UNITED ARAB EMIRATES
MINISTRY OF EDUCATION

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

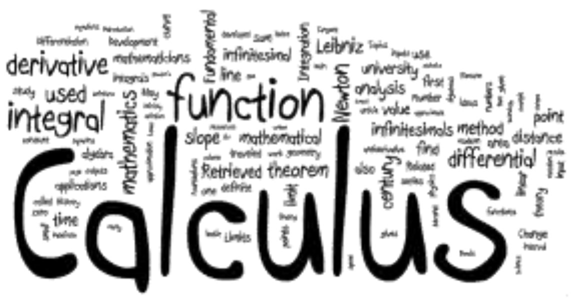
# General Math 2019-2020

الصف الثاني العشر العام- الوحدة الأولى

Grade 12 MATHS

## Unit 1

الوحدة 1
# الدوال من منظور التفاضل والتكامل





By / Mahmoud Manasra
www.facebook.com/manasra.math

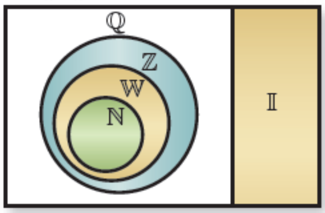
# الدرس الأول : الدوال

## 1 وصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية

تُستخدم الأعداد الحقيقية لوصف الكميات مثل المال والمسافة. تشمل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المجموعات الجزئية للأعداد التالية.

### المفهوم الأساسي الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$)




| الحرف | المجموعة | أمثلة |
|---|---|---|
| $\mathbb{Q}$ | الأرقام الحقيقية | $0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$ |
| $\mathbb{I}$ | الأرقام غير الحقيقية | $\sqrt{3} = 1.73205...$ |
| $\mathbb{Z}$ | الأعداد الصحيحة | $-5, 17, -23, 8$ |
| $\mathbb{W}$ | الأعداد الكلية | $0, 1, 2, 3...$ |
| $\mathbb{N}$ | الأعداد الطبيعية | $1, 2, 3, 4...$ |

يُمكن وصف مجموعات الأعداد الحقيقية هذه ومجموعات الأعداد الحقيقية الأخرى باستخدام رمز بناء المجموعات. **رمز بناء المجموعات** يستخدم خصائص الأعداد الموجودة في المجموعة لتعريف المجموعة.

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد $x$ بحيث...

$x$ له الخصائص المحددة...

و$x$ هو أحد عناصر مجموعة الأعداد المحددة.

تمرين : صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعات

$x \ge -3$

$\{-4, -3, -2, \dots\}$

مجموعة الأعداد الزوجية

$4 \le x < 8$

| | |
|---|---|
| مجموعة الأعداد الفردية | $x \le -5$ *or* $x > 3$ |
| مضاعفات $\pi$ | مضاعفات العدد 8 |

## الفترات

**رمز الفترة** يستخدم المتباينات لوصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية. تُستخدم الرموز [ or ] للإشارة إلى أن هناك نقطة نهاية متضمنة في الفترة، بينما تستخدم الرموز ( or ) للإشارة إلى عدم تضمن نقطة نهاية في الفترة. تستخدم الرموز∞، اللانهاية الإيجابية، و∞−، اللانهاية السلبية لوصف إحدى الفترات اللا محدودة. تُعد الفترة لا محدودة إذا كانت تمضي إلى ما لا نهاية.

| المراحل المحدودة | | المراحل اللا محدودة | |
|---|---|---|---|
| المتباينة | رمز الفترة | المتباينة | رمز الفترة |
| $a \le x \le b$ | $[a, b]$ | $x \ge a$ | $[a, \infty)$ |
| $a < x < b$ | $(a, b)$ | $x \le a$ | $(-\infty, a]$ |
| $a \le x < b$ | $[a, b)$ | $x > a$ | $(a, \infty)$ |
| $a < x \le b$ | $(a, b]$ | $x < a$ | $(-\infty, a)$ |
| | | $-\infty < x < \infty$ | $(-\infty, \infty)$ |

تمرين : اكتب كل من المجموعات الأعداد في رمز بناء المجموعات ورمز الفترة ، ان امكن ذلك

1 ) $-2 \le x$

2) $x \ge -3$

3 ) $\{-4, -3, -2, \dots\}$

4) $x \le -5$ *or* $x > 3$

**الدالة** هي نوع خاص من العلاقة.

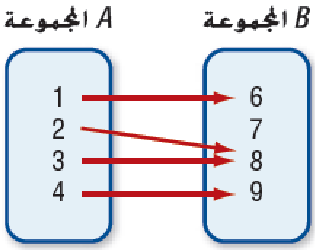
## المفهوم الأساسي الدالة

**الكلمات** دالة $f$ من المجموعة $A$ إلى المجموعة $B$ هي علاقة تحدد لكل عنصر $x$ في المجموعة $A$ عنصر واحد فقط $y$ في المجموعة $B$.

**الرموز** العلاقة من المجموعة $A$ إلى المجموعة $B$ هي دالة.

المجموعة $A$ هي المجال. $D = \{1, 2, 3, 4\}$

المجموعة $B$ تحتوي على المدى. $R = \{6, 8, 9\}$

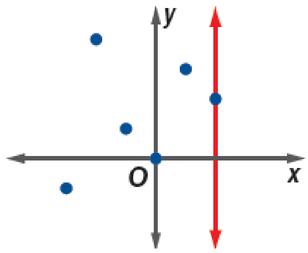



## المفهوم الأساسي اختبار الخط العمودي

**الكلمات**

مجموعة النقاط الموجودة على المستوى الإحداثي هي الرسم البياني للدالة إذا تقاطع كل خط عمودي ممكن مع الرسم البياني في نقطة واحدة على الأكثر.

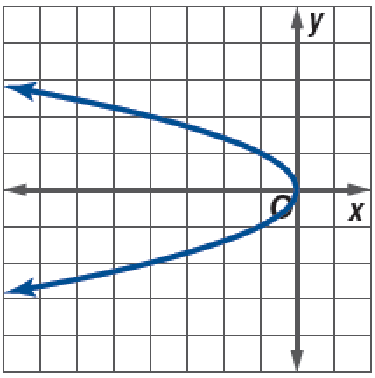
**نموذج**

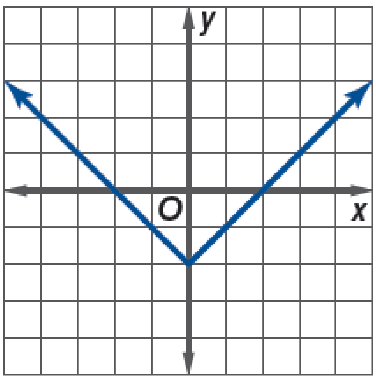



تمرين : حدد ما إذا كانت كل من العلاقات تمثل $y$ كدالة ل $x$

| x | y |
|---|---|
| 0.01 | 423 |
| 0.04 | 449 |
| 0.04 | 451 |
| 0.07 | 466 |
| 0.08 | 478 |
| 0.09 | 482 |

| x | y |
|---|---|
| −50 | 2.11 |
| −40 | 2.14 |
| −30 | 2.16 |
| −20 | 2.17 |
| −10 | 2.17 |
| 0 | 2.18 |




.19 $\frac{1}{x} = y$

.20 $x^2 = y + 2$

.21 $3y + 4x = 11$

.22 $4y^2 + 18 = 96x$

.23 $\sqrt{48y} = x$

.24 $\frac{x}{y} = y - 6$

# مجال الدالة

مجال الدالة هي مجموعة قيم $x$ التي لكل منها صورة .

ملاحظة هامة : جميع الدوال التي سندرسها سيكون مجالها $\mathbb{R}$ ( الأعداد الحقيقية ) باستثناء القيم التي تجعل المقام صفراً او ما بداخل الجذر الزوجي سالباً .

أمثلة :

- كثيرات الحدود : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ( a اعداد ثابته ، n اعداد صحيحة موجبة )
  من انواعها : الدالة الثابتة – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية . ( مجالها : $\mathbb{R}$ )

- الدالة النسبية: الحالة الاساسية $f(x) = \frac{1}{x}$ ( مجالها : {اصفار المقام } / $\mathbb{R}$ )

- دالة الجذر التربيعي: الحالة الاساسية $f(x) = \sqrt{x}$ ( مجالها : ما بداخل الجذر $\geq 0$ )
  تنطبق هذه الحالة على جميع الجذور التي دليلها زوجي

- دالة الجذر التكعيبي : الحالة الاساسية $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ( مجالها : $\mathbb{R}$ )
  تنطبق هذه الحالة على جميع الجذور التي دليلها فردي

- الدالة القيمة المطلقة : الحالة الاساسية $f(x) = |x|$ (مجالها : $\mathbb{R}$ )

- دالة أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي: يرمز له بالرمز $y = [x]$ (مجالها : $\mathbb{R}$ )

- الدالة المتفرعة (المتشعبة)( المعرفة باكثر من قاعدة) : (يحدد مجالها من معطيات السؤال )

- الدوال المثلثية : منها $y = \sin x$ (مجالها : $\mathbb{R}$ )

سيتم توضيح كيفية ايجاد المجال في الحالة التي تكون الدالة في الحالة الجبرية او ممثلة بيانيا

تمرين : أوجد المجالات الدوال التالية من خلال الجبر

| | |
|---|---|
| $f(x)=-7$ | $y=4-x^2$ |
| $h(x)=x+\sin x-3\lvert x\rvert$ | $g(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$ |
| $y=\dfrac{1}{x^2-25}$ | $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$ |
| $y=\sqrt{6-2x}$ | $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x-40}$ |
| $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $h(x)=\sqrt[4]{x^2-100}$ |

$$f(x)=\frac{x+1}{4-\sqrt{x^2-9}}$$

---

$$g(x)=\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x+5}$$

---

$$f(x)=\frac{2}{x^2-16}-\frac{1}{2x-6}$$

---

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

تمرين : أوجد قيم كل من الدوال التالية :

1) $f(x)=-3x^{2}+4x-5$

$f(5)=$

$f(-3)=$

$f(a+1)=$

$f(2c)=$

---

2) $f(x)=3+\sqrt{x^{2}-4}$

$f(-2)=$

$f(x+2)=$

---

تمرين : اذا كانت $f(x)=x^{2}-bx+1$ ، اذا علمت أن $f(-3)=25$ ، أوجد قيمة $b$ .

---

تمرين : اذا كانت $h(x)$ دالة حيث $h(3)=3$ ، $h(2)=2$ ، $h(1)=1$

$$h(x+1)=\frac{h(x-2)\,h(x-1)+1}{h(x)} \qquad ,x\geq 3$$

اوجد قيمة $h(5)$

الدالة المتفرعة (المتشعبة)( المعرفة باكثر من قاعدة) :

تمرين: اذا علمت أن

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ,x<-2\\ 3 & ,-2\le x<4\\ (x-5)^2+2 & ,x\ge 4\end{cases}$$

أوجد

$f(-3)=$ $f(5)=$

$f(4)=$ $f(-2)=$

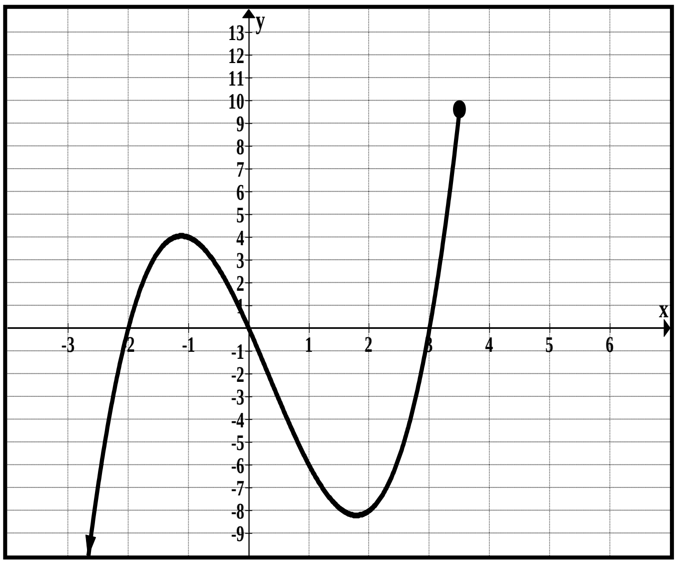
تمرين : **وسائل النقل العام** يمكن تمثيل استخدام وسائل النقل العام على النطاق الوطني باستخدام الدالة التالية . يمثل العام 1996 من خلال $t=0$ ويمثل رحلات الركاب بالملايين

$$p(t)=\begin{cases}0.35t+7.6 & ,0\le t\le 5\\ 0.04t^2-0.6\,t+11.6 & ,5<t\le 10\end{cases}$$

1) كم عدد رحلات الركاب تقريبا في عام 1999 ؟ وفي عام 2004 ؟
2)كم عدد رحلات الركاب تقريبا في عام 1996 ؟
3) أوجد $p(8)$ ، فسر ماذا تمثل هذه القيمة ؟
4)قارن بين عدد الرحلات في عام 2000 و عام 2005 ؟
5)حدد مجال الدالة ؟

الدرس الثاني : تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات

تمرين (1) استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ للاجابة عن الاسئلة التالية :




1. قدر قيمة $f(2)$

تأكد من تقديرك من خلال الجبر .

2. حدد مجال ونطاق الدالة $f(x)$

3. قدر أصفار الدالة $f(x)$

تأكد من تقديرك من خلال الجبر .

4. قدر التقاطع مع المحور الرأسي

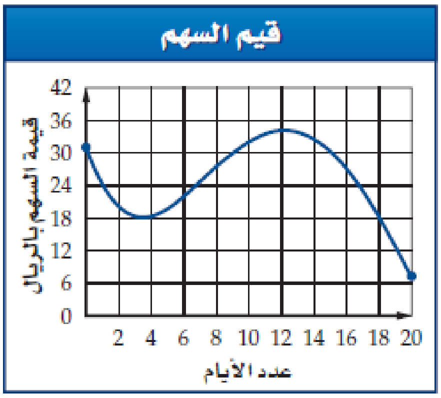
تأكد من تقديرك من خلال الجبر .

**تحقق من فهمك**

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم $d$.

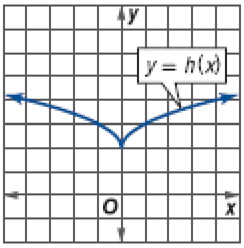
1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقق من إجابتك جبريًا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقق من إجابتك جبريًا.

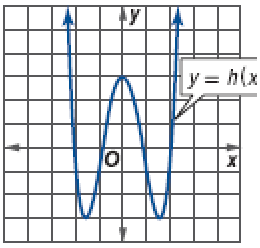


تمرين : استخدم الرسم البياني للدالة $f$ لتحديد المجال والنطاق (المدى ) لكل دالة

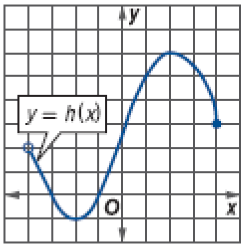
9.



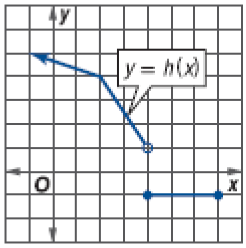

10.




11.

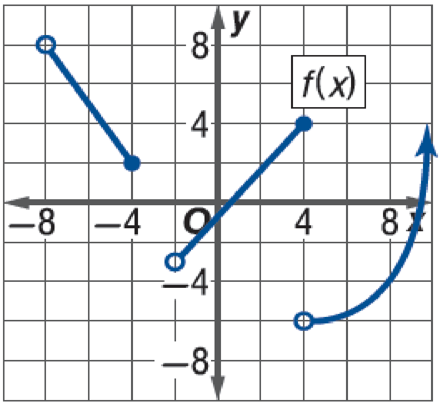



12.

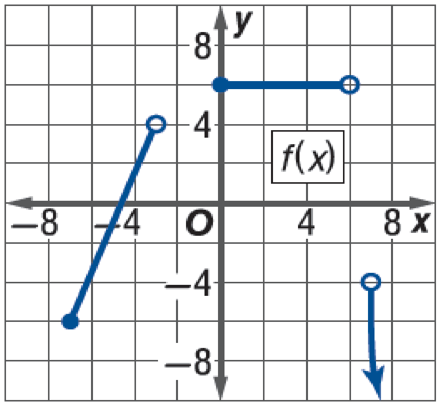



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| المجال | | | | |
| المدى | | | | |

55.

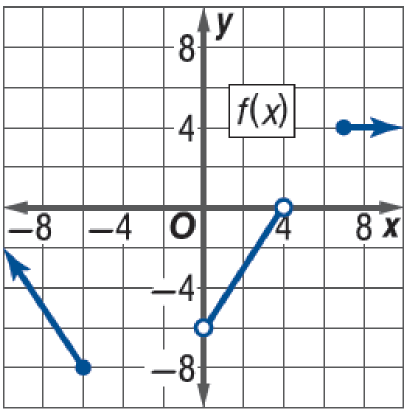



56.

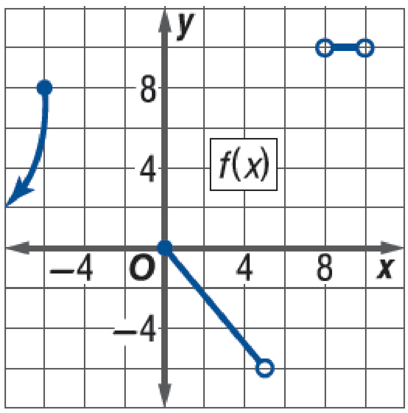



| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

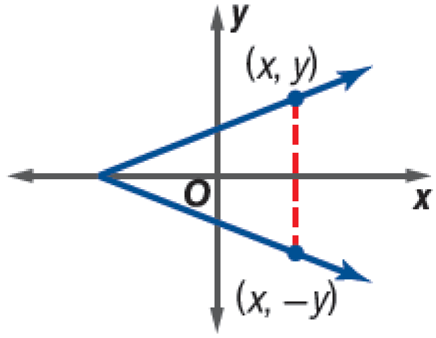
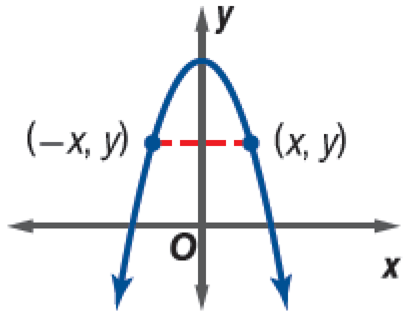
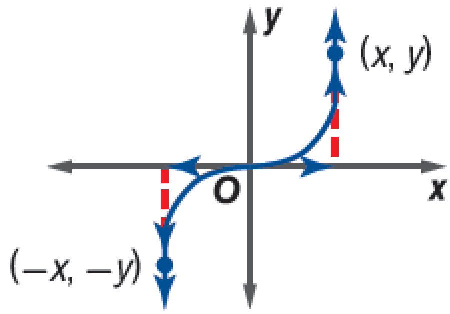
57.




58.



تناظر الرسوم البيانية (الدالة الزوجية- الفردية )

| الاختبار البياني | النموذج | الاختبار الجبري |
|---|---|---|
| يكون الرسم البياني للعلاقة متناظراً فيما يتعلق بالمحور الافقي x فقط إذا كان لكل نقطة $(x,y)$ تقع على الرسم البياني فان النقطة $(x,-y)$ تقع على الرسم البياني |   | استبدال $y$ بقيم $-y$ ينتج معادلة مساوية |
| يكون الرسم البياني للعلاقة متناظراً فيما يتعلق بالمحور الراسي $y$ فقط إذا كان لكل نقطة $(x,y)$ تقع على الرسم البياني فان النقطة $(-x,y)$ تقع على الرسم البياني |   | استبدال $x$ بقيم $-x$ ينتج معادلة مساوية<br>$f(-x)=f(x)$<br>دالة زوجية |
| يكون الرسم البياني للعلاقة متناظراً فيما يتعلق بنقطة الأصل فقط إذا كان لكل نقطة $(x,y)$ تقع على الرسم البياني فان النقطة $(-x,-y)$ تقع على الرسم البياني |   | استبدال $x$ بقيم $-x$ و $y$ بقيم $-y$ ينتج معادلة مساوية<br>$f(-x)=-f(x)$<br>دالة فردية |

ملاحظات : للتحقق من أن الدالة $f(x)$ فردية أم زوجية أم ليست اي منهما
نجد اولا = $f(-x)$ ونتحقق من أن :

اذا كانت (1 $f(-x)=f(x)$ $\Longleftarrow$ $f(x)$ دالة زوجية

اذا كانت (2 $f(-x)=-f(x)$ $\Longleftarrow$ $f(x)$ دالة فردية

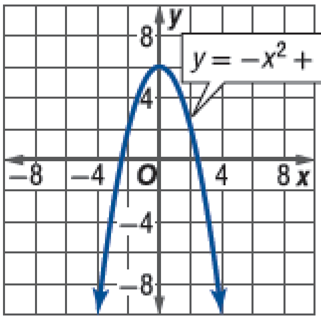
اذا كانت (3 $f(-x)\neq f(x)$ , $f(-x)\neq -f(x)$ $\Longleftarrow$ $f(x)$ ليست اي منهما

تمرين : بين من خلال الحل الجبري الدالة فردية أم زوجية أو ليست أياً منهما ..

| | |
|---|---|
| $f(x)=x^2+2x-6$ | $f(x)=2x^3+5x$ |
| $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ | $f(x)=5$ |
| $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ | $f(x)=\lvert 8-2x\rvert$ |

تمرين: استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتحقق من التناظر حول المحور الافقي $x$ والمحور الرأسي $y$ ونقطة الأصل . ادعم اجابتك بالأرقام ،ثم تحقق منها من خلال الجبر .

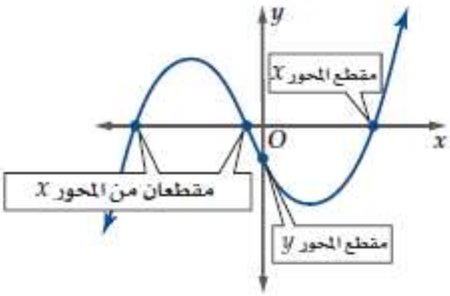
*الحليل البياني




*الإثبات الرقمي

*الإثبات الجبري

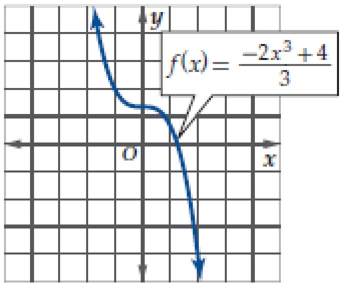
النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور $x$ أو المحور $y$ تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع $x$ بتعويض $y = 0$، وللحصول على المقطع $y$ فإننا نعوض $x = 0$. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع $x$، وقد يكون هناك مقطع $x$ واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع $y$ فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



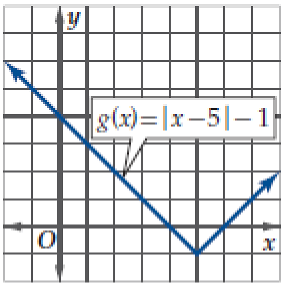

ولإيجاد المقطع $y$ لمنحنى الدالة $f$ جبريًّا، فإننا نجد $f(0)$.

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع $y$، ثم أوجده جبريًّا:

(a

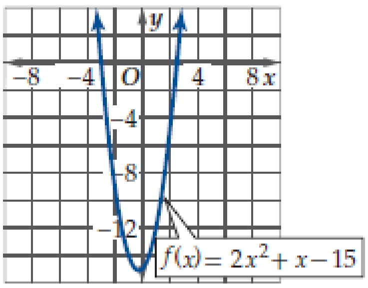



(b




## مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

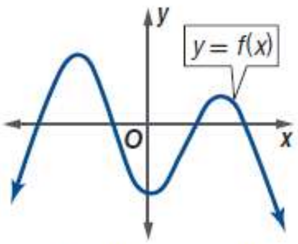


## الدرس الثالث : الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

### مفهوم الاتصال

**1 الاتصال** الرسم البياني لدالة متصلة لا يوجد به انقطاعات أو فجوات أو فراغات. يمكنك تتبع الرسم البياني لدالة متصلة بدون رفع قلمك عن الرسم.

أحد شروط اتصال دالة ما $f(x)$ عند النقطة $x = c$ هو أنه يجب أن تقترب الدالة من قيمة مميزة كلما اقتربت قيم $x$ من القيمة $c$ من اليسار واليمين. ويعرف الاقتراب من قيمة ما بغض النظر عن الوصول إليها فعلياً بالنهاية.

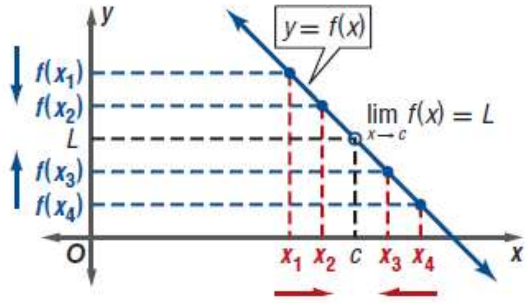


$f(x)$ is continuous for all $x$.

**مفهوم أساسي النهايات**

**الكلمات** إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة $L$ بينما تصل $x$ لقيمة $c$ من كلا الجانبين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ هي $L$.

**الرموز** $\lim_{x \to c} f(x) = L$ والتي تُقرأ كما يلي نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت $x$ من $c$ هي $L$.

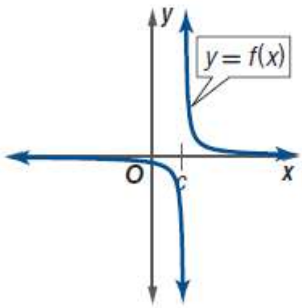



### أنواع الانفصال ( الانقطاع ): ( فجوة – قفزة- لا نهائي )

## مفهوم أساسي أنواع الانقطاع

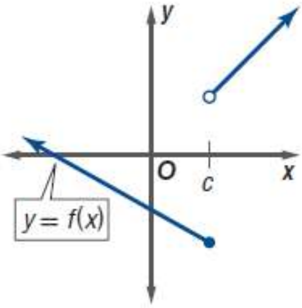
يكون للدالة **انقطاع لا نهائي** عند $x = c$ إذا كانت قيمة الدالة تزداد أو تقل بشكل لا نهائي كلما اقتربت $x$ من قيمة $c$ من اليمين واليسار.

**مثال**



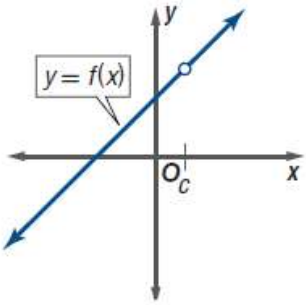

ويكون للدالة **انقطاع متنقل** عند $x = c$ إذا كانت نهايات الدالة عندما تقترب $x$ من قيمة $c$ من اليسار واليمين ذات قيم مختلفة.

**مثال**




ويكون للدالة **انقطاع قابل للإزالة** إذا كانت الدالة متصلة عند كل القيم، ما عدا فجوة عند $x = c$.

**مثال**




## ملخص المفهوم اختبار الاتصال

تعتبر الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا كانت تحقق الشروط التالية.

- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $c$. أي أن $f(c)$ ذات قيمة محددة.
- تصل $f(x)$ لنفس القيمة من كلا جانبي $c$. أي أنها $\lim_{x\to c} f(x)$ لها قيمة محددة.
- القيمة التي تصل إليها $f(x)$ من كل جانب حول $c$ هي $f(c)$. أي أن نها $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ .

تمرين : حدد ما اذا كانت كل دالة متصلة عند قيم $x$ المحددة . علل مستخدما اختبار الاتصال . واذا كانت منفصلة بين نوع الانفصال . <u>( فجوة ( قابل للازالة أو الاصلاح )</u> <u>( قفزة (متنقل ) )</u> <u>( لا نهائي )</u>

1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , x > 2 \\ x^2 + 1 & , x \le 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$

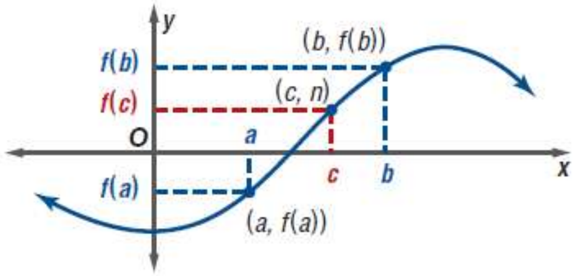
2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ,x<-3\\ x+1 & ,\ x\geq -3\end{cases}$ عند $x=-3$

3 ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{x+1} & ,x>0\\ x^2+4 & ,x<0\\ 5 & ,x=0\end{cases}$ ، عند $x=0$

1 ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-1} & ,x>1\\ x^2+1 & ,x\leq 1\end{cases}$ ، عند $x=1$

## مفهوم أساسي نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و كانت $a < b$ وهناك قيمة $n$ حيث تقع $n$ بين $f(a)$ و $f(b)$. إذاً هناك رقم $c$ حيث $a < c < b$، و $f(c) = n$.




**النتيجة: تقريب أصفار الدالة** إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت قيم كلاً من $f(a)$ و $f(b)$ ذواتا إشارات متضادة، إذاً فهناك على الأقل قيمة واحدة على الأقل $c$، حيث إن $a < c < b$ و $f(c) = 0$. أي أن صفر الدالة يقع بين $a$ و $b$.

تمرين : حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المحددة .

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4} \qquad ;[-3,4]$

2) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \qquad ;[-5,0]$

1) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5 \qquad ;[0,5]$

## 2 السلوك الطرفي

**السلوك الطرفي** السلوك الطرفي لدالة ما يصف **السلوك الطرفي** الدالة عند أياً من طرفي الرسم البياني لها. أي أن السلوك الطرفي هو ما يحدث لقيمة الدالة $f(x)$ كلما ازدادت قيمة $x$ أو نقصت بدون أي حدود – أي ازدادت للغاية أو نقصت حتى أصبحت سالبة أكثر وأكثر. ولوصف السلوك الطرفي لرسم بياني ما، يمكنك استخدام مبدأ النهاية.

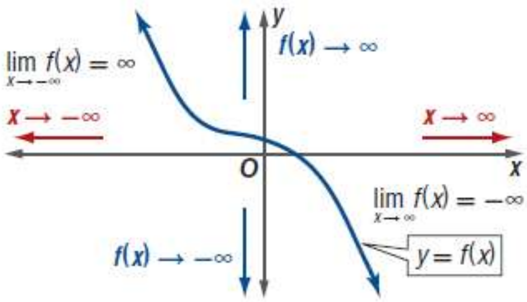
**سلوك الطرفي الأيسر**

$\lim_{x \to \infty} f(x)$

**سلوك الطرف الأيمن**

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

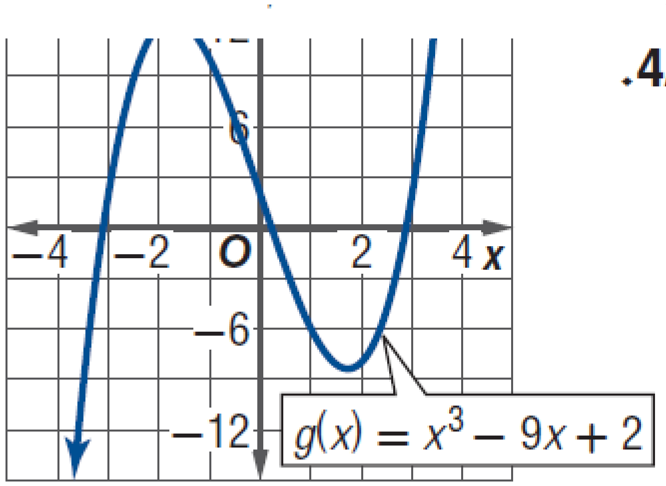
أحد احتمالات السلوك الطرفي للرسم البياني لدالة ما لقيمة $f(x)$ هي أن تزداد أو تنقص بدون أي حد أو قيد. ويوصف هذا السلوك الطرفي بأن $f(x)$ تصل إلى اللانهاية الموجبة أو السالبة.




تمرين : استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها .أثبت فرضيتك بالأرقام .

**التحليل البياني:**

**4A.**




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

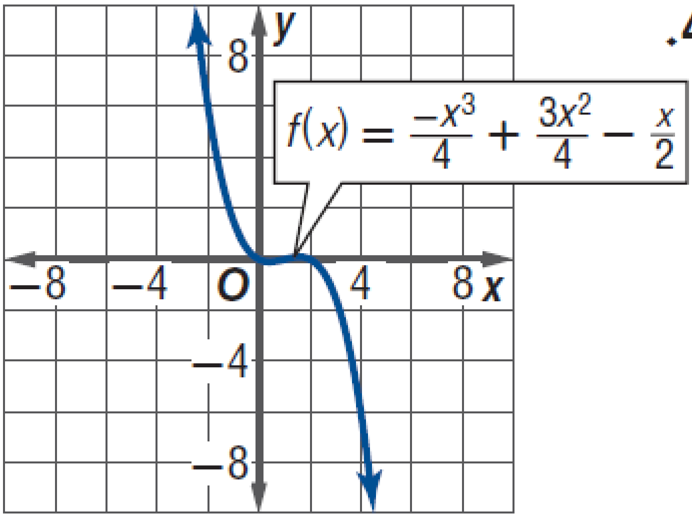
$$\lim_{x \to \infty} f(x) =$$

**الإثبات الرقمي:**

| $x$ | -10000 | -1000 | -100 | 0 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

**<u>التحليل البياني</u>:**

**.4B**




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

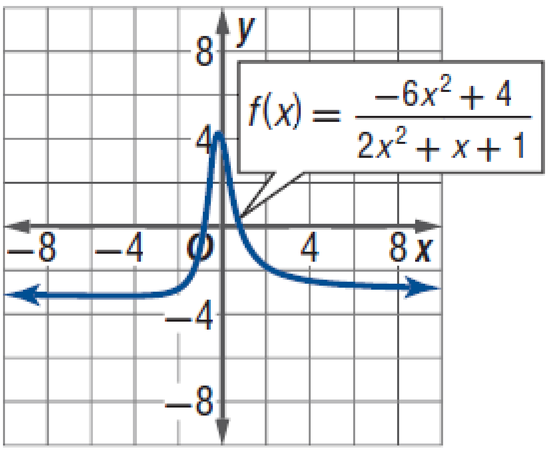
$$\lim_{x \to \infty} f(x) =$$

**<u>الإثبات الرقمي</u>:**

| $x$ | -10000 | -1000 | -100 | 0 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

**<u>التحليل البياني</u>:**

**.5B**




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) =$$

**<u>الإثبات الرقمي</u>:**

| $x$ | -10000 | -1000 | -100 | 0 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

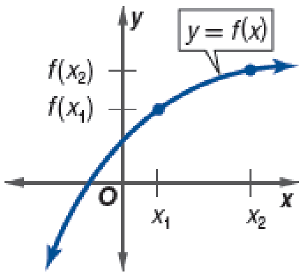
**<u>واجب بيتي تمارين الكتاب الصفحات 30،31,32</u>**

## الدرس الرابع :القيم القصوى ومتوسط معدلات التغير

### المفهوم الأساسيلدوال المتصاعدة والمتنازلة والثابتة.

**كلمات** الدالة $f$ **تكون تصاعدية** عند الفترة /
على سبيل المثال، فقط إن كانت هناك أي نقطتين عند ./
ينتج تغير في نتائج قيم $x$ بتغير موجب في $f(x)$.

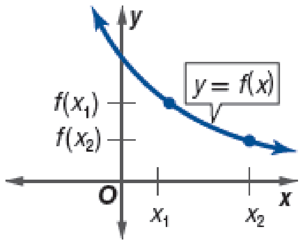
**الرموز** لكل $x_1$ و $x_2$ في أحد الفترات،/
$x_1 < x_2$ عندما يكون $f(x_1) < f(x_2)$.



Interval: $(-\infty, \infty)$

**كلمات** الدالة $f$ تكون **تنازلية** عند الفترة /
على سبيل المثال، إن كانت هناك أي نقطتين عند./
ينتج تغير مو جب في قيم $x$ بتغير سالب في $f(x)$.

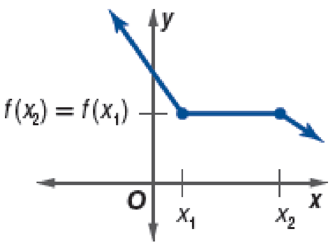
**الرموز** لكل $x_1$ و $x_2$ في إحدى الفترات./
$x_1 < x_2$ عندما يكون $f(x_1) < f(x_2)$



Interval: $(-\infty, \infty)$

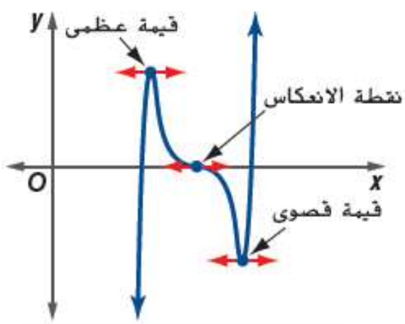
**كلمات** الدالة $f$ تكون **ثابتة** عند الفترة /
على سبيل المثال، إن كانت هناك أي نقطتين عند ./
ينتج تغير موجب في قيم $x$ بتغير صفري في $f(x)$

**الرموز** لكل $x_1$ و $x_2$ في إحدى الفترات./
$x_1 < x_2$ عندما يكون $f(x_1) < f(x_2)$.

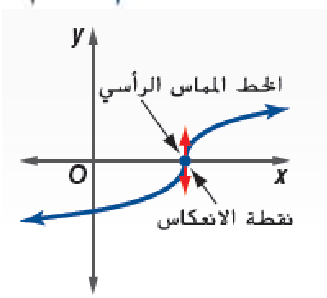


Interval: $(a, b)$

**النقاط الحرجة** للدالة هي النقاط التي يُرسم عليها خط مماس للمنحنى أفقياً أو رأسياً **النقاط** القصوى تعتبر نقاط حرجة تتغير الدالة فيها من ناحية سلوك التصاعد والتنازل. عند هذه النقاط تكون لدى الدالة **قيمة عظمى** أو قيمة صغرى، وكلاهما إما نسبي أو مطلق. **نقطة الانعكاس** يمكن أن تشكل كذلك نقطة حرجة. عند هذه النقاط يُغير الرسم البياني شكله، دون إحداث تغير في التصاعد أو التنازل. عوضاً عن ذلك، فإن المنحنى يتغير من ناحية كونه منحنياً لأعلى ليكون منحنياً لأسفل أو العكس.




**دون ملاحظاتك :**



## مفهوم أساسي القيم القصوى النسبية والمطلقة

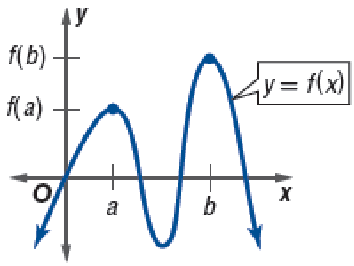
**كلمات** القيمة العظمى النسبية لدالة $f$ هي القيمة العظمى التي يمكن أن تحققها $f(x)$ عند بعض فتراتها في المجال.

**الرموز** $f(a)$ هي القيمة العظمى النسبية لـ $f$ إن كانت هناك فترات للدالة $(x_1, x_2)$ والتي تحتوي على قيم مثل $a$ $f(a) > f(x)$ لكل $x \neq a$ في $(x_1, x_2)$.

**كلمات** إذا كانت القيمة العظمى النسبي أكبر قيمة لدالة $f$ يمكن أن تحققها في مجالها، إذا فهي *القيمة العظمى المطلقة.*

**رموز** $f(b)$ هي القيمة العظمى المطلقة $f$ إذا $f(b)$ $> f(x)$ لكل $x \neq b$، في مجال $f$.

**النموذج**




$f(a)$ is a relative maximum of $f$.
$f(b)$ is the absolute maximum of $f$.

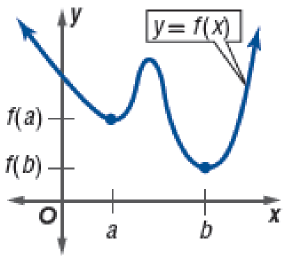
**كلمات** القيمة الصغرى لدالة $f$ هي القيمة الأصغر لـ $f(x)$ والتي يمكن أن تحققها عند فترة معينة في المجال.

**الرموز** $f(a)$ هي قيمة صغرى لـ $f$ إن كانت هناك فترة $(x_1, x_2)$ تحتوي على قيم مثل $a$ $f(x) > f(a)$ لكل $x \neq a$ في $(x_1, x_2)$.

**كلمات** إذا كانت القيمة الصغرى هي أقل قيمة يمكن لدالة $f$ تحققها على مدى مجالها. فهي *القيمة الصغرى المطلقة.*

**رموز** $f(b)$ هي القيمة الصغرى المطلقة $f$ إذا $f(b) < f(x)$ لكل $x \neq b$، في مجال $f$.

**النموذج**

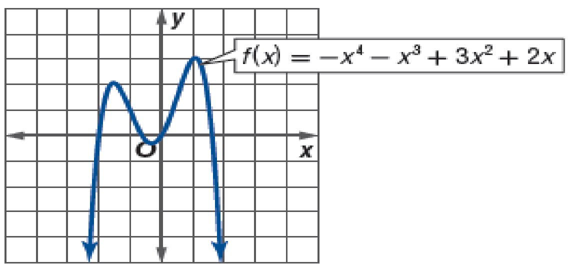



$f(a)$ is a relative minimum of $f$.
$f(b)$ is the absolute minimum of $f$.

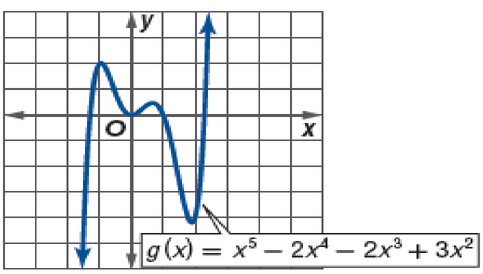
### تمارين موجهة

**حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني الخاص بكل دالة. ادعم الإجابات عدديًا.**

**.2A**

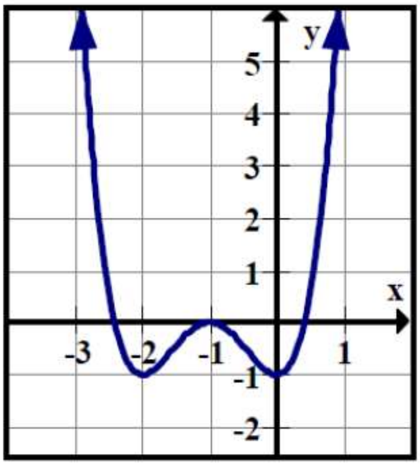



**.2B**

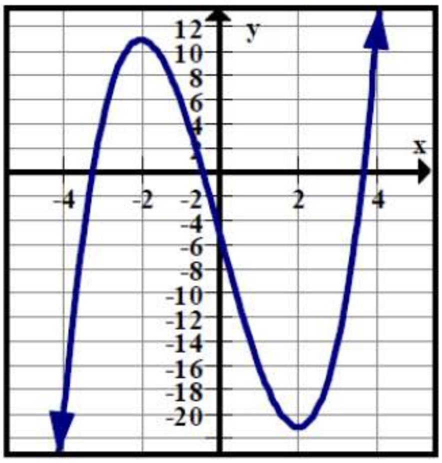


1) الأشكال التالية تمثل الدالة $f$ : عين النقاط الحرجة و حدد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى المحلية.

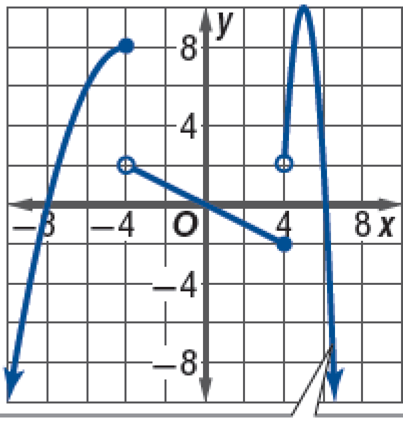
الشكل (1)



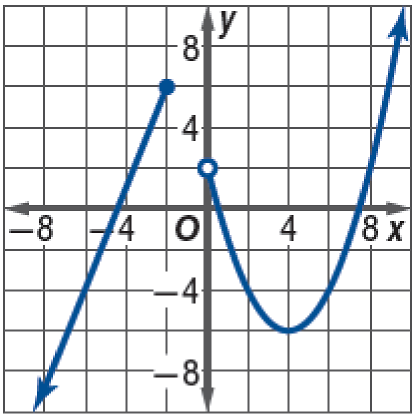

الشكل (2)




| | الشكل1 | الشكل2 |
|---|---|---|
| النقاط الحرجة | ........................ | ........................ |
| فترات التزايد | ........................ | ........................ |
| فترات التناقص | ........................ | ........................ |
| القيم العظمي المحلية | ........................ | ........................ |
| القيم الصغري المحلية | ........................ | ........................ |



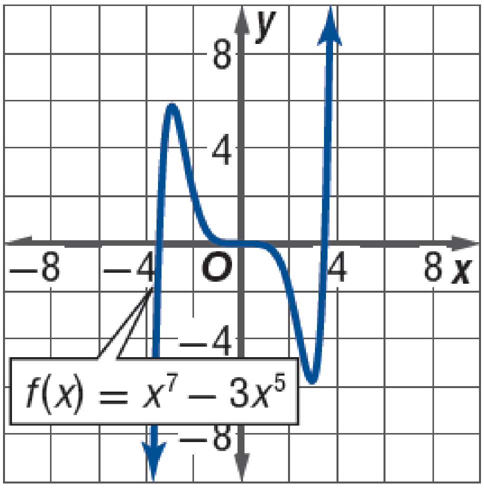

$$f(x)=\begin{cases}-0.5x^2-4x & \text{if } x\le -4\\ -0.5x & \text{if } -4< x\le 4\\ -8x^2+80x-190 & \text{if } x>4\end{cases}$$



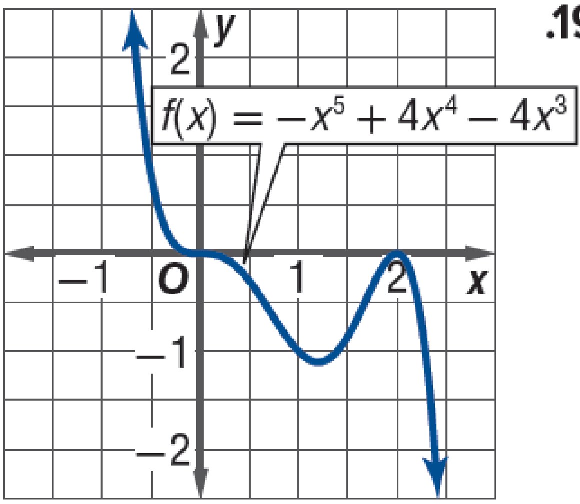

$$f(x)=\begin{cases}2.5x+11 & \text{if } x\le -2\\ 0.5x^2-4x+2 & \text{if } x>0\end{cases}$$

**تمرين : حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني الخاص بكل دالة . ادعم الاجابة عدديا**

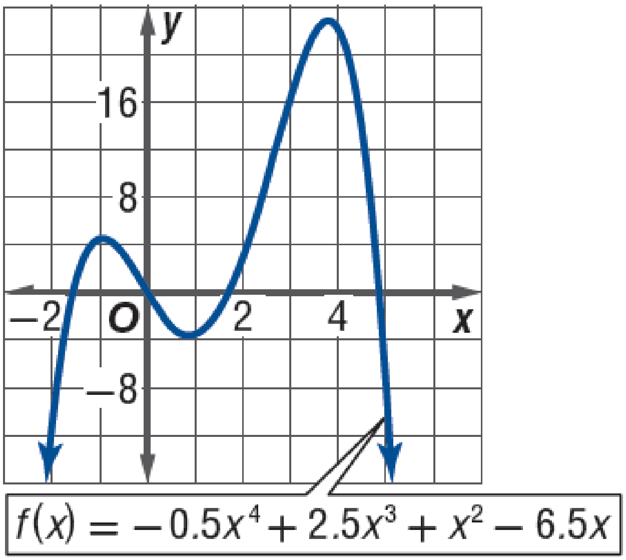
.18



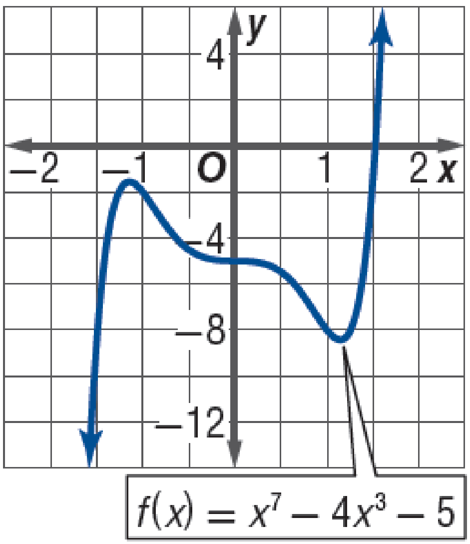

.19




.20




.21



## 2 متوسط معدل التغير

تعلمت مسبقًا في الجبر، أن المنحدر بين أي نقطتين في الرسم البياني لدالة خطية يُمثل معدل تغير ثابت. يتغير الميل لدالة غير خطية بين أزواج مختلفة من النقاط، لذلك يمكننا فقط التحدث عن متوسط معدل التغير بين أي نقطتين.

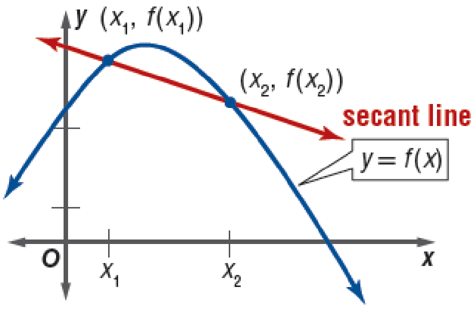
### مفهوم أساسي متوسط معدل التغير

**كلمات** متوسط **معدل التغير** بين أي نقطتين على الرسم البياني لـــ $f$ هو منحدر الخط المار عبر هاتين النقطتين.

**هندسة** يُدعى الخط المار بنقطتين على منحنى **الخط القاطع**. يُرمز إلى منحدر الخط القاطع بوحدة $m_{sec}$.

**رموز** متوسط معدل التغير خلال الفترة $[x_1, x_2]$ is $m_{sec} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

**النموذج**




**تمرين : أوجد متوسط التغير لكل دالة عند الفترات المحددة**

$$1)\ f(x) = 3x^2 - 8x + 2 \qquad ; [4,8]$$

$$2)\ f(x) = \frac{x-3}{x} \qquad ; [5,12]$$

$$3)\ f(x) = \sqrt{x+8} \qquad ; [-4,4]$$

**46. الطقس** يمكن تمثيل متوسط درجات الحرارة المرتفعة خلال الشهر في دبي من خلال الدالة التالية $f(x) = -0.9x^2 + 13x + 43$، حيث تمثل $x$ الشهر $x = 1$ تمثل شهر يناير. أوجد متوسط معدل التغير لكل فترة زمنية، واشرح ماذا يمثل هذا المعدل. (مثال 6)

**a.** إبريل إلى مايو **b.** يوليو إلى نوفمبر

تمرين : اذا كانت $f(x) = x^2$ وكان متوسط التغير في الدالة يساوي 3 عندما تتغير $x$ من 1 الى $a$ ، اوجد قيمة $a$ . حيث $a > 1$

تمرين : اذا كان متوسط التغير في الدالة $f(x)$ يساوي 5 عندما تتغير $x$ من 1 الى 3 ، وكانت $f(3) = 6$ . فما قيمة $f(1)$ .

تمرين : اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & ,x\ge 3 \\ bx+a & ,-3<x<3 \\ \sqrt{-b-x} & ,x\le -3 \end{cases}$$

1) حدد قيم $a\,,b$ حيث تكون الدالة $f(x)$ متصلة .

2 ) اوجد متوسط التغير في الدالة $f(x)$ عندما تتغير $x$ من 4- الى 0 .

تمرين : اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} ax+6 & ,x\ge 1 \\ x^2+bx+6 & ,x<1 \end{cases}$$

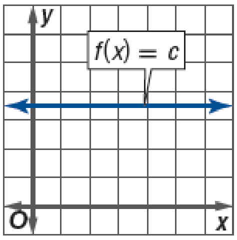
اذا علمت أن : 1) متوسط التغير في الدالة $f(x)$ على الفترة $[2,5]$ يساوي 4
2 ) الدالة متصلة عند $x=1$
فاوجد قيمة كل من $a\,,b$ .

## الدرس الخامس : الدوال الرئيسة والتحويلات صفحة 45

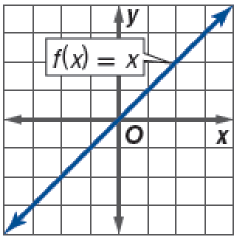
**1 الدوال الرئيسية** تتكون *عائلة الدوال* من مجموعة من الدوال التي تشترك رسومها البيانية في خاصية أو أكثر. وتعتبر **الدالة الرئيسية** هي أبسط دالة في عائلة الدوال. وهي الدالة التي تتحول فتصبح دالة أخرى من ضمن عائلة الدوال. في هذا الدرس، ستتعرف على أشهر ثماني دوال رئيسة. ولابد أنك الآن ألفت بالفعل الرسوم البيانية للدوال الخطية وكثيرة الحدود التالية.

### مفهوم أساسي الدوال الرئيسة الرئيسية وكثيرة الحدود

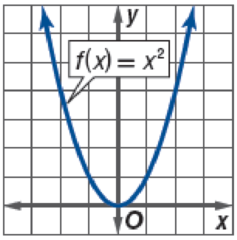
تأخذ **الدالة الثابتة** الصيغة $f(x) = c$، حيث تمثل $c$ أي عدد حقيقي. رسمها البياني عبارة عن خط أفقي. وعندما تكون قيمة $c = 0$، تصبح الدالة $f(x)$ **دالة صفرية**.



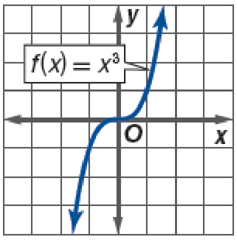

تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ عبر كل النقاط ذات الإحداثيات $(a, a)$.




**الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ رسمها البياني يأخذ شكل حرف U.

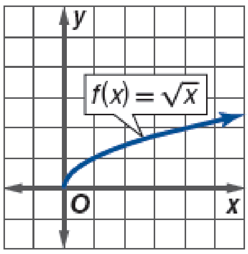



**الدالة التكعيبية** $f(x) = x^3$ متناظرة حول نقطة الأصل.

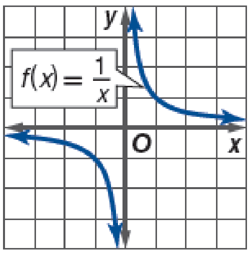



### مفهوم أساسي دوال الجذر التربيعي و العكسية الرئيسية

تأخذ **دالة الجذر التربيعي** الصيغة $f(x) = \sqrt{x}$




تأخذ **الدالة العكسية** الصيغة $f(x) = \frac{1}{x}$



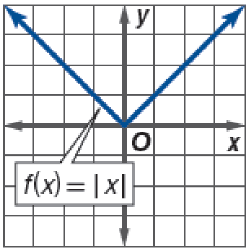
## مفهوم أساسي دالة القيمة المطلقة الرئيسية

**التعريف** **دالة القيمة المطلقة** معادلتها $f(x) = |x|$. وتأخذ الشكل V. وتعرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \text{ اذاكان} \\ x & x \geq 0 \text{ اذاكان} \end{cases}$$

**أمثلة** $|-5| = 5,\ |0| = 0,\ |4| = 4$

**نموذج**



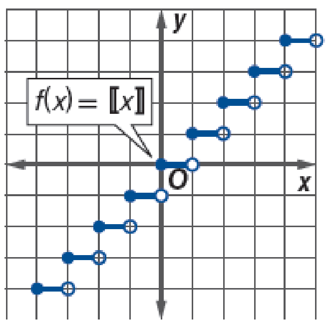

تمرين : اعد تعريف الدالة $f(x) = |2x+6|$

## مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح الرئيسية

**التعريف** **دالة أكبر عدد صحيح** معادلتها $f(x) = [\![x]\!]$. ومعرفة على أنها تمثل أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي $x$.

**أمثلة** $[\![-4]\!] = -4,\ [\![-1.5]\!] = -2,\ [\![\frac{1}{3}]\!] = 0$

**النموذج**




تمرين : أعد تعريف $x \in [-1,1]$ , $y = [2x-1]$

تمرين (1) صف الخصائص التالية للرسم البياني لكل دالة رئيسية : المجال والنطاق (المدى ) ونقاط التقاطع والتناظر والاتصال والسلوك الطرفي وفترات التزايد والتناقص .

| الدالة $f(x)$ | المجال | المدى | نقاط التقاطع مع المحور $x$ | نقاط التقاطع مع المحور $y$ | التناظر. (زوجية – فردية ) | الاتصال | السلوك الطرفي | فترات التزايد والتناقص |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[x]$ | D=R | R=Z | x-int = {x\| $0\le x<1$} | 0 | ليست اي منهما | نقاط عدم الاتصال Z={x\|x$\in$z} | $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ | ثابتة لقيم {x\|x$\notin z$ } متزايدة لقيم x$\in$z |
| $\frac{1}{x}$ | R\{0}={x\|x $\neq 0, x\in R$ } | R\{0}={x\|x $\neq 0, x\in R$ } | لا يوجد | لا يوجد | تناظر حول نقطة الاصل | انفصال لا نهائي عند X=0 | $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ | متناقصة $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ |
| $x^3$ | | | | | | | | |
| $x^4$ | | | | | | | | |

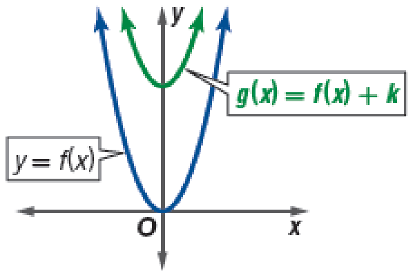
## الازاحة الأفقية والرأسية

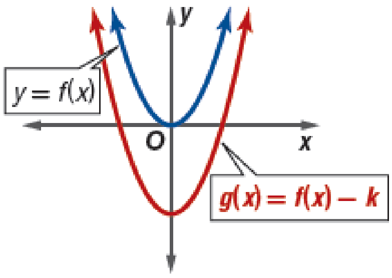
## مفهوم أساسي الإزاحة الأفقية والرأسية

### الإزاحة الرأسية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x) + k$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

- تُحرِك $k$ **الرسم للأعلى**، عندما تكون $k > 0$، و
- تُحرك $k$ **الرسم للأسفل**، عندما $k < 0$.

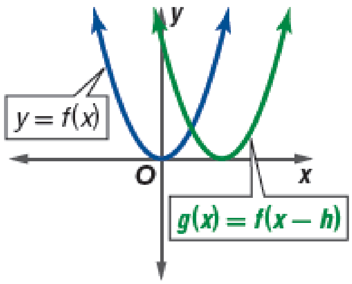


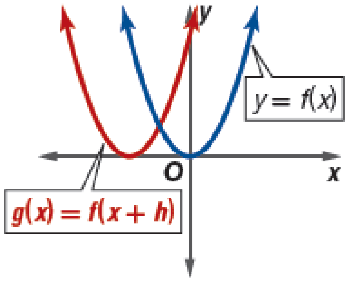




### الإزاحات الأفقية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x - h)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

- تُحرِك $h$ **الرسم لليمين**، عندما تكون $h > 0$.
- تُحرِك $h$ **الرسم لليسار**، عندما تكون $h < 0$.



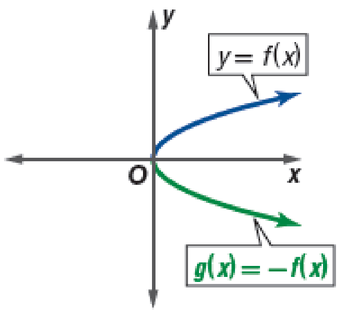




## الانعكاس في المحاور الاحداثية

## مفهوم أساسي الانعكاس في المحاور الإحداثية

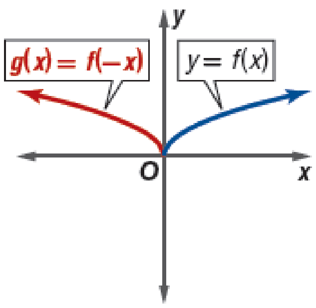
### الإنعكاس حول المحور الأفقي $x$

الرسم البياني للدالة $g(x) = -f(x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الأفقي** $x$.




### الانعكاس في المحور الرأسي $y$

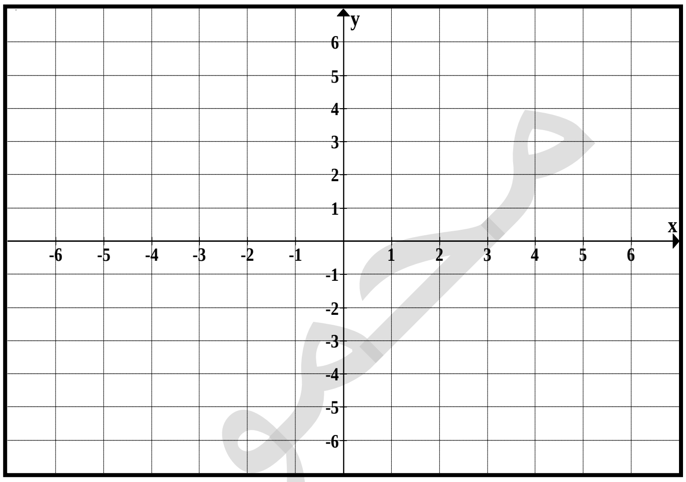
الرسم البياني للدالة $g(x) = f(-x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الرأسي** $y$.

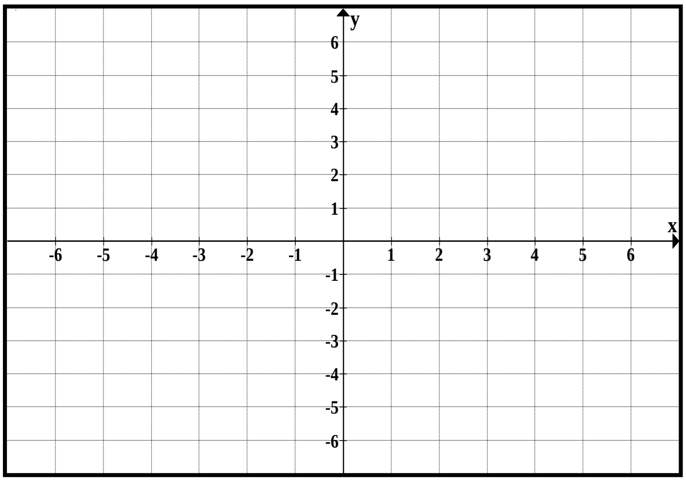


تمرين : استخدم الرسم البياني للدالة $f\,(x)=\sqrt{x}$ لرسم الدوال الآتية :

1) $f\,(x)=\sqrt{x+3}$

2) $f\,(x)=\sqrt{x-2}+3$

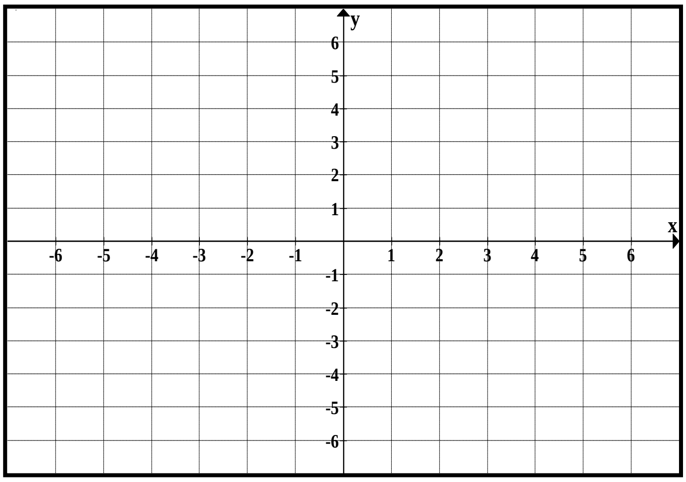


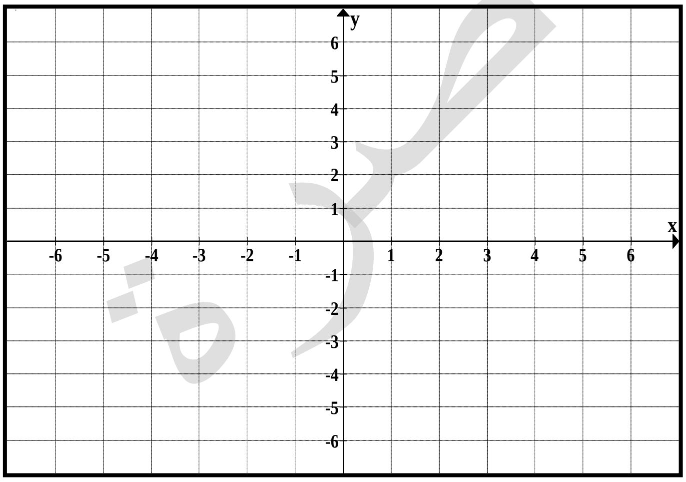




تمرين : استخدم الرسم البياني للدالة $f\,(x)=\dfrac{1}{x}$ لرسم الدوال الآتية :

1) $f\,(x)=\dfrac{1}{x}-4$

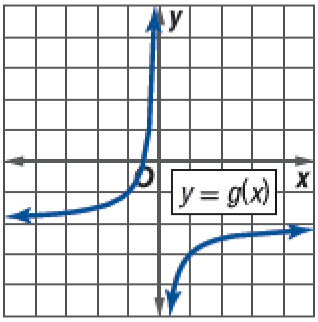
2) $f\,(x)=\dfrac{1}{x+3}+2$



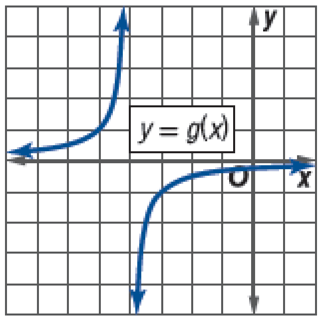



تمرين : اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$ .

3A.

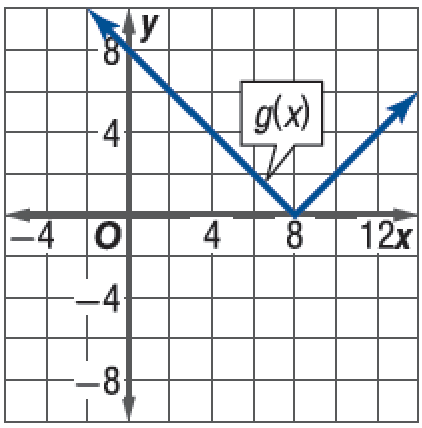



3B.

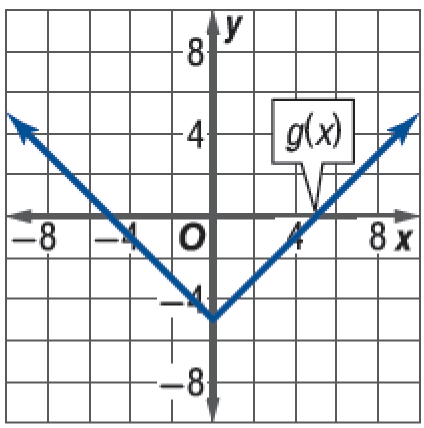



تمرين : اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x)=|x|$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$ .

20.




21.

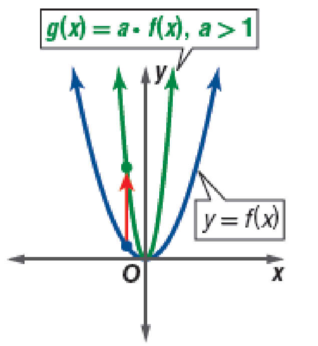


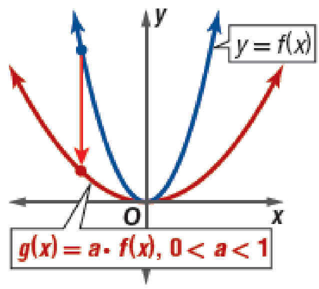
## التمدد والانكماش

### تغيير الأبعاد بمقياس بشكل رأسي

إذا كان $a$ عدد حقيقي موجب، و $g(x) = a \cdot f(x)$، فإن

- الرسم البياني للدالة سيتوسع رأسياً $f(x)$ **إذا كان** $a > 1$.
- سينضغط الرسم البياني للدالة رأسيا $f(x)$ **إذا كان** $0 < a < 1$.

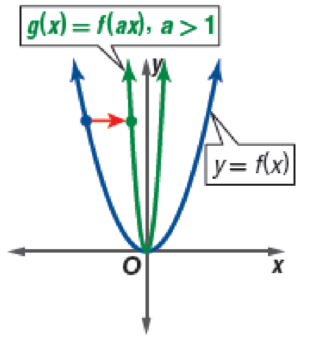


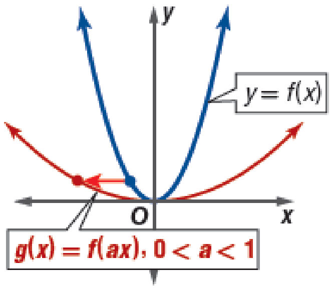




### تغيير الأبعاد بمقياس بشكل الأفقي

إذا كان $a$ عدداً حقيقيًا موجبًا، و $g(x) = f(ax)$، فإن

- الرسم البياني للدالة $f(x)$ سينضغط أفقيًا. **إذا كان** $a > 1$.
- سيتوسع الرسم البياني أفقياً للدالة $f(x)$ **إذا كان** $0 < a < 1$.




تمرين : حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ للدالة $g(x)$ وصف علاقة الرسم البياني لكل دالة $f(x)$ و $g(x)$

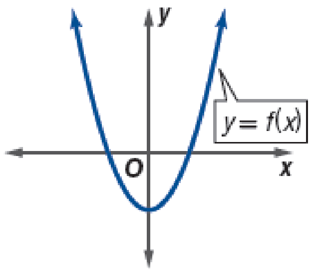
| وصف العلاقة الرسم البياني | الدالة الرئيسية $f(x)$ | الدالة $g(x)$ |
|---|---|---|
| متمدد رأسيا وإزاحة رأسيا لاسفل بمقدار 4 وحدات | $\lvert x \rvert$ | $3\lvert x \rvert - 4$ |
| | | $3\sqrt{x+8}$ |
| متمدد رأسيا بمقدار 4 وحدات وإزاحة افقيا لليسار بمقدار 3 وحدات | $\dfrac{1}{x}$ | |
| | | $\dfrac{15}{x+1}$ |
| | | $-2\lvert x+5 \rvert$ |
| | | $\dfrac{\sqrt{x+3}}{4}$ |

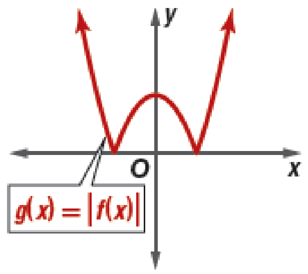
## التحويلات بالقيمة المطلقة

### مفهوم أساسي التحويلات بالقيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

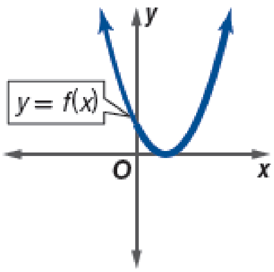
يعكس هذا التحويل كل جزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ تحت المحور الأفقي $x$ فيصبح فوق المحور الأفقي $x$.

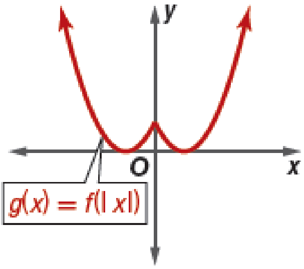



$g(x) = f(|x|)$

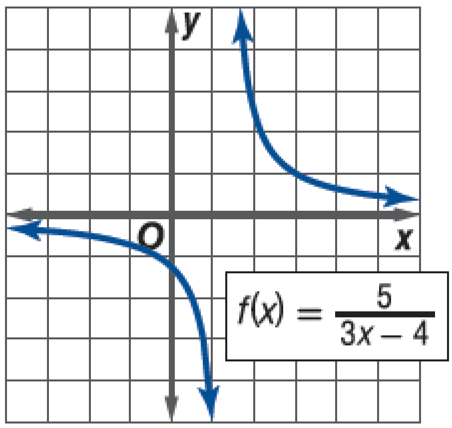
يستبدل هذا التحويل الجزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ لليسار من المحور الرأسي $y$ بانعكاس الجزء الموجود لليمين من المحور الرأسي $y$.



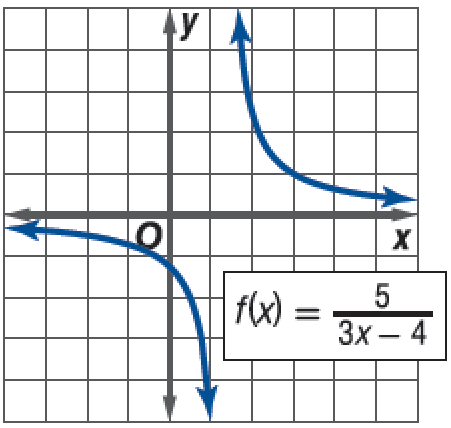




تمرين : استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = \dfrac{5}{3x - 4}$ لرسم الدوال

$g(x) = |f(x)|$




$g(x) = f(|x|)$

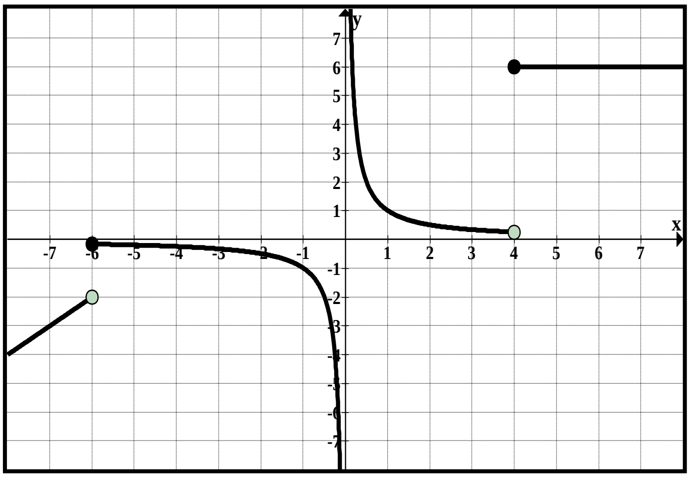


## رسم الدوال المتفرعة

تمرين : ارسم الدوال التالية

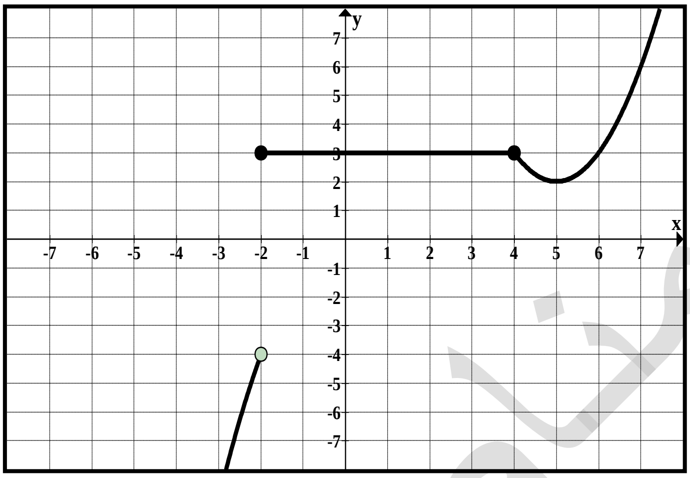
( 1

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & ,x<-6 \\ \dfrac{1}{x} & ,-6\le x<4 \\ 6 & ,x\ge 4 \end{cases}$$



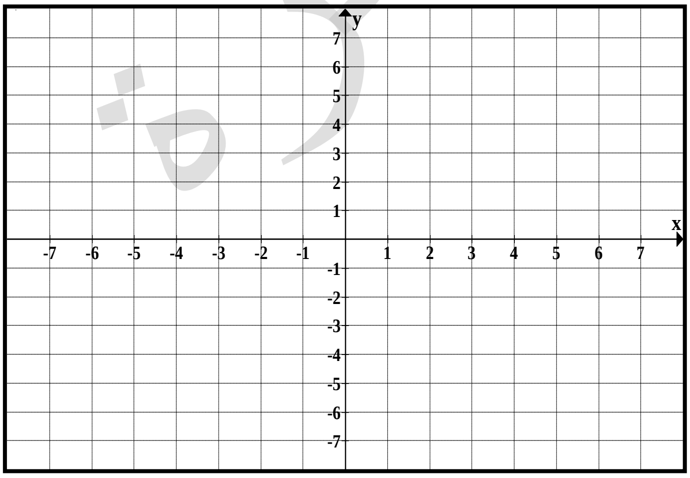
( 2

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & ,x<-2 \\ 3 & ,-2\le x<4 \\ (x-5)^2+2 & ,x\ge 4 \end{cases}$$

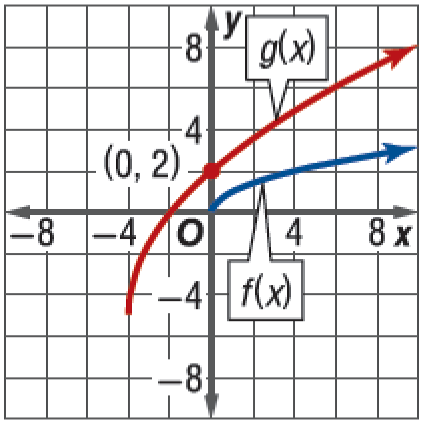


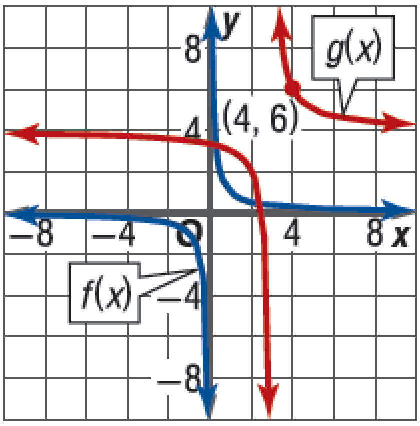
( 3

$$f(x)=\begin{cases} 4 & ,x<-5 \\ x^3 & ,-2\le x<2 \\ \sqrt{x+3} & ,x>3 \end{cases}$$

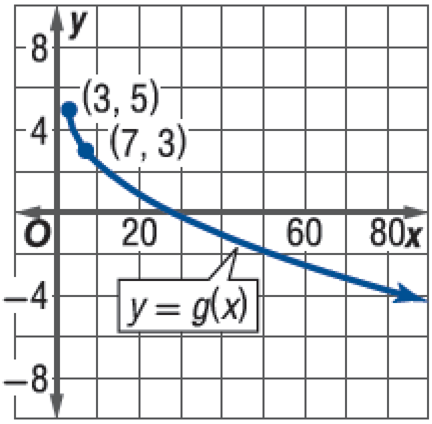


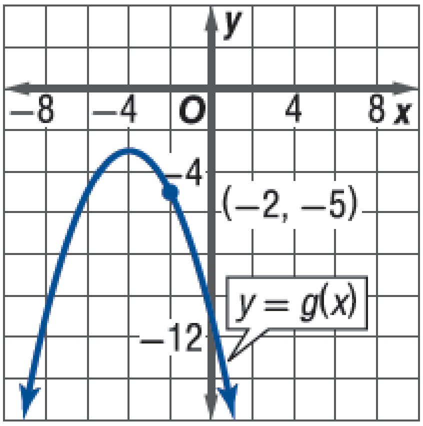
تمرين : اكتب معادلة لكل دالة $g(x)$




تمرين : حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ للدالة $g(x)$ وصف التحويلات على الدالة $f(x)$ لرسم الدالة $g(x)$




واجب : الكتاب صفحة 54 الدرس 5-1

## الدرس السادس :عمليات الدوال وتركيب الدوال

**1 العمليات مع الدوال** مثلما تستطيع دمج عددين حقيقيين باستخدام عملية الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة، تستطيع دمج دالتين.

### المفهوم الرئيسي العمليات على الدوال

افترض أن $f$ و$g$ دالتان لهما مجالين متقاطعين. إذن بالنسبة إلى كل القيم $x$الموجودة داخل التقاطع، يعد حاصل جمع $f$ و$g$ وحاصل ضربهما والفرق بينهما وناتج قسمتهما دوالاً جديدة تُعرف على النحو التالي.

**حاصل الجمع** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

**حاصل الطرح** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

**حاصل الضرب** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

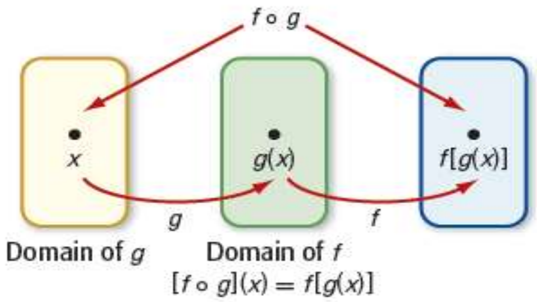
**ناتج القسمة** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

### المفهوم الرئيسي تركيب الدوال

يُحدد **تركيب** الدالة $f$ مع الدالة $g$ بواسطة

$$[f\circ g](x)=f[g(x)].$$

يتضمن مجال $f\circ g$ كل القيم على المحور $x$ في مجال $g$ التُعيّن إلى قيم $g(x)$ في مجال $f$ على النحو الموضح.




تمرين : أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f\bullet g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ لكل من $f(x), g(x)$ ،حدد مجال كل دالة جديدة

1) $f(x)=x^2+4 \quad , g(x)=\sqrt{x}$

2) $f(x)=x-4 \quad , g(x)=\sqrt{9-x^2}$

تمرين : في كل زوج من الدوال ، أوجد $(f \circ g)(6)$ , $(g \circ f)(x)$ , $(f \circ g)(x)$

1) $f(x) = 2x - 3 \quad , g(x) = 4x - 8$

2) $f(x) = 3 - x^2 \quad , g(x) = x^2 + x + 1$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad , g(x) = x^2 - 4$

تمرين : إذا كان $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = 4 - 5x$ ، أوجد ما يلي واذكر المجال:

أ) $(f+g)(x)$
ب) $(f-g)(x)$
ج) $(f \cdot g)(x)$
د) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تمرين : إذا كان $f(x) = 6x + 5$ و $g(x) = x^2 - 3x$ ، أوجد ما يلي:
أ) $[f \circ g](x)$
ب) $[g \circ f](x)$
ج) $(f o g)(-1)$
د) $(f o f)(2)$

تمرين : إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x - 2$ ، أوجد ما يلي واذكر المجال:

أ) $[f \circ g](x)$

ب) $[g \circ f](x)$

تمرين : إذا كان $g(x) = \sqrt{2-x}$ , $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد ما يلي واذكر المجال:

$1)\ (f\, o g)(x)$ $2)(g\, o f)(x)$ $3)(f\, o f)(x)$ $4)(g\, o g)(x)$

$1)(-\infty, 2]$ $2)[0,4]$ $3)[0,\infty)$ $4)[-2,2]$

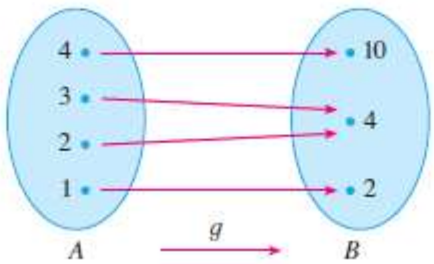
# الدرس السابع :العلاقات العكسية والدوال

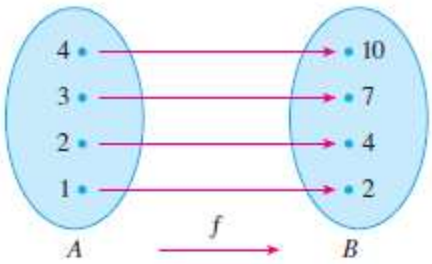
## الدالة التقابلية (واحد لواحد) (one-to-one):

**1 Definition** A function $f$ is called a **one-to-one function** if it never takes on the same value twice; that is,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{whenever } x_1 \neq x_2$$

المخطط السهمي للدالة f يبين انها دالة تقابلية بينما المخطط السهمي للدالة g يبين انها ليست دالة تقابلية




الجدول أ

| تذاكر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| التكلفة | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

الجدول ب

| التكلفة | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| التذاكر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## 1 الدوال العكسية

العلاقة الموضحة في الجدول A عبارة عن علاقة عكسية للعلاقة الموضحة في الجدول B. توجد **العلاقات العكسية** إذا كانت علاقة واحدة تتضمن $(b, a)$ حينما تتضمن العلاقة الأخرى $(a, b)$. عند التعبير عن دالة في صورة معادلة، يمكن إيجاد العلاقة العكسية لها عن طريق التبادل بين المتغيرات المستقلة والتابعة. لاحظ ما يلي.

**علاقة عكسية**

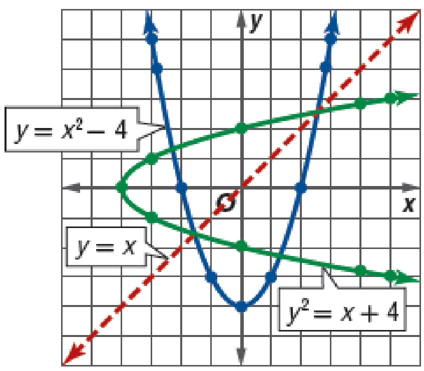
$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −3 | 5 |
| −2 | 0 |
| −1 | −3 |
| 0 | −4 |
| 1 | −3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 5 |

**العلاقة**

$y = x^2 - 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | −3 |
| 0 | −2 |
| −3 | −1 |
| −4 | 0 |
| −3 | 1 |
| 0 | 2 |
| 5 | 3 |

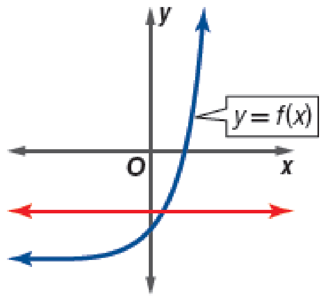



لاحظ أن هذه العلاقات العكسية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في الخط $y = x$. تكون هذه العلاقة حقيقية للرسومات البيانات المحددة لجميع العلاقات والعلاقات العكسية لها. نهتم أكثر *بالدوال* ذات العلاقات العكسية التي تمثل أيضًا دوالاً. إذا كانت العلاقة العكسية للدالة $f$ تمثل أيضًا دالة، فيطلق عليها اسم **الدالة العكسية** $f$ ويرمز لها بالرمز $f^{-1}$، وتقرأ على النحو التالي *f العكسية*.

## مفهوم أساسي اختبار الخط الأفقي

**الشرح** الدالة $f$ لها دالة عكسية $f^{-1}$ فقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة في نقطة واحدة على الأكثر.

**استخدم النماذج**




**مثال** نظرًا لعدم وجود مستقيم أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة $f$ لأكثر من مرة، تحتفظ الدالة العكسية $f^{-1}$ بوجودها.

**مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا.** (مثال 1)

.1 $f(x) = x^2 + 6x + 9$

.2 $f(x) = x^2 - 16x + 64$

.3 $f(x) = x^2 - 10x + 25$

.4 $f(x) = 3x - 8$

.5 $f(x) = \sqrt{2x}$

.6 $f(x) = 4$

.7 $f(x) = \sqrt{x + 4}$

.8 $f(x) = -4x^2 + 8$

.9 $f(x) = \dfrac{5}{x - 6}$

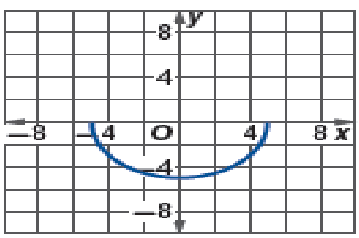
.10 $f(x) = \dfrac{8}{x + 2}$

.11 $f(x) = x^3 - 9$

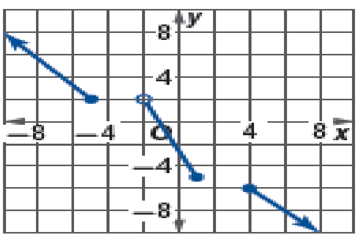
.12 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية.

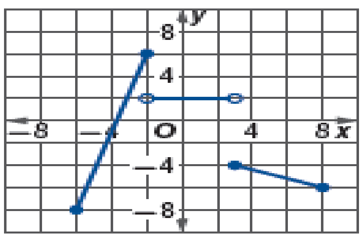
.46



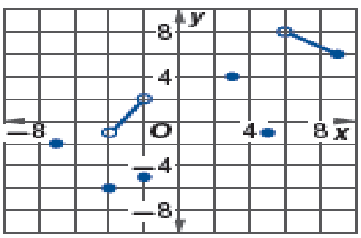
.47



.48



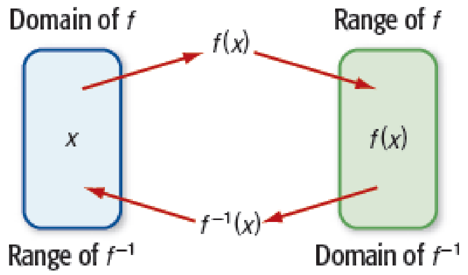
.49



## 2 إيجاد الدوال العكسية

إذا اجتازت إحدى الدوال اختبار المستقيم الأفقي، فعندئذٍ تعرف بأنها دالة **تقابلية**، لعدم تطابق أي قيمة على المحور $x$ مع أكثر من قيمة واحدة على المحور $y$ وعدم تطابق أي قيمة على المحور $y$ مع أكثر من قيمة واحدة على المحور $x$.

إذا كانت الدالة $f$ تقابلية، فسيكون لها دالة عكسية $f^{-1}$ بحيث يكون مجال $f$ متساويًا مع مدى $f^{-1}$، ويكون مدى $f$ متساويًا مع مجال $f^{-1}$.




لإيجاد دالة عكسية من خلال الجبر، اتبع الخطوات المذكورة أدناه.

### مفهوم أساسي إيجاد دالة عكسية

**الخطوة 1** حدد هل الدالة لها دالة عكسية عن طريق التحقق من معرفة إذا كانت تقابلية باستخدام اختبار الخط الأفقي.

**الخطوة 2** في معادلة الدالة $f(x)$، استبدل $f(x)$ بـ $y$ ثم بدّل بين $x$ و$y$.

**الخطوة 3** أوجد حل $y$ ثم استبدل $y$ بـ $f^{-1}(x)$ في المعادلة الجديدة.

**الخطوة 4** وضح أي قيود موجودة على مجال $f^{-1}$. ثم وضح أن مجال $f$ يتساوى مع مدى $f^{-1}$ ونطاق $f$ يتساوى مع مجال $f^{-1}$.

**تمرين : حدد ما إذا كانت $f$ لها دالة عكسية . إن كان لديها دالة عكسية ،فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.**

1) $f(x) = -16 + x^3$

2) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

**3)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

4) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{8-x}}$

5) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x-8}$

# مفهوم أساسي تركيبات الدوال العكسية

تكون الدالتان $g, f$ عكسيتين فقط اذا كان

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x$ لكل $x$ في مجال $g(x)$ و

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$ لكل $x$ في مجال $f(x)$

**تمرين : وضح من خلال الجبر أن** $f, g$

1) $f(x)=4x+9 \quad ,g(x)=\dfrac{x-9}{4}$

2) $f(x)=\dfrac{x-6}{x+2} \quad ,g(x)=\dfrac{2x+6}{1-x}$

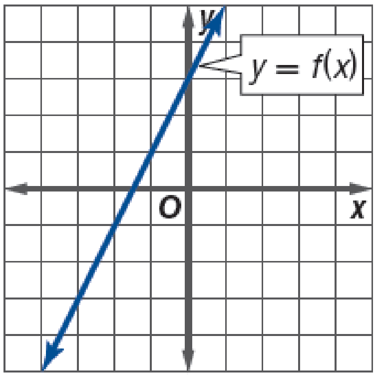
## إيجاد الدوال العكسية من خلال الرسم البياني

يصعب غالبًا إيجاد الدوال العكسية لمعظم الدوال التقابلية من خلال الجبر. ومع ذلك، يمكن رسم الدالة العكسية بيانيًا عن طريق عكس الرسم البياني للدالة الأصلية في الخط $y = x$.

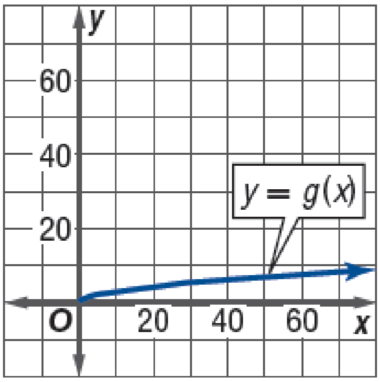
### تمارين موجهة

**استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانيًا.**

**4A.**




**4B.**




**تمرين :**

**54.** **درجة الحرارة** تُستخدم الصيغة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ لتحويل $x$ درجة مئوية إلى درجة فهرنهايت. لتحويل $x$ درجة فهرنهايت إلى كلفن، تُستخدم الصيغة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$.

**a.** أوجد $f^{-1}$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

**b.** وضح أن $f$ و$f^{-1}$ دالتان عكسيتان. ارسم كل دالة على شاشة حاسبة الرسوم البيانية نفسها.

**c.** أوجد $[k \circ f](x)$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

**d.** إذا كانت درجة الحرارة تساوي $60°C$ مئوية، فكم ستساوي درجة الحرارة بالكلفن؟