\angle BCA \cong \angle DAC$ ،$\angle BAC \cong \angle DCA$. يتشارك المثلثان في الضلع $\overline{AC}$. ومن ثم، تعرفنا خاصية الانعكاس أن $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفقًا للمسلّمة ASA، $\triangle ACD \cong \triangle CAB$.

8. **البرهان:** البطاقات متساوية في الحجم. وهذا ما يجعل الضلعان متطابقين. إذا تم وضع البطاقات بالزاوية نفسها، فإن المثلثات ستكون متطابقة وفقًا لمسلّمة SAS. والبطاقات الأفقية التي تشكّل الأرضيات تشبه الخطوط المتوازية. والبطاقات التي تشكّل جوانب المنزل تشبه الخطوط المستعرضة. ومن ثم، تكون الزوايا الداخلية المتبادلة والمتناظرة متطابقة. باستخدام تلك الخصائص، نحصل على منزل ثابت من البطاقات.

مثال 3

5. **بناء الجسور** تحتاج مهندسة مسح إلى إيجاد المسافة من النقطة A إلى النقطة B عبر أحد الأودية. وضعت وتدًا عند A، ووضع زميل لها وتدًا عند B على الجانب الآخر من الوادي. ثم حددت مهندسة المسح النقطة C على نفس الجانب من الوادي الموجود عليه A بحيث $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ثم وضع وتد رابع عند E، نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا، ثم وضع وتد عند D بحيث إن $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ وتقع D، و E، و B على الخط نفسه.

a. اشرح كيف تستطيع مهندسة المسح استخدام المثلثات التي تشكلت لإيجاد AB. **انظر الهامش.**

b. إذا كان $AC = 1500$ مترًا، و $DC = 690$ مترًا، و $DE = 973.5$ مترًا فما قياس AB؟ اشرح تبريرك.

690 m، بما أن $DC = 690$ m و $\overline{DC} \cong \overline{AB}$، فحسب تعريف التطابق، يكون $AB = 690$ m.

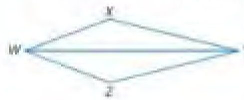
التمرين وحل المسائل

مثال 1

البرهان اكتب برهانًا مرقمًا. **6–7. انظر الهامش.**

6. **المعطيات:** $\overline{WY}$ ينصف $\angle XWZ$ و $\angle XYZ$

المطلوب: $\triangle WYX \cong \triangle YWZ$



7. **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}; \overline{AB} \perp \overline{AD}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

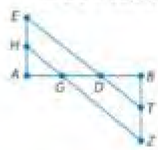
8. **الألعاب** الصورة على اليسار توضح بيت بطاقات. بيت البطاقات هو هيكل ناتج عن تكديس بطاقات اللعب فوق بعضها. اشرح كيف تساعد الخطوط المتوازية والمثلثات المتطابقة من يحاول بناء بيت بطاقات. **انظر الهامش.**

مثال 2

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **9–10 انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

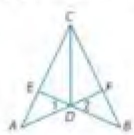
9. **المعطيات:** $\overline{HZ} \parallel \overline{ET}; \overline{AC} \cong \overline{BD}; \angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BGZ$



10. **المعطيات:** $\triangle CDB \cong \triangle CDA$

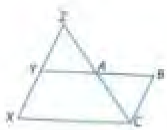
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BDF$



11. **فرضيات** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{AY} \cong \overline{BA}; \overline{ZX} \parallel \overline{BC}$

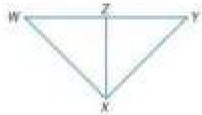
المطلوب: $\overline{YZ} \cong \overline{BC}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	6-13, 22-24, 26-36	7-13 فردي, 27-30	6-12 زوجي, 22-24, 26, 31-36
OL أساسي	7-15 فردي, 16, 17-21 فردي, 21-24, 26-36	6-13, 27-30	14-24, 26, 31-36
BL متقدم	14-36		

12. **البرهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

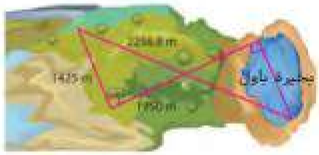


المعطيات: $\overline{XZ}$ هو المنصف العمودي لـ $\overline{WY}$

المطلوب: $\angle W \cong \angle Y$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

مثال 3

13. **تمثيل النماذج** تريد مدرسة ثانوية أن تقيم سباق تجديف طوله 1500 متر على بحيرة طول لكنها غير متأكدة مما إذا كانت البحيرة طويلة بما يكفي. لقياس المسافة عبر البحيرة، يحدد أعضاء الطاقم رؤوس المثلثات أدناه ويتوصلون إلى قياسات أطوال $\triangle HJK$ كما يظهر أدناه.



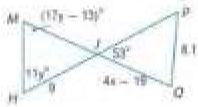
a. اشرح كيف يستطيع فريق الطاقم استخدام المثلثات التي تتشكل لتقدير مسافة FG عبر البحيرة. **انظر الهامش.**

b. باستخدام القياسات المعطاة، هل البحيرة طويلة بما يكفي لكي يستخدمها الفريق كموقع لسباقهم؟ **اشرح تبريرك. لا؛ $HJ = 1425$ m، إذًا $FG = 1425$ m. إذا كان السباق سيبلغ 1500 m، فالبحيرة ليست طويلة بما يكفي، بما أن $1500 > 1425$.**

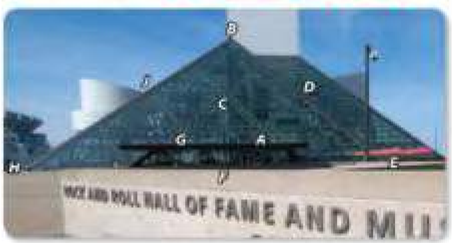
الجبر أوجد قيمة المتغير الذي يعطي مثلثات متطابقة.

14. $\triangle BCD \cong \triangle WXY$ $x = 4.5;\ y = 8$

15. $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$ $x = 7,\ y = 5$



16. **تصميم المسرح** تبدو الأطواق المعدنية لسقف المسرح المكشوف الظاهر أدناه مكونة من عدة أنواع مختلفة من المثلثات المتطابقة. افترض أن الأطواق المعدنية التي يبدو أنها تقع على خط واحد تقع فعلًا على خط واحد. **16a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



a. إذا كان $\overline{AB}$ ينصف $\angle CBD$ و $\angle CAD$، فبرهن على أن $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

b. إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ و $\angle FCA \cong \angle EDA$، فبرهن على أن $\triangle CAF \cong \triangle DAE$.

c. إذا كان $\angle BHG \cong \angle BEA$ و $\overline{HB} \cong \overline{EB}$ و $\angle HGJ \cong \angle EAD$، و $\angle JGB \cong \angle DAB$، فبرهن على أن $\triangle BHG \cong \triangle BEA$.

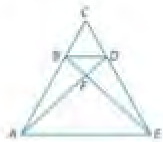
إجابة إضافية

13a. بما أن $\angle HJK \cong \angle GFK$ جميع الزوايا القائمة متطابقة. وتقول المعطيات إن $\overline{JK} \cong \overline{KF}$ و $\angle HKJ$ و $\angle FKG$ زاويتان متقابلتان بالرأس. إذًا $\angle HKJ \cong \angle FKG$ بناءً على نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس. وبناءً على مسلّمة ASA، يكون $\triangle HJK \cong \triangle GFK$. إذًا $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$ بناءً على نظرية CPCTC.

البرهان اكتب برهانًا حرًا. **18–17. انظر الهامش.**

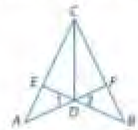
17. **المعطيات:** $\overleftrightarrow{RS}$ ينصف $\angle CSA$ و $\angle CHA$
المطلوب: $\triangle CHS \cong \triangle AHS$

18. **المعطيات:** $\triangle BDF$ متساوي الأضلاع، $\angle BAD \cong \angle DEB$
المطلوب: $\triangle BAD \cong \triangle DEB$



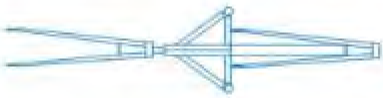
البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **20–19. انظر الهامش.**

19. **المعطيات:** $\angle CED \cong \angle CFD$، $\overline{CD}$ ينصف $\angle ECF$
المطلوب: $\triangle CED \cong \triangle CFD$



20. **المعطيات:** $\overline{VK} \perp \overline{KX}, \overline{EM} \perp \overline{MX}; \overline{KX} \cong \overline{MX}$
المطلوب: $\angle V \cong \angle E$

21. **الدراجة الثلاثية** يصور الرسم أدناه هيكل دراجة ثلاثية يتم النظر إليها من الجو.



a. عيّن نوعين من المثلثات المستخدمة لعمل الهيكل الأساسي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

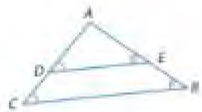
b. ما المعلومات المطلوبة لإثبات تطابق المثلثات؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

23. خليفة على صواب. لا يمكن أن يكون المثلثان متطابقين. بالرغم من أن جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، لكن الأضلاع غير متطابقة. إذاً، المثلثان غير متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

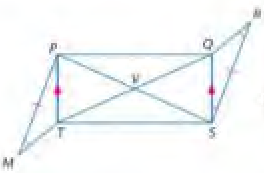
22. **الكتابة في الرياضيات** باستخدام مستطيل، اشرح طريقتين على الأقل لإثبات أن القطر يقسم المستطيل إلى مثلثين متطابقين. **انظر الهامش.**

23. **تحليل الخطأ** يقول خليفة إنه من الممكن إثبات أن $\triangle ACB \cong \triangle ADE$ ولكن خميس يختلف معه. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.



24. **التبرير** حدد ما إذا كان يمكن استخدام مسلّمة ضلعين وزاوية (SSA) لإثبات تطابق مثلثين. اشرح تبريرك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

25. **تحدٍ** باستخدام المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي، اكتب برهانًا تسلسليًا يثبت أن $\triangle PVT \cong \triangle SVQ$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



26. **الكتابة في الرياضيات** كيف تعرف الطريقة (مسلّمة الأضلاع الثلاثة ومسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما إلخ) التي يتم استخدامها عند البرهنة على تطابق المثلثات؟ استخدم مخططًا لشرح تبريرك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 23، خليفة محق. لقد وضّح خميس أن كل الأزواج الثلاثة من الزوايا المتناظرة للمثلثين المتطابقين متطابقة، ولكن هذا لم يثبت أنّ $\triangle ADE \cong \triangle ACB$. في الحقيقة، قد يكون بالمثلثين زوايا متناظرة ومتطابقة، ولكن قد تختلف أطوال أضلاعها.

إجابات إضافية

17. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overleftrightarrow{RS}$ ينصف $\angle CSA$ و $\angle CHA$ (معطيات)
2. $\overline{SH} \cong \overline{SH}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle SHC \cong \angle SHA; \angle CSH \cong \angle ASH$ (تعريف منصف الزاوية)
4. $\triangle CHS \cong \triangle AHS$ (مسلّمة ASA)

18. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle BDF$ متساوي الأضلاع، $\angle DEB \cong \angle BAD$ (معطيات)
2. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle FBD \cong \angle FDB$ (المثلثات متساوية الأضلاع تكون متساوية الزوايا)
4. $\triangle BAD \cong \triangle DEB$ (مسلّمة AAS)

19. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle CED \cong \angle CFD$، $\overline{CD}$ ينصف $\angle ECF$ (معطيات)
2. $\angle ECD \cong \angle FCD$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle CED \cong \triangle CFD$ (مسلّمة AAS)

20. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{VK} \perp \overline{KX}; \overline{EM} \perp \overline{MX}; \overline{KX} \cong \overline{MX}$ (معطيات)
2. $\angle VKX$ and $\angle EMX$ هي زوايا قائمة (الخطوط المتعامدة تكوّن زوايا قائمة.)
3. $\angle VKX \cong \angle EMX$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)
4. $\angle KXV \cong \angle MXE$ (الزوايا الرأسية متطابقة)
5. $\triangle VKX \cong \triangle EMX$ (مسلّمة ASA)
6. $\angle V \cong \angle E$ (النظرية CPCTC)

22. الإجابة النموذجية: الطريقة 1، استخدام المسلّمة SSS لأن الأضلاع المقابلة للمستطيل تكون متطابقة، والمثلثات سوف تتشارك ضلعًا واحدًا. الطريقة 2، استخدام مسلّمة SAS لأن الأضلاع المقابلة من المستطيل تكون متطابقة، والزوايا المقابلة تكون متطابقة.

تدريب على الاختبار المعياري

27. المعطيات: $\overline{BC}$ متعامد على $\overline{AD}$، $\angle 2 \cong \angle 1$.

ما النظرية أو المسلّمة التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟ **B**

A AAS   C SAS

B ASA   D SSS

28. الإجابة القصيرة اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لإيجاد قيم $f(n)$ في الجدول. $\frac{1}{4}n + 3$

n	−8	−4	−1	0	1
$f(n)$	1.00	2.00	2.75	3.00	3.25

29. الجبر إذا كان 7− مضروبًا في عدد أكبر من 1، فأي مما يلي يصف النتيجة؟ **J**

F عدد أكبر من 7

G عدد يتراوح بين 7− و 7

H عدد أكبر من 7−

J عدد أقل من 7−

30. SAT/ACT $\sqrt{121 + 104} = ?$ **A**

A 15

B 21

C 25

D 125

E 225

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$. اشرح. **31–32. انظر الهامش.**

31. $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5), X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$

32. $A(0, 5), B(0, 0), C(-2, 0), X(4, 8), Y(4, 3), Z(6, 3)$

33. الجبر إذا كان $\triangle RST \cong \triangle JKL$، و $RS = 7$، و $ST = 5$، و $RT = 9 + x$، و $JL = 2x - 10$، و $JK = 4y - 5$، فارسم شكلاً يمثل المثلثات المتطابقة وحدد له أسماء. ثم أوجد x و y. **انظر الهامش.**

34. المعرفة المالية يتقاضى رشيد 5 AED على طلاء صندوق البريد و 4 AED في الساعة لجز أعشاب حديقة. اكتب معادلة تمثل مقدار المال الذي يستطيع رشيد أن يكسبه من مالك منزل يطلي صندوق بريده ويجز أعشاب حديقته. $y = 4x + 5$

مراجعة المهارات

البرهان اكتب برهانًا من عمودين لكلٍ مما يلي. **35–36. انظر الهامش.**

35. المعطيات: $\angle 2 \cong \angle 1$

$\angle 1 \cong \angle 3$

المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

36. المعطيات: $\angle MJK \cong \angle KLM$

$\angle LMJ$ و $\angle KLM$ متكاملتان.

المطلوب: $\overline{KJ} \parallel \overline{LM}$

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب ملاحظة ودراسة المفاهيم الأساسية. اجعلهم يكتبوا استنتاجًا عن أوجه التشابه والاختلاف بين مفاهيم الأمس للمسلّمات SSS و SAS، ومفاهيم اليوم للمسلمات ASA و AAS.

إجابات إضافية

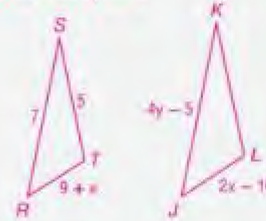
31. $AB = \sqrt{125}, BC = \sqrt{221}, AC = \sqrt{226}, XY = \sqrt{125}, YZ = \sqrt{221}, XZ = \sqrt{226}$

الأضلاع المتناظرة لها القياس نفسه وتكون متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ طبقًا لمسلّمة SSS.

32. $AB = 5, BC = 2, AC = \sqrt{29}, XY = 5, YZ = 2, XZ = \sqrt{29}$

الأضلاع المتناظرة متساوية في القياس ومتطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ حسب مسلّمة SSS.

33. $x = 19; y = 3$



35. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 2 \cong \angle 1, \angle 1 \cong \angle 3$ (مُعطى)
2. $\angle 2 \cong \angle 3$ (خاصية التعدي)
3. $AB \parallel DE$ (إذا كانت الزوايا الداخلية ∠ المتبادلة ≅ فتكون الخطوط مستقيمة)

36. البرهان:

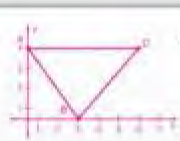
العبارات (المبررات)

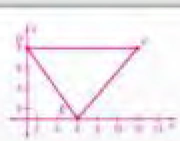
1. $\angle MJK \cong \angle KLM$، و $\angle LMJ$ و $\angle KLM$ زاويتان متكاملتان. (معطيات)
2. $m\angle MJK = m\angle KLM$ (تعريف ≅ ∠)
3. $m\angle LMJ + m\angle KLM = 180$ (تعريف ≅ التكامل ∠)
4. $m\angle LMJ + m\angle MJK = 180$ (بالتعويض.)
5. $\angle LMJ$ and $\angle MJK$ متكاملتان. (تعريف التكامل ∠)
6. $\overline{KJ} \parallel \overline{LM}$ (إذا كانت الزوايا الداخلية المتتالية ∠ متكاملة، فتكون الخطوط المستقيمة)

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اطلب من الطلاب إيجاد أمثلة مضادة لأنواع البراهين التالية: SSA و AAA.

الإجابة النموذجية للمسلمة AAA: $\angle A \cong \angle D$، و $\angle B \cong \angle E$، و $\angle C \cong \angle F$. بما أن $AC = 6$ و $DF = 12$، إذًا $\overline{AC} \not\cong \overline{DF}$؛ ومن ثم $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$.





1 التركيز

الهدف استكشاف التطابق في المثلثات قائمة الزاوية.

المواد
- مساطر
- منقلة

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات من 3 أو 4، متنوعة القدرات. ثم اطلب منهم إكمال التمارين 3-1، والنشاط، والتمارين 6-4.

اطرح الأسئلة التالية:
- كيف يتم تمييز المثلثات القائمة بطريقة مختلفة عن المثلثات الأخرى؟ لوجود رمز المثلث القائم بها.
- ما الخصائص الفريدة الأخرى التي تميز المثلثات القائمة؟ الأضلاع المجاورة للزاوية القائمة تُسمّى الساقين، والضلع المقابل للزاوية القائمة يُسمّى الوتر.
- هل يوجد نوع آخر من المثلثات تُسمّى أجزاؤه بأسماء خاصة؟ المثلث متساوي الساقين

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 7 إلى 15.

مختبر الهندسة 12-5
التطابق في المثلثات قائمة الزاوية

في الدرسين 4-12 و 5-12، تعلمت نظريات ومسلّمات تبرهن على تطابق المثلثات. كيف يتم تطبيق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

استخدام معايير التطابق والتشابه بالنسبة للمثلثات لحل المسائل وإثبات العلاقات في الأشكال الهندسية.

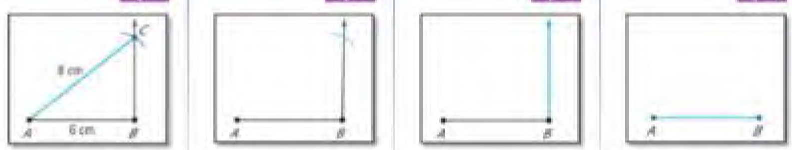
ادرس كل زوج من المثلثات قائمة الزاوية.

التحليل

1. هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إذا كان الأمر كذلك، فما نظرية أو مسلّمة التطابق المستخدمة؟ نعم، a. ضلعين وزاوية (SAS)، b. زاويتين وضلع (AAS)، c. زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)
2. أعد صياغة قواعد التطابق المأخوذة من التمرين 1 باستخدام الساق، (L)، أو الوتر، (H)، الذي يحل محل الضلع. احذف A لأية زاوية قائمة بما أننا نعلم أن كل المثلثات القائمة الزاوية تحتوي على زاوية قائمة وكل الزوايا القائمة متطابقة. a. LL, b. HA, c. LA
3. **التخمين** إذا كنت تعلم أن الساقين المتناظرتين في مثلثين قائمي الزاوية متطابقتان، فما المعلومات الأخرى التي تحتاج إليها لإثبات تطابق المثلثين؟ اشرح. لا شيء؛ يكفي زوجان متطابقتان من السيقان للبرهنة على تطابق المثلثات قائمة الزاوية.

في الدرس 5-12، تعلمت أن SSA ليست اختبارًا صالحًا لتحديد تطابق المثلثات. هل يمكن استخدام SSA في إثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟

النشاط مسلّمة ضلعين وزاوية (SSA) والمثلثات قائمة الزاوية



الخطوة 1 ارسم $\overline{AB}$ بحيث $AB = 6$ سنتيمترات.

الخطوة 2 استخدم منقلة لرسم شعاع من B متعامد على $\overline{AB}$.

الخطوة 3 افتح الفرجار بعرض 8 سم. ضع النقطة عند A وارسم قوسًا يتقاطع مع الشعاع.

الخطوة 4 سمّ التقاطع C وارسم $\overline{AC}$ لاستكمال $\triangle ABC$.

التحليل

4. هل يقدم النموذج مثلثًا متفردًا؟ نعم
5. هل يمكنك استخدام طول الوتر وطول الساق لإثبات تطابق المثلثين قائمي الزاوية؟ نعم
6. التخمين بخصوص حالة SSA التي تنطبق على المثلثات قائمة الزاوية. SSA اختبار صالح لتطابق المثلثات قائمة الزاوية.

(تابع في الصفحة التالية)

المتابعة

استكشف الطلاب مسلّمات ونظريات تطابق المثلثات.

اطرح السؤال التالي:
- لماذا تعد مسلّمات تطابق المثلثات مفيدة؟ الإجابة النموذجية: تسمح لك المسلّمات والنظريات بإثبات تطابق المثلثات من خلال استخدام ثلاثة فقط من أجزاء المثلث المتطابق.

مختبر الهندسة
التطابق في المثلثات قائمة الزاوية CCSS

يوفر عملك في الصفحة السابقة دليلاً على أربع طرق لإثبات تطابق المثلثات قائمة الزاوية.

النظرية تطابق المثلثات قائمة الزاوية

النظرية 12.6 تطابق بتساوي ساقين
إذا كانت ساقا مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساقين المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *LL* يرمز إلى تساوي ساقين

النظرية 12.7 تطابق وتر وزاوية
إذا كان الوتر وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقين مع الوتر والزاوية الحادة المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *HA* يرمز إلى وتر وزاوية

النظرية 12.8 تطابق ساق وزاوية
إذا كانت ساق واحدة وزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية متطابقتين مع الساق والزاوية الحادة المتناظرتين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *LA* يرمز إلى ساق وزاوية

النظرية 12.9 تطابق وتر وساق
إذا كان الوتر وساق في مثلث قائم الزاوية متطابقان مع الوتر والساق المتناظرين في مثلث آخر قائم الزاوية، فالمثلثان متطابقان.

الاختصار *HL* يرمز إلى وتر وساق

التمارين

حدد ما إذا كان كل زوجين من المثلثات متطابقين. إذا كان الأمر كذلك، فحدد المسلّمة أو النظرية المستخدمة.

7.  نعم، LA

8.  لا

9.  نعم، HL

البرهان **اكتب برهاناً لكلٍ مما يلي.** 10–11. انظر ملحق إجابات الوحدة 12. 13–12. انظر الهامش.

10. النظرية 12.6
11. النظرية 12.7
12. النظرية 12.8 (تلميح: هناك حالتان محتملتان.)
13. النظرية 12.9 (تلميح: استخدم نظرية فيثاغورس.)

استخدم الشكل على اليسار. 14–15. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

14. **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

15. **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
E نقطة منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 13–10 للتأكد من فهم الطلاب لطريقة كتابة برهان حرّ. استخدم التمارين 15–14 للتأكد من فهم الطلاب متى يستخدمون نظريات تطابق المثلثات القائمة في البرهان.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب كتابة معادلة جبرية للمثلث القائم تثبت أنّ مجموع الزوايا الأخرى يساوي 90. إذا كان $m\angle C = 90$ و $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ حسب نظرية مجموع الزوايا. إذاً $m\angle A + m\angle B = 90$.

إجابات إضافية

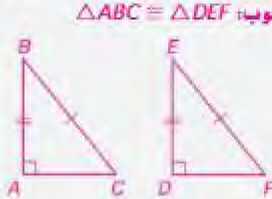
12. **الحالة 1:**
المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

البرهان: من المعطيات $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ قائما الزاوية $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ حسب تعريف المثلثات القائمة، $\angle A$ و $\angle D$ زوايا قائمة. إذاً، $\angle A \cong \angle D$ نظراً لأن كل الزوايا القائمة متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ حسب المسلّمة ASA.

الحالة 2:
المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle EFD$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{CB} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle F$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EFD$

البرهان: من المعطيات $\triangle ABC$ و $\triangle EFD$ قائما الزاوية $\overline{CB} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle F$ حسب تعريف المثلثات قائمة الزاوية. $\angle A$ و $\angle E$ زوايا قائمة. إذاً $\angle A \cong \angle E$ نظرًا لأن كل الزوايا القائمة متطابقة. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ حسب المسلّمة AAS.

13. **المعطيات:** $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية.
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



البرهان: العبارات (المبررات)
1. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (معطيات)
2. $AB = DE$, $BC = EF$ (تعريف التطابق)
3. $(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2$, $(DE)^2 + (FD)^2 = (EF)^2$ (نظرية فيثاغورس.)
4. $(AB)^2 + (CA)^2 = (DE)^2 + (FD)^2$ (خاصية التعويض.)
5. $(AB)^2 + (CA)^2 = (AB)^2 + (FD)^2$ (خاصية التعويض.)
6. $(CA)^2 = (FD)^2$ (خاصية الطرح.)
7. $CA = FD$ (خواص الجذور التربيعية)
8. $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (مسلّمة SSS)

الدرس 6-12 المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

السابق
- تعرفت على المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

الحالي
1. استخدام خواص المثلثات متساوية الساقين.
2. استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع.

لماذا؟
- تحتوي قضبان قطارات الملاهي على دعامات مثلثة بين القضبان للدعم والتثبيت. الدعامات المثلثة التي في الصورة مثلثات متساوية الساقين.

المفردات الجديدة
ساقا المثلث متساوي الساقين
legs of an isosceles
زاوية الرأس
vertex angle
زوايا القاعدة
base angles

إثبات نظريات حول المثلثات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات عاكسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 خواص المثلثات متساوية الساقين

تذكّر أن المثلثات متساوية الساقين تحتوي على ضلعين متطابقين على الأقل. أجزاء المثلث متساوي الساقين لها أسماء خاصة.

تسمى الضلعان المتطابقان **ساقي المثلث متساوي الساقين**. والزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين يمثلان الساقين تُسمى **زاوية الرأس**. ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس تسمى القاعدة. الزاويتان المتكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتا القاعدة**.

$\angle 1$ هي زاوية الرأس.

$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتا القاعدة.

النظريات المثلث متساوي الساقين

12.10 نظرية المثلث متساوي الساقين إذا كان ضلعان في المثلث متطابقين، فالزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين متطابقتان.

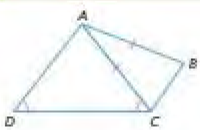
مثال إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

12.11 معكوس نظرية المثلث متساوي الساقين
إذا كانت زاويتان في المثلث متطابقتين، فالضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين متطابقان.

مثال إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$.

سوف تثبت النظرية 12.11 في التمرين 37.

مثال 1 القطع المتطابقة والزوايا المتطابقة



a. اذكر اسم زاويتين متطابقتين ليست عليهما علامة.
$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، و $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$.
إذًا $\angle ACB \cong \angle B$.

b. اذكر اسم قطعتين متطابقتين ليست عليهما علامة.
$\overline{AD}$ يقابل $\angle ACD$ و $\overline{AC}$ يقابل $\angle D$.
إذًا $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

755

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6-12 تحديد المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

الدرس 6-12 استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع ومتساوية الساقين.

بعد الدرس 6-12 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:
- لماذا المثلثات متساوية الساقين؟ لأن كل مثلث يوجد به ضلعان متطابقان.
- ما الذي يبدو صحيحًا عن الزوايا المقابلة للأضلاع المتساوية؟ تبدو الزوايا متطابقة.
- ما نوع المثلث الناتج إذا كان الضلع الثالث للمثلث مطابقًا للضلعين الآخرين؟ مثلث متساوي الأضلاع
- ما الذي تعتقد أنه صحيح بخصوص الزوايا الثلاث إذا كانت الأضلاع الثلاثة متطابقة؟ تكون الزوايا أيضًا متطابقة، وقياس كل زاوية منها 60.

1 خواص المثلثات متساوية الساقين

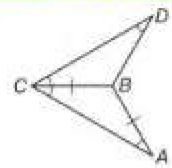
المثال 1 يوضح طريقة استخدام نظرية المثلث متساوي الساقين في تحديد الأضلاع المتطابقة والزوايا المتطابقة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1



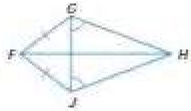
a. اذكر اسم زاويتين متطابقتين ليست عليهما علامة.
$\angle BCA$ و $\angle A$

b. اذكر اسم قطعتين مستقيمتين متطابقتين ليست عليهما علامة.
$\overline{BD} \cong \overline{BC}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات ليسجلوا مقاطع فيديو توضح كيفية إثبات أن المثلثات إما متساوية الساقين أو متساوية الأضلاع. شارك مقطع الفيديو الخاص بكل مجموعة مع الصف الدراسي.

تمرين موجّه



1A. اذكر اسم زاويتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

1B. اذكر اسم قطعتين متطابقتين ليست عليهما علامة.

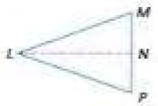
1A. $\angle FGJ$ و $\angle FJG$
1B. $\overline{GH}$ و $\overline{JH}$

للبرهنة على نظرية المثلث متساوي الساقين، ارسم خطًا مستقيمًا مساعدًا واستخدم المثلثين المتكونين.

البرهان نظرية المثلث متساوي الساقين

المعطيات: $\triangle LMP$، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: $\angle M \cong \angle P$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$	1. كل قطعة لها نقطة منتصف واحدة فقط.
2. ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$	2. تحدد نقطتان مستقيمًا.
3. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$	3. نظرية نقطة المنتصف
4. $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4. خاصية الانعكاس في التطابق
5. $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5. المعطيات
6. $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6. مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)
7. $\angle M \cong \angle P$	7. CPCTC

2 خواص المثلثات متساوية الأضلاع

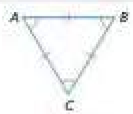
تقود نظرية المثلث متساوي الساقين إلى لازمتين بخصوص زوايا المثلث متساوي الأضلاع.

مراجعة المفردات
المثلث متساوي الأضلاع مثلث بثلاثة أضلاع متطابقة

اللازمات المثلث متساوي الأضلاع

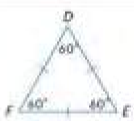
12.3 يكون المثلث متساوي الأضلاع فقط إذا كان متساوي الزوايا.

مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$.



12.4 يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة.

مثال إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FE}$، فإن $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60$.



ستبرهن اللازمتين 12.3 و 12.4 في التمرينين 35 و 36.

إرشاد للمعلمين الجدد

اختلاف الاتجاهات لأن أجزاء المثلثات متساوية الساقين لها أسماء خاصة، فدائمًا ما يقع الطلاب في خطأ عند تصنيف المثلثات متساوية الساقين. فاحرص على أن تعرض المثلثات متساوية الساقين باتجاهات مختلفة بحيث يتمكن الطلاب من تحديد الأضلاع المتطابقة وزاويتي القاعدة.

إرشاد للمعلمين الجدد

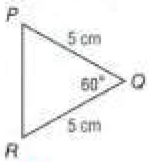
تطابق الزوايا استخدم ورقة صغيرة الحجم لتوضيح العلاقة بين زاويتي القاعدة في المثلث متساوي الساقين. ارسم الشكل وقم بطي الورقة من المنتصف.

2 خواص المثلثات متساوية الأضلاع

المثالان 2 و 3 يوضحان طريقة استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع في إيجاد القياسات والقيم المجهولة.
المثال 4 يوضح كيفية تطبيق خواص تطابق المثلثات لإثبات أن المثلث متساوي الأضلاع.

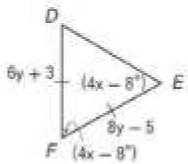
أمثلة إضافية

2 أوجد قياس كل مما يلي.



a. $m\angle R$ 60
b. PR 5 cm

3 **الجبر** أوجد قيمة كل متغير.



$x = 17,\ y = 4$

مثال 2 إيجاد القياسات المجهولة

أوجد قياس كل مما يلي.

a. $m\angle Y$

بما أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$, $XY = XZ$. حسب نظرية المثلث متساوي الساقين، زاويتا القاعدة Z و Y متطابقتان. ولذلك $m\angle Z = m\angle Y$. استخدم نظرية مجموع المثلث لكتابة معادلة وحلها لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180$	نظرية مجموع المثلث
$60 + m\angle Y + m\angle Y = 180$	$m\angle X = 60,\ m\angle Z = m\angle Y$
$60 + 2(m\angle Y) = 180$	بسّط.
$2(m\angle Y) = 120$	اطرح 60 من كل طرف.
$m\angle Y = 60$	اقسم كل طرف على 2.

b. YZ

$m\angle Z = m\angle Y$، إذًا $m\angle Z = 60$ بالتعويض. بما أن $m\angle X = 60$، وقياس الزوايا الثلاث جميعها يبلغ 60، إذًا فالمثلث متساوي الزوايا بما أن المثلث متساوي الزوايا يكون متساوي الأضلاع أيضًا. $XY = XZ = ZY$. بما أن $XY = 8$ سم، $YZ = 8$ سم بالتعويض.

نصيحة دراسية
المثلثات متساوية الساقين كما اكتشفت في المثال 2، أي مثلث متساوي الساقين له زاوية واحدة بقياس 60° يجب أن يكون مثلثًا متساوي الأضلاع.

تمرين موجّه

2A. $m\angle M$ 30 **2B.** PN 11 cm

يمكنك استخدام خواص المثلثات متساوية الأضلاع والجبر لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

الجبر **أوجد قيمة كل متغير.**

بما أن $\angle B = \angle A$، $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ وفقًا لعكس نظرية المثلث متساوي الساقين. كل أضلاع المثلث متطابقة. إذًا فالمثلث متساوي الأضلاع. يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة. إذًا $2x = 60$ و $x = 30$.

المثلث متساوي الأضلاع. إذًا فكل الأضلاع متطابقة وأطوال كل الأضلاع متساوية.

$AB = BC$	تعريف المثلث متساوي الأضلاع
$3 = 4y - 5$	تعويض
$8 = 4y$	اجمع 5 على كل طرف.
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4.

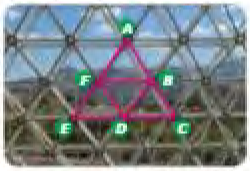
تمرين موجّه

3. أوجد قيمة كل متغير.
$x = 7,\ y = 2$

التدريس المتمايز OL AL

طريقة التواصل اطلب من مجموعات الطلاب الاجتهاد في حل التمارين 1-3 في "تمرين موجّه". وشجع المجموعات لمناقشة خواص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع وهم يتوصلون إلى البراهين.

مثال 4 من الحياة اليومية تطبيق تطابق المثلثات



البيئة راجع صورة المحيط الحيوي على اليسار. $\triangle ACE$ مثلث متساوي الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$ و D نقطة منتصف $\overline{EC}$ و B نقطة منتصف $\overline{CA}$. أثبت أن $\triangle FBD$ أيضًا متساوي الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$ و D نقطة منتصف $\overline{EC}$ و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: $\triangle FBD$ متساوي الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع.	1. المعطيات
2. F نقطة منتصف AE و D نقطة منتصف EC و B نقطة منتصف CA.	2. المعطيات
3. $m\angle A = 60, m\angle C = 60, m\angle E = 60$	3. يبلغ قياس كل زاوية في المثلث متساوي الأضلاع 60 درجة.
4. $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	4. تعريف التطابق والتعويض
5. $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CA}$	5. تعريف المثلث متساوي الأضلاع
6. $AE = EC = CA$	6. تعريف التطابق
7. $\overline{AF} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{DC}, \overline{CB} \cong \overline{BA}$	7. نظرية نقطة المنتصف
8. $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	8. تعريف التطابق
9. $AF + FE = AE, ED + DC = EC, CB + BA = CA$	9. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
10. $AF + AF = AE, FE + FE = AE, ED + ED = EC, DC + DC = EC, CB + CB = CA, BA + BA = CA$	10. التعويض
11. $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = EC, 2DC = EC, 2CB = CA, 2BA = CA$	11. خاصية الجمع
12. $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = AE, 2DC = AE, 2CB = AE, 2BA = AE$	12. خاصية التعويض
13. $2AF = 2ED = 2CB, 2FE = 2DC = 2BA$	13. خاصية التعدي
14. $AF = ED = CB, FE = DC = BA$	14. خاصية القسمة
15. $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	15. تعريف التطابق
16. $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	16. مسلّمة ضلعين وزاوية (SAS)
17. $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	17. CPCTC
18. $\triangle FBD$ متساوي الأضلاع.	18. تعريف المثلث متساوي الأضلاع

تمرين موجّه

4. إذا علمت أن $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع، و $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$ و $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

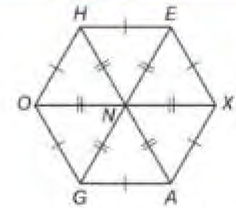
الربط بالحياة اليومية

المحيط الحيوي 2 هو أكبر نظام بيئي مغلق شاقًا تم تشييده على الإطلاق. ويغطي مساحة 0.0127 كم مربع في مدينة أوراكل في أريزونا. يبلغ ارتفاع أعلى نقطة في المنشأة البيئة الخاضعة للتحكم 27.3 مترًا ويضم 6500 نافذة تحيط بمساحة حجمها 194.400 مترًا مكعبًا.

المصدر: جامعة أريزونا

مثال إضافي

4



المعطيات: $HEXAGO$ عبارة عن مضلع منتظم. $\triangle ONG$ مثلث متساوي الأضلاع، و N هي نقطة منتصف $\overline{GE}$، و $\overline{EX} \parallel \overline{OG}$.

المطلوب: $\triangle ENX$ متساوي الأضلاع.

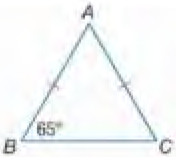
البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $HEXAGO$ مضلع منتظم. (معطيات)
2. $\triangle ONG$ متساوي الأضلاع. (معطيات)
3. $\overline{EX} \cong \overline{XA} \cong \overline{AG} \cong \overline{GO} \cong \overline{OH} \cong \overline{HE}$ (تعريف الشكل السداسي المنتظم)
4. N هي نقطة منتصف $\overline{GE}$. (معطيات)
5. $\overline{NG} \cong \overline{NE}$ (نظرية نقطة المنتصف)
6. $\overline{EX} \parallel \overline{OG}$ (المعطيات)
7. $\angle NEX \cong \angle NGO$ (نظرية الزوايا الخارجية المتبادلة)
8. $\triangle ONG \cong \triangle ENX$ (مسلّمة SAS)
9. $\overline{OG} \cong \overline{NO} \cong \overline{GN}$ (تعريف المثلث متساوي الأضلاع)
10. $\overline{NO} \cong \overline{NX}, \overline{GN} \cong \overline{EN}$ (النظرية CPCTC)
11. $\overline{XE} \cong \overline{NX} \cong \overline{EN}$ (التعويض)
12. $\triangle ENX$ متساوي الأضلاع. (تعريف المثلث متساوي الأضلاع)

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع أوجد قياس زاوية الرأس A. اشرح.



بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$، فإن $\triangle ABC$ متساوي الساقين. وتنص نظرية الزوايا في المثلث متساوي الساقين على أنه إذا كان في المثلث ضلعان متطابقان، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان أيضًا متطابقتين. إذًا، $m\angle C = 65$. وتنص نظرية مجموع زوايا المثلث على أن مجموع قياسات الزوايا في المثلث تساوي 180. إذًا، $m\angle A = 180 - 65 - 65 = 50$.

3 تمرين

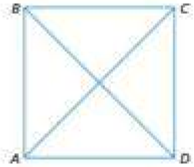
التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التحقق من فهمك

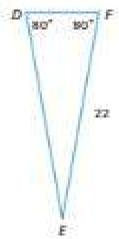
مثال 1 **راجع الشكل الموجود على اليسار.**



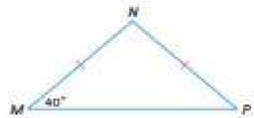
1. إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ فاذكر اسم زاويتين متطابقتين. **$\angle ABD \cong \angle ADB$**
2. إذا كانت $\angle ACD \cong \angle CAD$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. **$\overline{AD} \cong \overline{CD}$**

مثال 2 **أوجد قياس كل مما يلي.**

3. DE **22**

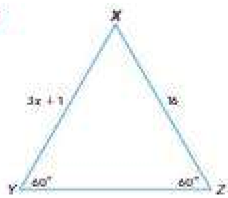


4. $m\angle MPN$ **40°**

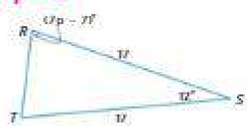


مثال 3 **الجبر** **أوجد قيمة كل متغير.**

5. **$x = 5$**



6. **$p = 13$**

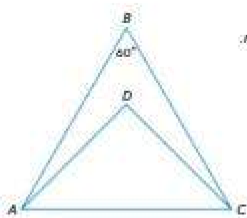


مثال 4 7. **البرهان** **اكتب برهاناً من عمودين.**

المعطيات: $\angle BAD \cong \angle BCD$, $\overline{DA} \cong \overline{DC}$, $m\angle ABC = 60$.

المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

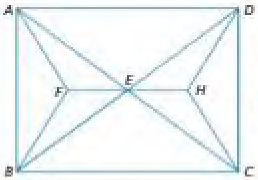


خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9–24, 46–60	52–55 ،فردي 9–23	46–51, 56–60 ،زوجي 10–24
OL أساسي	25–29, ،فردي 9–23 46–60 ,44 ،فردي 31–43	9–24, 52–55	25–29, 31–43, 46–51, 56–60
BL متقدم	25–60		

التمرين وحل المسائل

مثال 1 راجع الشكل الموجود على اليسار.



8. إذا كانت $\angle DAE \cong \angle ADE$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{AE} \cong \overline{DE}$

9. إذا كانت $\angle BAF \cong \angle ABF$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{AF} \cong \overline{FB}$

10. إذا كانت $\overline{CE} \cong \overline{BE}$، فاذكر اسم زاويتين متطابقتين. $\angle EBC \cong \angle ECB$

11. إذا كانت $\angle CDE \cong \angle DCE$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{ED} \cong \overline{EC}$

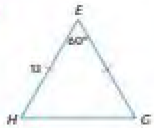
12. إذا كانت $\overline{AE} \cong \overline{DE}$، فاذكر اسم زاويتين متطابقتين. $\angle DAE \cong \angle ADE$

13. إذا كانت $\overline{DH} \cong \overline{CH}$، فاذكر اسم زاويتين متطابقتين. $\angle HCD \cong \angle HDC$

مثال 2 أوجد قياس كل مما يلي.

14. AB **7**

15. HG **13**

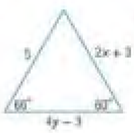


16. $m\angle NMP$ **55°**

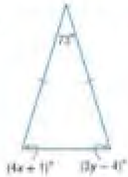
17. $m\angle RST$ **45°**

مثال 3 **الجبر** أوجد قيمة كل متغير.

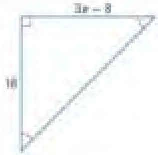
18. $x = 1, y = 2$



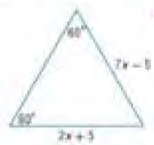
19. $x = 4, y = 7$



20. $x = 8$



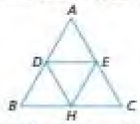
21. $x = 2$



مثال 4 **البرهان** اكتب برهاناً حرّاً. **23–22. انظر الهامش.**

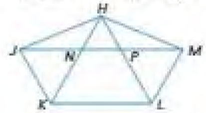
22. **المعطيات:** $\overline{DE}$ يوازي $\overline{BC}$، $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع. $\triangle DEH$ متساوي الأضلاع.

المطلوب: $\triangle DBH$ متساوي الأضلاع.



3. **المعطيات:** $\triangle HNJ \cong \triangle HMP, \triangle JNK \cong \triangle MPL$

المطلوب: $m\angle HKL = m\angle HLK$



إجابات إضافية

22. **البرهان:** مذكور في المعطيات لدينا أن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، ومن ثم، $m\angle BAC = 60, m\angle ABC = 60$. وفي المعطيات كذلك أن $\triangle DEH$ متساوي الأضلاع، ومن ثم، $m\angle EDH = 60$، $m\angle DEH = 60, m\angle DHE = 60$. بما أننا نعلم أن $\overline{DE}$ يوازي $\overline{BC}$، $m\angle EDH = m\angle DHB$ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان. ومن ثم، $m\angle DHB = 60$ بالتعويض. وبما أن $\triangle DBH$ عبارة عن مثلث متساوي الساقين تبلغ زوايا القاعدة به 60، فطبقاً لنظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $m\angle BDH = 60$. إذاً، $\triangle DBH$ مثلث متساوي الزوايا وبالتالي متساوي الأضلاع.

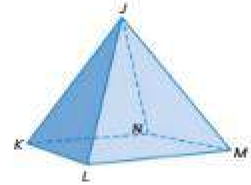
23. **البرهان:** يوجد لدينا معطيات تقول إن $\triangle HNJ \cong \triangle HMP$ و $\triangle JNK \cong \triangle MPL$، ومن ثم فإننا نعلم أن $\overline{HN} = \overline{HP}$ و $\overline{NK} = \overline{PL}$ وهذا لأنها أجزاء متناظرة لزوايا متطابقة. $\overline{HN} + \overline{NK} = \overline{HP} + \overline{PL}$ طبقاً لمسلّمة جمع القطع المستقيمة. كذلك، $\overline{HN} + \overline{NK} = \overline{HK}$ و $\overline{HP} + \overline{PL} = \overline{HL}$. بعد ذلك، ومن خلال التعويض، $\overline{HK} = \overline{HL}$. بناءً عليه، فإن $\triangle HKL$ مثلث متساوي الساقين. وطبقاً لنظرية المثلث متساوي الساقين، $m\angle HKL = m\angle HLK$.

الإجابة النموذجية:

26. **التخمين:** منصّف الزاوية ينصّف الضلع المقابل.

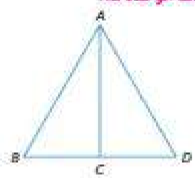
البرهان: بما أنّ $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، فإنّ $m\angle ABD = m\angle ADB$ $= m\angle BAD = 60$. $\overline{AC}$ هو منصّف الزاوية $\angle BAD$، ومن ثم، فإن $m\angle CAD = m\angle BAC = 30$. $\overline{AC} = \overline{AC}$ طبقاً لخاصية الانعكاس. لذا، وطبقاً لمسلّمة AAS، فإن $\triangle ACD \cong \triangle ACB$. إذاً، $\overline{BC} = \overline{CD}$ حسب النظرية CPCTC. ومن ثم، فإن $\overline{AC}$ ينصّف $\overline{BD}$.

24. **الأهرامات** يتكون الهرم الموضح من 4 مثلثات. إذا كان $\triangle JKL$، و$\triangle JLM$، و$\triangle JMN$ مثلثات متساوية الساقين، فأثبت أن $\triangle JKN$ أيضًا متساوي الساقين.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



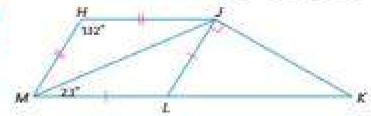
25. **الإنشاء** أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع. اشرح الطريقة المستخدمة. ثم تحقق من إنشائك باستخدام القياس والرياضيات. ثم أنشئ منصفات زوايا لزاوية من كل مثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

26. **البرهان** استنادًا إلى الإنشاء الوارد في التمرين 27، خمن وأثبت العلاقة بين منصف الزاوية وضلع المثلث الذي يقطعه. **انظر الهامش.**

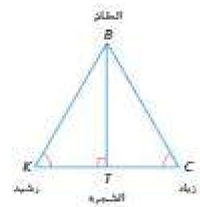


أوجد قياس كل مما يلي.

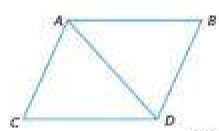
27. $m\angle JLM$ **134°**
28. $m\angle HJM$ **24°**
29. $m\angle JKL$ **67°**
30. $m\angle JLK$ **23°**



31. **مراقبة الطيور** يراقب رشيد وزياد أحد الطيور أثناء بناء عش على شجرة. إذا كان عليهما استخدام زاوية الارتفاع ذاتها للتمكن من رؤية الطائر، فأثبت أن الشجرة تقع في منتصف المسافة بينهما
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



32. **المعطيات:** $\triangle ACD$ و $\triangle ABD$ متساويا الساقين و $\overline{AB}$ يوازي $\overline{CD}$.
المطلوب: $\angle BAC$ و $\angle ABD$ متكاملتان.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

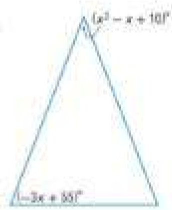


البرهان **اكتب برهانًا من عمودين لكل نتيجة أو نظرية.**
33–35. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

33. نتيجة 12.3
34. نتيجة 12.4
35. نظرية 12.11

أوجد قيمة كل متغير.

36.



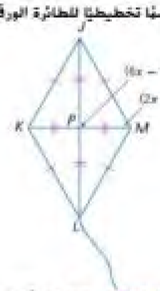
$x = 12$

37.

$s = 7$

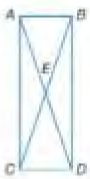
761

الألعاب استخدم رسمًا تخطيطيًا للطائرة الورقية الموضحة لإيجاد كل قياس



38. $m\angle JMP$ **45°**
39. $m\angle MJK$ **90°**
40. $m\angle MKL$ **45°**
41. $m\angle KLM$ **90°**

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف المثلثات الناشئة من قطري مستطيل.



a. **هندسيًا** استخدم مسطرة ومنقلة لرسم ثلاثة مستطيلات مختلفة بأقطارها. ضع تسميات كما هو موضح. **انظر الهامش.**

b. **جدوليًا** استخدم منقلة لقياس وتسجيل $m\angle CAE$ و $m\angle ACE$. استخدم هذه القياسات لإيجاد $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$. رتب النتائج في جدول. **انظر الهامش.**

c. **لفظيًا** اشرح كيفية استخدام $m\angle CAE$ و $m\angle ACE$ لإيجاد $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$. **انظر الهامش.**

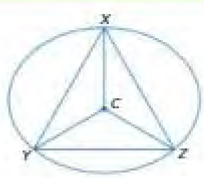
d. **جبريًا** إذا علمت أن $m\angle CAE = x$ فاكتب تعبيرًا لقياسات $m\angle AEC$ و $m\angle AEB$ و $m\angle BAE$ و $m\angle ABE$.

$m\angle AEC = x$, $m\angle AEB = 180 - x$, $m\angle BAE = 90 - x$, $m\angle ABE = 90 - x$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **تحدٍ** ΔXYZ محاط بدائرة مركزها C كما هو موضح. إذا علمت أن $m\angle YCZ = 120$ و $\overline{CZ}$ ينصف $\angle XZY$، فأثبت أن ΔXYZ متساوي الأضلاع.

انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



التبرير حدد ما إذا كانت العبارات التالية تصح *أحيانًا أم دائمًا أم لا تصح أبدًا. اشرح.*

44. إذا كان قياس زاوية الرأس في مثلث متساوي الساقين عددًا صحيحًا، فإن قياس كل زاوية قاعدة عدد زوجي. **أحيانًا**

45. إذا كان قياسا زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين عددين زوجيين، فإن قياس زاوية رأسه عدد فردي. **على الإطلاق**

46. **تحليل الخطأ** يحاول سالم وسعيد إيجاد قيمة x في الشكل الموضح. يقول سالم إن $x = 5$، بينما يقول سعيد إن $x = 8$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك.

كلاهما خطأ. نظرًا لأنه مثلث متساوي الساقين، يتساوى طول الضلعين، إذًا $5x + 8 = 6x + 1$ و $x = 7$

47. **التبرير** إذا كان لديك رسم تخطيطي لمثلث متساوي الساقين، فكم عدد الزوايا التي يجب أن تكون معلومة لإيجاد قياس كل زاوية؟ اشرح تبريرك. **انظر الهامش.**

48. **الكتابة في الرياضيات** أين ترى التناظر في المثلثات متساوية الساقين والأضلاع؟ **انظر الهامش.**

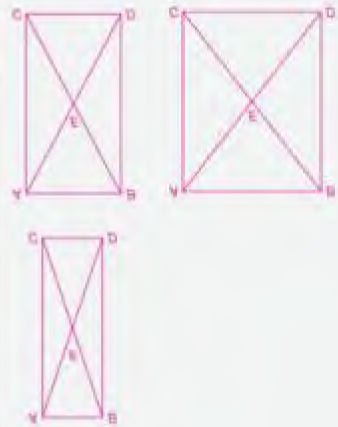
التمثيلات المتعددة

في التمرين 42، يستخدم الطلاب كراسات رسم هندسي وطاولة ووصفًا لفظيًا وتعابير جبرية لاستكشاف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث متساوي الساقين عندما يكون لديهم قياس واحدة من الزوايا الخارجية.

إجابات إضافية

الإجابة النموذجية:

42a.



42b. الإجابة النموذجية:

	مستطيل 1	مستطيل 2	مستطيل 3
$m\angle CAE$	45	30	50
$m\angle ACE$	45	30	50
$m\angle AEC$	90	120	80
$m\angle AEB$	90	60	100
$m\angle BAE$	45	60	40
$m\angle ABE$	45	60	40

42c. حالما يكون لدينا $m\angle CAE$ و $m\angle ACE$ نستطيع استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لحساب $m\angle AEC$. بعد ذلك، بما أن $\angle AEC$ و $\angle AEB$ يشكلان زاوية مستقيمة، فبإمكاننا أن نستخدم الصيغة $180 - \angle AEC$ لحساب $\angle AEB$. بما أن $\angle BAE$ و $\angle CAE$ يشكلان زاوية قائمة، فبإمكاننا استخدام الصيغة $90 - \angle CAE$ لحساب $\angle BAE$. بعدها، يمكننا استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لحساب $\angle ABE$.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يتوقعوا كيف أن أساليب البرهان التي تعلموها حتى الآن في تلك الوحدة ستساعدهم في الدرس التالي.

إجابات إضافية

54. $SU = \sqrt{17}, TU = \sqrt{2}, ST = 5,$ $XZ = \sqrt{29}, YZ = 2, XY = 5$؛ الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة؛ والمثلثات ليست متطابقة.

55. $SU = \sqrt{2}, TU = \sqrt{26},$ $ST = \sqrt{20}, XZ = \sqrt{10},$ $YZ = \sqrt{26}, XY = \sqrt{68};$ الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة؛ المثلثات ليست متطابقة.

56. **المعطيات:** $AC = BD$

المطلوب إثباته: $AB = CD$

$A \quad B \quad C \quad D$

البرهان:

العبارة (المبررات)

1. $AC = BD$ (المعطيات)
2. $AC = AB + BC$
3. $BD = BC + CD$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة.)
4. $AB + BC = BC + CD$ (التعويض.)
5. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)
6. $BC = BC$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة.)
7. $AB = CD$ (خاصية الطرح.)

60. **البرهان:**

العبارة (المبررات)

1. $\angle ACB \cong \angle ABC$ (المعطيات)
2. $\angle XCA$ و $\angle ACB$ عبارة عن زوج خطي. $\angle ABC$ و $\angle ABY$ عبارة عن زوج خطي. (تعريف الزوج الخطي)
3. $\angle XCA$ و $\angle ABC$ و $\angle ABC, \angle ABY$ زوايا متكاملة (نظرية التكامل)
4. $\angle XCA \cong \angle YBA$ (∡ الزوايا المكملة لزوايا متطابقة ≅ ∡ تكون متطابقة)

تدريب على الاختبار المعياري

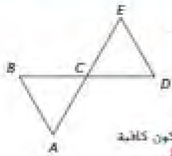
49. **الجبر** ما الكمية التي ينبغي إضافتها إلى كلا طرفي هذه المعادلة لاستكمال المربع؟ **D**

$$x^2 - 10x = 3$$

A -25 C 5
B -5 D 25

50. **الإجابة القصيرة** في مدرسة تضم 375 طالبًا، يمارس 150 طالبًا الرياضة ويشارك 70 طالبًا في نادي الخدمة الاجتماعية. يمارس 30 طالبًا الرياضة ويشاركون أيضًا في نادي الخدمة الاجتماعية. كم عدد الطلاب غير المشتركين في أي من الرياضة أو نادي الخدمة الاجتماعية؟ **185**

51. في الشكل $\overline{AE}$ و $\overline{BD}$ ينصفان بعضهما عند النقطة C.



ما المعلومات الإضافية التي ستكون كافية للبرهنة على أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟ **F**

F $\angle A \cong \angle BCA$ H $\angle ACB \cong \angle EDC$
G $\angle B \cong \angle D$ J $\angle A \cong \angle B$

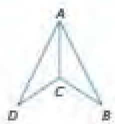
52. **SAT/ACT** إذا كان $x = -3$، إذًا $4x^2 - 7x + 5 =$ **E**

A 2 C 20 E 62
B 14 D 42

53. $\triangle ADC \cong \triangle ABC$؛ بما أن $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ إذًا المثلثان متطابقان حسب AAS.

مراجعة شاملة

53. إذا كانت $m\angle ADC = 35$ و $m\angle ABC = 35$، و $m\angle DAC = 26$ و $m\angle BAC = 26$. فحدد ما إذا كان $\triangle ADC \cong \triangle ABC$.

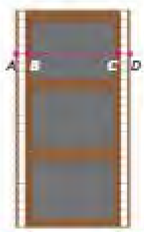


حدد ما إذا كان $\triangle STU \cong \triangle XYZ$. اشرح. 54–55. انظر الهامش.

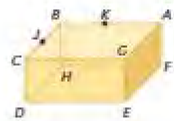
54. $S(0, 5), T(0, 0), U(1, 1), X(4, 8), Y(4, 3), Z(6, 3)$

55. $S(2, 2), T(4, 6), U(3, 1), X(-2, -2), Y(-4, 6), Z(-3, 1)$

56. **التصوير** يتم إدخال الفيلم عبر الكاميرا التقليدية عن طريق الترسين اللذين يمسكان الثقوب في الفيلم. المسافة من A إلى C تساوي المسافة من B إلى D. أثبت أن الشريطين المثقوبين لهما نفس العرض. انظر الهامش.



راجع الشكل الموجود على اليسار.



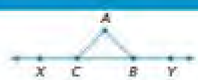
57. كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟ **6**

58. عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة. **A, K, B أو B, J, C**

59. هل النقاط A و C و D، و J على مستوى إحداثي واحد؟ **لا : تقع النقاط A، وC، وJ في المستوى ABC، لكن D لا تقع في هذا المستوى.**

مراجعة المهارات

60. **البرهان** إذا كانت $\angle ACB \cong \angle ABC$، فإن $\angle XCA \cong \angle YBA$. انظر الهامش.



47. إنك بحاجة فقط إلى أن تحصل على قياس زاوية واحدة. إذا ما حصلت على قياس واحدة من زوايا القاعدة، فسوف تعلم أن زاوية القاعدة الأخرى سيكون لها نفس القياس. وستتمكن بعدها من استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لحساب زاوية الرأس. إذا ما حصلت على قياس زاوية الرأس، فسوف تتمكن من قسمة 180 ناقص تلك القيمة على 2 لتحسب قياس كل زاوية من زاويتي القاعدة.

48. المثلث متساوي الساقين يكون متناظرًا في ارتفاعه. والمثلث متساوي الأضلاع يكون متناظرًا في أي من ارتفاعاته.

1 التركيز

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لإجراء عمليات تحويل على المثلثات في المستوى الإحداثي.
- اختبار تحويلات التطابق في المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- TI-Nspire®

نصيحة للتدريس

اسمح للطلاب بتجربة واستكشاف خواص التمثيلات البيانية والهندسة بتقنية TI-Nspire قبل بدء تمرين المختبر. إذا كانت تقنية TI-Nspire جديدة على معظم الطلاب، فأعدّ مقدمة أكثر تنظيمًا لصفحة التمثيلات البيانية والهندسة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظِّم الطلاب في مجموعات ثنائية بحيث تتنوع القدرات. وإذا أمكن، ينبغي أن يكمل كل طالب تمرين المختبر على تقنية TI-Nspire. لكن ينبغي أن يتعاون الطلاب مع بعضهم لاستكشاف أي مشكلات تقنية وإصلاحها ولمناقشة التمارين 5-1.

اجعل الطلاب يكملوا الأنشطة 3-1 مع التمارين 3-1، بالترتيب. يشر استخدام التقنية حتى لا يضيع الهدف من المختبر في مجرد محاولة إنشاء أشكال هندسية.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 1 إلى 4.

الاستكشاف 12-7

مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويلات التطابق

يمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لإجراء تحويلات على المثلثات في المستوى الإحداثي واختبار التطابق.

باستخدام شكل هندسي وعملية الدوران أو الانعكاس أو الإزاحة لرسم الشكل المحول باستخدام ورق رسم بياني مثلاً، أو ورق شفاف أو برنامج هندسة. وصف تسلسل التحويلات التي تحول شكل معطى إلى آخر.
استخدام الوصف الهندسي للحركات الصلبة لتحويل الأشكال هندسيًا وتوقع تأثير الحركة الصلبة المعلومة على الشكل المعطى، وبافتراض وجود شكلين، استخدم تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتحديد ما إذا كان الشكلان متطابقين.

النشاط 1 إزاحة مثلث واختبار التطابق

الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة. واختر **Show Grid (إظهار الشبكة)** من القائمة **View (عرض)**. واستخدم القائمة **Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)** لضبط حجم النافذة.

الخطوة 2 اختر **Triangle** (مثلث) من قائمة **Shapes** (أشكال) وارسم مثلثًا قائم الزاوية بساقين بقياس 6 وحدات و 8 وحدات كما هو موضح من طريق وضع النقطة الأولى عند (0, 0) والنقطة الثانية عند (8, 0) والنقطة الثالثة عند (8, 6). واستخدم الأداة **Text** (نص) من القائمة **Actions** (إجراءات) لتسمية رؤوس المثلث A و B و C.

الخطوة 3 اختر **Translation (إزاحة)** من القائمة **Transformation (تحويل)**. ثم اختر $\triangle ABC$ والنقطة A. قم بإزاحة أو تحريك المثلث قائم الزاوية 8 وحدات لأسفل و 14 وحدة لليسار. قم بتسمية الرؤوس المناظرة للصورة A' و B' و C'.

الخطوة 4 للتحقق من أن $\triangle A'B'C'$ يطابق $\triangle ABC$، اختر **Length (الطول)** من قائمة **Measurement (قياس)**. ثم اختر أي نقطتين طرفيتين واضغط على مفتاح **ENTER** لتحديد طول القطعة. وكرر هذا مع كل القطع في كل مثلث.

بالإضافة إلى قياس الأطوال، يمكن أيضًا استخدام تقنية TI-Nspire لقياس الزوايا. ويسمح لك هذا باستخدام اختبارات أخرى لتطابق المثلثات تتضمن قياس الزوايا.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 5 في تقويم مدى استيعاب الطلاب لكيفية إجراء تحويلات التطابق في تقنية TI-Nspire وتحليلها.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تحديد إحداثيات $\triangle XYZ$ و $\triangle X'Y'Z'$. وبعد ذلك، ينبغي للطلاب استخدام قانون المسافة للتحقق من تطابق المثلثين جبريًا.

إجابات إضافية

1. نعم، بما أن $AB = A'B'$, $CB = C'B'$ و $AC = A'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ و $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ وذلك بناء على تعريف التطابق. إذًا حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة SSS، فإن $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
2. نعم، بما أن $m\angle A = m\angle A'$, $\angle A \cong \angle A'$. بالمثل، بما أن $AC = A'C'$ و $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ و $AB = A'B'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ بناءً عليه، وطبقًا لمسلّمة SAS، فإن $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
3. نعم، بما أن $m\angle A = m\angle A'$ و $m\angle C$ و $m\angle C'$, $\angle A \cong \angle A'$ و $\angle C = \angle C'$. بالمثل، بما أن و $A'C'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. من ثم، وطبقًا لمسلّمة ASA، فإن $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
4. نافذة العرض مستطيلة وليست مربعة. المحور x محدد بزيادات بمعدل 1، بينما المحور y محدد بزيادات بمعدل 2. هذا يشوّه الشكل الفعلي في $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$.
5. راجع عمل الطلاب. التخمين: المثلث وصورته المتحولة بسبب التحويل أو الانعكاس أو الدوران متطابقان.
6. لا؛ تم التوصل إلى التخمين في التمرين 5 باستخدام الاستدلال الاستقرائي، وهو ليس طريقة صالحة لإثبات التخمين.

النشاط 2 عكس مثلث واختبار التطابق

الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة، واعرض الشبكة وأعد رسم $\triangle ABC$ من النشاط 1.

الخطوة 2 اختر **Reflection (انعكاس)** من قائمة **Transformation (تحويل)** ثم اختر $\triangle ABC$ ثم المحور y لعكس أو قلب $\triangle ABC$ في المحور y. قم بتسمية الرؤوس المتناظرة للصورة A' و B' و C'.

الخطوة 3 استخدم الأداة **Angle (زاوية)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle A'$. استخدم الأداة **Length (طول)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد AB و $A'B'$ و AC و $A'C'$

لدوران شكل حول نقطة الأصل باستخدام تقنية TI-Nspire، استخدم أداة **Rotation** (دوران) لتحديد الشكل ثم النقطة (0, 0) ثم ارسم زاوية الدوران.

النشاط 3 دوران مثلث واختبار التطابق

الخطوة 1 افتح صفحة **Graphs (تمثيلات بيانية)** جديدة، واعرض الشبكة وأعد رسم $\triangle ABC$ من النشاط 1.

الخطوة 2 اختر **Rotation (دوران)** من القائمة **Transformation (تحويل)**، ثم اختر $\triangle ABC$، واختر نقطة الأصل واكتب عددًا لزاوية الدوران.

الخطوة 3 استخدم الأداة **Angle (زاوية)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle A'$ و $m\angle C$ و $m\angle C'$. استخدم الأداة **Length (طول)** من القائمة **Measurement (قياس)** لإيجاد AC و $A'C'$.

تحليل النتائج

حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متطابقين. اشرح تبريرك. 1–4. انظر الهامش.

1. النشاط 1
2. النشاط 2
3. النشاط 3
4. اشرح السبب في أن $\triangle A'B'C'$ في النشاط 3 لا يبدو متطابقًا مع $\triangle ABC$.
5. **التخمين** كرر الأنشطة 1-3 باستخدام مثلث مختلف XYZ. حلل نتائجك وقارنها بالنتائج الموجودة في التمارين 1-3. خمّن العلاقة بين مثلث وصورته المتحولة بسبب الإزاحة أو الانعكاس أو الدوران. **انظر الهامش.**
6. هل المقاييس والملاحظات التي دونتها في الأنشطة 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 5؟ اشرح. **انظر الهامش.**

765

1 التركيز

تخطيط المعايير

قبل الدرس 7-12 البرهنة على تطابق المثلثات.

الدرس 7-12 تحديد حالات تحويلات التطابق: الانعكاس والإزاحة والدوران. والتحقق من تطابق الأشكال بعد إجراء تحويلات التطابق.

بعد الدرس 7-12 استخدام هندسة الإحداثيات لإثبات تطابق المثلثات جبريًا والتحقق من تطابقها.

الدرس 7-12 تحويلات التطابق

السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد برهنت على تطابق مثلثين.	• 1 تحديد الانعكاس والإزاحة والدوران. 2 التحقق من التطابق بعد تحويل تطابق.	• كثيرًا ما تستخدم صناعة الملابس مطبوعات عرض أنماط. يتم إنشاء الكثير من هذه الأنماط عن طريق أخذ شكل وتحريكه لإنشاء شكل آخر في موقع مختلف أو قلب الشكل لإنشاء صورة معكوسة أو دوران الشكل الأصلي لإنشاء شكل جديد.

المفردات الجديدة

التحويل transformation
الصورة الأصلية preimage
الصورة image
تحويل التطابق congruence transformation
تساوي الأبعاد isometry
الانعكاس reflection
إزاحة translation
دوران rotation

استخدام الوصف الهندسي للحركات الصلبة لتحويل الأشكال هندسيًا وتوقع تأثير الحركة الصلبة المعلومة على الشكل المعطى، وبافتراض وجود شكلين، استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتحديد ما إذا كان الشكلان متطابقين.
استخدام تعريف التطابق بدلالة الحركات الصلبة لتوضيح أن المثلثين يكونان متطابقين إذا وفقط إذا كانت أزواج الأضلاع المتناظرة متطابقة وأزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

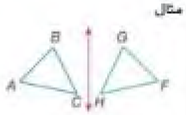
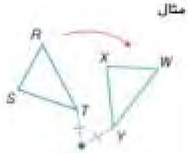
1 تحديد تحويلات التطابق

التحويل هو عملية تخطط شكلاً هندسيًا أصليًا، **أي الصورة الأصلية**، إلى شكل جديد يطلق عليه **الصورة**. ويستطيع التحويل أن يغير الموضع أو الحجم أو الشكل.

يمكن توضيح التحويل باستخدام سهم. تبين لك عبارة التحويل $\triangle ABC \rightarrow \triangle XYZ$ أن A تتحول إلى X و B تتحول إلى Y و C تتحول إلى Z.

أما **تحويل التطابق**، الذي تسمى أيضا التحويل الثابت أو **تساوي الأبعاد**، هو التحويل الذي قد يختلف موضع الصورة فيه عن موضع الصورة الأصلية لكن يظل الشكلان متطابقين. والأنواع الرئيسية الثلاثة لتحويلات التطابق ظاهرة بالأسفل.

المفهوم الأساسي الانعكاس والإزاحة والدوران

يُعتبر **الانعكاس** أو القلب تحويلاً على خط يُسمى خط الانعكاس. وتقع كل نقطة في الصورة الأصلية وصورتها على مسافة واحدة من خط الانعكاس.	يُعتبر **الإزاحة** أو التحريك تحويلاً يؤدي إلى تحريك كل نقاط الشكل الأصلي للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.	يُعتبر **الدوران** أو الاستدارة تحويلاً حول نقطة ثابتة تُسمى مركز الدوران، بزاوية معينة وفي اتجاه معين. وتقع كل نقطة في الشكل الأصلي وصورته تقع على مسافة واحدة من المركز.
مثال  $\triangle ABC \rightarrow \triangle FGH$	**مثال**  $\triangle JKL \rightarrow \triangle MPQ$	**مثال**  $\triangle RST \rightarrow \triangle WXY$

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الشكل المتكرر المستخدم على قطعة القماش في الصورة؟ سمكة
- كيف تكرر الشكل في النمط؟ تم تكرار الشكل عن طريق إزاحة السمكة إلى موضع آخر على قطعة القماش.
- كيف تعرف أن الأسماك المتجاورة ليست انعكاسات لبعضها البعض؟ الأسماك المنعكسة إما أن تكون في اتجاه بعضها البعض أو في اتجاهات معاكسة.

1 تحديد تحويلات التطابق

يوضح **المثالان 1 و 2** طريقة تحديد نوع تحويلات التطابق المرسوم.

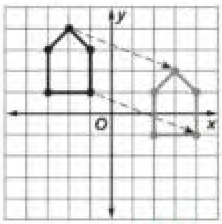
التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

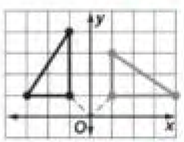
1 حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.

a.



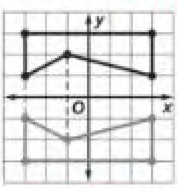
هذه إزاحة.

b.



هذا دوران.

c.



هذا انعكاس على المحور x.

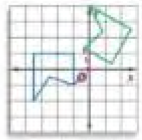
تصيحة دراسية

التحويلات لا تحافظ كل التحويلات على التطابق. والتحويلات التي لا تغير حجم الشكل أو شكله هي فقط التي تعتبر تحويلات تطابق.

مثال 1 تحديد تحويلات التطابق

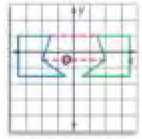
حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

a.



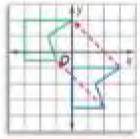
يقع كل رأس وصورته على مسافة واحدة من نقطة الأصل. والزوايا المتكونة من كل زوج من النقاط المتناظرة ونقطة الأصل تكون متطابقة. هذا دوران.

b.



يقع كل رأس وصورته على مسافة واحدة من المحور الرأسي y. هذا انعكاس.

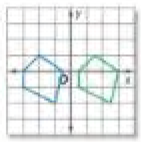
c.



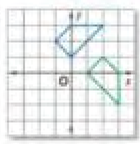
يقع كل رأس وصورته في الموضع نفسه، لكن بعد 3 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات لأعلى. هذه إزاحة.

تمرين موجّه **1A. انعكاس 1B. تدوير 1C. إزاحة**

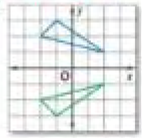
1A.



1B.



1C.



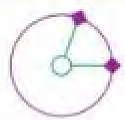
يمكن تمثيل بعض الحركات أو الأجسام في الحياة اليومية بالتحويلات.

الربط بالحياة اليومية

تتضمن اللعبة الظاهرة أعلاه ربط وزن بسلسلة تستطيع وضعها حول كاحلك، وعندما يمر الحبل من أمام قدمك الأخرى، تقفز فوقه.

مثال 2 من الحياة اليومية تحديد تحويل في الحياة اليومية

ألعاب راجع المعلومات المبينة في الجانب الأيمن. حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في الرسم التخطيطي باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.



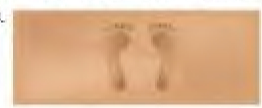
يمثل موضع الوزن في أوقات مختلفة مثالاً على الدوران. ومركز الدوران هو كاحل الشخص.

تمرين موجّه **2A. إزاحة 2B. انعكاس**

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

2A.

2B.



التدريس المتمايز AL OL BL

النمط الطبيعي اطلب من الطلاب تصوير أو رسم تمثيلات لتحويلات التطابق الموجودة في الطبيعة. وينبغي أن تتضمن الصورة أو الرسم وصفًا للتحويل المرسوم.

2 التحقق من التطابق

يمكنك التحقق من أن الانعكاس والإزاحة والدوران للمثلثات تنتج مثلثات متطابقة باستخدام مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS).

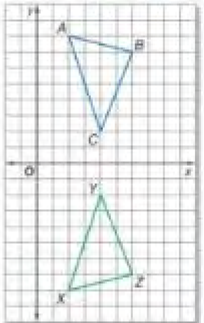
مثال 3 التحقق من التطابق بعد التحويل

المثلث XZY بالرؤوس $X(2, -8)$ و $Z(6, -7)$ و $Y(4, -2)$ تحويل للمثلث $\triangle ABC$ بالرؤوس $A(2, 8)$ و $B(6, 7)$ و $C(4, 2)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

الفهم مطلوب منك أن تحدد نوع التحويل – انعكاس أو إزاحة أو دوران. ثم عليك إثبات أن الشكلين متطابقين.

التخطيط استخدم صيغة المسافة لإيجاد قياس كل ضلع. ثم أثبت أن المثلثين متطابقان بموجب SSS.

الحل مثّل بيانيًا كل شكل. التحويل يبدو انعكاسًا على المحور الرأسي x أوجد قياسات أضلاع كل مثلث.



$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(6-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40}$$

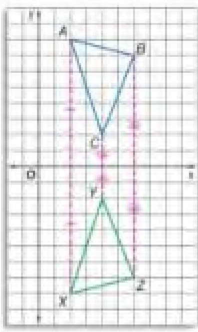
$$XZ = \sqrt{(6-2)^2 + [-7-(-8)]^2} = \sqrt{17}$$

$$ZY = \sqrt{(6-4)^2 + [-7-(-2)]^2} = \sqrt{29}$$

$$XY = \sqrt{(2-4)^2 + [-8-(-2)]^2} = \sqrt{40}$$

بما أن $AB = XZ$ و $BC = ZY$ و $AC = XY$ إذا $\overline{AB} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{BC} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{AC} \cong \overline{XY}$ حسب مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، $\triangle ABC \cong \triangle XZY$.

التحقق استخدم تعريف الانعكاس. استخدم مسطرة لقياس ومقارنة القطع التي تربط كل رأس وصورته بخط التناظر. هذه القطع متطابقة. إذا فالمثلثات متطابقة. ✔



تصيحة دراسية

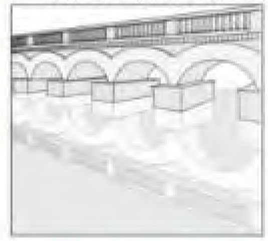
تساوي الأبعاد كما يحافظ التماثل على التطابق، يحافظ تساوي الأبعاد المباشر أيضًا على اتجاه الأحرف أو ترتيبها. يؤدي تساوي الأبعاد غير المباشر أو العكسي إلى تغيير هذا الترتيب، مثل تغييره من الحركة في اتجاه عقارب الساعة إلى الحركة عكس اتجاه عقارب الساعة.

تمرين موجّه

3. المثلث JKL بالرؤوس $J(-2, 2)$ و $K(-8, 5)$ و $L(-4, 6)$ تحويل للمثلث $\triangle PQR$ بالرؤوس $P(2, -2)$ و $Q(8, -5)$ و $R(4, -6)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق. **انظر الهامش.**

مثال إضافي

2 **الجسور** انظر إلى الصورة التالية. وحدد نوع تحويل التطابق الذي توضحه صورة الجسر على النهر على أنه *انعكاس*، أو *تحويل*، أو *دوران*.



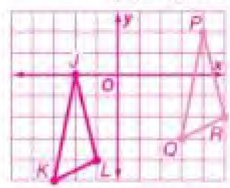
التحويل في الصورة انعكاس؛ الخط الذي يتقابل فيه الجسر مع الماء هو خط الانعكاس.

التحقق من التطابق

المثال 3 يوضح طريقة استخدام هندسة الإحداثيات للتحقق من تطابق المثلثات بعد تحويل التطابق.

مثال إضافي

3 المثلث PQR الذي له الرؤوس $P(4, 2)$، $Q(3, -3)$، و $R(5, -2)$ عبارة عن تحويل للمثلث $\triangle JKL$ الذي له الرؤوس $J(-2, 0)$، و $K(-3, -5)$، و $L(-1, -4)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا. وحدد التحويل وتحقق من أنه تحويل تطابق.



المثلث $\triangle PQR$ عبارة عن إزاحة للمثلث $\triangle JKL$.
لأنّ $PQ = JK = \sqrt{26}$، $QR = KL = \sqrt{5}$، و $PR = JL = \sqrt{17}$، $\overline{PQ} \cong \overline{JK}$، $\overline{QR} \cong \overline{KL}$، و $\overline{PR} \cong \overline{JL}$، $\triangle JKL \cong \triangle PQR$ بناءً على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

التركيز على محتوى الرياضيات

الجبر استخدم العلاقة بين الجبر والهندسة في المثال 3. يُستخدم الجبر للتحقق من أن تحويل التطابق الهندسي يؤدي إلى أشكال متطابقة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

برنامج تعديل الصور قدّم للطلاب عدة صور رقمية للمثلثات. اجعلهم يستخدموا أحد برامج تعديل الصور لدوران وقلب وتغيير موضع الصور على الشاشة. وضّح لهم أن عمليات التحويل تلك لا تؤثر على حجم أو شكل المثلث.

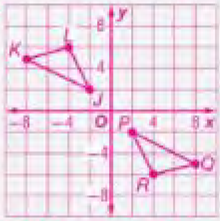
3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-6 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. 

$\triangle JKL$ عبارة عن دوران للمثلث $\triangle PQR$. $PQ = \sqrt{45}$, $QR = \sqrt{17}$, $PR = \sqrt{20}$, $JK = \sqrt{45}$, $KL = \sqrt{17}$, $JL = \sqrt{20}$. بما أنّ $PQ = JL$, $QR = KL$ و $PR = JK$, $\overline{PQ} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, و $\overline{PR} \cong \overline{JK}$. $\triangle PQR \cong \triangle JKL$.

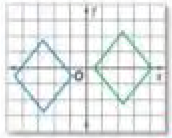
إجابات إضافية

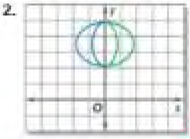
5. $\triangle LKJ$ عبارة عن انعكاس للمثلث $\triangle XYZ$. $XY = 7$, $YZ = 8$, $XZ = \sqrt{113}$. $LK = 7$ و $KJ = 8$, $LJ = \sqrt{113}$. $\triangle LKJ \cong \triangle XYZ$ بناءً على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

6. $\triangle JHK$ عبارة عن إزاحة للمثلث $\triangle MPS$ $MP = \sqrt{50}$, $PS = \sqrt{65}$ $SM = \sqrt{45}$, $JH = \sqrt{50}$ $HK = \sqrt{65}$, و $JK = \sqrt{45}$ $\triangle MPS \cong \triangle JHK$. بناءً على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

التحقق من فهمك

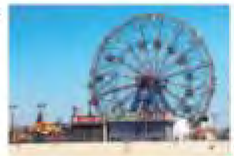
مثال 1 حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

1. 
إزاحة

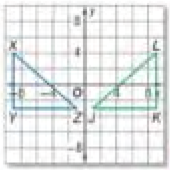
2. 
انعكاس

مثال 2

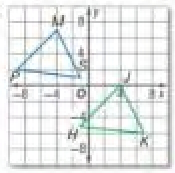
3. 
انعكاس

4. 
دوران

مثال 3 **الهندسة الإحداثية** حدد كل تحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

5. 

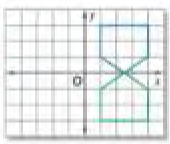
انظر الهامش

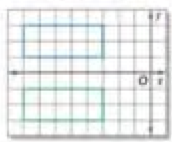
6. 

انظر الهامش.

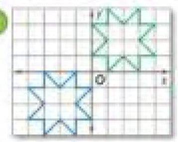
التمرين وحل المسائل

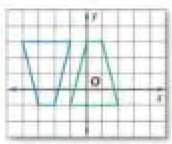
مثال 1 **البنية** حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

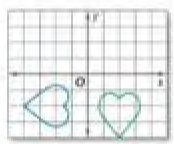
7. 

8. 

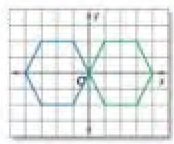
7. انعكاس
8. إزاحة أو انعكاس

9. 
إزاحة أو انعكاس أو تدوير

10. 

11. 

10. تدوير
11. تدوير

12. 
انعكاس أو تدوير أو إزاحة

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7-20, 32-50	7-19 فردي, 37-40	8-20 زوجي, 32-36, 41-50
OL أساسي	7-19 فردي, 21, 27 28-30, 32-50 فردي	7-20, 37-40	21-30, 32-36, 41-50
BL متقدم	21-45, (46-50 اختياري)		

مثال 2 حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في كل صورة باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

13. 
إزاحة

14. 
انعكاس

15. 
دوران

16. 
إزاحة

مثال 3 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق. **17–20. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

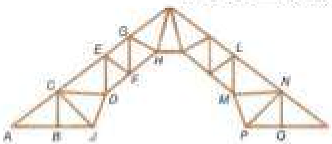
17. $M(-7, -1), P(-7, -7), R(-1, -4);$
$T(7, -1), V(7, -7), S(1, -4)$

18. $A(3, 9), B(3, 7), C(7, 7);$
$S(3, 5), T(3, 3), R(7, 3)$

19. $A(-4, 5), B(0, 2), C(-4, 2);$
$X(-5, -4), Y(-2, 0), Z(-2, -4)$

20. $A(2, 2), B(4, 7), C(6, 2);$
$D(2, -2), F(4, -7), G(6, -2)$

الإنشاء حدد نوع تحويل التطابق الذي تم على كل مثلث محدد لإنشاء المثلث الآخر في الطوق الحديدي بالضلعين المماثلين الأيسر والأيمن الظاهرين أدناه.



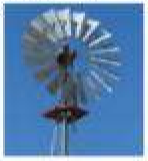
21. $\triangle NMP$ إلى $\triangle CJD$
تدوير

22. $\triangle EFD$ إلى $\triangle GHF$
إزاحة

23. $\triangle CBJ$ إلى $\triangle NQP$
انعكاس

الألعاب الترفيهية حدد نوع تحويل التطابق الظاهر في كل صورة باعتباره *انعكاسًا* أو *إزاحة* أو *دورانًا*.

24. 

25. 

26. 

24. تدوير
25. تدوير
26. إزاحة

28. رأسي: A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y؛ أفقي: B, C, D, E, H, I, K, O, X

27. **المدرسة** حدد التحويلات المستخدمة لفتح قفل توافقي على خزانة. حدد خط التناظر أو مركز الدوران إذا كان ذلك ملائمًا.

27. تدوير؛ المقبض هو مركز التدوير.

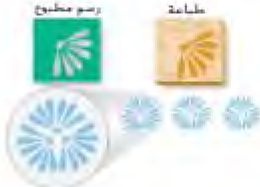
28. **البنية** حدد الحروف الكبيرة في الأبجدية الإنجليزية التي لها خطوط انعكاس رأسية و/أو أفقية.

770 | الدرس 7-12 | تحويلات التطابق

29. **الديكور** تعيد غالية ترتيب ديكورات غرفة نومها. تستطيع استخدام رسوم مطبوعة أو طباعة لإنشاء التصميم المعروض.

a. إذا استخدمت غالية الرسم المطبوع، فما نوع التحويل المستخدم لإنتاج كل زهرة في التصميم؟ **انعكاس أو تدوير**

b. ما نوع التحويل المستخدم إذا استخدمت الطباعة لإنتاج كل زهرة في التصميم؟ **التدوير**



30. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأزواج المرتبة لشكل وصورته بعد الإزاحة.

a. **هندسيًا** ارسم المستطيلين المتطابقين $ABCD$ و $WXYZ$ على مستوى إحداثي. **انظر الهامش.**

b. **لفظيًا** كيف تصل من رأس على $ABCD$ إلى الرأس المناظرة على $WXYZ$ باستخدام حركة أفقية ورأسية فقط؟

c. **جدوليًا** انسخ الجدول الموضح. استخدم مستطيلك لتملأ الإحداثيات الأفقية والإحداثيات الرأسية والقيمة المجهولة في عمود التحويل. **انظر الهامش.**

المستطيل $ABCD$	التحويل	المستطيل $WXYZ$
$A(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$W(?, ?)$
$B(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$X(?, ?)$
$C(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$Y(?, ?)$
$D(?, ?)$	$(x_1 + ?, y_1 + ?)$	$Z(?, ?)$

d. **جبريًا** ترميز الدالة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ حيث a و b عددان حقيقيان، يمثل تحولاً من مجموعة إحداثيات إلى مجموعة أخرى. استكمل الترميز التالي الذي يمثل قاعدة الإزاحة $ABCD \rightarrow WXYZ: (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.
الإجابة النموذجية: $(x, y) \rightarrow (x + 5, y + 3)$

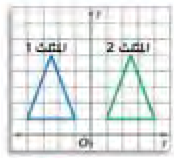
30b. الإجابة النموذجية: أنت تنتقل من رأس في $ABCD$ إلى الرأس المناظرة في $WXYZ$ عن طريق التحرك 5 وحدات إلى اليمين و 3 وحدات لأعلى.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **تحدٍ** استخدم الرسم التخطيطي إلى اليسار.

a. حدد تحويلين للمثلث 1 يمكن أن يؤديا إلى المثلث 2. **الإزاحة، الانعكاس**

b. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا في المثلثين لكي يؤدي أكثر من تحويل واحد على الصورة الأصلية إلى الصورة نفسها؟ اشرح تبريرك.



31b. الإجابة النموذجية: يجب أن تكون المثلثات إما متساوية الساقين أو متساوية الأضلاع. وعندما تكون المثلثات متساوية الساقين أو متساوية الأضلاع، فإن لها خط تناظر، وإذا تؤدي الانعكاسات إلى الشكل نفسه.

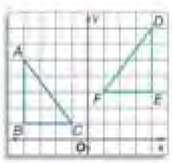
32. **التبرير** التمدد نوع آخر من التحويل. في الرسم التخطيطي، تم تمديد قصاصة ورقية صغيرة لتنتج قصاصة ورقية أكبر. اشرح السبب في أن التمديدات ليست تحويل تطابق.
الصور الناتجة ليست مطابقة للصورة الأصلية.

مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لكل مما يلي، بخلاف الأمثلة المذكورة في هذا الدرس.

33. الانعكاس 34. الإزاحة 35. الدوران

33. الإجابة النموذجية: يرى الشخص الذي ينظر في المرآة انعكاسًا لنفسه.

36. **الكتابة في الرياضيات** في الرسم التخطيطي على اليسار $\triangle DEF$ تسمى الانعكاس الانزلاقي للمثلث $\triangle ABC$. بناء على الرسم التخطيطي، عرف الانعكاس الانزلاقي. هل تعتبر الانعكاس الانزلاقي تحويل تطابق؟ ضع تعريفًا لتحويل التطابق في إجابتك. اشرح تبريرك.
انظر الهامش.



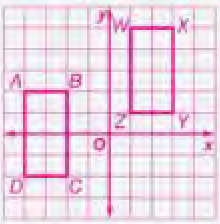
34. الإجابة النموذجية: تتحرك فرقة العزف عبر الميدان في تشكيل.
35. الإجابة النموذجية: يدور مقبض الصنبور عندما تبدأ تشغيل المياه.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 30، يستخدم الطلاب الرسوم الهندسية والأوصاف اللفظية وجدولاً وتعابير جبرية لاستكشاف العلاقة بين الأزواج المرتبة للشكل وصورته المنقولة منه.

إجابات إضافية

30a. الإجابة النموذجية:



30c. الإجابة النموذجية:

المستطيل $WXYZ$	التحويل	المستطيل $ABCD$
$W(1, 5)$	$(-4 + 5, 2 + 3)$	$A(-4, 2)$
$X(3, 5)$	$(-2 + 5, 2 + 3)$	$B(-2, 2)$
$Y(3, 1)$	$(-2 + 5, -2 + 3)$	$C(-2, -2)$
$Z(1, 1)$	$(-4 + 5, -2 + 3)$	$D(-4, -2)$

36. الإجابة النموذجية: الانعكاس الانزلاقي عبارة عن انعكاس فوق خط ثم إزاحة في اتجاه يوازي خط الانعكاس. في تحويل التطابق، تتطابق الصورة الأصلية مع الصورة. نعم؛ الانعكاس الانزلاقي هو أحد تحويلات التطابق. في الرسم التخطيطي، $AB = DE$، $BC = EF$، و $AC = DF$. إذًا $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$، و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. إذًا $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

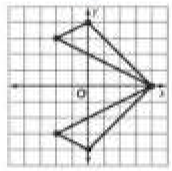
التدريس المتمايز BL OL

التوسّع يستخدم الدوران والانعكاس والإزاحة لإنشاء العديد من الأعمال الفنية. اطلب من الطلاب استكشاف استخدام تلك التحويلات لابتكار أنماط. ينبغي أن يبدأ الطلاب بشكل واحد في المستوى الإحداثي واستخدام العديد من التحويلا ت لتحويل الشكل إلى نمط فني. وينبغي أن يسجّل الطلاب كل نمط مستخدم حتى يمكن تكرار التصميم.

تدريب على الاختبار المعياري

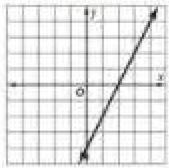
37. **الإجابة القصيرة** تسعى علياء لشراء كرسي مكتب جديد من متجر يقدم تخفيضًا يبلغ 50% على كراسي المكتب. ومعها أيضًا إيصال بخصم 50% على أي شيء. تعتقد علياء أنها تستطيع الآن أن تحصل على كرسي المكتب مجانًا. هل هذا صحيح؟ إذا لم يكن كذلك، فماذا ستكون النسبة المئوية للخصم الذي ستحصل عليه في وجود كل من التخفيض والإيصال؟
لا؛ 75%

38. حدد تحويل التطابق الظاهر. **C**



A تمديد
B انعكاس
C دوران
D إزاحة

39. انظر إلى التمثيل البياني أدناه ما ميل الخط المبين؟ **J**



F −2
G −1
H 1
J 2

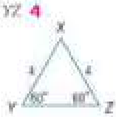
40. SAT/ACT ما تقاطع المحور الرأسي y مع الخط الذي تحدده المعادلة $13x - 4 = 12y - 3$؟ **B**

A −12
B $-\frac{1}{12}$
C $\frac{1}{12}$
D $\frac{1}{4}$
E 12

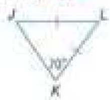
مراجعة شاملة

أوجد قياس كل مما يلي.

41. YZ **4**

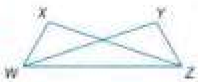


42. $m\angle JLK$ **40**



43. AB **10**

44. **البرهان** اكتب فقرة برهانًا حرًّا.
المعطيات: $\angle YWZ \cong \angle XZW$ ، $\angle YZW \cong \angle XWZ$
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle ZYW$



إذا علمت أن $\angle YWZ \cong \angle XZW$ و $\angle YZW \cong \angle XWZ$ حسب خاصية الانعكاس $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ إذًا $\triangle WXZ \cong \triangle ZYW$ حسب مسلّمة زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)

مراجعة المهارات

حدّد إحداثيات نقطة المنتصف في قطعة بالنقاط النهائية المعطاة.

45. $A(10, -12), C(5, -6)$ **(7.5, −9)**
46. $A(13, 14), C(3, 5)$ **(8, 9.5)**
47. $A(-28, 8), C(-10, 2)$ **(−19, 5)**
48. $A(-12, 2), C(-3, 5)$ **(−7.5, 3.5)**
49. $A(0, 0), C(3, -4)$ **(1.5, −2)**
50. $A(2, 14), C(0, 5)$ **(1, 9.5)**

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف أن ما تعلموه من الدروس السابقة في الوحدة 6 ساعدهم في استيعاب المفاهيم الواردة في الدرس 7-12.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب تحويلات التطابق.

اطرح السؤال التالي:

- ما تحويلات التطابق، وأين تراها في الحياة اليومية؟ **الإجابة النموذجية: الإزاحة والانعكاس، عمليات الدوران. دحرجة قطعة من الورق على الطاولة دون أن تتحول إلى إزاحة. صورة شخص ما في المرآة عبارة عن انعكاس. تحريك قطع اللغز عبارة عن دوران.**

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع اطلب من الطلا ب رسم مثلث في الربع الأول. ثم اطلب منهم تطبيق كل من تحويلا ت التطابق الثلاثة بحيث يحتوي كل من الربع الثاني والربع الثالث والربع الرابع على مثلث متطابق مع المثلث الأصلي.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-8 استخدام هندسة الإحداثيات لإثبات تطابق المثلثات.

الدرس 12-8 تحديد موضع المثلثات وتسميتها لاستخدامها في البراهين الإحداثية. كتابة البراهين الإحداثية.

بعد الدرس 12-8 حساب محيط ومساحة متوازيات الأضلاع والمثلثات.

2 التدريس

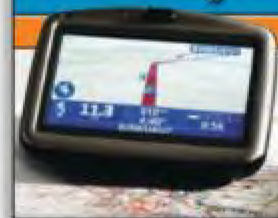
الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما وجه التشابه بين النظام الإحداثي الذي يستخدمه نظام تحديد المواقع العالمي والنظام الإحداثي الهندسي؟ المحور x هو خط العرض والمحور y هو خط الطول.
- كيف تظن أن القمر الصناعي يحدد موقعك على الأرض؟ تُقبل جميع الإجابات المنطقية.
- ما الذي تريد معرفته لإيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي؟ ينبغي معرفة الإحداثيات لكل نقطة.

الدرس 12-8 المثلثات والبرهان الإحداثي



السابق	الحالي	لماذا؟
لقد استخدمت الهندسة الإحداثية لإثبات تطابق المثلثات.	1 تحديد موضع المثلثات وكتابة أسمائها للاستخدام في البراهين الإحداثية. 2 كتابة البراهين الإحداثية.	يطلق النظام العالمي لتحديد المواقع (GPS) بثًا من الأقمار الصناعية يسمح بتحديد الموقع الدقيق لسيارة. ويمكن استخدام المعلومات مع برنامج ملاحة لتقديم اتجاهات القيادة.

المفردات الجديدة

البرهان الإحداثي
coordinate proof

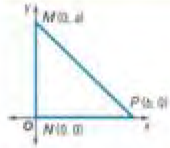
إثبات نظريات حول المثلثات.
استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 تحديد موضع المثلثات وكتابة أسمائها

كما هو الحال مع نظم تحديد المواقع العالمية، تتيح معرفة إحداثيات الشكل في مستوى إحداثي إمكانية أن تتعرف على خصائصه وتتوصل إلى استنتاجات بشأنه. **البراهين الإحداثية** تستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات المفاهيم الهندسية. والخطوة الأولى في برهان إحداثي هي وضع الشكل على المستوى الإحداثي.

مثال 1 تحديد موضع مثلث وتسميته

حدد موضع المثلث قائم الزاوية MNP واسمه على المستوى الإحداثي بحيث يصل طول الساق $\overline{MN}$ إلى a من الوحدات وطول الساق $\overline{NP}$ إلى b من الوحدات.



- سيكون طول (أطوال) الضلع (الأضلاع) الموازي للمحاور أسهل في التحديد من طول (أطوال) الضلع (الأضلاع) الذي ليس موازيًا لمحور. بما أن هذا مثلث قائم الزاوية، يمكن تحديد موضع ضلعين على محور.
- سيتيح وضع الزاوية القائمة للمثلث، $\angle N$، عند نقطة الأصل إمكانية وضع الساقين بمحاذاة المحورين الأفقي x والرأسي y.
- ضع المثلث في الربع الأول.
- بما أن M على المحور y، فإحداثي x لها هو 0. وإحداثي y هو a لأن طول الساق a وحدات.
- بما أن P على المحور x، فإحداثي y هو 0. وإحداثي x هو b لأن طول الساق b وحدات.

تمرين موجّه انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

1. حدد موضع المثلث متساوي الساقين JKL واسمه على المستوى الإحداثي بحيث يصل طول قاعدته $\overline{JL}$ إلى a وحدات وتقع رأسه K على المحور الرأسي y ويبلغ ارتفاع المثلث b وحدات.

المفهوم الأساسي وضع المثلثات على المستوى الإحداثي

- **الخطوة 1** استخدم نقطة الأصل كرأس أو مركز للمثلث.
- **الخطوة 2** ضع ضلعًا واحدًا على الأقل في المثلث على محور.
- **الخطوة 3** حافظ على المثلث داخل الربع الأول إذا كان ذلك ممكنًا.
- **الخطوة 4** استخدم الإحداثيات التي تجعل الحسابات بسيطة قدر الإمكان.

1 تحديد مواضع المثلثات وتسميتها

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام البراهين الإحداثية لإثبات المفاهيم الهندسية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد موضع واسم المثلث قائم الزاوية XYZ على أن يبلغ طول الساق $\overline{XZ}$ d من الوحدات على المستوى الإحداثي.

2 عيّن الإحداثيات المجهولة للمثلث متساوي الساقين القائم الزاوية QRS.

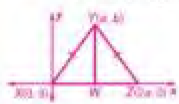
$Q(0, 0)$ و $S(c, c)$

2 كتابة البراهين الإحداثية

يوضح **المثالان 3 و 4** للطلاب كيفية استخدام الخواص والنظريات في كتابة البراهين الإحداثية.

مثال إضافي

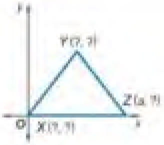
3 اكتب البرهان الإحداثي لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين زاوية الرأس في المثلث متساوي الساقين ونقطة منتصف قاعدته متعامدة على القاعدة.



نقطة منتصف $\overline{XZ}$ تساوي $(a, 0)$. وميل $\overline{YW}$ غير معرّف، وميل $\overline{XZ}$ يساوي 0. إذًا، $\overline{YW} \perp \overline{XZ}$.

مثال 2 تحديد الإحداثيات المجهولة

عيّن الإحداثيات المجهولة للمثلث متساوي الساقين XYZ.



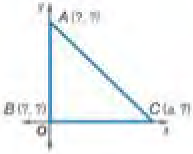
يقع الرأس X عند نقطة الأصل، وإحداثياته هي $(0, 0)$.

يقع الرأس Z على المحور x. إذًا إحداثي y هو 0. إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$.

$\triangle XYZ$ متساوي الساقين. إذًا باستخدام قطعة رأسية من Y إلى المحور x ونظرية الوتر-الساق نثبت أن إحداثي x لـ Y في منتصف المسافة بين 0 و a أو $\frac{a}{2}$. لا يمكننا كتابة إحداثي y بدلالة a. إذًا نسميها b. إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تمرين موجّه

2. عيّن الإحداثيات المجهولة للمثلث متساوي الساقين القائم الزاوية ABC. $A(0, a), B(0, 0), C(a, 0)$



نصيحة دراسية

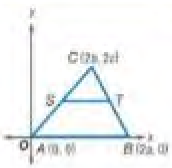
الزاوية القائمة تقاطع المحورين الأفقي x والرأسي y يشكل زاوية قائمة، ولهذا فهو مكان مناسب لتحديد موقع الزاوية القائمة في شكل مثل المثلث قائم الزاوية.

2 كتابة البراهين الإحداثية

بعد وضع مثلث على المستوى الإحداثي وتسميته، يمكننا استخدام البراهين الإحداثية للتحقق من الخصائص وبرهنة النظريات.

مثال 3 كتابة برهان إحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًا لتوضيح أن القطعة المستقيمة الموصلة بين نقطتي المنتصف في ضلعين لمثلث تتوازى مع الضلع الثالث.



ضع رأسًا عند نقطة الأصل واكتب عليها A. استخدم إحداثيات تمثل مضاعفات العدد 2 لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيات على 2.

المعطيات: $\triangle ABC$
S نقطة منتصف $\overline{AC}$
T نقطة منتصف $\overline{BC}$

المطلوب: $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$

البرهان:

حسب قانون نقطة المنتصف، إحداثيات S هي $\frac{2b+0}{2}$ أو $\frac{2c+0}{2}$ أو (b, c) وإحداثيات T هي $\frac{2a+2b}{2}$ أو $\frac{0+2c}{2}$ أو $(a+b, c)$.

حسب قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو $\frac{c-c}{a+b-b}$ أو 0 وميل $\overline{AB}$ هو $\frac{0-0}{2a-0}$ أو 0.

بما أن $\overline{ST}$ و $\overline{AB}$ لهما الميل نفسه، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

نصيحة دراسية

البرهان الإحداثي تسري الإرشادات والأساليب المستخدمة في هذا الدرس على كل الأشكال المضلعة، وليس المثلثات فقط.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

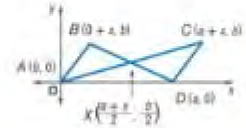
4. لنفترض أن O تمثل أوديسا، و A تمثل ألباني و S تمثل سان أنجلو.

$$\overline{OA} = \sqrt{(31.9 - 32.7)^2 + (102.3 - 99.3)^2} \approx 3.10;$$
$$\overline{AS} = \sqrt{(32.7 - 31.4)^2 + (99.3 - 100.5)^2} \approx 1.77;$$
$$\overline{OS} = \sqrt{(31.9 - 31.4)^2 + (102.3 - 100.5)^2} \approx 1.87; AS \approx OS, \triangle OAS$$

متساوي الساقين تقريبًا. وبالتالي مثلث غرب تكساس متساوي الساقين تقريبًا.

تمرين موجّه

3. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle CDX$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



الأساليب المستخدمة مع البراهين الإحداثية يمكن استخدامها في حل مسائل من الحياة اليومية.

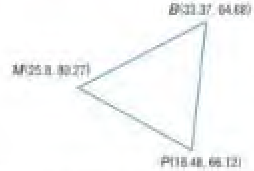
الربط بالحياة اليومية

اختفت أكثر من 50 سفينة و 20 طائرة بشكل غامض في قطاع من شمال المحيط الأطلنطي أمام ساحل أمريكا الشمالية والمعروف باسم مثلث برمودا.

المصدر: موسوعة بريتانيكا

مثال 4 من الحياة اليومية تصنيف المثلثات

الجغرافيا **مثلث برمودا منطقة يحيط بها ميامي وفلوريدا وسان خوان وبورتوريكو وبرمودا. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 25.8°N 80.27°W و 18.48°N 66.12°W و 33.37°N 64.68°W. اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن مثلث برمودا مختلف الأضلاع.**



الخطوة الأولى هي تعيين إحداثيات كل موقع. افترض أن M تمثل ميامي و B تمثل برمودا و P تمثل بورتوريكو.

إذا لم يكن أي ضلعين في $\triangle MPB$ متطابقين، فإن مثلث برمودا مختلف الأضلاع. استخدم قانون المسافة وحاسبة لإيجاد المسافة بين كل موقع.

$$MB = \sqrt{(33.37 - 25.8)^2 + (64.68 - 80.27)^2}$$
$$\approx 17.33$$

$$MP = \sqrt{(25.8 - 18.48)^2 + (80.27 - 66.12)^2}$$
$$\approx 15.93$$

$$PB = \sqrt{(33.37 - 18.48)^2 + (64.68 - 66.12)^2}$$
$$\approx 14.96$$

بما أن كل ضلع له طول مختلف، فإن $\triangle MPB$ مختلف الأضلاع. ولهذا، مثلث برمودا مختلف الأضلاع.

تمرين موجّه

4. **جغرافيا** في عام 2006، تعاونت مجموعة من متاحف الفن لتشكيل مثلث تكساس الغربي (West Texas Triangle) للترويج إلى مجموعاتهم الفنية. تشكلت هذه المنطقة من مدن أوديسا وسان أنجلو. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 31.9°N 102.3°W و 32.7°N 99.3°W و 31.4°N 100.5°W. اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن مثلث تكساس الغربي متساوي الساقين تقريبًا. **انظر الهامش.**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

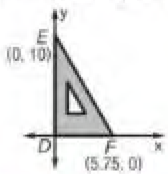
اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض مثلثًا على اللوحة وارسم مستوى إحداثيًا بحيث يتم وضع واحدة من نقاط التقاطع عند النقاط (a, b) في الربع الأول. ثم أعد رسم المستوى الإحداثي بحيث تصبح نقطة التقاطع عند النقطة (0, 0). وضّح لطلابك أن ذلك من شأنه أن يساعد في تبسيط العمليات الحسابية.

إرشاد للمعلمين الجدد

التبرير بما أن البراهين الإحداثية تجمع بين الهندسة والجبر، ذكّر الطلاب بأنهم سيحتاجون إلى استخدام قوانين المسافة والميل ونقطة المنتصف، وكذلك المسلّمات والنظريات. انصح الطلاب بالبحث عن المفردات الأساسية مثل "الطول" أو "التوازي" في المسائل الكلامية، مما قد يشير إلى إمكانية استخدام قانون معين لحل المسألة.

مثال إضافي

4. **الرسم** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن أداة الرسام هذه تشبه المثلث قائم الزاوية. طول أحد الأضلاع يساوي 25 سنتيمترًا وطول الضلع الآخر يساوي 14.375 سنتيمترًا.



ميل $\overline{ED}$ غير معرّف، وميل $\overline{DF}$ يساوي 0. $\overline{ED} \perp \overline{DF}$، إذًا $\triangle DEF$ قائم الزاوية. وشكل أداة الرسام يشبه المثلث قائم الزاوية.

التركيز على محتوى الرياضيات

الإحداثي العددي أولاً انصح الطلاب بأنهم قد يحتاجون إلى تحديد مكان الشكل باستخدام الإحداثيات العددية أولاً ثم تحويلها إلى الإحداثيات المتغيرة لكتابة براهينها.

التدريس المتمايز BL OL AL

النمط البصري/المكاني زوّد الطلاب بنسخة خريطة شفافة. واطلب من الطلاب اختيار ثلاث وجهات واستخدام تلك الرؤوس لرسم مثلث. بعد ذلك، يضع الطلا ب الخريطة الشفافة على المستوى الإحداثي. شجع الطلا ب على التجربة باستخدام هذا الموضع. وفي النهاية اطلب من الطلا ب استخدام البرهان الإحداثي لتصنيف المثلث.

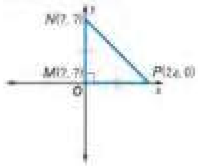
التحقق من فهمك

مثال 1 **ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.** **2–1. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

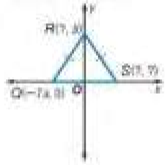
1. المثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$ بقاعدة $\overline{BC}$ طولها $4a$ وحدات.
2. المثلث قائم الزاوية $\triangle FGH$ بساقين $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ بحيث طول الساق $\overline{FG}$ هو $3a$ وحدات وطول الساق $\overline{GH}$ هو $5b$ وحدات.

مثال 2 **عيّن الإحداثي (الإحداثيات) المجهول لكل مثلث.**

3. **M(0, 0), N(0, 2a)**



4. **R(0, b), S(7a, 0)**



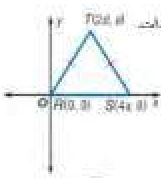
مثال 3 5. ثم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\triangle TXZ$ يشبه $\triangle WXY$. **انظر الهامش.**

مثال 4 6. **الدورة الأولمبية** خلال رحلة الشعلة الأولمبية من أولمبيا في اليونان إلى دورة الألعاب الشتوية 2010، مرت الشعلة بمدينة لندن في إنجلترا وشلالات نياغرا وأونتاريو وانتهى بها المطاف في فانكوفر في كولومبيا البريطانية. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 42.9°N، 81.2°W، 43.1°N، 79.1°W، و 49.3°N و 123.1°W. ثم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن هذه النقاط الثلاث الواقعة في مسار الشعلة تشكل مثلثًا مختلف الأضلاع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.**

7. متساوي الأضلاع $\triangle ABC$ بطول أضلاع $5a$ وحدات.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.
8. متساوي الأضلاع قائم الزاوية $\triangle RST$ طول وتره $\overline{RS}$ يساوي $4d$ وحدات.
الحل:



9. قائم الزاوية $\triangle JKL$ بالساقين $\overline{JK}$ و $\overline{JL}$، بحيث طول $\overline{JK}$ يبلغ a وحدات وطول $\overline{JL}$ 4 أضعاف طول $\overline{JK}$.

10. متساوي الأضلاع $\triangle XYZ$ بأضلاع طولها $\frac{1}{4}c$ وحدات.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 6-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

5. **المطلوب:** طبقًا لقانون حساب المسافات، فإن طول

$\overline{WX} = \sqrt{(0-0)^2 + (5b-0)^2} = 5b,$

$\overline{TX} = \sqrt{(0-0)^2 + (10b-0)^2} = 10b,$

$\overline{XP} = \sqrt{(0-12a)^2 + (0-0)^2} = 12a,$

$\overline{XN} = \sqrt{(0-24a)^2 + (0-0)^2} = 24a.$

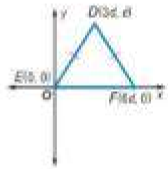
ومن ثم، فإن نسبة $\overline{WX}$ إلى $\overline{TX}$ تكون $\frac{1}{2}$ ونسبة $\overline{XP}$ إلى $\overline{XN}$ تكون $\frac{1}{2}$. $\angle TXN \cong \angle WXN$، إذًا وطبقًا لمسلّمة SAS، فإن $\triangle TXZ$ يماثل $\triangle WXY$.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7–24, 30, 34, 36–43	7–21 فردي، 38–41	8–24 زوجي، 30, 34, 36, 37, 42–43
OL أساسي	7–23 فردي، 25–30, 34, 36–43	7–24, 38–41	25–30, 34, 36, 37, 42–43
BL متقدم	25–43		

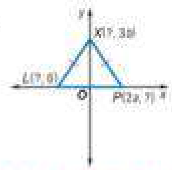
11. متساوي الساقين ΔDEF بساقين $\overline{DE}$ و $\overline{DF}$ مع قاعدة طولها $6d$ وحدات.

الحل:

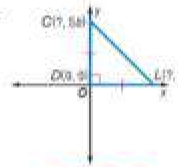


12. قائم الزاوية ΔMNP بوتر $\overline{MN}$، طول $\overline{MP}$ يبلغ $2a$ وحدات وطول $\overline{NP}$ يبلغ $4b$ وحدات.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

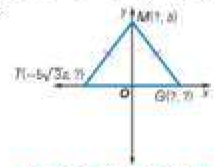
مثال 2 عيّن الإحداثي (الإحداثيات) المجهول لكل مثلث.

13.


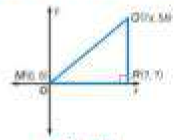
$X(0, 3b)$, $L(-2a, 0)$, $P(2a, 0)$

14.


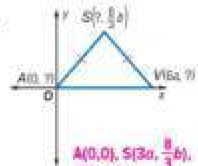
$C(0, 5b)$, $L(5b, 0)$

15.


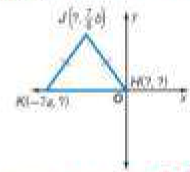
$T(-5\sqrt{3}a, 0)$, $G(5\sqrt{3}a, 0)$, $M(0, b)$

16.


$R(7a, 0)$

17.


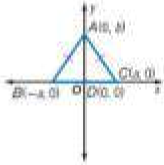
$A(0,0)$, $S(3a, \frac{8}{3}b)$, $V(6a, 0)$

18.


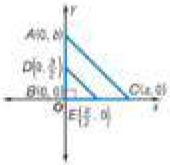
$H(0,0)$, $K(-7a, 0)$, $J(-\frac{7}{2}a, \frac{7}{6}b)$

مثال 3 البرهان اكتب برهاناً إحداثيًا لكل عبارة. 19-20. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

19. عند رسم الارتفاع في مثلث متساوي الساقين، يتكون مثلثين متطابقين.



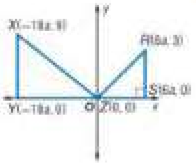
20. القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي منتصف ساقي مثلث قائم الزاوية توازي الوتر.



777

مثال 4 **البرهان** اكتب برهانًا إحداثيًا لكل عبارة. **22-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

21. $\triangle XYZ$ يشبه $\triangle RSZ$.



البرهان:

$$ZS = \sqrt{(0-6a)^2 + (0-0)^2} = 6a$$
$$ZR = \sqrt{(0-6a)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{36a^2+9}$$
$$RS = \sqrt{(6a-6a)^2 + (0-3)^2} = 3$$
$$ZY = \sqrt{(0- -18a)^2 + (0-0)^2} = 18a$$
$$XY = \sqrt{(-18a- -18a)^2 + (9-0)^2} = 9$$
$$XZ = \sqrt{(-18a-0)^2 + (9-0)^2} = 3\sqrt{36a^2+9}$$

بما أن $\frac{ZS}{ZY} = 3$ و $\frac{ZR}{XZ} = 3$ و $\frac{RS}{XY} = 3$ إذًا $\triangle XYZ$ يشبه $\triangle RSZ$

22. $R(-3, -3)$, $S(3, -3)$, $T(0, 3\sqrt{3} - 3)$ تشكل مثلثًا متساوي الأضلاع.

23. **كرة القدم** فريق ولاية أوهايو في كولومبوس، أوهايو وفريق ولاية بنسلفانيا في يونيفرستي بارك، بنسلفانيا وفريق نورث ويسترن في إيفانستون، إلينوي هم جميعًا جزء من مجموعة العشرة الكبار. الإحداثيات التقريبية لكل موقع بالترتيب هي 39.98°N ، 82.98°W و 40.79°N 77.86°W و 41.88°N ، 87.62°W ما نوع المثلث المتشكل بهذه المدن الثلاث؟

24. **كرة الطلاء** سلطان وجمال وصالح جميعًا في فريق واحد في لعبة كرة الطلاء. يقف جمال عند نقطة الأصل وسلطان عند (4, 3) وصالح عند (0, 5). قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن المثلث المكون بواسطة فريق كرة الطلاء متساوي الأضلاع.

ارسم $\triangle XYZ$ وأوجد ميل كل ضلع في المثلث. حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. اشرح. **25–26. انظر الهامش.**

25. $X(0, 0)$, $Y(2a, 3b)$, $Z(3c, 2b)$

26. $X(0, 0)$, $Y(7c, 5)$, $Z(-3c, 7c^2)$

27. **الملاهي** طارق في مدينة الملاهي ويريد ركوب الأفعوانية ودوامة الخيول وسيارات التصادم. إذا علمت أن الأفعوانية تقع عند (−1, 2) ودوامة الخيول تقع عند (3, 3) وسيارات التصادم تقع عند (0, 2−)، فقم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن الشكل المكون بالألعاب الثلاث قائم الزاوية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

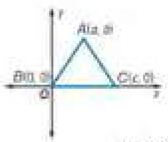
28. **البرهان** قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\triangle ABC$ مثلث مختلف الأضلاع إذا علمت أن الرؤوس هي $A(0, 0)$ و $B(3c, 5a)$ و $C(-2c, 8a)$.

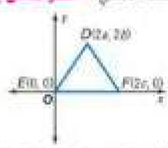
29. **الماراثون الثلاثي** تشارك فتحية في ماراثون ثلاثي. تقع نقطة البداية عند نقطة الأصل. خلال الشوط الأول من الماراثون الثلاثي، تركض فتحية لمسافة 10 كم باتجاه الشرق ثم تركب الدراجة لمسافة 40 كم باتجاه الشمال وفي الشوط الأخير تسبح لمسافة 15 كم باتجاه الشمال. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن المثلث المتكون من نقطة البداية وبداية ركوب الدراجة ونهاية السباحة هو مثلث مختلف الأضلاع.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

30. **التبرير** إذا علمت أن نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتر مثلث قائم الزاوية رأساه عند (−4, 2) و (4, 2)، فأوجد الرأس الثالث. **(4, −2)**

31. **تحدٍ** قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أنه في حالة ضرب كل إحداثي من إحداثيات x وإحداثيات y في 2، فإن الشكل الناتج يشبه المثلث الأصلي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**





32. **التبرير** إذا علمت أن $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية والإحداثيات هي $A(0, 0)$ و $B(4, 0)$. فكم عدد النقاط المختلفة التي يمكن أن تقع C عندها على المستوى الإحداثي؟

32. 4؛ إحداثيات C يمكن أن تكون: $C(0, 4)$، $C(0, -4)$، $C(4, 4)$، $C(4, -4)$

إجابات إضافية

25. ميل $XY = \frac{3b}{2a}$

ميل $YZ = -\frac{a}{b}$

ميل $XZ = \frac{2b}{3a}$

المثلث ليس مثلثًا قائم الزاوية نظرًا لعدم تعامد اثنين من الخطوط به.

26. ميل $XY = \frac{3}{7c}$

ميل $YZ = -\frac{7c^2 - 3}{10c}$

ميل $XZ = -\frac{7c}{3}$

هذا المثلث عبارة عن مثلث قائم الزاوية نظرًا لأن XY عمودي على XZ.

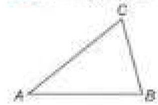
778 | الدرس 8-12 | المثلثات والبرهان الإحداثي

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب ذكر كيف يمكنهم تحديد موضع أشكال معينة في المستوى الإحداثي وكيف يحددون أسماء الرؤوس. وقد يناقش الطلاب أفكارًا متنوعة حول تحديد الموضع وحول كيفية تبسيط البراهين الإحداثية عن طريق استخدام الأساليب الأصلية والبسيطة في تحديد الأسماء.

تدريب على الاختبار المعياري

33. الإجابة الشبكية في الشكل أدناه، $m\angle B = 76$. قياس $\angle A$ نصف قياس $\angle B$. ما قياس $m\angle C$؟ **66**



34. الجبر ما الإحداثي الأفقي x لحل نظام المعادلات الظاهر أدناه؟ **D**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 2y = -18 \end{cases}$$

A -6 **C** 3

B -3 **D** 6

35. ما إحداثيات النقطة R في المثلث؟ **G**

F $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ **H** $\left(\frac{b}{2}, a\right)$

G (a, b) **J** $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$

36. SAT/ACT بالنسبة لكل x،

$17x^3 + 3x^2 + 2 - (-4x^3 + 3x^3 - 2) =$ **C**

A $13x^3 + 3x^3 + 3x^2$

B $13x^3 + 6x^2 + 4$

C $21x^3 - 3x^3 + 3x^2 + 4$

D $21x^3 + 3x^2 + 3x^3$

E $21x^3 + 3x^3 + 3x^2 + 4$

مراجعة شاملة

راجع الشكل الموجود على اليسار.

37. اذكر اسم زاويتين متطابقتين. $\angle TSR \cong \angle TRS$

38. اذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{RQ} \cong \overline{QS}$

39. اذكر اسم زوج من المثلثات المتطابقة. $\triangle RQV \cong \triangle SQV$

37–39. نُقدم الإجابة النموذجية.

40. المنحدرات يتطلب القانون الأمريكي لذوي الإعاقة أن تمتد منحدرات الكراسي المتحركة لمسافة 30 سم على الأقل لكل ارتفاع بمقدار 2.5 سم.

a. حدد الميل الممثل في هذا المتطلب. $\frac{1}{12}$

b. أقصى طول يسمح به القانون لمنحدر هو 9 أمتار. كم يبلغ ارتفاع أعلى نقطة في هذا المنحدر بالسنتيمتر؟ **75 cm**

مراجعة المهارات

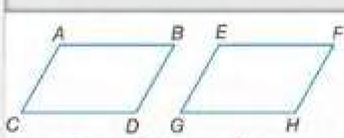
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

41. $X(5, 4)$ ، $Y(2, 1)$ **4.2** **42.** $A(1, 5)$ ، $B(-2, -3)$ **8.5** **43.** $J(-2, 6)$ ، $K(1, 4)$ **3.6**

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اكتب دليلاً لتثبت أن $\overline{ACDB} \cong \overline{EGHF}$.

المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{EG}, \overline{BD} \cong \overline{FH}, \overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{CD} \cong \overline{GH}, \angle A \cong \angle E$.



المطلوب: ارسم القطر $\overline{CB}$ و $\overline{GF}$ $\triangle ABC \cong \triangle EFG$. و (SAS) $\triangle BCD \cong \triangle FGH$. وباستخدام CPCTC ونظرية جمع الزوايا، يمكن أن تثبت أن $\angle F \cong \angle B$ و $\angle G \cong \angle C$. بما أن الأضلاع والزوايا المتناظرة تكون متطابقة، فإن الشكل الرباعي $ACDB \cong$ الشكل الرباعي $EGHF$.

12-9A مختبر الهندسة
إنشاء المنصفات

استكشاف

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق أ فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات ملاصقة ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك.

الإنشاء منصف عمودي

أنشئ منصفًا عموديًا على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle MPQ$، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2

اطو المثلث إلى نصفين على طول $\overline{MQ}$ بحيث تلامس الرأس M الرأس Q.

الخطوة 3

استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overline{AB}$ بطول الطي. $\overline{AB}$ هو المنصف المتعامد لـ $\overline{MQ}$.

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

الإنشاء منصف الزاوية

أنشئ منصف زاوية لمثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle ABC$، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2

اطو المثلث إلى نصفين من الرأس A بحيث يكون الضلعان $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ محاذيين لبعضهما.

الخطوة 3

حدد النقطة L في الثنية على طول الحافة $\overline{BC}$. استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overline{AL}$ بطول الطي. $\overline{AL}$ هو منصف الزاوية للمثلث $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل

1. أنشئ المنصف العمودي لضلعي $\triangle MPQ$ الآخرين ومنصف الزاوية للزاويتين الأخريين للمثلث. ما الذي تلاحظه بشأن المنصفات؟ **راجع عمل الطلاب. يتقاطعون عند نفس النقطة.**

كرر هذا التمرين مع نوعي المثلثين الآخرين. **4–2. راجع عمل الطلاب.**

2. حاد
3. منفرج
4. قائم

1 التركيز

الهدف إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- فرجار
- مسطرة تقويم

نصيحة للتدريس

يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب مع الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث نفسه.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. يستكمل كل طالب إحدى هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. حدد أدوارًا لخطوتي الإنشاء 1 و 2.

أثناء قيام الطلاب برسم المثلثين المتطابقين لإثبات التنصيف العمودي في النشاط رقم 1، أخبرهم أن بإمكانهم استخدام النقطة P أو النقطة Q لأن كلتا مجموعتي الأقواس تم رسمها بنفس فتحة الفرجار.

تمرين اجعل الطلاب يستكملوا التمرين 1 أثناء إجراء النشاطات.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 4-2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يدركون مفهوم المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا وإنشاءها.

من العملي إلى النظري

امنح الطلاب الأنواع الثلاثة من المثلثات المذكورة في التمارين 4-2. أبلغهم بأنك تريدهم أن يجعلوا كل مثلث يتوازن على قلم. اجعلهم ينتقوا أسلوب إنشاء ويشرحوه.

الاستكشاف 12-9B مختبر الهندسة
إنشاء الوسيطات والارتفاعات

وسيط المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء وسيط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق: أبرجار، ومسطرة تقويم، خيط، أدوات ملاصقة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك.

اربط طرف خيط حول قلم رصاص، واستخدم دبوسًا لتثبيت الخيط بالرأس.

الإنشاء 1 وسيط المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{DE}$. سمّ نقاط التقاطع R و S.

الخطوة 2

استخدم مسطرة تقويم لإيجاد النقطة حيث $\overline{RS}$ يتقاطع مع $\overline{DE}$. سمّ النقطة M. وهي نقطة منتصف $\overline{DE}$.

الخطوة 3

ارسم مستقيمًا يمر خلال F و M. $\overline{FM}$ هو وسيط $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل.

الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس B لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.

الخطوة 2

عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسمار على X وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. سمّ نقطة تقاطع الأقواس H.

الخطوة 3

استخدم مسطرة تقويم لرسم $\overline{BH}$. سمّ النقطة حيث تتقاطع $\overline{BH}$ مع $\overline{AC}$ النقطة D. $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ ومتعامد على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل 1-2. انظر الهامش.

1. أنشئ وسيطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ما الذي تلاحظه بشأن وسيطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ما الذي تلاحظه؟

1 التركيز

الهدف إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- فرجار
- مسطرة تقويم

نصيحة للتدريس

يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية.

يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب مع الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين الوسيطات والارتفاعات في المثلث نفسه.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة مختلفي القدرات. ينتقي كل طالب إحدى هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. حدد أدوارًا لخطوتي الإنشاء 1 و 2.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرينين 1 و 2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستوعبون إنشاء الوسيطات والارتفاعات.

من العملي إلى النظري

اجعل الطلاب يقارنوا تقاطعات الوسيطات والارتفاعات التي أنشؤوها بمركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة الخارجية للمثلث.

إجابات إضافية

1. يتقاطعون عند النقطة نفسها.
2. يتقاطعون عند النقطة نفسها.

12-9C مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث

يمكنك استخدام تطبيق .Cabri™ Jr على حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لاكتشاف خواص المثلثات.

عمل رسومات هندسية للأشكال مستخدمًا مختلف الأدوات والطرق (فرجار ومسطرة تقويم، خيط، أدوات ملامسة، ورق قابل للطي، برنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

النشاط 1

قم بعمل مثلث. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.

الخطوة 1 قم بعمل مثلث باستخدام أداة المثلث في القائمة **F2**. ثم استخدم أداة **Alph-Num** في القائمة **F5** لتسمية الرؤوس بالرموز A، وB، وC.

الخطوة 1

الخطوة 2 أدخل إلى أداة **المسافة والطول** التي تظهر باسم **D. & Length** تحت **Measure** في القائمة **F5**. استخدم الأداة لقياس كل ضلع في المثلث.

الخطوة 3 اعرض $AB + BC$، و$AB + CA$، و$BC + CA$ باستخدام أداة **Calculate** في القائمة **F5**. اكتب القياسات.

الخطوة 4 انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.

الخطوتان 2 و 3

تحليل النتائج

1. استبدل كل ● بالرموز >، أو <، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$AB + BC$ ● CA **$AB + BC > CA$** $AB + CA$ ● BC **$AB + CA > BC$** $BC + CA$ ● AB **$BC + CA > AB$**

2. انقر فوق الرؤوس واسحبها لتغيير شكل المثلث، ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ما الذي تلاحظه؟ **ما زالت كل المتباينات كما هي.**
3. انقر فوق النقطة A واسحبها بحيث تقع فوق المستقيم BC. ما الذي تلاحظه في AB، وBC، وCA؟ هل A، وB، وC رؤوس مثلث؟ اشرح.
$AB + BC = CA$؛ لا، النقاط ليست رؤوس للمثلث لأنها على مستقيم واحد.
4. **التخمين** حول مجموع أطوال ضلعين من مثلث وطول الضلع الثالث.
مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
5. هل المقاييس والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمارين 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 4؟ اشرح. **انظر الهامش.**
6. استبدل كل ● بالرموز <، أو >، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$|AB - BC|$ ● CA $|AB - CA|$ ● BC $|BC - CA|$ ● AB

ثم انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث وراجع إجاباتك. ما الذي تلاحظه؟ **$|AB - BC| < CA$; $|AB - CA| < BC$; $|BC - CA| < AB$؛ تظل جميع المتباينات كما هي.**
7. كيف تمكنت من استخدام ملاحظاتك لتحديد الأطوال الممكنة للضلع الثالث بالمثلث من خلال معرفة طولي الضلعين الآخرين؟ **انظر الهامش**

1 التركيز

الهدف استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.

المواد

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus

2 التدريس

العمل بصورةٍ مستقلة

يستطيع الطلاب العمل بمفردهم أو في مجموعات ثنائية من الطلاب مختلفي القدرات. اطلب من الطلاب أن ينفذوا النشاط أثناء الإجابة على التمارين من 1 إلى 6.

اسأل الطلاب عن الرابط بين تخمينهم في التمرين 4 وما لاحظوه. اجعل الطلاب يحددوا كيفية النقر على الرأس A وسحبه بحيث يقع على أقصر مسافة من الرأس B.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرين 7 بمفردهم.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون العلاقات بين أطوال أضلاع المثلثات.

من العملي إلى النظري

اجعل الطلاب يرسموا مثلثًا على ورقة رسوم بيانية. اطلب منهم أن يتبادلوا مثلثاتهم مع زملائهم. اجعل الطلاب يتوصلوا إلى أطوال الأضلاع ويكتبوا المتباينات للتعبير عن العلاقات بين الأطوال.

إجابات إضافية

5. لا ؛ تم التوصل إلى التخمين في التمرين 4 باستخدام الاستدلال الاستقرائي، وهو ليس طريقة صالحة لإثبات التخمين.
7. سيقل طول الضلع الثالث عن مجموع طولي الضلعين الآخرين ويزيد على القيمة المطلقة للفارق بين طولي الضلعين الآخرين.

الدرس 12-9 مساحات متوازيات الأضلاع والمثلثات

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد أوجدت مساحات المستطيلات والمربعات.	1 إيجاد محيطات ومساحات متوازيات الأضلاع. 2 إيجاد محيطات ومساحات المثلثات.	لغز تانجرام هو لغز صيني قديم يمكن إعادة ترتيبه لتكوين صور مختلفة مثل الحيوانات الموضحة. تبقى مساحة اللغز ثابتة قبل الترتيب وبعده. وهي مجموع مساحات القطع.

المفردات الجديدة

قاعدة متوازي الأضلاع
base of a parallelogram
ارتفاع متوازي الأضلاع
height of a parallelogram
قاعدة المثلث
base of a triangle
ارتفاع المثلث
height of a triangle

استخدام الإحداثيات لحساب محيطات المضلعات ومساحات المثلثات والمستطيلات مثل استخدام قانون المسافة.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 مساحات متوازيات الأضلاع

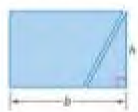
متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. وأي ضلع في متوازي الأضلاع يمكن تسميته **قاعدة متوازي الأضلاع**. **ارتفاع متوازي الأضلاع** هو المسافة العمودية بين أي قاعدتين متوازيتين.

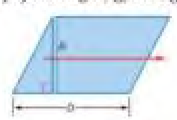
يمكنك استخدام المسلمة التالية لوضع صيغة لمساحة متوازي الأضلاع.

المسلّمة 12.4 مسلّمة جمع المساحات

مساحة منطقة هي مجموع مساحات الأجزاء غير المتداخلة بها.

في الشكل أدناه، تم قص مثلث قائم الزاوية من أحد أضلاع متوازي أضلاع وإزاحته إلى الضلع الآخر كما هو موضح لتكوين مستطيل بنفس القاعدة والارتفاع.



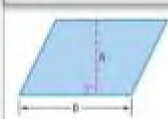


تذكر من الدرس 6-10 أن مساحة المستطيل هي ناتج ضرب القاعدة في الارتفاع. وحسب مسلمة جمع المساحات، متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h له نفس مساحة مستطيل قاعدته b وارتفاعه h.

المفهوم الأساسي مساحة متوازي الأضلاع

الشرح المساحة A لمتوازي الأضلاع هي ناتج ضرب القاعدة b في الارتفاع المناظر لها h.

الرموز $A = bh$



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-9 كتابة البراهين الإحداثية.

الدرس 12-9 حساب محيط ومساحة متوازيات الأضلاع والمثلثات.

الدرس 12-9 التعرف على خواص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الأشكال التي يمكن عملها من هذا اللغز؟ الإجابة النموذجية: أرنب، قطة وبطة.
- وضح السبب وراء تطابق مساحات الشكل الثاني والشكل الرابع. لأن مساحة القطع التي تشكّل كلًا منهما متشابهة.
- ما الطريقة السهلة التي يمكن من خلالها حساب مساحة أحد تلك الأشكال؟ الإجابة النموذجية: من خلال حساب مساحة المربع.

1 مساحات متوازيات الأضلاع

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية حساب مساحة متوازي الأضلاع.

التقويم التكويني

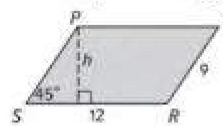
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد محيط ومساحة ▱RSTU.

المحيط = 104 cm.
المساحة = $512\ cm^2$

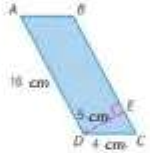
2 احسب مساحة ▱PQRS.



$76.3\ cm^2$

مثال 1 محيط ومساحة متوازي الأضلاع

أوجد محيط ومساحة ▱ABCD.



المحيط

بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة في متوازي الأضلاع، فإن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. $AB = 4$ سم و $BC = 10$ سم.

محيط ▱ABCD = $AB + BC + DC + AD$

$4 + 10 + 4 + 10 = 28$ cm

المساحة

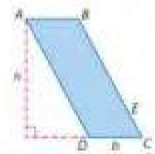
الارتفاع المذكور، DE، هو 5 سم. $\overline{BC}$ هي القاعدة وتبلغ 10 سم.

$A = bh$ مساحة متوازي الأضلاع

$= (10)(5) = 50\ cm^2$ $b = 10$ و $h = 5$

تصحيحة دراسية

ارتفاعات الأشكال يمكن حساب ارتفاع شكل من طريق مد القاعدة. في المثال 1، يمكن قياس ارتفاع ▱ABCD المناظر للقاعدة $\overline{DC}$ من خلال مد $\overline{DC}$.



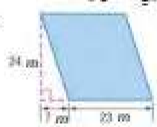
تمرين موجّه

أوجد محيط كل متوازي أضلاع ومساحته.

1A.

76 cm, $315\ cm^2$

1B.

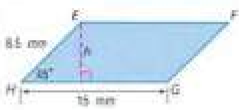


96 m, $552\ m^2$

يمكنك استخدام حساب المثلثات لحساب مساحة متوازي الأضلاع.

مثال 2 مساحة متوازي الأضلاع

أوجد مساحة ▱EFGH.



الخطوة 1 استخدم المثلث الذي تبلغ قياسات زواياه °90 -°45 -°45 لإيجاد الارتفاع h لمتوازي الأضلاع.

تذكر أنه إذا كان قياس الساق المقابلة للزاوية °45 هو h، فإن قياس الوتر هو $h\sqrt{2}$.

$h\sqrt{2} = 8.5$ استبدل 8.5 بقياس الوتر.

$h = \frac{8.5}{\sqrt{2}} = 6$ mm تقريبًا اقسم كل طرف على $\sqrt{2}$.

الخطوة 2 أوجد المساحة.

$A = bh$ مساحة متوازي الأضلاع

$= (15)(6) = 90\ mm^2$ $b = 15$ و $h = 6$

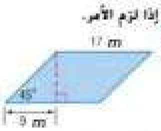
انتبه!

الدقة تذكر أنه يتم قياس المحيط باستخدام الوحدات الخطية مثل البوصة والسنتيمتر. ولكن يتم قياس المساحة باستخدام الوحدات المربعة مثل القدم المربع والملّيمتر المربع.

تمرين موجّه

أوجد مساحة كل متوازي أضلاع. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

2A.



$153\ m^2$

2B.

$665.1\ m^2$

انتبه!

تعريف الارتفاع ارتفاع متوازي الأضلاع هو المسافة المتعامدة بين ضلعين متوازيين. وبما أن لمتوازي الأضلاع زوجين من الأضلاع المتوازية، فإن به ارتفاعين. وحسب اتجاه متوازي الأضلاع، لا يجب أن يكون الارتفاع عبارة عن مسافة رأسية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

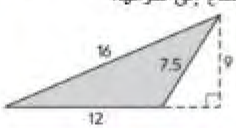
اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض متوازي أضلاع على اللوحة وارسم قطرًا من أقطاره. تتبع متوازي الأضلاع لترسم مثلثين. اسحبهما بعيدًا وأرجعهما معًا لتوضح للطلاب أن مساحة متوازي الأضلاع عبارة عن مجموع مساحتي هذين المثلثين.

مساحات المثلثات

يوضح **المثالان 3 و 4** كيفية استخدام مساحات المثلثات في حساب القيم المجهولة.

مثال إضافي

3 صندوق الرمال ستحتاج إلى شراء ما يكفي من اللوحات لتصنع إطارًا لصندوق الرمال المثلث الموضح وما يكفي من الرمال لملئه. إذا كانت اللوحة الواحدة طولها 3 أمتار وحقيبة الرمال الواحدة تملأ 9 أمتار مربعة من صندوق الرمال، فكم عدد اللوحات والحقائب التي سوف تحتاج إلى شرائها؟



12 لوحة و 6 حقائب

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي تستطيع أن تجعل الطلاب يكوّنوا أشكالاً عدة على ورق التمثيل البياني ليتحققوا من معادلا ت حساب المساحات لمتوازيات الأضلا ع والمثلثات.

مراجعة المفردات

ارتفاع المثلث قطعة مستقيمة ممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم المحتوي على الضلع المقابل، كما أنها عمودية على المستقيم المحتوي على هذا الضلع

2 مساحات المثلثات

كما هو الحال مع قاعدة متوازي الأضلاع، **قاعدة المثلث** يمكن أن تكون أي ضلع. **ارتفاع المثلث** هو طول ارتفاع مرسوم من قاعدة معينة.

يمكنك استخدام المسلمة التالية لوضع صيغة لمساحة المثلث.

المسلّمة 12.5 مسلّمة تطابق المساحات

إذا كان شكلا ن متطابقين، فسيكون لهما المساحة ذاتها.

في الشكل أدناه، تم قص متوازي أضلاع إلى نصفين بطول القطر لتكوين مثلثين متطابقين بنفس القاعدة والارتفاع.

حسب مسلّمة تطابق المساحات، المثلثان المتطابقان لهما نفس المساحة. إذًا مثلث قاعدته b وارتفاعه h تبلغ مساحته نصف مساحة متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h.

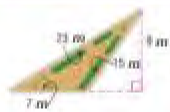
المفهوم الأساسي مساحة المثلث

الشرح المساحة A للمثلث هي نصف ناتج ضرب القاعدة b في الارتفاع المناظر h.

الرموز $A = \frac{1}{2}bh$ أو $A = \frac{bh}{2}$

مثال 3 من الحياة اليومية محيط ومساحة المثلث

البستنة أمير يحتاج كمية كافية من النشارة لتغطية الحديقة المثلثة الموضحة وكمية كافية من حجارة الممشى لعمل حدود لها. إذا علمت أن كيسًا واحدًا من النشارة يغطي 12 مترًا مربعًا وكل حجر من أحجار الممشى يغطي 10 سنتيمترات من الحد، فكم عدد أكياس النشارة وأحجار الممشى التي يجب عليه شراؤها؟



الخطوة 1 أوجد محيط الحديقة.

محيط الحديقة $23 + 15 + 7 = 45$ m

الخطوة 2 أوجد مساحة الحديقة.

$A = \frac{1}{2}bh$ مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(7)(9) = 31.5\ m^2$ $b = 7$ ، $h = 9$

الخطوة 2 استخدم تحليل الوحدات لتحديد المطلوب من كل عنصر.

أكياس النشارة

$31.5\ m^2 \cdot \frac{1\ bag}{12\ m^2} =$ 2.625 من الأكياس

أحجار الممشى

$45\ m \cdot \frac{100\ cm}{1\ m} \cdot \frac{1\ stone}{10\ cm} =$ 450 حجرًا

قرّب عدد الأكياس للأعلى بحيث تكون هناك كمية كافية من النشارة. سوف يحتاج إلى 3 أكياس من النشارة و 135 من أحجار الممشى.

الربط بالحياة اليومية

يمكن للحدائق المثلثة أن تشكل بقعة في المناظر الطبيعية أو تنتج ببساطة من تقاطع الممرات.

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اجعل الطلاب يقطعوا اثنين من متوازيات الأضلاع بحجمين مختلفين. أولاً، اجعلهم يقطعوا مثلث قائم الزاوية من نهاية واحد من متوازيي الأضلاع ويعيدوا ترتيب القطع ليشكلوا مستطيلاً. بعدها، اطلب منهم حساب مساحة المستطيل. ثم اجعلهم يقطعوا متوازي الأضلاع الثاني نصفين بشكل قطري ويحددوا مساحة المثلثات الناتجة.

تمرين موجّه

أوجد محيط كل مثلث ومساحته.

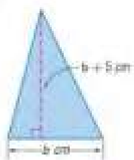
3A. 100.4 cm, 285 cm^2

3B. 71.7 cm, 167.2 cm^2

يمكنك استخدام الجبر للحل لإيجاد القياسات غير المعلومة في متوازيات الأضلاع والمثلثات.

مثال 4 استخدام المساحة لإيجاد القياسات المجهولة

الجبر ارتفاع مثلث يزيد عن قاعدته بمقدار 5 سم، ومساحة المثلث 52 سم مربع. أوجد القاعدة والارتفاع.



الخطوة 1 اكتب تعابير لتمثيل كل قياس.

افترض أن b تمثل قاعدة المثلث. إذًا، الارتفاع يساوي $b + 5$.

الخطوة 2 استخدم صيغة مساحة المثلث لإيجاد b.

$A = \frac{1}{2}bh$	مساحة المثلث
$52 = \frac{1}{2}b(b + 5)$	استبدل A بـ 25 و h بـ b + 5.
$104 = b(b + 5)$	اضرب كل طرف في 2.
$104 = b^2 + 5b$	خاصية التوزيع
$0 = b^2 + 5b - 104$	اطرح 104 من كل طرف.
$0 = (b + 13)(b - 8)$	حلل إلى العوامل.
$b + 13 = 0$ أو $b - 8 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$b = -13$ $\quad$ $b = 8$	حل لإيجاد b.

الخطوة 3 استخدم التعابير من الخطوة 1 لإيجاد كل قياس.

بما أن الطول لا يمكن أن يكون بالسالب، إذًا قياس القاعدة 8 سم وقياس الارتفاع 5 + 8 أو 13 سم.

تصيحة دراسية

خاصية ناتج الضرب الصفري إذا كان ناتج ضرب عاملين يساوي 0، فأحدهما على الأقل يجب أن يساوي 0.

تمرين موجّه

الجبر أوجد قيمة x.

4A. $A = 148$ m^2 **18.5 m**

4B. $A = 357$ cm^2 **21 cm**

4C. الجبر قاعدة متوازي أضلاع ضعف ارتفاعه. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع 72 سم مربع، فأوجد القاعدة والارتفاع. **b = 12 m, h = 6 m**

مثال إضافي

4 الجبر ارتفاع المثلث يزيد بمقدار 7 سنتيمترات عن قاعدته. مساحة المثلث تبلغ 60 سنتيمترًا مربعًا. احسب القاعدة والارتفاع.

القاعدة = 8 cm.
والارتفاع = 15 cm.

التركيز على محتوى الرياضيات

المساحة وضّح أنه من الممكن أن يتم رسم العديد من مختلف متوازيات الأضلاع بالارتفاع نفسه ومع كون قواعدها متطابقة، ومن ثم بالمساحة نفسها. استخدم لوحة جغرافية أو جهاز تصميم مماثلًا لتوضح مختلف متوازيات الأضلاع التي لها نفس الطول والقاعدة. اطلب من الطلاب أن يوضحوا مدى اختلاف متوازيات الأضلاع تلك.

إرشاد للمعلمين الجدد

تمثيل النماذج ساعد الطلاب على فهم العلاقة بين مساحة المثلث ومساحة متوازي الأضلاع أو المستطيل من خلال عرض نموذج أمامهم. اقطع قطعة من الورق حجمها 21 سنتيمترًا × 27.5 سنتيمترًا تصغين على امتداد القطر لتوضح أن مساحة المثلث تبلغ نصف مساحة المستطيل الذي له نفس القاعدة والارتفاع. ثم اقطع مثلثًا قائم الزاوية من طرف ورقة أخرى حجمها 21 سنتيمترًا × 27.5 سنتيمترًا بحيث يكون لها نفس ارتفاع الورقة الأصلية. شكّل متوازي أضلاع من الورقة عن طريق وضعها على الطرف الآخر من الورقة. ثم اقطعها نصفين على امتداد القطر. مساحة المثلث تبلغ نصف مساحة متوازي الأضلاع المناظر هذا.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 9-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1 أوجد محيط ومساحة كل متوازي أضلاع أو مثلث. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1. 

56 cm 180 cm^2

2. 

76 m, 288 m^2

3. 

64 cm, 207.8 cm^2

4. 

60.1 m, 115 m^2

5. 

43.5 cm, 20 cm^2

6. 

80 mm, 240 mm^2

7. **الحرف اليدوية** يصنع عبد الرحمن وعبد الرحيم المراوح الورقية. كل مروحة مكونة من 4 مثلثات بالأبعاد الموضحة. أوجد محيط ومساحة كل مثلث. 28.5 , 33.8 cm^2

مثال 4 أوجد قيمة x.

8. $A = 153$ cm^2
17 cm


9. $A = 165$ cm^2
11 cm


التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3-1 **البنية** أوجد محيط ومساحة كل متوازي أضلاع أو مثلث. قرب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

10. 

96 cm, 528 cm^2

11. 

76 m, 315 m^2

12. 

80 mm, 137.5 mm^2

13. 

69.9 m, 129.9 m^2

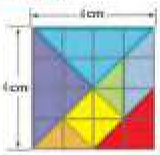
14. 

170 cm, 1440 cm^2

15. 

174.4 m, 1520 m^2

16. **ألغاز تانجرام** مساحة لغز تانجرام الموضح 4 سم مربع.
   a. أوجد محيط ومساحة المثلث الأرجواني. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. 9.7 cm; 4 cm^2
   b. أوجد محيط ومساحة متوازي الأضلاع الأزرق. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. 6.8 cm; 2 cm^2



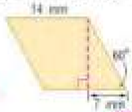
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	10-27, 38-58	42-45 ,فردي 11-27	38-41, ,زوجي 10-26 46-58
OL أساسي	29-35 ,فردي 28, 11-27 36, 38-58 ,فردي	10-27, 42-45	28-36, 38-41, 46-58
BL متقدم	(54-58 :اختياري) ,28-53		

مثال 2 **البنية** أوجد مساحة كل متوازي أضلاع. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

17. 

$727.5\ m^2$

18. 

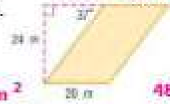
$169.7\ mm^2$

19. 

$338.4\ cm^2$

20. 

$57.9\ cm^2$

21. 

$480\ m^2$

22. 

$471.9\ cm^2$

23. **الطقس** كثيرا ما يتم عرض مناطق ترقب الأعاصير على خرائط الطقس باستخدام متوازيات أضلاع. ما مساحة المنطقة المتأثرة بإعلان ترقب الأعاصير الموضح؟ قرب إلى أقرب كيلومتر مربع. $55{,}948\ km^2$

مثال 4

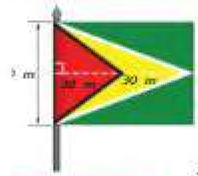
24. ارتفاع متوازي أضلاع يزيد عن قاعدته بمقدار 4 مليمترات. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع 221 مليمترات مربعة، فأوجد القاعدة والارتفاع. $b = 13\ mm;\ h = 17\ mm$

25. ارتفاع متوازي أضلاع يساوي ربع قاعدته. إذا علمت أن مساحة متوازي الأضلاع 36 سم مربع، فأوجد القاعدة والارتفاع. $b = 12\ cm;\ h = 3\ cm$

26. قاعدة مثلث ضعف ارتفاعه. إذا علمت أن مساحة المثلث 49 مترا مربعا، فأوجد القاعدة والارتفاع. $b = 14\ m;\ h = 7\ m$

27. ارتفاع مثلث أقصر من قاعدته بمقدار 3 أمتار. إذا علمت أن مساحة المثلث 44 مترا مربعا، فأوجد القاعدة والارتفاع. $b = 11\ m;\ h = 8\ m$

28. **الأعلام** يريد عمر صنع نسخة مطابقة للعلم الوطني لغيانا.



a. ما مساحة قطعة القماش المطلوبة للمنطقة الحمراء؟ والصفراء؟ $900\ cm^2;\ 900\ cm^2$

b. إذا علمت أن تكلفة القماش AED 3.99 للمتر المربع لكل لون وقد اشترى كمية القماش المطلوبة بالضبط، فكم ستتكلف العلم؟ AED 1.43

29. **دراما** ليلى مسؤولة عن تصميم الديكور للأداء الفني لمسرحية روميو وجولييت في مدرستها. يغطي لتر واحد من الطلاء 7 أمتار مربعة. فكم عدد اللترات المطلوبة من كل لون إذا علمت أن السقف والبرج يتطلب كل منهما 3 طبقات من الطلاء؟ لتر من الأصفر، و 3 لترات من الأزرق

أوجد محيط ومساحة كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

30. 

$8\ m;\ 4\ m^2$

31. 

$9.19\ cm;\ 4.79\ cm^2$

32. 

$37.95\ cm;\ 68.55\ m^2$

إجابات إضافية

35a. 10.9 وحدات²

35b. $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}bh$

$\sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(5)(12)$

$\sqrt{15(10)(3)(2)} \stackrel{?}{=} 30$

$\sqrt{900} \stackrel{?}{=} 30$

$30 = 30$

الهندسة الإحداثية أوجد مساحة كل شكل. واشرح الطريقة المستخدمة.

33. $\square ABCD$ له الرؤوس $A(4, 7)$ و $B(2, 1)$ و $C(8, 1)$ و $D(10, 7)$
33. 36 وحدة^2؛ مثّل بيانيًا متوازي الأضلاع. ثم قس طول القاعدة والارتفاع واحسب المساحة.

34. $\triangle RST$ له الرؤوس $R(-8, -2)$ و $S(-2, -2)$ و $T(-3, -7)$
34. 15 وحدة^2؛ مثّل بيانيًا المثلث. ثم قس طول القاعدة والارتفاع واحسب المساحة.

35. **صيغة هيرون** تربط صيغة هيرون أطوال أضلاع مثلث بمساحته. والصيغة هي $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث s هو نصف محيط المثلث وa وb وc أطوال الأضلاع. **a–b. انظر الهامش.**

a. استخدم صيغة هيرون لإيجاد مساحة مثلث أطوال أضلاعه 7 و10 و4.

b. أثبت أن المساحة التي تم إيجادها للمثلث قائم الزاوية 13-12-5 هي ذاتها باستخدام صيغة هيرون وباستخدام صيغة مساحة المثلث التي تعلمت سابقًا في هذا الدرس.

36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين مساحة مثلث ومحيطه. **a–e. انظر الهامش.**

a. **جبريًا** مستطيل محيطه 12 وحدة. إذا كان طوله x وعرضه y، فاكتب معادلتين لمحيطه ومساحته.

b. **جدوليًا** ضع في جدول جميع القيم الممكنة من الأعداد الكلية لطول المستطيل وعرضه وأوجد مساحة كل زوج.

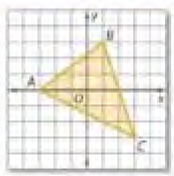
c. **بيانيًا** مثّل بيانيًا مساحة المستطيل بالنسبة إلى طوله.

d. **لفظيًا** صف كيفية تغير مساحة المستطيل بتغير طوله.

e. **تحليليًا** لأي قيم الطول والعرض من الأعداد الكلية ستكون المساحة أكبر ما يكون؟ أقل ما يكون؟ اشرح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

37. **تحدٍ** أوجد مساحة $\triangle ABC$ الممثل بيانيًا على اليسار. اشرح طريقتك. **انظر الهامش.**



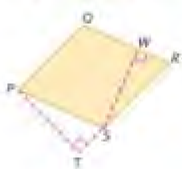
38. **فرضيات** هل سيكون محيط متوازي الأضلاع غير المستطيل دائمًا أم أحيانًا أم لن يكون مطلقًا أكبر من محيط مستطيل بنفس المساحة والارتفاع؟ اشرح. **انظر الهامش.**

39–41. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

39. **الكتابة في الرياضيات** تقع النقطتان J وL على المستقيم m. وتقع النقطة K على المستقيم p. إذا علمت أن المستقيمين m و p متوازيان، فصف كيفية تغير مساحة $\triangle JKL$ بينما تتحرك K على طول المستقيم p.

40. **مسألة غير محددة الإجابة** مساحة مضلع 35 وحدة مربعة. الارتفاع 7 وحدات. ارسم ثلاثة مثلثات وثلاثة متوازيات أضلاع مختلفة تحقق المتطلبات. واذكر القاعدة والارتفاع بكل منها.

41. **الكتابة في الرياضيات** صف طريقتين مختلفتين لاستخدام القياس لإيجاد مساحة متوازي أضلاع $PQRS$.



التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 36 معادلات جبرية وجدولاً إضافةً إلى تمثيل بياني لاستكشاف العلاقة القائمة بين محيط ومساحة المستطيل.

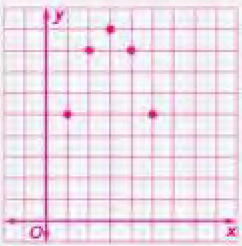
إجابات إضافية

36a. $P = 2x + 2y,\ A = xy$

36b.

الطول، x	العرض، y	المساحة
1	5	5
2	4	8
3	3	9
4	2	8
5	1	5

36c.



36d. الإجابة النموذجية: تزيد المساحة بزيادة الطول من 1 إلى 3، وتكون في أعلى قيمها عند 3، ثم تتناقص بزيادة الطول إلى 5.

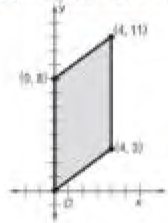
36e. الإجابة النموذجية: يصل التمثيل البياني لأعلى نقطة عندما $x = 3$. ومن ثم ستكون مساحة المستطيل الأكبر عندما يكون الطول 3. ويصل التمثيل البياني لأصغر نقاطه عندما $x = 1$ و 5. ومن ثم ستكون مساحة المستطيل الأصغر عندما يكون الطول 1 أو 5.

37. 15 وحدة^2؛ الإجابة النموذجية: رسمت المثلث داخل مربع 6 في 6، وحسبت مساحة المربع وطرحت مساحات المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية الموجودة داخل المربع والتي تم وضعها حول المثلث المعطى. ومساحة المثلث المعطى هو الفرق، أو 15 وحدة^2.

38. دائمًا، الإجابة النموذجية: إذا كانت المساحات متساوية، فإن محيط متوازي الأضلاع غير المستطيل سيكون دائمًا أكبر لأن الضلع غير العمودي على الارتفاع يشكل مثلثًا قائم الزاوية مع الارتفاع. والارتفاع هو ساق المثلث وضلع متوازي الأضلاع هو وتر المثلث. بما أن الوتر دائمًا يكون الضلع الأطول من المثلث قائم الزاوية، فإن الضلع غير المتعامد من متوازي الأضلاع يكون دائمًا أكبر من الارتفاع. كما أن قواعد الأشكال رباعية الأضلاع لا بد وأن تكون متشابهة لأن المساحات والارتفاعات تكون متشابهة. وبما أن القواعد متشابهة وارتفاع المستطيل كذلك هو طول الضلع، فإن محيط متوازي الأضلاع سيكون دائمًا أكبر.

تدريب على الاختبار المعياري

42. ما المساحة بالوحدات المربعة لمتوازي الأضلاع الموضح؟ **C**



A 12　　C 32
B 20　　D 40

43. **الإجابة الشبكية** في متوازي الأضلاع $ABCD$، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ يتقاطعان عند E. إذا علمت أن $DE = x + 5$ ، $BE = 3x - 7$ ، $AE = 9$. فأوجد x. **6**

44. تم إنشاء منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع 50 سم وبطول 3.6 أمتار كما هو موضح. ما قياس الزاوية x التي يصنعها المنحدر مع الأرض، إلى أقرب درجة؟ **F**

ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

F 8　　H 37
G 16　　J 53

45. SAT/ACT صيغة تحويل الدرجة المئوية إلى درجة فهرنهايت هي $F = \frac{9}{5}C + 32$، حيث تمثل F درجة فهرنهايت و C الدرجة المئوية. أي مما يلي الدرجة المئوية المكافئة لدرجة °86 فهرنهايت؟ **B**

A 15.7° C　　D 122.8° C
B 30° C　　E 186.8° C
C 65.5° C

مراجعة شاملة

حدد العينة والمجتمع الإحصائي لكل حالة. ثم صف إحصاء العينة ومَعْلَمَة المجتمع الإحصائي.

46. **الملاهي** تم سؤال عينة منتظمة من 250 ضيفًا عن مقدار المال الذي تم إنفاقه في أكشاك بيع الوجبات الخفيفة داخل الملاهي. وتم حساب متوسط المبلغ. **انظر الهامش.**

47. **حفل التخرج** تم إجراء استطلاع مع عينة عشوائية من 100 طالب في الصف الثاني عشر بمدرسة البراء بن عازب الثانوية، وحساب المتوسط الحسابي للمبلغ الذي تم إنفاقه على حفل التخرج لكل طالب. **انظر الهامش.**

أوجد معكوس كل دالة مما يلي.

48. $f(x) = 2x - 14$　$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 7$

49. $f(x) = 17 - 5x$　$f^{-1}(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

50. $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$　$f^{-1}(x) = 4x - 12$

51. $f(x) = -\frac{1}{7}x - 1$　$f^{-1}(x) = -7x - 7$

52. $f(x) = \frac{2}{3}x + 6$　$f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 9$

53. $f(x) = 12 - \frac{3}{5}x$　$f^{-1}(x) = -\frac{5}{3}x + 20$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$.

54. $\frac{1}{2}ac$　3

55. $\frac{1}{2}cb$　9

56. $\frac{1}{2}b(2a + c)$　21

57. $\frac{1}{2}c(b + a)$　12

58. $\frac{1}{2}a(2c + b)$　12

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اجعل الطلاب يشرحوا كيفية حساب مساحة المثلث.

إجابات إضافية

46. العينة: عينة منتظمة من 250 ضيفًا؛ المجتمع الإحصائي: كل الضيوف؛ إحصاء العينة: المبلغ المالي الوسيط المنفق على الوجبات الخفيفة من قبل الضيوف ضمن العينة؛ مَعْلَمَة المجتمع الإحصائي: المبلغ المالي الوسيط المنفق على الوجبات الخفيفة من قبل كل الضيوف

47. العينة: عينة عشوائية من 100 طالب في الصف الثالث الثانوي؛ المجتمع الإحصائي: جميع طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة البراء بن عازب الثانوية؛ إحصاء العينة: متوسط المبلغ المالي المنفق على حفل التخرج؛ مَعْلَمَة المجتمع الإحصائي: متوسط المبلغ المالي الذي ينفقه طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة البراء بن عازب الثانوية على حفل التخرج

التدريس المتمايز OL EL

التوسع وضّح للطلاب أن كل متوازي أضلاع له ارتفاعان. اطلب من كل طالب أن يكتب فقرة تشرح سبب عدم استخدامك لكلا الارتفاعين في حساب مساحة متوازي الأضلاع. راجع عمل الطلاب.

المطويات® منظِّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة في مطوياتهم لكل درس في الوحدة. اقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرا إلى أن هذه المطويات تعد بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة لاختبار الوحدة.

الوحدة 12 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تصنيف المثلثات

- يمكن تصنيف المثلثات حسب زواياها بأنها حادة أو منفرجة أو قائمة وحسب أضلاعها بأنها مختلفة الأضلاع أو متساوية الساقين أو متساوية الأضلاع.

زوايا المثلثات

- قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

المثلثات المتطابقة

- SSS إذا كانت كل الأضلاع المتناظرة في مثلثين متطابقة، فالمثلثان متطابقان.
- SAS عند تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة في مثلثين والزاويتين المحصورتين بينهما فالمثلثان متطابقان.
- ASA عند تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة في مثلثين والضلعين المحصورين بينهما فالمثلثان متطابقان.
- AAS عند تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة في مثلثين وزوج متناظر من الأضلاع غير المحصورة، فالمثلثان متطابقان.

المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

- زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة ويكون المثلث متساوي الأضلاع إذا كان متساوي الزوايا.

التحويلات والبراهين الإحداثية

- في تحويل التطابق، قد يختلف موضع الصورة عن الصورة الأصلية، لكن الشكلين يظلان متطابقين.
- البراهين الإحداثية تستخدم الجبر لإثبات المفاهيم الهندسية.

المطويات منظِّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

مثلث حاد acute triangle
خط مساعد auxiliary line
زوايا القاعدة base angles
قاعدة متوازي الأضلاع base of a parallelogram
قاعدة المثلث base of a triangle
تحويل التطابق congruence transformation
مضلعات متطابقة congruent polygons
البرهان الإحداثي coordinate proof
نتيجة corollary
أجزاء متناظرة corresponding parts
مثلث متساوي الزوايا equiangular triangle
مثلث متساوي الأضلاع equilateral triangle
زاوية خارجية exterior angle
البرهان التسلسلي flow proof
ارتفاع متوازي الأضلاع height of a parallelogram
ارتفاع المثلث height of a triangle
زاوية محصورة included angle
ضلع محصور included side
مثلث متساوي الساقين isosceles triangle
مثلث منفرج الزاوية obtuse triangle
الانعكاس reflection
زوايا داخلية غير مجاورة remote interior angles
مثلث قائم الزاوية right triangle
الدوران rotation
مثلث مختلف الأضلاع scalene triangle
إزاحة translation
زاوية الرأس vertex angle

مراجعة المفردات

حدِّد ما إذا كانت كل عبارة **صحيحة** أم **خاطئة**. إن كانت **خاطئة**، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

1. المثلث متساوي الزوايا مثال أيضًا على المثلث حاد الزاوية. **صحيحة**
2. المثلث الذي يحتوي على زاوية قياسها أكبر من 90° مثلث قائم الزاوية. **خاطئة: منفرج الزاوية**
3. المثلث متساوي الأضلاع دائمًا ما يكون متساوي الزوايا. **صحيحة**
4. يحتوي المثلث مختلف الأضلاع على ضلعين متطابقين على الأقل. **خاطئة: المثلث متساوي الساقين**
5. زوايا الرأس في المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة. **خاطئة: القاعدة**
6. الضلع المحصور هو الضلع الموجود بين زاويتين متتاليتين في مضلع. **صحيحة**
7. الأنواع الثلاثة من تحويلات التطابق هي الدوران والانعكاس والإزاحة. **صحيحة**
8. يؤدي الدوران إلى تحريك كل نقاط شكل ما المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه. **خاطئة: الإزاحة**
9. البرهان التسلسلي يستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات المفاهيم الهندسية. **خاطئة: البرهان الإحداثي**
10. قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات زاويته الداخليتين غير المجاورتين. **صحيحة**

مراجعة درس بدرس

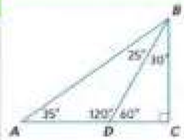
التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض المواضيع التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية تخبرهم أين يجب مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

12 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

12-1 تصنيف المثلثات

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية، أو متساوي الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.



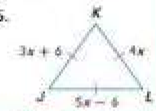
11. $\triangle ADB$ منفرج الزاوية
12. $\triangle BCD$ قائم الزاوية
13. $\triangle ABC$ قائم الزاوية

الجبر أوجد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

14.

$x = 12, RS = RT = 31$

15.



$x = 6, JK = KL = JL = 24$

16. **الخرائط** المسافة من شيكاغو إلى كليفلاند إلى سينسيناتي ثم العودة إلى شيكاغو تبلغ 1,440 كم. تزيد المسافة من شيكاغو إلى كليفلاند 80 كم على المسافة من سينسيناتي إلى شيكاغو. وتقل المسافة من كليفلاند إلى سينسيناتي 80 كم عن المسافة من سينسيناتي إلى شيكاغو. أوجد كل مسافة وضع تصنيفًا للمثلث المتشكل من المدن الثلاث.

سينسيناتي إلى شيكاغو = 480 كم، وسينسيناتي إلى كليفلاند = 400 كم، وشيكاغو إلى كليفلاند = 560 كم؛ مختلف الأضلاع

مثال 1

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية، أو متساوي الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.

a.

بما أن المثلث يحتوي على زاوية منفرجة، فهو مثلث منفرج.

b.

يحتوي المثلث على ثلاث زوايا حادة تتساوى جميعها. إنه مثلث متساوي الزوايا.

12-2 زوايا المثلثات

أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

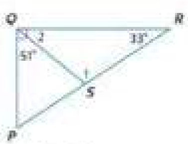
17. $\angle 1$ 70
18. $\angle 2$ 110
19. $\angle 3$ 82

20. **المنازل** دعامة السقف في منزل سيد الكريم على شكل مثلث متساوي الساقين بزاويتي قاعدة بالقياس 38°. أوجد x.

104

مثال 2

أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.



$m\angle 2 + m\angle PQS = 90$	
$m\angle 2 + 51 = 90$	تعويض
$m\angle 2 = 39$	اطرح 51 من كل طرف.
$m\angle 1 + m\angle 2 + 33 = 180$	نظرية مجموع المثلث
$m\angle 1 + 39 + 33 = 180$	تعويض
$m\angle 1 + 72 = 180$	بسّط.
$m\angle 1 = 108$	اطرح.

إجابات إضافية

21. $\angle D \cong \angle J$, $\angle A \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle H$, $\angle B \cong \angle G$, $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{BC} \cong \overline{HG}$, $\overline{DC} \cong \overline{JH}$, $\overline{DA} \cong \overline{JF}$; المضلع $ABCD \cong$ المضلع $FGHJ$

22. $\angle X \cong \angle J$, $\angle Y \cong \angle K$, $\angle Z \cong \angle L$, $\overline{XY} \cong \overline{JK}$, $\overline{YZ} \cong \overline{KL}$, $\overline{XZ} \cong \overline{JL}$; $\triangle XYZ \cong \triangle JKL$

23. $\triangle BFG \cong \triangle CGH \cong \triangle DHE \cong \triangle AEF$, $\triangle EFG \cong \triangle FGH \cong \triangle GHE \cong \triangle HEF$

24. العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (المعطيات)
2. $\angle A \cong \angle DCE$ (نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.)
3. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (المعطيات)
4. $\angle ABE \cong \angle D$ (نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.)
5. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (مسلّمة ASA)

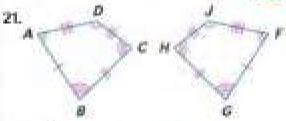
25. العبارات (المبررات)

1. $\overline{WY}$ تنصّف كلاً من $\angle XWZ$ و $\angle XWZ$ (المعطيات)
2. $\angle XWY \cong \angle ZWY$ (تعريف منصّف الزاوية)
3. $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\angle XYW \cong \angle ZYW$ (تعريف منصّف الزاوية)
5. $\angle WXY \cong \angle WZY$ (مسلّمة ASA)

12-3 المثلثات المتطابقة

أثبت أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق. 21-23. انظر الهامش.

21.



22.

23. **تركيب البلاط** موضح هنا جزء من تركيبة بلاط. عيّن المثلثات التي تبدو متطابقة.

مثال 3

أثبت أن الشكلين المضلعين متطابقان عن طريق تحديد جميع الأجزاء المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب جملة التطابق.

الزوايا: $\angle N \cong \angle R$, $\angle M \cong \angle Q$, $\angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}$, $\overline{MP} \cong \overline{QP}$, $\overline{NP} \cong \overline{RP}$

كل الأجزاء المتناظرة في المثلثين متطابقة، ولذلك $\triangle MNP \cong \triangle QRP$

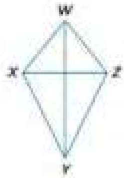
12-4 إثبات تطابق المثلثات – تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)

اكتب برهاناً من عمودين. 24–25. انظر الهامش.

24. المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$

25. **الطائرات الورقية** طائرة عبد الله الورقية موضحة في الشكل على اليسار. إذا علمت أن $\overline{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ و $\angle XWZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.

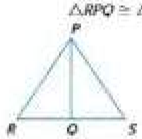


مثال 4

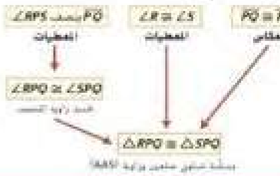
اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{PQ}$ ينصف $\angle RPS$.
$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$



البرهان التسلسلي:



12 دليل الدراسة والمراجعة تابع

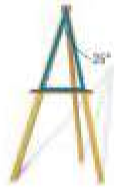
12-6 المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع

أوجد قيمة كل متغير.

26. 3

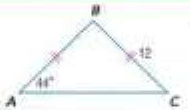
27. 76

28. **الرسم** ترسم فوزية باستخدام حامل رسم خشبي. يشكل قضيب الدعم في الحامل مع الدعامتين الأماميتين مثلثًا متساوي الساقين. وفقًا للشكل، أدناه ما قياسا زاويتي القاعدة في المثلث؟ **77.5**



مثال 5

أوجد قياس كل مما يلي.



a. $m\angle B$

بما أن $AB = BC$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. حسب نظرية المثلث متساوي الساقين، زاويتا القاعدة A و C متطابقتان، إذًا $m\angle A = m\angle C$.
استخدم نظرية مجموع المثلث لكتابة معادلة وحلها لإيجاد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	نظرية مجموع المثلث
$44 + m\angle B + 44 = 180$	$m\angle A = m\angle C = 44$
$88 + m\angle B = 180$	بسّط.
$m\angle B = 92$	اطرح.

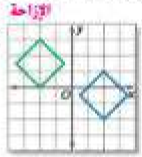
b. AB

$AB = BC$، إذًا $\triangle ABC$ متساوي الساقين. بما أن $BC = 12$، إذًا $AB = 12$ بالتعويض.

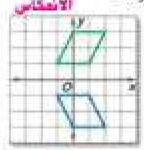
12-7 تحويلات التطابق

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره انعكاسًا، أو تحويلاً، أو دورانًا.

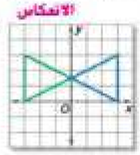
29. الإزاحة



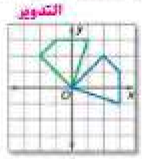
30. الانعكاس



31. الانعكاس



32. التدوير



33. المثلث ABC بالرؤوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(3, -1)$ هو تحويل للمثلث $\triangle MNO$ بالرؤوس $M(-1, 1)$ و $N(-2, 3)$ و $O(-3, -1)$. مثّل الشكل الأصلي وصورته بيانيًا، وحدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق. **انعكاس؛ انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.**

مثال 6

المثلث RST بالرؤوس $R(4, 1)$ و $S(2, 5)$ و $T(-1, 0)$ تحويل للمثلث $\triangle CDF$ بالرؤوس $C(1, -3)$ و $D(-1, 1)$ و $F(-4, -4)$. حدد التحويل، وتحقق من أنه تحويل تطابق.

مثّل بيانيًا كل شكل. التحويل يبدو إزاحة. أوجد أطوال أضلاع كل مثلث.

$RS = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$

$TS = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{34}$

$RT = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(-1-1)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{20}$

$DF = \sqrt{[-4-(-1)]^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{34}$

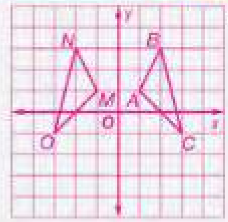
$CF = \sqrt{(-4-1)^2 + [-4-(-3)]^2} = \sqrt{26}$

بما أن كل رأس في $\triangle CDF$ قد تعرض لتحويل بمقدار 3 وحدات لليمين و 4 وحدات لأعلى، فهذه إزاحة.

بما أن $RS = CD$, $TS = DF$, $RT = CF$، إذًا $\overline{RS} \cong \overline{CD}$, $\overline{TS} \cong \overline{DF}$ و $\overline{RT} \cong \overline{CF}$. حسب مسلّمة تطابق الأضلاع الثلاثة (SSS) $\triangle RST \cong \triangle CDF$.

إجابات إضافية

33.



794 | الوحدة 12 | دليل الدراسة والمراجعة

التقويم الختامي

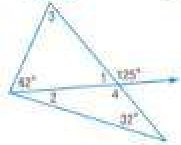
استخدم اختبارات الوحدة ذات المستويات المختلفة لمفاضلة التقويمات من أجل طلابك.

الوحدة 12 تدريب على الاختبار

ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية، أو متساوي الأضلاع، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.

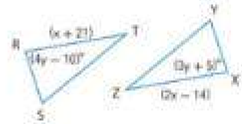
1. $\triangle ABD$ **متساوي الزوايا**
2. $\triangle ABC$ **قائم الزاوية**
3. $\triangle BDC$ **منفرج الزاوية**

أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.



4. $\angle 1$ **55**
5. $\angle 2$ **23**
6. $\angle 3$ **63**
7. $\angle 4$ **125**

في الرسم التخطيطي، $\triangle RST \cong \triangle XYZ$.

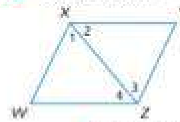


8. أوجد x. **35**
9. أوجد y. **15**

10. **البرهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ and $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$
المطلوب: $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$

انظر ملحق إجابات الوحدة 12.



11. **الاختيار من متعدد** أوجد x. **C**

A 36
C 28
B 32
D 22

12. حدد ما إذا كان $\triangle SEK \cong \triangle TJD$ إذا علمت $T(-4, -2)$، $J(0, 5)$، $D(1, -1)$، $S(-1, 3)$، $E(3, 10)$، $K(4, 4)$. اشرح. **نعم، حسب مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS).**

حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات تطابق كل زوج من المثلثات. وإذا لم يكن ممكنًا إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.

13.

مسلّمة زاويتين وضلع

14. **مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة**

15.

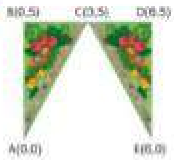
لا يمكن

16.

مسلّمة ضلعين وزاوية محصورة بينهما

17. **المناظر الطبيعية** وضعت موزة تصميمًا لحديقة تتكون من منطقتين مثلثتين تم عرضهما أدناه. النقاط هي $A(0, 0)$ و$B(0, 5)$ و$C(3, 5)$ و $D(6, 5)$ و$E(6, 0)$. عيّن نوع تحويل التطابق للصورة الأصلية $\triangle ABC$ إلى $\triangle EDC$.

انعكاس



أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

18. $\angle 1$ **66**
19. $\angle 2$ **243**

20. **البرهان** $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية بالوتر $\overline{AB}$. M نقطة منتصف $\overline{AB}$. قم بكتابة برهان إحداثي لإثبات أن $\overline{CM}$ متعامد على $\overline{AB}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

الوحدة 12 التحضير للاختبارات المعيارية

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم حلاً للمسألة إلى جانب الطريقة و/أو التفسير و/ أو التعليل المستخدم للوصول إلى الحل.

يتم تقويم الأسئلة ذات الإجابات القصيرة في العادة باستخدام **معيار**، أو دليل رصد الدرجات.

فيما يلي مثال على معيار رصد درجات سؤال قصير الإجابة.

معايير رصد الدرجات		
	المعايير	النقاط
الدرجة الكاملة	الإجابة صحيحة ويتوفر تفسير كامل يوضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1 1
بدون درجة	إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	0

إستراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتصل إلى فهم ما تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات الصلة.
- ابحث عن الكلمات الأساسية ومصطلحات الرياضيات.

الخطوة 2

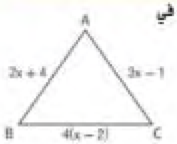
ضع خطة وأوجد حل المسألة.

- اشرح تبريرك أو اذكر أسلوبك لحل المسألة.
- اعرض كل عملك أو خطواتك.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحل هنا.

المثلث ABC متساوي الساقين وقاعدته هي $\overline{BC}$. ما محيط المثلث؟



1 التركيز

الهدف فهم ما تتكون منه الأسئلة ذات الإجابات القصيرة وتطوير أساليب لحلها.

2 التدريس

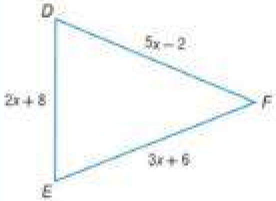
الأسئلة الداعمة

اطرح الأسئلة التالية:

- اذكر بعض الطرق التي يختلف فيها حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة عن حل أسئلة الاختيار من متعدد. وما أوجه الشبه بينهما؟ الإجابة النموذجية: يجب أن تكتب الحل في الأسئلة ذات الإجابات القصيرة. وهذا ليس ضروريًا في أسئلة الاختيار من متعدد. تُحسب الأسئلة ذات الإجابات القصيرة باستخدام معايير رصد الدرجات. وبالتالي يمكن منح جزء من الدرجة. أما في أسئلة الاختيار من متعدد. فالإجابة إما صحيحة أو خطأ. وكلا النوعين من الأسئلة يحتاج إلى القراءة المتأنية.
- ما أهمية شرح التبرير في الأسئلة ذات الإجابات القصيرة؟ الإجابة النموذجية: لا تُمنح الدرجة كاملة إلا على الإجابات الصحيحة المدعومة بالشرح الوافي الصحيح.
- ما أهمية التحقق من الإجابة؟ الإجابة النموذجية: ستؤدي أخطاء السهو إلى الحصول على جزء من الدرجة أو عدم الحصول عليها.

مثال إضافي

المثلث DEF متساوي الساقين وقاعدته هي $\overline{DE}$. ما محيط المثلث؟



الساقان في المثلث متساوي الساقين متطابقان. وبالتالي $\overline{DF} \cong \overline{EF}$، أو $DF = EF$.

إيجاد حل x.

$$5x - 2 = 3x + 6$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

وبالتالي فإن أطوال الأضلاع هي $DF = 18$، و$EF = 18$، و$DE = 16$.

محيط $\triangle DEF$ يساوي $18 + 18 + 16 = 52$ وحدة.

3 التقويم

استخدم التمارين 1-5 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. علمت أن المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين وقاعدته هي $\overline{BC}$. مطلوب منك إيجاد محيط المثلث.

ضع خطة وأوجد حل المسألة.

ساقا المثلث متساوي الساقين متطابقان.
إذًا $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ أو $AB = AC$. حل لإيجاد x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع.

$BA = 2(5) + 4 = 14$ وحدة

$AC = 3(5) - 1 = 14$ وحدة

$BC = 4(5 - 2) = 12$ وحدة

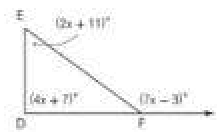
محيط $\triangle ABC$ يساوي $14 + 14 + 12 = 40$ وحدة.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والتبرير. وقد توصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

اقرأ كل مسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحل هنا.

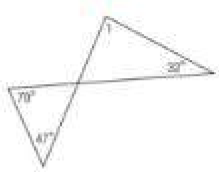
1. صنّف $\triangle DEF$ وفقًا لقياسات زواياه. **منفرج الزاوية**



2. في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟ **300 وحدة مربعة**

3. يريد مزارع تجهيز حظيرة للدجاج على شكل مستطيل مساحته 6 أمتار مربعة. ويريد أن يوفر المال بشراء أقل قدر ممكن من السياج لإحاطة المساحة. فما الأبعاد بأعداد كلية والتي ستتطلب أقل كمية من السياج؟ **$3\ m \times 2\ m$**

4. ما قياس $m\angle 1$ بالدرجات؟ **$85°$**



5. اكتب معادلة للخط المستقيم المحتوي على النقطتين $(2, 4)$ و$(0, -2)$. **$y = 3x - 2$**

الوحدة 12

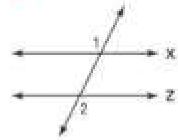
تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 12

الاختيار من متعدد

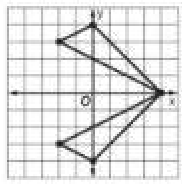
اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. إذا كانت $m\angle 1 = 110°$، فما القياس الذي يجب أن تكونه $m\angle 2$ ليكون الخطان المستقيمان x و z متوازيين؟ **D**



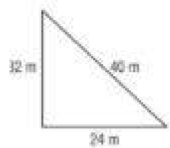
A 30°   B 60°   C 70°   D 110°

2. أي من المصطلحات التالية يمثل الوصف الأمثل للتحويل أدناه؟ **H**



F التمديد   H الدوران
G الانعكاس   J الإزاحة

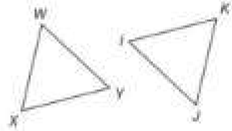
3. ضع تصنيفًا للمثلث أدناه وفقًا لأطوال أضلاعه. **D**



A متساوي الأضلاع   C قائم الزاوية
B متساوي الساقين   D مختلف الأضلاع

> نصيحة **عند حل الاختبار**
> **السؤال 3** اقرأ نص المسألة بعناية للتأكد من أنك تختار الإجابة الصحيحة.

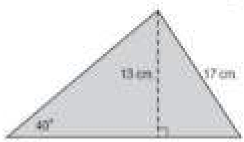
4. **المعطيات:** $\overline{WX} \cong \overline{JK}$، $\overline{YX} \cong \overline{IK}$، $\angle X \cong \angle K$ **H**



أي مما يلي يذكر التطابق الصحيح للمثلثين؟

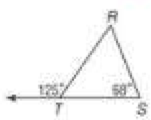
F $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$
G $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$
H $\triangle WXY \cong \triangle JKI$
J $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

5. ما مساحة المثلث أدناه؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. **D**



A 110.5 cm^2
B 144.2 cm^2
C 164.5 cm^2
D 171.9 cm^2

6. ما قياس الزاوية R أدناه؟ **F**



F 57°   G 59°   H 65°   J 68°

7. افترض أن إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين قياسها 44°. فما قياس زاوية الرأس؟ **B**

A 108°   C 56°
B 92°   D 44°

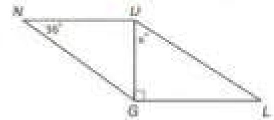
خيارات الواجب المنزلي

الاستعداد للوحدة 13 عيّن للطلاب تمارين في الصفحة 801 كواجب منزلي لتقويم مستواهم لمعرفة هل حققوا المهارات المطلوبة للوحدة التالية أم لا.

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

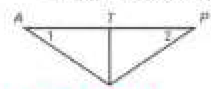
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

8. **الإجابة الشبكية** في الشكل أدناه، $\triangle NDG \cong \triangle LGD$. ما قيمة x؟ **54**



9. **الإجابة الشبكية** افترض أن المستقيم ℓ يحتوي على النقاط A و B و C. إذا علمت أن $AB = 7$ سم و $AC = 32$ سم، والنقطة B بين النقطتين A و C. فما طول $\overline{BC}$؟ اكتب الإجابة بالسنتيمتر. **25**

10. استخدم الشكل والمعلومات المذكورة أدناه.



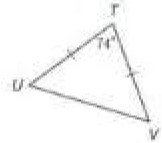
المعطيات: $\overline{JT} \perp \overline{AP}$
$\angle 1 \cong \angle 2$

بما أن $\overline{JT} \perp \overline{AP}$ و $\angle JTA \cong \angle JTP$ و $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\overline{JT} \cong \overline{JT}$، إذاً $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ حسب مسلمة زاويتين وضلع (AAS).

ما نظرية التطابق التي يمكنك استخدامها لإثبات أن $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ فقط باستخدام المعطيات؟ اشرح.

11. اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تمثل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0, 3)$ و $(4, -5)$. **$y = -2x + 3$**

12. **الإجابة الشبكية** أوجد $m\angle TUV$ في الشكل. **53**



13. افترض أن ضلعين في المثلث ABC متطابقان مع ضلعين في المثلث MNO. افترض أيضاً أن إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle ABC$ متطابقة مع إحدى الزوايا غير المحصورة في $\triangle MNO$. هل المثلثان متطابقان؟ إذا كانا كذلك، فاكتب برهاناً حراً يوضح التطابق. وإذا لم يكونا كذلك، فارسم مثالاً مضاداً. **انظر الهامش.**

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

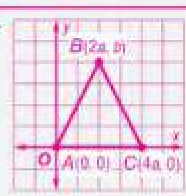
14. استخدم شبكة إحداثيات لكتابة برهان إحداثي للعبارة التالية.
إذا كانت رؤوس المثلث هي $A(0, 0)$ و $B(2a, b)$ و $C(4a, 0)$، فإن المثلث متساوي الساقين.
   a. ارسم الرؤوس على شبكة إحداثيات لتمثيل المسألة. **انظر الهامش.**
   b. استخدم قانون المسافة لكتابة تعبير AB. **$AB = \sqrt{4a^2 + b^2}$**
   c. استخدم قانون المسافة لكتابة تعبير BC. **$BC = \sqrt{4a^2 + b^2}$**
   d. استخدم النتائج من الجزأين b و c لوضع استنتاج بشأن $\triangle ABC$. **بما أن $AB = BC$، إذاً $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. إذاً، $\triangle ABC$ متساوي الساقين.**

799

إجابات إضافية

13. لا؛ المثال المضاد النموذجي:

14a.



الصفحات 713–712، الدرس 12-1

48. المعطيات: $\triangle ACE$ متساوي الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

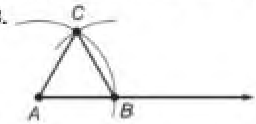
المطلوب: $\triangle BCD$ مثلث متساوي الزوايا.

البرهان:

العبارات (المبررات)

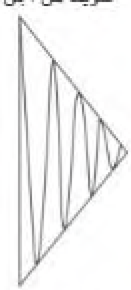
1. $\triangle ACE$ متساوي الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ (المعطيات)
2. $\angle 3 \cong \angle 2 \cong \angle 1$ (تعريف $\triangle$ المثلث متساوي الزوايا)
3. $\angle 2 \cong \angle CBD$ و $\angle 3 \cong CDB$ (مسلّمة $\measuredangle$ الزوايا المتناظرة)
4. $\angle 1 \cong \angle CBD \cong \angle CDB$ (التعويض)
5. $\triangle BCD$ متساوي الزوايا (تعريف $\triangle$ المثلث متساوي الزوايا)

53.



الإجابة النموذجية: في $\triangle ABC$، $AB = BC = AC = 1.3$ cm. بما أن جميع الأضلا ع لها طول واحد، فإنها جميعًا متطابقة. وبالتالي المثلث متساوي الأضلاع. تم إنشاء $\triangle ABC$ باستخدام AB على أنه طول كل ضلع. وبما أن القوس لكل قطعة مستقيمة واحد، فإن المثلث متساوي الأضلاع.

54b. الإجابة النموذجية: كان ينبغي أن يكون التذبذب مرتفعًا ويتناقص سريعًا من أجل تشكيل مثلث منفرج الزاوية.



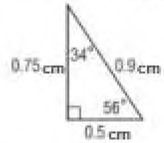
57. مطلقًا؛ جميع المثلثات متساوية الزوايا لها زوايا بمقياس $60°$. إذًا فهي ليس بها زاوية بمقياس $90°$. وبالتالي لا يمكن أن تكون مثلثات قائمة الزوايا.

58. دائمًا؛ جميع المثلثات متساوية الأضلا ع لها ثلاثة أضلا ع متساوية والمثلثات متساوية الساقين لها على الأقل ضلعان متساويان. إذًا جميع المثلثات التي لها ثلاثة أضلا ع متساوية فهي متساوية الساقين.

59. مطلقًا؛ جميع المثلثات متساوية الأضلاع متساوية الزوايا أيضًا، مما يعني أن جميع الزوايا تساوي $60°$. المثلث قائم الزاوية له زاوية واحدة بمقياس $90°$.

60. الإجابة النموذجية: بما أن المثلث متساوي الأضلاع، فإن جميع الأضلا ع متساوية. وبجعل $5x + 3$ تساوي $7x - 5$ وإيجاد الحل، فإن x تساوي **4**. طول الضلع الواحد يساوي $5(4) + 3$ أو 23 وحدة. محيط المثلث متساوي الأضلا ع يساوي مجموع أضلاعه الثلا ثة أو ضرب الضلع في ثلاثة. المحيط يساوي $3(23)$ أو 69 وحدة.

61. الإجابة النموذجية:



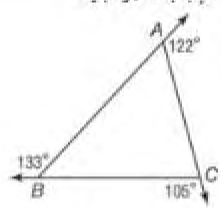
62. الإجابة النموذجية:

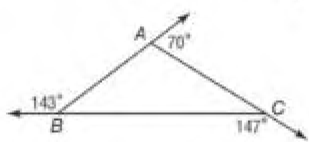
63. غير ممكن؛ جميع المثلثات متساوية الأضلا ع لها ثلاث زوايا حادة.

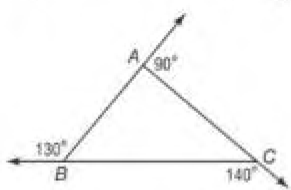
64. الإجابة النموذجية: المثلث الحاد له ثلاث زوايا حادة والمثلث متساوي الزوايا له ثلاث زوايا بمقياس $60°$. وبما أن الزاوية التي قياسها $60°$ زاوية حادة، فإن جميع المثلثات متساوية الزوايا مثلثات حادة. وبالتالي فعبارة "المثلث متساوي الزوايا الحاد" فيها كلام زائد.

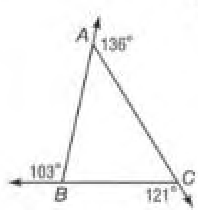
الصفحة 723، الدرس 12-2

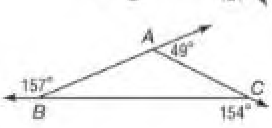
45a. الإجابة النموذجية:









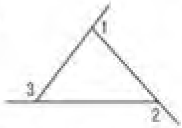


45b. الإجابة النموذجية:

$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	المجموع
122	105	133	360
70	147	143	360
90	140	130	360
136	121	103	360
49	154	157	360

45c. الإجابة النموذجية: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360.

45d. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360$



45e. تقول نظرية الزوايا الخارجية إن $m\angle 3 = m\angle BAC + m\angle BCA$، $m\angle 1 = m\angle CBA + m\angle BCA$، $m\angle 2 = m\angle BAC + m\angle CBA$. ومن خلا ل خاصية التعويض، فإن $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC + m\angle CBA + m\angle BAC + m\angle BCA$. التي يمكن تبسيطها لتصبح $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2m\angle CBA + 2m\angle BCA + 2m\angle BAC$. يمكن تطبيق خاصية التوزيع لتعطي $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC)$. وتقول نظرية مجموع زوايا المثلث إن $m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC = 180$. ومن خلال خاصية التعويض يكون لدينا $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(180) = 360$.

46. الإجابة النموذجية: تنص النتيجة 12.2 أنه قد يوجد على الأكثر زاوية واحدة قائمة أو منفرجة في المثلث. وبما أن المثلث مسمّى بقياسين لزاويتين منفرجتين وهما 93 و 130، فلا بد أن واحدًا من هذين القياسين غير صحيح. وكذلك بناء على نظرية مجموع زوايا المثلث وهي أن الزوايا الداخلية للمثلث لا بد وأن يساوي مجموعها 180 درجة، ومجموعة تلك الزوايا يساوي 259 ، فإن هناك مقياسًا واحدًا على الأقل من تلك المقاييس غير صحيح.

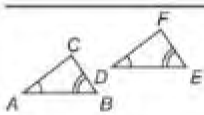
47. $a = 180 - 112 = 68°$; $b + c = 112$ و b و c متطابقتين.
$2b = 112$; $b = 56°$ قياس كل من b و c يساوي $56°$.

50. الإجابة النموذجية: بما أن الزاوية الخارجية حادة، فلا بد أن الزاوية المجاورة منفرجة. وبما أن الزاوية الخارجية الأخرى قائمة، فلا بد أن الزاوية المجاورة قائمة. ولا يمكن أن يوجد في المثلث كل من زاوية قائمة وزاوية منفرجة لأن قياسه سيكون أكبر من 180 درجة. وبالتالي لا يمكن أن يوجد للمثلث زاوية خارجية منفرجة وأخرى حادة وثالثة قائمة.

الصفحات 730–731، الدرس 12-3

19. المعطيات: $\angle A \cong \angle D$
$\angle B \cong \angle E$

المطلوب: $\angle C \cong \angle F$



البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ (المعطيات)
2. $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$ (تعريف التطابق $\cong$ $\angle$s)
3. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$, $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$ (نظرية مجموع الزوايا $\angle$)
4. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ (خاصية التعدي)
5. $m\angle D + m\angle E + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ (التعويض)
6. $m\angle C = m\angle F$ (خاصية الطرح)
7. $\angle C \cong \angle F$ (تعريف $\cong$ $\angle$s)

20. البرهان:

$\triangle RST \cong \triangle XYZ$
المعطيات
↓
$\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$, $\angle T \cong \angle Z$,
$\overline{RS} \cong \overline{XY}$, $\overline{ST} \cong \overline{YZ}$, $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$
نظرية CPCTC
↓
$\angle X \cong \angle R$, $\angle Y \cong \angle S$, $\angle Z \cong \angle T$,
$\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$
تطابق المثلث والقطع المستقيمة متناظر.
↓
$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
تعريف $\cong$ $\triangle$

21. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. متوازي أضلاع $PQRS$ (معطيات)
2. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$; $\overline{PS} \cong \overline{RQ}$; $\angle P \cong \angle R$ (تعريف متوازي الأضلاع)
3. $\overline{PS} \parallel \overline{RQ}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متوازية.)
4. $\angle PQS \cong \angle RSQ$; $\angle PSQ \cong \angle RQS$ (الخطوط المتوازية يقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة.)
5. $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$ (تعريف المثلثات المتطابقة)

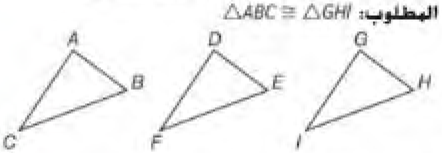
22. البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$; $\overline{CD} \cong \overline{AD}$ $\angle A \cong \angle C$; $\angle ABD \cong \angle CBD$; $\angle ADB \cong \angle CDB$ (معطيات)
2. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (تعريف المثلثات المتطابقة)

24. المعطيات: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\triangle DEF \cong \triangle GHI$

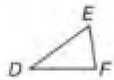
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle GHI$

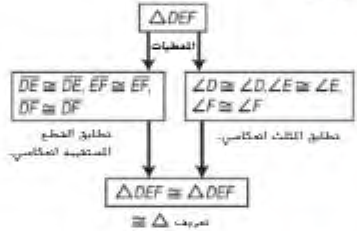


البرهان:

سنعرف أن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ولأن الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة متطابقة هي الأخرى، فإن $\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$، $\angle C \cong \angle F$، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. نعرف أيضًا أن $\triangle DEF \cong \triangle GHI$. إذًا $\angle D \cong \angle G$، $\angle E \cong \angle H$، $\angle F \cong \angle I$، $\overline{DE} \cong \overline{GH}$، $\overline{EF} \cong \overline{HI}$، $\overline{DF} \cong \overline{GI}$ حسب النظرية CPCTC. وبالتالي $\angle A \cong \angle G$، $\angle B \cong \angle H$، $\angle C \cong \angle I$، $\overline{AB} \cong \overline{GH}$، $\overline{BC} \cong \overline{HI}$، $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة خاصية متعدية. إذًا، $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ بناء على تعريف المثلثات المتطابقة.

25. **المعطيات:** $\triangle DEF$
المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle DEF$
البرهان:





30a. إذا كان محيط المثلثين متساويًا، فإن المثلثات متطابقة.

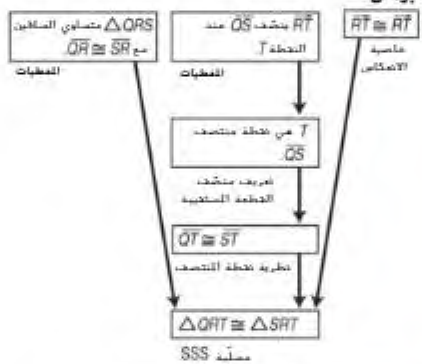
30b. إذا كان المثلثان متطابقين، فإن محيطهما متساوٍ، والعكس صحيح.

30c. هذا أمر غير ممكن.

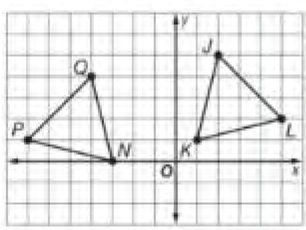
30d. الإجابة النموذجية: يمكن للطالب رسم مستطيل أطواله 8×2 والذي يمكن أن يبلغ محيطه 20 وحدة، ومستطيل أطواله 7×3 والذي يمكن أن يكون له المحيط نفسه البالغ 20 وحدة، ولكنه لن يكون مطابقًا للمستطيل الأول.

الصفحتان 734–735، الدرس 4-12 (تمرين موجّه)

1. **البرهان:**



2a.



2b. من التمثيلا ت البيانية، يبدو أن المثلثين لهما شكل واحد وحجم واحد، وبالتالي يمكننا تخمين أن المثلثين متطابقان.

2c.

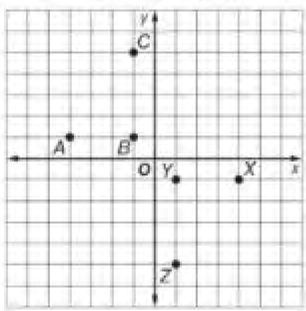
$$JL = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$QP = \sqrt{[-4-(-7)]^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$LK = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$PN = \sqrt{[-7-(-3)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$KJ = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$NQ = \sqrt{[-4-(-3)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$JL = QP$ و $LK = PN$ و $KJ = NQ$ بناء على تعريف القطع المستقيمة المتطابقة. جميع القطع المستقيمة المتناظرة متطابقة. وبالتالي $\triangle JKL \cong \triangle QNP$ بناء على التطابق بتساوي الأضلاع الثلاثة (SSS).

الصفحات 738-741، الدرس 4-12

1. في ظل وجود طول الأضلاع الثلا ثة، توجد طريقة واحدة فقط يمكن من خلا لها وضع تلك الأطوال الثلاثة معًا. حالما يتم وضعها معًا، لن يكون بالإمكان تحريكها. كل مثلث يمكن أن يكون بالحجم نفسه. عندما تربط بينها، فمن الممكن أن تشكل سطحًا أملس. الإجابة النموذجية: مقعد له 3 أرجل أو مقعد حمام، أو قاعد ثلاثية لموقد كهربائي، حامل ثلا ثي للكاميرا، حامل، وما شابه ذلك.

2a.



2b. $\triangle ABC = \triangle XYZ$

2c. المسافة بين A و B والمسافة بين Y و X تساوي 3 وحدات. المسافة بين B و C وبين Z و Y تساوي 4 وحدات. إذا كنت سترسم المثلثات، $\angle B$ و $\angle Y$ زوايا قائمة. هذان المثلثان سيكونان متطابقين حسب المسلمة SAS. قد يستخدم الطلاب أيضًا قانون المسافة لحساب المسافة بين A و C وبين X و Z لإثبات أن المثلثات متطابقة حسب المسلمة SSS.

3. بما أن $\triangle TQR$ مثلث متساوي الأضلاع، $\overline{TQ} \cong \overline{SQ}$ فهذا ما يصلنا للنتيجة $\triangle RSQ \cong \triangle UTQ$ حسب المسلمة SAS.

12. **البرهان:**

العبارات (المبرّرات)

1. $\overline{KG}$ هو المنصف العمودي لــ $\overline{FH}$ (معطيات)
2. $\overline{KG} \cong \overline{KG}$ (خاصية الانعكاس)
3. $FG = HG$ (تعريف المنصف)
4. $\overline{FG} \cong \overline{HG}$ (تعريف التطابق)
5. $\angle HGK$ و $\angle FGK$ زاويتان قائمتان (تعريف المنصف العمودي)
6. $\angle HGK \cong \angle FGK$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة.)
7. $\triangle KGH \cong \triangle KGF$ (مسلمة SAS)

13. حسب تعريف المستطيل، الأضلاع المتقابلة تكون متطابقة وجميع الزوايا تكون زوايا قائمة. جميع الزوايا القائمة تكون متطابقة. وهذا ما يجعل $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\angle ABC \cong \angle EDC$. بما أن C نقطة منتصف $\overline{BD}$ فإن $BC = DC$. القطع المستقيمة التي لها نفس الطول تكون متطابقة، وبما يكون $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. حسب المسلمة SAS، فإن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.

14. **البرهان:**

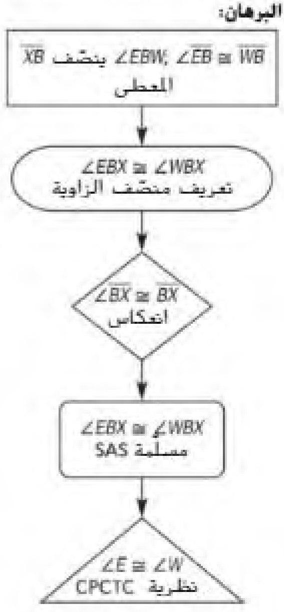
العبارات (المبررات)

1. K نقطة منتصف $\overline{JL}$؛ P نقطة منتصف $\overline{JN}$؛ M نقطة منتصف $\overline{NL}$؛ $\triangle JLN$ متساوي الأضلاع (معطيات)
2. $JK = LK$; $JP = NP$; $NM = LM$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $JL = LN$; $\angle N = \angle L$ (تعريف المثلث متساوي الأضلاع)
4. $JK + KL = JL$; $JP + PN = JN$ (جمع القطع المستقيمة)
5. $KL + KL = PN + PN$ (التعويض)
6. $2KL = 2PN$ (خاصية الجمع)
7. $KL = PN$ (خاصية القسمة)
8. $\angle N \cong \angle L$; $\overline{PN} \cong \overline{KL}$; $\overline{NM} \cong \overline{LM}$ (تعريف التطابق)
9. $\triangle NPM \cong \triangle LKM$ (مسلمة SAS)

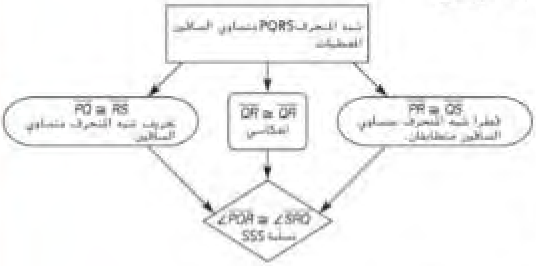
15. بما أن القطعتين المستقيمتين تنصف كل منهما الأخرى، فإن $AX = BX$ و $WX = PX$. بما أن طول القطع المستقيمة متساوٍ، فإن $\overline{AX} \cong \overline{BX}$; $\overline{WX} \cong \overline{PX}$. $\angle AXW$ و $\angle BXP$ زوايا رأسية. والزوايا الرأسية تكون متطابقة، وعليه، فإن $\angle AXW \cong \angle BXP$. $\triangle AXW \cong \triangle BXP$ حسب مسلمة SAS. $\angle A \cong \angle B$ حسب النظرية CPCTC.

20. $\overline{BR} \cong \overline{BR}$ حسب خاصية الانعكاس. $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ حيث إن القطع المستقيمة مشكلة بطول البندول. $\angle 1 \cong \angle 2$ حيث إن الزوايا مشكلة من تأرجح البندول تكون متطابقة. وعليه، فإن $\triangle BRC \cong \triangle BRA$ حسب مسلمة SAS.

21. **البرهان:**



22. **البرهان:**



23a. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. المربع $HFST$ (معطيات)
2. $\overline{ST} \cong \overline{FH}$; $\overline{TH} \cong \overline{FH}$ (جميع أضلاع المربع متطابقة.)
3. $\overline{SH} \cong \overline{FT}$ (أقطار المربع متطابقة.)
4. $\triangle HSF \cong \triangle TFH$ (مسلمة SSS)
5. $\overline{SH} \cong \overline{FT}$ (النظرية CPCTC)
6. $SH = FT$ (تعريف التطابق.)

23b. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. المربع $HFST$ (معطيات)
2. $\overline{ST} \cong \overline{SF}$; $\overline{TH} \cong \overline{FH}$ (جميع أضلاع المربع متطابقة.)
3. $\overline{SH} \cong \overline{SH}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle SHT \cong \triangle SHF$ (مسلمة SSS)
5. $\angle SHT \cong \angle SHF$ (النظرية CPCTC)
6. $\angle SHT = \angle SHF$ (تعريف التطابق.)

29a. الإجابة النموذجية: الطريقة 1: يمكنك استخدام قانون حساب المسافة لإيجاد طول كل ضلع من الأضلاع، يليه استخدام مسلمة التطابق SSS لإثبات تطابق المثلثات. الطريقة 2: يمكنك حساب قيمة ميول $\overline{ZX}$ و $\overline{WY}$ لتثبت أنهما متعامدان وأن $\angle WYZ$ و $\angle WYX$ زوايا قائمة. تستطيع استخدام قانون المسافة لإثبات أن $\overline{XY}$ مطابق لـ $\overline{ZY}$. تشارك المثلثات في الساق $\overline{WY}$ ومن ثم، تثبت مسلمة التطابق SAS أن المثلثات متطابقة. الإجابة النموذجية: أعتقد أن الطريقة الأولى أسهل، وهذا لأن بإمكانك حساب المسافة من خلال عد مربعات الأضلاع ZY و XY، واستخدام قانون المسافة من أجل WZ و WX

29b. الإجابة النموذجية: $WY = WY = 7$; $ZY = XY = 7$;

$WZ = \sqrt{(1-8)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$;

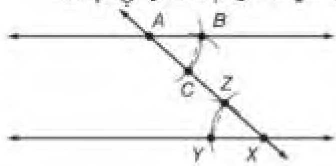
$WX = \sqrt{(1-8)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$;

$\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ حسب مسلمة SSS.

33. أحيانًا. الإجابة النموذجية: يعد هذا الأمر صحيحًا إذا كانت الأضلاع المتناظرة المتطابقة هي سيقان المثلث، لأن هذا سيكون نفسه ما تنص عليه مسلمة SAS. إذا كانت الأضلاع المتناظرة المتطابقة عبارة عن ساق ووتر، فلا يمكن أن تنطبق أي من مسلمة SAS ولا مسلمة SSS.

صفحة 743، التوسع 4-12

1. **المعطيات:** الرسم التخطيطي للإنشاء



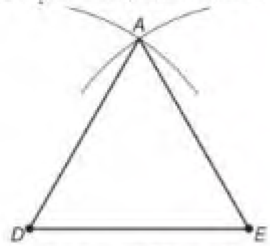
المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{YX}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (استخدم وضع الفرجار ذاته من النقطة A لإنشاء النقطتين B و C ومن النقطة X لإنشاء النقطتين Y و Z)
2. $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ (استخدم وضع الفرجار ذاته من النقطة C لإنشاء النقطة B ومن النقطة Y لإنشاء النقطة Z.
3. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ (تساوي الأضلاع الثلاثة)
4. $\angle BAC \cong \angle YXZ$ (النظرية CPCTC)
5. $\overline{AB} \parallel \overline{YX}$ (عكس نظرية ∡ الزوايا الداخلية المتبادلة.)

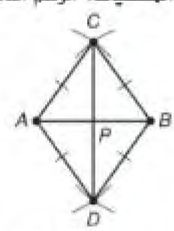
2. **المعطيات:** الرسم التخطيطي للإنشاء



المطلوب: $\triangle DAE$ متساوي الأضلاع.

البرهان: $\overline{DE} \cong \overline{DA} \cong \overline{AE}$ بما أن الفرجار كان مضبوطًا على طول $\overline{DE}$ واستُخدم لإنشاء النقطة A من النقطتين D و E. وبالتالي بناء على تعريف المثلث متساوي الأضلاع، فإن $\triangle DAE$ متساوي الأضلاع.

3. **المعطيات:** الرسم التخطيطي للإنشاء



المطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

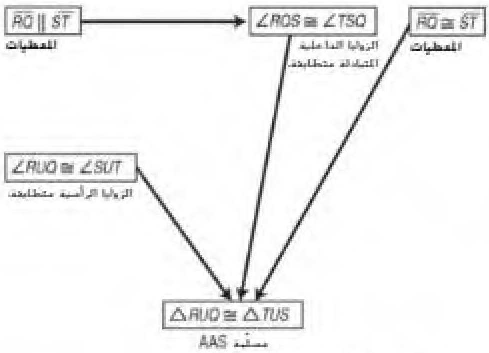
1. $\overline{AD} \cong \overline{AC} \cong \overline{BD}$ (استخدم وضع الفرجار ذاته من النقطتين A و B لإنشاء النقطتين C و D.)
2. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (تساوي الأضلاع الثلاثة)
4. $\angle ACP \cong \angle BCP$ (النظرية CPCTC)
5. $\overline{CP} \cong \overline{CP}$ (خاصية الانعكاس)
6. $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (تساوي الأضلاع الثلاثة)
7. $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (النظرية CPCTC)
8. $\angle CPA \cong \angle CPB$ (النظرية CPCTC)
9. $m\angle CPA = m\angle CPB$ (تعريف التطابق ≅)
10. $\angle CPA$ تجاور $\angle CPB$ (تعريف الزوايا المتجاورة ∡)
11. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (بناء على التعريف، تتقاطع المستقيمات المتعامدة لتكوّن زوايا متجاورة متطابقة)

صفحة 744، اختبار نصف الوحدة

14. $\triangle BED \cong \triangle CFG$; $\triangle BJH \cong \triangle CKM$; $\triangle BPN \cong \triangle CQS$; $\triangle DIH \cong \triangle GLM$; $\triangle DON \cong \triangle GRS$

صفحة 747، الدرس 5-12 (تمرين موجّه)

2. **البرهان:**



الصفحات 749-751، الدرس 5-12

9. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $\overline{HZ} \parallel \overline{ET}$; $\overline{AG} \cong \overline{BD}$; $\angle A \cong \angle B$ (المعطيات)
2. $\angle EDA \cong \angle HGA$; $\angle ZGB \cong \angle TDB$ (الخطوط المتوازية يقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
3. $\angle HGA \cong \angle TDB$ (الخطوط المتوازية يقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
4. $\angle EDA \cong \angle ZGB$ (خاصية التعدي)
5. $AG = BD$ (تعريف التطابق)
6. $GD = GD$ (الانعكاس)
7. $AG + GD = BD + GD$ (خاصية الجمع)
8. $AG + GD + AD$; $BD + DG = BG$ (جمع القطع المستقيمة)
9. $AD = BG$ (التعويض)
10. $\overline{AD} \cong \overline{BG}$ (تعريف التطابق)
11. $\triangle ADE \cong \triangle BGZ$ (مسلمة ASA)

10. البرهان:

العبارات (المبررات)

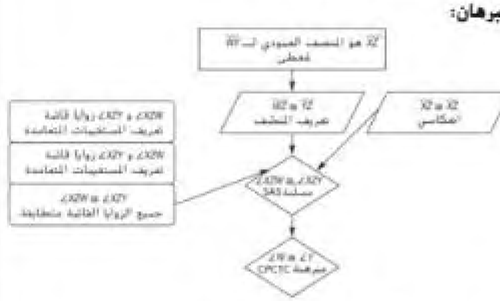
1. $\triangle CDB \cong \triangle CDA$ (معطيات)
2. $\angle A \cong \angle B; \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (لنظرية CPCTC)
3. $\angle 1 \cong \angle 2$ (الزوايا الرأسية متطابقة.)
4. $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ (مسلمة ASA)

11. البرهان:

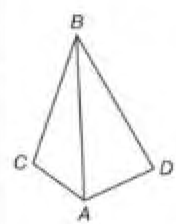
العبارات (المبررات)

1. $\overline{AY} \cong \overline{BA}; \overline{ZX} \parallel \overline{BC}$ (معطيات)
2. $\angle ZAY \cong \angle CAB$ (الزوايا الرأسية متطابقة.)
3. $\angle ZYA \cong \angle CBA$ (الخطوط المتوازية بقطعها خط مستعرض، الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
4. $\triangle ZAY \cong \triangle CAB$ (مسلمة ASA)
5. $\overline{YZ} \cong \overline{BC}$ (نظرية CPCTC)

12. البرهان:



16a. المعطيات: $\overline{AB}$ تنصّف $\angle CBD$ و $\angle CAD$.
المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

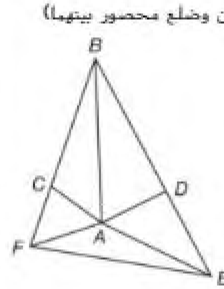


البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB}$ تنصّف $\angle CBD$ و $\angle CAD$ (المعطيات)
2. $\angle ABC \cong \angle ABD$، $\angle CAB \cong \angle DAB$ (تعريف منصّف الزوايا)
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (تساوي زاويتين وضلع محصور بينهما)

16b. المعطيات: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.
$\angle FCA \cong \angle EDA$
المطلوب: $\triangle CAF \cong \triangle DAE$

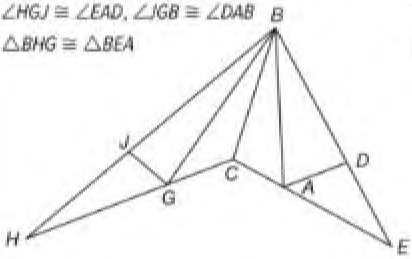


البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC \cong \triangle ABD, \angle FCA \cong \angle EDA$ (المعطيات.)
2. $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ (النظرية CPCTC)
3. $\angle CAF \cong \angle DAE$ (الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة ≅.)
4. $\triangle CAF \cong \triangle DAE$ (تساوي زاويتين وضلع)

16c. المعطيات: $\overline{HB} \cong \overline{EB}, \angle BHG \cong \angle BEA,$
$\angle HGJ \cong \angle EAD, \angle JGB \cong \angle DAB$
المطلوب: $\triangle BHG \cong \triangle BEA$



البرهان:

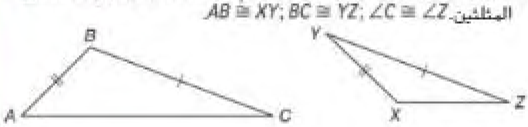
العبارات (المبررات)

1. $\overline{HB} \cong \overline{EB}, \angle BHG \cong \angle BEA, \angle HGJ \cong \angle EAD, \angle JGB \cong \angle DAB$ (المعطيات)
2. $m\angle HGJ = m\angle EAD, m\angle JGB = m\angle DAB$ (تعريف التطابق ≅)
3. $m\angle HGJ + m\angle JGB = m\angle HGB, m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle EAB$ (خاصية جمع القطع المستقيمة)
4. $m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle HGB, m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle EAB$ (مسلّمة جمع الزوايا)
5. $m\angle HGB = m\angle EAB$ (التعويض)
6. $\angle HGB \cong \angle EAB$ (تعريف التطابق)
7. $\triangle BHG \cong \triangle BEA$ (تساوي زاويتين وضلع)

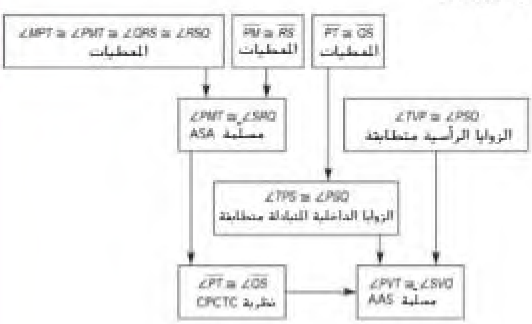
21a. نوعا المثلثين المستخدمين سيكونان متساوي الساقين وقائم الزاوية.

21b. لا، بد من وجود ضلعين وزاوية أو زاويتين وضلع على الأقل لإثبات أن المثلثات متطابقة.

24. الإجابة النموذجية: لا يمكن استخدام المسلمة SSA لإثبات تطابق المثلثين. $AB \cong XY; BC \cong YZ; \angle C \cong \angle Z$



25. البرهان:



.26

الطريقة	وقت الاستخدام...
تعريف المثلثات المتطابقة	الأجزاء المتناظرة في المثلث الأول متطابقة مع الأجزاء المتناظرة في المثلث الآخر.
مسلّمة تساوي الأضلاع الثلاثة	يجب تطابق الأضلاع الثلاثة في المثلث الأول مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الآخر.
مسلّمة ضلعين وزاوية	يجب تطابق ضلعين وزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول مع ضلعين وزاوية محصورة بينهما في المثلث الآخر.
مسلّمة زاويتين وضلع محصور بينهما	يجب تطابق زاويتين وضلع محصور بينهما في المثلث الأول مع زاويتين وضلع محصور بينهما في المثلث الآخر.
مسلّمة زاويتين وضلع	يجب تطابق زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول مع زاويتين وضلع متناظر غير محصور بينهما في المثلث الآخر.

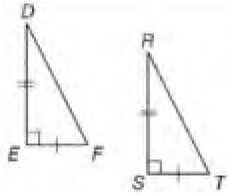
صفحة 754، التوسع 5-12

10. المعطيات: $\triangle DEF$ و $\triangle RST$ مثلثان قائما الزاوية.

$\angle E$ و $\angle S$ زوايا قائمة.

$\overline{EF} \cong \overline{ST}$، $\overline{ED} \cong \overline{SR}$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle RST$



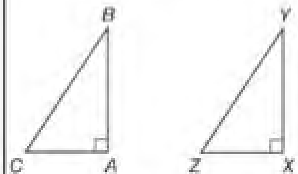
البرهان: تشير المعطيات إلى أن $\overline{EF} \cong \overline{ST}$ و $\overline{ED} \cong \overline{SR}$ و $\angle E$ و $\angle S$ زاويتان قائمتان. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle E \cong \angle S$. وبالتالي بناء على تساوي ضلعين وزاوية SAS، فإن $\triangle DEF \cong \triangle RST$.

11. المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle XYZ$ مثلثان قائما الزاوية.

$\angle A$ و $\angle X$ زوايا قائمة.

$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

$\angle B \cong \angle Y$



المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

البرهان: تشير المعطيات إلى أن $\triangle ABC$ و $\triangle XYZ$ مثلثان قائمان حيث الزاويتان القائمتان بهما هما $\angle A$ و $\angle X$، و $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$، و $\angle B \cong \angle Y$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle X \cong \angle A$. وبالتالي، فإن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بناء على تساوي زاويتين وضلع AAS.

14. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$ (المعطيات)
2. $\angle ABC$ زاوية قائمة، و $\angle DCB$ زاوية قائمة. (المستقيمات المتعامدة $\perp$ تكوّن زوايا قائمة $\angle$)
3. $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية، و $\triangle DCB$ مثلث قائم الزاوية (تعريف المثلث $\triangle$ القائم الزاوية)
4. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (المعطيات)
5. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس في التطابق)
6. $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (مسلّمة الوتر والساق)
7. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (النظرية CPCTC)

15. البرهان:

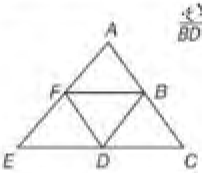
العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (المعطيات)
2. $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ (في أي مستوى، إذا تعامد مستقيم على أحد المستقيمين المتوازيين، فإنه يتعامد على الآخر)
3. $\angle ABC$ زاوية قائمة، و $\angle DCB$ زاوية قائمة. (المستقيمات المتعامدة $\perp$ تكوّن زوايا قائمة $\angle$)
4. $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية، $\triangle DCB$ مثلث قائم الزاوية. (تعريف $\triangle$ المثلث القائم الزاوية)
5. E هي نقطة منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ (المعطيات)
6. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ و $\overline{BE} \cong \overline{ED}$ (نظرية نقطة المنتصف)
7. $\angle AEB \cong \angle CED$ (الزوايا المتقابلة $\angle$ بالرأس تكون متطابقة $\cong$)
8. $\triangle AEB \cong \triangle CED$ (تساوي ضلعين وزاوية SAS)
9. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (النظرية CPCTC)
10. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس في التطابق)
11. $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (تساوي ساقين)
12. $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ (النظرية CPCTC)

صفحة 758، الدرس 6-12 (تمرين موجّه)

4. المعطيات: $\triangle ACE$ مثلث متساوي الأضلاع، $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$، $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ و D نقطة منتصف $\overline{EC}$.

المطلوب: $\triangle FED \cong \triangle BDC$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ACE$ متساوي الأضلاع، و $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$ و D نقطة منتصف $\overline{EC}$ (المعطيات)
2. $m\angle E = 60$ ،$m\angle C = 60$ كل $\angle$ في $\triangle$ متساوي الأضلاع تساوي 60)
3. $m\angle E = m\angle C$ (خاصية الإزاحة)
4. $\angle E \cong \angle C$ (تعريف التطابق)
5. $\overline{ED} \cong \overline{DC}$ (نظرية نقطة المنتصف)
6. $\angle CBD \cong \angle BDF$ ،$\angle EFD \cong \angle BDF$ (نظرية الزوايا $\angle$ الداخلية المتبادلة)
7. $\angle CBD \cong \angle EFD$ (خاصية الإزاحة)
8. $\triangle FED \cong \triangle BDC$ (تساوي زاويتين وضلع AAS)

الصفحة 759، الدرس 6-12

7. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{DA} \cong \overline{DC}$ (معطيات)
2. $\angle DAC \cong \angle DCA$ (نظرية المثلث متساوي الساقين)
3. $\angle BAD \cong \angle BCD$ (معطيات)
4. $\angle BAC \cong \angle BCA$ (جمع الزوايا)
5. $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle BCA = 180°$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)
6. $m\angle ABC = 60$ (المعطيات)

7. $60 + m\angle BAC + m\angle BAC = 180$ (التعويض)
8. $60 + 2m\angle BAC = 180$ (يبسّط)
9. $2m\angle BAC = 120$ (طرح 60 من كل ضلع)
10. $m\angle BAC = 60$ (قسمة كلا الضلعين على 2)
11. $m\angle BCA = 60$ (التعويض)
12. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا ($m\angle ABC = 60$، $m\angle BAC = 60$، $m\angle BCA = 60$).
13. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع. (نظرية المثلث متساوي الأضلاع)

الصفحات 761-762، الدرس 6-12

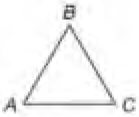
24. البرهان. المعطيات التي لدينا هي: $\triangle JKL$، $\triangle JLM$، و $\triangle JMN$ جميعها مثلثات متساوية الساقين طبقًا لنظرية المثلثات متساوية الساقين، وبهذا يكون لدينا $\overline{JK} \cong \overline{JL}$، $\overline{JL} \cong \overline{JM}$، و $\overline{JM} \cong \overline{JN}$ حسب نظرية التعدي، $\overline{JK} \cong \overline{JM}$. مرة أخرى، وباستخدام نظرية التعدي، $\overline{JK} \cong \overline{JB}$. بناءً عليه، فإن $\triangle JKN$ مثلث متساوي الساقين.

25. الإجابة النموذجية: لقد استخدمت مسطرة لأرسم قطعة مستقيمة طولها 4 سنتيمترات. ثم استخدمت منقلة لإنشاء زاوية 60 درجة ورسمت قطعة مستقيمة أخرى طولها 4 سنتيمترات. بعدها، قمت بالتوصيل بين نقطتي النهاية.

31. البرهان: نعلم من المعطيات أن $m\angle BKC = m\angle BCK$ وعليه يكون $\triangle BKC$ مثلثًا متساوي الساقين. وحسب نظرية المثلثات متساوية الساقين، فإن $\overline{BK} \cong \overline{BC}$. $\overline{BT}$ متعامد على $\overline{KC}$ وحسب نظرية مجموعة زوايا المثلث، $m\angle KBT = m\angle CBT$. حسب المسلمة AAS، $\triangle KBT \cong \triangle CBT$. إذًا، $\overline{KT} \cong \overline{TC}$ حسب النظرية CPCTC. وعليه، فإن الشجرة تكون في منتصف الطريق بين رشيد وزايد.

32. البرهان: نعلم من المعطيات أن $\triangle ACD$ و $\triangle ABD$ مثلثان متساويا الساقين و $\overline{AB}$ متوازي مع $\overline{CD}$. حيث إن $\triangle ACD$ و $\triangle ABD$ مثلثان متساويا الساقين، فإن $m\angle ACD = m\angle ADC$ و $m\angle DAB = m\angle ABD$. حيث إن $\overline{AB}$ موازٍ لـ $\overline{CD}$، $m\angle DAB = m\angle ADC$ لأنها زوايا داخلية متبادلة. وحسب نظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $2m\angle ADC + m\angle CAD = 180$. بالتعويض، $m\angle DAB + m\angle CAD = 180$. حسب مسلمة جمع الزوايا، $m\angle BAC = m\angle DAB + m\angle CAD$. إذًا، $m\angle DAB + m\angle BAC = 180$. حيث إن $m\angle DAB = m\angle ABD$ بالتعويض، يكون لدينا $m\angle ABD + m\angle BAC = 180$. بناءً عليه، فإن $\angle BAC$ و $\angle ABD$ تكون زوايا متكاملة.

33. الحالة 1



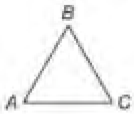
المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع.

المطلوب: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا.

البرهان:

العبارات (المبرّرات)
1. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع. (المعطيات)
2. $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف $\triangle$ متساوي الأضلاع)
3. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (نظرية $\triangle$ متساوي الساقين)
4. $\triangle ABC$ متساوي الزوايا. (تعريف المثلث متساوي الزوايا)

المسألة الثانية



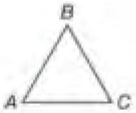
المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا.

المطلوب: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع.

البرهان:

العبارات (المبرّرات)
1. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا. (المعطيات)
2. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف $\triangle$ متساوي الزوايا)
3. $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (إذا كانت زاويتان $\angle s$ من $\triangle$ ≅ فإن الأضلاع المقابلة لهاتين الزاويتين $\angle s$ تكون ≅)
4. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع. (تعريف المثلث متساوي الزوايا)

34. المعطيات: $\triangle ABC$ عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع.



المطلوب: $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60$

البرهان:

العبارات (المبرّرات)
1. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع. (المعطيات)
2. $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف $\triangle$ متساوي الأضلاع)
3. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (نظرية $\triangle$ متساوي الساقين)
4. $m\angle A = m\angle B = m\angle C$ (تعريف التطابق ≅ $\angle s$)
5. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)
6. $3m\angle A = 180$ (التعويض)
7. $m\angle A = 60$ (خاصية القسمة)
8. $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60$ (التعويض)

35. المعطيات: $\triangle ABC; \angle A \cong \angle C$

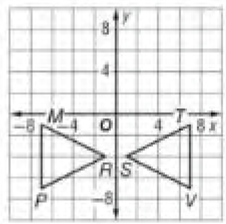
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

البرهان:

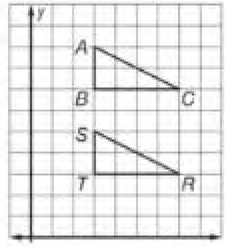
العبارات (المبرّرات)
1. لنقل إن $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABC$. (مسلّمة المنقلة)
2. $\angle ABD \cong \angle CBD$ (تعريف منصف الزاوية $\angle$)
3. $\angle A \cong \angle C$ (المعطيات)
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (تساوي زاويتين وضلع AAS)
6. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (النظرية CPCTC)

43. البرهان:
$\overline{CZ} = \overline{CY} = \overline{CX}$ لأنها جميعًا أنصاف أقطار للدائرة نفسها. وحيث إن $\overline{CZ} = \overline{CY}$ و $\triangle YCZ$ مثلث متساوي الساقين به الزاوية الرأسية $m\angle YCZ = 120$. حسب نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية المثلثات متساوية الساقين، لدينا $m\angle CYZ = m\angle CZY = 30$. حيث إن $\overline{CZ}$ ينصف $\angle XZY$ ولدينا أيضًا $m\angle CXZ = 30$. حيث إن $\overline{CZ} = \overline{CX}$ مثلث متساوي الساقين. ومن ثم، وحسب نظرية المثلث متساوي الساقين، فإن $m\angle CXZ = 30$. حسب المسلمة AAS، $\triangle YCZ \cong \triangle XCZ$. فإن $\overline{YZ} = \overline{XZ}$. حسب النظرية CPCTC. حيث إن $\overline{CY} = \overline{CX}$، $\triangle XCY$ مثلث متساوي الساقين. حيث إن $m\angle YCZ + m\angle ZCX = 360$ و $m\angle YCZ$ و $m\angle ZCX = 120$ بناءً عليه، وحسب نظرية مجموع زوايا المثلث. $m\angle CYZ = m\angle XYC = 30$ ومن ثم وحسب المسلمة ASA $\triangle YCZ \cong \triangle XCY$. بناءً عليه، $\overline{XY} = \overline{YZ} = \overline{XZ}$ و $\triangle XYZ$ متساوي الأضلاع.

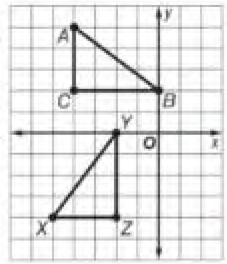
الصفحة 770، الدرس 12-7

17. 

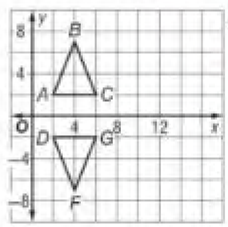
$\triangle TVS$ انعكاس للمثلث $\triangle MPR$. $MP = 6$، و $PR = \sqrt{45}$، و $MR = \sqrt{45}$، و $ST = \sqrt{45}$، و $TV = 6$، و $SV = \sqrt{45}$. $\triangle MPR \cong \triangle TVS$ بناء على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

18. 

$\triangle ABC$ عبارة عن إزاحة للمثلث $\triangle STR$. $AB = 2$، و $BC = 4$، و $AC = \sqrt{20}$، و $ST = 2$، و $TR = 4$، و $SR = \sqrt{20}$. $\triangle ABC \cong \triangle STR$ بناء على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

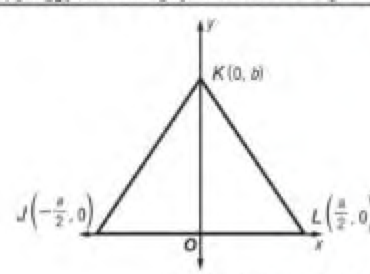
19. 

$\triangle XYZ$ عبارة عن دوران للمثلث $\triangle ABC$. $AB = 5$، و $BC = 4$، و $AC = 3$، و $XZ = 3$، و $YZ = 4$، و $XY = 5$. بما أن $AB = XY$، و $BC = YZ$، و $AC = XZ$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{XY}$، و $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$، و $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$، و $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بناء على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

20. 

$\triangle ABC$ عبارة عن انعكاس للمثلث $\triangle DFG$. $AB = \sqrt{29}$، و $AC = 4$، و $BC = \sqrt{29}$، و $DG = 4$، و $FG = \sqrt{29}$، و $DF = \sqrt{29}$. $\triangle ABC \cong \triangle DFG$ بناء على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

الصفحتان 773–775، الدرس 12-8 (تمرين موجّه)

1. 

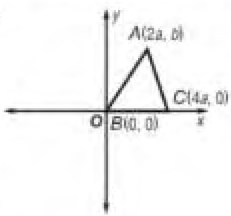
3. **المعطيات:** $\triangle ABX$ و $\triangle CDX$
المطلوب: $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

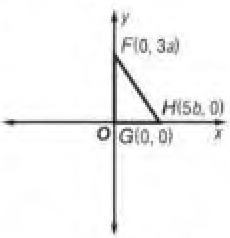
البرهان:
نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي $\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$ أو $\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$.
نقطة منتصف $\overline{BD}$ هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ أو $\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$.
لأن X تقع عند $\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$ فإنها نقطة منتصف $\overline{AC}$ وبناءً على تعريف $\overline{BD}$. منتصف القطعة المستقيمة، فإن $\overline{AC}$ تنصف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$. بناءً عليه، $\overline{BX} \cong \overline{XD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{XC}$.

من قانون المسافة،
$$CD = \sqrt{[(a+x)-a]^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}$$ و
$$AB = \sqrt{[(0+x)-0]^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}.$$

وبالتالي، $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ بناء على تعريف التطابق $\cong$،
و $\triangle ABX \cong \triangle CDX$ بناء على تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

الصفحات 776–779، الدرس 12-8

1. 

2. 

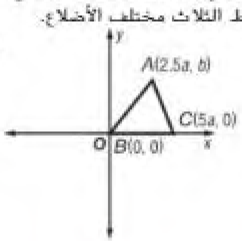
6. **البرهان:** الخطوة الأولى هي تعيين إحداثيات كل مكان. لنفترض أن L تمثل لندن، N تمثل شلالات نياجرا و V تمثل فانكوفر. إذا لم يكن هناك ضلعان من المثلث $\triangle LNV$ متطابقان، فإن تلك المدن الثلاث تشكل مثلثًا مختلف الأضلاع. سوف نستخدم قانون المسافة والآلة الحاسبة لحساب المسافة بين كل مكان والآخر.

$$LN = \sqrt{(42.9-43.1)^2 + (81.2-79.1)^2} \approx 2.12$$

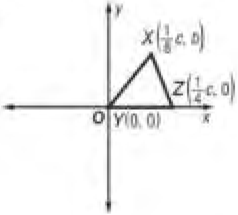
$$LV = \sqrt{(42.9-49.3)^2 + (81.2-123.1)^2} \approx 42.39$$

$$VN = \sqrt{(49.3-43.1)^2 + (123.1-79.1)^2} \approx 44.43$$

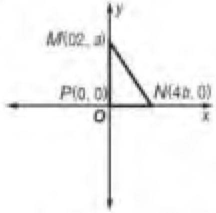
بما أن كل ضلع له طول مختلف فإن $\triangle LNV$ مختلف الأضلاع.
ولهذا، المثلث المكون من النقاط الثلاث مختلف الأضلاع.

7. 

10.



12.



19. البرهان:

نضع المثلث متساوي الساقين على المستوى الإحداثي على النحو الموضح.

نريد أن نوضح أن $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ،$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ حسب خاصية الانعكاس. وبما أن D تقع عند نقطة الأ صل، فإن A تقع على المحور y و C تقع على المحور x، $\angle ADC = 90$. كذلك، وحيث إن B تقع على المحور x، $\angle ADB = 90$. بناء عليه، فإن $\angle ADC \cong \angle ADB$

$DC = \sqrt{(0-a)^2 + (0-0)^2} = a.$

$BD = \sqrt{(-a - 0)^2 + (0-0)^2} = a.$

ومن ثم فإن $\overline{DC} \cong \overline{BD}$. وحسب مسلمة SAS، $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

20. البرهان:

نضع المثلث قائم الزاوية على المستوى الإحداثي على النحو الموضح. نريد أن نثبت أن $\overline{DE}$ موازٍ لـــ $\overline{AC}$.

ميل $\overline{DE} = \dfrac{\frac{b}{2} - 0}{0 - \frac{a}{2}} = -\dfrac{b}{a}$

ميل $\overline{AC} = \dfrac{b-0}{0-a} = -\dfrac{b}{a}$

بما أن الميول متساوية، فلا بد وأن يكونا متوازيين.

22. البرهان:

$RS = \sqrt{(-3-3)^2 + (-3 - -3)^2} = 6$

$RT = \sqrt{(-3-0)^2 + (-3 - (3\sqrt{3} - 3))^2} = 6$

$ST = \sqrt{(3-0)^2 + (-3 - (3\sqrt{3} - 3))^2} = 6$

بما أن الأضلاع الثلا ثة جميعها لها نفس الطول، فإن تلك النقاط تشكل مثلثًا متساوي الأضلاع.

23. الحل:

$CU = \sqrt{(39.98 - 40.79)^2 + (82.98 - 77.86)^2} = 5.18$

$CE = \sqrt{(39.98 - 41.88)^2 + (82.98 - 87.62)^2} = 5.01$

$EU = \sqrt{(41.88 - 40.79)^2 + (87.62 - 77.86)^2} = 9.82$

تشكل هذه المدن مثلثًا مختلف الأضلاع.

24. البرهان: الخطوة الأ ولى تتمثل في تعيين إحداثيات كل موقع. لنفترض أن N تمثل سلطان، وأن J تمثل جمال وأن A تمثل صالح. إذا كان ضلعا المثلث $\triangle NJA$ متطابقين، فإن أماكن سلطان وجمال وصالح تشكل مثلثًا متساوي الساقين. سوف نستخدم قانون المسافة والآ لة الحاسبة في حساب المسافة بين كل شخص والآخر.

$NJ = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$

$JA = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2} = 5$

$NA = \sqrt{(4-0)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$

حيث إن $NJ = JA$ فإن المثلث الذي شكله فريق كرة الألوان متساوي الساقين.

27. البرهان: تتمثل الخطوة الأ ولى في تعيين إحداثيات كل مكان. لنفترض أن R تمثل السفينة الدوارة، وأن M تمثل اللفات وأن B تمثل السيارات المتصادمة. إذا كانت ميول الخطوط التي تصل بين اللفات تشكل معكوسات متقابلة، فإن المثلث هو مثلث قائم الزاوية.

ميل $RM = \dfrac{3 - -1}{3-2} = 4$

ميل $RB = \dfrac{0 - -1}{-2-2} = -\dfrac{1}{4}$

ومن ثم فإن $m\angle MRB = 90$ والمثلث المشكل من تلك اللفات الثلاث مثلث قائم الزاوية.

28. البرهان: إن لم يكن أي من ضلعي المثلث $\triangle ABC$ متطابقًا، فإن هذه النقاط الثلاث تشكل مثلثًا مختلف الأضلاع. سوف نستخدم قانون المسافة والآلة الحاسبة لحساب المسافة بين كل مجموعة من النقاط والأخرى.

$AB = \sqrt{(0-3a)^2 + (0-5a)^2} = \sqrt{34a}$

$AC = \sqrt{(0 - -2a)^2 + (0-8a)^2} = 2\sqrt{17a}$

$BC = \sqrt{(3a-2a)^2 + (5a-8a)^2} = \sqrt{10a}$

بما أن كل ضلع له طول مختلف، فإن $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

29. البرهان: الخطوة الأ ولى هي تعيين إحداثيات كل موقع. لنفترض أن S تمثل البداية وأن C تمثل بداية ركوب الدراجة وأن E تمثل نهاية السباحة. إذا لم يكن أي ضلعين في $\triangle SCE$ متطابقين، فإن تلك النقاط الثلاث تشكل مثلثًا مختلف الأضلاع. سوف نستخدم قانون المسافة والآ لة الحاسبة في حساب المسافة بين كل موقع والآخر. $S(0,0)$, $C(10, 0)$, $E(10, 41.5)$

$SC = \sqrt{(0-10)^2 + (0-0)^2} = 10$

$CE = \sqrt{(10-10)^2 + (0-41.5)^2} = 41.5$

$SE\sqrt{(0-10)^2 + (0-41.5)^2} \approx 42.68$

بما أن كل ضلع له طول مختلف فإن $\triangle SCE$ مختلف الأضلاع. ولهذا، المثلث المكون من النقاط الثلاث مختلف الأضلاع.

31. البرهان: لنفترض أن المثلث الأ صلي والمثلث الناتج موضوعان على المستوى الإ حداثي على النحو الموضح:

$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$AC = \sqrt{(a-c)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2}$

$BC = \sqrt{(c-0)^2 + (0-0)^2} = c$

$DE = \sqrt{(2a-0)^2 + (0-2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

$DF = \sqrt{(2a-2c)^2 + (2b-0)^2} = 2\sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2}$

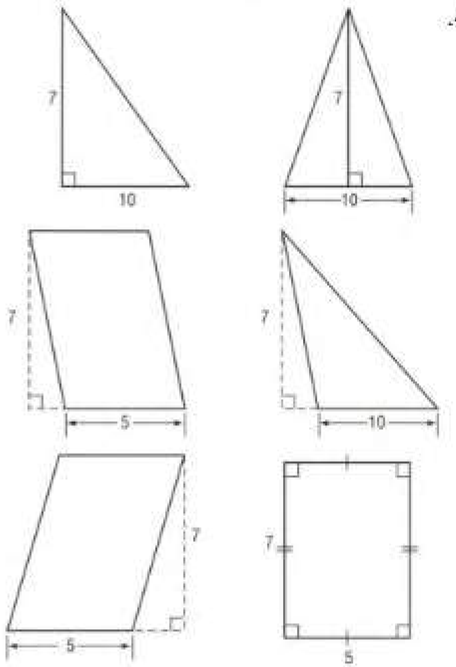
$EF = \sqrt{(2c-0)^2 + (0-0)^2} = 2c$

$\frac{AB}{DE} = 2$ و $\frac{AC}{DF} = 2$ و $\frac{BC}{EF} = 2$ ومن ثم، وبما أن نسب جميع الأضلاع الثلاثة متساوية، فالمثلثات متشابهة.

الصفحة 789، الدرس 9-12

39. الإجابة النموذجية: المساحة لن تتغير لأن K تتحرك على امتداد الخط p. بما أن الخطوط m و p متوازية، فإن المسافة المتعامدة بينها تكون ثابتة. وهذا يعني أنه بصرف النظر عن مكان K على الخط p، فإن المسافة المتعامدة إلى الخط p، أو ارتفاع المثلث، ستكون واحدة دائمًا. بما أن النقطتين J و L لا تتحركان، فإن المسافة بينهما، أو طول القاعدة، ستكون ثابتة. بما أن ارتفاع المثلث وقاعدة المثلث ثابتان، فإن المساحة ستكون دائمًا واحدة.

40.

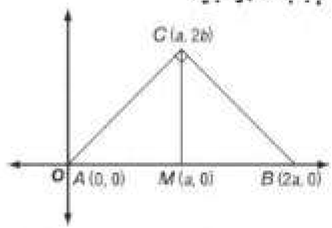


41. الإجابة النموذجية: لحساب مساحة متوازي الأضلاع، تستطيع قياس الارتفاع $\overline{PT}$ يليه قياس واحدة من القواعد $\overline{PQ}$ أو $\overline{SR}$ وضرب الارتفاع في القاعدة لتحصل على قيمة المسافة. تستطيع كذلك قياس الارتفاع $\overline{SW}$ وقياس واحدة من القواعد $\overline{QR}$ أو $\overline{PS}$ يليه ضرب الارتفاع في القاعدة للحصول على قيمة المساحة. ليس من المهم الضلع الذي تختار استخدامه ليكون القاعدة طالما أنك تستخدم الارتفاع المتعامد على تلك القاعدة لحساب قيمة المسافة.

الصفحة 795، تدريب على الاختبار

10. البرهان:

20. الإجابة النموذجية:



نقطة منتصف $\overline{AB}$ تساوي $(a, 0)$. ميل $\overline{CM}$ غير محدد. إذًا $\overline{CM}$ خط رأسي. وميل $\overline{AB}$ يساوي 0. إذًا فإنه خط أفقي. وعليه، فإن $\overline{AB} \perp \overline{CM}$

ملاحظات