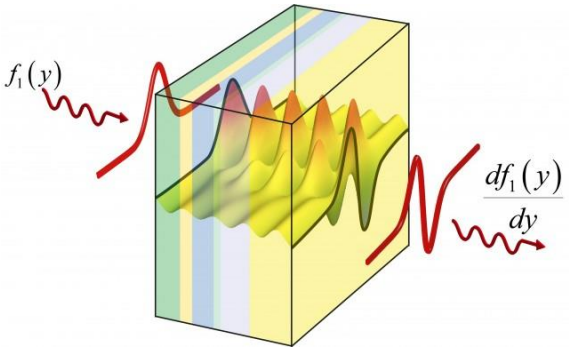
Math Warehouse




# الفصل الدراسي الثالث

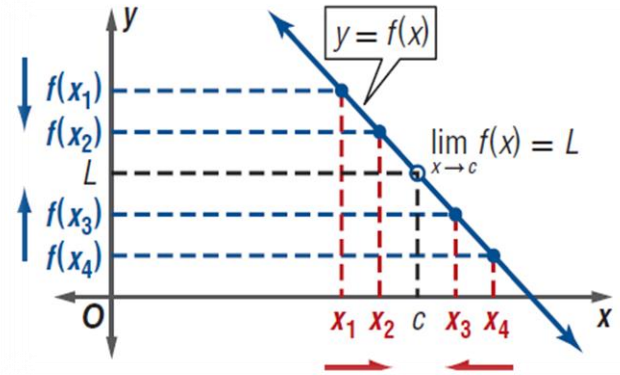
www.almanahj.com

# العام الدراسي 2016 – 2017 م

# الوحدة الثانية عشر

# النهايات و الأشتقاق

# الصف الثاني عشر العام




إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة $L$ بينما تصل $x$ لقيمة $c$ من كلا الجانبين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ هي $L$.

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ والتي تُقرأ كما يلي

نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت $x$ من $c$ هي $L$.

اذا كانت $y = f(x)$ دالة فان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجوده عندما يكون

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

**السؤال الأول** من خلال الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $y = f(x)$ أوجد النهايات الأتية :-

www.alnafalhj.com

1) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

2) $\lim_{x\to -2} f(x)$

3) $\lim_{x\to 0} f(x)$

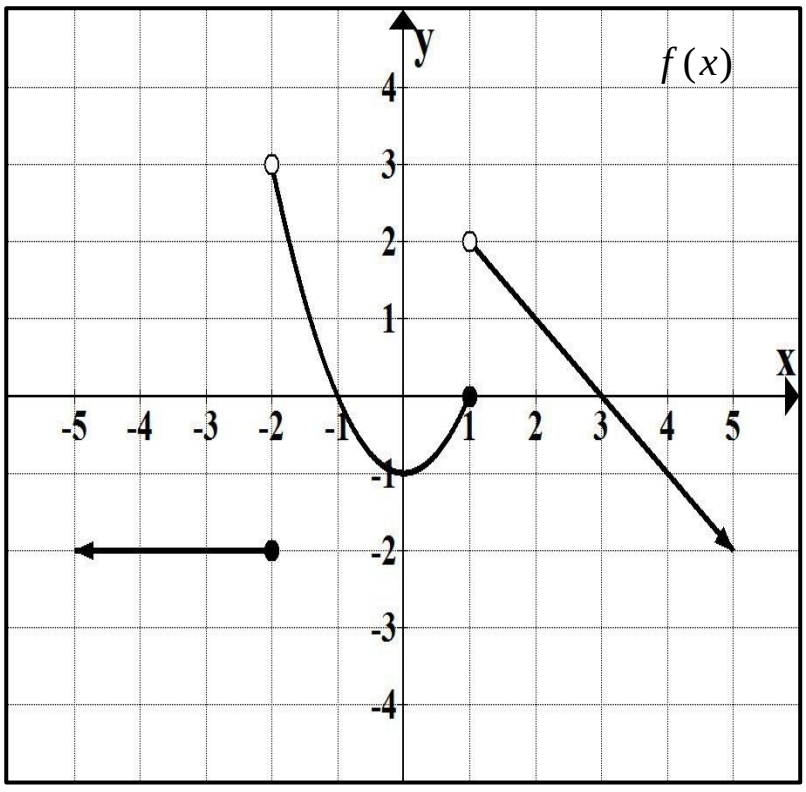
4) $\lim_{x\to 2} f(x)$

5) $\lim_{x\to -4} f(x)$

6) $\lim_{x\to 4} f(x)$

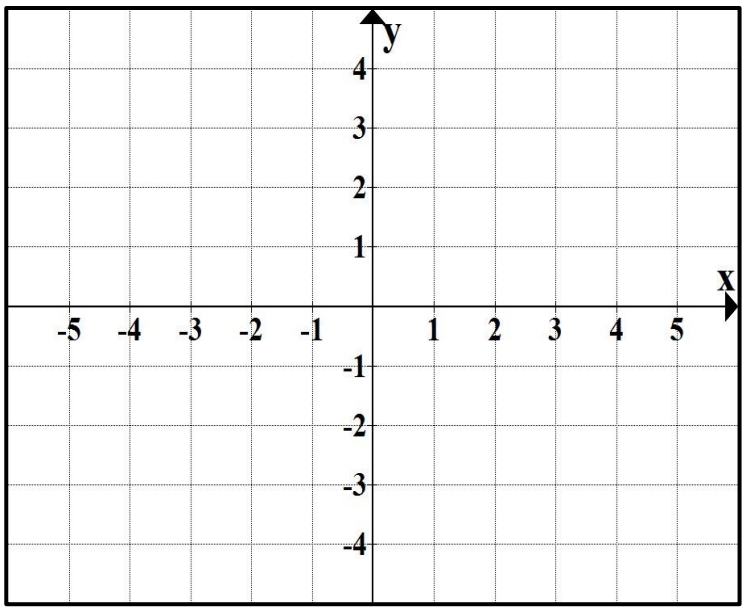
7) $\lim_{x\to 3} f(x)$

8) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$



**السؤال الثاني** ارسم بيان الدالة $f$ و من خلال الرسم البياني أوجد النهايات الآتية أن أمكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & : x\le 0 \\ 1+x & : x>0 \end{cases}$$




1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

**السؤال الثالث** استخدم الطريقة العددية( جداول التقريب) لحساب النهايات الآتية ان أمكن

www.almanahj.com

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

**السؤال الرابع** استخدم الطريقة العددية ( جداول التقريب) لحساب النهايات الآتية ان أمكن

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$

| $x$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{2x+1}$

| $x$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

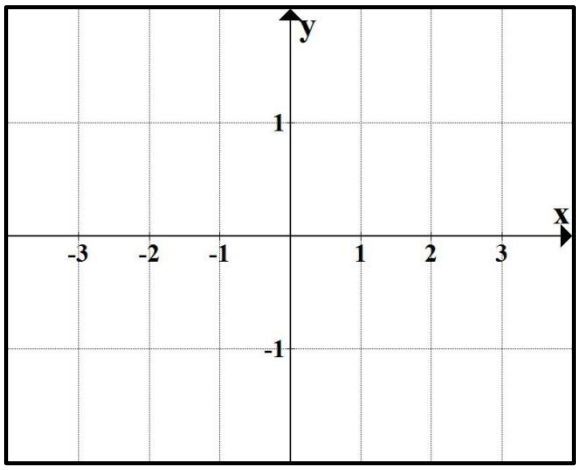
3) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{(x+3)^2}$

www.almanahj.com

| $x$ | | | | -3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

**السؤال الخامس** استخدم الطريقة العددية ( جداول التقريب) و البيانية لتصور وجود النهاية ام لا .

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$



## التعويض المباشر

**السؤال الأول** أوجد قيمة النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x\to -2}\ (x^2+5x+4)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\ (x^3-4x+1)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\ \dfrac{x^3+1}{3x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\ \dfrac{2x-6}{x^2-4}$

**السؤال الثاني** أوجد قيمة النهايات الآتية ان أمكن ذلك :

www.almanahj.com

1) $\lim\limits_{x\to 2}\ \sqrt[3]{x^2+4x-13}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\ \sqrt{6+3x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\ \sqrt{x^2-5}$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\ \sqrt{x+3}$

**السؤال الثالث** أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\ f(x)$ اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ,\ x\le 0\\ x^3-2 & ,\ x>0\end{cases}$

## الحالة التي يكون ناتج النهاية $\frac{0}{0}$

**السؤال الثالث** أوجد قيمة النهايات الآتية ان أمكن ذلك :

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}$

www.almanahj.com

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|3x|}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-x}{|x-2|}$

## الحالة التي يكون ناتج النهاية $\frac{number}{0}$

**السؤال الرابع** أوجد قيمة النهايات الآتية ان أمكن ذلك :

1) $\lim_{x\to 5} \frac{10}{x-5}$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{9}{(x-3)^2}$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 0^-} \cot x$

www.almanahj.com

**السؤال الخامس** أوجد النهايات الآتية أن أمكن ذلك :-

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+4x+1}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-8}{3x^2+4x-1}$

ميل المماس لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند $x=a$ هو $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

بشرط وجود النهاية

**السؤال الأول** أوجد ميل المماس $m$ لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند النقطة المعطاة

1) $y=x^2-3x$ , $x=2$

2) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ , $x=a$

www.almanahj.com

3) $y=\frac{2}{x+3}$ , $x=-1$

السرعة المتوسطة = متوسط التغير = ميل القاطع للمنحنى $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

عند $x = a$ السرعة اللحظية = معدل التغير = ميل المماس للمنحنى $= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**السؤال الأول** أوجد ميل القاطع لمنحنى الدالة $f(x) = 2+\cos x$ عند النقطتين $x = \pi$ , $x = -\pi$

**السؤال الثاني** تمثل الدالة $S(t) = \sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم ما بالقدم عند الزمن $t$ بالثواني أوجد :

السرعه المتجهه المتوسطة بين $t = 1$ , $t = 0$

www.almanahj.com

**السؤال الثالث** اذ كانت $s(t)$ تمثل دالة الازاحة لجسيم بالقدم حيث $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ أوجد معادلة

السرعه اللحظية , ثم أحسب السرعه عندما $t = 1$ ثانية

مشتقة الدالة $f$ عند النقطة أى $x$ تعرف كالأتى $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بشرط وجود النهاية

و يرمز للمشتقة الأولى للدالة بالرموز $\frac{df}{dx}$ , $y'$ , $\frac{dy}{dx}$ , $f'(x)$

**السؤال الأول** باستخدم تعريف المشتقة الأولى للدالة أوجد $f'(x)$ لكل مما يأتي :-

1) $y=5x+3$ , $x=2$

www.almanahj.com

1) $y=x^2-2x$ , $x=3$

## استخدام قواعد الأشتقاق

**السؤال الأول** أوجد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

1) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^{-4}+\sqrt{7}$

2) $y=x^2+\frac{4}{x^3}-\pi$

3) $y=x\sqrt{x}-3x^{-2}+4$

4) $y=\sqrt[5]{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}+9$

**السؤال الثاني** أوجد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

www.almanahj.com

1) $y=(x^3-2x)(3x^2+1)$

2) $y=(x^2-4)(1-3x)$

3) $y=\frac{x+4}{2x-3}$

4) $y=\frac{3x^2+4}{5x-3}$

**السؤال الثالث** اذا كانت $f(x)=x^2-4x$ . استخدم المشتقة لايجاد النقاط الحرجة للدالة $f$

ثم أوجد النقطتين العظمي و الصغرى للداله على الفترة $[-1,3]$

**السؤال الثاني** يمكن تمثيل الحرارة بدرجة الحرارة المئوية خلال فترة 24 ساعه بالمعادلة

$f(h)=-0.0036h^3-0.01h^2+2.04h+52$ حيث h هو عدد الساعات منذ منتصف الليل أوجد :

1) معادلة معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة

2) معدل التغير اللحظي عندما $h=2$

3) درجة الحرارة العظمى حيث $0\le h\le 24$

www.almanahj.com

**السؤال الثالث** أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y=\frac{4}{x-2}$ عند النقطة $(1,-2)$

**اذا كان n عددا صحيح موجبا و c ثابت فان:**

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

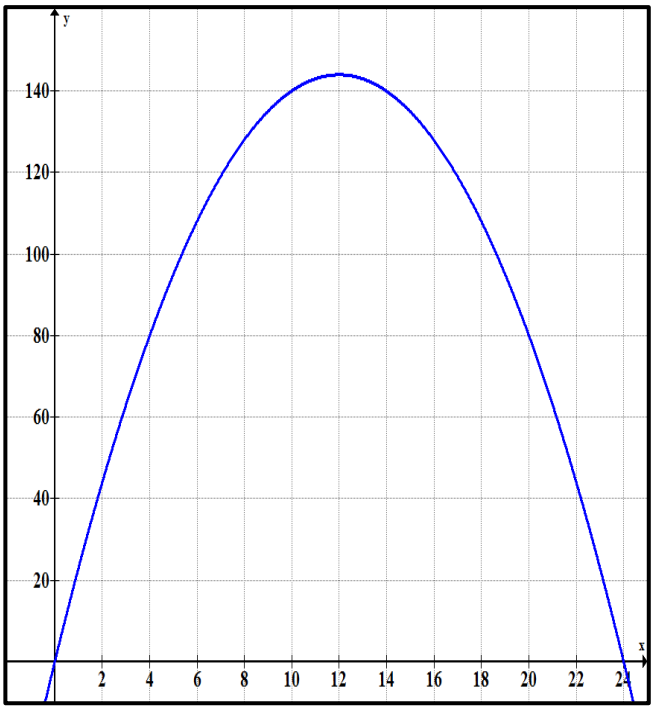
**لأى عددين ثابتين c , d**

$$\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

www.almanahj.com

**السؤال الأول** قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 24x - x^2$ و المحور $x$ على الفترة $[0, 24]$

باستعمال 6 مستطيلات على الترتيب .استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه



**السؤال الثاني** لتكن الدالة $y=\frac{12}{x}$ قرب المساحة بين منحى الدالة و المحور x على الفترة $[1,5]$

باستخدام نقاط النهاية اليسرى و مستطيلات عرضها وحدة واحدة

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور $x$ في الفترة $[a,b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_i=a+i\Delta x$$

www.almanahj.com

**السؤال الثالث** أستخدم النهايات لايجاد المساحة بين التمثيل البياني للدالة و المحور x بواسطة التكامل المحدد

$$\int_0^4 2x\,dx$$

**السؤال الرابع** أستخدم النهايات لايجاد المساحة بين التمثيل البياني للدالة و المحور x بواسطة التكامل المحدد

$$\int_0^2 (x^2+1)dx$$

**السؤال الخامس** أستخدم النهايات لايجاد المساحة بين التمثيل البياني للدالة و المحور x بواسطة التكامل المحدد

$$\int_0^1 8x^3 dx$$

www.almanahj.com

تسمى الدالة $F$ بالمشتقة العكسية للدالة $f$ على الفترة $I$ إذا تحقق الشرط $F'(x)=f(x)$

**السؤال الأول** أوجد المشتقة العكسية لكل من الدوال الاتية :

1) $2x$

2) $-3x^{-4}$

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

3) $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

www.almanahj.com

**السؤال الثاني** أوجد المشتقة العكسية لكل من الدوال الاتية :

1) $2x+3$

2) $3x^2+1$

**السؤال الثالث** أوجد المشتقة العكسية لكل مما يأتي ( أوجد التكاملات الآتية ) :-

1) $\int (3x^2+2x-4)\,dx$

2) $\int (x\sqrt{x}+\frac{4}{x^3})\,dx$

## النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل

اذا كانت $f$ دالة متصلة على $[a,b]$ , $F(x)$ هي مشتقة عكسية لـ $f(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**السؤال الأول** أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل

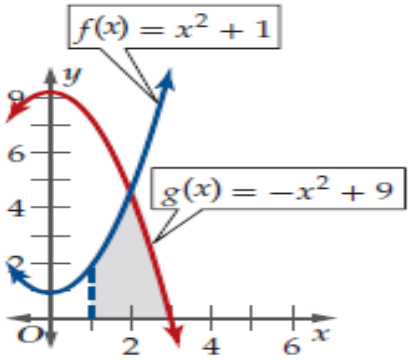
1) $\int_{-1}^{3} (2x-5)dx$

2) $\int_{0}^{3} (3x^2-2)dx$

www.almanahj.com

**السؤال الثاني** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $g(x), f(x)$

و المحور $x$ في الفترة $1 \le x \le 3$



قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$

2) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

3) $\lim_{x\to 7} \frac{6}{x-7}$

4) $\lim_{x\to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج $x$ جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب $x$ من المالانهاية.

b) فَسِّر الناتج في الفرع a.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$

7) $\lim_{x\to 9} (2x^3 - 12x + 3)$

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد $t$ يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to \infty} (x^2 - 7x + 2)$

10) $\lim_{x\to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$

12) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{25+x} - 4}{x}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$ ؟

A) $-\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{9}$

B) 0 D) غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$ , $(-5, 7)$ , $(-2, -8)$

15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$ , $(-1, -2)$ , $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

16) $y = (2x + 1)^2$ , $(-3, 25)$ , $(0, 1)$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$

18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$

19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$

21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$

22) $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$

23) $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$

24) $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية $c$ بالريال لإنتاج $x$ كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x) = 15 - 0.005x$ .

a) أوجد دالة تمثّل التكلفة الحقيقية .

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور $x$ ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$

27) $\int_3^8 10\, x^4\, dx$

28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$

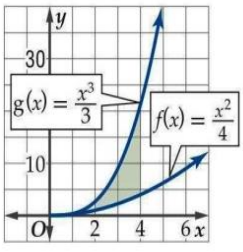
30) $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$

32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟




A) $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B) $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C) $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D) 16 وحدة مساحة

www.almanahj.com