الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

نسخة المعلم

2018 - 2019

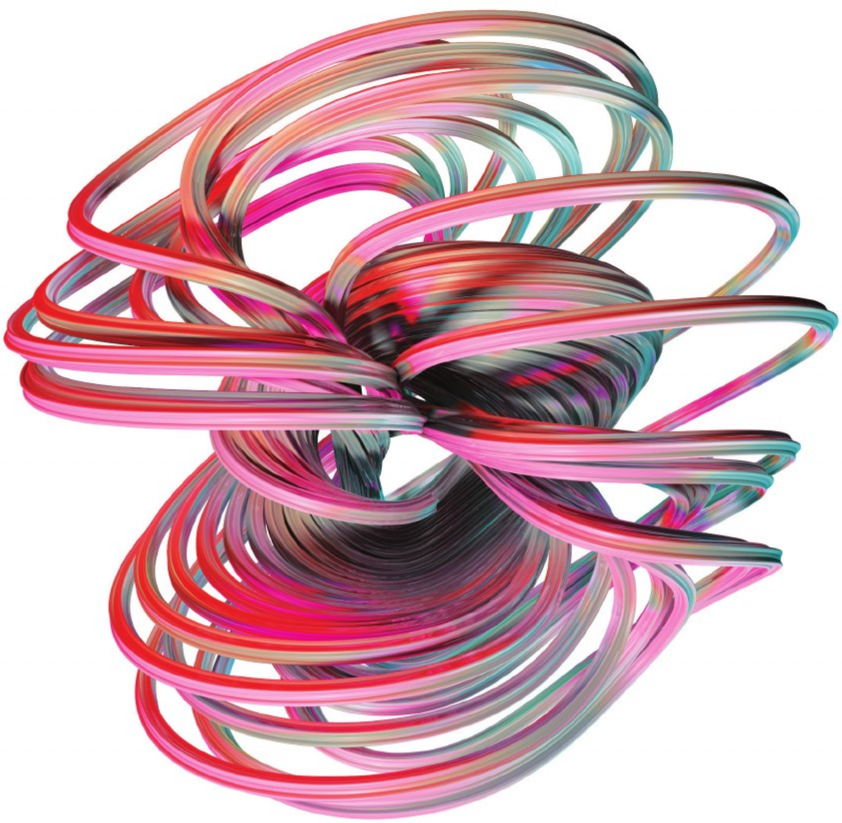
12

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة



McGraw Hill Education

الوحدة 11 التفـــاضل والتكـــامل

السابق

- تعرفت على النهايات ومعدلات التغير.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد قيمة الدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية.
  - إيجاد معدل التغير اللحظي.
  - إيجاد مشتقات الدوال كثيرة الحدود.
  - تقريب المساحة تحت المنحنى.
  - إيجاد عكس المشتقات واستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

لماذا؟

- **القفز بالمطاط** تُعد الأدوات الأساسية للتفاضل والتكامل والمشتقات والتكاملات مفيدة للغاية عند التعامل مع المعدلات غير الثابتة. تعتمد تجربة القفز بالمطاط على معدلات الهبوط والصعود المتغيرة، بالإضافة إلى التسارع المتغير وفق موضع الفرد أثناء القفز.

القراءة المسبقة استخدم اختبار منتصف الوحدة في كتابة معادلتين أو ثلاث معادلات حول الدروس الثلاثة الأولى التي سوف تساعدك على توقع ترتيب النصف الأول من الوحدة 11. **راجع عمل الطلاب.**

شجّع الطلاب على بدء دراسة الوحدة بقراءة كل درس مسبقًا، وعليهم التفكير في معلوماتهم الأساسية وتوقع المحتوى. أعطِ وقتًا للمجموعات لمناقشة ما يقرأونه وطرح الأسئلة. وركّز على أبرز سمات النص مثل عناوين الأقسام ومربعات "المفهوم الأساسي" و"ملخص المفهوم".

مشروع الوحدة

ما انخفض شيء إلا وارتفع

يستعين الطلاب بما تعلموه عن النهايات والمشتقات والتكاملات في اختبار الحركة والسرعات المختلفة للاعب القفز بالحبال.

- ابحث عن معلومات عن جسر يشتهر بممارسة لعبة القفز بالحبال أو عن متنزه يعقد فيه نشاط القفز بالحبال. واطلب من الطلاب البحث عن معلومات مشابهة.
- اطلب من الطلاب التعاون في مجموعات ثنائية لكتابة ملخص عن كيفية ارتباط النهايات بالقفز بالحبال.
- اطلب من الطلاب مناقشة الطرق المختلفة لاستكشاف معدلات انتقال لاعب القفز بالحبال في الأوقات المختلفة من عملية القفز. واطلب منهم أن يبحثوا عما إذا كان أوزان اللاعبين المختلفة قد تؤثر على سرعاتهم أم لا.
- اطلب من الطلاب التعاون معًا في مجموعات. وينبغي أن يستخدموا المعلومات التي جمعوها من خلال البحث لوضع دالة تمثل مسار لاعب القفز بالحبال. وينبغي أن يستخدموا الدالة في إيجاد سرعات اللاعب عند ثلاث نقاط مختلفة في القفزة.
- ينبغي أن تلخص كل مجموعة النتائج وتعرضها على الصف.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: تنص قاعدة القوة للمشتقات على أنه إذا كان $f(x) = x^n$، فستكون مشتقة الدالة $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال: إذا كان $f(x) = 3x^4$، فإن $f'(x) = 12x^3$.

اسأل: ما مشتقة $5x^2$؟ $10x$

إجابات إضافية

10. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\};\ y = 2$

11. $D = \{x \mid x \neq 10,\ x \in \mathbb{R}\};\ x = 10$

12. $D = \{x \mid x \neq -2,\ x \neq 4,\ x \in \mathbb{R}\};$ $x = -2,\ x = 4,\ y = 1$

13. $D = \{x \mid x \neq 2,\ x \neq -4,\ x \in \mathbb{R}\};$ $x = 2,\ y = 1$

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه

تدريب سريع

1-4. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي.

1. $q(x) = -\frac{2}{x}$
2. $f(x) = \frac{7}{x}$
3. $p(x) = \frac{x+5}{x-4}$
4. $m(x) = \frac{7-10x}{2x+7}$

5. **الإنشاد** يُمكن تمثيل متوسط تكلفة إنتاج عدد x من أسطوانات CD باستخدام $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. أوجد قيمة النهاية حيث x يقترب من اللا نهاية الموجبة. **1200**

أوجد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة.

6. $g(x) = 2x^2 + 4x - 1;\ [-2, 1]$ **2**
7. $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6;\ [-4, -1]$ **−17**
8. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 1;\ [-2, 4]$ **55**

9. **الكتب** يُمكن تمثيل ربح إنتاج عدد x من الكتب في الأسبوع باستخدام $C(x) = -2x^2 + 140x + 25$. أوجد متوسط معدل التغيير للتكلفة إذا تم إنتاج 50 كتابًا بدلاً من 25 كتابًا. **−AED 10**

أوجد مجال كل دالة ومعادلات خط التقارب الأفقي أو الرأسي، إن وجد. **10-13. انظر الهامش.**

10. $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$
11. $h(x) = \frac{2x^2-8}{x-10}$
12. $f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$
13. $g(x) = \frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية أو هندسية.

14. 3, 7, 11, 15, … **19, 23, 27, 31**
15. 8, 3, −2, −7, … **−12, −17, −22, −27**
16. 5, −1, −7, −13, … **−19, −25, −31, −37**
17. −4, 12, −36, 108, … **−324, 972, −2916, 8748**
18. 5, −10, 20, −40, … **80, −160, 320, −640**
19. −28, −21, −14, −7, **0, 7, 14, 21**

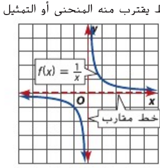
المفردات الجديدة

one-sided limit	نهاية أحادية الطرف
two-sided limit	نهاية ثنائية الطرف
direct substitution	تعويض مباشر
indeterminate form	صيغة غير مُعينة
tangent line	المماس
instantaneous rate of change	معدل التغير اللحظي
instantaneous velocity	سرعة لحظية
derivative	مشتقة
differentiation	تفاضل
differential equation	معادلة تفاضلية
differential operator	مشغل الفرق
regular partition	تجزئة منتظمة
definite integral	تكامل محدد
lower limit	حد سفلي
upper limit	حد علوي
right Riemann sum	مجموع ريمان يميني
integration	تكامل
antiderivative	عكس المشتقة
indefinite integral	تكامل غير محدود
Fundamental Theorem of Calculus	النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

مراجعة المصطلحات

النهاية هي قيمة وحيدة تقترب منها الدالة

خط التقارب هو خط يقترب منه المنحنى أو التمثيل البياني



الفجوات هي فواصل قابلة للحذف على التمثيل البياني لدالة، وتظهر هذه الفجوات عندما يكون لبسط الدالة ومقامها عوامل مشتركة

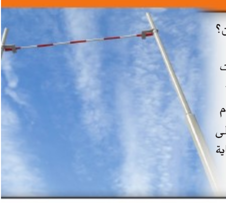
السؤال الأساسي

- كيف تُستخدم الرياضيات في وصف التغيير؟

الإجابة النموذجية: تُستخدم الرياضيات غالبًا في وصف التغيير في كمية بالنسبة إلى أخرى. فيمكن مثلاً استخدام المعادلة التربيعية في تمثيل التغيير في سرعة السيارة بالنسبة للزمن.

الدرس 1-11 تقدير النهايات بيانيًا

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
لقد قدرت النهايات لتحديد الاتصال والسلوك الطرفي بالدوال.	**1** تقدير نهايات الدوال عند نقطة محددة. **2** تقدير نهايات الدوال عند اللا نهاية.	هل توجد حدود للأرقام القياسية العالمية التي حققها الرياضيون؟ في دورة الألعاب الأولمبية بيكين عام 2008، فازت لاعبة روسيا يلينا ايزينبايفا بالميدالية الذهبية في القفز بالزانة، وحققت رقمًا قياسيًا عالميًا جديدًا وهو 5.05 m. تمثل الدالة اللوجستية $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213e^{-0.129x}}$، حيث x هو عدد الأعوام منذ عام 1900، الأرقام القياسية العالمية للقفز بالزانة للسيدات من 1996 إلى 2008. ويُمكنك استخدام نهاية الدالة عندما يقترب x من اللا نهاية لتوقع حد الارتفاع لهذا الحدث الذي يدخل ضمن ألعاب القوى.



المفردات الجديدة

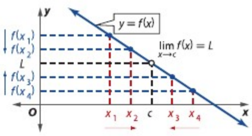
نهاية أحادية الطرف
one-sided limit
نهاية ثنائية الطرف
two-sided limit

1 تقدير النهاية عند نقطة

يتمحور حساب التفاضل والتكامل حول مسألتين مهمتين:

- إيجاد معادلة المماس بتمثيل بياني لدالة عند نقطة
- إيجاد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x.

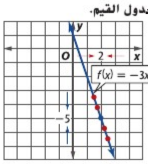
يلزم لحل هاتين المسألتين استيعاب مفهوم النهاية. تذكر أنه إذا كانت $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L عندما يقترب x من c من طرف واحد، فإن النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c تكون عبارة عن L، وتُكتب على صورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



يُمكنك تطبيق هذا الوصف لتقدير نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة لـــ c أو $\lim_{x \to c} f(x)$ باستخدام تمثيل بياني أو إنشاء جدول بالقيم.

مثال 1 تقدير النهاية عندما النهاية = $f(c)$

قدِّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.



التحليل بيانيًا

يبيّن التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = -3x + 1$ أنه كلما اقترب x من 2، تقترب قيمة الدالة المقابلة إلى -5. لذلك، يُمكننا تقدير أن $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ تساوي -5.

الدعم بالأرقام

أنشئ جدولاً لقيم f، مع اختيار قيم x التي تقترب من 2 باستخدام بعض القيم الأقل بمقدار بسيط عن 2 وبعض القيم الأكبر قليلاً من 2.

x تقترب من 2 ⟶ ⟵ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 2 من اليسار واليمين، تقترب $f(x)$ من -5. وهذا يدعم التحليل البياني.

تمرين موجّه

1A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للتمثيلات البيانية.

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

1A. $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ 16

1B. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$ 0

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-11 تقدير النهايات لتحديد الاتصال والسلوك الطرفي للدوال.

الدرس 1-11 تقدير نهايات الدوال عند نقطة محددة. تقدير نهايات الدوال عند اللا نهاية.

بعد الدرس 1-11 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

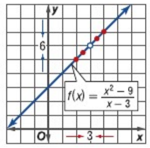
- ما خصائص التمثيل البياني لدالة النمو اللوجيستي؟ يزيد بمعدل متزايد، ثم يستقر عندما يقترب من النهاية.
- ما معاملات قيمة x في الدالة المُعطاة؟ حد أدنى = 96 وحد أعلى = 108

في المثال 1، $\lim_{x\to2}(-3x+1)$ هو نفس قيمة $f(2)$. إلا أن نهاية الدالة ليست دائمًا تساوي قيمة الدالة.

مثال 2 تقدير النهاية عندما النهاية (لا تساوي الصورة) $\neq f(c)$

قدّر $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

التحليل بيانيًا



يشير التمثيل البياني $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ إلى أنه كلما يقترب x من العدد 3، تقترب قيمة الدالة من 6. إذًا يُمكننا تقدير أن $\lim_{x\to2}\frac{x^2-9}{x-3}$ تساوي 6.

الدعم بالأرقام

أنشئ جدولاً للقيم، مع اختيار قيم x التي تقترب من 3 من طرف واحد.

x تقترب من 3 ⟵ ⟶ x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 3، تقترب $f(x)$ من 6. وهذا يدعم التحليل البياني.

> **تلميح تقني**
> **الجداول** للمساعدة في إنشاء جدول باستخدام حاسبة التمثيل البياني، أدخل الدالة باستخدام قائمة $\boxed{Y=}$. ثم استخدم دالة الجدول من خلال الضغط على $\boxed{2nd}$ [TABLE] للوصول إلى قيمة محددة. غيّر نقطة التغيير والفترة بالنسبة إلى x في الجدول عبر الضغط على $\boxed{2nd}$ [TBLSET] واضبط خيارات TBLSET.

تمرين موجّه **2A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للتمثيلات البيانية والجداول.**

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

2A. $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-4}$ **−0.25**

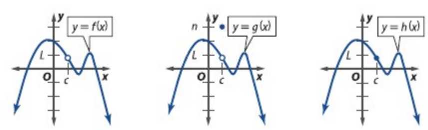
2B. $\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ **6**

في المثال 2، لاحظ أنه عندما يقترب x من 3 تساوي 6. إلا أن $6\neq f(3)$. في الحقيقة، $f(3)$ غير موجودة لأن التعبير $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرف عند $x=3$. ويوضح هذا نقطة مهمة حول النهايات.

المفهوم الأساسي استقلالية النهاية عن قيمة الدالة عند نقطة ما

الشرح لا تعتمد نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c.

الرموز



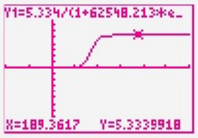
$\lim_{x\to c}h(x)=L$ $h(c)=L$

$\lim_{x\to c}g(x)=L$ $g(c)=n$

$\lim_{x\to c}f(x)=L$ $f(c)$ غير معرفة.

من المهم استيعاب أن النهاية لا تدور حول ما يحدث عند العدد الذي يقترب منه x. وبدلاً من ذلك، تدور النهاية حول ما يحدث *بجوار* أو *بالقرب* من هذا العدد.

- استخدم حاسبة التمثيل البياني. كيف يبدو شكل النهاية عندما تقترب x من اللا نهائية؟ 5.34



[−100, 300] scl: 50 by [−10, 10] scl: 1

1 تقدير النهايات عند نقطة

تبين **الأمثلة 1–5** كيفية استخدام التمثيل البياني في تقدير نهايات مختلف أنواع الدوال.

أمثلة إضافية

1 قدّر $\lim_{x\to-7}(4x+1)$ باستخدام التمثيل البياني. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم. −27؛ انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

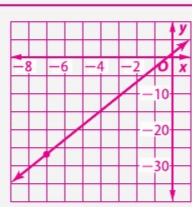
x	$f(x)$
−7.01	−27.04
−7.001	−27.004
−7	
−6.999	−26.996
−6.9	−26.6

2 قدّر $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$ باستخدام تمثيل بياني. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم. 8؛ انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

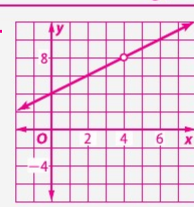
x	$f(x)$
3.99	7.99
3.999	7.999
4	
4.001	8.001
4.01	8.01

إجابات إضافية (أمثلة أخرى)

1.



2.



عند إيجاد الحدود باستخدام جدول أو تمثيل بياني، اطلعنا على قيمة $f(x)$ عندما يقترب x من c من الطرفين. ويُمكننا وصف سلوك التمثيل البياني من اليسار واليمين لـــ x بشكل أكثر دقة بدلالة **النهايات أحادية الطرف**.

المفهوم الأساسي النهايات أحادية الطرف

النهاية من الجهة اليمنى	النهاية من الجهة اليسرى
إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 عندما يقترب x من c من اليمين، فإن $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$، وتُقرأ *النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين تساوي L_2*	إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 عندما يقترب x من c من اليسار، فإن $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$، وتُقرأ *النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار تساوي L_1.*

قراءة في الرياضيات

النهايات أحادية الطرف يُمكن قراءة الرمز $\lim_{x \to c^-} f(x)$ في صورة *نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار*. ويُمكن أيضًا قراءة الرمز $\lim_{x \to c^+} f(x)$ في صورة *نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين*.

وباستخدام هذه التعريفات، يُمكننا التحديد بشكل أكثر دقة معنى وجود **دالة ثنائية الطرف**.

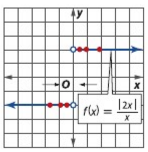
المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف و متساويتين. بمعنى أنه إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$، فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

مثال 3 تقدير النهايات أحادية الطرف وثنائية الطرف

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$

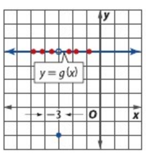


التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ يبيّن أن

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$ و $\lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$

بما أن النهايات من الجهتين اليسرى واليمنى للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من 0 ليست متساوية، فإن $\lim_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b. $\lim_{x \to -3^+} g(x)$ و $\lim_{x \to -3^-} g(x)$ و $\lim_{x \to -3} g(x)$، **عندما** $g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$



التمثيل البياني للدالة $g(x)$ يبيّن أن

$\lim_{x \to -3^-} g(x) = 4$ و $\lim_{x \to -3^+} g(x) = 4$.

بما أن النهايات من الجهتين اليسرى واليمنى للدالة $g(x)$ عندما يقترب x من 3 متماثلة، فإن $\lim_{x \to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

تمرين موجّه

3A. $\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$,

$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & . \ x < -2 \\ -x^2 & . \ x \geq -2 \end{cases}$

3B. $\lim_{x \to -2^-} g(x), \lim_{x \to -2^+} g(x), \lim_{x \to -2} g(x)$,

$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & . \ x < 1 \\ 2x + 1 & . \ x \geq 1 \end{cases}$

3A. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

3B. $\lim_{x \to -2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \to -2^+} g(x) = -4$, $\lim_{x \to -2} g(x)$ غير موجودة

مثال إضافي

3 قدّر كل نهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف. إن وجدت.

a. $\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$، حيث $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 , & x < 1 \\ x + 2 , & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$;

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$;

$\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجود

b. $\lim_{x \to 0^-} g(x), \lim_{x \to 0^+} g(x), \lim_{x \to 0} g(x)$، حيث

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 , & x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 , & x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$;

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -1$;

$\lim_{x \to 0} g(x) = -1$

مثال إضافي

4 قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ ∞

b. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}$ غير موجود

التركيز على محتوى الرياضيات

النهايات هناك تعريف رسمي للنهاية وينص على أن $\lim_{x\to p} f(x) = L$ توجد إذا كان يوجد لكل $0 < \varepsilon$ حقيقي $\delta > 0$ حقيقي بحيث $\delta > |x-p| > 0$ ينطوي على أن $|f(x) - L| < \varepsilon$.

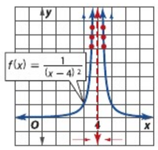
لا تعتمد قيمة النهاية على قيمة $f(p)$ ولكنها تعتمد على ما يحدث بجانب $f(p)$.

هناك طريقة أخرى تتسبب في عدم وجود النهاية، وذلك عندما لا تقترب قيمة $f(x)$، حيث تقترب x من c، من قيمة محددة نهائية. وبدلاً من ذلك تزداد قيمة $f(x)$ دون نهاية كما هو موضح في ∞، أو تنخفض دون نهاية كما هو موضح في $-\infty$.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ يبيّن أن

$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$ و $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$،

بما أن x قريبة من 4، فإن قيم دالة التمثيل البياني تزداد.

لا توجد أي نهاية أحادية الحد عند $x = 4$؛ لذلك يُمكننا استنتاج أن $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ غير موجودة. وبما أن الطرفين كذلك (كلاهما يؤولان إلى ∞. فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند 4 من خلال كتابة $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

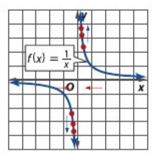
الدعم بالأرقام

x تقترب من 4 ⟵ ⟶ x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10,000	1,000,000		1,000,000	10,000	100

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 4 من اليسار واليمين، تزداد $f(x)$ دون نهاية. وهذا يدعم تحليلنا البياني.

b. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ يبيّن أن

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$،

وذلك لأنه عندما يقترب x من 0، فإن قيم الدالة من اليسار تتناقص وتزداد قيم الدالة من اليمين.

لا توجد أي نهاية أحادية الحد عند $x = 0$؛ لذلك، $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة. في هذه الحالة، لا يُمكننا وصف سلوك $f(x)$ عند 0 باستخدام تعبير وحيد لأن هناك اختلافًا في السلوكيات غير المحدودة من اليسار واليمين.

الدعم بالأرقام

x تقترب من 0 ⟵ ⟶ x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 0 من اليسار واليمين. تقل $f(x)$ وتزداد دون نهاية، على التوالي. وهذا يدعم تحليلنا البياني.

تمرين موجّه

4A. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$ **غير موجودة**

4B. $\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^4}$ $\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^4} = -\infty$

قراءة في الرياضيات

دون نهاية حتى تزداد أو تقل $f(x)$ دون *نهاية* حيث $x \to c$ يعني أنه من خلال اختيار قيمة x بشكل اعتباطي قريبة من c، فإنه يُمكنك الحصول على قيمة الدالة التي لها قيمة مطلقة جيدة كما تريد. كلما تم اختيار قيمة x من c، زادت قيمة $|f(x)|$.

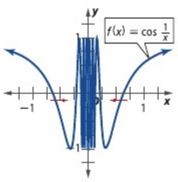
انتبه!

نهايات لانهائية من المهم استيعاب أن التعبيرين $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ عبارة عن وصف لسبب عدم وجود هاتين النهايتين. ولا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ أعدادًا حقيقية.

يُمكن للنهاية كذلك ألا تكون موجودة إذا كانت، بدلاً من الاقتراب من قيمة محددة $f(x)$، تتذبذب أو ترتد ذهابًا وإيابًا بين قيمتين.

مثال 5 النهايات والسلوك المتذبذب

قدّر $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$، إذا كانت موجودة.

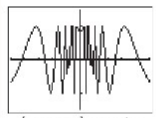


يبيّن التمثيل البياني $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ أنه كلما اقترب x من 0، تتذبذب قيم الدالة بين −1 و 1. وهذا يعني أنه بالنسبة إلى قيم x_1 القريبة من 0 حيث إن $f(x_1) = 1$، يُمكنك دائمًا إيجاد قيمة x_2 القريبة من 0 حيث إن $f(x_2) = -1$. وبالمثل، بالنسبة لقيمة x_3 القريبة من 0 حيث إن $f(x_3) = -1$، يُمكنك دائمًا إيجاد قيمة x_4 القريبة من 0 حيث إن $f(x_4) = 1$.

إذًا، $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$، غير موجودة.

تلميح تقني

التذبذبات اللانهائية قد تكون ميزة TRACE على حاسبة التمثيل البياني مفيدة في تقدير النهايات. إلا أنه لا يُمكنك دائمًا الثقة فيما تخبرك به حاسبة التمثيل البياني. في حالة الدالة بالمثال 5، تستخدم الحاسبة عددًا *نهائيًا* من النقاط لإنتاج التمثيل البياني، لكن عند الاقتراب من 0، يكون لدى هذه الدالة تذبذبات *لانهائية*.



[−0.25, 0.25] scl: 0.05 by [−1.5, 1.5] scl: 1

تمرين موجّه

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

5A. $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة

5B. $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$ 0

فيما يلي ملخص للأسباب الثلاثة الأشهر في أن نهاية الدالة غير موجودة عند نقطة ما.

المفهوم الأساسي السبب في عدم وجود نهايات عند نقطة ما

تكون نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c غير موجودة إذا كان:

نهاية $f(x)$من اليسار ومن اليمين لـــ C من قيم مختلفة

- قيم $f(x)$ تزداد أو تقل دون نهاية من اليسار و/أو اليمين بالنسبة إلى c
- قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين محددتين.

2 تقدير النهاية عند اللانهاية

لغاية الأن، تم استخدام النهايات لوصف سلوك الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة c. تعلمت أنه يُمكن كذلك استخدام النهايات في وصف السلوك الطرفي للدالة، بمعنى شرح سلوك الدالة عندما تزداد x أو تقل دون نهاية. وفيما يلي ملخص رموز مثل هذه النهايات.

المفهوم الأساسي النهايات عند اللانهاية

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 حيث x تزداد، فإن $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$. وتُقرأ *نهاية* $f(x)$ *عندما يقترب* x *من اللانهاية تساوي* L_1.
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 حيث x تقل، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$. وتُقرأ *نهاية* $f(x)$ *عندما يقترب* x *من اللانهاية السالبة تساوي* L_2.

تعلمت أن السلوك غير المحدود الذي يُمكن وصفه عبر ∞ أو $-\infty$ يوضّح موقع خط التقارب الرأسي. وتعلمت كذلك وجود نهاية عند اللا نهاية توضح موقع خط التقارب الأفقي. بمعنى أنه،

- $x = c$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني لـــ $f(x)$ إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.
- $y = c$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني لـــ $f(x)$ إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

مثال إضافي

5 قدّر $\lim_{x \to 0} (x \sin x)$، إذا كانت موجودة. 0

2 تقدير النهايات عند اللا نهائية

يبين **المثالان 6 و 7** كيفية تقدير النهاية عندما تقترب من اللا نهائية الموجبة أو السالبة.

مثال إضافي

6 قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 1

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)$ -1

c. $\lim_{x\to\infty}\cos x$ غير موجود

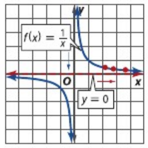
إرشاد للمعلمين الجدد

خط التقارب يكون للدالة سلوك بلا حد ويمكن وصفه بـ $\pm\infty$ عند خط التقارب الرأسي. ويكون للدالة ذات خط التقارب الأفقي عند $y=c$ النهاية c عندما تقترب من ∞ أو $-\infty$.

مثال 6 تقدير النهايات عند اللا نهاية

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x)=\frac{1}{x}$ يبيّن أن $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. عندما يزداد x، فإن $f(x)$ يقترب من 0.

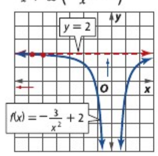
الدعم بالأرقام

x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10,000	100,000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تزداد x بقدر كبير، فإن $f(x)$ يقترب من 0. ✔

b. $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$



التحليل البياني التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ يبيّن أن $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$. عندما يزداد x، فإن $f(x)$ تقترب من 2.

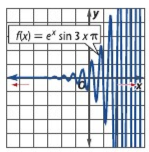
الدعم بالأرقام

x تقترب من $-\infty$

x	$-100{,}000$	$-10{,}000$	-1000	-100	-10
$f(x)$	1.99999	1.99999	1.99999	1.9997	1.97

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقل x، فإن $f(x)$ تقترب من 2.

c. $\lim_{x\to-\infty}e^x\sin 3\pi x$ و $\lim_{x\to\infty}e^x\sin 3\pi x$



التحليل البياني التمثيل البياني لـ $f(x)=e^x\sin 3x\pi$ يبيّن أن $\lim_{x\to-\infty}e^x\sin 3\pi x=0$. عندما تقل x، فإن $f(x)$ تتذبذب لكنها تميل تجاه 0.

يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty}e^x\sin 3\pi x$ غير موجود. عندما تزداد x، فإن $f(x)$ تتذبذب بين القيم المتزايدة دائمًا.

الدعم بالأرقام

x تقترب من $-\infty$ — x تقترب من ∞

x	-100	-50	-10	0	10	50	100
$f(x)$	3×10^{-44}	-2.0×10^{-22}	-0.00005	0	21966	4.8×10^{21}	-2.0×10^{43}

يبيّن نمط المخرجات إلى أنه عندما تقل x، فإن $f(x)$ تقترب من 0. وعندما تزداد x، فإن $f(x)$ تتذبذب.

تمرين موجّه

6A. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ -3

6B. $\lim_{x\to-\infty}e^x$ 0

6C. $\lim_{x\to\infty}\sin x$ غير موجودة

نصيحة دراسية

خطوط التقارب تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب عند $y=0$، بينما تشير النهاية في المثال 6b إلى وجود خط تقارب عند $y=2$.

انتبه!

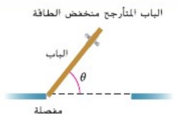
السلوك المتذبذب لا تفرض أنه بمجرد أن الدالة $f(x)$ تظهر سلوكًا متذبذبًا، فلن يكون لها نهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. إذا حدث التذبذب بين قيمتين ثابتتين أو كان محدودًا، فإن النهاية تكون غير موجودة. أما إذا كانت الذبذبة تقل وتقترب من قيمة ثابتة، فتكون النهاية موجودة.

671

يُمكنك استخدام الطريقتين البيانية والعددية لتقدير النهايات عند اللانهاية في عدة مواقف من الحياة اليومية.

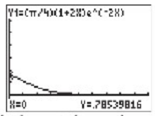
مثال 7 من الحياة اليومية تقدير النهاية عند اللانهاية

a. الهيدروليكا يستخدم الباب المتأرجح منخفض الطاقة زنبركًا لغلق الباب وآلية هيدروليكية لتخفيف أو الإبطاء من حركة الباب. إذا تم فتح الباب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تحرر من هذا الوضع، فإنه يُمكن إيجاد الزاوية θ لهذا الباب t بعد مرور ثوانٍ من تحريره باستخدام $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)e^{-2t}$. قدرّ $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$، إن كانت موجودة، وفسّر النتيجة.



تقدير النهاية

مثّل بيانيًا $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)e^{-2t}$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني. يشير التمثيل البياني إلى أنه عند $t = 0$، يكون $\theta(t) \approx 0.785$ أو حوالي $\frac{\pi}{4}$. لاحظ أنه كلما انخفض t، تميل قيم الدالة للتمثيل البياني تجاه 0. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$ تساوي 0.



[0, 5] scl: 0.5 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

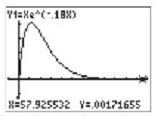
تفسير النتيجة

تشير دالة الصفر في هذا الموقف إلى أن الزاوية التي يصنعها الباب وهو في وضعية الغلق تميل إلى قياس 0 راديان. بمعنى أنه بعد مرور ثوانٍ على تحرير الباب، فإنه يقترب أكثر فأكثر من الإغلاق التام.

b. الدواء يُمكن إيجاد تركيز دواء ما بالمليجرامات على الملّيلتر في مجرى دم المريض بعد مرور عدد t من الساعات من تناول المريض له باستخدام $C(t) = Ate^{-0.18t}$، حيث A هو عبارة عن ثابت موجب. قدّر $\lim_{t\to\infty} C(t)$، إذا كانت موجودة، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

تقدير النهاية

مثّل الدالة بيانيًا $C_1(t) = te^{-0.18t}$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني. يشير التمثيل البياني إلى أن كلما ازداد t، تميل قيم الدالة الخاصة بالتمثيل البياني تجاه 0. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} C_1(t)$ تساوي 0.



[−5, 60] scl: 5 by [−1, 2.5] scl: 0.5

نظرًا لأن A عبارة عن ثابت موجب، فإن التمثيل البياني للدالة $C(t) = Ate^{-0.18t}$ سيكون هو التمثيل البياني للدالة $C_1(t) = te^{-0.18t}$ بعد توسعه رأسيًا بالعامل A لكنه سيستمر في الميل تجاه 0 كلما ازداد t دون نهاية. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} C(t)$ تساوي أيضًا 0.

تفسير النتيجة

تشير نهاية الصفر في هذا الموقف إلى أن جميع عناصر الدواء سوف تختفي في النهاية من مجرى دم المريض.

تمرين موجّه

7A. الكهرباء يُمكن تمثيل الفولت النموذجي V الذي توفره المنافذ الكهربية في الولايات المتحدة باستخدام الدالة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$. حيث t هو الزمن بالثانية. قدّر $\lim_{t\to\infty} V(t)$. إن كانت موجودة وفسّر النتيجة.

7B. الأحياء يقف ذباب الفاكهة على زجاجة ربع لتر من الحليب وقطعة فاكهة ونبات الخميرة. ويُمكن إيجاد تعداد ذباب الفاكهة بعد مرور t من الأيام باستخدام $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$. قدّر $\lim_{t\to\infty} P(t)$، إن كانت موجودة، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

7A. $\lim_{t\to\infty} V(t)$ غير موجودة لأنه كلما زاد t، فإن ارتفاع التمثيل البياني يتذبذب بين -165 و 165. وبمرور الوقت، سيتذبذب فولت المنفذ الكهربي بين -165 و 165.

7B. $\lim_{t\to\infty} P(t) = 230$. بمرور الوقت، سيقترب تعداد ذباب الفاكهة من الحد الأقصى، وهو 230 ذبابة.

الربط بالحياة اليومية

محرك الباب المتأرجح هو عبارة عن أداة تفتح الباب وتغلقه بسرعة مخفضة لمساعدة من يستخدمون الكراسي المتحركة.

مثال إضافي

7 a. البكتيريا يمكن تمثيل نمو نوع معين من البكتيريا بدالة النمو اللوجيستي $B(t) = \frac{675}{1 + 135e^{-0.6t}}$، حيث يمثل t الزمن بالساعات. قدّر $\lim_{t\to\infty} B(t)$، إن وجدت، وفسر نتيجتك. $\lim_{t\to\infty} B(t) = 675$؛ على مدار الوقت يقترب عدد البكتيريا من 675 بحد أقصى.

b. تعداد السكان يمكن الحصول على تعداد إحدى المدن من المعادلة $P(t) = 0.7(1.1)^t$، حيث t هو الزمن بالأعوام. قدّر $\lim_{t\to\infty} P(t)$، إن وجدت، وفسر نتيجتك. $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$؛ إذا استمر النمط، سيزيد تعداد السكان بلا حد على مدار الزمن.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية استخدم حبلاً أو شريطًا لاصقًا في رسم مستوى إحداثي على مساحة كبيرة من الأرض. واطلب من أحد الطلاب أن يقف عند نقطة الأصل المحددة مسبقًا. واطلب من عدة طلاب آخرين أن يكَونوا منحنىً على المستوى الإحداثي بحيث يمثل دالة. اطلب من الطلاب تحديد نهاية الدالة مستعينين بمواقعهم باعتبارها قيم x. اطلب من الطلاب تحديد قيم x الجديدة إذا كانوا سيبتعدون عن المستقيم. اطلب من الطلاب المقارنة بين النتائج.

التمارين

1–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للتمثيلات البيانية والجداول.

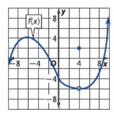
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم. (المثالان 1 و 2)

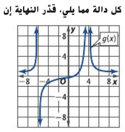
1. $\lim_{x\to 5}(4x-10)$ **10**
2. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$ **12**
3. $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-15)$ **−15**
4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ **−3**
5. $\lim_{x\to 3}(2x^3-10x+1)$ **25**
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x^2+x}$ **1**
7. $\lim_{x\to 0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$ **0**
8. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **4**
9. $\lim_{x\to 6}(x+\sin x)$ **5.72**
10. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$ **−9**

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت. (المثال 3)

11. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x}$ **0**
12. $\lim_{x\to 0^-}\frac{|4x|}{x}$ **−4**
13. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}$ **0**
14. $\lim_{x\to 9^+}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$ **−0.1667**
15. $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ **1**
16. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$ **0**
17. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$ **غير موجودة**
18. $\lim_{x\to -7}\frac{x^2-x-56}{x+7}$ **−15**
19. $\lim_{x\to 0^-}(\sqrt{-x}-7)$ **−7**
20. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ **10**
21. $\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-x-12}{|x-4|}$ **7**
22. $\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}+2x+3)$ **3**
23. $\lim_{x\to 0}\frac{|3x|}{2x}$ **غير موجودة**
24. $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$ **غير موجودة**
25. $\lim_{x\to 0}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\ge 0\end{cases}$ **0**
26. $\lim_{x\to 3}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}3x, & x<3\\ x^2, & x\ge 3\end{cases}$ **9**
27. $\lim_{x\to 0}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}x-5, & x<0\\ x^2+5, & x\ge 0\end{cases}$ **غير موجودة**
28. $\lim_{x\to 0}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x<0\\ \frac{2x}{x}, & x\ge 0\end{cases}$ **2**

في كل دالة مما يلي، قدّر النهاية إن وجدت. (الأمثلة 1-4)



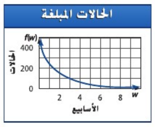


29. $\lim_{x\to -6}f(x)$ **4**
30. $\lim_{x\to 4}f(x)$ **−6**
31. $\lim_{x\to 4}g(x)$ **∞**
32. $\lim_{x\to -6}g(x)$ **غير موجودة**

قدّر كل نهاية، إن وجدت. (الأمثلة 4-6)

33. $\lim_{x\to -4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$ **−∞**
34. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$ **∞**
35. $\lim_{x\to 4}\frac{|x|}{x-4}$ **غير موجودة**
36. $\lim_{x\to \infty}e^{2x-5}$ **∞**
37. $\lim_{x\to 6}\frac{5}{(x-6)^2}$ **∞**
38. $\lim_{x\to -\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$ **−∞**
39. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$ **0**
40. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+9x+20}{x+3}$ **غير موجودة**
41. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x-4}{9x+3}$ $\frac{1}{3}$
42. $\lim_{x\to \infty}x\cos x$ **غير موجودة**
43. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$ **−1**
44. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$ **غير موجودة**
45. $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}$ **0**
46. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-13}{2x+8}$ **2**

47. **الدواء** تم حقن أشخاص بلقاح لمكافحة عدوى بسيطة. موضح أدناه عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها خلال عدد w من الأسابيع بعد حقن اللقاح. (مثال 7) **a–b. انظر الهامش.**



a. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1}f(w)$ و $\lim_{w\to 3}f(w)$.

b. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty}f(w)$، إن وجدت، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

48. **ألعاب القوى** تمثّل الدالة اللوجيستية $f(x)=\frac{5.334}{1+62548.213e^{-0.129x}}$، حيث x هو عدد الأعوام منذ 1900، ارتفاعات الأرقام القياسية العالمية بالمتر لمسابقة القفز بالزانة للسيدات من 1996 إلى 2008. (مثال 7) **انظر الهامش.**

a. مثّل الدالة بيانيًا عند $96 \le x \le 196$.

b. قدّر $\lim_{x\to \infty}\frac{5.334}{1+62548.213e^{-0.129x}}$، إن وجدت. **≈5.334**

c. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وارتفاعات الأرقام القياسية العالمية. **انظر الهامش.**

49. **فيديو على الإنترنت** أنشئ مجموعة من الأصدقاء مقطع فيديو ساخر، وقاموا بنشره عبر الإنترنت. وذاع سيط هذا المقطع كثيرًا بمرور الوقت. ويُمكن تقدير عدد الأشخاص p الذين شاهدوا هذا المقطع باستخدام $p(d)=12(1.25012)^{d}-12$، حيث d هو عدد الأيام منذ نشر المقطع لأول مرة. (مثال 7)

a. مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \le d \le 20$. **a–c. انظر الهامش.**

b. قدّر عدد الأشخاص الذين شاهدوا مقطع الفيديو بنهاية كلٍ من اليوم الخامس واليوم العاشر واليوم العشرين. كم عدد الأشخاص الذين سيشاهدون مقطع الفيديو بعد مرور شهرين؟ (استخدم $d = 60$).

c. قدّر $\lim_{d\to \infty}p(d)$، إن وجدت، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-52 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

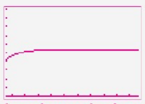
خطأ شائع ذكّر الطلاب في التمارين 12-16 أنه قد توجد النهاية عند c من أي من الجانبين عندما لا تكون الدالة معرفة عند c، أو عندما تكون النهاية غير معرفة من الجانبين.

إجابات إضافية

47a. $\lim_{w\to 1}f(w)=250;\ \lim_{w\to 3}f(w)=100$

47b. 0؛ الإجابة النموذجية: سيقضي التطعيم في النهاية على جميع حالات العدوى.

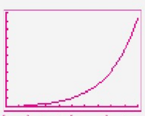
48a.



[96, 196] scl: 10 by [0, 10] scl: 1

48c. تبين نهاية الدالة أن الرقم القياسي للسيدات في القفز بالزانة يقترب من 5.334 m ولكنه لا يتجاوز ذلك.

49a.



[0, 20] scl: 2 by [0, 1100] scl: 100

49b. 25، 100، 1031؛ 7,880,000 شخصًا تقريبًا شاهدوا الفيديو بعد شهرين.

49c. ∞؛ الإجابة النموذجية: تبين النهاية عددًا لا نهائيًا من الأشخاص الذين شاهدوا الفيديو.

50. **التكنولوجيا** ازداد أعمار أصحاب الهواتف المحمولة الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا منذ تسعينيات القرن الماضي. ويُمكن استخدام المتتالية $a_n = 64.39(0.82605)^n + 1$ لتقدير عدد الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا لكل هاتف محمول، حيث n يمثل الأعوام منذ عام 1993. (مثال 7)

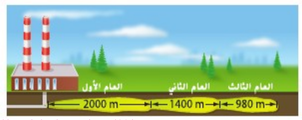
a. مثّل الدالة للأعوام من 1993 وحتى 2011. **a,d. انظر الهامش.**

b. استخدم التمثيل البياني لتقدير عدد الأشخاص لكل هاتف محمول للأعوام 1998، و2007، و2011. **25.77; 5.44; 3.07**

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{n\to\infty} a_n$. **1**

d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وعدد الأشخاص لكل هاتف محمول.

51. **المواد الكيميائية** يُسرّب خط أنابيب تحت الأرض مادة كيميائية سامة. وبعد بدء التسريب، انتشر على النحو الموضح أدناه. ويُمكن تحديد المسافة التي انتشرت فيها المادة الكيميائية كل عام باستخدام $d(t) = 2000(0.7)^{t-1}$، عند $t \geq 1$، حيث t هو عدد الأعوام منذ بدأ التسريب. (مثال 7)



انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

a. مثّل الدالة بيانيًا عند $1 \leq t \leq 15$.

b. استخدم التمثيل البياني الذي رسمته في إيجاد قيم d عند t يساوي 5، و 10، و 15 عامًا. **480.2; 80.71; 13.56**

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} d(t)$. **0**

d. هل ستنتشر المادة الكيميائية أبدًا إلى المستشفى التي تبعد 7000 m عن التسريب؟ تذكر أنه يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات اللا نهائية الهندسية باستخدام $\frac{a_1}{1-r}$.

52. **الاستهلاك** اشترى سعيد دراجة بخارية مقابل AED 11,000. لكنها تُستهلك كل عام يمتلكها فيه. يُمكن تقدير القيمة v للدراجة البخارية بعد مرور t من الأعوام باستخدام النموذج $v(t) = 11{,}000(0.76)^t$. (مثال 7)

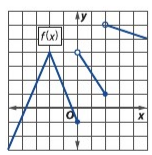
a. مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \leq t \leq 10$. **a. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

b. استخدم التمثيل البياني في تقدير قيمة الدراجة البخارية عند t يساوي 3 و 7 و 10 أعوام. **AED 4828.74; AED 1610.97; AED 707.18**

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **0**

d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الدراجة البخارية الخاصة بسعيد. **إذا احتفظ سعيد بدراجته البخارية، فسوف تساوي في النهاية AED 0.**

B في الدالة التالية، قدّر كل نهاية إن وجدت.



53. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **−1**

54. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **4**

55. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **غير موجودة**

56. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **1**

57. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **6**

58. $\lim_{x\to 1} f(x)$ **2.5**

C حاسبة التمثيل البياني حدد ما إذا كانت كل نهاية مما يلي موجودة أم لا. إذا كانت غير موجودة، فصِف ما يحدث بيانيًا للنهاية.

59. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ **لا؛ نهايات أحادية الطرف مختلفة**

60. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ **لا؛ خط تقارب رأسي**

60. لا؛ خط تقارب رأسي

61. $\lim_{x\to 0} 3\cos\frac{\pi}{x}$ **لا؛ متذبذبة**

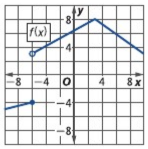
62. $\lim_{x\to -5} \frac{|x+5|}{x+5}$ **لا؛ خط تقارب رأسي**

63. $\lim_{x\to 0} \frac{7}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ **لا؛ خط تقارب رأسي**

64. $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{2-x}-3}{x+4}$ **لا؛ خط تقارب رأسي**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **تحليل الخطأ** يحاول مازن وأيوب إيجاد نهاية الدالة الموضحة أدناه عند x يقترب من −6. ويقول مازن إن النهاية تساوي −4. بينما يخالف أيوب في الرأي ويقول إن النهاية تساوي 3. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



كلاهما على خطأ؛ الإجابة النموذجية: إذا كان $f(x)$ يقترب من قيمة مختلفة من اليسار أكثر منها من اليمين، فإن النهاية غير موجودة عند هذه النقطة.

66. **مسألة غير محددة الإجابة** اعطِ مثالاً للدالة f بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة، لكن $f(0)$ غير موجودة. اعطِ مثالاً للدالة g حيث إن $g(0)$ موجودة، لكن $\lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

67. **تحدٍ** افترض أن $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$، و $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$. قدّر $\lim_{x\to 1} f(x)$، و $\lim_{x\to 2} g(x)$. إذا كان $g(a) = 0$، و $f(a) \neq 0$. فماذا يُمكنك افتراضه حول $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$؟ اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

68. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا* أم غير صحيحة *مطلقًا*. برر استنتاجك.

إذا كان $f(c) = L$، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

69. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$، و $f(0) = 2$، $f(2) = 5$، و $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

70. **تحدٍ** في الدالة التالية، قدّر كل نهاية إن وجدت.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , \quad 0 < x \leq 2 \\ x-3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$ **غير موجودة**

b. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **−1**

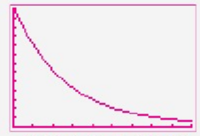
c. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **−1**

71. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الطريقة التي تستخدمها في تقدير النهايات إذا كانت الدالة متصلة. واشرح مدى اختلاف ذلك عن الطرق المُستخدمة في تقدير الدوال غير المتصلة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

إجابات إضافية

50a.



[0, 18] scl: 2 by [0, 65] scl: 5

50d. سيكون هناك في النهاية هاتف خلوي لكل شخص ممن تتراوح أعمارهم بين 18 عامًا و 25 عامًا.

674 | الدرس 1-11 | تقدير النهايات بيانيًا

مراجعة شاملة

a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

72. **توفير الوقود** يوضّح الجدول سعات المحركات المتاحة في مصنع السيارات وتوفير الوقود الخاص به.

سعة المحرك (لتر)	الكيلومترات المقطوعة في الطريق السريع (km/L)
1.6	34
2.2	37
2.0	30
6.2	26
7.0	24
3.5	29
5.3	24
2.4	33
3.6	26
6.0	24
4.4	23
4.6	24

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 10%.

c. إذا كان الارتباط ذا دلالة عند المستوى 10%، فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء c للتنبؤ بالكيلومترات المتوقعة لكل لتر ستقطعه السيارة بالمحرك الذي تبلغ سعته 8.0 L. حدد ما إذا كان هذا التوقع معقولاً. اشرح.

73. استخدم مثلث باسكال لإيجاد مفكوك $\left(3a + \frac{2}{3}b\right)^4$.

$81a^4 + 72a^3b + 24a^2b^2 + \frac{32}{9}ab^3 + \frac{16}{81}b^4$

اكتب معادلة قطبية وخطًا دليليًا للقطع المخروطي ذي الخواصّ المعطاة ومثّله بيانيًا.

74. $e = 1$؛ الرأس عند $(0, -2)$

75. $e = 3$؛ الرأس عند $(0, 3)$ و$(0, 6)$

74–75. انظر الهامش للاطلاع على التمثيلات البيانية.

أوجد الزاوية الواقعة بين كل زوج من المتجهات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

76. $u = \langle 2, 9, -2\rangle$, $v = \langle -4, 7, 6\rangle$ $\quad r = \frac{12}{1 + 3\sin\theta}$

77. $m = 3i - 5j + 6k$, $n = -7i + 8j + 9k$ $\quad r = \frac{4}{1 - \sin\theta}$

استخدم حاسبة تمثيل بياني لتمثل القطع المخروطي الناتج عن كل معادلة بيانيًا.

78. $7x^2 - 50xy + 7y^2 = -288$

79. $x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}\,x + 16y = 0$

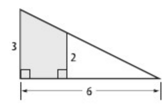
63.0°

93.4°

78–79. انظر الهامش.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT ما مساحة المنطقة المظللة؟ **A**



A 5   C 7   E 9

B 6   D 8

81. **المراجعة** أي مما يلي يصف على نحو أفضل السلوك الطرفي لـ $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$؟ **G**

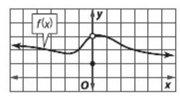
F $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$

G $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$

H $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$

J $f(x) \to -\infty$ عند $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$

82. وفق التمثيل البياني لـ $y = f(x)$، $\lim_{x\to 0} f(x) =$ **C**



A 0   C 3

B 1   D النهاية غير موجودة.

83. **المراجعة** أي مما يلي يصف التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$؟ **F**

1. هذا المنحنى به انفصال لا نهائي.

2. هذا المنحنى به انفصال قفزي.

3. هذا المنحنى به نقطة انفصال.

F 1 فقط   **G** 2 فقط   **H** 1 و 2 فقط

J 1 و 3 فقط   **K** 1 و 2 و 3

انتبه!

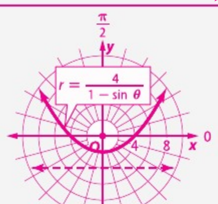
تحليل الخطأ يمكن أن يدرك الطلاب من التمثيل البياني في التمرين 65 أن النهاية لا تقترب من النقطة نفسها من الاتجاهين الموجب والسالب، ولهذا لا توجد نهاية عند تلك النقطة.

4 التقييم

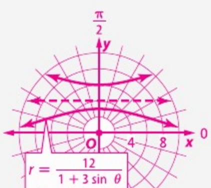
الكرة البلورية يعمل الطلاب في الدرس التالي على إيجاد قيمة النهايات جبريًا. اطلب من الطلاب كتابة ما تعلموه في درس اليوم ويعتقدون أنه سيساعدهم في استيعاب محتوى الدرس التالي.

إجابات إضافية

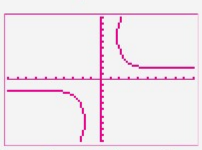
77.



78.

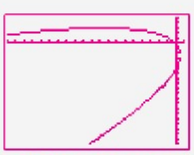


81.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

82.



[−20, 1] scl: 1 by [−20, 5] scl: 1

التدريس المتمايز BL

التوسع عندما يكون للتعبير النسبي عوامل خطية مشتركة في البسط والمقام، يمكن التخلص من حالة عدم الاتصال بقيمة تلك العوامل. حدد نقطة عدم الاتصال التي يمكن إزالتها من الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x - 14}$. هل النهاية مُعرفة عند تلك النقطة؟ فسر. $\left(2, \frac{2}{3}\right)$؛ نعم، لأن النهايتين متساويتان على الجانب الأيسر والأيمن.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 11-2 تقدير النهايات بالاستعانة بالأساليب البيانية والعددية.

الدرس 11-2 تقدير نهايات الدوال كثيرات الحدود والنسبية عند نقاط محددة.
تقدير نهايات الدوال كثيرات الحدود والنسبية عند اللا نهائية.

بعد الدرس 11-2 استخدام النهايات في إيجاد معدلات التغير اللحظية.
استخدام النهايات في إيجاد المساحة تحت المنحنى.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما النهاية التي تقترب منها x عندما يكون الضوء عند أدنى نقطة؟ وعند أقصى نقطة؟ 38; 8.5

الدرس 11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

السابق

- لقد قمت بتقدير النهايات باستخدام الطريقتين البيانية والعددية.

الحالي

1 إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند نقط محددة.

2 إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند اللانهاية.

لماذا؟

- افترض أنه يُمكن إيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان بالملّيمترات باستخدام $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$، حيث x هو استضاءة الضوء الساطع في بؤبؤ عين الحيوان مقيسًا باللكس. ويُمكنك إيجاد قيمة النهايات لإيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان عندما يكون الضوء في الحد الأدنى ولديه أعلى قدر من الكثافة.

المفردات الجديدة
تعويض مباشر
direct substitution
صيغة غير مُعينة
indeterminate form

1 حساب النهاية عند نقطة

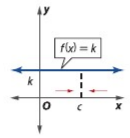
في الدرس 11-1، لقد تعرفت على كيفية تقدير النهايات باستخدام منحنى أو تمثيل بياني أو إنشاء جدول قيم. في هذا الدرس، سوف نستكشف التقنيات الحاسوبية لإيجاد قيم النهايات.

المفهوم الأساسي نهاية الدوال

نهاية الدوال الثابتة

الشرح نهاية دالة ثابتة عند أي نقطة c تساوي قيمة الثابت الخاص بالدالة.

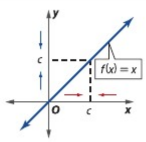
الرموز $\lim_{x \to c} k = k$



نهاية الدالة المحايدة

الشرح نهاية الدالة المحايدة عند أي نقطة c تساوي c.

الرموز $\lim_{x \to c} x = c$



عند دمج نهايات الدالة المحايدة والدوال الثابتة بالخواص الآتية تصبح مفيدة للغاية.

المفهوم الأساسي خواص النهايات

إذا كان k و c أعدادًا حقيقية، وn هو عدد صحيح موجب، و $\lim_{x \to c}$، و $\lim_{x \to c}$ موجودتان، فإن العبارة التالية صحيحة.

خاصية المجموع $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في كمية عددية $\lim_{x \to c} [kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية ناتج الضرب $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية ناتج القسمة $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$، إذا كان $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة $\lim_{x \to c} [f(x)^n] = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

خاصية الجذر النوني $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ حيث n هو عدد زوجي.

نصيحة دراسية
خواص النهايات تنطبق جميع خواص النهايات المذكورة في الصفحة السابقة كذلك على النهايات أحادية الطرف والنهايات عند اللانهاية، طالما أن كل نهاية منها موجودة.

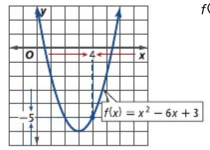
مثال 1 استخدام خواص النهايات

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

a. $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3)$

$\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3) = \lim\limits_{x \to 4} x^2 - \lim\limits_{x \to 4} 6x + \lim\limits_{x \to 4} 3$	خاصيتا المجموع والفرق
$= \left(\lim\limits_{x \to 4} x\right)^2 - 6 \cdot \lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 3$	خاصيتا القوة والضرب في كمية عددية
$= 4^2 - 6 \cdot 4 + 3$	نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة
$= -5$	بسّط.

التحقق التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 3$ يدعم هذه النتيجة. ✓



b. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 1}{x - 5}$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 1}{x - 5} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -2} (4x^3 + 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (x - 5)}$	خاصية ناتج القسمة
$= \dfrac{\lim\limits_{x \to -2} 4x^3 + \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} x - \lim\limits_{x \to -2} 5}$	خاصيتا المجموع والفرق
$= \dfrac{4\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^3 + \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} x - \lim\limits_{x \to -2} 5}$	خاصيتا القوة والضرب في كمية عددية
$= \dfrac{4(-2)^3 + 1}{-2 - 5}$	نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة
$= \dfrac{31}{7}$	بسّط.

التحقق أنشئ جدولاً للقيم، مع اختيار قيم x التي تقترب من -2 من طرف واحد. ✓

x تقترب من -2 → ← x تقترب من -2

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

c. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{8 - x}$

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{8 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} (8 - x)}$	خاصية الجذر النوني
$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} 8 - \lim\limits_{x \to 3} x}$	خاصية الفرق
$= \sqrt{8 - 3}$	نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة
$= \sqrt{5}$	بسّط.

تمرين موجّه

1A. $\lim\limits_{x \to 2} (-x^3 + 4)$ -4

1B. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{2x^2 - x - 15}$ $\dfrac{1}{9}$

1C. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x + 3}$ $\sqrt{2}$

لاحظ أنه بالنسبة لجميع الدوال في المثال 1، نهاية $f(x)$ عندما x يقترب من c تساوي نفس قيمة إجراء حسابات على $f(c)$. وهذا لا يُعد صحيحًا بالنسبة لجميع الدوال، فهو صحيح بالنسبة للدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية فقط كما هو موضح أعلى الصفحة التالية.

- تمثيل الدالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ماذا يحدث لقطر بؤبؤ العين عندما تزيد كثافة الضوء؟

[−10, 25] scl: 1 by [−10, 35] scl: 1

يتناقص قطر بؤبؤ العين عندما تزيد كثافة الضوء.

1 حساب النهايات عند نقطة

يبين **المثال 1** كيفية استخدام خصائص النهايات في إيجاد قيمة النهايات. ويبين **المثال 2** كيفية استخدام التعويض المباشر في إيجاد قيمة النهايات. ويبين **المثال 3** كيفية استخدام التحليل إلى عوامل في إيجاد قيمة النهاية. بينما يبين **المثال 4** كيفية استخدام إنطاق بسط الدالة أو مقامها في إيجاد قيمة النهاية.

مثال إضافي

1 استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x - 4)$ 11

b. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - 3}{x + 2}$ -1

c. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x + 4}$ $\sqrt{6}$

المفهوم الأساسي نهايات الدوال

نهايات الدوال كثيرة الحدود

إذا كانت $p(x)$ هي دالة كثيرة الحدود، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ هي دالة نسبية، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$ إذا كان $q(c) \neq 0$.

نصيحة دراسية

الدوال حسنة الأداء تُعد الدوال المتصلة مثل الدوال كثيرة الحدود *حسنة الأداء*، وذلك لأنه يُمكن إيجاد نهايات هذه الدوال عند أي نقطة باستخدام التعويض المباشر. وكذلك يُمكن إيجاد نهايات الدوال التي لا تدخل ضمن الدوال حسنة الأداء باستخدام هذه الطريقة، طالما كانت الدالة متصلة عند قيمة المجال ذي الصلة.

بشكل أبسط، يُمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود باستخدام **التعويض المباشر** طالما أن قيمة مقام الدالة النسبية عند c لا يساوي 0.

مثال 2 استخدام التعويض المباشر

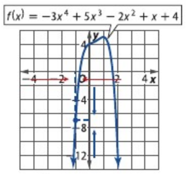
استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

a. $\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

نظرًا لأن هذا هو نهاية دالة كثيرة الحدود، فيُمكننا تطبيق طريقة التعويض المباشر لإيجاد قيمة النهاية.

$$\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

التحقق التمثيل البياني لـ $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ يدعم هذه النتيجة. ✔



b. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

هذه هي نهاية دالة نسبية، ومقامها غير صفري عند $x = 3$. لذلك، يُمكننا تطبيق طريق التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - 3^2}$$
$$= \frac{48}{-6} \text{ or } -8$$

c. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

هذه هي نهاية دالة نسبية. نظرًا لأن مقام هذه الدالة يساوي 0 عند $x = 1$، فإنه لا يُمكن إيجاد النهاية عبر التعويض المباشر.

تمرين موجّه

2A. $\lim_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ **3** **2B.** $\lim_{x\to -5} \frac{x+1}{x^2+3}$ $-\frac{1}{7}$ **2C.** $\lim_{x\to -8} \sqrt{x+6}$

2C. غير ممكن؛ عند $x = -8$ الدالة $f(x) = \sqrt{x+6}$ تساوي $\sqrt{-2}$، وهو ليس عددًا حقيقيًا.

افترض أنك طبقت خاصية ناتج القسمة بشكل غير صحيح على نهايات التعويض المباشر، وذلك لإيجاد قيمة $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x\to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x\to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

هذا غير صحيح لأن نهاية المقام تساوي 0.

مثال إضافي

2 استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

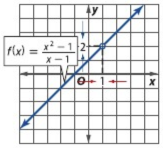
a. $\lim_{x\to 2} (-2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 5)$ -3

b. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ -2

c. $\lim_{x\to -4} \sqrt{x + 3}$

غير ممكن؛ عندما تكون $x = -4$، الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ هي $\sqrt{-1}$، وهذا ليس عددًا حقيقيًا.

678 | الدرس 2-11 | إيجاد قيمة النهايات جبريًا



عادةً ما نصف الكسر الناتج $\frac{0}{0}$ بأنه على شكل **صيغة غير مُعينة**. وذلك لأنه لا يُمكننا تحديد نهاية الدالة التي يكون المقام فيها عبارة عن 0. وقد تكون مثل هذه النهايات موجودة ولديها قيمة من الأعداد الحقيقية، أو قد لا تكون موجودة، فقد تكون تباعدية من ∞ أو $-\infty$. في هذه الحالة، ارسم التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. وبذلك يتضح أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ موجودة بالفعل وقيمتها تساوي 2.

بينما تنتج نهاية النموذج المُبهم من التطبيق غير الصحيح لخواص أو نظريات النهايات، يُمكن لتحليل هذا النموذج أن يُقدم لنا دليلاً للتقنية التي ينبغي تطبيقها لإيجاد نهاية ما.

إذا أوجدت قيمة نهاية دالة نسبية وتوصلت إلى النموذج المُبهم $\frac{0}{0}$، فينبغي لك محاولة تبسيط التعبير جبريًا من خلال تحليل العامل المشترك إلى العوامل الأولية وقسمته.

مثال 3 استخدام التحليل إلى العوامل

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

من خلال التعويض المباشر، تحصل على $\frac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4 + 4}$ أو $\frac{0}{0}$. نظرًا لأن ما سبق عبارة عن صيغة غير مُعينة، فحاول تحليل أي عوامل مشتركة إلى العوامل الأولية وقسمتها.

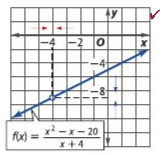
$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x + 4}$$ حلل البسط إلى العوامل.

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x + 4}}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x \to -4} (x - 5)$$ بسّـط.

$$= (-4) - 5 = -9$$ طبّق التعويض المباشر وبسّـط.

التحقق التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ يدعم هذه النتيجة. ✓



b. $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$

باستخدام التعويض المباشر، يُمكنك الحصول على $\frac{3 - 3}{3^3 - 3(3)^2 - 7(3) + 21}$ أو $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 7)(x - 3)}$$ حلل المقام إلى العوامل الأولية.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(x^2 - 7)\cancel{(x - 3)}}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2 - 7}$$ بسّـط.

$$= \frac{1}{(3)^2 - 7} = \frac{1}{2}$$ طبّق التعويض المباشر وبسّـط.

تمرين موجّه

3A. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$ **20**

3B. $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$ $\frac{1}{5}$

انتبه!

التحليل إلى العوامل إذا تمت قسمة التعبير كاملاً في البسط، فإن النتيجة تساوي 1 وليس 0.

مثال إضافي

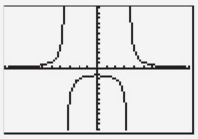
3 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ 5

b. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}$ 1

إرشاد للمعلمين الجدد

حاسبة التمثيل البياني عند تمثيل الدوال بيانيًا بالاستعانة بحاسبة التمثيل البياني، سيكون للتمثيل البياني أحيانًا أكثر من جزء واحد، مثلما هو الحال في المثال الإضافي 3b.



$[-5, 5]$ scl: 0.5 by $[-3, 3]$ scl: 0.25

ذكّر الطلاب بأننا مهتمون فقط بقيمة الدالة عندما تقترب x من -2.

بينما يُمكننا استخدام طريقة قسمة العامل المشترك هذه، إلا أنها تتطلب بعض التبريرات. في المثال 3a، تنتج عملية قسمة عامل مشترك في $f(x)$ دالة جديدة، $g(x)$، حيث

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} \text{ و } g(x) = x - 5.$$

هاتان الدالتان لديهما نفس قيم الدالة بالنسبة لجميع قيم x باستثناء عند $x = -4$. إذا اختلفت دالتان عند قيمة c فقط في مجالهما، فإن نهايتهما، عند x يقترب من c متماثلتان. ويرجع سبب ذلك إلى أن قيمة النهاية عند نقطة لا يعتمد على قيمة الدالة عند هذه النقطة. لذلك، $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} (x - 5)$.

هناك طريقة أخرى لإيجاد النهايات التي لها صيغة غير مُعينة وهي إنطاق البسط أو المقام بالدالة، ثم قسمة أي عوامل مشتركة.

مثال 4 استخدام الإنطاق

أوجد قيمة $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

باستخدام التعويض المباشر، يُمكنك الحصول على $\frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9}$ أو $\frac{0}{0}$. أنطق بسط الدالة، ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$ اضرب البسط والمقام في $\sqrt{x} + 3$، المرافق لـ $\sqrt{x} - 3$.

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$ بسّط.

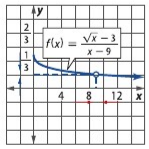
$$= \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{x - 9}}{\cancel{(x - 9)}(\sqrt{x} + 3)}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$ بسّط.

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$ طبّق التعويض المباشر.

$$= \frac{1}{6}$$ بسّط.

التحقق التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ في الشكل 11.2.1 يدعم هذه النتيجة. ✓



الشكل 11.2.1

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

4A. $\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$ 10

4B. $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$ $-\frac{1}{4}$

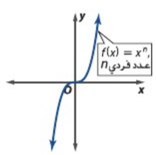
2 حساب النهايات عند اللانهاية

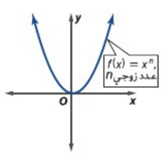
لقد تعلمت أن جميع دوال القوى زوجية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي، وأن جميع دوال القوى فردية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي. ويُمكن وصف ذلك بدلالة النهايات كما هو موضح أدناه.

المفهوم الأساسي نهايات دوال القوة عند اللانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.





تعلمت أيضًا أن السلوك الطرفي لدالة كثيرة الحدود يُحدد وفق السلوك الطرفي لدالة القوة ذات الصلة بالقوة الأكبر فيها. ويُمكن وصف هذا أيضًا باستخدام النهايات.

مثال إضافي

4 أوجد قيمة $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$. $\frac{1}{4}$

2 حساب النهايات عند اللا نهائية

يبين **المثال 5** كيفية إيجاد نهايات الدوال كثيرات الحدود عندما تقترب النهاية من اللا نهائية الموجبة أو السالبة. ويبين **المثال 6** كيفية إيجاد نهايات الدوال النسبية عندما تقترب النهاية من اللا نهائية الموجبة أو السالبة. بينما يبين **المثال 7** كيفية إيجاد قيمة نهاية المتتالية تقاربية لاستخدامها في إيجاد العدد الذي تقترب منه المتتالية.

680 | الدرس 2-11 | إيجاد قيمة النهايات جبريًا

مثال إضافي

5 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+x^3-7)$ ∞

b. $\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^2+8)$ $-\infty$

c. $\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2+x-7)$ ∞

نصيحة دراسية

نواتج الضرب في اللانهاية بما أن نهاية ∞ تعني أن قيم الدالة تزداد بشكل كبير تجاه الأعداد الموجبة، فإن ضرب هذه الأعداد في ثابت موجب لا يغير هذا التوجه. إلا أن ضرب نهاية ∞ في ثابت سالب يغير إشارة جميع المخرجات بسبب هذا الرمز. إذًا، $-\infty = -1(\infty)$.

المفهوم الأساسي نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

لتكن p دالة كثيرة حدود. فإن $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ و $\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$ and $\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$.

يُمكنك استخدام هذه الخواص لإيجاد قيمة نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية. تذكر أن رمز نهاية الدالة على ∞ أو $-\infty$ هو غير موجود، ولا يشير إلى أن النهاية موجودة لكنها تصف بدلاً من ذلك سلوك الدالة سواء متزايدة ام متناقصة دون نهاية، على التوالي.

مثال 5 نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$	نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية
$=-\infty$	نهاية دوال القوة عند اللانهاية

b. $\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$	نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية
$=-\lim_{x\to\infty}x^2$	خاصية الضرب في كمية عددية
$=-\infty$	نهاية دوال القوة عند اللانهاية

c. $\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$	نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية
$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$	خاصية الضرب في كمية عددية
$=5\cdot\infty=\infty$	نهاية دوال القوة عند اللانهاية

تمرين موجّه **أوجد قيمة كل نهاية.**

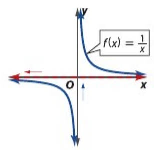
5A. $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$ $-\infty$ **5B.** $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ ∞ **5C.** $\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$ $-\infty$

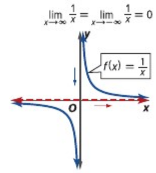
لإيجاد قيمة النهايات للدوال النسبية عند اللانهاية، سنحتاج إلى خاصية نهاية أخرى.

المفهوم الأساسي نهايات الدوال العكسية عند اللانهاية

الشرح نهاية الدالة العكسية عند اللانهاية الموجبة أو السالبة تساوي 0.

الرموز $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$





النتيجة بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n، $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

إذا قسمنا البسط والمقام لدالة نسبية على أعلى قوة للمتغير x الموجودة في الدالة، فيُمكننا استخدام هذه الخاصية في إيجاد نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية.

681

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3}$

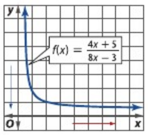
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ اقسم كل حد على الحد الأعلى قوة لـ x.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بسّـط.

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والفرق والضرب في كمية عددية

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

التحقق المنحنى للعلاقة $f(x) = \dfrac{4x+5}{8x-3}$ يدعم هذه النتيجة. ✔



b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر x^3.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$ بسّـط.

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والفرق والضرب في كمية عددية

$$= \frac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{9x^3+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر x^4. ثم بسّـط.

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والفرق والضرب في كمية عددية

$$= \frac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

نظرًا لأن نهاية المقام تساوي 0، فإننا نعرف أننا لم نطبق خاصية ناتج القسمة في النهايات بشكل صحيح. لكن يُمكننا القول بأنه كلما تمت قسمة العدد 5 على قيم أقل بشكل كبير وتقترب من 0، زادت قيمة الكسر الناتج بشكل كبير. لذلك، يُمكن وصف النهاية بأنها تقترب من ∞.

تمرين موجّه

6A. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-10}$ **0**

6B. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2+7}{5x+1}$ $-\infty$

6C. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$ **3.5**

تلميح تقني

إيجاد قيمة النهايات إن استخدام الحاسبة لا يُعد طريقة مضمونة لإيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. ويُمكنك فقط تحليل قيم $f(x)$ لعدد قليل من قيم x القريبة من c أو لعدد قليل من قيم x. إلا أن الدالة قد تتطرق إلى شيء غير متوقع مثل أن يقترب x بشكل أكبر من c أو أن تزداد قيمة x بشكل أكبر أو أن تقل بشكل أكبر كذلك. وينبغي لك استخدام الطرق الجبرية متى أمكن لحل النهايات.

مثال إضافي

6 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{3x-4}$ $\frac{2}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-x^2}{3x^2-1}$ ∞

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{2x^3-x^2+3x-2}$ $\frac{5}{2}$

التركيز على محتوى الرياضيات

نهايات نواتج قسمة الدوال النسبية هناك ثلاث حالات ينبغي النظر فيها عند إيجاد قيمة الدوال النسبية عندما تقترب من اللا نهائية.

1. إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، تكون النهاية غير محدودة ويمكن وصفها بـ ∞ أو $-\infty$. بحسب إشارات المعاملات الإرشادية.
2. إذا كانت درجات البسط والمقام متساوية، فستكون النهاية هي ناتج قسمة المعاملات الإرشادية.
3. إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فستكون النهاية 0.

إرشاد للمعلمين الجدد

المقامات الصفر عند إيجاد قيمة نهاية تؤدي إلى 0 في المقام، فستقترب نهاية الدالة من $\pm\infty$ عند $x = c$. وإذا كان البسط موجبًا، فستقترب النهاية من ∞. بينما إذا كان البسط سالبًا، فستقترب النهاية من $-\infty$.

مثال إضافي

7 اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم أوجد نهاية المتتالية، إن وجدت.

a. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+4}$ $1, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{8}, \frac{13}{9}$;
نهاية $\{a_n\}$ تساوي 2.

b. $b_n = \dfrac{3}{n^2}\left[\dfrac{(n+3)(n+4)}{9}\right]$
$6.\overline{6}, 2.5, 1.\overline{5}, 1.1\overline{6}, 0.96$;
نهاية $\{b_n\}$ تساوي $\frac{1}{3}$.

لقد تعرفت على أنه بما أن المتتالية هي عبارة عن دالة للأعداد الطبيعية، فإن نهاية المتتالية هي نهاية الدالة عند $n \to \infty$. إذا كانت هذه النهاية موجودة، فإن قيمها تمثل العدد الذي تقترب منه الدالة. على سبيل المثال، يُمكن وصف المتتالية ... $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$ على أنها $f(n) = \frac{1}{n}$، حيث n هو عدد صحيح موجب. وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، فإن المتتالية تقترب من 0.

مثال 7 نهايات المتتاليات

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم أوجد نهاية المتتالية، إن وجدت.

a. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

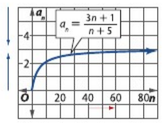
الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي $\frac{3(1)+1}{1+5}$ ، و $\frac{3(2)+1}{2+5}$، و $\frac{3(3)+1}{3+5}$، و $\frac{3(4)+1}{4+5}$ ، و $\frac{3(5)+1}{5+5}$ أو حوالي 0.667، و 1، و 1.25، و 1.444، و 1.6. لإيجاد قيمة نهاية المتتالية، أوجد قيمة $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر n، ثم بسّط.

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والضرب في كمية عددية

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهاية الدالة الثابتة ونهاية الدوال العكسية عند اللانهاية

إذًا، نهاية الدالة تساوي **3**. بمعنى أن المتتالية تقترب من **3**.



التحقق منحنى العلاقة $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$ يدعم هذه النتيجة. ✔

b. $b_n = \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي حوالي 5، و 2.813، و 2.222، و 1.953، و 1.8.
والآن، أوجد نهاية المتتالية.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ قم بتربيع ذات الحدّين.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب.

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 + 10\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر. ثم استخدم خواص ناتج القسمة والمجموع والضرب في كمية عددية.

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

إذًا، نهاية الدالة b_n تساوي 1.25. بمعنى أن المتتالية تقترب من 1.25.

التحقق أنشئ جدول قيم مع اختيار قيم كبيرة لـــ n بحيث تزداد بشكل أكبر. ✔

n يقترب من ∞

n	10	100	1000	10,000	100,000
a_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل للتحقق من مدى صحة النتائج في المثال 7، أوجد الحدود رقم 100 و1000 و10,000 في كل متتالية. في المثال 7a، هذه الحدود هي 2.867، و2.986، و2.999 على التوالي. وبما أن هذه القيم يبدو عليها الاقتراب من 3، فإن نهاية 3 غير معقولة.

تمرين موجّه

7A. $a_n = \dfrac{4}{n^2+1}$

7B. $b_n = \dfrac{2n^3}{3n+8}$

7C. $c_n = \dfrac{9}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

7A. حوالي 2, 0.8, 0.4, 0.235, 0.154؛ نهاية $\{a_n\}$ تساوي 0.

7B. A حوالي 0.182,1.143, 3.177, 6.4, 10.87؛ $\{b_n\}$ ليس لها نهاية.

7C. A حوالي 9, 5.625, 4.667, 4.219, 3.96؛ نهاية $\{c_n\}$ تساوي 3.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات. وتناول كل مثال مع الصف، ثم اطلب من كل مجموعة العمل معًا في إكمال تمارين التمرين الموجّه. وبعدما ينتهون، اطلب منهم المقارنة بين نتائجهم ونتائج المجموعة الأخرى. ناقش النتائج مع الصف، ووضح أي التباس أو أخطاء.

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم تمارين 1-59 للتحقق من عملية الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع عند إيجاد قيمة النهاية، قد يعين الطلاب خطأً القيمة $\frac{0}{0}$ مستخدمين التعويض المباشر. ذكّر الطلاب أنهم إذا توصلوا لهذه النتيجة، فيمكن تبسيط الدالة النسبية قبل إيجاد قيمة النهاية.

خطأ شائع ينبغي أن يدرك الطلاب أن التعويض المباشر في التمارين 20-12 لن يكون ممكنًا إذا كان في النتيجة 0 في المقام أو هناك مجذور سالب. وينبغي ألا يبسط الطلاب الدالة، بل يفسروا لماذا لا يمكن إيجاد قيمة الدالة بالنسبة لهذه النهاية.

خطأ شائع تأكد في التمارين 64-67 أن الطلاب لديهم حاسبات التمثيل البياني مضبوطة في الوضع راديان، وليس في وضع الدرجات.

إجابات إضافية

11. ليس ممكنًا؛ عندما $x = 16$، البسط يساوي 0.

14. ليس ممكنًا. عندما $x = 3$، الدالة $f(x) = \sqrt{2 - x}$ تساوي $\sqrt{-1}$، وهذا ليس عددًا حقيقيًا.

16. ليس ممكنًا؛ عندما $x = 4$، المقام يساوي 0.

19. ليس ممكنًا؛ عندما $x = 5$، المقام يساوي 0.

21a. $\lim_{v \to 0} m = m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من 0، فستقترب كتلة الجسم من قيمتها الابتدائية، أو المتبقية.

21b. تقترب كتلة الجسم في الزيادة بدون حدود.

22b. الاختلاف المركزي للقطع الناقص يقترب من 0، وبهذا يبدو القطع الناقص مشابهًا للدائرة أكثر.

التمارين

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات الآتية: (مثال 1)

1. $\lim_{x \to -3} (5x - 10)$ **−25**

2. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 4x + 13}{x - 3}$ **29**

3. $\lim_{x \to -1} (7x^2 - 6x - 3)$ **10**

4. $\lim_{x \to -2} \frac{2x^5 - 4x^3 - 2x - 12}{x^3 + 5x^2}$ **$-\frac{10}{3}$**

5. $\lim_{x \to 9} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}\right)$ **$21\frac{1}{9}$**

6. $\lim_{x \to -4} [x^2(x + 1) + 2]$ **−46**

7. $\lim_{x \to 12} \frac{x^2 - 10x}{\sqrt{x + 4}}$ **6**

8. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x - 11}{x + 3}$ **−2**

9. $\lim_{x \to 2} (26 - 3x)$ **20**

10. $\lim_{x \to -6} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$ **42**

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب. (مثال 2) **11, 14, 16, 19. انظر الهامش.**

11. $\lim_{x \to 16} \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x} - 4}$

12. $\lim_{x \to 2} 4x^3 - 3x^2 + 10$ **30**

13. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 9x + 6}{x^2 + 5x + 6}$ **2**

14. $\lim_{x \to 3} \sqrt{2 - x}$

15. $\lim_{x \to -4} \frac{5x^5 - 16x^4}{x + 5}$ **−9216**

16. $\lim_{x \to 4} \frac{x + 4}{x - 4}$

17. $\lim_{x \to 5} \frac{x^3}{\sqrt{x + 4} - 5}$ **$-62\frac{1}{2}$**

18. $\lim_{x \to 9} (3x^2 - 10x + 35)$ **188**

19. $\lim_{x \to 5} \frac{2x + 11}{x^2 - x - 20}$

20. $\lim_{x \to 1} (-x^2 + 3x + \sqrt{x})$ **3**

21. **الفيزياء** وفق نظرية النسبية الخاصة لألبرت أينشتاين، يُمكن إيجاد كتلة الجسم المتحرك في الفضاء بسرعة v باستخدام $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ حيث c هو سرعة الضوء، وm_0 هو الكتلة الأولية أو الكتلة عند السكون للجسم. (مثال 2) **a–b. انظر الهامش.**

a. أوجد $\lim_{v \to 0} m$ اشرح العلاقة بين هذه النهاية و m_0.

b. ماذا يحدث لكتلة جسم إذا كان يُمكن لسرعته أن تقترب من سرعة الضوء؟

22. **الهندسة** يُمكن تعريف مساحة القطع الناقص على أنها $A = \pi a \sqrt{a^2 - c^2}$، حيث a هو المسافة من الرؤوس إلى المركز، و c هو المسافة من البؤرة إلى المركز. (مثال 2) **b. انظر الهامش.**

a. 20π أو 38.26 وحدة مربعة

a. مساحة القطع الناقص عند $a = 5$ و$c = 3$؟

b. ماذا يحدث للاختلاف المركزي في القطع الناقص عندما تتحرك بؤرتيه تجاه مركز القطع الناقص؟

c. ما نهاية مساحة القطع الناقص عند c يقترب من 0 بدلالة a؟ **πa^2**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي. (المثالان 3 و 4)

23. $\lim_{x \to 4} \frac{2x^2 - 5x - 12}{x - 4}$ **11**

24. $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$ **8**

25. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$ **3**

26. $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ **$\frac{1}{6}$**

27. $\lim_{x \to -5} \frac{4x^2 + 21x + 5}{3x^2 + 17x + 10}$ **$1\frac{6}{13}$**

28. $\lim_{x \to 7} \frac{5 - \sqrt{18 + x}}{x - 7}$ **$-\frac{1}{10}$**

29. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{\sqrt{6 + x} - 2}$ **4**

30. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^2 + 2x - 3}{12x^2 + 8x - 7}$ **$\frac{1}{2}$**

31. $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x + 9}}$ **−12**

32. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3}$ **−8**

33. $\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$ **$\frac{1}{6}$**

34. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{16 + x} - 4}{x}$ **$\frac{1}{8}$**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي. (المثالان 5 و 6)

35. $\lim_{x \to \infty} (5 - 2x^2 + 7x^3)$ **∞**

36. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 10x + 2}{4x^3 + 20x^2}$ **$\frac{3}{4}$**

37. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 7x - 17}{3x^5 + 4x^2 + 2}$ **0**

38. $\lim_{x \to \infty} (10x + 14 + 6x^2 - x^4)$ **$-\infty$**

39. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^6 + 12x}{3x^6 + 2x^2 + 11x}$ **$\frac{1}{3}$**

40. $\lim_{x \to \infty} \frac{14x^3 - 12x}{4x^2 + 13x - 8}$ **∞**

41. $\lim_{x \to \infty} (7x^3 + 4x^4 + x)$ **∞**

42. $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^5 - 12x^2 + 14x}{2x^5 + 13x^3}$ **3**

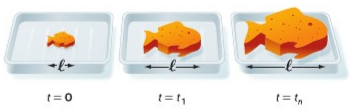
43. $\lim_{x \to \infty} (x^3 - 6x^7 + 2x^6)$ **$-\infty$**

44. $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 + 2x - 11}{-x^5 + 17x^3 + 4x}$ **0**

45. $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^4 - 2}{5x^4 + 3x^3 - 2x}$ **2**

46. $\lim_{x \to -\infty} (2x^5 - 4x^2 + 10x - 8)$ **$-\infty$**

47. **الإسفنج** تحتوي الكبسولة الهلامية على قطعة إسفنج. وعند غمر الكبسولة في الماء، يتحلل فورًا ويسمح للإسفنج بامتصاص الماء ويزيد حجمه بشكل سريع. يُمكن تعريف الطول ℓ بالملّيمتر لقطعة الإسفنج بعد غمرها بالماء لمدة t ثانية على أنها $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$. (مثال 6)



a. ما طول الكبسولة قبل غمرها في الماء؟ **25 mm**

b. ما نهاية الدالة عند $t \to \infty$؟ **130 mm**

c. اشرح مدى ارتباط نهاية هذه الدالة بطول قطعة الإسفنج. **لن يزيد طول قطعة الإسفنج عن 130 mm.**

48. **الهررة** افترض أنه يُمكننا تقدير الوزن w بالكيلوجرام للهرة بعد d أيام من ولادتها باستخدام $w(d) = \frac{25}{2 + 98(0.85)^d}$. (مثال 6)

a. ما وزن الهرة عند الولادة؟ **0.25 kg**

b. كم سيبلغ وزن الهرة في النهاية (أو ما وزنها عند $d \to \infty$)؟ **12.5 kg**

أوجد نهاية كل متتالية مما يلي، إن وجدت. (مثال 7)

49. $a_n = \frac{n^3 - 2}{n^2}$ **∞**

50. $a_n = \frac{8n + 1}{n^2 - 3}$ **0**

51. $a_n = \frac{-4n^2 + 6n - 1}{n^2 + 3n}$ **-4**

52. $a_n = \frac{4 - 3n}{2n^3 + 5}$ **0**

53. $a_n = \frac{12n^2 + 2}{6n^2 - 1}$ **2**

54. $a_n = \frac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$ **∞**

55. $a_n = \frac{5}{n^2}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]$ **$\frac{5}{2}$**

56. $a_n = \frac{3}{n^3}\left[\frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}\right]$ **1**

57. $a_n = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n + 1)^2}{4}\right]$ **$\frac{1}{4}$**

58. $a_n = \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}\right]$ **∞**

59. **تعداد السكان** بعد أن صنفت صحيفة إحدى الصحف أن مدينة ما كإحدى أفضل المدن للعيش، شهدت المدينة ارتفاعًا في تعداد السكان الذي يُمكن تمثيله باستخدام $p(t) = \frac{36t^3 - 12t + 13}{3t^3 + 90}$، حيث p هو إجمالي ارتفاع تعداد السكان بالآلاف، و t هو عدد الأعوام بعد عام 2006. (مثال 7)

عدد الأعوام منذ عام 2006	الزيادة في تعداد السكان
1	؟
2	؟
3	؟

a. أكمل الجدول للأعوام 2007–2009. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

b. ما إجمالي زيادة تعداد السكان بحلول عام 2011؟ **9576 شخصًا تقريبًا**

c. ما النهاية التي تمثل النمو السكاني؟ **12,000 شخص**

d. اشرح لماذا قد توجد نهاية للنمو السكاني. **الإجابة النموذجية: قد تضع حدود المدينة نهاية لمقدار النمو المحتمل وفرص البناء.**

B **أوجد كل نهاية، إن وجدت، باستخدام التعويض المباشر، وذلك لإيجاد قيمة النهايات أحادية الطرف المقابلة.**

60. $\lim_{x \to -2} \begin{cases} x - 3, & x \le -2 \\ 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$ **-5**

61. $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 4x + 2, & x \le 0 \\ 2 - x^2, & x > 0 \end{cases}$ **2**

62. $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 5 - x^2, & x \le 0 \\ 5 - x, & x > 0 \end{cases}$ **5**

63. $\lim_{x \to 2} \begin{cases} (x - 2)^2 + 1, & x \le 2 \\ x - 6, & x > 2 \end{cases}$ **لا توجد نهاية.**

أوجد كل نهاية، إن وجدت، باستخدام أي طريقة.

64. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$ **0**

65. $\lim_{x \to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$ **1**

66. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ **2**

67. $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^2 \sin x}$ **4.5**

68. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\ln (2x - 1)}$ **0.5**

69. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$ **$-\frac{1}{2}$**

70. **الأحياء** افترض أنه يُمكننا إيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان بالملّيمتر باستخدام $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$، حيث x هو استضاءة الضوء الساطع في بؤبؤ عين الحيوان مقيسًا باللكس.

C

a. اكتب نهاية تصِف عرض بؤبؤ عين الحيوان عندما يبلغ الضوء الحد الأدنى للاستضاءة. ثم أوجد النهاية، وفسّر النتائج التي توصلت إليها.

b. اكتب نهاية تصِف عرض بؤبؤ عين الحيوان عندما يبلغ الضوء الحد الأقصى للاستضاءة. ثم أوجد النهاية، وفسّر النتائج التي توصلت إليها.

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ لكل معادلة.

71. $f(x) = 2x - 1$ **2**

72. $f(x) = 7 - 9x$ **-9**

73. $f(x) = \sqrt{x}$ **$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ أو $\frac{\sqrt{x}}{2x}$**

74. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **$\frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$ أو $\frac{\sqrt{x+1}}{2x+2}$**

75. $f(x) = x^2$ **$2x$**

76. $f(x) = x^2 + 8x + 4$ **$2x + 8$**

77. **الفيزياء** لدى الجسم المتحرك طاقة أثناء الحركة يُطلق عليها الطاقة الحركية لأنه يمكنه بذل شغل عندما يصطدم بجسم آخر.

يُمكن إيجاد الطاقة الحركية لجسم تبلغ كتلته m باستخدام $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot [v(t)]^2$، حيث $v(t)$ هو سرعة الجسم عند الزمن t وتُقاس الكتلة بالكيلوجرام. افترض أن $v(t) = \frac{50}{1 + t^2}$ بالنسبة لجميع قيم $t \ge 0$. إلى القيمة التي تقترب منها الطاقة الحركية لجسم كتلته واحد كيلوجرام عندما يقترب الزمن من 100؟ **0.0000125**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

78. **البرهان** استخدم خواص النهايات لتوضيح أنه بالنسبة لجميع $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ والعدد الحقيقي c، تكون $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

79. **البرهان** استخدم الاستقراء الرياضي لتوضيح أنه إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$، فإن $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$ أو L^n بالنسبة لأي عدد صحيح n. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

80. **تحدٍ** أوجد

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

حيث $a_n \ne 0$ و $b_m \ne 0$. (إرشاد: تأمل الحالات التي فيها $m < n$ و $n = m$ و $m > n$.) **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

81. **التبرير** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل من الصحيح أحيانًا، أم دائمًا، أم غير الصحيح مطلقًا أن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

82. **الكتابة في الرياضيات** استخدم ورقة بيانات أو جدولاً لتلخيص خواص النهايات، مع ضرب مثال لكل خاصية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

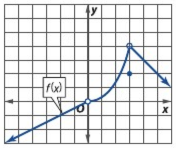
83. **الكتابة في الرياضيات** تأمل $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تقول سهيلة إن هذه الإجابة تعني أن النهاية تساوي 1. لماذا سهيلة على صواب. ما التحليل الإضافي الذي يُمكن استخدامه لتحديد النهاية، إن كانت موجودة؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

إجابة إضافية

81. الإجابة النموذجية: أحيانًا إذا لم تكن النهاية في السؤال عند خط تقارب رأسي، فالنهاية صحيحة؛ وإذا كانت النهاية في السؤال عند خط تقارب رأسي، فالنهاية ليست صحيحة.

مراجعة شاملة

استخدم التمثيل البياني لمنحنى $y = f(x)$ لإيجاد كل قيمة.



84. $\lim_{x \to -2} f(x)$ and $f(-2)$ **$-1;\ -1$**

85. $\lim_{x \to 0} f(x)$ and $f(0)$ **0؛ غير معرفة**

86. $\lim_{x \to 3} f(x)$ and $f(3)$ **4; 2**

87. **الصحة** يوضح الجدول متوسط العمر المتوقع للأشخاص الذين ولدوا في أعوام مختلفة بالولايات المتحدة. **a–d. انظر الهامش.**

عدد الأعوام منذ عام 1900	متوسط العمر المتوقع
10	50
20	54.1
30	59.7
40	62.9
50	68.2
60	69.7
70	70.8
80	73.7
90	75.4
100	76.9

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 5%.

c. إذا كان معامل الارتباط ذا دلالة عند المستوى 5%، فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء c للتنبؤ بمتوسط العمر المتوقع في 2080. وحدد ما إذا كان هذا التوقع معقولاً. اشرح.

88. **الصوتيات** يُمكن استخدام الإحداثيات القطبية لتمثيل شكل مدرجات قاعة. افترض أن المتحدث يقف عند القطب ويواجه اتجاه المحور القطبي. وتم وضع الكراسي بحيث تشغل المنطقة وفق $\frac{\pi}{3} \le \theta \le -\frac{\pi}{3}$ و $1 \le r \le 0.1$، حيث تُقاس r بمئات الأمتار.

a. ارسم هذه المنطقة على المستوى القطبي. **انظر الهامش.**

b. كم عدد المقاعد إذا كان نصيب كل فرد من المساحة $0.6\ m^2$؟ **15,598**

89. اكتب زوجًا من المعادلات الوسيطة، حيث $x = 2 \sin t$ و $y = 5 \cos t$ في شكل مستطيل. ثم ارسم التمثيل البياني للمنحنى.

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$؛ انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. **SAT/ACT** وفق البيانات الواردة في الجدول. ما النسبة المئوية لزيادة عدد المتقدمين إلى إحدى الكليات منذ 1995 إلى 2000؟

عدد المتقدمين إلى إحدى الكليات	
العام	**المتقدمون**
1990	18,000
1995	20,000
2000	24,000
2005	25,000

A 15%
B 20%
C 25%
D 27%
E 29%

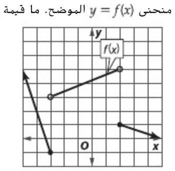
19. **مراجعة** ما قيمة $\lim_{h \to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$؟

F 3
G 4
H 5
J النهاية غير موجودة

29. ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x + \pi}{\cos(x + \pi)}$ عند x يقترب من 0؟

A $-\pi$
B $-\frac{3}{4}$
C $-\frac{1}{2}\pi$
D 0

93. **مراجعة** تأمل منحنى $y = f(x)$ الموضح. ما قيمة $\lim_{x \to 2^+} f(x)$؟



F 0
G 1
H 5
J النهاية غير موجودة

4 التقييم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
اطلب من كل طالب أن يكتب شرحًا موجزًا عن كيفية معرفة ما إذا كان يمكن إيجاد قيمة النهاية بالتعويض المباشر دون تبسيط الدالة أم لا. الإجابة النموذجية: يمكن إيجاد قيمة النهاية بالتعويض المباشر إذا كانت الدالة كثيرة الحدود، أو إذا كانت الدالة نسبية ولم تكن نتيجتها كسرًا في صورة نموذج مُبهم.

إجابات إضافية

87a.

[0, 105] scl: 10 by [40, 100] scl: 5

يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا موجبًا.

87b. $r \approx 0.975$؛ يبين معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطاً خطيًا موجبًا قويًا. بما أن $t \approx 2.306$ و $12.41 > 2.306$، يكون الإحصاء في إطار المنطقة الحرجة، وتكون فرضية العدم مرفوضة. ولهذا، يكون الارتباط مهمًا عند المستوى 5%.

87c. $\hat{y} = 0.295x + 49.927$؛ الميل $a = 0.295$ يشير إلى أنه بالنسبة لكل سنة إضافية، يزيد متوسط العمر المتوقع بمعدل 0.295 سنويًا. نقطة التقاطع مع المحور $b = 49.927$ تبين أن متوسط العمر المتوقع عام 1900 كان 50 عامًا تقريبًا.

87d. بالاستعانة بهذا النموذج، يصبح متوسط العمر المتوقع عام 2080 هو 103 أعوام تقريبًا، وهذا ليس منطقيًا.

التدريس المتمايز BL

التوسع افترض أن $\lim_{x \to 7} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to 7} [f(x) \cdot g(x)] \neq 0$. أوجد دالتين تنطبق عليهما العبارتان.

الإجابة النموذجية: $f(x) = 49 - x^2$ و $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 56}$

الاستكشاف 11-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
ميل المنحنى

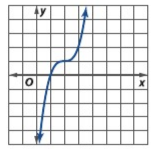
الهدف

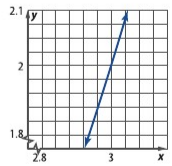
- استخدم تقنية TI-Nspire لتقدير ميل المنحنى

يُعد ميل المستقيم كمعدل تغير ثابت مفهومًا مألوفًا. لا يوجد معدل تغير ثابت للمنحنيات العامة نظرًا لأن الميل يكون مختلفًا عند كل نقطة بالتمثيل البياني.

ومع ذلك، تكون التمثيلات البيانية لمعظم الدوال خطية بشكل موضعي. يكون ذلك، إذا درست التمثيل البياني لدالة عند كل فترة صغيرة جدًا، فستظهر في صورة خطية.

بالنظر إلى المستقيمات المتقاطعة المتتابعة، من المحتمل تطبيق الميل على المنحنى.



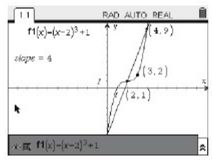


النشاط مستقيمات متقاطعة

قدّر ميل تمثيل $y = (x - 2)^3 + 1$ البياني عند $(3, 2)$.

الخطوة 1 أدخل $y = (x - 2)^3 + 1$ في f1. ثم احسب ميل القاطع على المنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2$ و $x = 4$.

ميل القاطع هو 4.

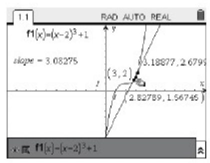


الخطوة 2 أوجد ميل القاطع لمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2.5$ و $x = 3.5$.

ميل القاطع هو 3.25.

الخطوة 3 أوجد ميل القاطع على لمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2.8$ و $x = 3.2$.

ميل القاطع هو 3.04.



الخطوة 4 أوجد ميل 3 مستقيمات قاطعة أو أكثر عند فترات متناقصة حول $(3, 2)$.

بتناقص الفترة حول $(3, 2)$، يقترب ميل القاطع من 3. إذًا، ميل $y = (x - 2)^3 + 1$ عند $(3, 2)$ هو 3 تقريبًا.

التمارين

قدّر ميل كل دالة عند النقطة المبينة.

1. $y = (x + 1)^2$; $(-4, 9)$ **−6**
2. $y = x^3 - 5$; $(2, 3)$ **12**
3. $y = 4x^4 - x^2$; $(0.5, 0)$ **1**
4. $y = \sqrt{x}$; $(1, 1)$ **0.5**

تحليل النتائج

5. **التحليل** صف التغير الحادث في قاطع على تمثيل بياني لدالة حيث تقترب نقاط التقاطع من نقطة مبينة (a, b).
6. **التخمين** صف الطريقة التي يمكنك بها تحديد الميل الدقيق لمنحنى عند نقطة مبينة.

5. الإجابة النموذجية: باقتراب النقاط التي يمر عبرها قاطع من (a, b)، يقترب القاطع أكثر وأكثر من المماس للدالة عند (a, b).

6. الإجابة النموذجية: أوجد حد قيم ميل المستقيمات القاطعة باقترابها من مماس المنحنى عند النقطة المبينة.

1 التركيز

الهدف استخدم تقنية TI-Nspire لتقدير ميل المنحنى.

نصيحة للتدريس

ذكّر الطلاب بكيفية إيجاد ميل المستقيم. واسألهم عن كيف يمكنهم تطبيق تلك الطريقة في إيجاد ميل المنحنى.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات. واطلب من المجموعات العمل معًا لإكمال النشاط وتحليل النتائج في التمرينين 5 و 6.

تدريب اطلب من الطلاب إكمال التمرينات من 1 إلى 4.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمرين 4 في التقييم ما إذا كان الطلاب يمكنهم استخدام تقنية TI-Nspire في تقدير ميل الدالة عند نقطة معينة أم لا.

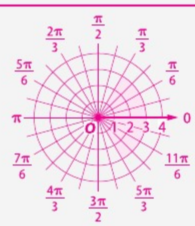
من العملي إلى النظري

اطرح السؤال التالي:

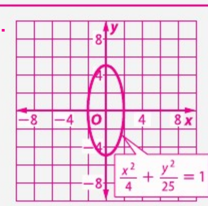
- كيف يرتبط ميل المماس للمنحنى بالدالة عند تلك النقطة؟ إنه معدل تغير الدالة عند تلك النقطة.

إجابات إضافية (الدرس 11-2)

88a.



89.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 11-3 إيجاد متوسط معدل التغيير باستخدام المستقيم القاطع.

الدرس 11-3 إيجاد معدل التغير اللحظي بحساب ميل المماس.
إيجاد المتوسط والسرعة اللحظية.

بعد الدرس 11-3 استخدام المشتقات في إيجاد التعابير وحساب السرعة اللحظية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما شكل التمثيل البياني الذي يمثل ارتفاع لاعب السقوط الحر في الزمن قبل فتح المظلة؟ قطع مكافئ

الدرس 11-3 المماسات والسرعة المتجهة

السابق

- لقد أوجدت متوسط معدلات التغيير باستخدام مستقيمات قاطعة.

الحالي

1. إيجاد معدلات التغير اللحظي عن طريق حساب قيم ميل المماس.
2. إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية.

لماذا؟

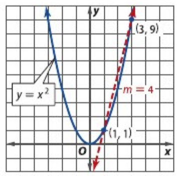
- عندما يقفز لاعب قفز بالمظلات من إحدى الطائرات، تسبب الجاذبية زيادة سرعة هبوطه. ولهذا السبب، تختلف سرعة لاعب القفز بالمظلات في كل لحظة قبل الوصول إلى السرعة النهائية أو فتح المظلة.

المفردات الجديدة
خط المماس tangent line
معدل التغير اللحظي instantaneous rate of change
ناتج قسمة الفرق difference quotient
سرعة لحظية instantaneous velocity

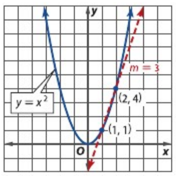
1 المماسات

قمت بحساب متوسط معدل التغيير بين نقطتين على التمثيل البياني لدالة غير خطية من خلال العثور على ميل مستقيم قاطع عبر هذه النقاط. في هذا الدرس، طورنا طريقة لإيجاد ميل مثل هذه الدوال في كل لحظة أو نقطة على المنحنى.

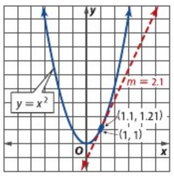
توضح التمثيلات البيانية الموجودة أدناه تقديرات أفضل بالتتابع $y = x^2$ في $(1, 1)$ باستخدام مستقيمات قاطعة.



الشكل 11.3.1



الشكل 11.3.2

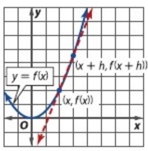


الشكل 11.3.3

لاحظ أنه كلما تحركت النقطة الموجودة في أقصى اليمين بدرجة أقرب وأقرب للنقطة $(1, 1)$، يوفر المستقيم القاطع تقديرًا خطيًا أفضل للمنحنى بالقرب من النقطة. ونطلق على أفضل هذه التقديرات الخطية اسم **المماس** للتمثيل البياني على $(1, 1)$. يمثل ميل هذا المستقيم معدل التغيير في ميل المنحنى في هذه اللحظة. ولتحديد كلٍ من هذه الحدود بدقة أكبر، نستخدم نهايات.

لتحديد ميل المماس إلى $y = f(x)$ على النقطة $(x, f(x))$.
أوجد ميل القاطع عبر هذه النقطة ونقطة أخرى على المنحنى.
افترض أن الإحداثي x للنقطة الثانية هو $x + h$ لبعض القيمة الصغيرة لــ h.
ويكون الإحداثي y المقابل لهذه النقطة إذًا هو $f(x + h)$. كما هو موضح في الشكل 11.3.4. يتم إيجاد ميل القاطع عبر هاتين النقطتين باستخدام

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \text{ أو } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



الشكل 11.3.4

ويطلق على هذا التعبير اسم **ناتج قسمة الفرق**.

عندما تقترب النقطة الثانية من الأولى أو حيث تكون $h \to 0$، يقترب القاطع من المماس عند $(x, f(x))$. نحدد ميل المماس عند x، الذي يمثل معدل التغير اللحظي للدالة عند هذه النقطة، عبر العثور على حدود ميل المستقيمات القاطعة عند $h \to 0$.

المفهوم الأساسي معدل التغير اللحظي

يكون معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني لــ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو الميل m للمماس عند $(x, f(x))$ الذي يُمكن إيجاده باستخدام $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط وجود النهاية.

يمكنك استخدام هذا التعبير لإيجاد ميل المماس لتمثيل نقطة محددة بيانيًا.

نصيحة دراسية
معدل التغير اللحظي عند حساب حد قيم ميل المستقيمات القاطعة عند $h \to 0$، أي حد ينطوي على قيمة h لم يتم قسمته سيكون 0.

مثال 1 ميل تمثيل بياني عند نقطة ما

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = x^2$ عند النقطة (1, 1).

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة معدل التغير اللحظي

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $x = 1$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$ $f(1) = 1^2$ و $f(1+h) = (1+h)^2$

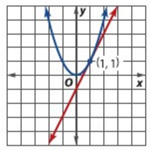
$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$ اضرب.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$ بسّط وحلل إلى العوامل.

$= \lim_{h \to 0} (2 + h)$ اقسم على h

$= 2 + 0$ أو 2 خاصية الجمع للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة

ميل التمثيل البياني عند (1, 1) هو 2، كما هو موضح.



تمرين موجّه

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة لكل دالة عند النقطة المذكورة.

1A. $y = x^2$; (3, 9) **6**   1B. $y = x^2 + 4$; (−2, 8) **−4**

يمكن أيضًا استخدام تعبير معدل التغير اللحظي لإيجاد معادلة لميل المماس لأحد التمثيلات البيانية عند أي نقطة x.

مثال 2 ميل تمثيل بياني عند أي نقطة

أوجد معادلة لميل منحنى الدالة $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة.

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة معدل التغير اللحظي

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$ $f(x) = \frac{4}{x}$ و $f(x+h) = \frac{4}{x+h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$ أضف كسورًا في البسط ثم بسّط.

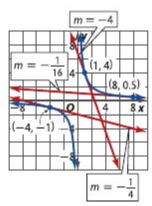
$= \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$ بسّط.

$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$ اقسم على h وبسّط.

$= \frac{-4}{x^2 + x(0)}$ خاصيتا ناتج القسمة والمجموع للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة

$= \frac{-4}{x^2}$ بسّط.

معادلة ميل التمثيل البياني عند أي نقطة هي $m = -\frac{4}{x^2}$، كما هو موضح.



تمرين موجّه

أوجد معادلة لميل منحنى الدالة m لكل دالة عند أي نقطة.

2A. $y = x^2 - 4x + 2$ **$m = 2x - 4$**   2B. $y = x^3$ **$m = 3x^2$**

- ماذا سيحدث لشكل التمثيل البياني الذي يمثل الموقف بعد فتح المظلة؟ يصبح ميل المنحنى أكثر تدرجًا. وبعد فتح المظلة، تنخفض سرعة السقوط انخفاضًا هائلاً.

1 المماسات

يوضح المثالان 1 و 2 كيفية استخدام صيغة معدل التغير اللحظي في إيجاد منحنى دالة معلومة عند نقطة معينة، أو في إيجاد المعادلة المستخدمة في حساب منحنى دالة معلومة عند نقطة معلومة من خلال إيجاد منحنى ميل خط المماس للتمثيل البياني للدالة عند تلك النقطة.

التقييم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد ميل المماس لمنحنى التمثيل البياني $y = x^2 + 1$ عند (2, 5). **4**

2 أوجد معادلة الميل في التمثيل البياني لـ $y = x^2 + 2x$ عند أي نقطة. **$m = 2x + 2$**

التركيز على محتوى الرياضيات

المماس تنتج صيغة معدل التغير اللحظي ميل خط المماس للدالة عند نقطة معينة. ومعادلة المماس للدالة عند نقطة معينة a هي $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

إرشاد للمعلمين الجدد

المماس في الهندسة، يتقاطع المماس مع الدائرة عند نقطة واحدة فقط دون أن يتقاطع مع الدائرة عند أي نقطة أخرى. ويتقاطع المماس مع المنحنى عند نقطة دون أن يتجاوز المنحنى عند تلك النقطة، ولكنه قد يتقاطع مع المنحنى عند جزء آخر من التمثيل البياني.

2 السرعة اللحظية

السرعة اللحظية قمت بحساب متوسط سرعة جسم ساقط عبر قسمة المسافة التي قطعها على الوقت الذي استغرقه الجسم ليقطع هذه المسافة. السرعة المتجهة هي السرعة مضاف إليها اتجاه البعد. يمكنك حساب متوسط السرعة المتجهة باستخدام نفس النهج الذي استخدمته عند حساب متوسط السرعة.

المفهوم الأساسي متوسط السرعة

إذا تم ذكر الوضع في صورة دالة للزمن $f(t)$، فإنه لأي نقطتين زمنيتين a و b، يتم إيجاد متوسط السرعة v باستخدام الصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

مثال 3 من الحياة اليومية متوسط سرعة جسم ما

الماراثون يمكن إيجاد المسافة بالكيلومترات التي قطعها عدَّاء مشترك في منافسة ماراثون بوسطن بعد زمن محدد t بالساعات من خلال $f(t) = -1.3t^2 + 12t$. ماذا كان متوسط سرعة العدَّاء بين الساعتين الثانية والثالثة من السباق؟

أولًا، أوجد المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند $a = 2$ و $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$	$a = 2$ و $b = 3$	$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$
$f(2) = 18.8$	بسّط.	$f(3) = 24.3$

والآن استخدم قانون متوسط السرعة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ قانون متوسط السرعة المتجهة

$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$$ $a = 2$ و $b = 3$، و $f(a) = 18.8$، و $f(b) = 24.3$

$$= 5.5$$ بسّط.

كان متوسط سرعة العدَّاء خلال الساعة الثالثة 5.5 km/h للأمام.

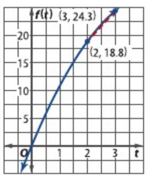
الربط بالحياة اليومية

أكمل العدَّاء الكيني روبرت ك. شيرويت ماراثون بوسطن لعام 2008 في أقل من ساعتين وثمان دقائق. وفي المتوسط، أكمل ميلًا كل أربع دقائق وخمسين ثانية.

المصدر: جمعية بوسطن الرياضية

تمرين موجّه

3. بالون ماء يتم قذف بالون ماء لأعلى بشكل مستقيم باستخدام جهاز إطلاق. يمكن تحديد ارتفاع البالون بالأمتار t بعد إطلاقه بثوانٍ عن طريق $d(t) = 2 + 20t - 5t^2$. ماذا كان متوسط سرعة البالون بين t يساوي 1 و 2؟ **5 m/s**



عند النظر بتمعن في المثال 3، يمكن ملاحظة أنه تم إيجاد السرعة عبر حساب ميل القاطع الذي يصل بين النقطتين (2, 18.8) و (3, 24.3)، كما هو موضح في التمثيل البياني. السرعة التي تم حسابها هي متوسط السرعة التي قطعها العدَّاء على مدار فترة زمنية ولا تمثل **السرعة اللحظية**، وهي السرعة التي وصل إليها العدَّاء عند نقطة زمنية محددة.

لمعرفة السرعة الحقيقية للعدَّاء عند نقطة زمنية محددة t، نوجد معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني لـ $f(t)$ عند t.

المفهوم الأساسي السرعة اللحظية

إذا تم ذكر المسافة التي يقطعها جسم ما في صورة دالة زمنية $f(t)$، إذًا يتم إيجاد السرعة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t باستخدام

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

بشرط وجود النهاية.

2 السرعة اللحظية

يبين المثال 3 كيفية حساب السرعة المتوسطة الجسم. **ويبين المثالان 4 و 5** كيفية استخدام صيغة السرعة اللحظية في حساب السرعة اللحظية للجسم عند نقطة معينة أو في إيجاد معادلة لحساب السرعة اللحظية للجسم عند أي نقطة في الدالة.

إرشاد للمعلمين الجدد

السرعة المتجهة يسُتخدم مصطلح *السرعة المتجهة* عادةً في الإشارة إلى مقدار المتجه لكل من السرعة والاتجاه. وتسُتخدم السرعة المتجهة في هذه الوحدة في الإشارة إلى شدة *السرعة المتجهة* أو السرعة.

مثال إضافي

3 الفيزياء كجزء من تجربة في الفيزياء، قُذفت كرة لأعلى، وكان ارتفاع الكرة $h(t) = -5t^2 + 30t + 5$، حيث t هو الزمن بالثواني وتم قياس ارتفاع الكرة بالقدم. كم كانت السرعة المتوسطة للكرة بين $t = 1$ و $t = 2$؟ **15 ft/sec**

مثال 4 السرعة اللحظية عند نقطة ما

تم إسقاط كرة بيسبول من أعلى مبنى يرتفع عن الأرض 600 m. يُمكن إيجاد ارتفاع كرة قدم بالأمتار بعد مرور t من الثواني باستخدام $f(t) = 600 - 5t^2$. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ لكرة قدم عند 5 ثوان.

لمعرفة السرعة اللحظية، افترض أن $t = 5$ وطبق قانون السرعة اللحظية.

$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$	قانون السرعة اللحظية
$v(5) = \lim_{h\to 0} \frac{600 - 5(5+h)^2 - [600 - 5(5)^2]}{h}$	$f(t+h) = 600 - 5(5+h)^2$ و $f(t) = 600 - 5(5)^2$
$= \lim_{h\to 0} -\frac{50h - 5h^2}{h}$	اضرب وبسّط.
$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-50 - 5h)}{h}$	عامل.
$= \lim_{h\to 0} (-50 - 5h)$	اقسم على h
$= -50 - 5(0)$ أو -50	خاصية الفرق للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة

تبلغ السرعة اللحظية لكرة قدم عند 5 ثوان 50 m/s. تشير علامة السالب إلى أن ارتفاع الكرة يقل.

تمرين موجّه

4. أسقط أحد عمال غسل النوافذ غداءه دون قصد من المنصة التي يعمل عليها على ارتفاع 420 ft فوق سطح الأرض. يُمكن كتابة العلاقة بين موضع الغداء وسطح الأرض في صورة $d(t) = 420 - 5t^2$، حيث تتم كتابة الزمن t بالثواني وموضع الغداء بالأمتار. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ للغداء عند 7 ثوان. **−70 m/s**

يمكن أيضًا تحديد المعادلات لإيجاد السرعة اللحظية لجسم ما في أي لحظة زمنية t.

مثال 5 السرعة اللحظية عند أي نقطة

يتم إيجاد المسافة التي يتحركها جسيم ما على امتداد مسار من خلال المعادلة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، حيث يتم ذكر t بالثواني ومسافة الجسيم من نقطة انطلاقه بالسنتيمترات. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم عند أي نقطة زمنية.

طبق قانون السرعة اللحظية.

$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$	قانون السرعة اللحظية
$= \lim_{h\to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$	$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$ و $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$
$= \lim_{h\to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$	اضرب وبسّط.
$= \lim_{h\to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$	عامل.
$= \lim_{h\to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$	اقسم على h
$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$	خاصية الفرق للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة
$= 18 - 9t^2$	بسّط.

السرعة اللحظية للجسيم عند النقطة الزمنية t هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تمرين موجّه

5. يتم إيجاد المسافة بالأمتار لصاروخ مائي من الأرض بعد t ثانية من خلال $s(t) = 30t - 5t^2$. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للصاروخ المائي عند أي نقطة زمنية t. **$v(t) = 30 - 10t$**

انتبه!

التعويض تذكر توزيع علامة السالب التي تسبق $f(t)$ لكل حد تم تعويضه.

أمثلة إضافية

4 السياحة يقف السياح على برج مشاهدة طوله 100 m ليلقوا غالبًا العملات داخل نبع ماء. يمكن الحصول على ارتفاع العملة الساقطة من أعلى البرج بعد t ثانية من $h(t) = 100 - 5t^2$. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ للعملة بعد ثانيتين. **−20 m/sec**

5 النحل يمكن الحصول على المسافة التي يطيرها النحل الطنان في طريقه بالعلاقة $p(t) = 12t - 6t^3 + 1$، حيث t بالثانية وتُعطى المسافة من نقطة انطلاق النحل الطنان بالسنتيمتر. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للنحل الطنان عند أي نقطة. **$v(t) = 12 - 18t^2$**

إرشاد للمعلمين الجدد

السرعة تأكد من أن الطلاب يستوعبون الفرق بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية. فالسرعة المتوسطة هي السرعة المتوسطة بين نقطتين زمنيتين مختلفتين. بينما السرعة اللحظية هي السرعة عند نقطة زمنية معينة.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني قدم لمجموعات الطلاب الثنائية خيطًا وشريطًا لاصقًا. واطلب من كل مجموعات أن تشكّل الخيط على شكل قطع مكافئ وتلصقه على ورقة رسم بياني. ثم اطلب من الطلاب أن يضعوا مسطرةً بحيث تلمس القطع المكافئ عند نقطة واحدة فقط، لتُشكل مماس. اطلب من الطلاب تحديد ميل المماس. وناقش معهم العلاقة بين منحنى المماس ومعدل التغير اللحظي للدالة عند تلك النقطة.

التمارين

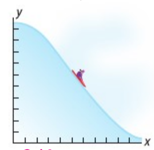
أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة عند القيم المبينة. (المثال 1)

1. $y = x^2 - 5x;\ (1, -4)$ و $(5, 0)$ **$-3;\ 5$**
2. $y = 6 - 3x;\ (-2, 12)$ و $(6, -12)$ **$-3;\ -3$**
3. $y = x^2 + 7;\ (3, 16)$ و $(6, 43)$ **$6;\ 12$**
4. $y = \frac{3}{x};\ (1, 3)$ و $(3, 1)$ **$-3;\ -\frac{1}{3}$**
5. $y = x^3 + 8;\ (-2, 0)$ و $(1, 9)$ **$12;\ 3$**
6. $y = \frac{1}{x+2};\ (2, 0.25)$ و $(-1, 1)$ **$-\frac{1}{16};\ -1$**

أوجد معادلة لميل التمثيل البياني لكل دالة عند أي نقطة. (المثال 2)

7. $y = 4 - 2x$ **$m = -2$**
8. $y = -x^2 + 4x$ **$m = -2x + 4$**
9. $y = x^2 + 3$ **$m = 2x$**
10. $y = x^3$ **$m = 3x^2$**
11. $y = 8 - x^2$ **$m = -2x$**
12. $y = 2x^2$ **$m = 4x$**
13. $y = -2x^3$ **$m = -6x^2$**
14. $y = x^2 + 2x - 3$ **$m = 2x + 2$**
15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$**
16. $y = \frac{1}{x^2}$ **$m = -\frac{2}{x^3}$**

17. **التزلج** يتم إيجاد موضع الشخص الرأسي على تل للتزلج بعد قطع مسافة أفقية بقيمة x وحدات بعيدًا عن قمة التل من خلال $y = 0.06x^3 - 1.08x^2 + 51.84$. (المثال 2)



a. أوجد معادلة ميل التل m عند أي مسافة x. **$m = 0.18x^2 - 2.16x$**

b. أوجد ميل التل عند x يساوي 2 و 5 و7. **$-3.6,\ -6.3,\ -6.3$**

يتم إيجاد موضع جسم ما بالكيلومترات بعد t دقيقة من خلال $s(t)$ أوجد متوسط السرعة للجسم بوحدة كيلومتر في الساعة للفترة الزمنية المذكورة. تذكر التحويل من الدقائق للساعات. (المثال 3)

18. $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$ عند $3 \le t \le 5$ **45 km/h**
19. $s(t) = 1.08t - 30$ عند $4 \le t \le 8$ **64.8 km/h**
20. $s(t) = 0.2t^2$ عند $2 \le t \le 4$ **72 km/h**
21. $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$ عند $4 \le t \le 7$ **49.2 km/h**
22. $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$ عند $4 \le t \le 4.5$ **45 km/h**
23. $s(t) = 0.6t + 20$ عند $3.8 \le t \le 5.7$ **36 km/h**

42. **الكتابة** تم إيجاد عدد الكلمات w التي كتبها شخص ما بعد t دقيقة من خلال $w(t) = 10t^2 - \frac{1}{2}t^3$. (المثال 3)

a. كم بلغ متوسط عدد الكلمات التي كتبها الشخص في الدقيقة في الفترة ما بين الدقيقة الثانية والرابعة؟ **a. 46 كلمة/دقيقة**

b. كم بلغ متوسط عدد الكلمات التي كتبها الشخص في الدقيقة في الفترة ما بين الدقيقة الثالثة والسابعة؟ **60.5 كلمة/دقيقة**

يُمكن إيجاد المسافة d التي يرتفع فيها جسم ما عن سطح الأرض بعد t ثانية من إسقاطه باستخدام $d(t)$. أوجد السرعة اللحظية للجسم عند القيمة المذكورة لـ t. (المثال 4)

25. $d(t) = 100 - 16t^2;\ t = 3$ **-96 ft/s**
26. $d(t) = 38t - 16t^2;\ t = 0.8$ **12.4 ft/s**
27. $d(t) = -16t^2 - 47t + 300;\ t = 1.5$ **-95 ft/s**
28. $d(t) = 500 - 30t - 16t^2;\ t = 4$ **-158 ft/s**
29. $d(t) = -16t^2 - 400t + 1700;\ t = 3.5$ **-512 ft/s**
30. $d(t) = 150t - 16t^2;\ t = 2.7$ **63.6 ft/s**
31. $d(t) = 1275 - 16t^2;\ t = 3.8$ **-121.6 ft/s**
32. $d(t) = 853 - 48t - 16t^2;\ t = 1.3$ **-89.6 ft/s**

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم مُعرفًا عند $s(t)$ لأي نقطة زمنية t. (المثال 5)

33. $s(t) = 14t^2 - 7$ **$v(t) = 28t$**
34. $s(t) = t - 3t^2$ **$v(t) = 1 - 6t$**
35. $s(t) = 5t + 8$ **$v(t) = 5$**
36. $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ **$v(t) = -2t + 4$**
37. $s(t) = t^3 - t^2 + t$ **$v(t) = 3t^2 - 2t + 1$**
38. $s(t) = 11t^2 - t$ **$v(t) = 22t - 1$**
39. $s(t) = \sqrt{t} - 3t^2$ **$v(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t} - 6t$**
40. $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ **$v(t) = 24t - 6t^2$**

41. **لاعب قفز بالمظلات** راجع بداية الدرس. يمكن تحديد الموضع d للاعب القفز بالمظلات بالأمتار بالارتباط بسطح الأرض من خلال $d(t) = 5{,}000 - 5t^2$. حيث t هو عدد الثواني التي انقضت بعد قفز لاعب القفز بالمظلات من الطائرة. (المثال 5)

a. ما متوسط السرعة اللحظية للاعب القفز بالمظلات في الفترة بين الثانية الثانية والخامسة من القفزة؟ **-35 m/s**

b. كم بلغت السرعة اللحظية للاعب القفز بالمظلات عند الثانية 2 والثانية 5؟ **-20 m/s; -50 m/s**

c. أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للاعب القفز بالمظلات. **$v(t) = -10t$**

42. **الغوص** تم ذكر المسافة d التي قطعها غواص من المرتفعات بالأمتار فوق سطح البحر بعد t ثوانٍ.

B

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.7	42.1	40.6	33.8	25.3	14.2	0.85

a. احسب متوسط سرعة الغواص للفترة $0.5 \le t \le 1.0$. **-6.2 m/s**

b. استخدم الانحدار التربيعي لإيجاد معادلة لتمثيل $d(t)$ نموذجيًا. قم بتمثيل $d(t)$ والبيانات الموجودة في نفس المستوى الإحداثي بيانيًا. **انظر الهامش.**

c. أوجد تعبيرًا للسرعة اللحظية $v(t)$ للسائق واستخدمه لتقدير سرعة السائق بعد 3 ثوان. **$v(t) = -9.82t - 0.04;\ -29.5$ m/s**

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-45 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

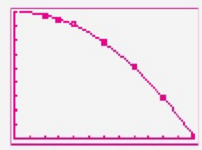
انتبه!

خطأ شائع ذكّر الطلاب في التمارين 25–32 أن يستخدموا صيغة معدل التغير اللحظي. فلن يمكنهم إيجاد قيمة $h(t)$ للقيمة المُعطاة لـ t لإيجاد السرعة المتجهة الصحيحة.

تحليل الخطأ ينبغي أن يتذكر الطلاب في التمرين 55 أن التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة يأخذ شكل "V" وينتج ميلين مختلفين. والدالة ليست متصلة.

إجابات إضافية

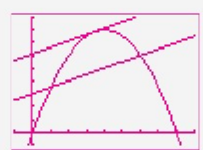
42b. $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$



[0, 3] scl: 0.25 by [0, 45] scl: 5

54d. إذا كان المستقيمان لهما نفس الميل، فهما مستقيمان متوازيان.

54e.



[−1, 9] scl: 1 by [−2, 18] scl: 2

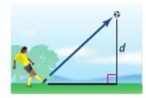
الإجابة النموذجية: نعم، الخطان متوازيان.

55. وفاء؛ الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $f(x)$ يميل بمقدار -1 عندما تكون $x < 0$ ويميل بمقدار 1 عندما تكون $x > 0$. ومن ثم، سيكون التمثيل البياني لهذه المعادلة خطين أفقيين

$$y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ولن تكون متصلة.

43. **كرة القدم** يمكن لحارس مرمى ركل كرة بسرعة مرتفعة تبلغ 75 m/s افترض أنه يُمكن إيجاد ارتفاع d الكرة بالأمتار بعد t ثانية من ركلها باستخدام $d(t) = -5t^2 + 25t + 1$.



a. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ لكرة القدم. $v(t) = -10t + 25$

b. ما السرعة التي تقطع بها الكرة المسافة بعد 0.5 ثانية من ركلها؟ **20 m/s**

c. إذا كانت السرعة اللحظية للكرة هي 0 عندما تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها، ففي أي وقت ستصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها؟ $t \approx 2.344$ s

d. ما أقصى ارتفاع للكرة؟ ≈ 32.25 m

44–47. انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للتمثيلات البيانية.

أوجد معادلة لخط مماس للتمثيل البياني للدالة وعمودي للخط المُعطى. ثم استخدم حاسبة تمثيل بياني لتمثل الدالة وكلا الخطين بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

44. $f(x) = x^2 + 2x$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$ $y = 2x$

45. $g(x) = -4x^2$; $y = \frac{1}{4}x + 5$ $y = -4x + 1$

46. $f(x) = -\frac{1}{6}x^2$; $y - x = 2$ $y = -x + \frac{3}{2}$

47. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$; $y = -\frac{1}{6}x + 9$ $y = 6x - 2$

48. **الفيزياء** يتم إيجاد المسافة s لجسيم يتحرك في خط مستقيم من خلال $s(t) = 3t^3 + 8t + 4$، حيث يتم إيجاد t بالثواني ويتم قياس s بالأمتار.

a. أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم عند أي نقطة زمنية. $v(t) = 9t^2 + 8$

b. أوجد سرعة الجسيم عند t يساوي 2 و 4 و 6 ثوان. **44 m/s, 152 m/s, 332 m/s**

C

كل تمثيل بياني يمثل معادلة لميل دالة عند أي نقطة. طابق كل تمثيل بياني بدالته الأصلية.

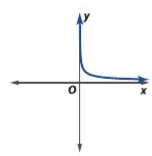
49. $f(x) = \frac{a}{x}$ **c**

50. $g(x) = ax^5$ **d**

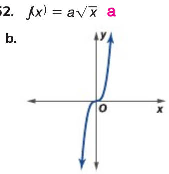
51. $h(x) = ax^4$ **b**

52. $j(x) = a\sqrt{x}$ **a**

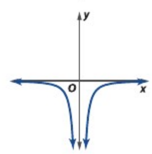
a.



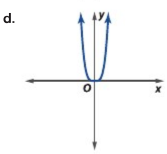
b.



c.



d.



53. **المقذوف** عندما يتم قذف جسم ما لأسفل بشكل مستقيم، يمكن تمثيل إجمالي المسافة y التي يقطعها الجسم سقوطًا من خلال $y = 16t^2 + v_0 t$، حيث يتم قياس الزمن t بالثواني والسرعة المبدئية v_0 بالأقدام في الثانية.

a. إذا استغرق جسم ما بعد قذفه بشكل مستقيم من ارتفاع 816 ft 6 ثوان ليرتطم بالأرض، كم بلغت السرعة المبدئية للجسم؟ **−40 ft/s**

b. كم بلغ متوسط سرعة الجسم؟ **−136 ft/s**

c. كم بلغت سرعة الجسم عند ارتطامه بالأرض؟ **−232 ft/s**

54. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف نظرية متوسط القيمة. تنص النظرية أنه إذا كانت الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على (a, b)، إذًا توجد هناك نقطة c في (a, b) حيث يكون المماس موازيًا للخط الذي يمر بالنقطة $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

a. **تحليليًا** أوجد متوسط معدل التغيير لـ $f(x) = -x^2 + 8x$ في الفترة $[1, 6]$ وأوجد معادلة للمستقيم القاطع ذي الصلة بالنقطتين $(1, f(1))$ و $(6, f(6))$. **1; $y = x + 6$**

b. **تحليليًا** أوجد معادلة لميل $f(x)$ عند أي نقطة. $m = -2x + 8$

c. **تحليليًا** أوجد نقطة في الفترة $(1, 6)$ حيث يساوي ميل المماس لـ $f(x)$ ميل القاطع الموجود في الجزء a. أوجد معادلة المماس لـ $f(x)$ عند هذه النقطة. **(3.5, 15.75); $y = x + 12.25$**

d. **لفظيًا** كيف يرتبط القاطع في الجزء a والمماس في الجزء b؟ اشرح.

e. **التمثيل البياني** باستخدام حاسبة تمثيل بياني، قم بتمثيل $f(x)$ والقاطع والمماس بيانيًا على نفس الشاشة. هل يثبت التمثيل البياني إجابتك في الجزء d؟ اشرح. **d–e. انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

55. **تحليل الخطأ** طُلب من ياسمين ووفاء إيجاد معادلة للميل عند أي نقطة لـ $f(x) = |x|$. تعتقد ياسمين أن التمثيل البياني للميل سيكون متصلًا لأن الدالة الأصلية متصلة. وتخالفها وفاء في الرأي. هل رأي أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

56. **التحدي** أوجد معادلة لميل $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة. $m = 8x^3 + 9x^2 - 2$

57. **التبرير** صحيح أم خطأ: يكون التمثيل النموذجي للسرعة اللحظية لجسم ما من خلال $s(t) = at + b$ دائمًا a. **انظر الهامش.**

58. **التبرير** أثبت أن $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ عند $f(x) = x^2 + 1$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

59. **الكتابة في الرياضيات** افترض أن $f(t)$ يمثل الرصيد بالدراهم في حساب مصرفي بعد t أعوام من الإيداع المبدئي. فسر كلاً مما يلي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

a. $\frac{f(4) - f(0)}{4} \approx 41.2$

b. $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \approx 42.9$

إجابة إضافية

57. صحيح؛ الإجابة النموذجية: لأن $s(t)$ دالة خطية ذات منحنى ثابت a. والسرعة اللحظية للجسم عند أي نقطة زمنية هي a.

مراجعة شاملة

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

60. $\lim_{x \to 4} (x^2 + 2x - 2)$ 22

61. $\lim_{x \to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$ 1

62. $\lim_{x \to 0} (x + \sin x)$ 0

63. **الهيدروليكا** يتم إيجاد السرعة المتجهة، بالبوصات لكل ثانية، لجزيء من مادة سائلة يتدفق عبر أنبوب باستخدام $v(r) = k(R^2 - r^2)$، حيث R هو نصف قطر الأنبوب بالسنتيمترات، وr هو المسافة التي بين الجزيء ومركز الأنبوب بالسنتيمترات، و k هو عبارة عن ثابت. افترض أنه بالنسبة لسائل ما داخل أنبوب $k = 0.65$ و $R = 0.5$.

a. مثّل بيانيًا $v(r)$. **انظر الهامش.**

b. حدد السرعة الحدية للجزيئات الأكثر قربًا من جدار الأنبوب. 0 cm

64. **التعليم** يخطط أستاذ جامعي لتقدير درجات اختبار على شكل منحنى. ويبلغ وسط درجات الاختبار 65، ويبلغ الانحراف المعياري 7. ويريد الأستاذ أن يوزع الدرجات كما هو موضّح في الجدول. افترض أن التقديرات قد تم توزيعها بشكل اعتيادي.

a. ما أقل درجة ممكنة للحصول على تقدير امتياز؟ 72

b. إذا كان تقدير مقبول هو أقل تقدير للنجاح، فأوجد أقل درجة للنجاح. 58

c. ما الفترة الخاصة بتقديرات جيد جدًا؟ 68–71

الصف	النسبة المئوية للفصل
امتياز	15
جيد جدًا	20
جيد	30
مقبول	20
راسب	15

أوجد الحد *النوني* المحدد لكل متتالية هندسية.

65. $a_4 = 50, r = 2, n = 8$ 800

66. $a_4 = 1, r = 3, n = 10$ 729

67. a_6 عند $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}, a_1 = -2$ $-\frac{2}{3125}$

68. a_5 عند $a_n = (-3)a_{n-1}, a_1 = 11$ 891

أوجد الأوساط الحسابية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

69. 7 أوساط؛ 62 و -2 54, 46, 38, 30, 22, 14, 6

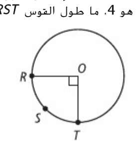
70. 4 أوساط؛ 17.2 و 47.7 23.3, 29.4, 35.5, 41.6

71. 3 أوساط؛ -5.6 و 8 -2.2, 1.2, 4.6

72. 9 أوساط؛ -45 و 115 $-29, -13, 3, 19, 35, 51, 67, 83, 99$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

73. **SAT/ACT** إذا كان طول نصف قطر الدائرة ذات المركز O هو 4، ما طول القوس RST؟ A



A 2π
B 4π
C 8π
D 12π
E 16π

74. **المراجعة** أي مما يلي يقدم أفضل وصف للنقطة عند $(0, 0)$ على $f(x) = 2x^5 - 5x^4$؟ G

F حد عظمى مطلقة
G حد عظمى نسبية
H حد صغرى محلية
J حد صغرى محلية

75. عند إسقاط كرة البولينغ، يتم إعطاء المسافة $d(t)$ التي قطعتها في t ثانية من خلال $d(t) = 5t^2$. يتم إعطاء سرعتها بعد ثانيتين من خلال $\lim_{h \to 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$. ما سرعة كرة البولينغ بعد ثانيتين؟ C

A 14 m/s
B 18 m/s
C 20 m/s
D 23 m/s

76. **المراجعة** يعتمد الربح الشهري P لإحدى شركات التصنيع على عدد الوحدات x التي تم تصنيعها ويمكن وصفها من خلال $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - 34x^2 + 1012x, 0 \le x \le 50$. كم عدد الوحدات التي ينبغي تصنيعها شهريًا من أجل زيادة الأرباح؟ G

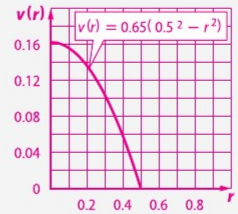
F 15
G 22
H 37
J 46

4 التقييم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب وصف العلاقة بين منحنى المماس للدالة عند نقطة ومعدل تغير الدالة عند تلك النقطة. الإجابة النموذجية: منحنى المماس هو معدل تغير الدالة عند تلك النقطة.

إجابة إضافية

63a.



التدريس المتمايز BL

التوسع أوجد معادلة المماس للمنحنى $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 6x + 5$ عند أي نقطة. استخدم هذه النتيجة والنتيجة التي توصلت إليها في التمرين 56 في وصف أي أنماط تلاحظها بين الدالة الأصلية والدالة التي تمثل ميل منحنى الدالة عند أي نقطة. $f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 2x - 6$؛ اضرب المعامل في الأس. اطرح 1 من كل أس. واحذف الثابت.

الوحدة 11 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-11 إلى 3-11

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت. (الدرس 1-11)

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ **1**

2. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ **غير موجودة**

3. $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-18}{x-3}$ **12**

4. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$ **0**

قدّر كل نهاية، إن وجدت. (الدرس 1-11)

5. $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x^2+1}$ **$\frac{3}{5}$**

6. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^3+3}$ **2**

7. $\lim_{x\to -2} e^{2x+3}$ **0.3679**

8. $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+20}}{x}$ **−1**

9. **المقتنيات** تزداد قيمة الطوابع التي لدى يوسف كل عام. ويُمكن تمثيل القيمة v للبطاقة بعد مرور عدد t من الأعوام باستخدام $v(t) = \frac{400t-2}{2t+15}$. (الدرس 1-11)

   a. مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \le t \le 10$. **انظر الهامش.**

   b. استخدم منحنى الدالة في تقدير قيمة الطوابع عند t يساوي 2 و 5 و 10 أعوام. **42; 80; 114**

   c. استخدم منحنى الدالة لإيجاد قيمة $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **200**

   d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الطوابع التي لدى يوسف. **ستزيد قيمة الطوابع التي لدى يوسف عن AED 200.**

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب. (الدرس 2-11)

10. $\lim_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$ **غير ممكن؛ عند $x = 9$، المقام يساوي 0.**

11. $\lim_{x\to -2} (2x^3+x^2-8)$ **−20**

12. **الحياة البرية** يُمكن تقدير تعداد الغزلان P بالمئات في حديقة وطنية بعد مرور عدد t من الأعوام باستخدام $P(t) = \frac{10t^3-40t+2}{2t^3+14t+12}$، حيث $t \ge 3$. وموضح أدناه تعداد الأعوام الخمسة. ما أكبر عدد للغزلان يُمكن أن يعيش داخل الحديقة الوطنية؟ (الدرس 2-11) **500 غزال**

أوجد قيمة كل نهاية. (الدرس 2-11)

13. $\lim_{x\to\infty} (15 - x^2 + 8x^3)$ **∞**

14. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x-2}{4x^3+5x^2}$ **$\frac{1}{2}$**

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{2x^4-14x^2+2}$ **0**

16. $\lim_{x\to\infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$ **$-\infty$**

17. **الاختيار من متعدد** أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5}{10-e^{\frac{16}{x}}}$. (الدرس 1-11) **A**

   A غير موجودة

   B $\frac{1}{2}$

   C $\frac{1}{5}$

   D $\frac{1}{10}$

أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة عند النقاط المبينة. (الدرس 3-11)

18. $y = x^2 - 3x$; $(2, -2)$ and $(-1, 4)$ **1; −5**

19. $y = 2 - 5x$; $(-2, 12)$ and $(3, -13)$ **−5; −5**

20. $y = x^3 - 4x^2$; $(1, -3)$ and $(3, -9)$ **−5; 3**

21. **الألعاب النارية** تم إطلاق ألعاب نارية بسرعة متجهة لأعلى تبلغ 30 m/s. افترض أنه يتم إيجاد الارتفاع d للألعاب النارية الذي يُقاس بالمتر خلال t ثانية بعد إطلاقها باستخدام $d(t) = -5t^2 + 30t + 1.5$. (الدرس 3-11)

   a. أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للألعاب النارية. **$v(t) = -10t + 30$**

   b. ما سرعة الألعاب النارية بعد 0.5 s من إطلاقها؟ **25 m/s**

   c. ما أقصى ارتفاع للألعاب النارية؟ **≈46.5 m**

22. **الاختيار من متعدد** أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة. (الدرس 3-11) **H**

   F $m = 7x$

   G $m = 7x - 2$

   H $m = 14x$

   J $m = 14x - 2$

يتم إيجاد موضع جسم ما بالكيلومترات بعد t دقيقة من خلال $s(t)$. أوجد متوسط السرعة المتجهة للجسم بوحدة كيلومتر في الساعة باستخدام قيمتي الفترة الزمنية t المذكورتين. تذكر التحويل من الدقائق للساعات. (الدرس 3-11)

23. $s(t) = 12 + 0.7t$ عند t يساوي 2 و 5 **42 km/h**

24. $s(t) = 2.05t - 11$ عند t يساوي 1 و 7 **123 km/h**

25. $s(t) = 0.9t - 25$ عند $3 \le t \le 6$ **54 km/h**

26. $s(t) = 0.5t^2 - 4t$ عند $4 \le t \le 8$ **120 km/h**

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان موقع جسم مُعرفًا عند $s(t)$ لأي لحظة زمنية t. (الدرس 3-11)

27. $s(t) = 4t^2 - 9t$ **$v(t) = 8t - 9$**

28. $s(t) = 2t - 13t^2$ **$v(t) = 2 - 26t$**

29. $s(t) = 2t - 5t^2$ **$v(t) = 2 - 10t$**

30. $s(t) = 6t^2 - t^3$ **$v(t) = 12t - 3t^2$**

الدروس من 1-11 إلى 3-11

التقييم التكويني

استخدام اختبار منتصف الوحدة القصير لتقويم تقدم الطلاب في الجزء الأول من الوحدة.

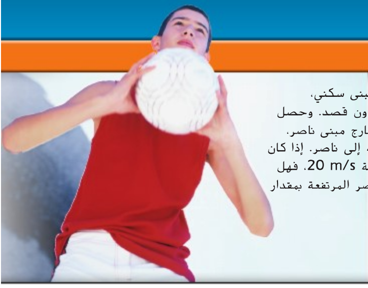
بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابة إضافية

9a.

[0, 10] scl: 1 by [−10, 120] scl: 10

الدرس 11-4 المشتقات



السابق

- حسبت ميل المماس لإيجاد معدل التغير اللحظي.

الحالي

1. إيجاد معدلات التغير اللحظي بواسطة حساب المشتقات.
2. استخدام قاعدتي ناتج الضرب وناتج القسمة لحساب المشتقات.

لماذا؟

- يقطن ناصر في الدور السادس بمبنى سكني، وسقطت منه كرة خارج النافذة دون قصد. وحصل منصور الذي يقف على الأرض خارج مبنى ناصر، على الكرة وحاول رميها مرة ثانية إلى ناصر. إذا كان منصور يستطيع رمي الكرة بسرعة 20 m/s. فهل يستطيع أن يوصلها إلى نافذة ناصر المرتفعة بمقدار 21 m فوق الأرض؟

المفردات الجديدة

مشتقة derivative
تفاضل differentiation
معادلة تفاضلية differential equation
عامل تفاضلي differential operator

1 قواعد أساسية

في الدرس 11-3، استخدمت النهايات لتحديد ميل خط المماس على التمثيل البياني لدالة عند أي نقطة. وتُسمى هذه النهاية مشتقة الدالة. **مشتقة** $f(x)$ هي $f'(x)$. والتي تُعطى بالمعادلة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

بشرط وجود النهاية. وتُسمى عملية إيجاد المشتقات **تفاضل**، وتُسمى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$. ثم أوجد قيمة المشتقة حيث $x = 1$ و 5.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ — تعريف المشتقة

$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$ — $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$ و $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$ — فكّك وبسّط.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$ — عامل.

$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$ — اقسم على h.

$= 8x + 4(0) - 5$ أو $8x - 5$ — خاصيتا المجموع والفرق لنهايات الدوال الثابتة والمحايدة

مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. أوجد قيمة $f'(x)$ حيث $x = 1$ و 5.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(1) = 8(1) - 5$	$x = 1$ و 5	$f'(5) = 8(5) - 5$
$f'(1) = 3$	بسّط.	$f'(5) = 35$

تمرين موجّه

أوجد مشتقة $f(x)$. ثم أوجد قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة.

1A. $f(x) = 6x^2 + 7; x = 2$ و 5

$f'(x) = 12x; f'(2) = 24, f'(5) = 60$

1B. $f(x) = -5x^2 + 2x - 12; x = 1$ و 4

$f'(x) = -10x + 2; f'(1) = -8, f'(4) = -38$

مشتقة الدالة $y = f(x)$ قد يُرمز إليها أيضًا بـ y' أو $\frac{df}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$. إذا كانت الدالة مسبوقة **بعامل تفاضلي** $\frac{d}{dx}$، فيجب عليك إذًا إيجاد مشتقة الدالة.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

بعد الدرس 11-4 حساب ميل المماس في إيجاد معدل التغير اللحظي.

الدرس 11-4 إيجاد معدل التغير اللحظي من خلال حساب المشتقات.
استخدام قاعدتي ناتج الضرب وناتج القسمة في حساب المشتقات.

بعد الدرس 11-4 استخدام قواعد المشتقات في حساب التكاملات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا ألقى منصور الكرة من نقطة بداية على ارتفاع مترين، فما الدالة التي تمثل ارتفاع الكرة بعد t ثانية؟ $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$

حتى هذه النقطة، يتوجب عليك إيجاد قيم النهايات كلما اقتربت من 0 من أجل حساب المشتقات، وميول المماس، والسرعة اللحظية. وتوجد قاعدة مفيدة للغاية تبسط هذه العملية وتحد من أخطاء الحساب، وهي قاعدة القوة التي تسمح لك بإيجاد قيم المشتقات دون الحاجة إلى حساب النهايات.

المفهوم الأساسي قاعدة القوة للمشتقات

الشرح القوة لـــ x في المشتقة تقل بواحد عن القوة لـــ x في الدالة الأصلية، ومعامل القوة لـــ x في المشتقة هو نفسه القوة لـــ x في الدالة الأصلية.

الرموز إذا كانت $f(x) = x^n$ وكان n عددًا حقيقيًا، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

قراءة في الرياضيات

المشتقات رمز المشتقة $f'(x)$ يُقرأ *المشتقة الأولى لـ f لــ x أو مشتقة f بدلالة x.*

مثال 2 قاعدة القوة للمشتقات

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 9x^{9-1}$	قاعدة القوة
$= 9x^8$	بسّــط.

b. $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$	المعادلة الأصلية
$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$	أعد الكتابة باستخدام الأس النسبي.
$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}} - 1$	قاعدة القوة
$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$ أو $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$	بسّــط.

c. $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$	المعادلة الأصلية
$h(x) = x^{-8}$	أعد الكتابة باستخدام أس سالب.
$h'(x) = -8x^{-8-1}$	قاعدة القوة
$= -8x^{-9}$ أو $-\frac{8}{x^9}$	بســط.

تمرين موجّه

2A. $j(x) = x^4$ $j'(x) = 4x^3$

2B. $k(x) = \sqrt{x^3}$ $k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ أو $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

2C. $m(x) = \frac{1}{x^5}$ $m'(x) = -\frac{5}{x^6}$

انتبه!

المشتقات السالبة مشتقة $f(x) = x^{-4}$ هي ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر أنه يجب طرح 1 من الأس وأن $(-1) + -4 = -4 - 1$ أو -5. لذلك، $f'(x) = -4x^{-5}$.

وتوجد غير ذلك العديد من قواعد المشتقات التي تكون مفيدة في إيجاد مشتقات الدوال المشتملة على حدود عديدة.

المفهوم الأساسي قواعد اشتقاق أخرى

الثابت مشتقة الدالة الثابتة هي صفر. بمعنى، إذا كانت $f(x) = c$، فإن $f'(x) = 0$.

المضاعف الثابت للقوة إذا كانت $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.

المجموع أو الفرق إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

- استخدم حاسبة التمثيل البياني في تحديد أقصى ارتفاع للكرة. 22 m
- هل سيتمكن منصور من قذف الكرة لأعلى إلى النافذة؟ فسّر. نعم، سترتفع الكرة مسافة 22 m في الهواء، والنافذة على ارتفاع 21 m.

1 قواعد أساسية

يبين المثال 1 كيفية إيجاد مشتقة الدالة عند نقاط مختلفة من خلال إيجاد مشتقة الدالة، ثم إيجاد القيم المختلفة لـــ x. **وتبين الأمثلة من 2 إلى 4** كيفية استخدام قواعد الأس والثابت والمضاعف الثابت للأس وقاعدة المجموع والفارق للمشتقات في إيجاد مشتقات الدوال المختلفة. **ويبين المثال 5** كيفية استخدام النقاط الحرجة أو نقاط النهاية لفترة مغلقة في تحديد أقصى وأدنى قيمة للدالة خلال فترة معينة.

التقييم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد مشتقة $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x + 12$. ثم أوجد قيمة المشتقة عند $x = 1$ و $x = 4$. $f'(x) = 6x^2 + 4x - 7; f'(1) = 3; f'(4) = 105$

2 أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

b. $g(x) = \sqrt[4]{x^6}$ $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c. $h(x) = \frac{1}{x^{10}}$ $h'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع
$= 15x^2$	بسّط.

b. $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	المعادلة الأصلية
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا المضاعف الثابت للقوة، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسّط.

c. $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	المعادلة الأصلية
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حد في البسط على x.
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} + 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع، والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}}$ or $10x + 9\sqrt{x}$	بسّط.

نصيحة دراسية

المشتقات إذا كانت $f(x) = x$، فإذًا $f'(x) = 1$. وإذا كانت $f(x) = cx$، فإذًا $f'(x) = c$.

تمرين موجّه

3A. $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ **3B.** $g(x) = 3x^4(x + 2)$ **3C.** $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

3A. $f'(x) = 10x^4 - 3x^2$
3B. $g'(x) = 15x^4 + 24x^3$
3C. $h'(x) = 12x^2 - 3$

الآن بما أنك تعرفت على القواعد الأساسية للمشتقات، يمكنك حساب المسائل المتضمنة ميول خطوط المماس والسرعة اللحظية في بضع خطوات قليلة فحسب. اشتمل المثال 5 في الدرس 3-11 على إيجاد تعبير للسرعة اللحظية لجسيم. لاحظ مدى بساطة المسألة بفضل قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة اللحظية

المسافة التي يتحركها جسيم ما على امتداد مسار ما، تحددها المعادلة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، حيث t يُعطى بالثانية ومسافة الجسيم تُعطى بالسنتيمتر. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم.

السرعة اللحظية $v(t)$ مكافئة لـ $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	المعادلة الأصلية
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط.

السرعة اللحظية هي $v(t) = 18 - 9t^2$. لاحظ أن هذه النتيجة ليست مثل تلك التي وُجدت في مثال 5 في الدرس 3-11.

تمرين موجّه

4. كرة قدم رُكلت للأعلى مباشرة. ارتفاع الكرة تحدده المعادلة $h(t) = 18t - 5t^2$، حيث الزمن t يُعطى بالثواني وارتفاع الكرة يُعطى بالمتر. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للكرة عند أي نقطة في الزمن.

$v(t) = 18 - 10t$

أمثلة إضافية

3 أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = 6x^2 - 3$
$f'(x) = 12x$

b. $g(x) = 2x^3(5x - 3)$
$g'(x) = 40x^3 - 18x^2$

c. $h(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{x}$
$h'(x) = 6x - 2$

4 **الجزيئات** يتم الحصول على المسافة التي يقطعها الجزيء بالعلاقة $s(t) = 6t - 2t^3 + 4$. حيث يعُطى t بالثانية، وتعُطى مسافة الجزيء بالمليمتر. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ للجزيء.
$v(t) = 6 - 6t^2$

698 | الدرس 4-11 | المشتقات

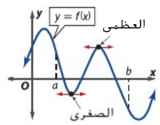
مثال إضافي

5 **منصّة القفز** يمكن تعريف ارتفاع الشخص h بالأمتار عندما يقفز من المنصّة باستخدام $h(t) = 0.3 + 3t - 1t^2$ في الفترة $[0, 3]$، حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للقفزة. أقصى ارتفاع 2.55 m في 1.5 ثانية؛ أدنى ارتفاع 0.3 m في 3 ثوانٍ

أوجدت القيم القصوى المحلية والمطلقة للدوال بيانيًا وعدديًا. وعلى فترة مغلقة، يمكن إيجاد هذه القيم باستخدام المشتقة والنظرية الآتية.

المفهوم الأساسي نظرية القيم القصوى

إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$، فإن $f(x)$ تحقق القيمة العظمى والصغرى على $[a, b]$.



القيم القصوى المحلية تحدث فقط عند *نقاط حرجة* حيث يكون ميل المماس،أما مشتقة الدالة تساوي 0 أو غير مُعرَّف. لتحديد مكان القيمة العظمى والصغرى لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $[a, b]$، أوجد قيمة الدالة عند a و b وعند أي قيم لـــ x في الفترة $[a, b]$ التي يكون فيها $f'(x) = 0$.

مثال 5 من الحياة اليومية القيم العظمى والصغرى

قطار الملاهي يمكن تمثيل الارتفاع h ، بالمتر، الذي تقطعه العربة على طول مسار قطار الملاهي، بالمعادلة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ على الفترة $[1, 12]$، حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد الارتفاعين الأعلى والأدنى للعربة.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$h(t) = -\frac{1}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^2 + \frac{11}{9}$	المعادلة الأصلية
$h'(t) = -\frac{1}{9} \cdot 3t^{3-1} + \frac{4}{3} \cdot 2t^{2-1} + 0$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع والفرق
$= -\frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{3}t$	بسّــط.

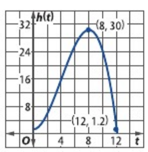
حل $h'(t) = 0$ لإيجاد مكان حدوث النقاط الحرجة لـــ $h(x)$.

$-t^2 + 8t = 0$	$h'(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{3}t$
$-t(t - 8) = 0$	عامل.

تحدث النقاط الحرجة لهذه الدالة عندما يكون $t = 0$ و s 8. لاحظ أنه بالرغم من أن $t = 0$ عبارة عن نقطة حرجة للدالة $h(t)$، فهي لا تقع على الفترة $[1, 12]$. لإيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة على $[1, 12]$، أوجد قيمة $h(t)$ لـــ 1 و 8 و 12.

$h(1) = -\frac{1}{9}(1)^3 + \frac{4}{3}(1)^2 + \frac{11}{9}$ أو 2.44	
$h(8) = -\frac{1}{9}(8)^3 + \frac{4}{3}(8)^2 + \frac{11}{9}$ أو 30	قيمة عظمى
$h(12) = -\frac{1}{9}(12)^3 + \frac{4}{3}(12)^2 + \frac{11}{9}$ أو 1.22	قيمة صغرى

ستحقق العربة أعلى ارتفاع بمعدل 30 m في s 8 مع حركة القطار، وأقل ارتفاع بمعدل حولي 1.2 m في s 12 مع حركة القطار.



التحقق منحنى الدالة $h(t) = -\frac{1}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^2 + \frac{11}{9}$ يبين أن $h(t)$ له قيمة عظمى تساوي 30 عند $x = 8$ وقيمة صغرى تساوي حوالي 1.2 عند $x = 12$ على الفترة $[1, 12]$. ✔

تمرين موجّه

5. **القفز بالحبال** يمكن تمثيل ارتفاع h القَفّاز بالحبال بالنسبة للأرض، بالمتر، بواسطة المعادلة $h(t) = 6t^2 - 48t + 100$ على الفترة $[0, 6]$، حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد أعلى وأقل ارتفاع للقَفّاز.

5. max.: 100 m, min.: 4 m

الربط بالحياة اليومية

حققت قطارات الملاهي مؤخرًا سرعات تتخطى 193 km/h وارتفاعات تزيد عن 137 m.

***المصدر:** موسوعة جينيس للأرقام القياسية*

انتبه!

تفسير التمثيلات البيانية يوضح التمثيل البياني في المثال 5 ارتفاع العربة بمرور الزمن. ولكنه لا يوضح شكل قطار الملاهي.

2 قاعدة ناتج الضرب وناتج القسمة

يبين المثال 6 كيفية استخدام قاعدة ناتج الضرب في إيجاد مشتقات الدوال التي تشتمل على نواتج ضرب. **ويبين المثال 7** كيفية استخدام قاعدة ناتج القسمة في إيجاد مشتقات الدوال التي تشتمل على نواتج قسمة.

مثال إضافي

6 أوجد مشتقة كل ناتج ضرب مما يلي.

a. $h(x) = (x^2 - 2x + 3) \times (x^3 - 4)$ $h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 8$

b. $h(x) = (x^4 - x^2 + 2) \times (x^3 - x + 1)$ $h'(x) = 7x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 2x - 2$

التركيز على محتوى الرياضيات

قاعدة ناتج الضرب لاحظ أن قاعدة المضاعف الثابت للأس هي حالة خاصة من قاعدة ناتج الضرب، حيث أحد العوامل هو ثابت الدالة.

يمكن أيضًا تعميم قاعدة ناتج الضرب على ناتج ضرب أكثر من عاملين. وستكون القاعدة لثلاثة عوامل هي $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.

إرشاد للمعلمين الجدد

ترميز المشتقة تعتمد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ على "التغير في y على التغيير في x." وتأتي d من الحرف اللاتيني دلتا والذي يستخدم في الإشارة إلى الفرق في القيم.

---

2 قاعدتا ناتج الضرب وناتج القسمة

قاعدتا ناتج الضرب وناتج القسمة لقد تعلمت في وقت سابق أن مشتقة مجموع الدوال تساوي مجموع المشتقات الفردية. فهل مشتقة ناتج ضرب الدوال تساوي ناتج ضرب المشتقات؟ تأمل الدالتين $f(x) = x$ و $g(x) = 3x^3$.

مشتقة ناتج الضرب	ناتج ضرب المشتقات
$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$	$\frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$
$= \frac{d}{dx}(3x^4)$	$= 1 \cdot 9x^2$
$= 12x^3$	$= 9x^2$

من الواضح أن مشتقة ناتج الضرب ليست بالضرورة أن تكون ناتج ضرب المشتقات. يمكن تطبيق القاعدة الآتية عند حساب مشتقة نواتج الضرب.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x، فإذًا $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

ستثبت قاعدة ناتج الضرب للمشتقات في التمرين 64.

مثال 6 قاعدة ناتج الضرب

أوجد مشتقة كل ناتج ضرب مما يلي.

a. $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

ليكن $f(x) = x^3 - 2x + 7$ و $g(x) = 3x^2 - 5$. إذًا، $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 3x^2 - 2$ قواعد القوة، والمضاعف الثابت للقوة، والثابت، والمجموع، والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 6x$ قواعد المضاعف الثابت للقوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ قاعدة ناتج الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ عوّض

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ فكّك وبسّط.

b. $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

ليكن $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ و $g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ قواعد القوة، والمضاعف الثابت للقوة، والثابت، والمجموع، والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 12x - 1$ قواعد المضاعف الثابت للقوة، والقوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ قاعدة ناتج الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ عوّض

$= 30x^4 - 100x^3 + 870x^2 - 848x - 32$ وزّع وبسّط.

تمرين موجّه 6A–B. انظر الهامش.

6A. $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$ **6B.** $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

نصيحة دراسية

قاعدة ناتج الضرب توصل قاعدة ناتج الضرب إلى إجابة يظل من الممكن تبسيطها. ما لم يكن هناك تبسيط يسير أو سبب للقيام بذلك، فإنه يمكنك ترك الإجابة كما هي.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

6A. $h'(x) = 56x^7 - 35x^6 + 545x^4 - 260x^3 + 468x$

6B. $h'(x) = 40x^4 + 32x^3 + 33x^2 + 6x + 3$

نفس المنطق المُستخدَم مع مشتقات نواتج الضرب يمكن تطبيقه على نواتج القسمة. ويمكن تطبيق القاعدة الآتية عند حساب اشتقاق نواتج القسمة.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج القسمة للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x و $g(x) \neq 0$، فإذًا $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

ستثبت قاعدة ناتج القسمة للمشتقات في التمرين 67.

مثال 7 قاعدة ناتج القسمة

أوجد مشتقة كل ناتج قسمة مما يلي.

a. $h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

ليكن $f(x) = 5x^2 - 3$ و $g(x) = x^2 - 6$. إذًا، $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 10x$ قواعد المضاعف الثابت للقوة، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 2x$ قواعد القوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة ناتج القسمة

$= \frac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوّض

$= \frac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \frac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسّط.

b. $h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

ليكن $f(x) = x^2 + 8$ و $g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 2x$ قواعد القوة، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 3x^2$ قواعد القوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة ناتج القسمة

$= \frac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوّض

$= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فكّك وبسّط.

تمرين موجّه

7A. $j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$ $\frac{155}{(12x + 5)^2}$

7B. $k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4}$ $\frac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2}$

نصيحة دراسية

قاعدة ناتج القسمة بالنسبة لقاعدة ناتج القسمة، يميل التبسيط إلى أن يكون ذا أهمية وفائدة أكبر. ومع ذلك، ليس من الضروري فك المقام إذا كان فعل ذلك لا ينتج عنه مزيد من التبسيط.

مثال إضافي

7 أوجد مشتقة كل ناتج قسمة مما يلي.

a. $h(x) = \frac{4x^3}{x^2 - 2}$

$h'(x) = \frac{4x^4 - 24x^2}{x^4 - 4x^2 + 4}$

b. $h(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

$h'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

إرشاد للمعلمين الجدد

المشتقات مفاهيم السرعة اللحظية والمشتقات وميل المماس متشابهات في الأساس. لكن من الأسهل حساب المشتقات. ومن المهم أن يرى الطلاب العلاقة بين تلك المفاهيم الثلاثة.

المتابعة

انتهى الطلاب من استكشاف المشتقات.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تُستخدم المشتقات في وصف التغيير؟ الإجابة النموذجية: تُستخدم المشتقات في وصف التغيير في كمية ما بالنسبة لكمية أخرى. بغض النظر عما إذا كانت العلاقة خطية أو غير خطية. على سبيل المثال، مشتقة الخط المستقيم هي ميل الخط المستقيم الذي يمثل متوسط معدل التغيير. ومشتقة المنحنى عند نقطة معينة هي ميل المماس باتجاه المنحنى عند تلك النقطة والذي يمثل معدل التغير اللحظي.

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من مجموعات الطلاب المكونة من خمسة إلى ثمانية طلاب أن يكتبوا قواعد المشتقة بكلماتهم. واطلب منهم تبادل الأدوار في قراءة تلك القواعد على المجموعات الأخرى. واطلب من كل مجموعة أن تتحقق من منطوق القواعد التي كتبتها المجموعة الأخرى للتأكد من أنها تعبر عن القاعدة تعبيرًا صحيحًا. تجول في الغرفة لتوضيح أي التباس أو تعارض في وجهات النظر.

التمارين

أوجد قيم النهايات لإيجاد مشتقة كل دالة. ثم أوجد قيمة مشتقة كل دالة للقيم المعطاة لكل متغير. (المثال 1) **1–6. انظر الهامش.**

1. $f(x) = 4x^2 - 3; x = 2$ و -1
2. $g(t) = -t^2 + 2t + 11; t = 5$ و 3
3. $m(j) = 14j - 13; j = -7$ و -4
4. $v(n) = 5n^2 + 9n - 17; n = 7$ و 2
5. $h(c) = c^3 + 2c^2 - c + 5; c = -2$ و 1
6. $r(b) = 2b^3 - 10b; b = -4$ و -3

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي. (المثالان 2 و 3) **7–16. انظر الهامش.**

7. $y(f) = -11f$	8. $z(n) = 2n^2 + 7n$
9. $p(v) = 7v + 4$	10. $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$
11. $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$	12. $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$
13. $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$	14. $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$
15. $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$	16. $f(x) = -5x^3 - 9x^4 + 8x^5$

17. **الحرارة** يمكن تمثيل الحرارة، بدرجة الحرارة المئوية، خلال فترة 24 ساعة في مدينة معينة، بالمعادلة $f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$، حيث h هو عدد الساعات منذ منتصف الليل. (المثال 4)
    a. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة.
    $f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04$
    b. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي حيث $h = 2$ و 14 و 20.
    $f'(2) = 1.96; f'(14) = -0.36; f'(20) = -2.68$
    c. أوجد درجة الحرارة العظمى حيث $0 \le h \le 24$. **68.92°F**

استخدم المشتقة لإيجاد أي نقاط حرجة للدالة. ثم أوجد النقطتين العظمى والصغرى لكل تمثيل بياني على الفترة المعلومة. (المثال 5) **18–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

18. $f(x) = 2x^2 + 8x; [-5, 0]$
19. $g(m) = m^3 - 4m + 10; [-3, 3]$
20. $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2; [1, 4]$
21. $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115; [-6, -3]$
22. $k(p) = p^4 - 8p^2 + 2; [0, 3]$
23. $f(x) = -5x^2 - 90x; [-11, -8]$
24. $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k; [0, 3]$
25. $a(d) = d^4 - 3d^3 + 2; [-1, 4]$
26. $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8; [-5, 5]$

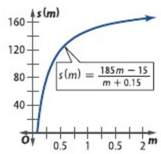
27. **رمي الأجسام** راجع التطبيق في بداية الدرس. يمكن تمثيل ارتفاع h الكرة، بالمتر، بعد t ثانية، بواسطة المعادلة $h(t) = 20t - 5t^2 + 2$ حيث $0 \le t \le 4$. (المثال 5)
    a. أوجد $h'(t)$. **$h'(t) = 20 - 10t$**
    b. أوجد النقطتين العظمى والصغرى لـ $h(t)$ على الفترة. **(2.22; (0, 2)**
    c. هل يمكن أن يقذف منصور الكرة لأعلى إلى نافذة ناصر؟
    c. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

حدد المشتقة لكل دالة مما يلي. (المثال 6) **28–37. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

28. $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$
29. $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$
30. $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$
31. $s(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} + 2\right)(3t^{11} - 4t)$
32. $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$
33. $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$
34. $p(r) = (r^{2.5} + 8r)(r - 7r^2 + 108)$
35. $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$
36. $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$
37. $h(x) = \left(\frac{1}{8}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5}x^{-\frac{1}{6}}\right)\left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{8}}\right)$

a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

38. **البيسبول** ضُربت كرة بمضرب كتلته m كيلوجرام. افترض أن السرعة الأولية للكرة بعد ضربها تُعطى بالمعادلة $s(m) = \frac{185m - 15}{m + 0.15}$. (المثال 7)



    a. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي للسرعة الأولية للكرة.
    b. استخدم آلة حاسبة لتمثيل المعادلة التي وجدتها في الجزء a على $0 \le m \le 2$. ما الذي يحدث لمعدل التغير اللحظي للسرعة الأولية للكرة مع ازدياد كتلة المضرب؟
    c. إذا كانت كتلة المضرب تتغير عكسيًا مع تحكم ضارب الكرة على تنفيذ الضربة، فهل يُنصح باستخدام مضرب يزن 1.05kg بدلاً من مضرب وزنه 0.80 kg؟ اشرح استنتاجك.

39–48. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي. (المثال 7)

39. $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$	40. $g(n) = \frac{3n + 2}{2n + 3}$
41. $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$	42. $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$
43. $v(t) = \frac{t^2 - 5t + 3}{t^3 - 4t}$	44. $c(m) = \frac{m^4 + 1}{-m^3 + 2m}$
45. $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{-x^2 + 3}$	46. $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$
47. $t(w) = \frac{w + w^4}{w^2}$	48. $m(x) = \frac{x^5 + 3x}{-x^4 - 2x^3 - 2x - 3}$

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 48 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 10. ينبغي ألا يترك الطلاب الجذر المربع في المقام في الإجابة. ويمكن إزالة الجذر المربع في المقام بضرب المقام والبسط في الجذر المربع.

خطأ شائع في التمارين 28 إلى 37. ذكّر الطلاب أن مشتقة ناتج الضرب ليست هي ناتج ضرب المشتقات الفردية، ولكنها مجموع كل مشتقة مضروبة في الدالة الأخرى.

تحليل الخطأ في التمرين 62. ينبغي أن يدرك الطلاب أن $[f'(x)]^2 = f'(x) \times f'(x)$. ولاحظ أنه يجب أن يكون المعامل الإرشادي موجبًا في هذه الحالة. لذا فإجابة هنا صحيحة.

إجابات إضافية

1. $f'(x) = 8x; f'(2) = 16, f'(-1) = -8$
2. $g'(t) = -2t + 2; g'(5) = -8, g'(3) = -4$
3. $m'(j) = 14; m'(-7) = 14, m'(-4) = 14$
4. $v'(n) = 10n + 9; v'(7) = 79, v'(2) = 29$
5. $f'(c) = 3c^2 + 4c - 1; f'(-2) = 3, f'(1) = 6$
6. $r'(b) = 6b^2 - 10; r'(-4) = 86, r'(-3) = 44$
7. $y'(f) = -11$
8. $z'(n) = 4n + 7$
9. $p'(v) = 7$
10. $g'(h) = h^{-\frac{1}{2}} + 2h^{-\frac{2}{3}} - 3h^{\frac{1}{2}}$
11. $b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$
12. $n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$
13. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$
14. $q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3$
15. $p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3$
16. $f'(x) = -15x^2 - 36x^3 + 40x^4$

702 | الدرس 11-4 | المشتقات

إجابات إضافية

49c. الإجابة النموذجية: يمثل الحل 14.72 السعر الذي سيحدده محمود ومحمد لكل كنزة لتحقيق أقصى ربح ممكن. بينما الحل 45.28 ليس متصلاً، حيث يصبح الربح 0 عندما تكون $x = 40$.

55a. $f''(x) = 80x^3 - 12x$

55b. $g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42$

55c. $h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6}$

49. الاقتصاد يبيع محمد ومحمود كنزات لجمع المال من أجل الصف الدراسي قبل الأخير. ويُعطى الإيراد الأسبوعي لهما بالمعادلة $r(x) = 0.125x^3 - 11.25x^2 + 250x$، حيث x هو تكلفة كنزة واحدة.

B

a. أوجد $r'(x)$. $r'(x) = 0.375x^2 - 22.5x + 250$

b. أوجد حلول $r'(x) = 0$. **14.72, 45.28**

c. ما الذي تمثله الحلول التي وجدتها في الجزء **b** بدلالة الحالة المبينة؟ **انظر الهامش.**

50–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للتمثيلات البيانية.

أوجد معادلة المماس لـ $f(x)$ عند النقطة المبينة. تحقق من إجابتك بالتمثيل البياني.

50. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7;\ (1, -2)$ $y = 8x - 10$

51. $f(x) = -5x^2 - 10x + 25;\ (-2, 25)$ $y = 10x + 45$

52. $f(x) = -0.2x^2 + 1.5x - 0.75;\ (5, 1.75)$ $y = -0.5x + 4.25$

53. $f(x) = 4x^2 - 12x - 35;\ (-1.2, -14.84)$ $y = -21.6x - 40.76$

54. $f(x) = 0.8x^2 + 0.64x - 12;\ (10, 74.4)$ $y = 16.64x - 92$

55. المشتقات لتكن $f'(x)$ هي مشتقة دالة $f(x)$. **a–c. انظر الهامش.** إذا كانت موجودة، فإنه يمكننا حساب مشتقة $f'(x)$، والتي تُسمى المشتقة الثانية، ويُرمز إليها بـ $f''(x)$ أو $f^{(2)}(x)$. يمكننا المتابعة وإيجاد مشتقة $f''(x)$، والتي تُسمى المشتقة الثالثة ويُرمز إليها بـ $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$. وفيما يلي أمثلة على المشتقات العليا. أوجد المشتقة المحددة لكل دالة.

a. المشتقة الثانية $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b. المشتقة الثالثة $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c. المشتقة الرابعة $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

C

ارسم منحنى دالة لها الخواص التالية.

56–59. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

56. المشتقة هي 0 حيث $x = -1$ و $x = 1$.

57. المشتقة هي -2 حيث $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 2$.

58. المشتقة هي 0 حيث $x = -1$ و $x = 2$ و $x = 4$.

59. المشتقة غير مُعرَّفة حيث $x = 4$.

60. المذاكرة تتبعت هدى كمية الزمن t بالدقائق التي ذاكرتها في ليلة الامتحان والنسبة المئوية p التي حصلت عليها في الامتحان. **a–c3. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

t	30	60	90	120	180	210	240
p	39	68	86	96	90	76	56

a. أوجد دالة تربيعية $p(t)$ يمكن استخدامها لتمثيل البيانات. قرّب المعاملات إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. مثّل البيانات و $p(t)$ بيانيًا على نفس الشاشة.

b. استخدم $p'(t)$ لإيجاد درجة الامتحان العظمى التي تستطيع أن تحصل هدى عليها وكمية الزمن التي ستحتاج إلى المذاكرة فيها لإحراز هذه الدرجة.

c. اشرح لماذا تزايد زمن المذاكرة ليس بالضرورة أن يؤدي إلى الحصول على درجة أعلى في الامتحان.

61. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخواص الهندسية. **b, c, e. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

a. تحليليًا أوجد مشتقتي صيغة مساحة A الدائرة وصيغة حجم V الكرة بدلالة r. $A' = 2\pi r;\ V' = 4\pi r^2$

b. لفظيًا اشرح العلاقة بين كل صيغة ومشتقتها.

c. هندسيًا ارسم مربعًا له عامد a. ارسم مكعبًا له عامد a لثلاثة وجوه مشتركة في رأس واحد. $A = 4a^2;\ A' = 8a;\ V = 8a^3;\ V' = 24a^2$

d. تحليليًا اكتب صيغتين لمساحة A المربع وحجم V المكعب بدلالة العامد a. أوجد المشتقة لكل صيغة بدلالة a.

e. لفظيًا اشرح العلاقة بين كل صيغة ومشتقتها.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. تحليل الخطأ تعمل هيام وهناء على إيجاد $[f'(x)]^2$، حيث $f(x) = 6x^2 + 4x$. وتعتقد هناء أن الإجابة هي $144x^2 + 96x + 16$، ولكن تعتقد هيام أن الإجابة هي $144x^3 + 144x^2 + 32x$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

63. التحدي أوجد $f'(y)$ إذا كانت

$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7.$$

$f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$

64. البرهان أثبت قاعدة ناتج الضرب للمشتقات بواسطة بيان أن

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

(*إرشاد:* حل الطرف الأيمن. اجمع واطرح باستخدام $f(x)g(x+h)$ في البسط). **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

65. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة* اشرح استنتاجك إذا كان $f(x) = x^{5n+3}$، فإذًا $f'(x) = (5n+3)x^{5n+2}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

66. الكتابة المسبقة استخدم مخططًا هرميًا لتمثيل عملية إيجاد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$ عند القيمة حيث $x = 1$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

67. البرهان أثبت قاعدة ناتج القسمة للمشتقات بواسطة بيان أن

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}.$$

(*إرشاد:* حل الطرف الأيمن. اجمع واطرح باستخدام $f(x)g(x)$ في البسط.) **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

68. الكتابة في الرياضيات هل يمكن أن يكون لدالتين مختلفتين نفس المشتقة؟ اشرح سبب إمكانية أو عدم إمكانية ذلك مع ذكر أمثلة تدعم إجابتك.

مراجعة شاملة

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة لكل دالة عند النقاط المبينة.

69. $y = x^2 - 3x$; $(0, 0)$ و $(3, 0)$ **−3; 3**

70. $y = 4 - 2x$; $(-2, 8)$ و $(6, -8)$ **−2; −2**

71. $y = x^2 + 9$; $(3, 18)$ و $(6, 45)$ **6; 12**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

72. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ **−8**

73. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ $-\frac{1}{3}$

74. $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$ $-\frac{1}{2}$

75. **التمرن** طلب مدرس ألعاب رياضية من طلابه تتبع عدد الأيام التي تمرنوا فيها بكل أسبوع. استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيع احتمالي وتمثيله بيانيًا للمتغير العشوائي X مع تقريب كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة. **انظر الهامش.**

الأيام، X	التكرار
0	3
1	6
2	7
3	8
4	4
5	2

76. **الرياضات** مبين أدناه عدد الساعات في الأسبوع التي قضاها أعضاء فريق مدرسة الشَمال الثانوية لكرة السلة في التمرن، سواء ضمن فريق أو بشكل فردي. **a–b. انظر الهامش.**

15, 18, 16, 20, 22, 18, 19, 20, 24, 18, 16, 18

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

77. $\cos \frac{2\pi}{11}$ **0.841**

78. $\sin \frac{3\pi}{14}$ **0.623**

79. $\sin \frac{\pi}{13}$ **0.239**

اكتب صيغة صريحة وصيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد رقم n لكل متتالية هندسية. **80–82. انظر الهامش.**

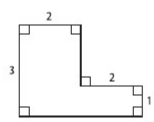
80. 1.25, −1.5, 1.8, ...

81. 1.4, −3.5, 8.75, ...

82. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. **SAT/ACT** يوضح الشكل أبعاد لوح حجري، بالمتر. فكم عدد الألواح المطلوبة لتأسيس فناء مستطيلي طوله 24 m وعرضه 12 m؟ **D**



A 18 **B** 20 **C** 24 **D** 36 **E** 40

84. **المراجعة** ما ميل المماس للتمثيل البياني لـ $y = 2x^2$ عند النقطة (1, 2)؟ **H**

F 1 **G** 2 **H** 4 **J** 8

85. وجدت شركة "الكتاب الأفضل" أن التكلفة بالدرهم لطباعة x نسخة من كتاب تُعطى بواسطة المعادلة $C(x) = 1000 + 10x - 0.001x^2$. والمشتقة $C'(x)$ تُسمى *دالة التكلفة الحدية*. التكلفة الحدية هي التكلفة التقريبية لطباعة كتاب واحد آخر بعد طباعة x نسخة. ما التكلفة الحدية عند طباعة 1000 كتاب؟ **B**

A AED 7 **B** AED 8 **C** AED 9 **D** AED 10

86. **المراجعة** أوجد مشتقة $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$. **F**

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$

H $f'(x) = 225x^{\frac{5}{3}}$

J $f'(x) = 225x^{\frac{8}{3}}$

4 التقييم

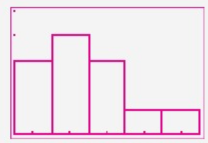
حصاد الأمس اطلب من الطلاب شرح كيف ساعدهم الدرس السابق عن المماس والسرعة في الاستعداد لهذا الدرس عن المشتقات.

إجابات إضافية

.75

الأيام، X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.10	0.20	0.23	0.27	0.13	0.07

.76a



[15, 25] scl: 2 by [0, 5] scl: 1

التمثيل البياني ملتوٍ نحو اليمين بالنسبة لغالبية اللاعبين الذين يتدربون لمدة تتراوح بين 20–15 ساعة، مع وجود عدد قليل يتدرب لأكثر من 20 ساعة.

.76b الإجابة النموذجية: بما أن التوزيع ملتوٍ، فيمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة في وصف توزيع البيانات؛ ويتراوح الزمن من 15 إلى 24 ساعة؛ وكان الوقت الوسيط يساوي 18 ساعة، ومنتصف الأزمنة بين 17 و 20 ساعة.

80. $a_n = 1.25(-1.2)^{n-1}$; $a_1 = 1.25$, $a_n = -1.2a_{n-1}$

81. $a_n = 1.4(-2.5)^{n-1}$; $a_1 = 1.4$, $a_n = -2.5a_{n-1}$

82. $a_n = \frac{1}{8}(2)^{n-1}$; $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_n = 2a_{n-1}$

التدريس المتمايز BL

التوسع عند أي قيمة (قيم) x تكون خطوط المماس للمنحنيات $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ متوازية؟ فسّر. خطوط المماس للمنحنيات متوازية إذا كان ميل المنحنيات متساويًا، مما يعني أن $f'(x) = g'(x)$. بما أن $f'(x) = 1$ و $f'(x) = g'(x)$, $g'(x) = 2x$ صحيح فقط إذا كان $x = \frac{1}{2}$.

الدرس 11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

السابق

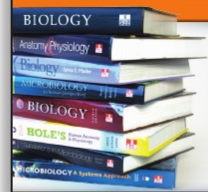
- حسبت النهايات جبريًا باستخدام خواص النهايات.

الحالي

1. تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات.
2. تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام التكاملات المحددة والتكامل.

لماذا؟

- *التكلفة الحدية* هي التكلفة التقريبية التي تتحملها الشركة لإنتاج وحدة إضافية من منتج. ومعادلة التكلفة الحدية هي مشتق معادلة *التكلفة الفعلية*. دالة التكلفة الحدية لدار نشر معينة هي $f(x) = 10 - 0.002x$، حيث x هو عدد الكتب المصنعة و $f(x)$ تكون بالدرهم.



المفردات الجديدة

تجزئة منتظمة regular partition
تكامل محدد definite integral
نهاية دنيا lower limit
نهاية عليا upper limit
مجموع ريمان يميني right Riemann sum
تكامل integration

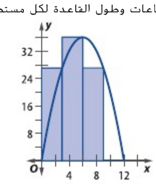
1 المساحة تحت المنحنى لقد سبق لك أن تعلمت في الهندسة كيفية حساب مساحة الأشكال الأساسية، مثل المثلث أو المستطيل أو المضلع المنتظم. وتعلمت أيضًا كيفية حساب مساحة شكل مركّب، أي منطقة متألفة من أشكال أساسية. ومع ذلك، لا تكون العديد من المناطق مجموعة من الأشكال الأساسية. وبالتالي، أنت تحتاج إلى منهج أعم لحساب المساحة المتألفة من أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم بواسطة استخدام شكل أساسي له صيغة مساحة معلومة، المستطيل. على سبيل المثال، تأمل منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 12x$ على الفترة $[0, 12]$. يمكننا تقريب المساحة بين المنحنى والمحور x باستخدام مستطيلات متساوية في العرض.

مثال 1 المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات

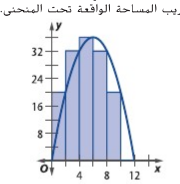
قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ مستخدمًا 4 مستطيلات و 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً. استخدم نقطة النهاية اليمنى لكل مستطيل لتحديد الارتفاع.

مستعينًا بالأشكال أدناه للمرجعية، لاحظ أن المستطيلات رُسمت ولها ارتفاع مساوٍ لـ $f(x)$ عند كل نقطة نهاية يمنى. على سبيل المثال، ارتفاعات المستطيلات في الشكل الأول هي $f(3)$ و $f(6)$ و $f(9)$ و $f(12)$. ويمكننا استخدام هذه الارتفاعات وطول القاعدة لكل مستطيل لتقريب المساحة الواقعة تحت المنحنى.



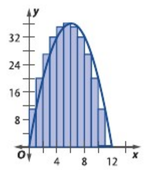
المساحة باستخدام 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3)$ أو 81
$R_2 = 3 \cdot f(6)$ أو 108
$R_3 = 3 \cdot f(9)$ أو 81
$R_4 = 3 \cdot f(12)$ أو 0
المساحة الإجمالية = 270



المساحة باستخدام 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2)$ أو 40
$R_2 = 2 \cdot f(4)$ أو 64
$R_3 = 2 \cdot f(6)$ أو 72
$R_4 = 2 \cdot f(8)$ أو 64
$R_5 = 2 \cdot f(10)$ أو 40
$R_6 = 2 \cdot f(12)$ أو 0
المساحة الإجمالية = 280



المساحة باستخدام 12 مستطيلات

$R_1 = 1 \cdot f(1)$ أو 11
$R_2 = 1 \cdot f(2)$ أو 20
$R_3 = 1 \cdot f(3)$ أو 27
$R_4 = 1 \cdot f(4)$ أو 32
$R_5 = 1 \cdot f(5)$ أو 35
$R_6 = 1 \cdot f(6)$ أو 36
$R_7 = 1 \cdot f(7)$ أو 35
$R_8 = 1 \cdot f(8)$ أو 32
$R_9 = 1 \cdot f(9)$ أو 27
$R_{10} = 1 \cdot f(10)$ أو 20
$R_{11} = 1 \cdot f(11)$ أو 11
$R_{12} = 1 \cdot f(12)$ أو 0
المساحة الإجمالية = 286

تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام 4 مستطيلات و 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً هو 270 وحدة مربعة، و 280 وحدة مربعة، و 286 وحدة مربعة، على التوالي.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 11-5 حساب النهايات جبريًا باستخدام خصائص النهايات.

الدرس 11-5 تقريب المساحة تحت المنحنى مستخدمًا المستطيلات.
تقريب المساحة تحت المنحنى مستخدمًا التكاملات المحددة والتكامل.

بعد الدرس 11-5 استخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل في إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما التكلفة الهامشية التي سيتحملها الناشر لإنتاج كتاب واحد؟ 10 كتب؟ 100 كتاب؟ AED 10; AED 9.98; AED 9.80
- ماذا يحدث للتكلفة الهامشية عندما يزيد الكتب المنشورة؟ تنخفض.

1 المساحة تحت المنحنى

يبين المثال 1 و 2 كيفية حساب المساحة التقريبية تحت المنحنى باستخدام مساحة المستطيلات.

التقييم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 18x$ والمحور x في الفترة $[0, 18]$ مستخدمًا المستطيلات 6، و 9، و 18. استخدم نقطة النهاية اليمنى في كل مستطيل لتحديد الارتفاع.
6 مستطيلات = 945 وحدة^2
9 مستطيلات = 960 وحدة^2
18 مستطيلاً = 969 وحدة^2

2 قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2 + 1$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ أولاً باستخدام نقاط النهاية اليمنى. ثم باستخدام نقاط النهاية اليسرى في المستطيلات. استخدام المستطيلات التي عرضها 1. ثم أوجد متوسط القيمتين التقريبيتين.
نقطة النهاية اليمنى = 34 وحدة مربعة
نقطة النهاية اليسرى = 18 وحدة مربعة
المتوسط = 26 وحدة مربعة

تلميح تقني

الجداول للمساعدة على إنشاء ارتفاعات متعددة للمستطيلات باستخدام حاسبة التمثيل البياني الخاصة بك، أدخل الدالة باستخدام القائمة [Y=]، ثم استخدم دالة TABLE عن طريق الضغط على [2nd] [TABLE]. سيولد هذا قائمة ارتفاعات ذات قيم مختلفة لـ x. يمكنك تغيير الفترة أيضًا لقيم x في جدولك عن الضغط على [2nd] [TBLSET] وضبط خيارات TBLSET.

تمرين موجّه

1. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستخدام 6 مستطيلات و 8 مستطيلات و 12 مستطيلاً. استخدم نقطة النهاية اليمنى لكل مستطيل لتحديد الارتفاع.
6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة ؛ 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة؛ 12 مستطيلاً = 2288وحدة مربعة

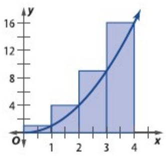
لاحظ أنه كلما كانت المستطيلات أنحف، كانت مناسبة أكثر لملاءمة المنطقة وكانت مساحتها الإجمالية تقريبًا أفضل لمساحة المنطقة. كذلك، رُسمت المستطيلات بحيث تكون لنقطة النهاية اليمنى بكل مستطيل قيمة عند $f(x)$ تمثل الارتفاع. ويمكن أيضًا استخدام نقاط النهاية اليسرى لتحديد ارتفاع كل مستطيل ويمكن التوصل إلى نتيجة مختلفة من حيث المساحة المقرّبة.

قد ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى أو اليسرى إضافة أو استبعاد مساحات تقع أو لا تقع بين المنحنى والمحور x. في بعض الحالات، يمكن الحصول على تقريبات أفضل بواسطة حساب المساحة باستخدام كل من نقاط النهاية اليسرى واليمنى ثم إيجاد متوسط النتيجتين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستخدام نقاط النهاية اليسرى واليمنى

قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى للمستطيلات. استخدم مستطيلات عرضها يساوي 1.

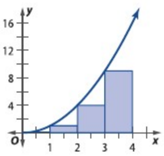
ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى لارتفاع كل مستطيل أربعة مستطيلات عرضها وحدة واحدة (الشكل 11.5.1).
ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليسرى لارتفاع كل مستطيل أربعة مستطيلات عرضها وحدة واحدة (الشكل 11.5.2).



الشكل 11.5.1

المساحة باستخدام نقاط النهاية اليمنى

$R_1 = 1 \cdot f(1)$ أو 1
$R_2 = 1 \cdot f(2)$ أو 4
$R_3 = 1 \cdot f(3)$ أو 9
$R_4 = 1 \cdot f(4)$ أو 16
المساحة الإجمالية = 30



الشكل 11.5.2

المساحة باستخدام نقاط النهاية اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0)$ أو 0
$R_2 = 1 \cdot f(1)$ أو 1
$R_3 = 1 \cdot f(2)$ أو 4
$R_4 = 1 \cdot f(3)$ أو 9
المساحة الإجمالية = 14

المساحة الناتجة عن استخدام نقاط النهاية اليمنى واليسرى هي 30 و 14 وحدة مربعة، على التوالي. لدينا الآن تقدير أدنى وتقدير أعلى لمساحة المنطقة، 14 < المساحة < 30. عند حساب متوسط المساحتين، سنحصل على أفضل تقريب؛ والذي يساوي 22 وحدة مربعة.

تمرين موجّه **نقطة النهاية اليمنى = 15.4 وحدة مربعة؛ نقطة النهاية اليسرى = 25 وحدة مربعة؛ المتوسط = 20.2 وحدة مربعة**

2. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى. استخدم مستطيلات عرضها يساوي وحدة واحدة. ثم أوجد متوسط التقريبين.

يمكن استخدام أي نقطة داخل عرض المستطيلات باعتبارها ارتفاعات عند تقريب المساحة بين التمثيل البياني لمنحنى والمحور x. وأكثر النقاط المستخدمة بشكل شائع هي نقاط النهاية اليسرى ونقاط النهاية اليمنى ونقاط المنتصف.

2 التكامل

كما رأينا في المثال 1، كلما كانت المستطيلات أضيق، اقتربت مساحتها الإجمالية من المساحة الدقيقة للمنطقة تحت المنحنى. ويمكننا استنتاج أن مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى هي نهاية المساحة الإجمالية للمستطيلات كلما اقتربت أعراض المستطيلات من 0.

التركيز على محتوى الرياضيات

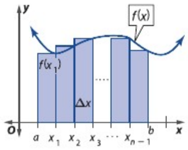
التقريب باستخدام المستطيلات تم تقديم طريقتين لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام نقاط النهاية اليمنى أو اليسرى للمستطيلات. ويمكن إيجاد القيم المتوسطة لتلك القيم التقريبية للحصول على تقدير أدق. ويمكن أيضًا استخدام أدنى ارتفاع لدالة كل مستطيل أو أقصى ارتفاع لدالة كل مستطيل. ومثلما هو الحال في الطريقتين الأخريين، فإن الحصول على متوسط النتيجتين هو تقريب أدق للمساحة كلها.

2 التكامل

تبين الأمثلة من 3 إلى 5 كيفية استخدام التكامل في إيجاد المساحة تحت منحنى خلال فترة معينة.

إرشاد للمعلمين الجدد

ترميز التكامل أكّد على أن رمز التكامل هو حرف S مطول مثلما في *sum*.



في الشكل، تم تقسيم الفترة من a إلى b إلى n فترة فرعية متساوية. وهذا يُسمى **تجزئة منتظمة**. طول الفترة الكاملة من a إلى b هو $b - a$. إذًا عرض كل n مستطيل يكون $\frac{b-a}{n}$ ويُرمز إليه بـ Δx. يتقابل ارتفاع كل مثلث عند نقطة النهاية اليمنى مع قيمة الدالة عند هذه النقطة. لذلك، ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا حتى يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.

قراءة في الرياضيات

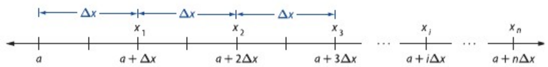
الرمز سيجما

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ يُقرأ مجموع ناتج ضرب الدالة f $(x$ تحتها $i)$ من 1 إلى n والتغير في x.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل بواسطة إيجاد ناتج ضرب Δx والارتفاع المقابل. مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\Delta x$، وهكذا. المساحة الإجمالية A لـ n مستطيل تُعطى بواسطة مجموع المساحات ويمكن كتابتها في صورة الرمز سيجما.

$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$	اجمع المساحات.
$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$	أخرج العامل Δx.
$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$	اكتب مجموع الارتفاعات في صورة الرمز سيجما.
$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$	خاصية التبديل في الضرب

للمساعدة على إجراء الحسابات مستقبليًا، يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. عرض Δx لكل مستطيل هو المسافة بين قيم x_i المتتالية. تأمل المحور x.



يمكننا رؤية أن $x_i = a + i\Delta x$. ستكون هذه الصيغة مفيدة في إيجاد المساحة تحت المنحنى لأي دالة.

لجعل عرض المستطيلات يقترب من 0، نسمح باقتراب عدد المستطيلات إلى ما لا نهاية. وتُسمى هذه النهاية **تكامل محدد** ويُعطى لها رمز خاص.

المفهوم الأساسي تكامل محدد

مساحة المنطقة تحت المنحنى لدالة هي

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

حيث a و b هما **الحد الأدنى** و**الحد الأعلى** على التوالي. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$. يُشار إلى هذه الطريقة بأنها **مجموع ريمان يميني**.

سُمي مجموع ريمان نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني بيرنارد ريمان (1826–1866). وهو يُنسب إليه تشكيل صيغة التعبير لتقريب المساحة الواقعة تحت منحنى باستخدام النهايات. ويمكن تعديل التعبير لاستخدام نقاط النهاية اليسرى أو نقاط المنتصف.

تُسمى عملية إيجاد قيمة التكامل، **التكامل**. سوف تفيد صيغ المجاميع التالية في إيجاد قيم التكاملات المحددة.

انتبه!

المجاميع مجموع الثابت c هو cn، وليس 0 أو ∞. على سبيل المثال، $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$ .5n =

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$، c عبارة عن ثابت	$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$

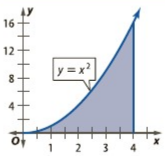
يلزم العمل بخاصيتين من خواص المجاميع لإيجاد قيم بعض التكاملات.

$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$، c عبارة عن ثابت

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

مثال 3 المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل

استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور x على الفترة [0, 4]، أو $\int_0^4 x^2\,dx$.



أوجد أولاً Δx و x_i.

الصيغة لـ Δx	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$a = 0$ و $b = 4$	$= \frac{4-0}{n}$ أو $\frac{4}{n}$
الصيغة لـ x_i	$x_i = a + i\Delta x$
$a = 0$ و $\Delta x = \frac{4}{n}$	$= 0 + i\frac{4}{n}$ أو $\frac{4i}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

تعريف التكامل المحدد	$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$
$f(x_i) = x_i^2$	$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\,\Delta x$
$\Delta x = \frac{4}{n}$ و $x_i = \frac{4i}{n}$	$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$
عامل.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}\right)^2$
فكّك.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2}{n^2}$
عامل.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$
اضرب وفكّك.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\frac{16n(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right]$
اضرب.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$
اقسم على n.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$
عامل.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left[\frac{(2n^2+3n+1)}{n^2}\right]$
اقسم كل حد على n^2.	$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
نظريات النهاية	$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$
المساحة هي $\frac{64}{3}$ أو $21\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.	$= \frac{64}{6}[2+3(0)+0]$ أو $\frac{64}{3}$

تمرين موجّه

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

3A. $\int_0^1 3x^2\,dx$ **وحدة مربعة واحدة**

3B. $\int_0^3 x\,dx$ **4.5 وحدة مربعة**

نصيحة دراسية

النهايات حلل كلاً من المجاميع إلى العوامل حتى لا يشتمل التعبير المتبقي إلا على ثابت أو i. ثم طبّق صيغة المجموع اللازمة.

مثال إضافي

3 استخدم النهايات في إيجاد مساحة المنطقة بين التمثيل البياني لـ $y = x^2 + 1$ والمحور x في الفترة [0, 4]. أو $\int_0^4 (x^2+1)\,dx$.

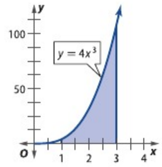
$\frac{76}{3}$ أو $25\frac{1}{3}$ وحدات^2

إرشاد للمعلمين الجدد

الدقة أكّد على أهمية كتابة كل خطوة في عملية التكامل لتجنب الأخطاء الناتجة عن السهو. وينبغي أن يكون الطلاب حذرين عند اختيار الصيغ الصحيحة للمجموع.

يمكن استخدام النهايات أيضًا لإيجاد مساحات المناطق التي لا يكون لها نهاية دنيا عند نقطة الأصل.

مثال 4 المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل



استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة [1, 3]، أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.

أوجد أولاً Δx و x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	الصيغة لـ Δx
$= \frac{3-1}{n}$ أو $\frac{2}{n}$	$b = 3$ و $a = 1$
$x_i = a + i\Delta x$	الصيغة لـ x_i
$= 1 + i\frac{2}{n}$ أو $1 + \frac{2i}{n}$	$a = 1$ و $\Delta x = \frac{2}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	تعريف التكامل المحدد
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$	$f(x_i) = 4(x_i)^3$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$	$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$ و $\Delta x = \frac{2}{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$	عامل.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$	فكّك.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$	بسّط.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right)$	طبّق المجاميع.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right)$	أخرج الثوابت.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left[n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$	صيغ المجاميع
$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right]$	وزّع $\frac{8}{n}$.
$= \lim_{n\to\infty}\left[8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right]$	بسّط.
$= \lim_{n\to\infty}\left[8 + 24\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$	حلل إلى العوامل وأجرِ القسمة.
$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$	نظريات النهاية
$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0)$ أو 80	بسّط.

مساحة المنطقة هي 80 وحدة مربعة.

تمرين موجّه

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

4A. $\int_1^3 x^2\,dx$ **$\frac{26}{3}$ أو $8\frac{2}{3}$ وحدة مربعة**

4B. $\int_2^4 x^3\,dx$ **60 وحدة مربعة**

انتبه!

النهايات عند إيجاد المساحة تحت منحنى باستخدام النهايات، أوجد قيمة تعبيرات المجاميع للقيم المعطاة لـ i قبل توزيع العرض Δx أو أي ثوابت أخرى.

مثال إضافي

4 استخدم النهايات في إيجاد مساحة المنطقة بين التمثيل البياني لـ $y = x^3 + 1$ والمحور x في الفترة [2, 4]، أو $\int_2^4 (x^3+1)\,dx$. 62 وحدة مربعة

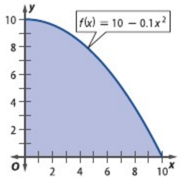
التدريس المتمايز AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب تمثيل أحد الأمثلة بيانيًا في ورقة رسم بياني كبيرة، وقص المساحة تحت المنحنى وتحديد عدد الوحدات المربعة المستخدمة. وقد يتطلب هذا تدبيس أجزاء التمثيل البياني معًا. اطلب من الطلاب مقارنة المساحة الموجودة باستخدام التكامل مع قص ولصق الإجابة.

يمكن استخدام التكاملات المحددة لإيجاد مساحات أشكال غير منتظمة أخرى.

مثال 5 من الحياة اليومية المساحة تحت المنحنى

تنسيق الحدائق يطلب عامر AED 2.40 لكل متر مربع من النشارة مقابل التوصيل والتأسيس. وتم استئجاره لإنشاء حوضي زهور متطابقين في الركنين الخلفيين لمنطقة سكنية. إذا كانت مساحة كل حوض زهور يمكن إيجادها بواسطة $\int_0^{10}(10-0.1x^2)dx$، فكم سيطلب عامر مقابل هذين الحوضين إذا كانت x معطاة بدلالة الأمتار؟



أوجد أولاً Δx و x_i.

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ الصيغة لـ Δx

$= \dfrac{10-0}{n}$ أو $\dfrac{10}{n}$ $\quad$ $a = 0$ و $b = 10$

$x_i = a + i\Delta x$ الصيغة لـ x_i

$= 0 + i\dfrac{10}{n}$ أو $\dfrac{10i}{n}$ $\quad$ $\Delta x = \frac{10}{n}$ و $a = 0$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

$\displaystyle\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تعريف التكامل المحدد

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^{\,2})\Delta x$ $\quad$ $f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n}$ $\quad$ $\Delta x = \frac{10}{n}$ و $x_i = \frac{10i}{n}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right)$ فكّك وبسّط.

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right)$ طبّق المجاميع.

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$ عامل.

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ صيغ المجاميع

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ وزّع $\frac{10}{n}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ اقسم على n.

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$ حلل إلى العوامل وأجرِ القسمة.

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ نظريات النهاية

$\displaystyle= 100-\frac{50}{3}(2+0+0)$ أو $66\frac{2}{3}$ بسّـــط.

مساحة حوض زهور واحد تساوي حوالي $66.67\ m^2$ لكي ينشئ عامر حوضي الزهور. سيطلب أجرة $\left(66\frac{2}{3}\cdot 2\right)\cdot$ AED 2.40 أو AED 320.

مهنة من الحياة اليومية

مهندس المناظر الطبيعية كانت تشير التوقعات إلى أن فرص توظيف مهندسي المناظر الطبيعية ستزداد بمعدل 16% بحلول عام 2016. ويكون مهندسو المناظر الطبيعية مسؤولين عن تصميم ملاعب الجولف وساحات الكليات والحدائق العامة والمناطق السكنية. وتتطلب هندسة المناظر الطبيعية ترخيصًا مهنيًا وشهادة بكالوريوس بشكل عام.

تمرين موجّه

5. **الطلاء** يطلي طلاب صف الأستاذة هداية للرسم لوحة جدارية كبيرة تجسد مشهدًا للتزلج في الشتاء. ويريد الطلاب البدء بطلاء تلين للتزلج يقع أحدهما عند بداية الصورة والآخر عند نهايتها. ولكن ليس لديهم إلا طلاء يكفي لتغطية $30\ m^2$. إذا كانت مساحة كل تل للتزلج يمكن إيجادها بواسطة $\int_0^5(5-0.2x^2)dx$. فهل لدى الطلاب طلاء كافٍ لكلا التلين؟ اشرح.

5. لا؛ مساحة التل الواحد تساوي $16.67\ m^2$ تقريبًا. سيحتاج الطلاب إذًا إلى 16.67 · 2 أو حوالي $33.3\ m^2$ من الطلاء، وهو ما ليس لديهم.

مثال إضافي

5 أعمال يُنتج مصنع ملابس 2000 بنطلون يوميًا. يمكن إيجاد تكلفة زيادة عدد البنطلونات المصنعة يوميًا من 2000 إلى 5000 من $\int_{2000}^{5000}(20-0.004x)\,dx$.

ما مقدار زيادة التكلفة؟ **AED 18,000**

إرشاد للمعلمين الجدد

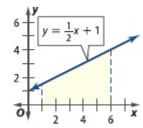
إجابة السؤال في جميع مسائل التطبيق من الحياة اليومية. ذكّر الطلاب بأن يتحققوا من الإجابة ليتأكدوا من أنهم أجابوا عن السؤال المطروح. تتطلب إجابة المثال 5 ضرب المساحة في 2 بالنسبة لحوضي الزهور، ثم في AED 2.40.

710 | الدرس 5-11 | المساحة تحت المنحنى والتكامل

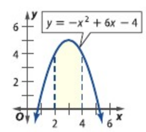
التمارين

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة باستخدام عدد المستطيلات المبين. استخدم نقاط النهاية الموضحة لتحديد ارتفاعات المستطيلات. (المثال 1)

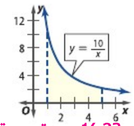
.1 5 مستطيلات نقاط نهاية يمنى **15 وحدة مربعة**



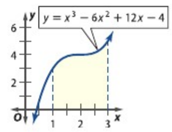
.2 4 مستطيلات نقاط نهاية يسرى **9.25 وحدة مربعة**



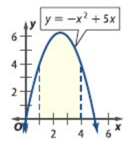
.3 8 مستطيلات نقاط نهاية يمنى **18.29 وحدة مربعة**



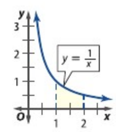
.4 8 مستطيلات نقاط نهاية يسرى **7.75 وحدة مربعة**



.5 4 مستطيل نقاط نهاية يمنى **16.23 وحدة مربعة**



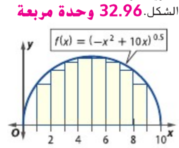
.6 5 مستطيلات نقاط نهاية يسرى **0.65 وحدة مربعة**



.7 **تبليط الأرضيات** يبلط ماجد أرضية خشبية ويجب عليه أن يغطي قطاعًا شبه دائري تحدده المعادلة $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (المثال 1) **37.96وحدة مربعة**

a. قرّب مساحة المنطقة شبه الدائرية باستخدام نقاط النهاية اليسرى ومستطيلات عرضها وحدة واحدة.

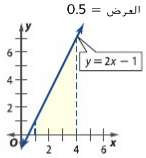
b. رأى ماجد أن استخدام كلٍّ من نقاط النهاية اليسرى واليمنى قد يعطي تقديرًا أفضل لأن هذا سيزيل أي مساحة خارج المنطقة الشبه دائرية. قرّب مساحة المنطقة شبه الدائرية كما هو موضح في الشكل. **32.96 وحدة مربعة**



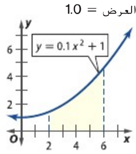
c. أوجد مساحة المنطقة باستخدام صيغة مساحة شبه الدائرة. أي تقريب يكون أقرب إلى المساحة الفعلية للمنطقة؟ اشرح لماذا يعطي هذه التقدير تقريبًا أفضل. **انظر الهامش.**

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة عن طريق استخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم استخدام نقاط النهاية اليسرى. ثم أوجد متوسط هذين التقريبين. استخدم العرض المحدد للمستطيلات. (المثال 2) **8–13. انظر الهامش.**

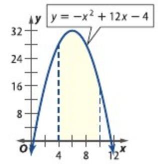
.8 العرض = 0.5



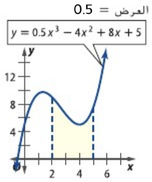
.9 العرض = 1.0



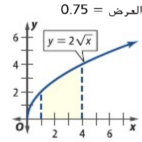
.10 العرض = 0.75



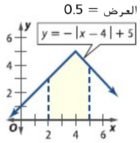
.11 العرض = 0.5



.12 العرض = 0.75



.13 العرض = 0.5



استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد. (المثالان 3 و 4)

14. $\int_1^4 4x^2\,dx$ **84**

15. $\int_2^6 (2x + 5)\,dx$ **52**

16. $\int_0^2 6x\,dx$ **12**

17. $\int_1^3 (2x^2 + 3)\,dx$ **$23\frac{1}{3}$**

18. $\int_2^5 (x^2 + 4x - 2)\,dx$ **75**

19. $\int_1^2 8x^3\,dx$ **30**

20. $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ **$10\frac{2}{3}$**

21. $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\,dx$ **$8\frac{2}{3}$**

22. $\int_0^3 (x^3 + x)\,dx$ **$24\frac{3}{4}$**

23. $\int_2^4 (-3x + 15)\,dx$ **12**

24. $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\,dx$ **$33\frac{1}{3}$**

25. $\int_1^3 12x\,dx$ **48**

26. $\int_0^3 (8 - 0.6x^2)\,dx$ **18.6**

27. $\int_3^8 0.5x^2\,dx$ **$80\frac{5}{6}$**

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 30 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع ينسى الطلاب غالبًا في التمارين من 1 إلى 6 أن يضربوا عرض المستطيلات. ذكّر الطلاب بالضرب في العرض الصحيح لكل مستطيل.

إجابات إضافية

.7c وحدة ^{2} 39.27≈؛ التقدير الأول أقرب. الإجابة النموذجية: المساحة الإضافية خارج شبه الدائرة المضافة إلى التقدير الأول تساعد في حساب المساحة في المنطقة غير المحصورة بالمستطيلات.

.8 نقاط النهاية اليمنى: 13.5 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 10.5 وحدة مربعة؛ المتوسط: 12 وحدة مربعة؛

.9 نقاط النهاية اليمنى: 12.6 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 9.4 وحدة مربعة؛ المتوسط: 11 وحدة مربعة؛

.10 نقاط النهاية اليمنى: 162.93 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 171.93 وحدة مربعة؛ المتوسط: 167.43 وحدة مربعة؛

.11 نقاط النهاية اليمنى: 18.91 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 19.66 وحدة مربعة؛ المتوسط: 19.285 وحدة مربعة؛

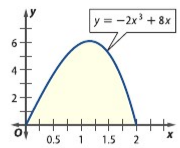
.12 نقاط النهاية اليمنى: 10.056 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 8.55.4 وحدة مربعة؛ المتوسط 119.3 وحدة مربعة؛

.13 نقاط النهاية اليمنى: 12.75 وحدة مربعة؛ نقاط النهاية اليسرى: 12.25 وحدة مربعة؛ المتوسط: 12.5 وحدة مربعة؛

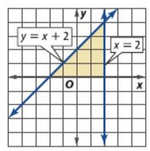
28. **النشر** راجع بداية الدرس. ترغب دار النشر في زيادة الإنتاج اليومي من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب. أوجد تكلفة الزيادة إذا كانت مُعرَّفة في الصورة $\int_{1000}^{1500}(10-0.002x)\,dx$. (المثال 5) **AED 3750**

29. **المدخل المقوس** قررت لجنة حفل التخرج أن يكون المدخل إلى حفل التخرج عبارة عن قوس من البالون. علاوة على ذلك، ترايد اللجنة تعليق لافتات ممتدة من أعلى القوس إلى الأسفل على الأرض مغطية المدخل بالكامل. أوجد المساحة الواقعة تحت المدخل المقوس من البالون إذا كان يمكن تحديدها بالصيغة $\int_{1}^{13}(-0.2x^2+2.8x-1.8)\,dx$، حيث x يُعطى بالمتر. (المثال 5) **$67.2\ m^2$**

30. **الشعار** جزء من شعار شركة ما يكون على شكل المنطقة الموضحة. إذا كان من المقرر خياطة هذا الجزء من الشعار على علم، فما كمية المواد المطلوبة إذا كان x يُعطى بالمتر؟ (المثال 5) **$8\ m^2$**



31. **النهايات السالبة** يمكن حساب التكاملات المحددة لكلٍ من النهايات الموجبة والسالبة. B



a. أوجد ارتفاع المثلث وطول قاعدته، ثم احسب مساحة المثلث باستخدام طوله وقاعدته.
الارتفاع: 4 وحدات، القاعدة: 4 وحدات؛ 8 وحدة مربعة

b. احسب مساحة المثلث عن طريق إيجاد قيمة $\int_{-2}^{2}(x+2)\,dx$ **8 وحدة مربعة**

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

32. $\int_{-1}^{1}x^2\,dx$ **$\frac{2}{3}$**

33. $\int_{-1}^{0}(x^3+2)\,dx$ **$1\frac{3}{4}$**

34. $\int_{-4}^{-2}(-x^2-6x)\,dx$ **$17\frac{1}{3}$**

35. $\int_{-3}^{-2}-5x\,dx$ **$12\frac{1}{2}$**

36. $\int_{-2}^{0}(2x+6)\,dx$ **8**

37. $\int_{-1}^{0}(x^3-2x)\,dx$ **$\frac{3}{4}$**

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

38. $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$ **$10\frac{2}{3}$**

39. $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$ **4**

40. $\int_{-4}^{3}2\,dx$ **14**

41. $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ **$3\frac{3}{4}$**

42. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة عملية إيجاد المساحة بين منحنيين. C **a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

a. **بيانيًا** مثّل $f(x) = -x^2 + 4$ و $g(x) = x^2$ بيانيًا على المستوى الإحداثي ذاته وظلل المساحات الممثلة بواسطة $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$ و $\int_0^1 x^2\,dx$.

b. **تحليليًا** أوجد قيمة $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$ و $\int_0^1 x^2\,dx$.

c. **لفظيًا** اشرح لماذا المساحة بين المنحنيين مساوية لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$. ثم احسب هذه القيمة باستخدام القيمة التي تم إيجادها في الجزء b.

d. **تحليليًا** أوجد $f(x) - g(x)$. ثم أوجد قيمة $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$.

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا بشأن عملية إيجاد المساحة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **تحليل الخطأ** يقول فهد إنه عندما تستخدم نقاط النهاية اليمنى للمستطيلات لتقدير المساحة بين المنحنى والمحور x، تكون المساحة الإجمالية للمستطيلات دائمًا أكبر من المساحة الفعلية. ويقول فالح إن مساحة المستطيلات تكون دائمًا أكبر عندما تستخدم نقاط النهاية اليسرى. هل أي منهما على صواب؟ اشرح.
انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

44. **التحدي** أوجد قيمة $\int_0^1(5x^4+3x^2-2x+1)\,dx$. **2**

45. **التبرير** افترض أن كل مقطع عرضي رأسي لنفق يمكن تمثيله بواسطة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$. اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستخدام $\ell \cdot \int_a^b f(x)\,dx$، حيث ℓ هو طول النفق. **انظر الهامش.**

46. **الكتابة المسبقة** اكتب توضيحًا يمكن استخدامه لوصف الخطوات المتخذة في تقدير المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة على فترة معطاة. **راجع عمل الطلاب.**

47. **التحدي** أوجد قيمة $\int_0^t(x^2+2)\,dx$. **$\frac{t^3}{3} + 2t$ وحدة مربعة**

48. **الكتابة في الرياضيات** اشرح مدى فعالية استخدام المثلثات والدوائر لتقريب المساحة بين منحنى والمحور x. أي شكل تعتقد أنه يقدم أفضل تقريب؟ **انظر الهامش.**

إجابة إضافية

45. الإجابة النموذجية: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي. يحسب ضرب هذه المساحة في إجمالي طول النفق حجم النفق.

712 | الدرس 11-5 | المساحة تحت المنحنى والتكامل

مراجعة شاملة

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

49. $j(x) = (2x^3 + 11x)(2x^8 - 12x^2)$ $j'(x) = 44x^{10} + 198x^8 - 120x^4 - 396x^2$

50. $f(k) = (k^{15} + k^2 + 2k)(k - 7k^2)$ 50. $f'(k) = -119k^{16} + 16k^{15} - 28k^3 - 39k^2 + 4k$

51. $s(t) = (\sqrt{t} - 7)(3t^8 - 5t)$ $s'(t) = \frac{51}{2}t^{\frac{15}{2}} - 168t^7 - \frac{5}{2}t^{\frac{1}{2}} + 35$

أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة حيث $x = 1$.

52. $y = x^3$ **3**

53. $y = x^3 - 7x^2 + 4x + 9$ **−7**

54. $y = (x + 1)(x - 2)$ **1**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

55. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$ **3**

56. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ **−1**

57. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$ $\frac{2}{9}$

58. **التسوق** في الأعوام الأخيرة. صرح 33% من الأمريكيين بأنهم يخططون الخروج للتسوق يوم الجمعة. ما احتمال أن يوجد أقل من 14 شخصًا يخططون للذهاب للتسوق يوم الجمعة من بين عينة عشوائية من 45 شخصًا؟ **33.4%**

صنِّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

59. X يمثل عدد مكالمات الهاتف المحمول التي أجراها طالب تم اختياره عشوائيًا في يوم معين. **منفصل؛ عدد مكالمات الهاتف المحمول قابل للعد، وبهذا يعتبر منفصلاً.**

60. X يمثل الزمن الذي يستغرقه طالب تم اختياره عشوائيًا لركض مسافة كيلومتر واحد.

متصل؛ الزمن يمكن أن يكون أي وقت بين فترة زمنية معقولة، مثل بين 5 و 15 دقيقة.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

61. **SAT/ACT** إذا كانت العبارة أدناه صحيحة، فإذًا ما مما يلي يجب أن يكون صحيحًا أيضًا؟
إذا كان يوجد دب واحد على الأقل نعسان.
فإذًا بعض المهور تكون سعيدة.

A إذا كانت كل الدببة نعسانة، فإذًا كل المهور تكون سعيدة.

B إذا كانت كل المهور سعيدة، فإذًا كل الدببة تكون نعسانة.

C إذا كان لا يوجد دب نعسان، فإذًا لا يوجد مهر سعيد.

D إذا كان لا يوجد مهر سعيد، فإذًا لا يوجد دب نعسان.

E إذا كانت بعض المهور سعيدة، فإذًا يوجد دب واحد على الأقل نعسان.

D

62. **المراجعة** ما $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$؟

F $\frac{1}{15}$

G $\frac{2}{15}$

H $\frac{3}{15}$

J $\frac{4}{15}$

J

63. أوجد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = -x^2 + 3x$ والمحور x على الفترة $[0, 3]$ أو $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx$.

A $3\frac{3}{4}$ وحدة مربعة

B $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

C $21\frac{1}{4}$ وحدة مربعة

D $22\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

B

64. **مراجعة** أوجد مشتقة $n(a) = \frac{4}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{3}{a^4} + 4a$.

F $n'(a) = 8a - 5a^2 + 3a^4$

H $n'(a) = 4a^2 - 5a^3 + 3a^4 + 4$

G $n'(a) = -\frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^3} - \frac{3}{a^5} + 4$

J $n'(a) = -\frac{4}{a^2} + \frac{10}{a^3} - \frac{12}{a^5} + 4$

J

انتبه!

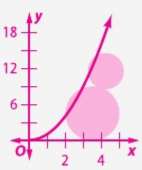
تحليل الخطأ ينبغي أن يدرك الطالب في تمرين **43** أن الحصول على تقدير أكبر يختلف باختلاف أداء الدالة. فإذا كانت الدالة تزيد، فسيؤدي استخدام نقاط النهاية اليمنى إلى الحصول على مساحة أكبر. وإذا كانت الدالة تتناقص، فسيؤدي استخدام نقاط النهاية اليسرى إلى الحصول على مساحة أكبر.

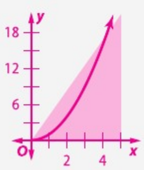
4 التقييم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة كيف يستخدمون المستطيلات في إيجاد المساحة التقريبية تحت منحنى. الإجابة النموذجية: أوجد مساحة كل مستطيل بضرب العرض في الارتفاع، وهذه هي قيمة الدالة عند تلك النقطة، ثم اجمع مساحات المستطيلات.

إجابة إضافية

48. الإجابة النموذجية: يوفر المثلث تقريبًا جيدًا بحسب شكل المنحنى، مثلما هو موضح. إذا كان للمنحنى عدة نقاط حرجة، فسيصعب جدًا استخدام المثلثات. وسيصعب استخدام الدوائر لأنها ستخلف مساحات فراغ كبيرة غير محصورة. لذا من الأسهل استخدام المثلثات عن الدوائر، لأنها تتميز بمرونة أكبر عند تقريب المساحة.





التدريس المتمايز BL

التوسع أوجد قيمة $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ من خلال التمثيل البياني للدالة وتحديد المساحة تحت المنحنى بدقة. فسّر. 6.28؛ المساحة الدقيقة تحت المنحنى تساوي 2π لأن الدالة عبارة عن شبه دائرة نصف قطرها 2.

الدرس 11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

السابق	الحالي	لماذا
استخدمت النهايات لتقريب المساحة تحت المنحنى.	1 إيجاد المشتقات العكسية. 2 استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.	في بداية ارتفاع رحلة بمنطاد الهواء الساخن، أدركت نهلة أن هاتف أخيها المحمول موجود في جيبها. وقبل أن يرتفع المنطاد للغاية أسقطت نهلة الهاتف إلى أخيها الذي ينتظر على الأرض. ولمعرفتها أن السرعة المتجهة للهاتف يمكن وصفها كالآتي $v(t) = -10t$، حيث t معطى بالثواني والسرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، استطاعت نهلة تحديد مدى ارتفاعها عن الأرض عندما أسقطت الهاتف.

المفردات الجديدة

عكس المشتقة
antiderivative
تكامل غير محدود
indefinite integral
النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

1 المشتقات العكسية والتكاملات غير المحدودة

في الدرسين 11-3 و 11-4، تعلمت أنه إذا كان موقع جسم ما محددًا بالشكل $f(x) = x^2 + 2x$، فإن التعبير الدال على السرعة المتجهة للجسم هو مشتقة $f'(x) = 2x + 2$ أو $f(x)$. على الرغم من ذلك، إذا أعطي إليك تعبير دال على السرعة المتجهة ولكنك تحتاج إلى معرفة الصيغة التي جاء منها ذلك التعبير، فإننا بحاجة إلى الحل بترتيب عكسي أو عكس خطوات الاشتقاق.

بمعنى آخر، إذا أُعطيت $f(x)$، فإننا بحاجة إلى إيجاد معادلة $F(x)$ مثل أن $F'(x) = f(x)$. فالدالة $F(x)$ عبارة عن **عكس المشتقة** للدالة $f(x)$.

مثال 1 إيجاد المشتقات العكسية

أوجد المشتق العكسي لكل دالة.

a. $f(x) = 3x^2$

علينا إيجاد دالة لها المشتقة $3x^2$. تذكر أن المشتقة لها أُس أقل من أُس الدالة الأصلية بمقدار واحد. ولذا، ستُرفع $F(x)$ إلى الأس ثلاثة. وأيضًا، يتحدد معامل المشتقة بشكل جزئي عن طريق أُس الدالة الأصلية. وتتوافق الدالة $F(x) = x^3$ مع هذا الوصف. مشتقة $x^3 = 3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

ومع ذلك، x^3 ليست الوحيدة التي تصلح. فالدالة $G(x) = x^3 + 10$ دالة أخرى تصلح لأن مشتقتها هي $G'(x) = 3x^{3-1} + 0$ أو $3x^2$. وإجابة أخرى قد تكون $H(x) = x^3 - 37$.

b. $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بأس سالب، $-8x^{-9}$. ومرة أخرى، فإن أُس المشتقة أقل من أُس الدالة الأصلية بمقدار واحد. لذا ستُرفع $F(x)$ إلى الأس سالب العدد ثمانية. ويمكننا تجربة $F(x) = x^{-8}$. مشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1}$ أو $-8x^{-9}$.

$G(x) = x^{-8} + 3$ و $H(x) = x^{-8} - 12$ مشتقان عكسيان آخران.

تمرين موجّه

أوجد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة.

1A. $2x$ **الإجابات النموذجية:** x^2, $x^2 + 5$, $x^2 - 7$, $x^2 + 28$

1B. $-3x^{-4}$ **الإجابة النموذجية:** x^{-3}, $x^{-3} + 33$, $x^{-3} - 4$, $x^{-3} + 9$

في المثال 1، لاحظ أن جمع الثوابت إلى المشتق العكسي الأصلي أو طرحها منه نتج عنه مشتقات عكسية أخرى. وفي الحقيقة، نظرًا لأن مشتقة أي ثابت هي 0، فإن جمع أو طرح الحد الثابت C إلى المشتق العكسي لن يؤثر على مشتقته. ولذلك، يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة المحددة. ويطلق على المشتقات العكسية التي تتضمن حدًا ثابتًا C أنها في *الصورة العامة*.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 11-6 استخدام النهايات في تقريب المساحة تحت المنحنى.

الدرس 11-6 إيجاد عكس المشتقات. استخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

بعد الدرس 11-6 أوجد قيمة فترات الدوال غير كثيرات الحدود.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما العلاقة بين الدالة المُحددة لسرعة الهاتف وبين ارتفاع نهلة؟ دالة الموقع هي عكس المشتقة لدالة السرعة.

- ماذا ينبغي أن تفعل نهلة لتحديد ارتفاعها عندما تركت الهاتف؟ ينبغي أن تجد عكس مشتقة دالة السرعة وتعوض عن عدد الثواني التي استغرقها الهاتف للوصول إلى الأرض، t.

1 عكس المشتقات والتكامل غير المحدود

يبين المثالان 1 و 2 كيفية إيجاد عكس مشتقات الدوال كثيرات الحدود والدوال الأسية. **ويبين المثال 3** كيفية استخدام الموقف في إيجاد قيمة الثابت في تكامل غير محدود.

التقييم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد المشتقة العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = 6x$
الإجابة النموذجية: $3x^2$

b. $f(x) = -6x^{-7}$
الإجابة النموذجية: x^{-6}

2 أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = 3x^5$ $\quad \frac{1}{2}x^6 + C$

b. $f(x) = \dfrac{4}{x^6}$ $\quad -\dfrac{4}{5x^5} + C$

c. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
$\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

مثلما هو الحال مع المشتقات، هناك قواعد لإيجاد المشتقات العكسية.

المفهوم الأساسي قواعد المشتقات العكسية

قاعدة القوة	إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي غير -1، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
المضاعف الثابت للقوة	إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي غير -1 و k حد ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$
المجموع والفرق	إذا كانت المشتقات العكسية للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ هي $F(x)$ و $G(x)$ بالتوالي، فإن المشتقة العكسية للدالة $f(x) \pm g(x)$ هي $F(x) \pm G(x)$.

مثال 2 قواعد المشتقات العكسية

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$	المعادلة الأصلية
$F(x) = \dfrac{4x^{7+1}}{7+1} + C$	المضاعف الثابت للقوة
$= \frac{1}{2}x^8 + C$	بسّط.

b. $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$

$f(x) = \dfrac{2}{x^4}$	المعادلة الأصلية
$= 2x^{-4}$	إعادة كتابة التعبير بأُس سالب.
$F(x) = \dfrac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$	المضاعف الثابت للقوة
$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C$ أو $-\dfrac{2}{3x^3} + C$	بسّط.

c. $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$	المعادلة الأصلية
$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$	إعادة كتابة الدالة بحيث يحمل كل حد القوة لـ x.
$F(x) = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} - \dfrac{8x^{1+1}}{1+1} + \dfrac{5x^{0+1}}{0+1} + C$	قاعدة المشتق العكسي
$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$	بسّط.

تمرين موجّه

2A. $f(x) = 6x^4$ $\quad F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$

2B. $f(x) = \dfrac{10}{x^3}$ $\quad F(x) = -5x^{-2} + C$

2C. $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ $\quad F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C$

نصيحة دراسية
المشتقات العكسية المشتقة العكسية للحد الثابت k هي kx. على سبيل المثال، إذا كانت الدالة $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

الصورة العامة لمشتقة عكسية لها اسم ورمز خاص.

المفهوم الأساسي التكامل غير المحدود

يتحدد **التكامل غير المحدود** للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ و C هي أي حد ثابت.

مثال 3 من الحياة اليومية التكامل غير المحدود

إسقاط البيض يشارك طلاب صف التكنولوجيا للأستاذة نسرين في مسابقة لإسقاط البيض. فيها، يتعين على كل فريق بناء أداة حماية تحفظ البيض من الكسر بعد إسقاطه من ارتفاع 9 أمتار. يمكن تحديد السرعة اللحظية للبيضة كالآتي $v(t) = -10t$. حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية.

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للبيضة التي تسقط.

لإيجاد دالة لموقع البيضة، أوجد المشتقة العكسية لــ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\, dt$ العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$= \int -10t\, dt$ $v(t) = -32t$

$= -\frac{10t^{1+1}}{1+1} + C$ المضاعف الثابت للقوة

$= -5t^2 + C$ بسّط.

أوجد C بالتعويض عن الارتفاع المبدئي بــ 9 m والتعويض عن الزمن الإبتدائي بــ 0.

$s(t) = -5t^2 + C$ المشتقة العكسية لــ $v(t)$

$9 = -5(0)^2 + C$ $s(t) = 9$ و $t = 0$

$9 = C$ بسّط.

دالة الموقع للبيضة هي $s(t) = -5t^2 + 9$.

b. أوجد المدة التي ستستغرقها البيضة للاصطدام بالأرض.

أوجد قيمة t عندما تكون $s(t) = 0$.

$s(t) = -5t^2 + 9$ دالة موقع البيضة

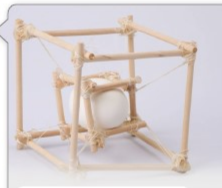
$0 = -5t^2 + 9$ $s(t) = 0$

$-9 = -5t^2$ بطرح 30 من كل طرف.

$1.8 = t^2$ بقسمة كل طرف على -16.

$1.341 = t$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

ستصطدم البيضة بالأرض في غضون 1.34 s تقريبًا.



الربط بالحياة اليومية

في مسابقات إسقاط البيض، يحاول المشاركون حماية البيض من السقوط من ارتفاع طابقين. قد يستند تسجيل النقاط على وزن أداة الحماية وعدد الأجزاء المتضمنة في الأداة، وما إذا كانت الأداة تحقق الهدف وبالطبع ما إذا كان البيض ينكسر أم لا.

المصدر: *Salem-Winston Journal*

تمرين موجّه

3. **سقوط جسم** يقف عامل صيانة بشكل آمن على منصة في صالة للألعاب الرياضية لإصلاح نظام إضاءة يوجد على ارتفاع 36 m من الأرض، وذلك عندما سقطت محفظته من جيبه. يمكن تحديد السرعة اللحظية للمحفظة كالآتي $v(t) = -10t$. حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية.

   a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للمحفظة التي سقطت. $s(t) = -5t^2 + 36$

   b. أوجد المدة التي ستستغرقها المحفظة للاصطدام بالأرض. **ستصطدم المحفظة بالأرض في غضون 2.74 s تقريبًا**

2 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

لاحظ أن الرمز المستخدم للتكاملات غير المحدودة تبدو متشابهة للغاية مع الترميز المستخدم في الدرس 11-5 مع التكاملات المحدودة. الفرق الوحيد بينهما هو غياب الحدود العليا والدنيا في التكاملات غير المحدودة. في الحقيقة، يعد إيجاد المشتقة العكسية للدالة وسيلة مختصرة لحساب التكامل المحدود وذلك عن طريق إيجاد قيمة مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحدودة والمشتقات العكسية مهمة للغاية بحيث يطلق عليها **النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل**.

المفهوم الأساسي النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة $[a, b]$ و$F(x)$ هي أي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$. فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

يشار عادة إلى الفارق $F(b) - F(a)$ بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

مثال إضافي

3 الغوص من المرتفعات يقفز غواص الغوص من المرتفعات من أعلى جُرف ارتفاعه 30 m. يمكن حساب السرعة اللحظية من $v(t) = -10t$. حيث t تعطى بالثواني وتقاس السرعة بوحدة المتر/ثانية.

a. أوجد موقع الغواص $s(t)$. $s(t) = -5t^2 + 30$

b. أوجد المدة التي سيستغرقها الغواص للوصول إلى الماء. 2.5 s

إرشاد للمعلمين الجدد

عكس المشتقات أكّد على خطأ استخدام الاسم المعرفة مع عكس المشتقة، نظرًا لوجود العديد منها. ولكن يتم إيجادها لأن جميعها يمكن تقديمها بتعبير واحد.

2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

يبين المثال 4 كيفية استخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل في إيجاد المساحة تحت المنحنى في فترة معينة. **ويبين المثالان 5 و 6** كيفية إيجاد قيمة التكامل المحدد وغير المحدد.

مثال إضافي

4 استخدم النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيل البياني لكل دالة والمحور x في الفترة المعطاة.

a. $y = 5x^4$ في الفترة $[2, 4]$، أو $\int_2^4 5x^4\, dx$. **992 وحدة مربعة؛**

b. $y = -x^2 + 6x + 9$ في الفترة $[0, 6]$، أو $\int_0^6 (-x^2 + 6x + 9)\, dx$. **90 وحدة مربعة؛**

إرشاد للمعلمين الجدد

عكس المشتقة عند إيجاد قيمة تكامل. تأكد من إيجاد الطلاب لعكس المشتقة قبل التعويض.

إحدى النتائج الثانوية للنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل هي أنها تكوّن روابط بين التكاملات والمشتقات. فالتكامل هو عملية حساب المشتقات العكسية، بينما الاشتقاق هو عملية حساب المشتقات. وبالتالي، فإن الاشتقاق والتكامل عمليتان عكسيتان. ويمكننا استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد قيمة التكاملات المحدودة دون استخدام النهايات.

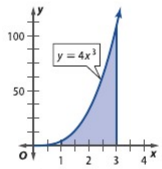
الربط بتاريخ الرياضيات

ماريا غايتانا أنييزي (1718–1799) هي لغوية وعالمة رياضيات وفيلسوفة إيطالية. ألفت كتاب Analytical Institutions، وهو أول كتاب يناقش حساب التفاضل والتكامل، واشتهرت أيضًا بوضعها معادلة لمنحنى سُمّي "منحنى أنييزي".

مثال 4 المساحة تحت المنحنى

استخدم النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة والمحور x في الفترة المعطاة.

a. $y = 4x^3$ في الفترة $[1, 3]$، أو $\int_1^3 4x^3\, dx$.



أولاً، أوجد المشتقة العكسية.

$$\int 4x^3\, dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C \quad \text{المضاعف الثابت للقوة}$$

$$= x^4 + C \quad \text{بسّط.}$$

الآن، أوجد قيمة المشتقة العكسية عند الحد الأعلى والحد الأدنى، وأوجد الفارق بينهما.

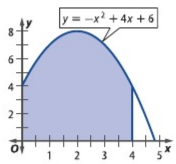
$$\int_1^3 4x^3\, dx = x^4 + C\Big|_1^3 \quad \text{النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= (3^4 + C) - (1^4 + C) \quad b = 3 \text{ و } a = 1$$

$$= 81 - 1 \text{ أو } 80 \quad \text{بسّط.}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[1, 3]$ 80 وحدة مربعة.

b. $y = -x^2 + 4x + 6$ في الفترة $[0, 4]$، أو $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx$



أولاً، أوجد المشتقة العكسية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\, dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C \quad \text{قاعدة المشتق العكسي}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \quad \text{بسّط.}$$

الآن ، أوجد قيمة المشتقة العكسية عند الحد الأعلى والحد الأدنى، وأوجد الفارق بينهما.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4 \quad \text{النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right) \quad b = 4 \text{ و } a = 0$$

$$= 34.67 - 0 \text{ أو } 34.67 \quad \text{بسّط.}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[0, 4]$ 34.67 وحدة مربعة.

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل تكامل محدود مما يلي.

4A. $\int_2^5 3x^2\, dx$ **117**

4B. $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\, dx$ **46**

لاحظ أنه عند إيجاد قيمة المشتقات العكسية عند الحدود العليا والدنيا وإيجاد الفارق بينهما، فإنه لا تتوفر لدينا قيمة دقيقة لـ C. ومع ذلك، يكون الفارق بين الثوابت 0 بغض النظر عن قيمة الحد الثابت وذلك نظرًا لوجوده في كل مشتقة عكسية. وبالتالي، عند إيجاد قيمة التكاملات المحدودة باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، يمكنك تجاهل الحد الثابت عند إعادة كتابة المشتقة العكسية.

717

أمثلة إضافية

5 أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

a. $\int (x^3 - 2x + 1)\, dx$

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b. $\int_1^4 (x^3 - 2x + 1)\, dx$

51.75

6 يمكن الحصول على الشغل – بوحدة الجول – المطلوب لشد زنبرك معين من $\int_0^{2.5} 60x\, dx$.

ما مقدار الشغل المطلوب؟ 187.5 J

التركيز على محتوى الرياضيات

التكامل المحدد وغير المحدود

ينتج تكامل الدالة حدًا ثابتًا، مثلما هو موضح في التكامل غير المحدود. ولكن يحذَف الثابت عند إيجاد قيمة التكامل المحدد، لأنه يضَاف في القيمة العليا ويطَرح من القيمة السفلى.

قبل إيجاد قيمة التكامل، حدد ما إذا كان غير محدود أم محدودًا.

انتبه!

التكاملات بالرغم من إمكانية استبعاد الحد الثابت C عند إيجاد قيمة التكاملات المحدودة، إلا أنه يتعين تضمينه عند إيجاد قيمة التكاملات غير المحدودة لأنه جزء من المشتقة العكسية.

مثال 5 التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

a. $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا التكامل غير محدود. لذا، استخدم قواعد المشتقة العكسية لإيجاد قيمته.

$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$ المضاعف الثابت للقوة

$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$ بسّط.

b. $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا التكامل محدود. لذا، أوجد قيمة التكامل باستخدام الحد الأعلى والحد الأدنى المتوفرين.

$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$ النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{3^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{2^4}{4}\right]$ $a = 2$ و $b = 3$

$= 20.25 - 14$ أو 6.25 بسّط.

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة [2, 3] 6.25 وحدة مربعة.

تمرين موجّه

5A. $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$ $x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B. $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$ 15.6

لاحظ أن التكاملات غير المحدودة ينتج عنها المشتق العكسي للمعادلة؛ في حين أن التكاملات المحدودة لا ينتج عنها المشتق العكسي فحسب، بل تتطلب إيجاد قيمة المشتق العكسي أيضًا عند الحدّين الأعلى والأدنى المعطيين. وبالتالي، ينتج عن التكامل غير المحدود دالة المشتق العكسي وذلك لإيجاد المساحة تحت المنحنى عند أي مجموعة من الحدود. ويصبح التكامل محدودًا عندما تتوفر مجموعة من الحدود ويصبح إيجاد قيمة المشتق العكسي ممكنًا.

مثال 6 التكاملات المحدودة

يتحدد الشغل المطلوب بالجول لتمديد نابض معين لمسافة 0.5 m إضافي عن طوله الطبيعي بالآتي $\int_0^{0.5} 360x\, dx$. فما مقدار الشغل المطلوب؟

أوجد قيمة التكامل المحدود عند الحدّين الأعلى والأدنى المعطيين.

$\int_0^{0.5} 360x\, dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$ المضاعف الثابت للقوة والنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$ افترض أن $b = 0.5$ و $a = 0$ ثم اطرح.

$= 45 - 0$ أو 45 بسّط.

الشغل المطلوب يساوي 45 جول.

تمرين موجّه

أوجد الشغل المطلوب لتمديد نابض إذا كان محددًا بالتكاملات الآتية.

6A. $\int_0^{0.7} 476x\, dx$ 116.62 J

6B. $\int_0^{1.4} 512x\, dx$ 501.76 J

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بالتدريب السمعي/الموسيقى اطلب من الطلاب التعاون مع زميل في كتابة قصيدة أو نشيد يصف النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. وينبغي أن تصف القصيدة أو النشيد استخدامات النظرية أيضًا. واطلب من الطلاب عرض عملهم على بقية زملائهم.

التمارين

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة. (المثالان 1 و 2)

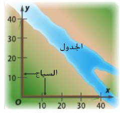
1. $f(x) = x^5$ $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$
2. $h(b) = -5b - 3$ $H(b) = -\frac{5}{2}b^2 - 3b + C$
3. $f(z) = z^3$ $F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C$
4. $n(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{3}{4}$ $N(t) = \frac{1}{20}t^5 - \frac{2}{9}t^3 + \frac{3}{4}t + C$
5. $q(r) = \frac{3}{4}r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8}r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$ $Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C$
6. $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u$ $W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{5}u^2 + C$
7. $g(a) = 8a^3 + 5a^2 - 9a + 3$ $G(a) = 2a^4 + \frac{5}{3}a^3 - \frac{9}{2}a^2 + 3a + C$
8. $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$ $U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C$
9. $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$ $M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C$
10. $p(h) = 72h^8 + 24h^5 - 12h^2 + 14$ $P(h) = 8h^9 + 4h^6 - 4h^3 + 14h + C$

11. **الهاتف المحمول** ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن هاتفًا استغرق ثانيتين بالضبط في السقوط من المنطاد إلى الأرض. (المثال 3)
 a. أوجد قيمة $s(t) = \int -32t\ dt$. $s(t) = -16t^2 + C$
 b. أوجد قيمة C في دالة الموقع $s(t)$ بالتعويض عن t بثانيتين وعن $s(t)$ بصفر. 64
 c. كم يبعد الهاتف عن الأرض بعد 1.5 ثانية من سقوطه؟ 28 ft

أوجد قيمة كل تكامل. (المثالان 4 و 5)

12. $\int (6m + 12m^3)\ dm$ $3m^2 + 3m^4 + C$
13. $\int (20n^3 - 9n^2 - 18n + 4)\ dn$ $5n^4 - 3n^3 - 9n^2 + 4n + C$
14. $\int_1^4 2x^3\ dx$ 127.5
15. $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\ da$ 46.5
16. $\int_1^2 (4g + 6g^2)\ dg$ 20
17. $\int_2^{10} \frac{2}{5}p^{\frac{1}{8}} + \frac{5}{4}p^{\frac{2}{7}} + \frac{1}{4}\ dp$ 22.37
18. $\int_1^3 \frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4)\ dh$ 7.99
19. $\int_0^2 (-v^4 + 2v^3 + 2v^2 + 6)\ dv$ 18.93
20. $\int (3.4t^4 - 1.2t^3 + 2.3t - 5.7)\ dt$ $0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$
21. $\int (14.2w^{6.1} - 20.1w^{5.7} + 13.2w^{2.3} + 3)\ dw$ $2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

22. **مسّاح أراضٍ** قطعة أرض لها سياجان متعامدان وجدول كحدود لها كما هو موضح.



افترض أنه يمكن تمثيل حافة الجدول التي تحد قطعة الأرض بالدالة $f(x) = -0.00005x^3 + 0.004x^2 - 1.04x + 40$، حيث السياجان هما المحوران x و y، و x معطاة بالكيلومترات. أوجد قيمة $\int_0^{40} f(x)\ dx$ لإيجاد مساحة الأرض. (المثال 6) $821.33\ km^2$

23. **حشرات** يمكن تحديد السرعة المتجهة لقفزة برغوث كالآتي $v(t) = -10t + 11$، حيث t الزمن معطى بالثواني والسرعة المتجهة معطاة بالأمتار لكل ثانية. (المثال 6)
 a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لقفز البرغوث. وافترض أنه عندما تكون $t = 0$، يكون $s(t) = 0$. $s(t) = -5t^2 + 11t$
 b. بعد أن يقفز البرغوث، كم سيستغرق من الوقت قبل أن ينزل على الأرض؟ 2.125 s

24. **معلم وطني** يرغب فنّان خداع بصري في إخفاء قوس جيت واي من سانت لويس. ولمحاولة تنفيذ الخدعة، عليه أن يغطي القوس بغطاء كبير. ولكن قبل صنع هذا الغطاء، يرغب الفنان في معرفة المساحة التقريبية تحت القوس . إحدى المعادلات التي يمكن استخدامها لتمثيل شكل القوس هي $y = -\frac{x^2}{47.25} + 1.3x$، حيث x معطاة بالأمتار. أوجد المساحة تحت القوس. (المثال 6) $24{,}580\ m^2$

25. **مضمار الركض** يحتاج عدّاء إلى اتخاذ قرار إما بدء سباق 100 m بدفعة أولية من السرعة يتم تمثيلها بالآتي $v_1(t) = 3.25t - 0.2t^2$، أو الاحتفاظ بطاقته ليزيد من سرعته فيما بعد قرب نهاية السباق، ويتم تمثيل ذلك بالآتي $v_2(t) = 1.2t + 0.03t^2$، حيث تقاس السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية بعد زمن t ثوانٍ. a–c. انظر الهامش.
 B
 a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل دالتي السرعة المتجهة على الشاشة نفسها عندما يكون $0 \le t \le 12$.
 b. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لكل من $v_1(t)$ و $v_2(t)$.
 c. كم الوقت الذي يستغرقه العدّاء لإنهاء سباق 100 m باستخدام كل إستراتيجية؟

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

26. $\int_{-3}^{1} 3\ dx$ 12
27. $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\ dx$ 27
28. $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\ dx$ 28.5
29. $\int_{-3}^{-1} (x^3 + 8x^2 + 21x + 20)\ dx$ 5.33
30. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$ 2.5
31. $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\ dx$ 16.4

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-24 للتحقق من استيعاب الطلاب.

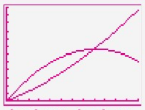
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 12-13 و 20-21، ذكّر الطلاب بأن يضيفوا الثابت C إلى إجاباتهم لأنها تكاملات غير محددة.

إجابات إضافية

25a.



[0, 12] scl: 1 by [0, 24] scl: 2

25b. $s_1(t) = \frac{3.25t^2}{2} - \frac{0.2t^3}{3}s$

$s_2(t) = \frac{1.2t^2}{2} + \frac{0.03t^3}{3}$

25c. 10.34 ثوانٍ في الإستراتيجية الأولى و 11.80 ثانية في الإستراتيجية الثانية

32. **منجنيق** يتم قذف ثمار اليقطين بمجانق في بطولة العالم لقذف اليقطين في ديلاوير. تكون السرعة المتجهة لثمرة يقطين تم قذفها بمنجنيق هي $v(t) = -10t + 36$ m في الثانية بعد t ثوانٍ. وبعد 3 **s**، يبلغ ارتفاع ثمرة اليقطين 68 m.

a. أوجد أقصى ارتفاع لثمرة اليقطين. **71 m**

c. أوجد السرعة المتجهة لليقطين عندما يصطدم بالأرض. **حوالي 37 m/s−**

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي. **33–38. انظر الهامش.**

33. $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

34. $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

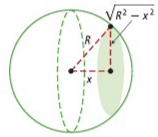
35. $\int_3^{2x} (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

36. $\int_{-x}^6 (-9t^2 + 4t)\, dt$

37. $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

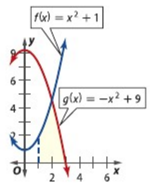
38. $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

39. **كرة** يمكن إيجاد حجم كرة نصف قطرها R عن طريق تقسيم الكرة رأسيًا إلى مقاطع عرضية دائرية ثم دمج المساحات. **C**



يبلغ نصف قطر كل مقطع عرضي $\sqrt{R^2 - x^2}$. إذًا، مساحة المقطع العرضي تساوي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$. أوجد قيمة $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)dx$ لإيجاد حجم الكرة. $\frac{4}{3}\pi R^3$

40. **المساحة** احسب المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$، والدالة $g(x)$، والمحور x في الفترة $1 \le x \le 3$. **6 وحدة مربعة**



يقدم التكامل $\int_0^{n+0.5} x^k\, dx$ تقديرًا معقولاً لمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n} i^k$.

استخدم التكامل لتقدير كل مجموع ثم أوجد المجموع الفعلي.

41. $\sum_{i=1}^{20} i^3$ **44,152.52; 44,100**

42. $\sum_{i=1}^{100} i^2$ **338,358.38; 338,350**

43. $\sum_{i=1}^{25} i^4$ **2,156,407.8; 2,153,645**

44. $\sum_{i=1}^{30} i^5$ **134,167,641.6; 133,987,425**

45. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين *المساحة الكلية والمساحة الحاملة لعلامة* لمنطقة محصورة بين منحنى والمحور x.

a. **هندسيًا** مثّل بيانيًا الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$، وظلل المنطقة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور x عندما يكون $0 \le x \le 4$. **a, c, e. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

b. **تحليليًا** أوجد قيمة $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx$ و $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx$. **4; -4**

c. **لفظيًا** ضع تخمينًا على المساحة الموجودة فوق المحور x وتحته.

d. **تحليليًا** احسب *المساحة الحاملة للعلامة* بإيجاد قيمة $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx$. ثم احسب *المساحة الكلية* بإيجاد قيمة $\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx\right|$. **0; 8**

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا بشأن الفرق بين *المساحة الحاملة لعلامة* و*المساحة الكلية*.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. **تحدٍ** أوجد قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$، حيث r هو الحد الثابت. (*تلميح:* أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ والمحور x.) $\frac{1}{2}\pi r^2$

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم لا تصح *أبدًا* . اشرح إجابتك.** **47–49. انظر الهامش.**

47. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_b^a f(x)\, dx$

48. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$

49. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{|a|}^{|b|} f(x)\, dx$

50. **برهان** أثبت أنه للثابتين n و m **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

$$\int_a^b (n + m)\, dx = \int_a^b n\, dx + \int_a^b m\, dx.$$

51. **التبرير** صف قيم $f(x)$، و $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$، و $\int_a^b f(x)\, dx$، حيث يقع منحنى الدالة $f(x)$ تحت المحور x عندما تكون $a \le x \le b$. **انظر الهامش.**

52. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب إمكانية تجاهل الحد الثابت C في المشتق العكسي عند إيجاد قيمة تكامل محدود. **انظر الهامش.**

53. **الكتابة في الرياضيات** اكتب ملخصًا يمكن استخدامه لوصف الخطوات المتضمنة في عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 6x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

إجابات إضافية

33. $-x^3 - 4x^2 + 24$

34. $2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$

35. $16x^4 + 20x^2 + 4x - 132$

36. $-3x^3 - 2x^2 - 576$

37. $4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$

38. $-7x^3 + 44x + 57$

720 | الدرس 11-6 | النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

4 التقييم

حصاد الأمس اطلب من كل طالب أن يكتب كيف ساعدته المفاهيم التي تعلمها في الدرس السابق عن التكامل في فهم درس اليوم الجديد عن عكس المشتقة.

إجابات إضافية

.47 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: يؤدي تغيير ترتيب النهايات إلى تغيير علامة الإجابة الأصلية ما لم تكن الإجابة 0.

.48 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فسيكون المحايد صحيحاً.

.49 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، $a \geq 0$ و $b \geq 0$، وسيكون المحايد صحيحًا. إذا كانت $f(x)$ دالة فردية، $a \geq 0$ و $b \geq 0$، أو $a \leq 0$ و $b \leq 0$، فسيكون المحايد صحيحاً.

.51 لأن التمثيل البياني أسفل المحور x، $f(x)$ سالبًا. كل $f(x)$ سالب و Δx موجب.

إذًا فكل حد في المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالبًا. ومن ثم، فإن المجموع سالب. لأن $\int_a^b f(x)\,dx$ نهاية للمجموع السالب، فهي أيضًا سالبة.

.52 الإجابة النموذجية: إذا كان C مشمولاً في عكس المشتقة، فستبدو كحد في كل من $F(a)$ و $F(b)$ وسيُحذف عند طرحه.

.63f الإجابة النموذجية: يتغير اتجاه الجزيء بعد 1.5 s ويتحرك يمينًا بدلاً من يسارًا.

مراجعة شاملة

استخدم النهايات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى كل دالة والمحور x والمُعطاة بواسطة التكامل المحدود.

54. $\int_{-2}^{2} 14x^2\,dx$ $\mathbf{74\frac{2}{3}}$

55. $\int_0^6 (x+2)\,dx$ **30**

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي.

56. $j(k) = \dfrac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$ $\quad j'(k) = \dfrac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2}$

57. $g(n) = \dfrac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$ $\quad g'(n) = \dfrac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2+1)^2}$

58 **الموضة** موضح بالجدول متوسط أسعار حقائب اليد لثلاثة مصممين على موقع للبيع بالمزاد العلني على الإنترنت.

طراز حقيبة اليد	متوسط السعر (AED)
A	135
B	145
C	152

.a إذا اختيرت عينة عشوائية تضم 35 حقيبة يد من الموديل A. فأوجد احتمال أن يكون متوسط السعر أكثر من AED 138، إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي AED 9. **2.4%**

.a إذا اختيرت عينة عشوائية تضم 40 حقيبة يد من الموديل C. فأوجد احتمال أن يكون متوسط السعر بين AED 150 و AED 155، إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي AED 12. **79.7%**

.59 **البيسبول** يتم توزيع متوسط عمر لاعب في بطولة بيسبول رئيسية عادة بمتوسط 28 وانحراف معياري يبلغ 4 أعوام.

a. ما النسبة المئوية تقريبًا للاعبين في بطولة البيسبول الرئيسية الذين تقل أعمارهم عن 24؟ **16%**

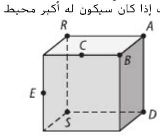
b. إذا كان هناك فريق مكون من 35 لاعبًا. فكم تقريبًا عدد اللاعبين الذين تتراوح أعمارهم بين 24 و 32 ؟ **24**

.60 أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية للنقطة ذات الإحداثيين المتعامدين المحددين $(3, 8)$، إذا كان $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. **(8.54, 1.21), (−8.54, 4.35)**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.61 **SAT/ACT** في الشكل، النقطتان C و E هما نقطتا المنتصف لحافتي المكعب. سيتم رسم مثلث يكون فيه النقطتان R و S رأسيّ زاويتين فيه. فأي من النقاط التالية يجب أن تكون الرأس الثالث للمثلث إذا كان سيكون له أكبر محيط ممكن؟ **B**

A A
B B
C C
D D
E E



.62 يتحدد مقدار الشغل المطلوب بوحدة الجول لضخ كل المياه الموجودة خارج حمام سباحة أبعاده 10 m في 5 m في 2 m بالتعبير $\int_0^2 490{,}000x\,dx$. إذا وجدت قيمة هذا التكامل،فما مقدار الشغل المطلوب؟ **F**

F 980,000 J
G 985,000 J
H 990,000 J
J 995,000 J

.63 **إجابة حرة** جسيم يتحرك على طول خط مستقيم بحيث يتحدد موقعه في أي زمن $t \geq 0$ بالدالة $s(t) = t^2 - 3t + 10$ حيث s مقيسة بالأمتار وt مقيس بالثواني.

.a أوجد إزاحة الجسيم خلال أول 4 s. أي، ما المسافة التي يبعدها الجسيم عن موقع بدئه الأصلي بعد 4 s؟ **4 m**

.b أوجد متوسط السرعة المتجهة للجسيم خلال أول 4 s. **1 m/s**

.c اكتب معادلة للسرعة اللحظية للجسيم عند أي زمن t. $s'(t) = 2t - 3$

.d أوجد السرعة اللحظية للجسيم عندما يكون $t = 1$ s و 4 s. **−1 m/s; 5 m/s**

.e عند أي قيم t تصل $s(t)$ إلى أدنى قيمة؟ **1.5 s**

.f ما الذي تمثله قيمة t التي وجدتها في الجزء d بخصوص حركة الجسيم؟ **انظر الهامش.**

التدريس المتمايز BL

التوسع على فرض $f(x)$ دالة متصلة و $F(x)$ مشتقة عكسية لـ f. أثبت أن

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
$$= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$
$$= [F(c) - F(a)]$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

التقييم التكويني

المفردات الرئيسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

الوحدة 11 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 11-1)

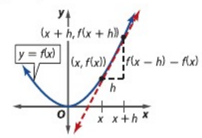
- توجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c فقط إذا كان هناك نهايتان أحاديتي الطرف ومتساويتين.
- لا توجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c إذا كانت الدالة $f(x)$ تقترب إلى قيمة مختلفة من يسار c عن يمين c، أو كانت تتزايد أو تتناقص دون حد من يسار و/أو يمين c، أو تتذبذب للخلف والأمام بين قيمتين.

تقدير النهايات جبريًا (الدرس 11-2)

- يمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية وكثيرات الحدود غالبًا باستخدام التعويض المباشر.
- إذا وجدت قيمة نهاية وتوصلت إلى النموذج المبهم $\frac{0}{0}$، فبسّط التعبير جبريًا بتحليل عوامله وقسمة العامل المشترك أو إنطاق البسط أو المقام ثم قسمة أي عوامل مشتركة.

المماسات والسرعة المتجهة (الدرس 11-3)

- معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل m المماس الذي يمثله التعبير $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.



المشتقات (الدرس 11-4)

- مشتقة الدالة $f(x) = x^n$ هي $f'(x)$ ويمثلها التعبير $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 11-5)

- مساحة منطقة واقعة تحت المنحنى لدالة ما هي $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$، حيث a و b هما الحدان الأدنى والأعلى، على التوالي، و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، و $x_i = a + i\Delta x$.

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الدرس 11-6)

- يتحدد المشتق العكسي للدالة $f(x) = x^n$ هو $F(x)$ بالتعبير $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$، حيث C حد ثابت.
- إذا كانت $F(x)$ هي المشتق العكسي للدالة المتصلة $f(x)$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

المفردات الأساسية

- عكس المشتقة (المشتقة العكسية) antiderivative
- تكامل محدود definite integral
- مشتق derivative
- difference quotient
- معادلة تفاضلية differential equation
- مشغل الفرق differential operator
- اشتقاق differentiation
- تعويض مباشر direct substitution
- تكامل غير محدود indefinite integral
- صيغة غير مُعينة indeterminate form
- معدل التغير اللحظي instantaneous rate of change
- سرعة لحظية instantaneous velocity
- تكامل integration
- حد سفلي lower limit
- نهاية أحادية الطرف one-sided limit
- تجزئة منتظمة regular partition
- مجموع ريمان يميني right Riemann sum
- المماس tangent line
- نهاية ثنائية الطرف two-sided limit
- حد علوي upper limit

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة محددة هو ________ ويمكن تمثيله بميل المماس على المنحنى عند هذه النقطة.
معدل التغير اللحظي
2. يُطلق على عملية إيجاد قيمة التكامل اسم ________. **تكامل**
3. يمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية والدوال كثيرة الحدود باستخدام ________، طالما كان مقام الدالة النسبية الذي وُجدت قيمته عند نقطة c ليس 0. **التعويض المباشر**
4. الدالة $F(x)$ هي ________ للدالة $f(x)$. **المشتق العكسي**
5. بما أنه من غير الممكن تحديد نهاية الدالة مع وجود 0 في المقام، فمن المعتاد وصف الكسر $\frac{0}{0}$ الناتج بأن له ________. **نموذج مُبهم**
6. لإيجاد نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية، اقسم البسط والمقام على ________ قوة أُسية لـ x توجد في الدالة. **أعلى**
7. يُطلق على عملية إيجاد المشتقة اسم ________. **اشتقاق**
8. إذا سبق الدالة ________ $\frac{d}{dx}$، فعليك إذًا إيجاد مشتقة الدالة.
مشغل الفرق
9. تسمى السرعة أو السرعة المتجهة التي يتم الوصول إليها عند نقطة محددة من الزمن باسم ________. **السرعة اللحظية**
10. يتم تحديد التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)\,dx =$ ________. **$F(x) + C$**

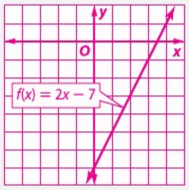
722 | الوحدة 11 | دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

التدخل التقييمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

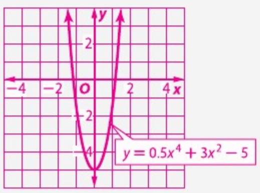
إجابات إضافية

11. -1



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	−1.02	−1.002		−0.998	−0.98

12. -1.5



x	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
$f(x)$	−1.58	−1.51		−1.499	−1.49

مراجعة درس بدرس

11-1 تقدير النهايات بيانيًا

قدّر كل نهاية باستخدام تمثيل بياني. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

11. $\lim_{x \to 3} (2x - 7)$ **11–12. انظر الهامش.**

12. $\lim_{x \to 1} (0.5x^4 + 3x^2 - 5)$

قدّر كل نهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

13. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ **5**

14. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x + 20}{x - 4}$ **لا يوجد**

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

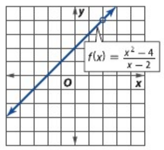
15. $\lim_{x \to 4} \frac{9}{x^2 - 8x + 16}$ **∞**

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x - 10}{x - 2}$ **لا يوجد**

مثال 1

قدّر $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ باستخدام تمثيل بياني. وادعم تخمينك باستخدام جدول قيم.

التحليل بيانيًا يشير التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ إلى أنه مع اقتراب x من العدد 2، تقترب قيمة الدالة المتوافقة من العدد 4. ولذلك، يمكننا تقدير أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.



الدعم عدديًا اصنع جدولاً بالقيم واختر قيم x التي تقترب من العدد 2 من أي جانب. ✔

x تقترب من 2 → ← x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

17. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x + 10}{x}$ **9**

18. $\lim_{x \to -1} (5x^2 - 2x + 12)$ **19**

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

19. $\lim_{x \to 25} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 5}$ **غير ممكن؛ عندما يكون $x = 25$، فإن المقام يساوي 0.**

20. $\lim_{x \to 2} (-3x^3 - 2x^2 + 15)$ **-17**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

21. $\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$ **$-\frac{1}{6}$**

22. $\lim_{x \to \infty} (2 - 4x^3 + x^2)$ **$-\infty$**

مثال 2

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

a. $\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1)$

هذه نهاية دالة كثيرة الحدود. ولذلك، يمكن استخدام التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1) = 2(2)^3 - 2^2 + 4(2) + 1$$
$$= 16 - 4 + 8 + 1 \text{ أو } 21$$

b. $\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2}$

هذه نهاية دالة نسبية. مقامها غير صفري عندما يكون $x = -4$ ولذلك، يمكن استخدام التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2} = \frac{2(-4) - 7}{2 - (-4)^2} = \frac{-8 - 7}{2 - 16} \text{ أو } \frac{15}{14}$$

11 دليل الدراسة والمراجعة تابع

11-3 المماسات والسرعة المتجهة

أوجد ميل المماس لمنحنى كل دالة عند النقاط المبينة.

23. $y = 6 - x$. $(3, 3)$ و $(-1, 7)$ و **−1; −1**

24. $y = x^2 + 2$; $(0, 2)$ و $(-1, 3)$ **0; −2**

تتحدد المسافة d التي يرتفع بها جسم ما عن سطح الأرض بعد t ثانية من إسقاطه من خلال $d(t)$. أوجد السرعة اللحظية للجسم عند القيمة المذكورة لـ t.

25. $y = -x^2 + 3x$ **$m = -2x + 3$**

26. $y = x^3 + 4x$ **$m = 3x^2 + 4$**

أوجد السرعة اللحظية إذا كان موقع جسم ما بالأمتار يحدده $h(t)$ لقيم محددة من الزمن t معطاة بالثواني.

27. $h(t) = 5t + 6t^2$; $t = 0.5$ **11 m/s**

28. $h(t) = -5t^2 - 12t + 130$; $t = 3.5$ **−47 m/s**

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم يحدده $h(t)$ في أي نقطة زمنية t.

29. $h(t) = 12t^2 - 5$ **$v(t) = 24t$**

30. $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ **$v(t) = -4t + 3$**

مثال 3

أوجِد ميل المماس للتمثيل البياني $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ قانون معدل التغير اللحظي

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $x = 2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ $f(2+h) = (2+h)^2$ و $f(2) = 2^2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$ بالضرب.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$ بسّـط وحلّل إلى العوامل.

$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$ بالقسمة على h.

$= 4 + 0$ أو 4 خاصية الجمع للنهايات ونهاية الدوال الثابتة والمحايدة

لذا، ميل المماس للتمثيل البياني لـ $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4.

11-4 المشتقات

أوجد قيمة النهايات لإيجاد مشتقة كل دالة. ثم أوجد قيمة مشتقة كل دالة مع القيم المعطاة لكل متغير.

31. $g(t) = -t^2 + 5t + 11$; $t = -4$ و 1 **$g'(t) = -2t + 5$ ؛ و $g'(-4) = 13$ و $g'(1) = 3$**

32. $m(j) = 10j - 3$; $j = 5$ و -3 **$m'(j) = 10$ ؛ و $m'(5) = 10$ و $m'(-3) = 10$**

أوجد مشتق كل دالة مما يلي.

33. $p(v) = -9v + 14$

34. $z(n) = 4n^2 + 9n$

35. $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6} + 5$

36. $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}}$

33–36. انظر الهامش.

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي.

37. $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$ **$f'(m) = \frac{-25}{(5 + 2m)^2}$**

38. $m(q) = \frac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ **$m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$**

مثال 4

أوجد مشتقة الدالة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5$، و $g(x) = x^3 + 2$. إذًا، $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ والدالة $g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 2x$ قواعد القوة والثابت

$g(x) = x^3 + 2$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 3x^2$ قواعد االقوة والثابت

استخدم $f(x)$، و $f'(x)$، و $g(x)$، و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة ناتج القسمة

$= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)\,3x^2}{(x^3 + 2)^2}$ عوّض

$= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$ بسّط.

إجابات إضافية

33. $p'(v) = -9$

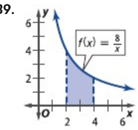
34. $z'(n) = 8n + 9$

35. $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

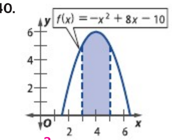
36. $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة باستخدام النقاط الطرفية الصحيحة و 5 مستطيلات.

39. 

5.16 وحدات ^{2}

40. 

11.28 وحدة ^{2}

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بالتكامل المحدود.

41. $\int_1^2 2x^2\, dx$ $\quad 4\frac{2}{3}$

42. $\int_0^3 (2x^3 - 1)\, dx$ $\quad 37\frac{1}{2}$

43. $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx$ $\quad 4\frac{2}{3}$

44. $\int_1^4 (3x^2 - x)\, dx$ $\quad 55\frac{1}{2}$

مثال 5

استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 2x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$، أو $\int_0^2 2x^2\, dx$.

أولاً، أوجد Δx و x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ — صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n}$ أو $\frac{2}{n}$ — $a = 0$ و $b = 2$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n}$ أو $\frac{2i}{n}$ — $\Delta x = \frac{2}{n}$ و $a = 0$

$\int_0^2 2x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$ — $\Delta x = \frac{2}{n}$ و $x_i = \frac{2i}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right)$ — بسّــط.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ — $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ — بالضرب والقسمة على n.

$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ — التحليل إلى العوامل وقسمة كل حد على n^2.

$= \frac{16}{3}$ أو $5\frac{1}{3}$ — نظرية النهايات والتبسيط.

11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

45. $g(n) = 5n - 2$ $\quad G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

46. $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$ $\quad R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

47. $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$ $\quad M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

48. $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$ $\quad P(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

49. $\int 8x^2\, dx$ $\quad \frac{8}{3}x^3 + C$

50. $\int (2x^2 - 4)\, dx$ $\quad \frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

51. $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\, dx$ $\quad$ 2466.53 وحدة مربعة

52. $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\, dx$ $\quad$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ — إعادة كتابة التعبير بأس سلبي.

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ — المضاعف الثابت للقوة

$= -1x^{-4} + C$ أو $-\frac{1}{x^4} + C$ — بسّــط.

b. $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ — المعادلة الأصلية

$= x^2 - 7x^0$ — إعادة كتابة الدالة بحيث يحمل كل حد قوة لـ x.

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ — قاعدة المشتقة العكسية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ — بسّــط.

725

الوحدة 11 دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

.53 **طوابع** افترض أن قيمة v لأحد الطوابع بالدرهم بعد t أعوام يمكن تمثيلها بالتعبير $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$. (الدرس 11-1)

.a أكمل الجدول التالي. **a–b. انظر الهامش.**

الأعوام	0	1	2	3
القيمة				

.b مثّل الدالة بيانيًا عندما تكون $0 \le t \le 10$.

.c استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$، إن وجدت. **90**

.d اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الطابع.
الإجابة النموذجية: ستصل قيمة الطابع إلى ذروتها لتسجل المبلغ AED 90.

.54 **حيوانات** يمكن تقدير تعداد الحيوانات P بالمئات في منطقة لحفظ الحياة بعد t عام بالتعبير $P(t) = \frac{120}{1 + 24e^{-0.25t}}$ (الدرس 11-1)

.a استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \le t \le 50$. **انظر الهامش.**

.b قدّر $\lim_{t\to\infty} \frac{120}{1 + 24e^{-0.25t}}$، إن وجدت. **120**

.c فسر نتائجك بالجزء **b**.
بمرور الوقت، سيقترب تعداد الحيوانات من الحد الأقصى، وهو 120,000 حيوان.

.55 **هواة الجمع** تزداد قيمة مجموعة العملات المعدنية الخاصة بفارس كل عام على مدار خمسة أعوام ماضية. وبمتابعة هذا النهج، يمكن تمثيل قيمة v العملات المعدنية بعد t أعوام بالتعبير $v(t) = \frac{800t - 21}{4t + 19}$ (الدرس 12-2)

.a أوجد $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **200**

.b ما الذي تشير إليه ضمنيًا نهاية الدالة عن قيمة مجموعة العملات المعدنية الخاصة بفارس؟ هل تتفق؟ **انظر الهامش.**

.c بعد 10 أعوام، عرض تاجر عملة على فارس مبلغ AED 300 مقابل مجموعته. فهل ينبغي على فارس بيعها؟ اشرح إجابتك.
نعم؛ فالعرض يزيد عن ضعف القيمة المتوقعة.

.56 **الصواريخ** تم إطلاق صاروخ بسرعة متجهة لأعلى معدلها 50 m في الثانية. افترض أن ارتفاع الصاروخ d بالأمتار بعد t ثواني من إطلاقه يمثله التعبير $d(t) = -5t^2 + 50t + 2.7$ (الدرس 11-3)

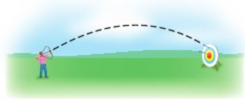
.a أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. $\boldsymbol{v(t) = -10t + 50}$

.b ما سرعة تحرك الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟ **34 m/s**

.c ما قيمة t التي يصل عندها الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له؟ **≈4.69 s**

.d ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟ **≈108 m**

.57 **رمي السهام** يطلق أحد رماة السهام سهمًا بسرعة متجهة معدلها 11 m في الثانية نحو الهدف. افترض أن ارتفاع s السهم بالأمتار بعد t ثانية من إطلاقه يتحدد عن طريق $s(t) = -5t^2 + 11t + 0.5$ (الدرس 11-3)



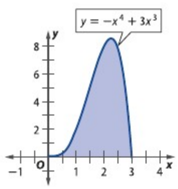
.a أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للسهم. $\boldsymbol{v(t) = -10t + 11}$

.b ما سرعة انطلاق السهم بعد 0.5 s من رميه؟ **6 m/s**

.c ما قيمة t التي يصل عندها السهم إلى أقصى ارتفاع له؟ **≈1.09 s**

.d ما أقصى ارتفاع للسهم؟ **≈6.5 m**

.58 **التصميم** يصمم مالك منتجع تزلج شعارًا جديدًا لوضعه على الزي الرسمي لموظفيه. اتخذ التصميم شكل المنطقة الموضحة في الشكل. إذا كان ستتم خياطة هذا الجزء من التصميم على الزي الرسمي، فما مقدار المواد اللازمة إذا كان x بالسنتيمترات؟ (الدرس 11-6) **12.15 cm²**



.59 **الضفادع** يستطيع الضفدع القفز بسرعة متجهة ممثلة بالتعبير $v(t) = -10t + 8$، حيث t مقدمة بالثواني والسرعة المتجهة مقدمة بالأمتار لكل ثانية. (الدرس 11-6)

.a أوجد دالة الموقع $s(t)$ لقفز الضفدع. وافترض أنه بالنسبة إلى $t = 0$، يكون $s(t) = 0$. $\boldsymbol{s(t) = -5t^2 + 8}$

.b ما المدة التي سيبقاها الضفدع في الهواء عندما يقفز؟ **1.63 s**

.60 **الطيور** يقف طائر كاردينال على شجرة ترتفع عن الأرض 6 m ويسقط بعض الطعام. يمكن تحديد السرعة اللحظية لطعامه بالتعبير $v(t) = -10t$، حيث t الزمن بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية. (الدرس 11-6) **a.** $\boldsymbol{s(t) = -5t^2 + 6}$

.a أوجد دالة الموقع $s(t)$ للطعام الذي سقط.

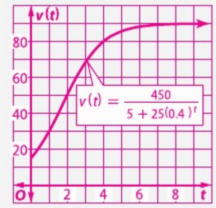
.b أوجد المدة التي يستغرقها الطعام للاصطدام بالأرض. **1.12 s**

إجابات إضافية

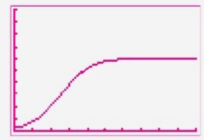
53a.

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

53b.



54a.



[0, 50] scl: 5 by [0, 200] scl: 20

55b. الإجابة النموذجية: تنطوي النهاية على أن أقصى قيمة للعملات التي يجمعها فارس هي AED 200. ولكن هذا مستبعد، فبالنسبة للزمن والتضخم، سيستمر ارتفاع قيمة العملات بدون حدود.

إجابات إضافية

5b. الإجابة النموذجية: بينما يزيد عدد أجهزة المساعد الرقمي الشخصي، سينخفض متوسط التكلفة ويقترب من AED 100 للجهاز.

21. $b'(c) = 2c^{-\frac{1}{2}} - \frac{16}{3}c^{-\frac{1}{3}} + 4c^{-\frac{1}{5}}$

الوحدة 11 تدريب على الاختبار

قدّر كل نهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

1. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$ **-6**
2. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ **8**

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

3. $\lim_{x \to 7} \frac{6}{x - 7}$ **لا يوجد**
4. $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$ **∞**

5. **أجهزة إلكترونية** يمكن تمثيل متوسط التكلفة C بالدراهم لعدد x من المساعدات الرقمية الشخصية بالتعبير $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.
   - **a.** حدد نهاية الدالة بينما تقترب x من اللانهاية. **100**
   - **b.** فسّر نتائج الجزء **a**. **انظر الهامش.**

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

6. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4} - 2}$ **-25**
7. $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$ **1353**

8. **المدرسة** يمكن تمثيل عدد الطلاب S المتغيبين بسبب الإنفلونزا بعد t أيام في إحدى المدارس بالتعبير $(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 50t^2}$.
   - **a.** كم عدد الطلاب الذين أصيبوا بالمرض في البداية؟ **4**
   - **b.** كم عدد الطلاب الذين سيصابون بالبرد في النهاية؟ **40**

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

9. $\lim_{x \to \infty} (x^2 - 7x + 2)$ **∞**
10. $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$ **∞**
11. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$ **0**
12. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{25 + x} - 4}{x}$ **0**

13. **اختيار من متعدد** أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$. **A**

   A $-\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{9}$
   B 0 D لا يوجد نهاية

أوجد ميل المماس منحنى كل دالة عند النقاط المبينة.

14. $y = x^2 + 2x - 8$; $(-5, 7)$ و $(-2, -8)$ **$-8; -2$**
15. $y = \frac{4}{x^3} + 2$; $(-1, -2)$ و $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ **$-12; -\frac{3}{4}$**
16. $y = (2x + 1)^2$; $(-3, 25)$ و $(0, 1)$ **$-20; 4$**

أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم ما محددًا بالتعبير $h(t)$ عند أي لحظة زمنية t.

17. $h(t) = 9t + 3t^2$ **$v(t) = 9 + 6t$**
18. $h(t) = 10t^2 - 7t^3$ **$v(t) = 20t - 21t^2$**
19. $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$ **$v(t) = 9t^2 + 4$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

20. $f(x) = -3x - 7$ **$f'(x) = -3$**
21. $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$ **انظر الهامش.**
22. $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$ **$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}}$**
23. $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ **$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8$**
24. $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$ **$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$**

25. **كرة القدم** يتم تمثيل التكلفة الحدّيّة c لإنتاج عدد x كرات قدم بالتعبير $c(x) = 15 - 0.005x$.
   - **a.** حدد الدالة التي تمثل دالة التكلفة الفعلية. **$C(x) = 15x - 0.0025x^2$**
   - **b.** حدد تكلفة الإنتاج اليومي المتزايد من 1500 كرة قدم إلى 2000 كرة. **AED 3125**

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بالتكامل المحدود.

26. $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\,dx$ **$10\frac{1}{2}$ وحدات ^{2}**
27. $\int_3^8 10x^4\,dx$ **65,050 وحدة ^{2}**
28. $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\,dx$ **156 وحدة ^{2}**

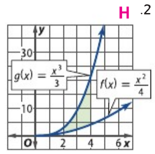
أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

29. $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$ **$D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C$**
30. $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$ **$W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C$**

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

31. $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\,dx$ **$\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C$**
32. $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\,dx$ **45**

33. **المساحة** احسب المساحة المحصورة بالدالة $f(x)$ و $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$. **H**



   F $17\frac{5}{12}$ H $15\frac{1}{3}$
   G $17\frac{1}{3}$ J 16

1 التركيز

الهدف اشتقاق الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.

نصيحة للتدريس

ذكّر الطلاب بأنه عندما تعلم ناتج ضرب الدوال، يجب أن تستخدم قاعدة حاصل الضرب للمشتقات في إيجاد مشتقة ناتج الضرب. ثم اطلب منهم استخدام قاعدة ناتج الضرب في إيجاد مشتقة $(2x + 3)(x - 6)$. $4x - 9$

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

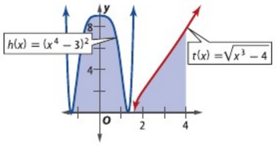
اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات، واطلب من كل مجموعة إكمال الأنشطة 2-1 وتحليل نتائج التمارين 4-1.

- ركّز على أنه عند وجود حدود ذات عوامل متشابهة، مثل $1[4x^3(x^4 - 3)] + 1[4x^3(x^4 - 3)]$، يتم جمع الحدود بإضافة المعامل. النتيجة هي $2[4x^3(x^4 - 3)]$.
- في النشاط 2، ذكّر الطلاب أنه ليتم تفكيك دالة، مثل $f'(g(x))$، يتم تعويض الدالة $g(x)$ بالكامل عن قيمة x في الدالة $f'(x)$.
- ذكّر الطلاب أنه لا ينبغي أن يوجد جذر في المقام في الإجابة. وللتخلص من الجذر في المقام، اضرب كلاً من البسط والمقام في الجذر.

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
قاعدة السلسلة

الهدف

- اشتقاق الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.



أدى تعلم اشتقاق التعابير كثيرة الحدود باستخدام قاعدة القوة إلى إيجاد قيم التكاملات المحددة. وقد سمح هذا بحساب المساحة الموجودة بين منحنى ما والمحور x. على الرغم من ذلك، كان عملنا المتعلق بالتكامل محدودًا على الدوال الأساسية كثيرة الحدود. ولذا، كيف يمكننا حساب المساحة الموجودة بين المحور x والمنحنيات المحددة بالدوال المركبة مثل $h(x) = (x^4 - 3)^2$ أو $t(x) = \sqrt{x^3 - 4}$ ؟

مثلما هو في الدرس 4-11، يجب عليك تعلم اشتقاق هذه الدوال قبل أن تتمكن من دمجها. ابدأ بـ $h(x)$. يمكنك استخدام قاعدة حاصل الضرب للتوصل إلى المشتق.

$h(x) = (x^4 - 3)^2$	المعادلة الأصلية
$= (x^4 - 3)(x^4 - 3)$	إعادة كتابة القوة.
$h'(x) = 4x^3(x^4 - 3) + (x^4 - 3)4x^3$	قاعدة حاصل الضرب
$= 2(x^4 - 3)4x^3$	بسّــط.

على الرغم من إمكانية تبسيط اشتقاق $h(x)$ بدرجة أكبر، اتركه كما هو موضح لاشتقاق قاعدة للدوال المركبة.

النشاط 1 مشتقة الدالة المركبة

أوجد مشتقة الدالة $k(x) = (x^4 - 3)^3$.

الخطوة 1 أعد كتابة $k(x)$ لتضمين العامل $(x^4 - 3)^2$.

$$k(x) = (x^4 - 3)(x^4 - 3)^2$$

الخطوة 2 افترض أن $m(x) = (x^4 - 3)$ و $n(x) = (x^4 - 3)^2$. واحسب مشتق كل دالة.

$m'(x) = 4x^3$ قاعدة القوة　　$n'(x) = 2(x^4 - 3)4x^3$ المشتقة أعلاه

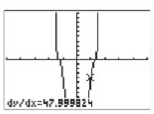
الخطوة 3 استخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد قيمة $k'(x)$.

$k'(x) = m'(x)n(x) + m(x)n'(x)$	
$= 4x^3(x^4 - 3)^2 + (x^4 - 3)2(x^4 - 3)4x^3$	عوّض
$= (x^4 - 3)^2 4x^3 + 2(x^4 - 3)^2 4x^3$	بسّــط.
$= 3(x^4 - 3)^2 4x^3$	بالجمع.

إذًا، $k'(x) = 3(x^4 - 3)^2 4x^3$.

التحقق يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة مشتقة الدالة عند نقطة ما. مثّل بيانيًا $k(x)$، ومن قائمة CALC حدد 6:dy/dx. بعد أن تعود الشاشة إلى نافذة التمثيل البياني، اضغط 1 ثم ENTER. قيمة $k'(1) = 48$. الآن تحقق من صحة الإجابة الموجودة في الخطوة 3 بالتعويض عن $x = 1$ في الدالة $k'(x)$.

$k'(1) = 3(1^4 - 3)^2 4(1)^3$ أو 48 ✓



[−5, 5] scl: 1 by [−20, 20] scl: 2

تحليل النتائج

1. خمّن سبب احتواء الدالتين $h'(x)$ و $k'(x)$ على العامل $4x^3$.
2. خمّن سبب احتواء الدالة $h'(x)$ على العدد 2 كعامل، واحتواء الدالة $k'(x)$ على العدد 3 كعامل.
3. من دون إعادة كتابة الدالة $p(x)$ على هيئة حاصل ضرب، أوجد مشتقة الدالة $p(x) = (x^4 - 3)^4$.

1. الإجابة النموذجية: $4x^3$ هي مشتقة التعبير الموجود بين القوسين.
2. الإجابة النموذجية: القوة للدالة $h(x)$ هي 2، والقوة للدالة $k(x)$ هي 3. ومثلما هو مع قاعدة القوة، يتم إنزال الأس ليصبح عاملاً في المشتقة.
3. الإجابات النموذجية: $4(x^4 - 3)^3 4x^3$ أو $16x^3(x^4 - 3)^3$

تدريب اطلب من الطلاب إكمال تمريني التمثيل والتطبيق في التمارين 10-5.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم تمارين التمثيل والتطبيق 7 و 10 في التقييم قدرة الطلاب على إيجاد مشتقة نوعين مختلفين من الدوال المُقدمة.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب استخدام قاعدة السلسلة لتمييز $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{10}$.

$f'(x) = \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^9}{x}$

توسيع المفهوم

استخدم قاعدة ناتج الضرب في إيجاد مشتقة $f(x) = (x^2 + 1)^5(x^4 + 2)^3$.

$f'(x) = 10x(x^2 + 1)^4(x^4 + 2)^3 + 12x^3(x^2 + 1)^5(x^4 + 2)^2$

لاحظ أنه بالنسبة لمشتقات $h(x)$ و $k(x)$، تم ضرب كل تعبير في أسّه، وطُرح 1 من الأس، وبعد ذلك ضُرِب كل تعبير في مشتق التعبير الموجود داخل القوسين.

الضرب في الأُس.

طرح 1 من الأُس.

$h(x) = (x^4 - 3)^2$

الضرب في المشتق.

$h'(x) = 2(x^4 - 3)^{2-1}4x^3$

$= 2(x^4 - 3)4x^3$

الضرب في الأُس.

طرح 1 من الأُس.

$k(x) = (x^4 - 3)^3$

الضرب في المشتق.

$k'(x) = 3(x^4 - 3)^{3-1}4x^3$

$= 3(x^4 - 3)^2 4x^3$

تذكر أنه بإمكاننا تحليل دالة. على سبيل المثال، الدالة $h(x) = (x^4 - 3)^2$ يمكن كتابتها على هيئة $h(x) = f[g(x)]$. حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x^4 - 3)$ ويمكن استخدام ذلك لإنشاء قاعدة السلسلة.

المفهوم الأساسي الدالة

الشرح مشتقة الدالة المركّبة $f[g(x)]$ هي مشتقة الدالة الخارجية f المُقيَّمة في الدالة الداخلية g مضروبة في مشتقة الدالة الداخلية g.

الرموز إذا كانت دالة g قابلة للاشتقاق عند x ودالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، فإن

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x).$$

النشاط 2 مشتقة الدالة المركبة

أوجد مشتقة الدالة $t(x) = \sqrt{x^3 - 4}$.

الخطوة 1 حلل $t(x)$ إلى الدالتين f و g.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = x^3 - 4$

الخطوة 2 أوجد قيمة $f'(x)$ و $g'(x)$.

$f(x) = \sqrt{x}$ أو $x^{\frac{1}{2}}$ المعادلة الأصلية $\qquad g(x) = x^3 - 4$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ قاعدة القوة $\qquad g'(x) = 3x^2$

الخطوة 3 عوّض في قاعدة السلسلة.

$t'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$ قاعدة السلسلة

$= \frac{1}{2}(x^3 - 4)^{-\frac{1}{2}} 3x^2$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ و $g(x) = x^3 - 4$ و $g'(x) = 3x^2$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 4}}$ بسّط.

$= \frac{3x^2\sqrt{x^3 - 4}}{2(x^3 - 4)}$ بسّط

انتبه!

التعويض لتسهيل قاعدة السلسلة، يمكن تمثيل الدالة $g(x)$ بالرمز u. على سبيل المثال، إذا كانت $y = f[g(x)]$، فإن $y = f(u)$. فتصبح مشتقة y $y' = f'(u) \cdot u'$.

تحليل النتائج

4. هل يمكن إيجاد قيمة $t'(x)$ باستخدام الطريقة نفسها التي استخدمت من قبل لإيجاد قيمة $h'(x)$؟ اشرح.

4. لا؛ الإجابة النموذجية: لا يمكن إعادة كتابة الدالة $t(x)$ على هيئة حاصل ضرب تعبيرين مرفوعين للقوة الأولى.

التمثيل بالنماذج والتطبيق

أوجد مشتق كل دالة.

5. $s(t) = (t^2 - 1)^4$
6. $b(x) = (1 - 5x)^6$
7. $c(r) = (3r - 2r^2)^3$
8. $h(x) = (x^3 + x - 1)^3$
9. $f(x) = \sqrt{100 + 8x}$
10. $g(m) = \sqrt{m^2 + 4}$

5. $s'(t) = 8t(t^2 - 1)^3$
6. $b'(x) = -30(1 - 5x)^5$
7. $c'(r) = 3(3r - 2r^2)^2 \cdot (3 - 4r)$
8. $h'(x) = 3(x^3 + x - 1)^2 \cdot (3x^2 + 1)$
9. $f'(x) = \frac{\sqrt{100 + 8x}}{25 + 2x}$ أو $\frac{2\sqrt{25 + 2x}}{25 + 2x}$
10. $g'(m) = \frac{m\sqrt{m^2 + 4}}{m^2 + 4}$

الاستعداد للوحدة 11

1. يبدو من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ حيث $x \to -\infty$ و $f(x) \to 0$ حيث $x \to \infty$.

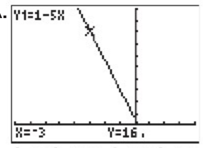
2. يبدو من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ حيث $x \to -\infty$ و $f(x) \to 0$ حيث $x \to \infty$.

3. يبدو من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ حيث $x \to -\infty$ و $f(x) \to 1$ حيث $x \to \infty$.

4. يبدو من التمثيل البياني أن $f(x) \to -5$ حيث $x \to -\infty$ و $f(x) \to -5$ حيث $x \to \infty$.

الدرس 11-1، (تمرين موجّه)

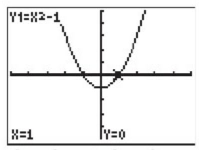
1A.



[−8, 4] scl: 1 by [−2, 20] scl: 2

x	−3.01	−3.001	−3	−2.999	−2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

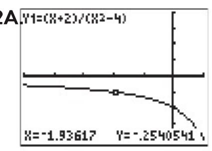
1B.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	−0.0199	−0.001999		0.002001	0.0201

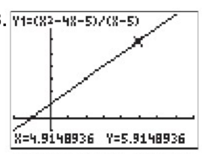
2A.



[−5, 1] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.25

x	−1.99	−1.999	−2	−2.001	−2.01
$f(x)$	−0.2506	−0.2501		−0.2499	−0.2494

2B.

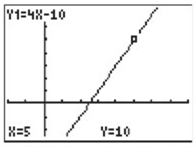


[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

الدرس 11-1

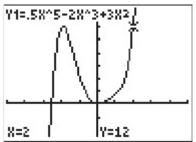
1.



[−2, 8] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

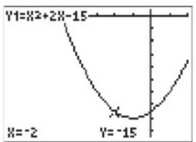
2.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

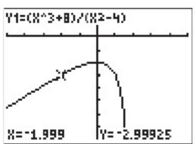
3.



[−8, 2] scl: 1 by [−19, 1] scl: 2

x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−14.98	−14.998		−15.002	−15.02

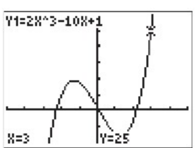
4.



[−5, 5] scl: 1 by [−8, 2] scl: 1

x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−3.008	−3.0008		−2.9992	−2.993

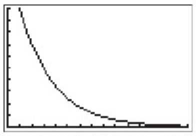
5.



[−5, 5] scl: 1 by [−10, 30] scl: 5

x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	24.56	24.956		25.044	25.44

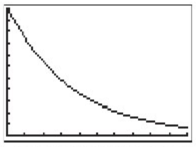
51a.



[1, 15] scl: 1 by [0, 2000] scl: 200

51d. لا؛ مجموع المتسلسلة اللا نهائية يساوي 6666.67 m تقريبًا، وهذا أقل من المسافة المطلوبة للوصول إلى المستشفى وهي 7000 m.

52a.



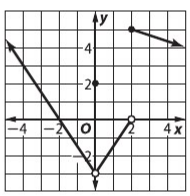
[0, 10] scl: 1 by [0, 11000] scl: 1000

66. الإجابة النموذجية: $f(x) = \frac{\sin x}{x}, g(x) = \begin{cases} 2x & \text{إذا كان } x \leq 0 \\ x+1 & \text{إذا كان } x > 0 \end{cases}$

67. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ غير موجودة؛ $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ غير موجودة؛ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة؛ الإجابة النموذجية: إذا كان مقام الدالة النسبية يساوي صفرًا عند نقطة معينة، فستكون النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

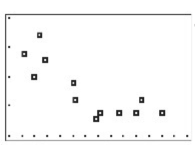
68. أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: النهاية $f(x)$ حيث اقتراب x من c لا يعتمد على قيمة الدالة عند النقطة c. إذا كان للدالة نقطة انقطاع عند $f(c) = L$، فإن نهاية الدالة قد تكون أي قيمة لا تساوي L.

69. الإجابة النموذجية:



71. الإجابة النموذجية: إذا كان $f(x)$ متصلة عند $x = a$، فيمكنك التعويض a في الدالة. وإذا لم تكن الدالة متصلة، يمكنك تبسيطها، ثم التعويض عن a. وإذا لم تفلح أيٌّ من هاتان الطريقتان، فيجب إيجاد قيمة النهاية بيانيًا.

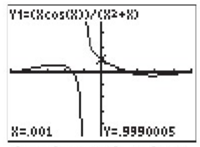
72a. يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا.



[1, 8] scl: 0.5 by [20, 40] scl: 5

72b. $r \approx -0.814$؛ يبين معامل الارتباط أن للبيانات معاملًا خطيًا سالبًا قويًا نسبيًا. وبما أن $t \approx -4.43$ و $-4.43 < -1.812$، فسيقع الإحصاء داخل المنطقة الحرجة وتُرفض فرضية العدم. ولهذا يكون الارتباط مهمًا عند المستوى 10%.

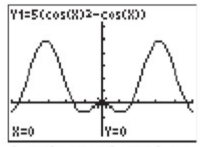
6.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

x	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	1.01	1.001		0.999	0.990

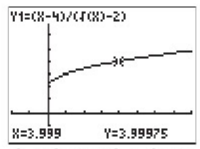
7.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	−0.0002	−0.000002		−0.000002	−0.0002

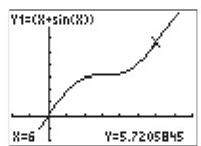
8.



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.998	3.9997		4.0002	4.003

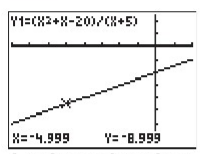
9.



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

10.



[−8, 2] scl: 1 by [−15, 5] scl: 2

x	−5.01	−5.001	−5	−4.999	−4.99
$f(x)$	−9.01	−9.001		−8.999	−8.99

72c. $\hat{y} = -2.118x + 36.445$؛ يبين الميل $a = -2.118$ أنه لكل لتر إضافي في المحرك، تتناقص المسافة بالكيلو متر على الطريق السريع بمقدار Km/L. ويبين التقاطع b مع المحور y $36.445 =$ أنه عندما يكون حجم المحرك يساوي 0 لتر، تصبح المسافة على الطريق السريع Km/L. وهذا ليس ممكنًا.

72d. بالاستعانة بهذا النموذج، يقطع المحرك بسعة 8 L مسافة 19.5 km/L. وهذه قيمة أقل من قيم البيانات الأخرى، ولكنها لا تزال في إطار المدى المعقول.

الدرس 11-2

59a.

عدد الأعوام منذ عام 2006	الزيادة في تعداد السكان
1	398
2	2430
3	5550

70a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10} = 38$؛ عندما تكون شدة الضوء عند أدنى قيمة، فلن يكون هناك ضوء. عندما يكون الظلام دامسًا، يكون بؤبؤ عين الحيوان 38 mm تقريبًا.

70b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10} = 8.5$؛ عندما يكون الضوء عند أقصى إضاءة، سيكون الضوء ساطعًا. وعندما يكون ساطعًا، سيكون بؤبؤ عين الحيوان 8.5 mm تقريبًا.

78.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c} (a_nx^n + a_{n-1}x^{n}-1 + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)\\ &= \lim_{x\to c} a_nx^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to c} a_2x^2 + \lim_{x\to c} a_1x + \lim_{x\to c} a_0\\ &= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to c} x^n - 1 + \cdots + a_2 \lim_{x\to c} x^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0\\ &= a_n\left(\lim_{x\to c} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0\\ &= a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_2c^2 + a_1c + a_0\\ &= p(c)\end{aligned}$$

79. على فرض أن P_n هي العبارة إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فإن $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$ أو L^n لأي عدد صحيح n. ولأن $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^1 = L^1$ عبارة صحيحة، فإن P_1 صحيحة. وعلى فرض أن $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^k = L^k$ صحيحة لكل عدد صحيح k. وبهذا يتضح أن P_{k+1} يجب أن يكون صحيحاً.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x)]^k &= L^k\\ \lim_{x\to c}[f(x)]^k \cdot \lim_{x\to c}[f(x)]^1 &= L^k \cdot \lim_{x\to c}[f(x)]^1\\ \lim_{x\to c}[f(x)]^{k+1} &= L^k \cdot L\\ \lim_{x\to c}[f(x)]^{k+1} &= L^{k+1}\end{aligned}$$

العبارة الأخيرة تنص تحديدًا على أن P_{k+1}. لذا P_{k+1} صحيح. لأن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$ و P_k ينطوي على أن P_{k+1}، P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 2$، $n = 3$، وهكذا. وبحسب مبدأ الاستدلال الرياضي، إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فإن $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$ أو L^n بالنسبة لأي عدد صحيح n.

80. الإجابة النموذجية: عندما تكون $n = m$ $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{a_n}{b_n}$ عندما تكون $n > m$، $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} = -\infty$؛ عندما تكون $m > n$, $\lim\limits_{x\to\infty} = 0$.

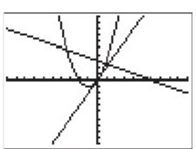
82. الإجابة النموذجية:

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}(x+5) = \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 5$
خاصية الفرق	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}(x-5) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 5$
خاصية الضرب في كمية عددية	$\lim\limits_{x\to c}[kf(x)] = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} 2x = 2\lim\limits_{x\to 2} x$
خاصية ناتج الضرب	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to c} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}[x^2(x-5)] = \lim\limits_{x\to 2} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 2}(x-5)$
خاصية ناتج القسمة	$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, if $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-5} = \dfrac{\lim_{x\to 2} x^2}{\lim_{x\to 2}(x-5)}$
خاصية الأس الثابت	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$	$\lim\limits_{x\to 2}[(x-5)^2] = \left[\lim\limits_{x\to 2}(x-5)\right]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, if $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ when n is even.	$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{(x+5)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+5)}$

83. الإجابة النموذجية: النهاية $\frac{\infty}{\infty}$ ليست إزاحة لـ 1 لأن اللا نهائية عدد ليس حقيقيًا؛ فهي أكثر من كونها مجرد مفهوم. قم بإجراء المزيد من التحليل لهذه المسألة من خلال التمثيل البياني للدالة النسبية الأصلية وملاحظة سلوك التمثيل البياني حول النهاية.

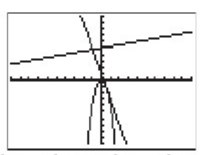
الدرس 11-3

44.



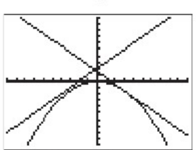
[10, −10] scl: 1 by [10, −10] scl: 1

45.



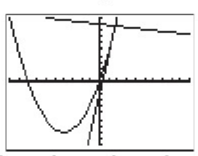
[10, −10] scl: 1 by [10, −10] scl: 1

46.



[10, −10] scl: 1 by [10, −10] scl: 1

47.



[10, −10] scl: 1 by [10, −10] scl: 1

33. $c'(t) = -13t^{12} - 33t^{10} + 9t^8 - 132t^7 + 35t^6 + 30t^4 - 88t$

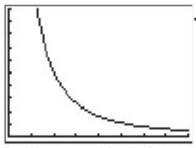
34. $p'(r) = -31.5r^{3.5} + 3.5r^{2.5} - 168r^2 + 270r^{1.5} + 16r + 864$

35. $q'(a) = \frac{19}{8}a^{\frac{11}{8}} - \frac{221}{8}a^{\frac{9}{8}} + a - \frac{39}{4}a^{-\frac{1}{4}}$

36. $f'(x) = 143.08x^{13} + 185.9x^9 - 12.96x^5$

37. $h'(x) = \frac{19}{48}x^{\frac{13}{6}} + \frac{37}{192}x^{\frac{13}{24}} + \frac{14}{15}x^{\frac{4}{3}} + \frac{17}{60}x^{-\frac{7}{24}}$

38a. $s'(m) = \frac{42.75}{(m + 0.15)^2}$

38b. 

[0, 2] scl: 0.25 by [0, 200] scl: 20

يتناقص معدل التغير اللحظي لسرعة الكرة الابتدائية بشكل كبير عندما تزيد كثافة المضرب.

38c. الإجابة النموذجية: $s'(0.80) = 47.37$ و $s'(1.05) = 29.69$. يبين هذا أن معدل التغير اللحظي لسرعة الكرة الابتدائية يكون أكبر عندما يكون المضرب أخف وزناً. وعلى الرغم من أن المضرب الأثقل وزنًا سيجعل سرعة الكرة أكبر، فإن الزيادة الصغيرة نسبيًا في السرعة لا تعوض انخفاض القدرة على التحكم في المضرب.

39. $f'(m) = -\frac{12}{(3 + 2m)^2}$

40. $g'(n) = \frac{5}{(2n + 3)^2}$

41. $r'(t) = \frac{10t}{(3 - t^2)^2}$

42. $m'(q) = \frac{q^6 - 2q^4 - 8q^3 - 9q^2 - 8q}{(q^3 - 2)^2}$

43. $v'(t) = \frac{-t^4 + 10t^3 - 13t^2 + 12}{(t^3 - 4t)^2}$

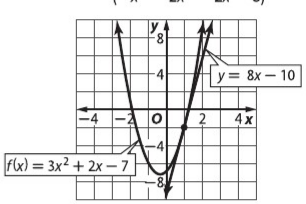
44. $c'(m) = \frac{-m^6 + 6m^4 + 3m^2 - 2}{(-m^3 + 2m)^2}$

45. $f'(x) = \frac{-x^4 + 11x^2 + 6}{(-x^2 + 3)^2}$

46. $q'(r) = \frac{r^2 - 15}{r^4}$

47. $t'(w) = \frac{2w^3 - 1}{w^2}$

48. $m'(x) = \frac{-x^8 - 4x^7 - 8x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 9}{(-x^4 - 2x^3 - 2x - 3)^2}$

50. 

58.
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(a+h)^2+1-(a^2+1)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2a+h)$$
$$= 2a + 0 \text{ أو } 2a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{x^2+1-a^2-1}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}(x+a)$$
$$= a + a \text{ أو } 2a$$

بما أن $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$ و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2a$، $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

59a. متوسط نمو الاستثمار في السنوات الأربع الأولى AED 41.20 تقريبًا سنويًا.

59b. بعد 4 سنوات تحديدًا، ينمو الاستثمار بمعدل يبلغ AED 42.90 سنويًا.

الدرس 11-4

18. نقطة حرجة: $(-2, -8)$؛ أقصى: 10، أدنى: -8

19. النقاط الحرجة: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 6.92\right)$ و $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 13.08\right)$؛ أقصى: 25، أدنى: -5

20. نقطة حرجة: $(0, -2)$؛ أقصى: 350، أدنى: 5

21. نقطة حرجة: $(-5, -10)$؛ أقصى: -2، أدنى: -11

22. نقاط حركة: $(-2, -14)$، و $(0, 2)$، و $(2, -14)$؛ أقصى: 11، أدنى: -14

23. نقطة حرجة: $(-9, 405)$؛ أقصى: 405، أدنى: 385

24. نقطة حرجة: $(1, 1)$؛ أقصى: 9، أدنى: 0

25. نقاط حرجة: $(0, 2)$ و $(2.25, -6.54)$؛ أقصى: 66، أدنى: -6.54

26. نقاط حرجة: $(-3, 21.5)$ و $(2, 0.67)$؛ أقصى: 32.17، أدنى: 0.67

27c. نعم، أقصى ارتفاع يمكن أن يقذف منه منصور الكرة يساوي 22 m تقريبًا. وهذا أكثر من المسافة 21 m اللازمة للوصول إلى نافذة ناصر.

28. $f'(x) = 12x^2 + 6x + 36$

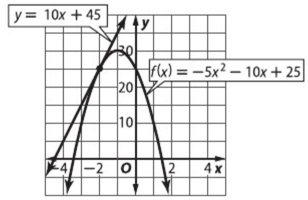
29. $g'(x) = -45x^4 + 60x^3 - 12x + 10$

30. $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

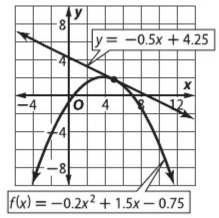
31. $s'(t) = \frac{69}{2}t^{\frac{21}{2}} + 66t^{10} - 6t^{\frac{1}{2}} - 8$

32. $g'(x) = \frac{11}{4}x^{\frac{9}{2}} + 5x^4 - \frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}} - 12x$

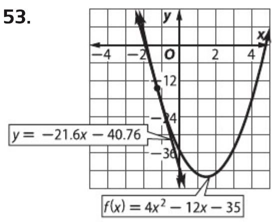
51.



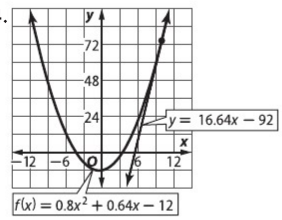
52.



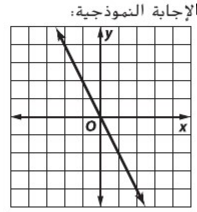
53.



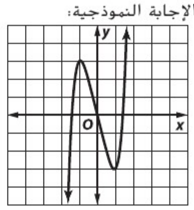
54.



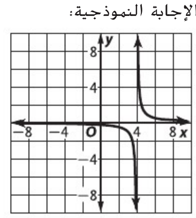
.56 الإجابة النموذجية:



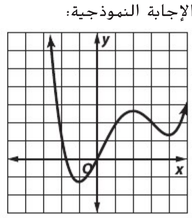
.57 الإجابة النموذجية:



.58 الإجابة النموذجية:



.59 الإجابة النموذجية:



60a.

[0, 300] scl: 30 by [0, 100] scl: 10

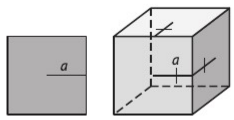
$p(t) \approx -0.0045t^2 + 1.2946t + 5.5159$

.60b $p'(t) \approx -0.009t + 1.2946$؛ يمكن تحقيق أعلى درجة 98.63% بعد 144 دقيقة.

.60c الإجابة النموذجية: المذاكرة لأكثر من ثلاث ساعات ليلاً في الليلة التي تسبق الاختبار تعني أن هدى لن تنام لمدة كافية.

.61b الإجابة النموذجية: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي نفسها صيغة محيط الدائرة. ومشتقة صيغة حجم الكرة هي نفسها صيغة مساحة سطح الكرة.

61c.



.61e الإجابة النموذجية: عند كتابة مساحة المربع باستخدام العامد (العمود المتوسط)، فستكون المشتقة هي صيغة محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب باستخدام أعمدة وجوه المكعب، فستكون المشتقة هي صيغة مساحة سطح المكعب.

.62 هنا؛ الإجابة النموذجية: هنا وجدت أن $f'(x) = 12x + 4$ ثم قامت بتربيع هذه النتيجة. وقامت هيام بتربيع الدالة الأصلية، ثم حسبت المشتقة.

.64 الإجابة النموذجية:

$$[f(x) - g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

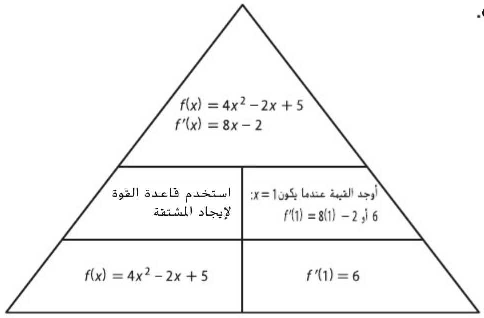
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)\right] + \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h \to 0} g(x+h)\right] + f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

.65 صحيح؛ الإجابة النموذجية: أس $f(x)$ يساوي $5n + 3$. وبحسب قانون الأس، فسيكون هذا معامل المشتقة. وسيكون أس المشتقة أقل من الأس الأصلي بواحد. وحينئذٍ سيكون $(5n + 3) - 1$ أو $5n + 2$.

.66



.67 الإجابة النموذجية:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - [g(x+h) - g(x)]f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

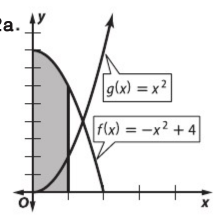
$$= \frac{g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)\lim_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

.68 الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها. لأن مشتقة أي ثابت تساوي 0، وأي زوج من الدوال التي تختلف في الإزاحة الرأسية فقط، سيكون له المشتقة نفسها. على سبيل المثال، $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$ لهما المشتقة نفسها وهي $2x$.

الدرس 11-5

42a.



42b. $\int_0^1 (-x^2 + 4)\,dx = 3.67$ أو $3\frac{2}{3}$; $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

.42c الإجابة النموذجية: إذا كنا نريد إيجاد المساحة بين المنحنيين وبدأنا من $\int_0^1 (-x^2 + 4)\,dx$، فسيكون لدينا المساحة كاملة بين $f(x)$ والمحور x. ولا نريد إضافة المساحة أسفل $g(x)$. ومن ثم، يمكننا طرح المساحة الناتجة عن $\int_0^1 x^2\,dx$ من $\int_0^1 (-x^2 + 4)\,dx$; $3\frac{1}{3}$ أو 3.33.

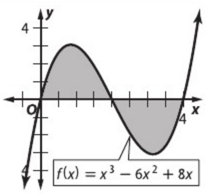
.42d $-2x^2 + 4$; $3\frac{1}{3}$ أو 3.33

.42e عند حساب المساحة بين منحنيين ناشئين عن دالتين، إما أن نقوم بإيجاد المساحة أسفل كل منحنى ونطرح واحدًا من الأخرى، أو يمكننا إيجاد الفارق بين الدالتين، ثم نحسب تكامل الدالة المتبقية.

.43 ليس أيًا منهما؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت الدالة تتزايد، فإن استخدام نقاط النهاية اليمنى سيجعل مساحة المستطيلات أكبر من المساحة الفعلية، بينما يجعل استخدام نقاط النهاية اليسرى مساحة المستطيلات أصغر. ولكن، إذا كانت الدالة تتناقص، فإن استخدام نقاط النهاية اليسرى سيجعل مساحة المستطيلات أكبر من المساحة الفعلية، بينما يجعل استخدام نقاط النهاية اليمنى مساحة المستطيلات أصغر.

الدرس 11-6

45a.



.45c المساحتان متكافئتان، لكن القيمة تكامل $f(x)$ التي تطابق المساحة أعلى المحور x موجبة، وقيمة تكامل $f(x)$ التي تطابق المساحة أسفل المحور x سالبة.

.45e المساحة حاملة العلامة هي الفارق بين القيم المطلقة للمساحات الموجودة أعلى وأسفل المحور x. إجمالي المساحة هي مجموع القيم المطلقة للمساحات الموجودة أعلى وأسفل المحور x.

.50

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$

$$nx + mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$

$$(nb + mb) - (na + ma) = (nb - na) + (mb - ma)$$

$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

.53 الإجابة النموذجية:

1) حدد القاعدة التي تنطبق على إيجاد عكس مشتقة الدالة: $2x^3 + C$.
 a) قانون الأس.
 b) قانون مضاعف الثابت في الأس (ينطبق هنا).
 c) قاعدة المجموع والفرق.
2) حذف/تجاهل الثابت C بما أن هذا تكامل محدد.
3) أوجد قيمة عكس المشتقة عند النهايتين العليا والسفلى وأوجد الفارق بينهما.
$2x^3\Big|_0^2 = 2(2)^3 - 2(0)^3 = 16 - 0 = 16$
4) المساحة تحت التمثيل البياني للفترة $[0, 2]$ تساوي 61 وحدة مربعة.